Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Derivações Localmente Nilpotentes de certas K-álgebras Finitamente Geradas

Marcelo Oliveira Veloso

Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti

Outubro de 2009 - Campinas-SP

[2]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES, BIG-UNICAMP e PED-UNICAMP.

Derivações localmente nilpotentes de certas k-álgebras finitamente geradas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Marcelo Oliveira Veloso** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de Outubro de 2009.

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti.

Prof. Dr. Daniel Levcovitz.

Prof. Dr. Ives Emile Albert Lequain.

Prof. Dr. Antônio José Engler.

Prof. Dr. Fernando Torres Orihuela.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Veloso, Marcelo Oliveira

V546d Derivações localmente nilpotentes de certas k-álgebras finitamente geradas/Marcelo Oliveira Veloso -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Paulo Roberto Brumatti.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Álgebra diferencial. 2.Álgebra cumutativa. 3. Automorfismo. I. Brumatti, Paulo Roberto. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Locally nilpotent derivations of certain finitely generated k-algebras

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential algebra. 2. Commutative algebra. 3. Automorphisms

Área de concentração: Álgebra Comutativa

Titulação: Doutor em matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Yves Albert Emile Lequain (IMPA)
Prof. Dr. Daniel Levcovitz (ICMC – USP)
Prof. Dr. Antônio José Engler (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela (IMECC - UNICAMP)

Data da defesa: 14/10/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de outubro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Prof(a). Dr(a). YVES ALBERT EMILE LEQUAIN

Prof(a). Dr(a). DANIEL LEVCOVITZ

Prof(a). Dr(a). ANTONIO JOSE ENGLER

Prof(a). Dr(a). FERNANDO EDUARDO TORRES ORIHUELA

Januária, terra amada
Januária, terra amada
Flor agreste da chapada
dos rincões do meu Brasil.
Seus frondosos juazeiros,
Seus coqueiros altaneiros
Abrem os braços ao céu de anil.
....
As gaivotas lá na praia
quando à tarde o céu desmaia
nos desertam nostalgia.
As inhambus entre arvoredos
quando piam os seus segredos
têm encantos e tem poesias.
As empoeiras e os poções
Tudo são recordações
que se sente e ninguém vê.
Só a alma sertaneja
na canção que murmureja
não se esquece de você.

E pelo rio cor de prata
manda adeus a verde mata
e saudades para você.

Autor: Tertuliano Silva

À minha mãe Lindaura

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar ao bom Deus Jeová por ter me conduzido nesta caminhada.

À minha família pelo encorajamento. Em especial a minha Mãe Lindaura pela educação e pelo exemplo.

À minha amada esposa Gilcélia pela companhia, encorajamento e apoio. Minha Flor você é minha alegria, minha amiga, meu grande AMOR.

Ao Professor Brumatti por ter me orientado, pela competência como matemático, pela paciência enquanto professor, pela disponibilidade e principalmente pela amizade.

À Raquel pelo incentivo, pela alegria que sempre me acolheu e pelo apoio técnico no inglês.

Aos Professores da banca pelas orientações, sugestões e correções no texto, em especial ao Prof. Yves Lequain pelas valiosas contribuições.

À querida Dalva, Professora do meu primeiro ano escolar.

À carinhosa Professora Dayse a quem devo o amor pela matemática.

Os professores João Carlos e Ronaldo Sampaio por terem incentivado a minha paixão pelos números.

Ao Professor Helder Candido pelo inestimável apoio durante a graduação.

A todos os Professores que tive o prazer de ser aluno e que de uma forma ou de outra contribuíram nesta caminhada.

Aos amigos que conquistei nessa caminhada e que muito me enobrecem com sua amizade: Marcelo Furtado, Aline, Rinaldo, Ingride, Clécio, Joelma, Fábio, Marcão, Evandro, Dimas, José Antônio, José Barros, Gina, Agnaldo, Lorena, Márcio, João de Deus, Feodor, Sandra, Sílvia e o Robertão.

Ao pessoal do futebol do IMECC pelos momentos de descontração e pela oportunidade de ser protagonista no futebol.

Aos funcionários do IMECC em especial ao Ednaldo, Cidinha e Tânia.

Enfim a todos que contribuíram na realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho é dedicado ao estudo das derivações localmente nilpotentes de certas K-álgebras finitamente geradas, onde K é um corpo de característica zero. Estes domínios são generalizações de anéis bem conhecidos na literatura sendo um deles o anel de Fermat. Mais precisamente, caracterizamos o conjunto das derivações localmente nilpotentes destes domínios ou de um subconjunto deste conjunto. Também calculamos o ML invariante destes domínios e como aplicação direta destas informações encontramos um conjunto de geradores para o grupo dos automorfismos de um destes domínos. No caso do anel de Fermat mostramos que nem sempre temos um domíno rígido. Além disso, verificamos que a Conjectura de Nakai é verdadeira para o anel de Fermat.

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of locally nilpotent derivations of certain finitely generated K-algebras, where K is a field of zero characteristic. These domains are generalizations of the well-known rings in the literature. One of this is the Fermat ring. More precisely, we characterize the set of locally nilpotent derivations of these domains or some subsets of this set. We also calculate the ML invariant of these domains and as a direct application of these results we find a set of generators for the group of automorphisms of some of these domains. We show that the Fermat ring is not always a rigid domain . Furthermore, we prove that Nakai's conjecture is true for the ring Fermat.

SUMÁRIO

Introdução

As derivações localmente nilpotentes de um anel desempenham um papel importante em álgebra comutativa e na geometria algébrica. Essa afirmação é consequência direta dos inúmeros problemas que podem ser reformulados ou atacados utilizando tais derivações. Um exemplo é a Conjectura do Jacobiano cujo enunciado é o seguinte: Seja $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma função polinomial tal que $\det(Jac(F)) \in \mathbb{C}^*$, então F possui inversa e sua inversa é uma função polinomial (veja [7]). Se $n = 1$ a resposta é positiva, claramente. Contudo, até o presente momento, não se tem uma resposta para $n \geq 2$! No artigo [25] A. Nowicki mostrou que a Conjectura do Jacobiano é equivalente a afirmar que sendo $\mathbb{C}^{[n]} = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, o anel polinomial, a única base comutativa para o $\mathbb{C}^{[n]}$-módulo das derivações do anel polinomial $Der_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}^{[n]}$ é $\{\frac{\partial}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n}\}$, a menos de uma mudança de coordenadas.

Em alguns problemas é suficiente conhecer informações sobre o núcleo de uma derivação localmente nilpotente para se ter uma resposta. Por exemplo dos 23 famosos problemas de Hilbert o décimo-quarto coloca a seguinte questão: Seja K um corpo de característica zero, $K^{[n]}$ o anel polinomial $K[X_1, \ldots, X_n]$, $K^{(n)}$ o corpo de frações de $K^{[n]}$ e L um subcorpo de $K^{(n)}$ contendo K. Então a subálgebra $L \cap K^{[n]}$ é finitamente gerada como K-álgebra? Uma solução positiva deste problema foi dada por O. Zariski [32], em 1954, quando $trdeg_K\, L \leq 2$. Atualmente existem contra-exemplos para todo $n > 2$ (veja [14], [15], [2]). Para $n \geq 4$ construir um contra-exemplo para o décimo-quarto problema de Hilbert é equivalente a encontrar uma derivação localmente nilpotente, D, em $K^{[n]}$ tal que o núcleo desta derivação,

$ker\,D$, não seja finitamente gerado, visto que $Frac(ker\,D) \cap K^{[n]} = ker\,D$ (veja [2], [8]).

Outra questão relevante, por si mesma, é determinar o conjunto das derivações localmente nilpotentes de um determinado anel. Mas, até o presente momento, somente para algumas classes de anéis é conhecida uma caracterização para as suas derivações localmente nilpotentes. Considere o caso do anel polinomial $\mathbb{C}^{[n]}$. Quando $n = 1$ é uma tarefa fácil mostrar que $\{a\frac{\partial}{\partial X} \mid a \in \mathbb{C}\}$ são as derivações localmente nilpotentes do anel $\mathbb{C}^{[1]}$. A descrição do caso $n = 2$ foi dada por R. Rentcher em [27]. Já para $n \geq 3$ até o presente momento pouco se conhece. Existe uma resposta parcial para o caso $n = 3$ dada por D. Daigle em [6].

