MÓDULOS PLANOS

NEUZA KAZUKO KAKUTA

ORIENTADOR

PROF. DR. HU SHENG

Dissertação apresentada ao Intituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtensão do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com auxílio financeiro da Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior (CAPES)

Abril de 1978

A meus pais

Agradeço:

Ao Prof. Dr. Hu Sheng pela proposta do presente trabalho, por sua atenção e disponibilidade, e segura orientação na elaboração do mesmo.

Aos meus amigos e professores por seus estímulos e ensinamentos.

A CAPES, que, com seu apoio financeiro, possibilitou a realização deste trabalho.

MÓDULOS PLANOS

Notações e Considerações. i

Introdução 1

CAPÍTULO 0 Resumo de alguns conceitos e resultados

§ 1 . Homomorfismos e produtos tensoriais 2

§ 2. Módulos projetivos e módulos de apresentação finita 6

CAPÍTULO I Módulos planos

§ 1. Definição e propriedades. 12

§ 2. Localização de módulos planos. 14

§ 3. Produto tensorial de módulos planos. 16

CAPÍTULO II Módulos planos e limite direto

§ 1. Limite direto 18

§ 2. Teorema de Lazard 36

§ 3. Restrição e extensão de escalares 43

§ 4. Relações 45

CAPÍTULO III Módulos planos e módulos injetivos

§ 1. Módulos injetivos 50

§ 2. Módulos caráter e teorema de Lambek 53

CAPÍTULO IV Caracterização homológica de módulos planos

§ 1. Funtor tor 64

§ 2. módulos planos e funtor tor. 71

bibliografia 75

CONSIDERAÇÕES

No trabalho A é um anel comutativo com identidade: 1_A e os A-módulos são chamados de unitários.

Consideramos os homomorfismos de anéis $f: A \longrightarrow B$ tal que $f(1_A) = 1_B$, seguindo as terminologias usadas por [1,8]

NOTAÇÕES

mod. : módulo

hom. : homomorfismo

I_E: Aplicação identidade : $E \longrightarrow E$

Ker u: kernel do homomorfismo u

Coker u : Co-kernel do homomorfismo u

f.g. : finitamente gerado

f.a. : finitamente apresentado

see: se e somente se

diag. com. : diagrama comutativo

inj. : injeção

sobre: sobrejeção

s.m. : sistema multiplicativo

$\langle E \rangle$: gerado por E

(α, β) ou $E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G$: sequência de A-mod. e homomorfismos

$f|_E$: restrição da aplicação f sobre E

annl : anulador

$\bigoplus_{i \in I} E_i$: soma direta de A-mod.

t.q. : tal que.

I N T R O D U Ç Ã O

O objetivo deste trabalho é abordar os vários aspectos de um módulo plano.

Na parte inicial deste, fazemos uma explanação de conceitos e proposições básicas.

No capítulo I definimos e exemplificamos "módulos planos".

No capítulo II discorremos sobre "limite direto" expondo um teorema devido a Daniel Lazard [6] : Todo módulo plano é o limite direto de módulos livres finitamente gerados. Utilizando este resultado relacionamos módulos planos com equações lineares.

No capítulo III apresentamos um estudo feito por Lambek [5] , que caracteriza módulos planos por módulos caráter.

No capítulo IV damos uma aplicação de funtor "tor" sobre os módulos planos.

Assim procuramos estruturar módulos planos sob várias formas: propriedades específicas, localização, equivalências com módulos injetivos e módulos projetivos sob certas condições e a relação com funtores: $\otimes$, hom., tor.

Com o presente trabalho esperamos contribuir para melhor compreensão de módulos planos e servir de estímulo para posteriores pesquisas.

CAPÍTULO O

RESUMO DE ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS BÁSICOS

Apresentaremos neste capítulo algumas definições e proposições fundamentais, cujas demonstrações são encontradas segundo as referências indicadas.

§ 1. HOMOMORFISMOS E PRODUTOS TENSORIAIS

Definição: Seja A: anel, uma sequência de A-mod. e homomorfismos: $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é dita exata see Ker f = Im g.

Conluimos da definição acima:

$0 \to M' \xrightarrow{f} M$ é exata see f é injetivo.

$M' \xrightarrow{g} M \to 0$ é exata see g é sobrejetivo.

$0 \to M' \to M \to 0$ é exata see $M' \cong M$.

$0 \to M \to 0$ é exata see $M \cong 0$.

Se N: submod. de M então: $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ é exata.

O lema que enunciaremos a seguir é bastante útil para as demostrações de proposições.

Proposição O-1.1. (5-Lema)

Seja o diagrama comutativo de A-módulos e homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & M_4 & \to & M_5 \\
a\downarrow & & b\downarrow & & c\downarrow & & d\downarrow & & e\downarrow \\
N_1 & \to & N_2 & \to & N_3 & \to & N_4 & \to & N_5
\end{array}$$

(i) Se a é sobre; b, d: inj., então c: inj.

(ii) Se e: inj.; b, d: sobre, então c: sobre.

(iii) Se $\underline{a}$:sobre; $\underline{e}$: inj.; $\underline{b}$, $\underline{d}$: bij. então $\underline{c}$: bij. [7]

Proposição: 0-1.2. (Lema Snake)

Consideremos o diagrama comutativo de A-mod. e hom.

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & & \end{array}$$

onde as linhas são exatas. Então:

Ker a $\longrightarrow$ Ker b $\longrightarrow$ Ker c $\longrightarrow$ Coker a $\longrightarrow$ Coker b $\longrightarrow$ Coker c é exata. [1]

Definição: $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ exata é dita split se $f(E)$ é um fator direto de F ($F = f(E) \oplus C$, C : A-mod.)

Proposição: 0-1.3. Se $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ é exata, então são equivalentes as afirmações:

(i) $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ é split.

(ii) Existe f_1: $F \longrightarrow E$ tal que $f_1 \circ f = I_E$

(iii) Existe g_1: $G \longrightarrow F$ tal que $g \circ g_1 = I_G$

Proposição 0-1.4. Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$ exata, então:

(i) $0 \longrightarrow \hom(M'',N) \xrightarrow{v^*} \hom(M,N) \xrightarrow{u^*} \hom(M',N)$ é exata, para todo N:A-mod. onde $\overset{*}{v}(f) = v \circ f$ para todo $f \in \hom(M'',N)$ e $\overset{*}{u}(g) = u \circ g$ para todo $g \in \hom(M,N)$.

(ii) $0 \longrightarrow \hom(N,M') \xrightarrow{u_*} \hom(N,M) \xrightarrow{v_*} \hom(N,M'')$ é exata para todo N: A-mod., onde $v_*(f) = f \circ v$ para todo $f \in \hom(N,M)$ e $u_*(g) = g \circ u$ para todo $g \in \hom(N,M')$ ou seja:

hom(_,N) , hom(N,-) são exatas à esquerda [1]

Mais adiante estudaremos os A-mod. que tornam hom(-,N) e hom(N,-) exatas à direita.

<u>Proposição</u> 0-1.5. Se $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ é exata tal que E e G são f.g., então F é f.g. [2]

<u>Proposição</u> 0-1.6. Sejam M, N, P : A-mod. Então:

(i) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P) \cong M \otimes N \otimes P$

(ii) $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

(iii) $A \otimes M \cong M$

(iv) $\hom(A,M) \cong M$

(v) $\hom(M, \bigoplus_{i=1}^{n} N_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(M,N_i)$ [2]

<u>Observação:</u> $\hom(M,A) \ncong M$, $M = \hom(M,A)$ é dito <u>dual de</u> M.

<u>Proposição</u> 0-1.7. Se $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ é exata, então:
$E \otimes M' \xrightarrow{I_E \otimes u} E \otimes M \xrightarrow{I_E \otimes v} E \otimes M'' \longrightarrow 0$ é exata, onde $I_E \otimes u(x \otimes y) = x \otimes u(y)$, $x \in E$, $y \in M'$. Analogamente define-se $I_E \otimes v$.. ou seja: $E \otimes -$ é exata à direita. [1] .

Para E : A-mod. que tornam $E \otimes -$ exata à esquerda são ditos <u>Módulos planos</u>

<u>Definição:</u> Sejam $f: A \longrightarrow B$: hom. de anéis e N : B-mod. N tem a estrutura de A-mod. definido por $ax = f(a)x$, $a \in A$ e $x \in N$. Então N : A-mod. é dito obtido por <u>restrição de escalares</u>.

<u>Definição:</u> Seja M: A-mod. $M \otimes_A B$ é um A-mod. que tem estrutura de B-mod. definido por $b(b' \otimes x) = bb' \otimes x$; $b, b' \in B$ e $x \in M$

$M \otimes_A B$: B-mod. é dito obtido de M por <u>extensão de escalares</u>.

<u>Proposição</u> 0-1.8. Sejam A, B anéis , M: A-mod., P: B-mod. e N: (A, B)-bimod. Então:

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

Proposição 0-1.9.(teorema do isomorfismo adjunto)

Sejam A, B: anéis , P:B-mod., N:A-mod. e M:(A,B)-mod

Então : $\hom_B(M \otimes_A N, P) \cong \hom_A(N, \hom_B(M,P))$ [8]

-oOo-

§ 2. MÓDULOS PROJETIVOS E MÓDULOS DE APRESENTAÇÃO FINITA

Definição Sejam X : conjunto, $U = \{u_x \mid x \in X\}$ e $Au_x = \{au_x \mid a \in A\}$: um A-mod. cíclico.

$F_A(X) = \bigoplus_{x \in X} Au_x = \{\sum a_x u_x \mid a_x \in A$ e $a_x = 0$ para quase todo $x \in X\}$ é dito A-mod. livre (notação : $A^{(X)}$) e U é dito uma base de $F_A(X)$.

Proposição 0-2.1. Todo M:A-mod. é isomorfo à um quociente de um A-mod. livre.

Demonstração : Definamos $f: F_A(M) \longrightarrow M$ por $f(\sum_{m \in M} a_m u_m) = \sum_{m \in M} a_m m$

Claramente f é sobre, daí :

$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow F_A(M) \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ é exata.

Então pelo teorema do isomorfismo de A-mod. temos :

$$M \cong F_A(M)/\operatorname{Ker} f.$$

Definição Sejam P, M, N : A-mod.e f, g :homomorfismos.

Dado o diagrama :

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \text{exata}$$

Dizemos que P:A-mod. é projetivo se $\exists$ homomorfismo $h: P \longrightarrow M$ tal que $f \circ h = g$.

Observação: Se P é projetivo então hom(P,-) é exata à direita

Proposição 0-2.2. Todo A-mod. livre é módulo projetivo.

Demonstração: Seja $F = \bigoplus_{\alpha} Au_{\alpha}$: um A-mod. livre.

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \text{exata.}$$

Como f é sobre, para cada α , $\exists\ x_\alpha \in M$ / $f(x_\alpha) = g(u_\alpha)$.

Definiremos $h:F \longrightarrow M$ por $h(\sum a_\alpha u_\alpha) = \sum a_\alpha x_\alpha$, onde $f(x_\alpha) = g(u_\alpha)$. Daí $f \circ h(\sum a_\alpha u_\alpha) = g(\sum a_\alpha u_\alpha)$.

Apresentaremos a seguir uma proposição que caracteriza módulos projetivos sob vários aspectos:

Proposição 0-2.3. Seja P:A-mod. Então são equivalentes as afirmações:

(1) P:A-mod. projetivo.

(2) Para todo M:A-mod, tal que $M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$ é exata, existe $h: P \rightarrow M$ tal que $f \circ h = I_P$.

(3) Toda sequência : $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$ é split.

(4) Existe F:A-mod. livre tal que:

$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$ é exata e split.

(5) $\exists\ \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset P$ e $\exists\ \{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset P^* = \hom(P,A)$ tal que, para todo $x \in P$, $x = \sum f_\alpha(x)\, x_\alpha$ (chamamos $(\{x_\alpha\}, \{f_\alpha\})_{\alpha \in I}$ um sistema coordenado projetivo de P) [4]

Proposição 0-2.4. (Lema de Schnuel)

Dado o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \quad \text{exata} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \quad \text{exata} \end{array}$$

onde P_1 e P_2 : A-mod. projetivos , $M_1 \cong M_2$.

Então $K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1$ (4)

<u>Definição</u> $L_1 \longrightarrow L_o \longrightarrow E \longrightarrow 0$: sequência exata é dita <u>apresentação</u> de E (apresentação finita, abreviadamente E é f.a.) see L_1 e L_o são A-mod. livres (A-mod. livres f.g.).

<u>Proposição</u> 0-2.5. Todo A-mod. admite uma apresentação.

<u>Demonstração</u>:

E:A-mod., então pela prop. 0-2.1. $E \cong L_o / F_o$, L_o : A-mod. livre.

Sejam $u: L_o \longrightarrow E$: hom. natural e $F_o = \operatorname{Ker} u$.

Pelo mesmo argumento $F_o \cong L_1 / F_1$, L_1 : A-mod. livre.

Obtemos assim :

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "p"] & & L_o \arrow[r, "u"] & E \arrow[r] & 0 \\
& F_o \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

onde $v = i \circ p$.

Assim, $L_1 \xrightarrow{v} L_o \xrightarrow{u} E \longrightarrow 0$ é uma apresentação de E.

<u>Proposição</u> 0-2.6.

(i) Se E é f.a. então E é f.g.

(ii) se E:A-mod. projetivo f.g., então E é f.a.

<u>Demonstração</u>:

(i) Por hipótese $\exists$ $L_1 \xrightarrow{v} L_o \xrightarrow{u} E \longrightarrow 0$ exata, onde L_1 e L_o são A-mod. livres f.g.

Como u é sobre., temos que E é f.g.

(ii) E:A-mod. projetivo, então pela prop. 0-2.3. $\exists$ L_o:A-mod. livre f.g. tal que $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \pi \longrightarrow L_o \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$ é split, ou seja $\exists$ $v : E \longrightarrow L_o$ tal que $L_o \cong \text{Ker}\,\tilde{\pi} \oplus v(E)$.

Como L_o e $v(E)$ são f.g. então $\text{Ker}\,\tilde{\pi}$ é f.g.

Daí pela prop. 0-2.1., $\text{Ker}\,\tilde{\pi} \cong L_1 / F_1$, L_1 : A-mod. livre f.g.

Logo: $L_1 \longrightarrow L_o \longrightarrow E \longrightarrow 0$ é uma apresentação finita de E.

Exemplo:

Um A-mod. f.g. , não é necessàriamente f.a.

Sejam: $A = F[x_1, x_2, \ldots]$: anel polinomial com infinitas variedades, F: corpo; $I = (x_1, x_2, \ldots)$ ideal de A e A/I: A-mod. cíclico.

Assim A/I é A-mod. f.g., mas A/I não é f.a. (pela prop. 0-2.4.)

Proposição 0-2.7. Seja E: A-mod. f.a.

Dado $0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} E \longrightarrow 0$ exata tal que G é f.g., então F é f.g.

Demonstração :

E é f.a., então $\exists$ $L_1 \xrightarrow{r} L_o \xrightarrow{s} E \longrightarrow 0$ exata tal que L_1, L_o : A-mod. livres f.g.

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & L_o & & \\ & & \downarrow s & & \\ G & \xrightarrow{p} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

L_o : A-mod. livre, então pela prop. 0-2.2. L_o é A-mod. projetivo. Daí $\exists$ $u : L_o \longrightarrow G$ tal que $p \circ u = s$.

Mostremos que $u \circ r\,(L_1) \subset \text{Ker}\; p$.

$x \in u \circ r\,(L_1)$, então $\exists\, \ell_1 \in L_1$ tal que $x = u \circ r\,(\ell_1)$.

Daí $p(x) = p \circ u \circ r\,(\ell_1) = s \circ r\,(\ell_1) = 0$

Como $F \cong \operatorname{Im} j = \operatorname{Ker} p$ temos:

$$\begin{array}{ccccc} & & L_1 & & \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle uor} & & \\ F & \xrightarrow{\cong} & \ker p & \longrightarrow & 0 \quad \text{exata} \end{array}$$

Sendo L_1 : A-mod. livre, pelo mesmo argumento anterior $\exists \quad v: L_1 \longrightarrow F$.

Obtemos assim:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & L_1 & \longrightarrow & L_o & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \qquad \text{exata} \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle v} & & \big\downarrow{\scriptstyle u} & & \big\downarrow{\scriptstyle I_E} & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{j} & G & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \qquad \text{exata.} \end{array}$$

Pela Prop. 0-1.2. ,

$0 = \operatorname{Ker} I_E \longrightarrow \operatorname{Coker} v \longrightarrow \operatorname{Coker} u \longrightarrow \operatorname{Coker} I_E = 0$ é exata.