Uma ferramenta muito importante neste contexto é o ML invariante de um anel, definido como a interseção dos núcleos das derivações localmente nilpotentes do anel. Este invariante foi introduzido em 1996 por L. Makar-Limanov no artigo [19] e utilizado, com sucesso, para mostrar que o anel quociente $\mathbb{C}[X,Y,Z,T]/(X + X^2Y + Z^2 + T^3)$ não é isomorfo ao anel polinomial $\mathbb{C}[X,Y,Z]$. Em 2001 no artigo [20] L. Makar-Limanov caracteriza as derivações localmente nilpotentes do anel $A = K[X,Y,Z]/(X^nY - \varphi(Z))$ e calcula o ML invariante. E como aplicação direta da caracterização do ML de A ele determina um conjunto de geradores para o grupo dos K-automorfismos de A.

O propósito principal deste trabalho são as derivações localmente nilpotentes dos anéis

$$B = K[X,Y,Z]/(f(X)Y - \varphi(X,Z)),$$

$$C = \frac{K[X_1,\ldots,X_{n+1},Z]}{(X_1\cdots X_{n+1} - \varphi(Z))} \quad \text{e} \quad B_n^m = \frac{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]}{(X_1^m + \cdots + X_n^m)}\ .$$

No artigo [20] L. Makar-Limanov encontra uma caracterização das derivações localmente nilpotentes do anel $A = K[X,Y,Z]/(X^nY - \varphi(Z))$ e como aplicação caracteriza o grupo dos automorfismos de A. Neste trabalho consideramos a seguinte generalização deste anel, o anel $B = K[X,Y,Z]/(f(X)Y - \varphi(X,Z))$. Para o anel B foi possível determinar o conjuntos das suas derivações localmente nilpotentes, e ainda conseguimos obter um conjunto de geradores para o grupo dos K-automorfismos de B.

O anel $A = K[X,Y,Z]/(X^nY - \varphi(Z))$ quando $n = 1$ também foi estudado por D. Daigle no artigo [3]. Neste trabalho generalizamos o anel A, quando $n = 1$, da seguinte maneira $C = \frac{K[X_1,\ldots,X_{n+1},Z]}{(X_1\cdots X_{n+1}-\varphi(Z))}$. Para este novo anel, C, provamos que C é um domínio normal, determinamos quando C é domínio de fatoração única e também encontramos exemplos de derivações localmente nilpotentes e irredutíveis.

O anel $B_n^m = \frac{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]}{(X_1^m+\cdots+X_n^m)}$ onde, $n \geq 3$ e $m \geq 2$, é conhecido na literatura como o *Anel Generalizado de Fermat.* No artigo [10] D. Fiston e S. Maubach mostraram que para $m \geq n^2-2n$ o conjunto das derivações localmente nilpotentes do anel de Fermat B_n^m se resume a derivação nula, ou seja, B_n^m é um *domínio rígido.* A partir deste resultado imaginamos que o mesmo deveria ocorrer para todo $n \geq 3$ e $m \geq 2$, ou seja, no anel de Fermat a única derivação localmente nilpotente é a nula.

Logo no início de nossos estudos percebemos que a nossa primeira impressão era falha. Aqui provamos que para $m = 2$ o anel de Fermat B_n^2 não é um domínio rígido, ou seja, existem derivações localmente nilpotentes não nulas em B_n^2 para todo $n \geq 3$. Além disso verificamos que estas derivações são irredutíveis e calculamos o ML invariante do anel B_n^2. Já quando $m > 2$ mostramos que a única derivação triangular no anel B_n^m é a derivação nula. O que reforça o nossa intuição de que para $m > 2$ e $n \geq 3$ o anel de Fermat B_n^m é um domínio rígido. Contudo, até o presente momento, ainda não temos uma resposta para esta indagação.

Ainda sobre o anel de Fermat, por sugestão de meu orientador, desviamos um pouco o assunto e fomos tratar de fazer um estudo sobre a conjectura de Nakai para este anel, já que em [29] Singh mostrou que tal conjectura é verdadeira para o anel de coordenadas de Hipersuperfície homogêneas em até 3 variáveis. Aqui demonstramos que a conjectura de Nakai é verdadeira para o anel de Fermat, ou seja, para $m \geq 2$ apresentamos derivadas de ordem 2 do anel de Fermat que não são obtidas por interações de derivações de ordem 1.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo introduzimos os conceitos básicos sobre as derivações localmente nilpotentes de um anel e sobre diferenciais de ordem superior que serão utilizados no restante do texto . Lembramos que o leitor já familiarizado com a linguagem básica sobre as derivações localmente nilpotentes de um anel pode iniciar a leitura deste texto no segundo capítulo e utilizar o primeiro como referência. Já o segundo capítulo é dedicado ao estudo das derivações localmente nilpotentes do anel $B = K[X,Y,Z]/(f(X)Y - \varphi(X,Z))$. Neste capítulo determinamos o ML invariante do anel B, caracterizamos as suas derivações localmente nilpotentes e por fim descrevemos o conjuntos dos K-automorfismos de B, no caso particular em que $\varphi(X,Z)) \in K[Z]$. Ainda neste capítulo mostramos que o anel $C = \frac{K[X_1,\ldots,X_{n+1},Z]}{(X_1\cdots X_{n+1}-\varphi(Z))}$ é normal, determinamos quando C é DFU, encontramos exemplos de derivações localmente nilpotentes e irredutíveis em C, descrevemos os núcleos destas derivações e por fim calculamos o ML invariante de C.

No terceiro capítulo iniciamos o estudo das derivações localmente nilpotentes do anel de Fermat $B_n^m = \frac{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]}{(X_1^m+\cdots+X_n^m)}$ onde, $n \geq 3$ e $m \geq 2$ em especial tratamos o caso $m = 2$, ou seja, B_n^2. Iniciamos o capítulo encontrando um conjunto de geradores para o B_n^m-módulo, $Der(B_n^m)$, das derivações do anel de Fermat. Depois obtemos alguns resultados gerais sobre o anel de Fermat, dentre estes resultados, provamos que a única derivação triangular em B_n^m é a nula. No caso particular B_n^2 obtemos uma descrição nas derivações localmente nilpotente e lineares. Encontramos exemplos de derivações localmente nilpotentes e irredutíveis em B_n^2, descrevemos os núcleos destas derivações e por fim calculamos o ML invariante do anel B. Encerramos o capítulo provando que a conjectura de Nakai é verdadeira para o anel B_n^m.

CAPÍTULO 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo iremos introduzir a terminologia básica e os conceitos que serão utilizados ao logo deste texto. As principais referências são os textos [4], [11] e [26]. Nosso objetivo é familiarizar o leitor com os conceitos relacionados as derivações de uma K-álgebra finitamente gerada, sendo K um corpo de característica zero. No capítulo 2 e em parte do 3 o enfoque será nas derivações localmente nilpotentes, assim, aqui, vamos enunciar resultados que serão utilizados e chamar a atenção do leitor sobre a variedade de situações onde as derivações localmente nilpotentes ocorrem naturalmente. Os resultados são bem conhecidos e por isso omitiremos a maioria das demonstraçoes, evidentemente, nestes casos, indicaremos as refências relativa ao assunto. O leitor acostumado com estes conceitos pode ir direto aos outros capítulos e utilizar este como refêrencia para as notações e terminologia utilizadas.

Vamos fixar algumas notações. A palavra *anel* significa anel comutativo com unidade. A característica de um anel, A, será denotada por $char(A)$. Neste texto toda anel tem característica zero. Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra, iremos considerar $\mathbb{K}$ como um subanel de A. Por um *domínio*, A, entendemos domínio de integridade e neste caso seu corpo de frações será denotado por $Frac(A)$, também dizemos que A é um *domínio sobre* $\mathbb{K}$ quando A é uma $\mathbb{K}$-álgebra que também é um domínio. No caso em que $\mathbb{K}$ e A são domínios o grau de transcendência de A sobre $\mathbb{K}$ será o grau de transcendência de $Frac(A)$ sobre $Frac(\mathbb{K})$, o qual será denotado por: $trdeg_{\mathbb{K}}(A)$. O conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos são denotados pelas letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, respectivamente.

1.1 Derivações de um Anel

Uma *derivação* do anel A é uma função $D : A \to A$ que é linear com respeito a adição e satisfaz a *regra de Leibniz* no produto, i.e., $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ para todos $a, b \in A$. É bastante simples de verificar que o conjunto de todas as derivações de A, notação $Der(A)$, é um A-módulo, isto é, dados $D_1,\ D_2 \in Der(A)$ e $a, b \in A$ então $aD_1 + aD_2 \in Der(A)$. Um primeiro resultado a ser citado é a fórmula generalizada de Leibniz.

Proposição 1 *Se $D \in Der(A)$, $a, b \in A$, então*

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i}(a)D^i(b)$$

Demonstração. Segue por indução em n. $\diamondsuit$

Um ideal I do anel A é chamado de *ideal diferencial* em relação à $D \in Der(A)$ se $D(I) \subset I$ (alguns autores usam D-ideal ou ideal integral, veja [11]). Seja I um ideal diferencial de A em relação a $D \in Der(A)$ e considere o anel quociente $\overline{A} = \frac{A}{I}$. Em $Der(\overline{A})$ existe uma única derivação $\overline{D}$ tal que $\pi D = \overline{D}\pi$, onde π é o homomorfismo canônico de A em $\overline{A}$. A derivação $\overline{D}$ é definida por $\overline{D}(a + I) = D(a) + I$ para todo $a \in A$.

Seja S um subconjunto multiplicativamente fechado do anel A e A_S o seu anel de frações. Se $D \in Der(A)$, então existe uma única derivação $D_S \in Der(A_S)$ tal que $\theta D = D_S\theta$, onde θ é o homomorfismo natural de A em A_S dado por $\theta(a) = \frac{a}{1}$. A derivação D_S é definida por $D(a/s) = (D(a)s - sD(a))/s^2$, para qualquer $a \in A$ e $s \in S$.

O núcleo de uma derivação do anel A é denotado por $ker\, D = \{a \in A \mid D(a) = 0\}$, também chamado de anel de constantes de D (alguns autores utilizam a notação A^D). É fácil ver que $ker\, D$ é um subanel de A. Se $\mathbb{K}$ é subanel de A, notação $\mathbb{K} \leq A$, e $D(\mathbb{K}) = 0$ nós dizemos que D é uma $\mathbb{K}$-*derivação de A* . Observe que $\mathbb{K} \leq ker\, D \leq A$. O conjunto de todas as $\mathbb{K}$-derivações de A é um submódulo de $Der(A)$ e é denotado por $Der_{\mathbb{K}}(A)$.

Seja $\mathbb{K}^{[n]} = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ o anel polinomial em n-variáveis sobre $\mathbb{K}$. O corpo de frações de $\mathbb{K}^{[n]}$ será denotado por $\mathbb{K}^{(n)} = \mathbb{K}(X_1, \ldots, X_n)$. É um fato bastante conhecido que o conjunto das derivadas parciais, $\{\frac{\partial}{\partial X_i}; 1 \leq i \leq n\}$ é uma $\mathbb{K}^{[n]}$-base livre para $Der_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{[n]})$. Ou seja, dada $D \in Der_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{[n]})$, existem únicos $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}^{[n]}$ de forma que $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial X_i}$. Ou ainda, reciprocamente, dados $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}^{[n]}$, existe uma única $D \in Der_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{[n]})$ satisfazendo $D(X_i) = f_i$, para $i = 1, \ldots, n$. A partir deste fato pode-se ver, de maneira natural, que se $A = \frac{\mathbb{K}^{[n]}}{I}$ então $d \in Der_{\mathbb{K}}(A)$ se e somente se existe $D \in Der_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{[n]})$ tal que $D(I) \subseteq I$ e para todo $f \in \mathbb{K}^{[n]}$ tem-se que $d(f + I) = D(f) + I$.

No estudo das derivações nilpotentes a derivação de tipo Jacobiana de $Der(\mathbb{K}^{[n]})$, que vamos descrever em seguida, exerce um papel fundamental.

Seja $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{K}^{(n)}$ o *Jacobiano* de $f_1, \ldots, f_n$ relativo a $X_1, \ldots, X_n$ é o determinante

$$Jac(f_1, \ldots, f_n) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{ij}.$$

Um resultado fundamental e bastante conhecido (veja Lema 3.5 em [11]) a respeito do Jacobiano é o seguinte:

$$Jac(f_1, \ldots, f_n) \neq 0 \Longleftrightarrow \{f_1, \ldots, f_n\} \text{ é algebricamente independente sobre } \mathbb{K}.$$

Dado $f = \{f_1, \ldots, f_{n-1}\} \subset \mathbb{K}^{[n]}$, a *derivação jacobiana* determinada pelo conjunto f, $\Delta_f \in Der_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{[n]})$, é definida por:

$$\Delta_f(g) = Jac(f_1, \ldots, f_{n-1}, g),$$

para todo $g \in \mathbb{K}^{[n]}$. Observe que $\Delta_f \neq 0$ se, e somente se, f é algebricamente independente sobre $\mathbb{K}$ e mais ainda, neste caso, se $A = ker\, \Delta_f$, então o grau de transcendência de A sobre $\mathbb{K}$ é exatamente $n - 1$.

Exemplo 2 *Seja $\mathbb{C}[X, Y] = \mathbb{C}^{[2]}$ e $f = X^3 + Y^3 \in \mathbb{C}[X, Y]$. Então*

$$\Delta_f(g) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial(X^3+Y^3)}{\partial X} & \frac{\partial(X^3+Y^3)}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial X}(g) & \frac{\partial}{\partial Y}(g) \end{pmatrix} = 3X^2 \frac{\partial}{\partial Y}(g) - 3Y^2 \frac{\partial}{\partial X}(g),$$

para todo $g \in \mathbb{C}[X, Y]$. Veja que $X^3 + Y^3 \in ker\, \Delta_f$. ◊

Em relação as derivações Jacobianas devemos citar um resultado que será utilizado no transcorrer deste trabalho:

Lema 3 *Seja $\partial \in Der(A)$, onde A é subanel de $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$. Se o grau de transcendência de $ker\, \partial$ é $n-1$ e $f_1, \ldots, f_{n-1}$ é uma base de transcendência de $ker\, \partial$ sobre $\mathbb{C}$, então existe $h \in \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ tal que $\partial(a) = hJac(f_1, \ldots, f_{n-1}, a)$ para todo $a \in A$.*

Demonstração. Veja Lema 6 em [22]. $\diamondsuit$

A partir da regra de Leibniz fica simples de verificar uma expressão que frequentemente utilizaremos, a saber, se $D \in Der(B)$, $b \in B$ e $f = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in B[T] = B^{[1]}$, então $D(f(b)) = f^D(b) + f^{'}(b)D(b)$, onde $f^{'}$ é a derivada de f em relação à T e $f^D = \sum_{i=0}^{n} D(b_i)T^i$. Podemos generalizar para $B[T_1, \ldots, T_n] = B^{[n]}$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$, i.e.

$$D(f(b_1, \ldots, b_n)) = f^D(b_1, \ldots, b_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_i}(b_1, \ldots, b_n)D(b_i).$$

Um primeiro resultado importante que apresentamos e que, em sua prova, utiliza a expressão acima é o seguinte:

Lema 4 *Seja B um domínio de $char(B) = 0$. Se $D \in Der(B)$, então $ker\, D$ é algebricamente fechado em B.*

Demonstração. Seja $b \in B$ algebrico sobre $ker\, D$. Então existe $f \in (ker\, D)[T]$ não nulo, com menor grau possível, tal que $f(b) = 0$. Aplicando D nesta igualdade obtemos

$$0 = D(f(b)) = f^D(b) + f^{'}(b)D(b) = f^{'}(b)D(b).$$

Pela escolha do polinômio f temos $f^{'}(b) \neq 0$ e assim $D(b) = 0$. $\diamondsuit$

Na verdade tal lema é apenas uma das implicações do seguinte teorema fundamental:

Teorema 5 (Nowicki) *Seja B uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada, com $\mathbb{K}$ sendo um corpo de característica zero. Então para uma $\mathbb{K}$-subálgebra A de B, são equivalentes:*

a) A is algebricamente fechado em B;

b) $A = ker\, D$ para alguma $D \in Der_{\mathbb{K}}(B)$.