Daí $\operatorname{Coker} v \cong \operatorname{Coker} u = G \,/\, u(L_o)$, com G f.g. por hipótese.

Assim Coker v é f.g. Como:

$0 \longrightarrow v(L_1) \longrightarrow F \longrightarrow \operatorname{Coker} v \longrightarrow 0$ exata, com $v(L_1)$ e Coker v f.g.

Portanto, pela Prop. 0-1.5. F é f.g.

<u>Proposicão</u> 0-2.8. E é f.a. see $\exists\; 0 \longrightarrow S \longrightarrow L_o \longrightarrow E \longrightarrow 0$ exata, onde S:A-mod. f.g. e L_o:A-mod. livre f.g.

<u>Demonstração</u>:

($\Rightarrow$) E é f.a. , então $\exists\; L_1 \xrightarrow{u} L_o \xrightarrow{v} E \longrightarrow 0$ exata, onde

L_1 e L_o: A-mod. livres f.g.

Seja $S = \text{Ker } v$.

Logo: $0 \longrightarrow S \longrightarrow L_o \longrightarrow E \xrightarrow{v} 0$ exata com L_o: A-mod. livre f.g.

Pela prop. 0-2.7. S é f.g.

($\Leftarrow$) Como S é A-mod. f.g., pela prop. 0-2.1. $S \cong L_1 / R_1$, L_1: A-mod. livre f.g.

Daí existe :

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & L_o \arrow[r, "v"] & E \arrow[r] & 0 \\ & S \arrow[ur, "i"'] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

onde p: hom. natural e $u = i \circ p$.

-oOo-

CAPÍTULO I

MÓDULOS PLANOS

§1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Definição: E : A-mod. é dito PLANO see para toda sequência : $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ exata, então $0 \longrightarrow E \otimes_A M' \longrightarrow E \otimes_A M$ é exata.

Assim, se M' identifica com um sub-mod. de M, então $E \otimes M'$ identifica com um sub-mod. de $E \otimes M$ see E é plano. Desta maneira, E é plano see para todo $i: M' \longrightarrow M$: inclusão, M' : Sub-mod. de M, implicar que $0 \longrightarrow E \otimes M' \xrightarrow{I_E \otimes i} E \otimes M$ é exata.

Proposição I-1.1. Se para todo $i: M_o \longrightarrow M$: inclusão, M_o : sub-mod. f.g. de M, implicar que $I_E \otimes i : E \otimes M_o \longrightarrow E \otimes M$ é injetiva, então E é plano.

Demonstração:

Seja $f: M' \longrightarrow M$: inclusão, M' : sub-mod. de M.

Mostremos que $I_E \otimes f$ é injetiva.

Se $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in \operatorname{Ker}(I_E \otimes f)$, onde $x_i \in E$, $y_i \in M'$, então:

$$I_E \otimes f \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0 \text{ em } E \otimes M.$$

Tomemos $M_o = \langle y_i \rangle_{i=1}^{n}$: sub-mod. f.g. de M'.

Seja $i: M_o \longrightarrow M'$: inclusão.

Daí $f \circ i : M_o \longrightarrow M$: inclusão, com M_o : sub-mod. f.g. de M, e por hipótese $I_E \otimes (f \circ i)$ é injetiva.

como $I_E \otimes (f \circ i) \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $E \otimes M$

Segue que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $E \otimes M_o$.

Concluimos então $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $E \otimes M'$ ou seja

$I_E \otimes f$ é injetiva.

Observação: Isomorfismos preservados por módulos planos.

Se E: A-mod. plano e $u: M \longrightarrow N$: hom. de A-mod. então:

(1) $\operatorname{Ker}(I_E \otimes u) \cong E \otimes \operatorname{Ker} u$.

(2) $\operatorname{Im}(I_E \otimes u) \cong E \otimes \operatorname{Im} u$.

(3) $E \otimes (F/G) \cong (E \otimes F)/(E \otimes G)$.

(4) $E \otimes (F \cap G) \cong (E \otimes F) \cap (E \otimes G)$.

Proposição I-1.2. Seja $(E_i)_{i \in I}$: família de A-mod., então :

$\bigoplus_{i \in I} E_i$ é plano see E_i é plano para todo $i \in I$.

Demonstração:

Seja $M' \longrightarrow M$: hom. injetor.

$E_i \otimes M' \longrightarrow E_i \otimes M$ é inj. para todo $i \in I$ see $\bigoplus_{i \in I} (E_i \otimes M') \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (E_i \otimes M)$

é injetivo see $(\bigoplus_{i \in I} E_i) \otimes M' \longrightarrow (\bigoplus_{i \in I} E_i) \otimes M$ é injetivo.

Veremos agora exemplos clássicos de módulos planos:

(1) Z_2 não é um Z-mod. plano(no caso mais geral, todo grupo torsão não é Z-mod. plano) pois $Z_2 \otimes Z \longrightarrow Z_2 \otimes Q$ não é injetivo devido ao fato de $Z_2 \otimes Z \cong Z_2$ e $Z_2 \otimes Q = 0 (1 \otimes \frac{a}{b} = 2 \otimes \frac{a}{2b} = 0 \otimes \frac{a}{2b} = 0)$

(2) Todo anel A é A-mod. plano (por $M \otimes_A A \cong M$ para todo M.: A-mod. M e por definição de módulo plano)

(3) Todo $A^{(I)}$: A-mod. livre é plano.
(por (1) e pela Prop. I-1.2.)

(4) Todo M:A-mod. projetivo é plano.
(Prop.0-2.3., Prop. I-1.2. e por (2))

(5) Q é Z-mod. plano, mas Q não é Z-mod. projetivo(CAP.III-Ex.3)
Visando um estudo sbre o comportamento de módulos planos, apresentaremos os seguintes tópicos.

§ 2. LOCALIZAÇÃO DE MÓDULOS PLANOS

Sejam A:anel comutativo com 1_A e S um s.m. de A.

Definição: O <u>anel de frações de A por S</u> é o conjunto :
$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \right.$ tal que $a \in A$, $\left. s \in S \right\}$ com as operações $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$.
$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ onde $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ se e somente se existe $s' \in S$ tal que $s'(at-bs) = 0$, $a, b \in A$; $s, t \in S$
$(S^{-1}A, +, .)$ é um anel comutativo com identidade. [2]

Se A é domínio e $S = A - \{0\}$, então $S^{-1}A = qf(A)$: <u>corpo de frações de A.</u> Se M é A-mod. define-se analogamente $S^{-1}M$: <u>módulo de Frações de A.</u>

<u>Lema I-2.1.</u> Sejam M, N:A-mod. Então:

(i) $S^{-1}M$ é $S^{-1}A$-mod. e é A-mod.

(ii) se $u: M \longrightarrow N$: hom. de A-mod. então $\bar{u}: S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$ definido por $\bar{u}(\frac{m}{s}) = \frac{u(m)}{s}$ é um homomorfismo de $S^{-1}A$-mod.

(iii) $M \otimes S^{-1}A \cong S^{-1}M$. [1]

(iv) $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_A N)$

Lema I-2.2. Se $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ é exata, então:
$0 \longrightarrow S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M$ é exata.

Demonstração:

Se $\frac{m}{s} \in \operatorname{Ker} \bar{u}$, temos $\bar{u}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{u(m)}{s} = 0$

Logo $\exists\, t \in S$ tal que $t.u(m) = 0$, então $u(tm) = 0$

Sendo u: injetiva, $tm = 0$ ou seja $\frac{m}{s} = 0$

Proposição I-2.3. $S^{-1}A$: anel de frações é A-mod. plano.

Demonstração:

Se $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ é exata, então pelo lema I-2.2. :
$0 \longrightarrow S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M$ é exata.

Agora pelo lema I-2.1. concluimos:
$0 \longrightarrow S^{-1}A \otimes M' \longrightarrow S^{-1}A \otimes M.$ é exata.

Logo $S^{-1}A$ é A-mod plano.

Se P é um ideal primo de A, então $S = A - P$ é um s.m.

Se M é um A-mod. notamos $S^{-1}M = M_P$, então $M \otimes S^{-1}A \cong M \otimes A_P \cong S^{-1}M = M_P$.

Proposição I-2.4. Seja ϕ um homomorfismo de A-mod. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) ϕ é injetivo.

(ii) $\phi_P : M_P \longrightarrow N_P$ é injetivo para todo ideal primo P.

(iii) $\phi_m : M_m \longrightarrow N_m$ é injetivo para todo ideal maximal m. [1]

§ 3. PRODUTO TENSORIAL DE MÓDULOS PLANOS

Proposição I-3.1. Sejam A, B: anéis, E: A-mod. plano, F: (A, B)-bimod. tal que F é B-mod. plano. Então $E \otimes_A F$ é B-mod. plano.

Demonstração:

Seja $G \longrightarrow G'$: hom. injetor de B-mod.

Como F é B-mod. plano, temos: $F \otimes_B G \longrightarrow F \otimes_B G'$ é hom. injetor de A-mod. Mas E: A-mod. é plano, então:

$E \otimes_A (F \otimes_B G') \longrightarrow E \otimes_A (F \otimes_B G)$ é injetiva. Ainda pela prop. 0-18 $(E \otimes_A F) \otimes_B G' \longrightarrow (E \otimes_A F) \otimes_B G$ é injetiva ou seja $E \otimes_A F$: B-mod. é plano.

Corolário I-3.2. Se E, F : A-mod. planos, então $E \otimes_A F$ é plano.

Corolário I-3.3. Seja $f: A \longrightarrow B$: hom. de anéis. Se E: A-mod. plano, então $E \otimes_A B$: B-mod. plano.

Demonstração: B é B-mod. plano e B é A-mod. definido pela estrutura $ab = f(a)b$. Então pela prop. I-3.1. $E \otimes_A B$: b-mod. é plano.

Corolário I-3.4. Sejam $f: A \longrightarrow B$: hom. de anéis e E: B-mod. plano. Se B é A-mod. plano, então E: A-mod. plano.

Demonstração: Como E : B-mod. é plano e B é (B, A)-bimod. tal que B é A-mod. plano, então pela prop. I-3.1. $E \otimes_B B \cong E$ é plano.

Afirmamos que plano é uma propriedade local ou seja:

<u>Proposição</u>I-3.5. Para todo M: A-mod. as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) M é A-mod. plano.

(ii) M_P é A_P-mod. plano para todo ideal primo P de A.

(iii) M_m é A_m-mod. plano para todo ideal maximal $\underline{m}$ de A.

<u>Demonstração</u>:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Como $f: A \longrightarrow A_P$ definida por $f(a) = \frac{a}{1}$ é um hom. de anéis, pelo cor.I-3.3. $M \otimes_A A_P \cong M_P$ é A_P-mod. plano.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) é óbvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $N \longrightarrow P$:hom. injetor de A-mod.

Pelo lema I-2.2. $N_m \longrightarrow P_m$ é injetivo para todo ideal maximal $\underline{m}$

Como M_m é A_m-mod. plano, $N_m \otimes_{A_m} M_m \longrightarrow P_m \otimes_{A_m} M_m$ é injetivo . Agora pelo lema I-2.1.

$(N \otimes_A M)_m \longrightarrow (P \otimes_A M)_m$ é injetivo para todo $\underline{m}$

Logo $N \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A M$ é injetivo pela prop. I-2.4.

-o0o-

CAPÍTULO II

MÓDULOS PLANOS E LIMITE DIRETO

Nossa meta neste capítulo é expor um estudo feito por Daniel Lazard [6], que fornece um critério para que um A-mod. seja plano.

§ 1. LIMITE DIRETO.

Definição: $(I, \leqslant)$: conjunto parcialmente ordenado é dito conjunto direto se para todo $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k$ e $j \leqslant k$.

Definição: Sejam A:anel e $(E_i)_{i \in I}$: família de A-mod., se para todo $i \leqslant j \in I$, existe $f_{ij}: E_i \longrightarrow E_j$: homomorfismos que satisfazem:

(i) $f_{ii} = I_{E_i}$ para todo $i \in I$.

(ii) $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ para $\forall$ k, $i \leqslant j \leqslant k$.

Então (E_i, f_{ij}) é dito sistema direto de A-mod. sobre o conjunto I.

Exemplo: Sejam A: domínio de integridade, K: seu corpo de frações e $(kA)_{k \in K}$: família de A-módulos cíclicos. Definamos $k_1A \leqslant k_2A$ see existe $a \in A$ tal que $k_1 = k_2a$.

Se $k_1 = \frac{a}{b}$ e $k_2 = \frac{c}{d}$ onde $a, b, c, d \in A$ e $a \neq 0$, $d \neq 0$. Seja $k_3 = \frac{1}{bd}$; claramente $k_1A \leqslant k_3A$ e $k_2A \leqslant k_3A$. Daí $(K, \leqslant)$ é um conjunto direto.

<u>Definição</u>: Sejam E:A-mod. e $f_i : E_i \longrightarrow E$: homomorfismos tal que $f_i = f_j \circ f_{ij}$ para todo $i, j \in I$, $i \leqslant j$.

Então (E, f_i) é dito <u>limite</u> <u>direto</u> do sistema direto de (E_i, f_{ij}), se para todo X:A-mod. e $h_i : E_i \longrightarrow X$:hom.,t.q. $h_i = h_j \circ f_{ij}$ $\forall i \in I$, $i \leqslant j$, existe único $\alpha : E \longrightarrow X$ t.q. $h_i = \alpha \circ f_i$, $\forall i \in I$.

<u>Notação</u>: $(E, f_i) = \varinjlim E_i$

<u>Proposição</u> II-1.1. Seja (E_i, f_{ij}) um sistema direto.

Se (M, α_i) e (P, β_i) são limites direto de (E_i, f_{ij}), então $M \cong P$.

<u>Demonstração</u>:

Como (M, α_i) é um limite direto de (E_i, f_{ij}), então $\exists\, !\ \phi : M \longrightarrow P$ tal que $\beta_i = \phi \circ \alpha_i$, $\forall i \in I$

Analogamente $\exists\, !\ \psi : P \longrightarrow M$ tal que $\alpha_i = \psi \circ \beta_i$

Então $\alpha_i = \psi \circ \phi \circ \alpha_i$ e $\beta_i = \phi \circ \psi \circ \beta_i$

Obtemos assim:

$$
\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\beta_i"] \arrow[ddr, "\alpha_i"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\
 & P \arrow[d, "\psi"] \\
 & M
\end{tikzcd}
$$

Agora, por definição de limite direto, $\exists\, !\ I_M$: hom. identidade sobre M tal que $\alpha_i = I_M \circ \alpha_i$

Logo $\psi \circ \phi = I_M$ pois $\alpha_i = \psi \circ \phi \circ \alpha_i, \forall i \in I$.

Analogamente $\phi \circ \psi = I_P$. daí $M \cong P$.

<u>Lema</u> II-1.2. Sejam (E_i, f_{ij}) um sistema direto, $C = \bigoplus_{i\in I} E_i$, D: sub-mod. de C gerado por elementos da forma : $x_i - f_{ij}(x_i)$ com $x_i \in E_i$, $i \leq j$ para todo $i \in I$, $f: C \longrightarrow C/D$: sobrejeção canônica, $f_i : E_i \longrightarrow C/D$ tal que $f_i = f|_{E_i}$. Então:

(i) Todo elemnto de C/D pode ser escrito na forma $f_i(x_i)$ para algum $i \in I$ e $x_i \in E_i$.

(ii) Se $f_i(x_i) = 0$, então $\exists$ $t \in I$ tal que $f_{it}(x_i) = 0$ em E_t.

<u>Demonstração</u>:

(i) Primeiramente mostremos que $f_i = f_j \circ f_{ij}$.

$f_i(x_i) = x_i + D = x_i + f_{ij}(x_i) - x_i + D = f_{ij}(x_i) + D = f_j(f_{ij}(x_i))$
$= f_j \circ f_{ij}(x_i)$

Para todo x + D C/D, temos $x \in \bigoplus_{i\in I} E_i$

Então $x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}$, $x_{i_j} \in E_{i_j}$

Basta mostrar o caso para k = 1,2 e concluir a veracidade de (i) por indução sobre k.

(1) se k = 1, então $x = x_{i_1}$

$x + D = x_{i_1} + D = f(x_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1})$

(2) Se $k = 2$, então $x = x_i + x_j$

$$x + D = x_i + x_j + D = f(x_i + x_j) = f(x_i) + f(x_j).$$

Como $x_i + f_{ij}(x_i) \in D$, temos $f(x_i + f_{ij}(x_i)) = \bar{0}$

Logo $x + D = f_i(x_i) + f_j(x_j) - f(x_i - f_{ij}(x_i)) = f_j(x_j - f_{ij}(x_i))$

(3) Se $f_i(x_i) = x_i + D = \bar{0}$, temos $x_i \in D$.

$$\text{Então } x_i = \sum_{j,\ell}^{\text{finito}} (f_{j\ell}(x_j) - x_j)$$

Como esta soma é finita, $\exists\ t \geq i, t \geq j, t \geq \ell$, j e ℓ desta soma.