Demonstração. Veja Proposição 3.2.6 de [26]. $\diamondsuit$

1.2 Derivações Localmente Nilpotentes

Seja A um anel, $D \in Der(A)$ é dita *localmente nilpotente* se para cada $a \in A$ existir um número natural n tal que $D^n(a) = 0$. Os exemplos clássicos são as derivadas parciais de um anel polinomial em várias variáveis. O conjunto de todas as derivações localmente nilpotentes do anel A é denotado por $LND(A)$. Também utilizamos as seguintes notações:

$$LND_R(A) = \{D \in LND(A) \mid D(R) = \{0\}\}$$

$$KLND(A) = \{kerD \mid D \in LND(A)\}$$

$$KLND_R(A) = \{kerD \mid D \in LND_R(A)\}$$

Exemplo 6 *Seja B o anel polinomial $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbb{K}^{[n]}$. Uma $\mathbb{K}$-derivação do anel B é dita* **triangular** *se $D(X_1) \in \mathbb{K}$ e $D(X_i) \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{i-1}]$ para $i = 2, \ldots, n$. Usando indução e a fórmula generalizada de Leibniz podemos ver que para cada i existe um número natural m tal que $D^m(X_i) = 0$. Desta observação segue que toda derivação* **triangular** *é* **localmente nilpotente**. $\diamondsuit$

Já sabemos que toda $\mathbb{K}$-derivação do anel $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbb{K}^{[n]}$ é determinada pelos seus valores no conjunto $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ($D = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)\frac{\partial}{\partial X_i}$). Contudo encontrar uma descrição do conjunto $LND_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{[n]})$ requer mais esforço. Quando $\mathbb{K}$ é um domínio com característica zero é fácil verificar que $LND(\mathbb{K}^{[1]}) = \{\alpha\frac{\partial}{\partial T} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$. Para o conjunto $LND(\mathbb{K}^{[2]})$, R. Rentschler mostrou, em [27], que existem duas variáveis $\{X, Y\}$ tal que $\mathbb{K}^{[2]} = \mathbb{K}[X, Y]$ e $LND(\mathbb{K}^{[2]}) = \{f\frac{\partial}{\partial Y} \mid f \in \mathbb{K}[X]\}$. Até o presente momento não é conhecida uma caracterização para $LND(\mathbb{K}^{[3]})$.

Neste texto vamos trabalhar com várias funções graus mas todas são do tipo descrito abaixo.

Definição 7 *Seja A um anel e $S = \Lambda \cup \{-\infty\}$, onde $\Lambda = \mathbb{N}$ ou $\Lambda = \mathbb{Z}$ e para todo $n \in \Lambda$ temos que $-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty$. Uma função* **função grau** *em A é uma função $deg : A \to S = \Lambda \cup \{-\infty\}$ que satisfaz:*

i) $deg(a) = -\infty$ se, e somente se, $a = 0$;

ii) $deg(ab) = deg(a) + deg(b)$ para todo $a, b \in A$, e

iii) $deg(a + b) \leq \max\{deg(a), deg(b)\}$.

$\diamondsuit$

Dado A um anel e $D \in LND(A)$ definimos $deg_D : A \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ por $deg_D(0) = -\infty$ e $deg_D(a) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid D^n(a) \neq 0\}$ para $a \in A \setminus \{0\}$. Quando A é um domínio de característica zero podemos verificar que deg_D é uma *função grau* para A (veja [9]) e neste caso utilizando-se tal função pode-se verificar o seguinte resultado:

Lema 8 *Seja A um domínio e $D \in LND(A)$. Então*

a) $deg_D(D(a)) = deg_D(a) - 1$ para todo $a \in A \backslash ker\, D$;

*b) $ker\, D$ é **fatorialmente fechado** em A, i.e., se $a, b \in A \setminus \{0\}$ e $ab \in ker\, D$ então $a, b \in ker\, D$ e, em particular, $A^* \subset ker\, D$;*

c) Se A contém, como subanel, um corpo $\mathbb{K}$ então $D \in LND_{\mathbb{K}}(A)$;

d) Se A é DFU, então $ker\, D$ é DFU. $\diamondsuit$

Um fato muito importante envolvendo derivações localmente nilpotentes de um determinado anel é que elas definem automorfismos deste anel. Vamos descrever tal situação. Seja A um anel que contém, como subanel, um corpo de característica zero $\mathbb{K}$, pela parte c) da proposição anterior $LND(A) = LND_{\mathbb{K}}(A)$. Agora se $D \in LND(A)$ então a exponencial

$$e^D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i = I + D + \frac{1}{2!} D^2 + \frac{1}{3!} D^3 + \cdots (\text{ } I \text{ é a identidade de } A)$$

é uma função bem definida de A em A e possui as seguintes propriedades

Proposição 9 *Seja $D \in LND(A)$, então*

1. e^D é um $\mathbb{K}$-automorfismo de A;

2. $(e^D)^{-1} = e^{-D}$*;*

3. $e^D D = De^D$*;*

4. $ker\, D = \{a \in A \mid e^D(a) = a\}$*;*

5. Se $D_1, D_2 \in LND_{\mathbb{K}}(A)$ *comutam, ou seja,* $D_1D_2 = D_2D_1$*, então* $e^{D_1+D_2} = e^{D_1}e^{D_2}$*.*

Demonstração. Segue diretamente da definição da função e^D. $\diamondsuit$

Segue desta proposição que se $D \in LND_{\mathbb{K}}(A)$, então a função $\alpha \mapsto e^{\alpha D}$ é um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{K}, +)$ no grupo dos $\mathbb{K}$-automorfismos do anel A, notação: $Aut_{\mathbb{K}}(A)$. Logo toda $\mathbb{K}$-derivação localmente nilpotente de A determina uma ação do grupo aditivo $(\mathbb{K}, +)$ em A.

Definição 10 *Sejam* A *um anel e* $D \in Der(A)$*. Um elemento* $s \in A$ *é chamado de "slice", da derivação* D*, se* $D(s) = 1$*.* $\diamondsuit$

No caso em que A é um domínio e $D \in LND(A)$ pode-se utilizar a função deg_D para ver que se $s \in A$ é um "slice", então s não pode ser uma unidade e nem divisor de zero. Mais ainda a existência de tais elementos geram propriedades, que apresentamos abaixo, muito especiais.

Proposição 11 *Seja* A *um domínio e* $D \in LND(A)$*. Então*

a) Se D *admite um "slice"* $s \in A$ *e* $B = ker\, D$*, então* $A = B[s] = B^{[1]}$*;*

b) Existem $s \in A$ *e* $b \in ker\, D$ *tais que* $A = C[s]$*, onde* $C = ker\, D[b^{-1}]$*;*

c) Se A *é um domínio sobre* $\mathbb{K}$ *com* $trdeg_{\mathbb{K}}(A) < \infty$ *e* $D \neq 0$*, então*

$$trdeg_{\mathbb{K}}(ker\, D) = trdeg_{\mathbb{K}}(A) - 1;$$

d) Se $D_1, D_2 \in LND(A)$*,* $ker\, D_1 = B = ker\, D_2$ *e existe* $s \in A$ *tal que* $0 \neq D_1(s) \in B$*, então* $0 \neq D_2(s) \in B$ *e* $D_2(s)D_1 = D_1(s)D_2$*.*

Demonstração. Veja [4]. $\diamondsuit$

Observação 12 *A partir da parte a) da proposição anterior nós parece natural citar aqui o "Slice Problem", colocado por G. Freudenburg em [11], pág. 219, que é o seguinte: se* $\mathbb{K}$ *é um corpo,* $A = \mathbb{K}^{[n]}$ *e* $D \in LND(A)$ *admite um "slice"então ker* $D^{[n]} = \mathbb{K}^{[n-1]}$*? Na verdade este problema é equivalente ao "Cancellation Problem for Affine Spaces" que pode ser enunciado assim: Se* B *é um* $\mathbb{K}$*-domínio afim e* $B^{[1]} \simeq \mathbb{K}^{[n+1]}$ *então* $B \simeq \mathbb{K}^{[n]}$*? Para* $n = 1$ *tal problema foi resolvido, positivamente, por Abhyankar, Eakin e Heinzer, para* $n = 2$ *por Fujita, Miyanishi e Sugie e para* $n \geq 3$ *o problema permanece em aberto.*

Um outro resultado, devido a Rentschler, interessante e muito importante neste contexto é o seguinte:

Teorema 13 *Seja* A *um domínio finitamente gerado sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Se* $D \in LND_{\mathbb{K}}(A)$ *admite um "slice" então ker* D *também é finitamente gerado sobre* $\mathbb{K}$*.*

Demonstração. Veja [27]. $\diamondsuit$

Existem domínios finitamente gerados sobre $\mathbb{K}$ que possuem derivações localmente nilpotentes cujos núcleos não são finitamente gerados (veja [2]). Neste caso não temos elemento "slice". E essa é uma situação bem interessante pois fornece contra-exemplos ao décimo quarto problema de Hilbert (veja [8]).

Definição 14 *Uma derivação do anel* A *é dita irredutível se o único ideal principal de* A *contendo* $D(A)$ *é o próprio* A*.* $\diamondsuit$

Um primeiro fato a se observar sobre derivações irredutíveis é que quando A é um dominio, verificar que $D \in Der(A)$ é irredutível é equivalente a mostrar que se $D = a\partial$ para $a \in A$ e $\partial \in Der(A)$, então $a \in A^*$.