Logo: $f_{it}(x_i) = (f_{it}(x_i) - x_i) + x_i = (f_{it}(x_i) - x_i) +$

$$+ \sum_{j,\ell}^{\text{finito}} (f_{j\ell}(x_j) - x_j)$$

Mas os elementos desta soma pode ser escrito na forma:

$f_{j\ell}(x_j) - x_j = f_{jt}(x_j) - x_j - (f_{\ell t}\left[f_{j\ell}(x_j)\right] - \left[f_{j\ell}(x_j)\right])$, tendo o segundo índice t.

$$\text{Logo } f_{it}(x_i) = \sum_{k \leq t}^{\text{finito}} f_{kt}(x_k) - x_k \in E_t.$$

Como os elementos de $\bigoplus_{i \in I} E_i$ têm representação única, temos: $x_k = 0$ e $f_{kt}(x_k) = 0$ para $k \neq t$. Donde concluimos:

$f_{it}(x_i) = f_{tt}(x_t) - x_t = 0$

<u>Teorema</u> II-1.3. Dado (E_i, f_{ij}) : sistema direto. Então <u>existe</u> um limite direto deste sistema.

<u>Demonstração</u>: Com as mesmas notações do Lema anterior mostraremos que $(C/D, f_i)$ é um limite direto de (E_i, f_{ij})

Dado X:A-mod. e para cada i, seja $h_i : E_i \longrightarrow X$ um homomorfismo tal que $h_i = h_j \circ f_{ij}$ para $i \leqslant j$.

Como todo elemento de C/D é da forma: $f_i(x_i)$, para algum $i \in I$.(Lema II-1.2.)

Definamos $\alpha : C/D \longrightarrow X$ por $\alpha(f_i(x_i)) = h_i(x_i)$

Logo $\alpha \circ f_i = h_i$ para todo $i \in I$.

(1) Mostraremos que α é bem definida.

Se $f_i(x_i) = 0$, então pelo lema II-1.2., $\exists$ $j \geqslant i$ tal que $f_{ij}(x_i) = 0$.

Daí $\alpha(f_i(x_i)) = h_i(x_i) = h_j \circ f_{ij}(x_i) = h_j(0) = 0$

(2) Mostraremos que α é único.

Suponhamos $\beta : C/D \longrightarrow X$ tal que $\beta \circ f_i = h_i$

$\beta(f_i(x_i)) = \beta \circ f_i(x_i) = h_i(x_i) = \alpha \circ f_i(x_i) = \alpha(f_i(x_i))$, para todo $f_i(x_i) \in C/D$.

(3) α é homomorfismo.

$\alpha(f_i(x_i) + f_j(x_j)) = \alpha(f_j \circ f_{ij}(x_i) + f_j(x_j)) = \alpha \circ f_j(f_{ij}(x_i) + x_j)$

$= h_j(f_{ij}(x_i) + x_j) = h_j \circ f_{ij}(x_i) + h_j(x_j) = h_i(x_i) + h_j(x_j)$

$= \alpha(f_i(x_i)) + \alpha(f_j(x_j))$.

Logo $(C/D, f_i) = \varinjlim E_i$

<u>Corolário</u> II-1.4. Seja $(E_i)_{i\in I}$: família de sub-módulos de um E:A-mod., tal que para cada $i, j\in I, \exists\, k\in I$ tal que $E_i \subsetneq E_k$ e $E_j \subsetneq E_k$. Definamos $i \leqslant j$ se $E_i \subseteq E_j$ e $f_{ij}: E_i \longrightarrow E_j$, por $f_{ij}(x_i) = x_i$ para cada $i \leqslant j$. Então

$$\varinjlim E_i = \bigoplus_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} E_i.$$

<u>Demonstração</u>:

Como $f_{ij}(x_i) = x_i$ para todo $i, j, i \leqslant j$, temos : $D = \bar{0}$

Então pelo teorema acima , $\varinjlim E_i = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

Como I é um conjunto direto, temos $\bigoplus_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} E_i$

Logo $\varinjlim E_i = \bigoplus_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} E_i$.

<u>Corolário</u> II-1.5. Todo E:A-mod. é o limite direto de seus sub-módulos f.g.

<u>Demonstração</u>: Seja $\mathcal{F}$: $(E_i)_{i\in I}$: família de tosos sub-mod. f.g. de E. Então $E = \bigcup_{i\in I} E_i$

Definamos $i \leqslant j$ se $E_i \subsetneq E_j$.

I é um sistema direto , pois para todo $i, j\in I$, E_i e E_j são f.g. então $\langle E_i, E_j\rangle$ é f.g. e $\langle E_i, E_j\rangle \in \mathcal{F}$.

Seja $E_k = \langle E_i, E_j\rangle$ então $E_i \subseteq E_k$ e $E_j \subseteq E_k$.

Logo $\exists\, k\in I$ tal que $i\leqslant k$ e $j \leqslant k$.

Pelo corolário anterior $\varinjlim E_i = \bigcup_{i\in I} E_i$

Mas $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, daí: $\varinjlim E_i = E$.

<u>Exemplo</u> Anteriormente temos provado que $(K, \leqslant)$ é um conjunto direto, onde K é o corpo de frações de um domínio de integridade A.

Mostraremos que $\varinjlim_{k\in K} kA = K$, $(kA)_{k\in K}$: A-mod. cíclicos.

Se definirmos $f_{ij}: iA \longrightarrow jA$: inclusão, veremos que: (kA, f_{ij}) é um sistema direto.

Logo $\varinjlim_{k\in K} kA = K$ pelo corolário II-1.5.

<u>Definição</u>: Sejam (E_i, f_{ij}) e (F_i, g_{ij}): sistemas direto de A-mod. sobre o mesmo conjunto direto I e (E, f_i). (F, g_i): limites direto destes, respectivamente.

O homomorfismos $\Phi : (E, f_i) \longrightarrow (F, g_i)$ é uma família de homomorfismos de A-mod. $\phi_i : E_i \longrightarrow F_i$ tal que $\phi_j \circ f_{ij} = g_{ij} \circ \phi_i$ para $i \leqslant j$, ou seja:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "f_{ij}"'] & F_i \arrow[d, "g_{ij}"] \\ E_j \arrow[r, "\phi_j"'] & F_j \end{tikzcd}$$

é comutativo.

<u>PropisiçãoII-1.6.</u> Com a mesma notação acima, dado:

$\Phi : (E, f_i) \longrightarrow (F, g_i)$: homomorfismo de limites direto.

Então existe um único $\phi : E \longrightarrow F$ tal que $\phi \circ f_i = g_i \circ \phi_i$ para todo $i \in I$. (notação $\phi = \lim \phi_i$)

Demonstração:

ϕ existe e é único.

Dado F e $g_i \circ \phi_i : E_i \longrightarrow F$, temos:

$(g_j \circ \phi_j) \circ f_{ij} = g_j \circ g_{ij} \circ \phi_i = g_i \circ \phi_i, \forall\, i,\ j \in I,\ i \leq j.$

Pela definição de limite direto, $\exists\,!\ \phi : E \longrightarrow F$ tal que $\phi \circ f_i = g_i \circ \phi_i$ ou seja:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "f_i"'] & F_i \arrow[d, "g_i"] \\ E \arrow[r, "\phi"'] & F \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição: Dizemos que a sequência de sistemas direto:

$(E_i, f_{ij}) \xrightarrow{\Phi} (F_i, g_{ij}) \xrightarrow{\Delta} (g_i, h_{ij})$ é exata see:

$E_i \xrightarrow{\phi_i} F_i \xrightarrow{\delta_i} G_i$ é exata para todo $i \in I$.

Proposição II-1.7. Se $(E_i, f_{ij}) \xrightarrow{\Phi} (F_i, g_{ij}) \xrightarrow{\Delta} (G_i, h_{ij})$ é exata, então $\varinjlim E_i \xrightarrow{\phi} \varinjlim F_i \xrightarrow{\delta} \varinjlim G_i$ é exata, onde $\phi = \varinjlim \phi_i$ e $\delta = \varinjlim \delta_i$.

Demonstração: Por hipótese $E_i \xrightarrow{\phi_i} F_i \xrightarrow{\delta_i} G_i$ é exata $\forall\, i \in I$.

Então $\operatorname{Im} \phi_i = \operatorname{Ker} \delta_i$ e mais ainda, os diagramas:

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "f_i"'] & F_i \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "g_i"'] & G_i \arrow[d, "h_i"'] \\
\varinjlim E_i \arrow[r, "\phi"'] & \varinjlim F_i \arrow[r, "\delta"'] & \varinjlim G_i
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "f_{ij}"'] & F_i \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "g_{ij}"'] & G_i \arrow[d, "h_{ij}"'] \\
E_j \arrow[r, "\phi_j"'] & F_j \arrow[r, "\delta_j"'] & G_j
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Então $\phi \circ f_i = g_i \circ \phi_i$ e $\delta \circ g_i = h_i \circ \delta_i$.

Mostremos que $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Ker} \delta$.

$\forall\, y \in \operatorname{Im} \phi$, então $\exists\, x \in \varinjlim E_i$ tal que $y = \phi(x)$, pelo lemaII-1.2.

$x = f_i(x_i)$ para algum $i \in I$ e $x_i \in E_i$.

$y = \phi(x) = \phi(f_i(x_i)) = g_i \circ \phi_i(x_i)$.

$\delta(y) = \delta \circ g_i \circ \phi_i(x_i) = h_i \circ \delta_i \circ \phi_i(x_i) = h_i(0) = 0.$

Portanto $\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{Ker} \delta$.

$\forall\, x \in \operatorname{Ker}$, temos $\delta(x) = 0$ e $x \in \varinjlim F_i$.

Então $\exists\, i \in I$ tal que $x = g_i(x_i)$, $x_i \in F_i$.

$0 = \delta(x) = \delta \circ g_i(x_i) = h_i \circ \delta_i(x_i)$.

Pelo lema II-1.2., $\exists\, j \geq i$ tal que $h_{ij}(\delta_i(x_i)) = 0$

Daí $0 = h_{ij} \circ \delta_i(x_i) = \delta_j \circ g_{ij}(x_i)$ ou seja:

$g_{ij}(x_i) \in \operatorname{Ker} \delta_j = \operatorname{Im} \phi_j$.

Logo $g_{ij}(x_i) = \phi_j(y_j)$ para algum $y_j \in E_j$.

Mas $\beta_j \circ g_{ij}(x_i) = g_j \circ \phi_j(y_j)$ ou seja $g_i(x_i) = \phi \circ f_j(y_j)$.

Como $g_i(x_i) = x$, temos $x = \phi \circ f_j(y_j)$.

Concluimos que $\operatorname{Ker} \delta \subset \operatorname{Im} \phi$.

A prop. II-1.7. mostra que a exatidade é conservada por limite direto. Demonstraremos a seguir que o limite direto comuta com produto tensorial.

<u>Proposição</u> II-1.8. Seja (E_i, f_{ij}): sistema direto e $(\varinjlim E_i, f_i)$ o seu limite direto. Seja N:A-mod., então:

(i) $(E_i \otimes N, f_{ij} \otimes I_N)$ é um sistema direto.

(ii) Se notarmos por $\varinjlim (E_i \otimes N)$: limite direto do sistema acima, então $\varinjlim(E_i \otimes N) \cong (\varinjlim E_i) \otimes N$.

<u>Demonstração</u>: Claramente $(E_i \otimes N, f_{ij} \otimes I_N)$ é um sistema direto.

Seja $(\varinjlim(E_i \otimes N), \alpha_i)$ o limite direto do sistema acima.

Como $f_i \otimes I_N : E_i \otimes N \longrightarrow (\varinjlim E_i) \otimes N$ é tal que :

$(f_j \otimes I_N) \circ (f_{ij} \otimes I_N) = (f_j \circ f_{ij}) \otimes I_N = f_i \otimes I_N$ para $i \leq j$.

Então pela definição de limite direto, existe um único $\phi : \varinjlim(E_i \otimes N) \longrightarrow (\varinjlim E_i) \otimes N$ tal que $f_i \otimes I_N = \phi \circ \alpha_i$, $\forall i \in I$.

Pela definição do produto tensorial, para todo $i \in I$ existe uma aplicação A-bilinear:

$h : (\varinjlim E_i) \times N \longrightarrow (\lim E_i) \otimes N$ definida por: $h((f(x_i),n)) = f_i(x_i) \otimes n$.

Definamos uma aplicação $g: (\varinjlim E_i) \times N \longrightarrow \varinjlim(E_i \otimes N)$. por $g((f_i(x_i),n)) = \alpha_i(x_i \otimes n)$, onde $x_i \in E_i$ e $n \in N$.

Mostremos que g é bem definida e A-bilinear.

Se $(f_i(x_i),n) = (f_j(x_j),n')$ e $i \leq j$, então $f_i(x_i) = f_j \circ f_{ij}(x_i) = f_j(x_j)$ e $n = n'$.

Logo $f_j(x_j - f_{ij}(x_i)) = 0$ e pelo Lema II-1.2. $\exists$ $t \geq i,j$ tal que $0 = f_{jt}(x_j - f_{ij}(x_i)) = f_{jt}(x_j) - f_{it}(x_i)$.

Daí, $g((f_i(x_i),n)) = \alpha_i(x_i \otimes n) = \alpha_t \circ (f_{it} \otimes I_N)(x_i \otimes n) = \alpha_t(f_{it}(x_i) \otimes n) = \alpha_t(f_{jt}(x_j) \otimes n) = \alpha_t \circ (f_{jt} \otimes I_N)(x_j \otimes n) = \alpha_j(x_j \otimes n) = g((f_j(x_j),n) = g((f_j(x_j),n')$.

Mostraremos agora que g é A-bilinear.

$\underline{g((af_i(x_i) + bf_j(x_j),n)) = g((f_i(ax_i) + f_j(bx_j),n))}$

$= g((f_j(f_{ij}(ax_i) + bx_j),n)) = \alpha_j((f_{ij}(ax_i) + bx_j) \otimes n)$

$= \alpha_j(f_{ij}(ax_i) \otimes n + bx_j \otimes n) = \alpha_j \circ (f_{ij} \otimes I_N)(ax_i \otimes n) + \alpha_j(bx_j \otimes n)$

$= a\alpha_i(x_i \otimes n) + b\alpha_j(x_j \otimes n) = ag((f_i(x_i),n)) + bg((f_j(x_j),n))$;

$g((f_i(x_i),an + bn')) = \alpha_i(x_i \otimes (an + bn')) = \alpha_i(x_i \otimes an + x_i \otimes bn')) =$

$= a\alpha_i(x_i \otimes n) + b\alpha_i(x_i \otimes n') = ag((f_i(x_i),n)) + bg((f_i(x_i),n'))$

onde $a,b \in A$ e $n,n' \in N$, $i \leq j$.

Pela propriedade universal de produto tensorial [1] existe única aplicação A-linear:

$\psi : (\varinjlim E_i) \otimes N \longrightarrow \varinjlim (E_i \otimes N)$ tal que $\psi \circ h = g$.

Claramente $\psi(f_i(x_i) \otimes n) = \psi(h(f_i(x_i),n) = g(f_i(x_i),n) = \alpha_i(x_i \otimes n)$

Daí: $\phi \circ \psi(f_i(x_i) \otimes n) = \phi \circ \alpha_i(x_i \otimes n) = f_i \otimes I_N(x_i \otimes n) = f_i(x_i) \otimes n$, e

$\psi \circ \phi(\alpha_i(x_i \otimes n)) = \psi(f_i(x_i) \otimes n) = \alpha_i(x_i \otimes n)$

ou seja $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = I$: aplicação identidade.

Portanto: $(\varinjlim E_i) \otimes N \cong \varinjlim(E_i \otimes N)$

Até o presente momento relacionamos limite direto com sequências exatas e produto tensorial. Agora, veremos que a planitude é conservada por limite direto.

<u>Proposição</u>: II-1.9. Seja $(E_i)_{i \in I}$: família de A-mod. e (E_i, f_{ij}): sistema direto.

Se E_i é plano para todo $i \in I$, então $\varinjlim E_i$ é plano.

<u>Demonstração</u>: Seja $M' \longrightarrow M$: hom. injetor.