Exemplo 15 *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo e* B *o anel polinomial* $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbb{K}^{[n]}$*. Se* D *é uma* $\mathbb{K}$*-derivação do anel* B *satisfazendo* $mdc(D(X_1), \ldots, D(X_n)) = 1$*, então* D *é irredutível. De fato: seja* $f \in B$ *tal que* $D(B) \subset fB$ *como* $\{D(X_1), \ldots, D(X_n)\} \subset D(B)$*, temos que para todo* i*,* $1 \leq i \leq n$ *,* f *divide* $D(X_i)$ *e portanto* f *divide* $mdc(D(X_1), \ldots, D(X_n)) = 1$*, isto é,* $f \in B^*$*.* $\diamondsuit$

No estudo das derivações localmente nilpotentes um dos principais objetivo é descrever o conjunto $LND(B)$ quando B é um domínio finitamente gerado sobre um corpo. O próximo resultado é fundamental para se fazer tal descrição.

Proposição 16 *Seja B um domínio de característica zero satisfazendo a condição de cadeia ascendente para ideais principais, seja $A \in KLND(B)$ e considere o conjunto*

$$S = \{D \in LND_A(B) \mid D \textit{ é irredutível}\}.$$

Então $S \neq \emptyset$ e $LND_A(B) = \{aD \mid a \in A \text{ e } D \in S\}$.

Demonstração. Veja [4]. $\diamondsuit$

Na verdade a proposição anterior nós diz que para determinarmos o conjunto $LND_A(B)$ temos que encontrar as derivações localmente nilpotentes irredutíveis e os elementos do conjunto $KLND(B)$.

Seja A um anel contendo o corpo $\mathbb{Q}$. No artigo [18] L. Makar-Limanov introduz o ML invariante de A, notação $ML(A)$. Este invariante demonstrou ter bastante importância no estudo de $\mathbb{K}$-álgebras finitamente geradas, por exemplo, em [18], L. Makar-Limanov, consegue determinar os $\mathbb{K}$-automorfismos de uma determinada $\mathbb{K}$-álgebra. No capítulo 2 nós fazemos tal estudo para uma generalização desta $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 17 *Seja A um anel contendo o corpo $\mathbb{Q}$. O ML invariante de A, notação $ML(A)$, é a interseção de todos elementos do conjunto $KLND(A)$, i.e.,*

$$ML(A) = \bigcap_{D \in LND(A)} ker\, D.$$

$\diamondsuit$

Claramente $ML(A)$ é um subanel de A e, pelo Lema 8 c), se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra, $\mathbb{K}$ corpo, então $ML(A)$ é uma $\mathbb{K}$-subálgebra de A. As seguintes observações são imediatas

1. $A^* \subset ML(A)$;

2. $ML(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ se $\mathbb{K}$ é um corpo.

Exemplo 18 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então $ML(\mathbb{K}^{[n]}) = \mathbb{K}$, veja que $\mathbb{K}$ é a interseção dos núcleos das derivadas parciais.* $\diamondsuit$

Exemplo 19 *Seja $B = \mathbb{C}[X^2, X^3]$ subanel de $\mathbb{C}[X]$. Pode-se verificar que a única derivação localmente nilpotente de B é a derivação nula. Portanto $ML(B) = B$.* $\diamondsuit$

Cabe aqui observar que na literatura um anel, B, é chamado de rígido quando $ML(B) = B$.

O próximo resultado tem como consequência que o ML invariante de um anel A é um subanel característico de uma $\mathbb{K}$-álgebra A, ou seja, para todo $\mathbb{K}$-automorfismo de A tem-se que sua restrição ao ML invariante de A também é um $\mathbb{K}$-automorfismo.

Lema 20 *Sejam A e B anéis. Se A é isomorfo a B, $A \cong B$, então $ML(A) \cong ML(B)$. Além disso todo isomorfismo de A em B restrito a $ML(A)$ é um isomorfismo entre $ML(A)$ e $ML(B)$.*

Demonstração. Seja $\theta : A \to B$ um isomorfismo. Seja $D \in LND(B)$ é fácil ver que $\theta^{-1}D\theta \in LND(A)$. Agora observe que se $a \in ML(A)$, nós temos que $\theta^{-1}D\theta(a) = 0$ para qualquer $D \in LND(B)$. Logo $D\theta(a) = 0$ para toda $D \in LND(B)$, ou seja, $\theta(a) \in ML(B)$. É imediato que a restrição θ ao anel $ML(A)$ é um isomorfismo entre $ML(A)$ e $ML(B)$. $\diamondsuit$

O Lema 20 pode ser utilizado para estudar os automorfismo de um anel. Um exemplo disto é o Teorema 42.

1.3 Diferenciais de ordem superior

Neste parágrafo vamos introduzir alguns conceitos e resultados introdutórios sobre diferenciais de ordem superior com intuito de enunciar a conjectura de Nakai, já que no terceiro capítulo provamos que tal conjectura é verdadeira no caso da $\mathbb{K}$-álgebra diagonal (ou de Fermat) B, isto é, $B = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo e $x_1^m + \cdots + x_n^m = 0$ com $m \geq 1$. As principais referências para este parágrafo são [24], [29] e [30]. Em [30] pode-se encontrar, em detalhes, todas as demonstrações dos resultados citados aqui.

A abordagem que faremos aqui será no seguinte contexto: $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero, R é uma $\mathbb{K}$-álgebra e A é uma R-álgebra (poderia ser feito um pouco mais geral, i.e., $\mathbb{K}$ anel, R é uma $\mathbb{K}$-álgebra e A um R-módulo).

Em tal contexto $Hom_{\mathbb{K}}(R, A)$ é o conjunto dos $\mathbb{K}$-homomorfismos de R em A. Para qualquer $b \in R$, $b_R \in Hom_{\mathbb{K}}(R, R)$ denotará a multiplicação por b, ou seja, $b_R(r) = br$ e $b_A \in Hom_{\mathbb{K}}(A, A)$ a multiplicação por b em A, isto é, $b_A(a) = ba$. Mais ainda vamos considerar $Hom_{\mathbb{K}}(R, A)$ como R-módulo da seguinte forma: dado $b \in R$ e $D \in Hom_{\mathbb{K}}(R, A)$, $bD := b_A \circ D$.

Para $b \in R$ e $D \in Hom_{\mathbb{K}}(R, A)$ o símbolo $[D, b]$ denotará $D \circ b_R - b_A \circ D \in Hom_{\mathbb{K}}(R, A)$, ou seja, para $r \in R$, $[D, b](r) = D(rb) - bD(r)$.

Agora estamos em condições de definir os diferenciais.

Definição 21 *Para $q \in \mathbb{Z}$ o R-submódulo $Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A)$ de $Hom_{\mathbb{K}}(R, A)$ é definido por indução sobre q da seguinte forma:*
Se $q < 0$, $Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A) = 0$ e se $q \geq 0$,
$Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A) = \{D \in Hom_{\mathbb{K}}(R, A);\ [D, r] \in Diff^{q-1}_{\mathbb{K}}(R, A), \forall\, r \in R\}$. ♢

Os elementos de $Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A)$ são chamados $\mathbb{K}$-*operadores diferenciais de R em A de ordem q*. Os primeiros fatos elementares que podemos citar a respeito de tais operadores são que $Diff^0_{\mathbb{K}}(R, A) = Hom_R(R, A) \simeq A$ e que $Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A) \subseteq Diff^{q+1}_{\mathbb{K}}(R, A)$. Assim a definição do R-módulo dos $\mathbb{K}$-operadores diferenciais de ordem superior, abaixo, é bastante natural.

Definição 22 *Defina $Diff^{\infty}_{\mathbb{K}}(R, A) = \bigcup_q Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A)$.* ♢

Um operador diferencial, D, de ordem $q \geq 1$ é dito ser uma $\mathbb{K}$-*derivação de R em A de ordem q* se $D(1) = 0$. Assim para $q \geq 1$ definimos o R-submódulo das $\mathbb{K}$-derivações de R em A de ordem q por:

Definição 23 *Para $q \geq 1$, $Der^q_{\mathbb{K}}(R, A) = \{D \in Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A);\ D(1) = 0\}$.* ♢

Uma caracterização de uma K-derivação de ordem q é apresentada no seguinte resultado:

Proposição 24 *Dados $D \in Hom_{\mathbb{K}}(R, A)$ e $1 \leq q \in \mathbb{Z}$. Então $D \in Der^q_{\mathbb{K}}(R, A)$ se e somente se para quaisquer elementos $r_0, \cdots, r_q \in R$, tem-se que:*

$$D(r_0 \cdots r_q) = \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0 \cdots \hat{r}_{i_1} \cdots \hat{r}_{i_s} \cdots r_q)$$