Como E_i é plano $\forall\, i \in I$, temos: $E_i \otimes M' \longrightarrow E_i \otimes M$ é injetor $\forall\, i \in I$, ou seja $0 \longrightarrow E_i \otimes M' \longrightarrow E_i \otimes M$ é exata.

Pela prop.II-1.7. $0 \longrightarrow \varinjlim(E_i \otimes M') \longrightarrow \varinjlim(E_i \otimes M)$ é exata.

Então:

$0 \longrightarrow (\varinjlim E_i) \otimes M' \longrightarrow (\varinjlim E_i) \otimes M$ é exata (Prop.II-1.8.)

Portanto: $\varinjlim E_i$ é plano.

Corolário II-1.10. Se todo sub-módulo f.g. de E:A-mod. é plano, então E é plano.

Demonstração:

Pelo corolário II-1.5. temos:

$E \cong \varinjlim E_i$, E_i: sub-mod. f.g. de E.

Mas por hipótese E_i é plano $\forall$ i, então pela Prop.II-1.9. E é plano.

Exemplo K: corpo de frações de um domínio de integridade A é A-plano.

Esta afirmação vem do fato : $K = \varinjlim_{k \in K} kA$,onde (kA) : A-mod. cíclicos são A-planos (pois todo A-mod. livre é plano) e pelo Cor.II-1.10.

Agora demonstraremos um exercício proposto no livro do Bourbaki [2] . página 43, problema 10, que é uma generalização do corolário II-1.5.

<u>Teorema</u> II-1.11. Todo M:A-mod. é o limite direto de A-mod.f.a.

<u>Demonstração</u>: Seja $F_A(M\times Z)$: A-mod.livre, onde Z: conj. dos inteiros e $\{(m,z),\ m\in M,\ z\in Z\}$: base de $F_A(M\times Z)$.

Definamos π: $F_A(M\times Z)\longrightarrow M$ por: $\pi(\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i)) = $

$= \sum_{i=1}^{n} a_i\ m_i$, onde $a_i\in A,\forall i$.

É fácil ver que π é um homomorfismo sobrejetor.

Assim,

$0\longrightarrow \operatorname{Ker}\pi\longrightarrow F_A(M\times Z)\xrightarrow{\pi} M\longrightarrow 0$ é exata.

A idéia da demonstração é a següinte:

(I) construir um conj. direto Λ; (2) Construir um sistema direto $(P_\alpha, f_{\alpha\beta})$, $\alpha\in\Lambda$, onde P_α é f.a. $\forall\alpha\in\Lambda$ e (3) Provar que (M, π_α), onde π_α: $P_\alpha\longrightarrow M$ é um limite direto de $(P_\alpha, f_{\alpha\beta})$

(1) Construção do conj. direto .

Seja $\alpha = (I,S)$ onde I: conj. finito de $M\times Z$. e S:A-submod. f.g. de $\operatorname{Ker}\pi\cap F_A(I)$

Se $I=\{(m_1,z_1),\ldots(m_n,z_n)\}$, temos:

$F_A(I) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i),\ a_i\in A,\ m_i\in M,\ z_i\in Z\}$

Definamos $P_\alpha = F_A(I)/S$ para $\alpha = (I,S)$. Assim P_α é f.a. pois:

$0\longrightarrow S\longrightarrow F_A(I)\longrightarrow P\longrightarrow 0$ é exata (prop. 0-2.8.)

Seja Λ: $\{\alpha = (I,S)$, onde I: sub-conj. finito de $M\times Z$ e S: sub-mod. f.g. de $\ker\pi\cap F_A(I)\}$

Definamos uma ordem sobre Λ .

$\alpha = (I,S)\leqslant \beta = (j,T)$ see $I\subsetneq J$ e $S\subsetneq T$.

Afirmamos que Λ é um conj. direto:

Para $\alpha = (I,S)$ e $\beta = (J,T) \in \Lambda$, $\exists\ \gamma = (I \cup J, \langle S,T \rangle)$ onde $\langle S,T \rangle$: sub-mod. de Ker $\tilde{\pi} \cap F_A(I \cup J)$, gerado por S e T, - tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

(2) Construção do sistema direto sobre o conj. Λ .

Dado $\alpha = (I,S)$ e $\beta = (J,T)$ tal que $\alpha \leq \beta$, definamos:

$f_{\alpha\beta} : P_\alpha = F_A(I)/S \longrightarrow P_\beta = F_A(J)/T$. por:

$$f_{\alpha\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + S\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + T$$

Mostremos que $\{ P_\alpha , f_{\alpha\beta} \}$ é um sistema direto:

(i) $f_{\alpha\alpha} = I_{P_\alpha}$ (claro)

(ii) Se $\alpha = (I,S)$, $\beta = (J,T)$ e $\gamma = (L,U)$, então:

$f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}\,(x + S) = f_{\beta\gamma}\,(x + T) = x + U = f_{\alpha\gamma}\,(x + S), \forall x \in F_A(I)$

(3) Provemos que $M \cong \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$

Definamos: $\tilde{\pi}_\alpha : P_\alpha = F_A(I)/S \longrightarrow M$ por:

$$\tilde{\pi}_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + S\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

$\tilde{\pi}_\alpha$ é bem definida:

Se $\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + S = \bar{0}$, temos $\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) \in S$,

$S \subset$ Ker $\tilde{\pi} \cap F_A(I)$

Logo: $\tilde{\pi}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i = 0$

Mostremos que $\tilde{\pi}_\beta \circ f_{\alpha\beta} = \tilde{\pi}_\alpha$, $\forall \alpha \leq \beta$

$\pi_\beta \circ f_{\alpha\beta}(\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + S) = \pi_\beta(\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + T) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i =$

$\pi_\alpha(\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + S)$

Agora se $(P, f_\alpha) = \varinjlim P_\alpha$, $\exists ! \varphi : P \longrightarrow M$ t.q. $\varphi o f_\alpha = \pi_\alpha$

Mostremos que φ é epimorfismo e monomorfismo.

(1) φ é monomorfismo.

Se $\varphi(y) = 0$, onde $y \in P = \varinjlim P_\alpha$, então pelo Lema II-1.2.

$y = f_\alpha(x_\alpha)$, com $x_\alpha \in P_\alpha$ e $\alpha = (I,S)$.

Logo $0 = \varphi(y) = \varphi(f_\alpha(x_\alpha)) = \pi_\alpha(x_\alpha)$.

Seja $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) + S$.

Se $\sum_{i=1}^{n} a_i(m_i,z_i) \in S$, então $x_\alpha = 0$.

Se $x_\alpha \notin S$, $\exists$ $T = \langle x_\alpha, S\rangle$:sub-mod. f.g. de $\ker \pi \cap F_A(I)$, pois $\pi(x_\alpha) = \pi_\alpha(x_\alpha) = 0$.

Seja $\beta = (I,T)$. obviamente $\beta \geq \alpha$.

Assim $f_{\alpha\beta}(x_\alpha) = 0$ pois $x_\alpha \in T$.

Logo $y = f_\alpha(x_\alpha) = f_\beta \circ f_{\alpha\beta}(x_\alpha) = 0$

(2) φ é epimorfismo.

Seja $m \in M$, então $(m,1) \in F_A(MXZ)$

Tomemos $\alpha = (I,S)$ onde $I = \{(m,1)\}$ e S:sub-mod. f.g. de $\operatorname{Ker} \pi \cap F_A(I)$ e $x_\alpha = (m,1) + S$

Logo $m = \pi_\alpha(x_\alpha) = \varphi(f_\alpha(x_\alpha))$ e $f_\alpha(x_\alpha) \in P$.

Portanto $M \cong \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$, P_α: f.a.

Agora determinaremos uma condição sobre dois conjuntos direto para que os limites direto correspondentes a estes conjuntos sejam isomorfos.

<u>Definição</u>: $\emptyset \neq J \subset I$, J e I conjuntos direto, J é dito <u>cofinal</u> em I se para todo $a \in I$, existe $b \in J$ tal que $a \leq b$.

<u>Teorema</u> II-1.12. Sejam I e J conjuntos direto e $J \subset I$, J cofinal em I. Se (M_i, f_{ij}) é um sistema direto sobre I, então:

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \cong \varinjlim_{j \in J} M_j$$

<u>Demonstração</u>: Seja (M, f_i): limite direto de $(M_i, f_{ij})_{i \in I}$.

Como $(M_i, f_{ij})_{i \in J}$ é também um sistema direto sobre $J, \forall j \in J$, chamaremos de (M', f_j) o seu limite direto.

Dado $M = \varinjlim_{i \in I} M_i$ e $f_j : M_j \longrightarrow M$

Como $f_j = f_\ell \circ f_{j\ell}$, $\forall\, j, \ell \in J$, $j \leq \ell$, então existe um único $\phi : M' \longrightarrow M$ tal que $\phi \circ f_j = f_j$, $\forall\, j \in J$.

Por outro lado,

Definamos $\psi : M \longrightarrow M'$ por $\psi(f_i(x_i)) = f_i(x_i)$ se $i \in J$ e $\psi(f_i(x_i)) = f_j \circ f_{ij}(x_i)$ se $i \notin J$, $i \leq j$, $j \in J$.

É possivel escolher $j \in J$, $i \leqslant j$, pois J é cofinal em I.

Mostremos que a definição de ψ independe da escolha de $j \in J$, $i \leqslant j$.

Seja $j, \ell \in J$, $i \leqslant j$ e $i \leqslant \ell$. Como J é cofinal em I, $\exists$ $t \in J$ tal que $j \leqslant t$ e $\ell \leqslant t$.

Daí $f_j \circ f_{ij}(x_i) = f_t \circ f_{jt} \circ f_{ij}(x_i) = f_t \circ f_{it}(x_i)$ e

$f_\ell \circ f_{i\ell}(x_i) = f_t \circ f_{\ell t} \circ f_{i\ell}(x_i) = f_t \circ f_{it}(x_i)$,

Mostremos que ψ é bem definida:

Suponhamos que $f_i(x_i) = 0$, então $\exists$ $k \in I$ tal que $f_{ik}(x_i) = 0$

Como $k \in I$ e J: cofinal em I, $\exists$ $\ell \in J$ tal que $k \leqslant \ell$.

Logo $f_{i\ell}(x_i) = f_{k\ell} \circ f_{ik}(x_i) = 0$.

Daí $f_\ell \circ f_{i\ell}(x_i) = 0$ e então $\psi(f_i(x_i)) = f_j \circ f_{ij}(x_i) = f_\ell \circ f_{i\ell}(x_i) = 0$.

Claramente ψ é um homomorfismo.

Finalmente :

$\psi \circ \phi\,(f_j(x_j)) = \psi(f_j(x_j)) = f_j(x_j)$ e

$$\phi \circ \psi(\,f_i(x_i)) = \begin{cases} \phi(f_i(x_i)) = f_i(x_i) \text{ se } i \in J. \\ \\ \phi(f_j \circ f_{ij}(x_i)) = f_j \circ f_{ij}(x_i) = f_i(x_i) \text{ se } i \notin J \end{cases}$$

Portanto $M = \varinjlim_{i \in I} M_i \cong \varinjlim_{j \in J} M_j \cong M'$.

§ 2. TEOREMA DE LAZARD

Definição M: A-mod. , $M^* = hom_A(M,A)$ é dito dual de M.

Observação: M^* é um A-mod.

$\forall\, f \in M^*$, $a \in A$ e $x \in M$, definamos $(af)(x) = f(ax)$ então $AM^* \subset M^*$.

$M^{**} = hom_A(M^*,A) = hom_A(hom_A(M,A),A)$

Lema II-2.1. $\theta : M \longrightarrow M^{**}$ onde $\theta(x) : hom(M,A) \longrightarrow A$ definida por $\theta(x)f = f(x)$, é um homomorfismo.

Demonstração:

Claramente θ é bem definida.

θ é um homomorfismo.

$\theta(x + x')f = f(x + x') = f(x) + f(x') = \theta(x)f + \theta(x')\, f$,

$\forall\, f \in hom(M,A)$.

Definição: M:A-mod. é dito reflexivo see $M \cong M^{**}$, ou seja θ definido como acima é um isomorfismo.

Exemlo:

(1) Todo anel é reflexivo.

(2) Todo F:A-mod. livre f.g. é reflexivo, pois se $F = A^{(I)}$, temos $F^* = hom_A(F,A) = hom_A(A^{(I)},A) = hom_A(A,A)^{(I)} = hom_A(A,A) = A^{(I)} = F$

Daí: $F^{**} = F^{*} = F$.

<u>Proposição</u> II-2.2. Sejam A,b: anéis, M:(A,B):bimod., F:B-mod

Então: (i) $\hom_A(L,M) \cong L^{*} \otimes M$.

(ii) $\hom_A(L,F \otimes_B M) \cong F \otimes_B \hom(L,M)$.

<u>Demonstração</u>:

(i) Se $L = A^n$, então:

$\hom_A(L,M) = \hom_A(A^n,M) = \hom_A(A,M))^n = M^n$ (pela prop. 0-1.6.)

Por outro lado:

$L^{*} \otimes M = \hom_A(A^n,A) \otimes M = (\hom(A,A))^n \otimes M = A^n \otimes M = M^n$.

(ii) $\hom_A(L,F \otimes_B M) = \hom_A(A^n,F \otimes_B M) = (\hom(A,F \otimes_B M))^n = (F \otimes_B M)^n =$
$= F \otimes_B M^n = F \otimes_B \hom_A(L,M)$.

<u>Teorema</u> II-2.3. (Lema de Lazard)

Sejam P:A-mod. f.a., M: A-mod. plano e $u:P \longrightarrow M$ um homomorfismo.

Então existe F:A-mod. livre f.g., existem $v:P \longrightarrow F$ e $w:F \longrightarrow M$:homomorfismos, tais que $u = W \circ v$.

<u>Demonstração</u>:

Como P é f.a. $\exists$ $F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$ exata, onde F_1 e F_0:A-mod. livres f.g.

Pela Prop. II-2.2., temos $\hom(F_0,M) = F_0^{*} \otimes M$ e

$\hom(F_1,M) \cong F_1^* \otimes M$.

Seja $F_0 \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{u} M$ com $\gamma = u \circ \beta$.

Daí $\gamma \in \hom(F_0,M) \cong F_0^* \otimes M$ (I)

Definamos: $\alpha^* : F_0^* = \hom(F_0,A) \longrightarrow F_1^* = \hom(F_1,A)$ por:

$\alpha^*(f) = f \circ \alpha, \forall f \in F_0^*$.

Ker α^* é um A-mod.; então pela prop.0-2.1. Ker α^* é isomorfo a um quociente de F': A-mod. livre.

Obtemos assim:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "p"'] & F_0^* \arrow[r, "\alpha^*"] & F_1^* \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{Ker}\,\alpha^* \arrow[u, "j"'] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 & \end{tikzcd}$$

onde j:injeção canônica, p: sobrejeção canônica e $\delta = j \circ p$.

Como M:A-mod. é plano:

$$F' \otimes M \xrightarrow{\delta \otimes I_M} F_0^* \otimes M \xrightarrow{\alpha^* \otimes I_M} F_1^* \otimes M \text{ é exata.}$$

Por (I) $\gamma \in F_0^* \otimes M$, então $(\alpha^* \otimes I_M)(\gamma) = (\gamma \circ \alpha) \otimes I_M =$

$= (u \circ \beta \circ \alpha) \otimes I_M = 0$ pois $\beta \circ \alpha = 0$.

Logo $\gamma \in \mathrm{Ker}\,(\alpha^* \otimes I_M) = \mathrm{Im}(\delta \otimes I_M)$, daí $\exists\, d \in F' \otimes M$ t.q.

$\delta \otimes I_M(d) = \gamma$. (2). Como $d \in F' \otimes M$, $d = \sum_{i=1}^{k} f_i \otimes m_i$, $m_i \in M$ e $f_i \in F'$.
Seja $F'' = F_A(\langle f_i \rangle_{i=1}^{k})$.

Logo F'' é um sub-mod. livre f.g. de F' e $d \in F'' \otimes M$.

Tomemos $F = (F'')^*$. Sendo F'': A-mod. livre f.g., temos $F^* = (F'')^{**} = F''$. Donde $F'' \otimes M = F^* \otimes M \overset{\theta}{\cong} \hom(F, M)$ (Prop II-2.2)

Pelo isomorfismo acima, como $d \in F'' \otimes M$, $\exists !$ $w: F \longrightarrow M$ t.q. $\theta(d) = w$

Consideremos a sequência:

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[r, hook, "i"] & F' \arrow[r, "\delta"] & F_o^* \arrow[r, "\alpha^*"] & F_1^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Aplicando $\hom(-, A)$ à sequência acima obtemos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F_1^{**} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & F_o^{**} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & F''^* \arrow[d, "="] \\ & F_1 \arrow[r] & F_o \arrow[r, "(\delta o i)^*"] & F \end{tikzcd}$$

Pondo $e = (\delta \text{ o } i)^* = i^* \text{ o } \delta^*$, obtemos:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "="] & F_o \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "="] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ F_1 \arrow[r, "\alpha"] & F_o \arrow[r, "e"] & F & \end{tikzcd} \quad (\text{II})$$

Afirmamos que $\operatorname{Im}\alpha \subset \operatorname{Ker} e$.

De fato: $e \text{ o } \alpha = i^* \text{ o } \delta^* \text{ o } \alpha = i^* \text{ o } (\alpha^* \text{ o } \delta)^* = 0$ pois $\alpha^* \text{ o } \delta = 0$

Como β é sobre., então, dado $p \in P$, $\exists$ $f_o \in F_o$ t.q. $p = \beta(f_o)$

Definamos então: $v: P \longrightarrow F$ por $v(p) = e(f_o)$ onde $\beta(f_o) = p$.

Mostremos que $\underline{v}$ é bem definida:

Se $p = p'$ onde $p = \beta(f_o)$ e $p' = \beta(f_o')$, temos:

$\beta(f_o - f_o') = 0$ ou seja $f_o - f_o' \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha \subset \operatorname{Ker} e$.

Então $e(f_o - f_o') = 0$ ou seja $e(f_o) = e(f_o')$.

Claramente v é um homomorfismo.

Finalmente mostremos que $u = w \text{ o } v$.

Aplicando hom(-,M) ao diagrama (II), obteremos:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \hom(P,M) & \xrightarrow{\beta^*} & \hom(F_o,M) & \longrightarrow & \hom(F_1,M) \\
& \uparrow v^* & & \uparrow = & & \uparrow = \\
& \hom(F,M) & \longrightarrow & \hom(F_o,M) & \longrightarrow & \hom(F_1,M) \\
& \uparrow \theta \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
& F^* \otimes M & \xrightarrow{(\delta o i)\otimes I_M} & F_o^* \otimes M & \longrightarrow & F_1^* \otimes M
\end{array}$$

$d \in F^* \otimes M$, daí $v^*(\theta(d)) = v^*(w) \in \hom(P,M)$,então:

$\beta^*(v^*(\theta(d)) = \beta^* o\ v^*(w) = w \ o \ v \ o \ \beta$.

Por outro lado:

$\beta^*(v^*(\theta(d)) = ((\delta \ o \ i) \otimes I_M)(d) = \gamma = u \ o \beta$.

Assim, $w \ o \ v \circ \beta = u \ o \beta$, e então $w \ o \ v = u$ pois β é epimorfismo.

Sabemos que todo A-mod. projetivo é plano, agora o corolário a seguir, afirma:

<u>Corolário</u> II-2.4. Qualquer A-mod. f.a. e plano é projetivo.

<u>Demonstração</u>: Aplicando o lema de Lazard para $M = P$ e $u = I_M$

$\exists$ F:A-mod. livre f.g., $\exists$ $v: M \longrightarrow F$, e $w: F \longrightarrow M$:homomorfismos tais que $w \ o \ v = I_M$.

Daí existe: $0 \longrightarrow M \xrightarrow{v} F \xrightarrow{w} M$ exata e split.

Então pela prop. 0-2.3., M é projetivo.

Se $P \cong \varinjlim P_i$, P_i:A-mod. livre f.g., então pela prop. II-1.9. P é plano.

Lazard [6] afirma que a recíproca também é verdadeira.

Teorema II-2.5. (Teorema de Lazard)

Todo módulo plano é o limite direto de módulos livres f.g.

Demonstração: Seja M: A-mod. plano.

Usando a mesma notação e conclusões obtidas da prop. II-1.11. como: $M = \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} P$ onde $P_\alpha = F_A(I)/S$ é f.a. e

$\Lambda = \{ \alpha = (I,S)$ t.q. I: conj. finito de MXZ e S: sub-mod. f.g. de K $F_A(I)\}$ é um conj. direto.

Como M é plano e P_α : f.a. e $u_\alpha : P \longrightarrow M$: hom., L: A-mod. livre f.g. , $\exists$ v : $P_\alpha \longrightarrow L$ e $w: L \longrightarrow M$: hom. t.q. w o v=u (pelo Lema de Lazard.)

Construiremos um conj.$\Omega \subset \Lambda$,Ω cofinal em Λ.

Sejam $(e_i)_{i\in I}$: base de $F_A(I)$, B: base de L e f_i = $= v(e_i + S) \in L$.

Procuremos $B' \subset MXZ$ tal que:

(1) $f: B \longrightarrow B'$ é bijetiva.

(2) $B' \cap I = \emptyset$

Para cada $b \in B$ fixo, como $\{ w(b),k)$ t.q. $k \in Z\} \cong Z$ e $|I|$:finito então existe o menor inteiro positivo k t.q. $(w(b),k) \notin I$.

Tomemos $B' = \{ b' = (w(b),k)$ onde k é o menor inteiro t.q. $(w(b),k) \notin I$, $b \in B \}$, então $B' \cap I = \emptyset$

Como k é único na condição acima, temos que $f: B \longrightarrow B'$ definida por $f(b) = (w(b),k)$ é bem definida e bijetiva.

Seja $C = B' \cup I \subset MXZ$.

Definamos θ: $F_A(C) \longrightarrow L$ por $\theta(b') = b$ e $\theta(e_i) = f_i =$ $= v(e_i + S)$.

θ é bem definida pois $B' \cap I = \emptyset$ e ainda θ é sobre.

Logo: $0 \longrightarrow T = \operatorname{Ker}\theta \longrightarrow F_A(C) \xrightarrow{\theta} L \longrightarrow 0$ é exata e $L \cong F_A(C)/T$ (1)

Seja $\Omega = \{\ \beta = (C,T)$ onde $C = B' \cup I$ e $T = \operatorname{Ker}\theta\}$

Mostremos que $\Omega \subset \Lambda$, para isso devemos mostrar:

(i) C é conj. finito de $M \times Z$.

(ii) T: sub-mod. f.g. de $K \cap F_A(C) \subset K \cap F_A(M \times Z)$

(i) Claro, pois $C = B' \cup I$ com B' e I: finitos.

(ii) T é f.g. pois L sendo A-mod. livre f.g., L é A-mod. projetivo f.g.

Então pela prop. 0-2.6., L é f.a.; e ainda pela prop. 0-2.7. T é sub-mod. f.g. de $F_A(C)$.

Falta mostrar que $T \subset K = \operatorname{Ker}\pi$

$x \in T \subset F_A(C)$, então $x = \sum r_i(m_i,n_i) + \sum s_j(w(b_j),k_j)$.

Se $(m_i,n_i) = e_i$ e $(w(b_j),k_j) = b_j'$, temos:

$\theta(x) = \sum r_i\ \theta(e_i) + \sum s_j\ \theta(b_j') = \sum r_i f_i + \sum s_j b_j$ (2) e

$u_\alpha(e_i + S) = \pi(e_i) = \pi(m_i,n_i) = m_i$.

Por outro lado, $u_\alpha(e_i + S) = w \circ v\ (e_i + S) = w(f_i)$.

Daí $m_i = w(f_i)$ (3)

Então:

$\pi(x) = \pi(\sum r_i e_i) + \pi(\sum s_j(w(b_j),k_j)) = u_\alpha(\sum r_i e_i + S) + \sum s_j\ \pi((w(b_j),k_j)) = \sum r_i u_\alpha(e_i + S) + \sum s_j\ w(b_j) \overset{(3)}{=}$

$= \sum r_i\ w(f_i) + \sum s_j w(b_j) = w(\sum r_i f_i + \sum s_j b_j) \overset{(2)}{=}$

$= w(\theta(x))$.

Logo se $\theta(x) = 0$, então $\pi(x) = 0$ ou seja :

$T = \text{Ker}\ \theta \subset K = \text{Ker}\ \tilde{\pi}$.

Portanto: $T \subset K \cap F_A(C)$

Definamos uma ordem $\leqslant$ definida por:

$(I, S) \leqslant (I_1, S_1)$ see $I \subseteq I_1$, e $S \subseteq S_1$

Mostremos que Ω é confinal em Λ.

Se $\alpha = (I, S) \in \Lambda$, $\exists$ $\beta = (C, T) \in \Omega$ onde $C = B' \cup I$ tal que $\alpha \leqslant \beta$, pois $I \subseteq C$ e $S \subseteq T$ pela construção acima.

Definamos $P_\beta = F_A(C)/T$, onde $\beta = (C, T)$.

Por (1) $P_\beta = L$: A-mod. livre f.g.

Sendo Ω cofinal em Λ, pelo teorema II-1.12. temos:

$$\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha \cong \varinjlim_{\beta \in \Omega} P_\beta$$

Ainda pela prop. II-1.11., $M \cong \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$, P_α :A-mod. f.a.

Logo $M \cong \varinjlim_{\beta \in \Omega} P_\beta$, P_β :A-mod. livre f.g.

§3. RESTRIÇÃO E EXTENSÃO DE ESCALARES

Sejam A, B: anéis, E:A-mod. e G:(A, B): bimod., F: B-mod.

Definamos $f: F \otimes_B \text{hom}_A(E, G) \longrightarrow \text{hom}_A(E, F \otimes_B G)$ por :

$f(y \otimes u)(x) = y \otimes u(x), \forall x \in E$, $y \in F$, $u \in \text{hom}_A(E, G)$.

A prop. II-2.2. (ii) garante que f é um isomorfismo, se E é A:mod. livre f.g.

Agora veremos outras condições que tornam f injetiva, bijetiva.

<u>Teorema</u> II-3.1. Com as mesmos dados acima e se F: B-mod. é plano, então para todo E : A-mod. f.g. (resp. f.a.)f é injetiva (resp. bijetiva).

<u>Demostração</u>: Pela prop. 0-2.5. E:A-mod. admite uma apresentação: $L_1 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{w} E \longrightarrow 0$, L_1, L_0: A-mod. livres.

(1) Se E é f.g., temos L_0: f.g. pois w é sobre.

(2) Se E é f.a., por definição de apresentação finita L_1, L_0 são f.g.

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & F \otimes_B \hom_A(E,G) & \xrightarrow{a} & F \otimes_B \hom_A(L_0,G) & \xrightarrow{a'} & F \otimes_B \hom_A(L_1,G) \\
& \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
0 \longrightarrow & \hom_A(E, F \otimes_B G) & \xrightarrow{b} & \hom_A(L_0, F \otimes_B G) & \xrightarrow{b'} & \hom_A(L_1, F \otimes_B G)
\end{array}$$

A segunda linha é exata, pois $\hom_A(-, F \otimes_B G)$ é exata à esquerda(prop. 0-1.4.(i)), logo <u>b</u> é injetiva.

Pela mesma razão acima $\hom_A(-,G)$ é exata à esquerda e o fato de que F: B-mod. plano, temos que a primeira linha é exata; donde <u>a</u> é injetiva.

Sendo L_0: A-mod. livre f.g., vem:

$g: F \otimes_B \hom_A(L_0,G) \longrightarrow \hom_A(L_0, F \otimes_B G)$ é bijetiva(prop. II-2.2.)

Mas g o a = b o f (diag com.) com <u>a</u>, <u>b</u> : inj. e <u>g</u>: <u>bi</u>jetiva.

Logo f é injetiva.

Agora por (2) e pela prop. II-2.2.(ii), temos que <u>g</u> e <u>h</u> são bijetivas para E: f.a., então f é bijetiva pela Prop:0-1.1.

Proposição II-3.2. Sejam $f: A \longrightarrow B$: hom de anéis e E, F: A-mod

Se B:A-mod. é plano e E é f.g. (resp. f.a.), então:

$\bar{f} : B \otimes_A \hom_A(E,F) \longrightarrow \hom_B(B \otimes_A E, B \otimes_A F)$ definido por :

$\bar{f}(b \otimes u)(b' \otimes x) = bb' \otimes u(x)$ onde $b, b' \in B$, $u \in \hom(E,F)$, $x \in E$ é injetiva (resp. bijetiva).

Demonstração: Pelo teorema do isomorfismo adjunto temos:

$\hom_B(B \otimes_A E, B \otimes_A F) \cong \hom_A(E, \hom_B(B, B \otimes_A F)) \cong \hom_A(E, B \otimes_A F)$.

Daí $\bar{f}$ é a composição de:

$B \otimes_A \hom_A(E,F) \xrightarrow{g} \hom_A(E, B \otimes_A F) \xrightarrow{\cong} \hom_B(B \otimes_A E, B \otimes_A F)$.

Sendo B : A-mod. plano, g é injetiva(resp. bijetiva) pela prop. II-3.1. conforme E seja f.g.(resp. f.a.)

Logo $\bar{f}$ é injetiva (resp. bijetiva) se E é f.g.(resp. f.a.)

§ 4. RELAÇÕES

Um outro aspecto de módulos planos é visto neste parágrafo.

Seja A : anel e E, F : A-mod.

Sabemos que todo elemento de $E \otimes_A F$ pode ser escrito de modo ínico: $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$, $e_i \in E$, $f_i \in F$.

A proposição seguinte dá uma condição para que

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i = 0$$

<u>Proposição</u> II-4.1. Sejam $(e_i)_{i\in I}$: famílias de elementos de E e $(f_i)_{i\in I}$: família de geradores de F., então:

$\sum_{i\in I} e_i \otimes f_i = 0$ see existe $J\subset I$, J:conj. finito, existem famílias $(x_j)_j \subset E$, $(r_{j_i}) \subset A$ $j\in J$, $i\in I$ tal que:

(1) $\sum_{i\in I} r_{j_i} f_i = 0$ para todo $j\in J$.

(2) $e_i = \sum_{j\in J} x_j r_{j_i}$ para todo $i\in I$.

<u>Demosntração</u>: Consideremos $A^{(I)}$: A-mod. livre e $(u_i)_{i\in I}$: base canônica de $A^{(I)}$.

Seja $g: A^{(I)} \longrightarrow F$ definida por $g(u_i) = f_i$.

g é sobre, pois $(f_i)_{i\in I}$: família de geradores de F.

Logo:

$0 \longrightarrow \text{Ker } g \xrightarrow{i} A^{(I)} \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$ é exata e

$E \otimes \ker g \xrightarrow{I_E\otimes i} E \otimes A^{(I)} \xrightarrow{I_E\otimes g} E \otimes F \longrightarrow 0$ é exata (prop. 0-1.7.)

se $\sum e_i \otimes u_i \in \text{Ker}(I_E \otimes g)$, temos : $(I_E\otimes g)(\sum e_i \otimes u_i) = \sum e_i \otimes f_i = 0$ em $E \otimes F$.

Daí um elemento que pertence ao $\text{Ker}(I_E\otimes g)$ (denominado mod. de <u>relações</u> entre f_i) satisfaz as hipóteses da proposição.

Como $\ker(I_E \otimes g) = \text{Im}(I_E \otimes i)$, $\exists$ J: conj. finito e existe $\sum_J x_j \otimes r_j \in E \otimes \text{Ker } g$, onde $x_j\in E$, $r_j \in \text{Ker } g$ tal que;

$(I_E \otimes i)\left(\sum_{j\in J} x_j \otimes r_j\right) = \sum_I e_i \otimes u_i$

Logo $\sum_{j\in J} x_j \otimes r_j = \sum_I e_i \otimes u_i$ (i)

Como $r_j\in \text{Ker } g$, $i(r_j)\in A^{(I)}$, daí $\exists (r_{j_i}) \subset A$ t.q. $r_j = i\ (r_j) =$

$\sum_{i\in I} r_{j_i} u_i$ (ii)

Por outro lado, como r_j Ker g, temos:

$$0 = g(r_j) \overset{(ii)}{=} g(\sum_i r_{j_i} u_i) = \sum_i r_{j_i} f_i \ \forall j \in J.$$

Agora por (i) e (ii) vem:

$$\sum_i e_i \otimes u_i = \sum_j x_j \otimes r_j = \sum_j x_j \otimes \sum_i r_{j_i} u_i = \sum_i (\sum_j r_{j_i} x_j) \otimes u_i$$

Sendo $(u_i)_{i\in I}$: base de $A^{(I)}$, $e_i = \sum_{j\in J} r_{j_i} x_j$, $\forall i \in I$

Reciprocamente:

$$\sum_i e_i \otimes f_i \overset{(ii)}{=} \sum_i (\sum_{j\in J} r_{j_i} x_j) \otimes f_i = \sum_i x_j \otimes \sum_i r_{j_i} f_i \overset{(i)}{=} 0$$

<u>Teorema</u> II.4.2. E é plano see dadas duas famílias finitas: $(e_i)_{i=1}^n$ E e $(a_i)_{i=1}^n$ A tal que $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$ em E, então existem famílias $(x_j)_{j\in J} \subset E$, $(r_{j_i}) \subset A$ tal que:

(1) $\sum_{i=1}^n r_{j_i} a_i = 0$ para todo $j \in J$.