$\diamondsuit$

Observação 25 *A proposição anterior nós garante que uma $\mathbb{K}$-derivação, D, de ordem 1 é uma $\mathbb{K}$-derivação como definida no início deste capítulo, ou seja, $Der^1_{\mathbb{K}}(R, A)$ é precisamente o R-modulo das $\mathbb{K}$-derivações de R em A e por isto daqui em diante vamos denotá-lo por $Der_{\mathbb{K}}(R, A)$.* $\diamondsuit$

Agora quando $R = A$ vamos usar a notação $Diff^q_{\mathbb{K}}(A) := Diff^q_{\mathbb{K}}(R, A)$ e neste caso tem-se que para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$

$$Diff^q_{\mathbb{K}}(A) \circ Diff^p_{\mathbb{K}}(A) \subseteq Diff^{q+p}_{\mathbb{K}}(A),$$

ou seja, $\{Diff^q_{\mathbb{K}}(A),\ q \in \mathbb{Z}\}$ é uma filtração de $Diff^\infty_{\mathbb{K}}(A)$. Portanto $Diff^\infty_{\mathbb{K}}(A)$ é uma A-álgebra e é chamada de álgebra dos operadores de ordem superior de A. A subálgebra gerada por $Diff^1_{\mathbb{K}}(A)$ em $Diff^\infty_{\mathbb{K}}(A)$ será denotada por $diff^\infty_{\mathbb{K}}(A)$. Assim como $Der^\infty_{\mathbb{K}}(A)$ é chamada de álgebra das $\mathbb{K}$-derivações de ordem superior de A e $der^\infty_{\mathbb{K}}(A)$ é a subálgebra gerada por $Der^1_{\mathbb{K}}(A)$.

No caso em que A é o anel de coordenadas de uma variedade algébrica sobre um corpo $\mathbb{K}$ a pergunta natural é: os operadores diferenciais podem dizer alguma coisa sobre singularidades da variedade?

Em [13] Grothendieck tratou desta questão e mostrou que se A for regular (anel de coordenadas de uma variedade lisa) então $Diff^\infty_{\mathbb{K}}(A) = diff^\infty_{\mathbb{K}}(A)$. Nakai, em [24], conjecturou se a reciproca deste resultado não seria verdadeira, a saber:

Conjectura de Nakai: *Se A é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica zero e $Diff^\infty_{\mathbb{K}}(A) = diff^\infty_{\mathbb{K}}(A)$ então A é regular.* $\diamondsuit$

No capítulo 3 vamos abordar a conjectura enunciada acima, mas para isto precisamos ainda enunciar alguns resultados a respeito de $\mathbb{K}$-álgebras finitamente gerada, com $\mathbb{K}$ sendo um corpo de característica zero. Assim vamos trabalhar com $R = \mathbb{K}^{[n]} = \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$, $A = \frac{R}{J}$ e J ideal de R. Para isto fixamos algumas notações:

1. $\pi : R \longrightarrow A$ é a projeção canônica e $x_i = \pi(X_i)$;

2. $V := \mathbb{N}^n$ e para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in V$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$,

   $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \cdots \partial X_n^{\alpha_n}} = (\frac{\partial}{\partial X_1})^{\alpha_1} \circ \cdots \circ (\frac{\partial}{\partial X_n})^{\alpha_n}$;

3. $\Delta_\alpha := \pi \circ (\frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}) \in Diff_{\mathbb{K}}^{|\alpha|}(R, A)$.

Com essas notações estamos em condições de, neste caso, enunciar o seguinte resultado:

Proposição 26 *O conjunto $\{\Delta_\alpha;\ \alpha \in V\}$ é uma A-base livre para $Diff_{\mathbb{K}}^{\infty}(R, A)$, ou seja , todo $D \in Diff_{\mathbb{K}}^{\infty}(R, A)$ se escreve de maneira única na forma*

$$D = \sum_{\alpha \in V} c_\alpha(D) \Delta_\alpha$$

com $c_\alpha(D) \in A$ e quase sempre nulo. Mais ainda $D \in Diff_{\mathbb{K}}^{q}(R, A)$ se, e somente se, $c_\alpha(D) = 0$ para $|\alpha| > q$. $\diamondsuit$

A proposição que vem a seguir identifica $Diff_{\mathbb{K}}^{q}(A)$, onde $A = \frac{R}{J}$ e $R = \mathbb{K}^{[n]}$, com um $\mathbb{K}$-submódulo de $Diff_{\mathbb{K}}^{q}(R, A)$.

Proposição 27 *Dado $q \in \mathbb{N}$. Se $\mathcal{D}^q(J) = \{D \in Diff_{\mathbb{K}}^{q}(R, A);\ D(J) = 0\}$ então a função $\varphi : Diff_{\mathbb{K}}^{q}(A) \longrightarrow \mathcal{D}^q(J)$ definida por $\varphi(D) = D \circ \pi$ é um $\mathbb{K}$-isomorfismo.* $\diamondsuit$

A identificação de um elemento do submódulo $\mathcal{D}^q(J)$ definido acima pode ser decidida pelo seguinte resultado.

Proposição 28 *Sejam J um ideal de $R = K^{[n]} = K[X_1, \ldots, X_n]$, $A = \frac{R}{J}$ e $D \in Diff_{\mathbb{K}}^{q}(R, A)$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *$D(J) \subset JA$;*

2. $[D, X_i](J) \subset JA$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n$, *e existe um conjunto de geradores* $\{f_j\}$ *de* J *tal que* $D(f_j) \in JA$ *para todo* j.

$\diamondsuit$

Encerramos este capítulo observando que no caso em que $J = (F)$ é principal as duas proposições anteriores nós diz quando $D \in Diff^q_{\mathbb{K}}(R, R)$ induz de maneira natural um K-diferencial de ordem q de A.

Corolário 29 *Se* $A = \frac{R}{J}$ *com* $J = (F)$, $\tilde{D} \in Diff^q_{\mathbb{K}}(R, R)$ *e* $\pi : R \longrightarrow A$ *é a projeção canônica então*

$$\pi \circ \tilde{D} \in \mathcal{D}^q(J) \text{ se, e somente se, } \tilde{D}(F) \in J \text{ e para todo } i,\ \tilde{D}(X_i F) \in J$$

$\diamondsuit$

CAPÍTULO 2

O anel $K[X,Y,Z]/(f(X)Y - \varphi(X,Z))$

No artigo [19] L. Makar-Limanov introduziu o ML invariante de um anel e utilizou este conceito para mostrar que a superfície $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ sobre $\mathbb{C}$ não é isomorfa a $\mathbb{C}^3$. Em [20] Ele utiliza o mesmo conceito para determinar um conjunto de geradores para o grupo dos automorfismos do anel $B = K[X,Y,Z]/(X^nY - \varphi(Z))$, onde $n > 1$ e $deg(\varphi) > 1$. Por outro lado, em [3], D. Daigle estudou as derivações localmente nilpotentes do anel $A = K[X,Y,Z]/(XY - \varphi(Z))$ e mostrou que certo subgrupo dos K-automorfismos de A age transitivamente sobre os núcleos das derivações localmente nilpotentes e não nulas de A.

Aqui iremos reproduzir alguns dos resultados do artigo [20] no caso mais geral em que o anel B é dado por:

$$B = K[X,Y,Z]/(f(X)Y - \varphi(X,Z)),$$

sendo K um corpo de característica zero e algebricamente fechado, $r > 1$, $d > 1$

$$\varphi(X,Z) = Z^d + b_{d-1}(X)Z^{d-1} + \cdots + b_0(X),\ \ b_i(X) \in K[X] \quad \text{e}$$

$$f(X) = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \cdots + a_0 \in K[X].$$

Escrevendo $B = K[x,y,z]$ onde $f(x)y - \varphi(x,z) = 0$, mostramos que o ML invariante de B é $K[x]$ (Teorema 34). A partir deste resultado conseguimos descrever o conjunto das K-derivações localmente nilpotentes de B (Corolário 35). E utilizando estas ferramentas conseguimos descrever o grupo dos K-*automorfismos de* B (Teorema 42), quando consideramos $\varphi(Z, X)$ somente em $K[Z]$.

O capítulo é dividido da seguinte maneira: na primeira seção introduzimos as definições, notações e listamos os fatos básicos que necessitaremos ao longo do texto. O objetivo da segunda seção é o estudo das derivações localmente nilpotentes do anel B e a aplicação destas derivações localmente nilpotentes para encontrar um conjunto de geradores para os K-automorfismos de B. Na última seção apresentamos alguns resultados que obtemos para o anel $\frac{K[X_1,\ldots,X_{n+1},Z]}{(X_1\cdots X_{n+1}-\varphi(Z))}$.

2.1 Notações e Generalidades

Graduação e filtração: Sejam K um corpo e A uma K-álgebra . Dizemos que A é uma álgebra $\mathbb{Z}$-graduada se existe uma coleção $\{B_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de K-subespaços vetoriais de A tal que $B_iB_j \subseteq B_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}$ e $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$.

Uma $\mathbb{Z}$-filtração de A é uma coleção $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de K-subespaços vetoriais de A que satisfaz:

1. $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}$;

2. $A_i \subseteq A_j$ quando $i \leq j$;

3. $A = \cup_{i\in\mathbb{Z}} A_i$.

Mais ainda, uma $\mathbb{Z}$-filtração de A é dita ser própria se:

4. $\cap_{i\in\mathbb{Z}} A_i = \{0\}$;

5. Se $a \in A_n \setminus A_{n-1}$ e $b \in A_m \setminus A_{m-1}$ então $ab \in A_{m+n} \setminus A_{m+n-1}$.

Seja $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma $\mathbb{Z}$-filtração de A. Vamos denotar a álgebra graduada associada a tal filtração por $Gr(A) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \frac{A_i}{A_{i-1}}$. Agora se $D \in Der(A)$ e k é um inteiro fixo tal que $D(A_i) \subseteq A_{i+k}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, então D induz, de maneira natural, uma derivação D_1 em $Gr(A)$ definida por $D_1(h) := D(a) + A_{i+k-1}$ para todo $h = a + A_{i-1} \in \frac{A_i}{A_{i-1}}$.

Também associada a filtração tem-se a função gr de A em $Gr(A)$ dada por $gr(a) = a + A_{i-1}$ se $a \in A_i \setminus A_{i-1}$ e $gr(0) = 0$. Assim tem-se que $D_1(gr(a)) = gr(D(a))$ ou $D_1(gr(a)) = 0$.

Nas condições acima e quando D é localmente nilpotente citamos um lema que é fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Uma demonstração de tal lema pode ser vista no Lema 4 do artigo [19].

Lema 30 *Seja D uma derivação localmente nilpotente de A e $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma $\mathbb{Z}$-filtração de A. Suponha que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $D(A_n) \subseteq A_{n+k}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então D_1 é uma derivação localmente nilpotente de $Gr(A)$.* $\diamondsuit$

2.2 Sobre $LND(B)$

Nesta seção B é o anel quociente definido por

$$K[X,Y,Z]/(f(X)Y - \varphi(X,Z)),$$

onde K é um corpo algebricamente fechado de característica zero, o polinômio $f(X)$ é da forma $f(X) = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \cdots + a_0 \in K[X] = K^{[1]}$ com $r > 1$ e o polinômio $\varphi(X,Z)$ é da forma $\varphi(X,Z) = Z^d + b_{d-1}(X)Z^{d-1} + \cdots + b_1(X)Z + b_0(X) \in K[X][Z] = K^{[2]}$ com $d > 1$. É imediato que B é um domínio de integridade e que $trdeg_K(B) = 2$. Assim B é o domínio finitamente gerado $K[x,y,z]$ cujos geradores satisfazem a relação $f(x)y = \varphi(x,z)$. Vejamos algumas propriedades do domínio B

Lema 31 *Seja $B = K[x,y,z]$ a K-álgebra descrita acima.*

1. *Para cada $b \in B \setminus \{0\}$ existe um único $g \in K[X,Y,Z]$ tal que:*

$$deg_Z(g) < d \quad e \quad b = g(x,y,z);$$

2. *$K(x) \cap B = K[x]$;*

3. *Seja $S = K[x] \setminus \{0\}$. Então $S^{-1}B = K(x)^{[1]}$;*

4. *$K[x]$ é fatorialmente fechado em B. E portanto $B^* = K^*$.*

Demonstração. 1) É uma consequência direta do algoritmo da divisão. Basta considerar $F(X,Y,Z) = \varphi(X,Z) - f(X)Y$ como polinômio (mônico) na variável Z e com coeficientes em $K[X,Y]$.

2) Seja $0 \neq b \in K(x) \cap B$ então $b = \sum_{i<d} a_i z^i$, onde $a_i \in K[x,y]$ e como existe $a \in K[x] \backslash \{0\}$ tal que $ab \in K[x]$ tem-se que $ab = \sum_{i<d} (aa_i) z^i$. Portanto $a_i = 0$ para todo $i > 0$ e assim $b = a_0 \in K[x,y] \cap K(x) = K[x]$ e temos o resultado.

3) Veja que $y = f(x)^{-1}\varphi(x,z) \in K(x)[z]$, assim temos $K[x,z] \subseteq B \subseteq K(x)[z]$, e então $S^{-1}B = K(x)[z] = K(x)^{[1]}$.

4) Sejam $a, b \in B$ tais que $ab \in S = K[x] \setminus \{0\}$. Então ab é uma unidade no anel de frações $S^{-1}B = K(x)^{[1]}$. Disso decorre que a, b são unidades em $S^{-1}B = K(x)^{[1]}$. Dessa forma $a, b \in K(x) \cap B = K[x]$. Portanto $K[x]$ é fatorialmente fechado em B. Donde $B^* = K[x]^* = K^*$. $\diamondsuit$

Seja d a derivação do anel de polinômios $K[X,Y,Z]$ dada por $d(X) = 0$, $d(Y) = \varphi_Z(X,Z)$ e $d(Z) = f(X)$. Observe que d é triangular e portanto nilpotente mais ainda $d(F) = 0$, onde $F(X,Y,Z) = \varphi(X,Z) - Yf(X)$. Assim d induz uma derivação nilpotente D de B dada por $D(x) = 0$, $D(y) = \varphi_z(x,z)$ e $D(z) = f(x)$. Veja também que como $K[x] \leq kerD \leq B$ segue, pelo grau de transcendência, que $kerD$ é algébrico sobre $K[x]$ e pelo item 4 do Lema 31 obtemos que $K[x] = ker\, D$.

Teorema 32 *Se $D \in LND(B)$ é a derivação definida acima então D é irredutível, $ker\, D = K[x]$ e $LND_{K[x]}(B) = \{hD \mid h \in K[x]\}$.*

Demonstração. Seja $D_1 \in LND_{K[x]}(B)$. Então D_1 é não nula e $ker\, D_1 = K[x]$. Como $D(z) = f(x) \in K[x]$ o item $d)$ do Lema 11 nós garante que $D(z)D_1 = D_1(z)D$, onde $D_1(z) \in K[x] \backslash \{0\}$. Assim

$$f(x)D_1 = D_1(z)D. \tag{2.1}$$

Sabemos, pelo Lema 31, que $D_1(y) = \sum_{i<d} a_i z^i$, onde $a_i \in K[x,y]$, dessa forma

$$\sum_{i<d} (f(x)a_i) z^i = f(x)D_1(y) = D_1(z)D(y) = D_1(z)\varphi_z(x,z). \tag{2.2}$$

Como $D_1(z) \in K[x] \setminus \{0\}$, segue do Lema 31 e da equação (2.2) que para todo i temos $f(x)a_i = b_i D_1(z)$, onde $\varphi_Z(X,Z) = dZ^{d-1} + \sum_{i<d-1} ib_i(X)Z^{i-1}$. Assim $f(x)a_{d-1} = dD_1(z)$ e

então $D_1(z) = f(x)h$ com $h \in K[x]$. E logo temos, pela equação (2.1), $D_1 = hD$. Agora vejamos que D é irredutível. Pelo Lema 16 temos que $D = hD_0$ para algum $h \in K[x]$ e $D_0 \in LND_{K[x]}(B)$ irredutível. Pelo que já demonstramos $D_0 = h_0 D$ para algum $h_0 \in K[x]$, assim temos $D = hh_0 D$ e portanto $h \in K^*$. Assim temos que D é irredutível. $\diamondsuit$

As derivações localmente nilpotentes do Teorema 32 são de fato as únicas derivações localmente nilpotentes do anel B (veja Corolário 35). Contudo para provar esta afirmação é necessário conhecer antes o ML invariante do anel B. Para isto vamos relembrar a definição do ML invariante de um anel

Definição 33 *Seja A um anel. O ML invariante de A, notação $ML(A)$, é a interseção dos núcleos de todas as derivações localmente nilpotentes de A.*

Este conceito foi introduzido por Makar-Limanov em 1996 (veja [19]) com o termo *núcleo absoluto* e notação $AK(A)$. Em [11] G. Freudenburg denominou tal invariante por ML invariante e introduziu a notação $ML(A)$.