(2) $e_i = \sum_j x_j r_{j_i}$ para todo $i \in I$.

<u>Demonstração</u>:

($\Rightarrow$) Suponhamos E: plano e $(e_i)_{i=1}^n \subset E$, $(a_i)_{i=1}^n \subset A$ tal que $\sum_{i=1}^n e_i a_i = 0$ em E.

Seja A': A-mod. gerado por a_i e $i: A' \longrightarrow A$: inclusão, daí $I_E \otimes i: E \otimes A' \longrightarrow E \otimes A \cong E$ é injetiva pois E é plano. $\sum_{i=1}^n e_i \otimes a_i = 0$ em $E \otimes A'$.

Pela proposição anterior concluimos que (1) e (2) são satisfeitas.

($\Leftarrow$) Reciprocamente suponhamos $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$ em E.

Sejam $Q = Aq_1 \oplus Aq_2 \oplus \ldots \oplus Aq_n$: A-mod. livre com base: $\{q_1, q_2, \ldots q_n\}$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i$ e $K = (x)A$: A-mod. cíclico gerado por x.

Então $P = Q/K$ é f.a. pois $\exists$ $K \longrightarrow Q \longrightarrow P \longrightarrow 0$ éxata, onde K e Q são A-mod. livres f.g.

Definamos $u: P \longrightarrow E$ por:

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} s_i q_i + K\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i e_i \text{ onde } s_i \in A.$$

Mostremos que u é bem definida.

Se $\sum_{i=1}^{n} s_i q_i + K = K = \bar{0}$, temos $\sum_{i=1}^{n} s_i q_i \in K = (x)A$, então $\exists$ $a \in A$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} s_i q_i = a\left(\sum_{i=1}^{n} a_i q_i\right)$ donde:

$\sum_{i=1}^{n} (s_i - aa_i) q_i = 0$ em Q: A-mod. livre.

Daí $s_i - aa_i = 0 \ \forall$ i, ou seja $s_i = aa_i$

Portanto:

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} s_i q_i + K\right) = u\left(\sum_{i=1}^{n} aa_i q_i + K\right) = \sum_{i=1}^{n} aa_i e_i = a\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0.$$

É fácil ver que u é homomorfismo.

Sendo P: f.a. e E: plano, pelo lema de Lazard, existe $F = \bigoplus_{j=1}^{t} Af_j$: A-mod. livre, $\exists$ $v: P \longrightarrow F$, $\exists$ $w: F \longrightarrow E$ t.q. $u = w \circ v$

Se $v(q_i + K) = \sum_{j=1}^{t} r_{j_i} f_j$ e $w(f_j) = x_j \in E$, temos:

$$e_i = u(q_i + K) = w \circ v(q_i + k) = w\left(\sum_{j=1}^{t} r_{j_i} f_j\right) = \sum_{j=1}^{t} r_{j_i} w(f_j) = \sum_{j=1}^{t} r_{j_i} x_j, \ \forall \ i.$$

$$\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_{j_i}\right) f_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{j=1}^{t} r_{j_i} f_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i v(q_i + K) = v\left(\sum_{i=1}^{n} a_i q_i + K\right)$$

$= v(x + K) = 0$ (pois $x \in K$)

Como $(f_j)_{j=1}^{t}$ é uma base de F: A-mod. livre, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_i r_{j_i} = 0 \ \forall . j.$$

-oOo-

CAPÍTULO III

MÓDULOS PLANOS E MÓDULOS INJETIVOS

§1 : MÓDULOS INJETIVOS

<u>Definição</u>: Sejam A: anel, E, F, G : A-mod. E é dito módulo <u>injetivo</u> see:

Dado o diagrama :

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{f} & G \end{array} \quad \text{exata.}$$

Então existe um único A-mod. hom. $h : G \longrightarrow E$ tal que $h \circ f = g$.

Sempre hom(-, E) é exata à esquerda, agora E sendo injetivo, hom(-, E) é exata à direita. Esta afirmação será demonstrada a seguir.

<u>Proposição</u> III-1.1. São equivalentes as afirmações:

(a) E é injetivo

(b) hom(-, E) é exata.

(c) Para todo I: ideal de A:

$0 \longrightarrow \hom(A/I, E) \longrightarrow E \longrightarrow \hom(I, E) \longrightarrow 0$ é exata.

(d) Para todo $f: I \longrightarrow E$, onde I: ideal de A, existe $x \in E$, tal que $f(a) = ax$ para todo $a \in I$ (<u>condição de Bear</u>)

<u>Demonstração</u>:

(a) = (b)

Suponhamos $0 \longrightarrow F' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} F'' \longrightarrow 0$ sequência exata de A-mod.

Queremos mostrar a exatidade da sequência:

$$0 \longrightarrow \hom(F'',E) \xrightarrow{\bar{g}} \hom(F,E) \xrightarrow{\bar{f}} \hom(F',E) \longrightarrow 0$$

Basta então mostrarmos que $\bar{f}$ é sobre pois pela Prop. 0-1.4. $\bar{g}$ é injetiva.

Se $\psi \in \hom(F',E)$, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

Como E é injetiva, $\exists !$ $h: F \longrightarrow E$ t.q. $h \circ f = \psi$ ou seja $\bar{f}(h) = \psi$

Portanto $\bar{f}$ é sobre.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Como $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$ é exata $\forall$ I: ideal de A

Por (b) temos :

$$0 \longrightarrow \hom(A/I, E) \longrightarrow \hom(A, E) \longrightarrow \hom(I,E) \longrightarrow 0$$

é exata.

Sendo $\hom(A,E) \cong E$, concluimos que (c) é satisfeita.

(c) $\Rightarrow$ (d)

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & E & & & & & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle f} & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A/I & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \text{exata}$$

Por (c), temos:

$$0 \longrightarrow \hom(A/I,E) \xrightarrow{\bar{p}} \hom(A,E) \xrightarrow{\bar{i}} \hom(I,E) \longrightarrow 0 \text{ é exata.}$$

Como $f \in \hom(I,E)$, $\exists \theta_x \in \hom(A,E)$ t.q. $\bar{i}(\theta_x) = \theta_x \circ i = f$ onde $\theta_x: A \longrightarrow E$ definida por : $\theta_x(a) = a\, x \; \forall a \in A$.

Daí $f(a) = \theta_x o\ i(a) = \theta_x(a) = a.x, \forall a \in I$.

(d) $\Rightarrow$ (a)

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

Como $F \cong f(F')$, sem perda de generalidade podemos considerar $F' \subset F$.

Seja a família $\mathcal{F} = \{ (G,g),\ G$:sub-mod. de F t.q. $F' \subseteq G \subset F$, e $g: G \longrightarrow E$ homomorfismo tal que $g|_{F'} = \psi . \}$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$ pois $(F', \psi) \in \mathcal{F}$.

Definamos uma ordem sobre $\mathcal{F}$.

$(G_1, g_1) \leqslant (G_2, g_2)$ see $G_1 \subseteq G_2$ e $g_2|_{G_1} = g_1$

$\mathcal{F}$ é parcialmente ordenado por $\leqslant$.

Seja $\{ (G_\alpha, g_\alpha) \}_{\alpha \in \Lambda}$: cadeia de elementos de $\mathcal{F}$.

Tomando $G = \cup G_\alpha$ e $g = \cup g_\alpha$, onde $g|_{G_\alpha} = g_\alpha, \forall \alpha$ e $g: G \longrightarrow E$.
Claramente (G,g) é um limite da cadeia acima. Então pelo lema de Zorn, $\exists (M, \phi)$: elemento maximal de $\mathcal{F}$.

Mostremos que $M = F$.

Se $M \subsetneq F$, $\exists\ x \in F$ e $x \notin M$.

Seja $I = \{ a \in A$ t.q. $a.x \in M \}$. Facilmente se prova que I é um ideal de A.

Definamos $f: I \longrightarrow E$ por $f(a) = \phi(ax), \forall a \in I$.

Claramente f é um homomorfismo.

Então por (d), $\exists\ e \in E$ t.q. $f(a) = ae, \forall\ a \in I$.

Como $x \in F - M$, seja $N = M + xA$, que é um A-submod. de F e $M \subsetneq N$

Definamos $h: N \longrightarrow E$ por $h(m + ax) = \phi(m) + ae$ onde $m \in M, a \in A$

Mostremos que h é bem definida.

Se $m + ax = 0$, temos $-m = ax \in M$, logo $a \in I$ e então $ae = f(a) =$

$\phi(ax) = \phi(-m) = -\phi(m)$. Daí $ae + \phi(m) = 0 = h(m+ax)$, e ainda $h|_M = \phi$.

Concluimos então $(N,h) \in \mathcal{F}$ o que é absurdo pois (M,ϕ) é o elemento maximal de $\mathcal{F}$.

Logo $M = F$ e $\phi: F \longrightarrow E$.

Portanto E é injetiva.

Exemplo

(1) Q é Z-injetivo.

Demonstraremos isto usando a condição de Bear.

Seja $f: I \longrightarrow Q$, I: ideal não nulo de Z

Logo $I = (x)$, $x \neq 0$ e $f(ax) = af(x) = \dfrac{axf(x)}{x}$

Portanto $\exists\ q = \dfrac{f(x)}{x} \in Q$ t.q. $f(ax) = axq \ \forall a \in A$.

(2) Q/Z é Z- injetivo

Seja $f: I \longrightarrow Q/Z$: hom. onde I: ideal $\neq 0$ de Z.

Logo $I = (x)$, $x \neq 0$. Se $f(x) = \dfrac{p}{q} + Z$, temos:

$f(ax) = af(x) = a(\dfrac{p}{q} + Z) = ax(\dfrac{p}{qx} + Z)$.

Portanto $\exists \alpha = (\dfrac{p}{qx} + Z)$ t.q. $f(ax) = ax\alpha \ \forall ax \in I$.

§ 2. MÓDULO CARÁTER E TEOREMA DE LAMBEK

Definição: Sejam A: anel e E: A-mod.

$\chi(E) = \hom_Z(E, Q/Z)$ é dito módulo caráter de E

Estamos procurando condições equivalentes a ser módulo plano. Com esse intuito, Lambek relacionou módulos cará -

ter com módulos planos.

Lema III-2.1. Se $0 \neq x \in E$, então existe $\varphi \in \hom_Z(E, Q/Z)$ tal que $\varphi(x) \neq 0$.

Demonstração:

Primeiramente mostremos que $\exists\ \psi \in \hom_Z(xZ, Q/Z)$.

Definamos $\psi : xZ \longrightarrow Q/Z$ por:

(1) Se $\mathrm{Annl}_Z(x) = \{ a \in Z \text{ t.q. } ax = 0 \} = \{ 0 \}$ ou seja $xa \neq 0$, $\forall\, 0 \neq a \in Z$.

$\psi(xa) = \frac{a}{2} + Z$ se $0 \neq a \in Z$

$\psi(0) = Z$

(2) Se $\mathrm{Annl}_Z(x) \neq 0$, como $\mathrm{Annl}_Z(x)$ é um ideal de Z: anel principal , então $\mathrm{Annl}_Z(x) = NZ$ onde $0 < N \in Z$

$\psi(xa) = \frac{a}{N} + Z$, $\forall\, a \in Z$.

Mostremos que ψ é bem definida,

(1) $\mathrm{Annl}(x) = \{ 0 \}$

Se $xa = xa'$, temos $x(a - a') = 0$

Como $\mathrm{Annl}_Z(x) = 0$, $a - a' = 0$.

Daí $\frac{a}{2} + Z = \frac{a'}{2} + Z$ ou seja $\psi(xa) = \psi(xa')$.

(2) Se $\mathrm{Annl}_Z(x) \neq \{0\}$

Se $xa = xa'$, $x(a - a') = 0$, então $a - a' \in NZ$ ou seja $a - a' = kN$ para algum $k \in Z$, daí $\psi(xa - xa') = \psi(x(a - a')) = \frac{a-a'}{N} + Z = \frac{kN}{N} + Z = Z$ ou $\psi(xa) = \psi(xa')$.

Mostremos que $\psi(x) \neq 0$

Se $\mathrm{Annl}_Z(x) = \{ 0 \}$, $\psi(x) = \psi(x.1) = \frac{1}{2} + Z \neq 0$

Se $\mathrm{Annl}_Z(x) \neq \{0\}, \psi(x) = \psi(x.1) = \frac{1}{N} + Z \neq 0$.

Obtemos assim o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Q/Z & \\ 0 \arrow[r] & xZ \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "i"] & E \end{tikzcd}$$

onde i: inclusão

Sendo Q/Z : injetiva, $\exists\ \varphi: E \longrightarrow Q/Z$ t.q. $\varphi \circ i = \psi$

Daí $0 \neq \psi(x) = \varphi \circ i\ (x) = \varphi(x)$.

<u>Lema</u> III-2.2. Sejam M: submod. de N:A-mod. e $x \in N - M$.

Então existe $\varphi \in \chi(N)$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, mas $\varphi(M) = 0$

<u>Demostração</u>:

Como $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/M \longrightarrow 0$ é exata e Q/Z é injetiva, temos que $\chi(-) = \hom_Z(-, Q/Z)$ é exata (prop. III-1.1.) e

$0 \longrightarrow \chi(N/M) \xrightarrow{\bar{g}} \chi(N) \xrightarrow{\bar{f}} \chi(M) \longrightarrow 0$ é exata.

Como $x \notin M$, $\bar{x} = x + M \neq \bar{0}$, então pelo lema III-2.1.,

$\exists\ \bar{\varphi}\ \hom(N/M, Q/Z)$ tal que $\bar{\varphi}(\bar{x}) \neq \bar{0}$.

Sendo $\bar{\varphi} \in \chi(N/M)$, $\bar{g}(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi} \circ g \in \chi(N)$.

Tomemos $\varphi = \bar{\varphi} \circ g$. Então $\varphi(x) = \bar{\varphi} \circ g(x) = \bar{\varphi}(x + M) =$

$= \bar{\varphi}(\bar{x}) \neq 0$ e $\varphi(M) = \bar{\varphi} \circ g(M) = \bar{\varphi}(\bar{0}) = \bar{0}$.

<u>Notação</u>: $\bar{g} = \chi(g)$ e $\bar{f} = \chi(f)$.

<u>Lema</u> III- 2.3. Sejam $f: M \longrightarrow N$: hom de A-mod. e

$\chi(f): \chi(N) \longrightarrow \chi(M)$. Se $\chi(f) = 0$ então $f = 0$.

<u>Demonstração</u>:

Se $f \neq 0\ \exists\ x \in M$ tal que $0 \neq f(x) \in N$ e pelo lema III-2.2

$\exists\ \varphi \in \hom(N, Q/Z) = \chi(N)$ t.q. $\varphi(f(x)) \neq 0$ ou seja $\chi(f)(\varphi) \neq 0$, mas $\chi(f) = 0$, logo $f = 0$.

<u>Lema</u> III-2.4. Dados $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ e $\chi(G) \xrightarrow{\chi(g)} \chi(F) \xrightarrow{\chi(f)} \chi(E)$

Então $\chi(f) \circ \chi(g) = \chi(g \circ f)$.

<u>Demonstração</u>:

Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[dl] \\ & Q/Z & \end{tikzcd}$$

$\chi(f) \circ \chi(g) \varphi = \chi(f)(\varphi \circ g) = \varphi \circ g \circ f = \varphi \circ (g \circ f) =$
$= \chi(g \circ f) \varphi, \forall \varphi \in \hom(G, Q/Z)$

Logo $\chi(f) \circ \chi(g) = \chi(g \circ f)$

<u>Proposição</u> III-2.5. $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ é exata se e somente se:
$\chi(G) \longrightarrow \chi(F) \longrightarrow \chi(E)$ é exata.

<u>Demonstração</u>:

$(\Rightarrow)$ Claro, pois sendo Q/Z : Z-injetiva pela prop. III-1.1. $\chi(-) = \hom(-, Q/Z)$ é exata.

$(\Leftarrow)$ $\chi(g \circ f) = \chi(f) \circ \chi(g) = 0$ (lema III-2.4.)

Pelo lema III-2.3. $g \circ f = 0$ ou seja $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$

Mostremos que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

Se $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Ker} g$, $\exists$ $x \in \operatorname{Ker} g - \operatorname{Im} f$, então pelo lema III-2.2. $\exists \varphi \in \chi(\operatorname{Ker} g)$ t.q. $\varphi(x) \neq 0$, mas $\varphi(\operatorname{Im} f) = 0$, daí $\varphi \circ f = 0$ ou $\chi(f)\varphi = 0$.

Então $\varphi \in \operatorname{Ker} \chi(f) = \operatorname{Im} \chi(g)$.

Logo $\exists$ $\psi \in \chi(G)$ t.q. $\varphi = \chi(g)\psi = \psi \circ g$.

Como $x \in \operatorname{Ker} g$, temos : $\varphi(x) = \psi \circ g(x) = 0$, o que é absurdo pois $\varphi(x) \neq 0$.

<u>Teorema</u> III-2.6. (Teorema de Lambek)

Sejam A: anel e E: A-mod. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(a) E: A-mod. é plano.

(b) Se T : Z-injetiva, então $hom_Z(E,T)$ é A-mod. injetiva.

(c) $\chi(E)$ é injetiva.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Seja $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$: sequência exata de A-mod.

Como E é plano, temos:

$0 \longrightarrow E \otimes_A F \longrightarrow E \otimes_A G \longrightarrow E \otimes_A H \longrightarrow 0$ é exata.

Agora se T é injetiva, vem:

$0 \longrightarrow hom_Z(E \otimes_A H,\ T) \longrightarrow hom_Z(\ E \otimes_A G,\ T) \longrightarrow hom_Z(\ E \otimes_A F, T) \longrightarrow 0$

é exata (prop. III-1.1.)

Pelo teorema do isomorfismo adjunto:

$0 \longrightarrow hom_A(H, hom_Z(E,T)) \longrightarrow hom_A(G, hom(E,T)) \longrightarrow hom_A(F, hom_Z(E,T)) \rightarrow 0$

éxata.

Logo $hom_Z(E,T)$ é A-injetiva (prop. III-1.1.)

(b) $\Rightarrow$ (c) Basta tomar $T = Q/Z$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Se $0 \longrightarrow F \longrightarrow G$ é exata, mostremos que :

$0 \longrightarrow E \otimes_A F \longrightarrow E \otimes_A G$ é exata.

Pela prop. III-2.5., basta mostrarmos que:

$\chi(E \otimes_A G) \longrightarrow \chi(E \otimes_A F) \longrightarrow 0$ é exata.

Por (c) temos:

$hom_A(G, \chi(E)) \longrightarrow hom_A(F, \chi(E)) \longrightarrow 0$ é exata, ou seja:

$hom_A(G, hom_Z(E, Q/Z)) \longrightarrow hom_A(F, hom_Z(F, Q/Z)) \longrightarrow 0$ é exata.

Pelo teorema do isomorfismo adjunto temos:

$\hom_Z(E \otimes_A G, Q/Z) \longrightarrow \hom_Z(E \otimes_A F, Q/Z) \longrightarrow 0$ é exata ou seja:

$\chi(E \otimes_A G) \longrightarrow \chi(E \otimes_A F) \longrightarrow 0$ é exata.

Logo E é plano.

Corolário III-2.7. E: A-mod. é plano see para todo ideal f.g. I de A, $0 \longrightarrow E \otimes I \longrightarrow E$ é exata.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Como $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A$ é exata para todo ideal f.g. I e E: plano então $0 \longrightarrow E \otimes I \longrightarrow E \otimes A \cong E$ é exata.

($\Leftarrow$) Demonstraremos usando a condição (c) do teorema de Lambek Suponhamos $0 \longrightarrow E \otimes I \longrightarrow E \cong E \otimes A$ é exata, $\forall$ I:ideal de A.

Como Q/Z é Z-injetiva, temos:

$\hom_Z(E \otimes_A A, Q/Z) \longrightarrow \hom_Z(E \otimes_A I, Q/Z) \longrightarrow 0$ é exata.

Pelo teorema do isomorfismo adjunto vem:

$\hom_Z(A, \hom_Z(E, Q/Z)) \longrightarrow \hom_A(I, \hom_Z(E, Q/Z)) \longrightarrow 0$ é exata.

ou seja:

$\hom_A(A, \chi(E)) \longrightarrow \hom_A(I, \chi(E)) \longrightarrow 0$ é exata.

Então $\chi(E)$ é injetiva.

Portanto pelo teorema de Lambek, E é plano.

O corolário acima fornece um melhor resultado que a proposição I-1.1., possibilitando concluir várias afirmações demonstradas abaixo.

Proposição III-2.8. São equivalentes as afirmações:

(a) E é plano.

(b) Para toda sequência: $0 \to G \to H \to E \to 0$ exata, temos: $0 \to F \otimes G \to F \otimes H \to F \otimes E \to 0$ é exata para todo F:A-mod.

(c) Existe $0 \to G \to H \to E \to 0$ exata, onde H é plano e tal que a sequência:

$0 \to F \otimes G \to F \otimes H \to F \otimes E \to 0$ é exata para todo F A-mod. da forma A/I, onde I: ideal f.g. de A.

<u>Demonstração</u>:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Pela prop. 0-2.1., $F \cong L/R$, L: A-mod. livre.

Então L é plano e $0 \to R \to L \to F \to 0$ é exata.

Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & R \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R \otimes H \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R \otimes E \arrow[d, "h"] & \\
0 \arrow[r] & L \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & L \otimes H \arrow[r] \arrow[d] & L \otimes E \arrow[r] & 0 \\
 & F \otimes G \arrow[r, "a"] & F \otimes H \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

As filas são exatas pela prop. 0-1.7. e pelo fato de E e L serem planos.

Ainda pela prop. 0-1.7. concluimos que $F \otimes G \cong \text{Coker } f$ e $F \otimes H \cong \text{Coker } g$.

Então pela prop. 0-1.2. temos:

$\text{Ker } g \to \text{Ker } h \to \text{Coker } f \to \text{Coker } g$ é exata.

Sendo E plano, então h é injetiva.

Logo:

$\text{Ker } g \to 0 \to F \otimes G \xrightarrow{a} F \otimes H$ é exata ou seja , a é injetiva.

Daí: $0 \to F \otimes G \xrightarrow{a} F \otimes H \to F \otimes E \to 0$ é exata.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Pela prop. I-1.1. $E \cong H/G$, H: A-mod. livre(então plano)

Então:

$0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow 0$ é exata.

Logo por (b), $0 \longrightarrow F \otimes G \longrightarrow F \otimes H \longrightarrow F \otimes E \longrightarrow 0$ é exata, $\forall$ F: A-mod.

Em particular para $F = A/I$, I: ideal f.g. de A.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Por (c), $\exists$ $0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow 0$ exata, onde H é plano tal que:

$0 \longrightarrow G \otimes A/I \longrightarrow H \otimes A/I \longrightarrow E \otimes A/I \longrightarrow 0$ é exata, $\forall$ I: ideal f.g. de A.

Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & I \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & I \otimes H \arrow[r] \arrow[d, "g"] & I \otimes E \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
 & G \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & E & \\
0 \arrow[r] & A/I \otimes G \arrow[r, "a"] \arrow[d] & A/I \otimes H \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

onde as filas e as colunas são exatas, pela prop. 0-1.7. e pelo fato de H ser plano e por (c).

Pela prop. 0-1.2., temos:

$\mathrm{Ker}\, g \longrightarrow \mathrm{Ker}\, h \xrightarrow{d} A/I \otimes G \xrightarrow{a} A/I \otimes H$ é exata.

Como H é plano, g é injetiva, daí $\ker g = 0$ e d é injetiva.

Por outro lado, de (c) temos que: a é injetiva.

Daí $0 = \ker a = \operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} h$

Logo h é injetiva.

Então:

$0 \longrightarrow I \otimes E \xrightarrow{h} E$ é exata $\forall$ I: ideal f.g. de A ou seja E é plano(Cor. III-2.7.)

<u>Definição</u>: $a \in A$ é dito <u>divisor de zero</u> se a aplicação: $f: A \longrightarrow A$ definida por $f(r) = ar \; \forall r \in A$ não é injetiva.

<u>Definição</u>: A: anel e E: A-mod. E é dito <u>torsão livre</u> se $xa = 0$ $x \in E$, $a \in A$, então $x = 0$ ou $a = 0$.

Em domínio de Bezout (todo ideal f.g. é principal) mostraremos que torsão livre é equivalente a ser plano.

<u>Proposição</u> III- 2.9.

(i) E é plano, então para todo $a \in A$, não divisor de zero tal que $xa = 0$, com $x \in A$ implica que $x = 0$

(ii) Se A é domínio de Bezout, então:

E é plano see E é torsão livre.

<u>Demonstração</u>:(i) Seja $f : A \longrightarrow A$ definida por $f(r) = ra \; \forall r \in A$

Como <u>a</u> não é divisor de zero, temos que f é injetiva.

Mas E é plano, daí $I_E \otimes f: E \otimes A \longrightarrow E \otimes A \cong E$ é injetiva

Logo se $(I_E \otimes f)(x) = xa = 0$, temos que $x = 0$.

(ii) Como A é domínio, $\forall$ <u>a</u> $\in A$, <u>a</u> não divisor de zero.

Logo por (i), se $xa = 0$, $x \in E$, temos $x = 0$.

Portanto E é torsão livre.

Reciprocamente, se E é torsão livre, mostraremos que E é plano usando o cor.III-2.7.

Dado I: ideal de A e i: $I \longrightarrow A$: inclusão.

Se $I = (0)$, claramente $I_E \otimes i$ é injetiva.

Se $I \neq (0)$ por hipótese $I = (a)$, $a \neq 0$.

Seja $v: A \longrightarrow I$ definida por $v(r) = ra. \forall r \in A$.

v é um isomorfismo pois sendo A domínio, todo elemento não nulo , não é divisor de zero.

Daí $I_E \otimes v$ é um isomorfismo.

Se $i: I \longrightarrow A$: inclusão, então $i \circ v: A \longrightarrow A$ é tal que $i \circ v(r) = ra$.

Logo $I_E \otimes (i \circ v): E \otimes A \cong E \longrightarrow E \otimes A \cong E$ é injetiva pois E é torsão livre e $a \neq 0$.

Como $I_E \otimes (i \circ v) = (I_E \otimes i) \circ (I_E \otimes v)$ onde $I_E \otimes v$ é um isomorfismo e $I_E \otimes (i \circ v)$ é injetiva.

Concluimos que $I_E \otimes i$ é injetiva, ou seja E é plano.

Exemplo

(1) Q:Z-mod. é plano.

Claro pois Q é torsão livre.

(2) Z/2Z não é Z-mod. plano.

Como $(1 + 2Z)\cdot 2 = 2Z = \overline{0}$ e $(1+2Z) \neq \overline{0} = 2Z$, Z/2Z não é torsão livre.

Daí Z/2Z não é Z-mod. plano.(prop.III-2.9.)

(3) Q é Z-mod. plano, mas Q não é Z-mod. projetivo.

Suponhamos que Q seja Z-mod. projetivo.

Então pela prop. 0-2.3.(5), $\exists\, 0 \neq f \in Q^* = \hom_Z(Q, Z)$

Daí $f: Q \longrightarrow Z$ é tal que para $\forall\, a, b \in Z$, $b \neq 0$ temos:

$$b\, f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) = a\, f(1)$$

Como $b \neq 0$, $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b} f(1)$, ou seja $\forall x \in Q$, $f(x) =$
$= xf(1)$

Desde que $f(x) \in Z$, temos $Q.f(1) \subset Z$.

Mostremos que $Q = Qf(1)$

Sempre temos $Q.f(1) \subseteq Q$ pois Q é Z-mod. . Por outro lado , como $f \neq 0$, $f(1) \neq 0$.

Daí $\frac{a}{b} = \frac{a}{bf(1)} . f(1)$ ou seja $Q \subset Q.f(1)$.

Concluimos que $Q = Q\, f(1) \subset Z$, o que é absurdo.

Logo Q não é Z- projetivo.

Observação: Usando a mesma demonstração acima concluimos : K não e A-projetivo, onde K é o corpo de frações de um domínio A.

-oOo-

CAPÍTULO IV

CARACTERIZAÇÃO HOMOLÓGICA DE MÓDULOS PLANOS

Já estudamos algumas relações entre funtores $\otimes$, hom. com módulos planos. Neste capítulo veremos o funtor "tor" com a mesma finalidade.

§ 1. FUNTOR TOR

<u>Definição</u>: Uma sequência $\mathfrak{X}$: $\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_n} X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_o} X_o$ é dita um <u>complexo</u> se $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$, ou seja : $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$

<u>Definição</u>: $H_n(\mathfrak{X}) = \ker d_{n-1}/\operatorname{Im} d_n$ é dito <u>n-grupo homológico</u> se $n > 0$ e $H_o = X_o/\operatorname{Im} d_o$ se $n = 0$.

<u>Definição</u>: A aplicação $f:\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ de complexos é uma sequência de homomorfismos $\{f_n\}$, $f_n: X_n \longrightarrow Y_n$ tal que o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & X_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{d_o} & X_o \\
& \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_o} \\
\cdots \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{d'_n} & Y_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{d'_o} & Y_o
\end{array}$$

é comutativo.

<u>Proposição</u> IV-1.1. Se $f:\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$, então para cada n, existe $H_n(f): H_n(\mathfrak{X}) = \operatorname{Ker} d_{n-1}/\operatorname{Im} d_n \longrightarrow H_n(\mathfrak{Y}) = \operatorname{Ker} d'_{n-1}/\operatorname{Im} d'_n$ definida por: $H_n(f)(x+\operatorname{Im} d_n) = f_n(x) + \operatorname{Im} d'_n \;\; \forall x \in \operatorname{Ker} d_{n-1}$ [8]

Definição: Dizemos que uma sequência de complexos: $0 \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow 0$ é exata see $0 \longrightarrow W_n \longrightarrow X_n \longrightarrow Y_n \longrightarrow 0$ é exata $\forall n$

Proposição IV-1.2. Se $0 \longrightarrow W_n \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{g_n} Y_n \longrightarrow 0$ é exata $\forall n$, então para todo n existe:

∂_n: $H_n(\mathcal{Y}) = \text{Ker } d_{n-1}/\text{Im } d_n \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{W}) = \text{Ker } d''_{n-2}/\text{Im } d''_{n-1}$ definida por: $\partial_n(y+\text{Im } d_n) = w+\text{Im}d''_{n-1}$ com $f_{n-1}(w) = d'_{n-1}(x)$ e $g_n(x)=y$ onde $H_n(\mathcal{X}) = \text{Ker } d'_{n-1}/\text{Im } d'_n$, $y \in \text{Ker } d_{n-1}$, $w \in W_{n-1}$ e $x \in X_n$.

Proposição IV-1.3. Se $0 \longrightarrow \mathcal{W} \xrightarrow{f} \mathcal{X} \xrightarrow{g} \mathcal{Y} \longrightarrow 0$ é exata, então:

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{W}) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathcal{X}) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathcal{W}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \cdots \xrightarrow{H_1(g)}$$

$$\longrightarrow H_1(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\partial_1} H_0(\mathcal{W}) \xrightarrow{H_0(f)} H_0(\mathcal{X}) \xrightarrow{H_0(g)} H_0(\mathcal{Y}) \longrightarrow 0$$ é exata. [8]

Definição: Sejam M, X_i : A-mod. Uma sequência exata:

$\cdots \xrightarrow{d_n} X_n \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_o} X_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ é uma resolução livre (resolução projetiva) em M se X_i são A-mod. livres (A-mod. projetivos) para todo i

Anteriormente provamos que todo A-mod. admitia uma apresentação, que é uma sequência finita.

Agora demonstraremos o seguinte:

Proposição IV-1.4. Todo A-mod. possui uma resolução livre.

Demonstração : Seja M: A-mod., então pela prop. 0-2.1. $M \cong F_o/S_o$

onde F_o: A-mod. livre.

Assim: $0 \longrightarrow S_o \xrightarrow{f_o} F_o \xrightarrow{\varepsilon_o} M \longrightarrow 0$ é exata.

Analogamente $S_o \cong F_1/S_1$, F_1: A-mod. livre.

Então: $0 \longrightarrow S_1 \xrightarrow{f_1} F_1 \xrightarrow{g_1} S_o \longrightarrow 0$ é exata.

Por indução temos:

$0 \longrightarrow S_n \xrightarrow{f_n} F_n \xrightarrow{g_n} S_{n-1} \longrightarrow 0$ é exata e $F_n/S_n \cong S_{n-1}$, F_n: A-mod.livre, daí obtemos o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \cdots & F_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "g_{n+1}"] & & F_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "g_n"] & & F_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & F_o \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots & S_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_n \arrow[ur, "f_n"] \arrow[dr] & & S_{n-1} \arrow[ur, "f_{n-1}"] \arrow[dr] & & & & S_o \arrow[ur, "f_o"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

onde $d_n = f_{n-1} \circ g_n$, $\forall n$.

Mostraremos que Ker d_n = Im d_{n+1}, para isso mostraremos inicialmente:

(i) Ker $d_n = S_n$ e (ii) Im $d_n = S_{n-1}$

(i) $x \in$ Ker d_n see $d_n(x) = 0$ ou seja $f_{n-1} \circ g_n(x) = 0$ see $g_n(x) \in$ Ker $f_{n-1} = \{0\}$ see $g_n(x) = 0$ see $x \in$ Ker $g_n = S_n$

(ii) Pelo primeiro teorema do isomorfismo temos:

Im $d_n \cong F_n/$Ker $d_n \overset{(i)}{=} F_n/S_n \cong S_{n-1}$

Logo por (i) e por (ii) temos: Ker $d_n = S_n =$ Im d_{n+1}

<u>Definição</u>: Sejam $\mathcal{X} : \ldots \xrightarrow{d_n} X_n \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_o} X_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$

uma resolução projetiva de M e o complexo:

$$\mathcal{X} \otimes N : \ldots \xrightarrow{d_{n*}} X_n \otimes N \longrightarrow X_{n-1} \otimes N \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \otimes N \xrightarrow{d_{o*}} X_o \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow 0$$

onde $d_{n_*} = d_n \otimes I_N \ \forall n$

$H_n(\mathcal{X} \otimes N) = \operatorname{Ker} d_{n-1_*} / \operatorname{Im} d_{n_*}$: n-grupo homológico de $\mathcal{X} \otimes N$ é dito

$\underline{\operatorname{tor}_n^A(M,N)}$ se $n > 0$ e $H_o(\mathcal{X} \otimes N) = (X_o \otimes N)/\operatorname{Im} d_{o_*} = \underline{\operatorname{tor}_o^A}(M,N)$ se $n = 0$

<u>Observação</u>: $\operatorname{tor}_n(M,N)$ é independente da escolha da resolução de M. [8]

<u>Lema</u> IV-1.5. $\operatorname{tor}_o(M,N) = M \otimes N$

<u>Demonstração</u>: Seja $X_1 \xrightarrow{d_o} X_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ sequência exata, então

pela prop. 0-1.7. temos:

$X_1 \otimes N \xrightarrow{d_{o*}} X_o \otimes N \xrightarrow{\varepsilon_*} M \otimes N \longrightarrow 0$ é exata.

Então $\operatorname{Im} d_{o_*} = \operatorname{Ker} \varepsilon_*$

Por outro lado:

$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \varepsilon_* \longrightarrow X_o \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow 0$ é exata, ou seja $M \otimes N =$

$= X_o \otimes N / \operatorname{Ker} \varepsilon_* = X_o \otimes N / \operatorname{Im} d_{o_*} = H_o(\mathcal{X} \otimes N) = \operatorname{tor}_o(M,N)$

<u>Proposição</u> IV-1.6. Se $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata e

$\ldots \longrightarrow P_{i+1} \longrightarrow P_i \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M' \longrightarrow 0$,

$\ldots \longrightarrow \overline{P}_{i+1} \longrightarrow \overline{P}_i \longrightarrow \ldots \longrightarrow \overline{P}_1 \longrightarrow \overline{P}_o \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ são resoluções projetivas

de M' e M'' respectivamente, então:

$\ldots \longrightarrow P_{i+1} \oplus \overline{P}_{i+1} \longrightarrow P_i \oplus \overline{P}_i \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \oplus \overline{P}_1 \longrightarrow P_o \oplus \overline{P}_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$

é uma resolução projetiva de M.

Demonstração: Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & 0 & & 0 & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r] & P_0 \oplus \bar{P}_0 \arrow[r] & \bar{P}_0 \arrow[u, "\bar{\varepsilon}"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como P_0 é projetivo, $\exists\ \mu : \bar{P}_0 \longrightarrow M$ t.q. $g \circ \mu = \bar{\varepsilon}$

Definamos $\varepsilon' : P_0 \oplus \bar{P}_0 \longrightarrow M$ por:

$\varepsilon'(x,y) = f \circ \varepsilon(x) + \mu(y)$, onde $x \in P_0$ e $y \in \bar{P}_0$

Claramente ε' é um homomorfismo bem definido.

Mostemos que ε' é sobrejetivo

Dado $b \in M$, $g(b) \in M''$, como $\bar{\varepsilon}$ é sobre, $\exists\ y \in \bar{P}_0$ t.q. $\bar{\varepsilon}(y) = g(b)$.

Daí $g \circ \mu(y) = \bar{\varepsilon}(y) = g(b)$, então $g(b - \mu(y)) = 0$ ou seja $b - \mu(y) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

Logo $\exists\ a \in M'$ t.q. $b - \mu(y) = f(a)$.

Mas ε é sobre e $a \in M'$, então $\exists\ x \in P_0$ t.q. $a = \varepsilon(x)$.

Portanto $\exists\ (x,y) \in P_0 \oplus \bar{P}_0$ t.q. $\varepsilon'(x,y) = f \circ \varepsilon(x) + \mu(y) =$

$= f(a) + \mu(y) = b - \mu(y) + \mu(y) = b$.

Logo obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r] & P_0 \oplus \bar{P}_0 \arrow[u, "\varepsilon'"] \arrow[r] & \bar{P}_0 \arrow[u, "\bar{\varepsilon}"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde as linhas e as colunas são exatas.

Pela Prop. 0-1.2.:

$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varepsilon \longrightarrow \operatorname{Ker}\varepsilon' \longrightarrow \operatorname{Ker}\bar{\varepsilon} \longrightarrow 0$ é exata.

Agora usando este mesmo argumento sobre o diagrama;

$$\begin{tikzcd} & 0 & & 0 & \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varepsilon \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varepsilon' \arrow[r] & \operatorname{Ker}\bar{\varepsilon} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[u, "d_o"] \arrow[r] & P_1 \oplus \bar{P}_1 \arrow[r] & \bar{P}_1 \arrow[u, "\bar{d}_o"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Obtemos:

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_o \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r] & P_o \oplus \bar{P}_o \arrow[u, "\varepsilon'"] \arrow[r] & \bar{P}_o \arrow[u, "\bar{\varepsilon}"] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[u, "d_o"] \arrow[r] & P_1 \oplus \bar{P}_1 \arrow[u, "d'_o"] \arrow[r] & \bar{P}_1 \arrow[u, "\bar{d}_o"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por indução teremos:

$\dots \to P_i \oplus \bar{P}_i \to \dots \to P_1 \oplus \bar{P}_1 \to P_o \oplus \bar{P}_o \to M \to 0$: resolução projetiva de M.

<u>Proposição</u> IV-1.7. Se $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ sequência exata de A-mod. e N: A-mod., então:

$\to tor_{n+1}(M'',N) \to tor_n(M',N) \to tor_n(M,N) \to tor_n(M'',N) \to$

$\to tor_{n-1}(M',N) \to \dots \to tor_1(M'',N) \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$

é exata.

<u>Demonstração</u>:

Pela Prop. IV-1.4. M' e M" admitem resoluções livres:

$\mathbb{X}: \ldots \to X_i \to X_{i-1} \to \ldots \to X_1 \to X_o \to M' \to 0$ e

$\mathbb{W}: \ldots \to W_i \to W_{i-1} \to \ldots \to W_1 \to W_o \to M'' \to 0$

Pela Prop. IV-1.6.

$\mathbb{Y}: \ldots \to X_i \oplus W_i \to \ldots \to X_1 \oplus W_1 \to X_o \oplus W_o \to M \to 0$ é uma resolução livre de M.

Pondo $Y_i = X_i \oplus W_i$, obtemos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & M'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_o \arrow[r] \arrow[u] & Y_o \arrow[r] \arrow[u] & W_o \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são exatas.

Logo $0 \to \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \to \mathbb{W} \to 0$ é exata.

Como $Y_i = X_i \oplus W_i$, temos $Y_i \otimes N = (X_i \otimes N) \oplus (W_i \otimes N)$

Logo:

$0 \to X_i \otimes N \to Y_i \otimes N \to W_i \otimes N \to 0$ é exata para todo i

ou seja:

$0 \to \mathbb{X} \otimes N \to \mathbb{Y} \otimes N \to \mathbb{W} \otimes N \to 0$ é exata.

Então pela Prop. IV-1.3. vem:

$$\ldots H_n(\mathcal{X} \otimes N) \longrightarrow H_n(\mathcal{Y} \otimes N) \longrightarrow H_n(\mathcal{W} \otimes N) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{X} \otimes N) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_1(\mathcal{W} \otimes N) \longrightarrow H_o(\mathcal{X} \otimes N) \longrightarrow H_o(\mathcal{Y} \otimes N) \longrightarrow H_o(\mathcal{W} \otimes N) \longrightarrow 0$$ é

exata.

Por definição de <u>tor</u> e pelo lema IV-1.5. temos:

$$\ldots \longrightarrow tor_n(M',N) \longrightarrow tor_n(M,N) \longrightarrow tor_n(M'',N) \longrightarrow tor_{n-1}(M',N) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots tor_1(M'',N) \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$ é exata.

§ 2 . MÓDULOS PLANOS E FUNTOR TOR.

Até o presente momento vimos as propriedades específicas do funtor "tor", a fim de que possamos entender a sua relação com módulos planos que apresentaremos abaixo .

<u>Teorema</u> IV- 2.1. São equivalentes as afirmações:

(a) E é plano.

(b) Para todo F: A-mod. e todo $n \geq 1$, $tor_n(E,F) = 0$

(c) para todo F: A-mod., $tor_1(E,F) = 0$

(d) para todo ideal I:f.g. de A, $tor_1(E,A/I) = 0$

<u>Demostração</u>:

(a) $\Rightarrow$ (b) Pela prop. IV-1.4. $\exists$ $\ldots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_o} X_o \longrightarrow F \longrightarrow 0$ resolução livre de F.

Como E é plano, vem:

$$\ldots E \otimes X_n \xrightarrow{d_{n-1*}} E \otimes X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow E \otimes X_1 \xrightarrow{d_{o*}} E \otimes X_o \longrightarrow E \otimes F \longrightarrow 0$$ exata onde $d_{n_*} = I_E \otimes d_n$

Daí $tor_n(E,F) = Ker\, d_{n-1_*}/Im\, d_{n_*} = 0 \ \forall n \geq 1$

(b) $\Rightarrow$ (c) e (c) $\Rightarrow$ (d) dão óbvias

(d) $\Rightarrow$ (a) Como $0 \to I \to A \to A/I \quad 0$ é exata, então pela prop.IV-1.7. temos:

$tor_1(E,A/I) \longrightarrow E \otimes I \longrightarrow E \otimes A$ é exata.

Por (d)., $tor_1(E,A/I) = 0$

Logo: $0 \longrightarrow E \otimes I \longrightarrow E$ é exata, $\forall I$: ideal f.g. de A.

Então pelo cor. III-2.7., E é plano.

Proposição-IV-2.2. Se $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ é exata tal que E" é plano, então:

E'é plano see E é plano.

Demostração:

Suponhamos que E' seje plano.

Então pela prop. IV-1.7. temos:

$tor_1(E',F) \longrightarrow tor_1(E,F) \longrightarrow tor_1(E'',F)$ é exata $\forall F$:A-mod.

Mas por hipótese E' e E" são planos, daí pelo teorema anterior temos:

$0 \longrightarrow tor_1(E,F) \longrightarrow 0$ é exata ou seja $tor_1(E,F) = 0$

Portanto pelo teo. IV-2.1. concluimos que E é plano.

Reciprocamente, suponhamos que E seje plano.

Então pela prop. IV-1.7.:

$tor_2(E'',F) \longrightarrow tor_1(E',F) \longrightarrow tor_1(E,F)$ é exata.

Mas pelo teorema anterior, sendo E e E" planos, temos:

$tor_2(E'',F) = 0$ e $tor_1(E,F) = 0$.

Daí $tor_1(E',F) = 0$ e então E' é plano(teo. IV-2.1.)

Observação :

(1) Sejam E: A-mod., M, N : submod. de E tal que M + N é plano. Então M e N são planos see $M \cap N$ é plano.

Demonstração:

Como $0 \to M \cap N \to M \oplus N \to M + N \to 0$ è exata [6] e por hipótese M + N é plano, então pela Prop. IV-1.7. M e N são planos see $M \oplus N$ é plano see $M \cap N$ é plano.

(2) Se $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ é exata, é possível que E e E' sejam planos, sem que E" seja plano.

Tomando A = Z, E = Z, E' = 2Z e E" = Z/2Z

Obtemos: $0 \to 2Z \to Z \to Z/2Z \to 0$ exata com 2Z e Z planos (pois são torsões livres), mas Z/2Z não é plano(pois não é torsão livre).

Proposição IV- 2.3. Sejam A, B : anéis, $f: A \to B$ hom. e E : A-mod. Então são equivalentes as afirmações:

(a) Para todo F: B-mod. $tor_1^A(F,E) = 0$, onde F tem a estrutura de A-mod. definido por f.

(b) $B \otimes_A E$: B-mod. é plano e $tor_1^A(B,E) = 0$

Demostração:

(a) = (b) Tomando F = B, então por (a) $tor_1^A(B,E) = 0$

Mostremos que $B \otimes_A E$ é B-plano.

Seja $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ sequência exata de B-mod.

Por restrição de escalares torna-se uma sequência de A-mod.

Então pela prop. IV- 1.7. temos:

$tor_1^A(F'',E) \to F' \otimes_A E \to F \otimes_A E \to F'' \otimes_A E \to 0$ é exata.

Por (a) e por $F \otimes_A E \cong (F \otimes_B B) \otimes_A E \cong F \otimes_B (B \otimes_A E), \forall F$: B-mod.

Concluimos:

$$0 \longrightarrow F' \otimes_B (B \otimes_A E) \longrightarrow F \otimes_B (B \otimes_A E) \longrightarrow F'' \otimes_B (B \otimes_A E) \longrightarrow 0 \text{ é exata}$$

Então pela prop. III-2.2. $B \otimes_A E$ é B-mod. plano.

(b) $\Rightarrow$ (a) Como para todo $L = B^{(I)}$: B-mod. livre, L é um A-mod. por restrição de escalares temos:

$$tor_1^A(L,E) = (tor_1^A(B,E))^I = 0 \qquad \text{(I)}$$

Mas pela prop. 0-2.1. $F \cong L/H$, L: B-mod. livre, daí:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow 0 \text{ é exata.}$$

Então pela prop. IV- 1.7.

$$tor_1^A(L,E) \longrightarrow tor_1^A(F,E) \longrightarrow H \otimes E \longrightarrow L \otimes E \text{ é exata,}$$

e ainda usando (I) temos:

$$0 \longrightarrow tor_1^A(F,E) \longrightarrow H \otimes E \longrightarrow L \otimes E \quad \text{é exata}$$

Por outro lado sendo $B \otimes_A E$: B-mod. plano vem:

$$0 \longrightarrow H \otimes_B (B \otimes_A E) \longrightarrow L \otimes_B (B \otimes_A E) \text{ é exata ou seja}$$

$$0 \longrightarrow H \otimes_A E \longrightarrow L \otimes_A E \quad \text{é exata.}$$

Daí obtemos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & tor_1^A(F,E) & \longrightarrow & H \otimes E & \longrightarrow & L \otimes E \\
| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H \otimes E & \longrightarrow & H \otimes E
\end{array}$$

Pelo 5-lema, $tor_1^A(F,E) = 0 \ \forall \ F$: B-mod.

-o0o-

BIBLIOGRAFIA

[1] - ATIYAH ,M.F. e MACDONALD, H.G. :Introduction to comm tive Algebra, London, Addison Wesley (1969)

[2] - BOURBAKI, N. : Elements of Mathematics, Comutative gebra , Hermann, Paris (1972)

[3] - KAPLANSKY, I. : Comutative Rings, Allyn Bacon, Bost Mass. (1970)

[4] - KAPLANSKY, I. : Fields and Rings , Chicago , Univers of Chicago Press (1969)

[5] LAMBEK, J. : A módule is flat if and only if its cha cter módule is injetive - Can. Math Bull 7 (1964) pp 237-34

[6] LAZARD, D. : Sur les modules plats - C.R. Acad. Sci. Paris (258) (1964) 6313-6316.

[7] -MACLANE, S. : Homology , Academic Press (1963)

[8] ROTMAN, J.J.: Notes on homological algebras, New Yor Van Nostrand Reinholh Co. (1968)

-oOo-