Nosso objetivo agora é verificar o seguinte resultado a respeito do anel B:

Teorema 34 *O ML invariante de B, $ML(B)$, é $K[x]$.*

Verificado o Teorema 34 teremos $K[x] \subseteq ker\, D$ para toda $D \in LND(B)$ e pelo Teorema 32 existe $D \in LND(B)$ tal que $ker\, D = K[x]$. Então uma consequência imediata disto é o seguinte resultado

Corolário 35 *Se D é a derivação de B dada por $D(x) = 0$, $D(y) = \varphi_z(x, z)$ e $D(z) = f(x)$ então $LND(B) = \{hD \mid h \in K[x]\}$.*

Demonstração. Segue dos Teoremas 32 e 34. $\diamondsuit$

Lembramos que $B = K[x, y, z]$ onde $f(x)y = \varphi(x, z)$, $r = deg_X f(X)$ e $d = deg_Z \varphi(X, Z)$ com $r > 1$ e $d > 1$. Observe que B é subanel de $T = K[x, f(x)^{-1}, z]$ pois $y \in T$, visto que $y = f(x)^{-1}\varphi(x, z)$.

Antes da prova do Teorema 34 vamos apresentar alguns lemas técnicos necessários para a conclusão do teorema. Assim como fez Makar-Limanov em [18] vamos construir uma

$\mathbb{Z}$-filtração em T dando pesos aos elementos x e z de tal forma que usando o anel graduado determinado por esta filtração podemos chegar a conclusão do referido teorema.

O primeiro passo para construir uma $\mathbb{Z}$-filtração com peso no anel $T = K[x, f(x)^{-1}, z]$, é construir uma $\mathbb{Z}$-filtração no anel $R = K[x, f(x)^{-1}]$ (observe que $T = R[z]$). Nosso próximo resultado nós diz como construir esta $\mathbb{Z}$-filtração no anel $R = K[x, f(x)^{-1}]$.

Proposição 36 *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, seja*

$$R_n = \{\frac{h(x)}{f(x)^j} \mid h(x) \in K[x] \text{ e } deg(h(x)) - jr \leq n\}.$$

Então:

a) $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma $\mathbb{Z}$-filtração própria de R;

b) Para $n \in \mathbb{Z}$, seja $C_n \subset R_n$ o K-subespaço vetorial de R definido por:

$$C_n = \begin{cases} Kx^n & se \quad n \geq 0, \\ K\frac{x^i}{f(x)^j} & se\ n = i - jr < 0 \ com \quad 0 \leq i \leq r-1 \end{cases}$$

Então

- $R = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} C_m, \; R_n = \bigoplus_{m\leq n} C_m \quad e$
- $$\begin{array}{rcl} gr \ : \ R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n & \longrightarrow & Gr(R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{R_n}{R_{n-1}} \\ \{\alpha_n\}_n & \longmapsto & \{\alpha_n + R_{n-1}\}_n \end{array}$$
  é um isomorfismo de grupos aditivos .

Demonstração. a) É uma consequência das duas afirmações que fazemos abaixo:

Afirmação 1: Sejam A e E domínios, e $w \ : A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ uma função grau. Se $A \subset E \subset Frac(A)$, então

$$\begin{array}{rcl} w_1 \ : \ E & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \\ \frac{\xi}{\eta} & \longmapsto & w(\xi) - w(\eta) \end{array}$$

onde $\xi, \eta \in A$, é uma função grau de E que extende w. Além disso é a única com esta propriedade.

Demonstração. É fácil verificar que w_1 é uma aplicação bem definida e que também é uma função grau no domíno E. Para verificar a unicidade: Seja w_2 uma função grau de E que é uma extensão de w. Nós temos que $w_2(\frac{\xi}{\eta}) = w_2(\xi) + w_2(\frac{1}{\eta})$. Agora veja que $w_2(1) = w_2(1.1) = w_2(1) + w_2(1)$ e assim $w_2(1) = 0$. Assim

$$0 = w_2(1) = w_2(\eta\frac{1}{\eta}) = w_2(\eta) + w_2(\frac{1}{\eta}) \text{ e logo } w_2(\frac{1}{\eta}) = -w_2(\eta).$$

Desse modo $w_2(\frac{\xi}{\eta}) = w_2(\xi) + w_2(\frac{1}{\eta}) = w_2(\xi) - w_2(\eta) = w(\xi) - w(\eta) = w_1(\frac{\xi}{\eta})$. Portanto $w_2 = w_1$.

Afirmação 2: Sejam E um domínio e $w \; : E \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ uma função grau que é sobrejetora. Então, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com $E_n := \{\xi \in E \mid w(\xi) \leq n\}$ é uma $\mathbb{Z}$-filtração própria de E.

Demonstração. É rotina verificar que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma $\mathbb{Z}$-filtração própria de D.

Agora observe que a função grau que define R_n, para $n \in \mathbb{Z}$, nada mais é do que a extensão da função grau usual do anel $K[x]$ para o anel R, assim podemos concluir que $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma $\mathbb{Z}$-filtração própria de R.

b) Primeiro vamos verificar que $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$. De fato: seja $\alpha \in R$ então $\alpha = \frac{h(x)}{f(x)^m}$ com $h(x) \in K[x]$ e $m \geq 0$, assim a igualdade acima é consequência imediata do seguinte fato obtido a partir do algoritmo de Euclides: dado $h(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ existem únicos $0 \leq n_1 < \cdots < n_s \in \mathbb{Z}$ e únicos $h_1(x), \ldots, h_s(x) \in K[x] \setminus \{0\}$, com $gr(h_i(x)) \leq r - 1$ de tal forma que $h(x) = \sum_i h_i(x) f(x)^{n_i}$. A prova de que $R_n = \bigoplus_{m\leq n} C_m$ é óbvia.

Assim temos que para cada n, $R_n = C_n \oplus R_{n-1}$ portanto podemos concluir que

$$\begin{array}{rccc} gr_n : & C_n & \longrightarrow & \frac{R_n}{R_{n-1}} \\ & \alpha_n & \longmapsto & \alpha_n + R_{n-1} \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos aditivos. Logo

$$\begin{array}{rccc} gr : & R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n & \longrightarrow & Gr(R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{R_n}{R_{n-1}} \\ & \{\alpha_n\}_n & \longmapsto & \{\alpha_n + R_{n-1}\}_n \end{array}$$

também é um isomorfismo de grupos aditivos. $\diamondsuit$

Recorde que T é o anel $K[x, f(x)^{-1}, z]$, ou seja, $T = R[z]$ com z sendo transcendente sobre R. Nosso objetivo agora é introduzir uma $\mathbb{Z}$-filtração com peso no anel T que extende de maneira natural a filtração de R que acabamos de descrever. Isto é possível, como mostra o próximo resultado:

Proposição 37 *Sejam A um domínio e $w \ : A \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ uma função grau. Sejam $\nu \in \mathbb{Z}$ e z um elemento trancendente sobre A. Então*

$$\begin{array}{rccc} w_1 \ : & A[z] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \\ & 0 & \longmapsto & -\infty \\ & 0 \neq \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^i & \longmapsto & \displaystyle\max_{0 \leq i \leq n} \{w(a_i) + i\nu\} \end{array}$$

é uma função grau.

Demonstração. Seja $\xi = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^j$ e $\eta = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j z^j$ elementos de $A[z]$ tais que $\xi\eta \neq 0$. Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $p = w_1(\xi) = \displaystyle\max_{0 \leq i \leq n} \{w(a_i) + i\nu\}$ e $q = w_1(\eta) = \displaystyle\max_{0 \leq j \leq m} \{w(b_j) + j\nu\}$.

- $w_1(\xi + \eta) \leq \max\{w_1(\xi), w_1(\eta)\}$. De fato: vamos supor, sem perda de generalidade, que $n = m$. Logo $\xi + \eta = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) z^i$ e temos que

$$\begin{aligned} w_1(\xi + \eta) &= \max_{0 \leq i \leq n} \{w(a_i + b_i) + i\nu\} \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} \{\max\{w(a_i), w(b_i)\} + i\nu\} \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \{w(a_i) + i\nu, w(b_i) + i\nu\} \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} \{p, q\} \\ &= \max\{w_1(\xi), w_1(\eta)\}. \end{aligned}$$

- $w_1(\xi\eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta)$. De fato: primeiro suponha que $\xi = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^j$ e $\eta = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j z^j$ satisfazem $p = w(a_i) + i\nu$ e $q = w(b_j) + j\nu$ para todos $i \in \{0, \ldots, n\}$ e $j \in \{0, \ldots, m\}$ tais que $a_i \neq 0$ e $b_j \neq 0$. Neste caso dizemos que ξ é uma forma de grau p e η uma forma de grau q. Veja que

$$\xi\eta = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k \quad \text{com} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Agora chame $I = \{k;\ \ 0 \leq k \leq m+n\ \text{ e }\ c_k \neq 0\}$, assim para cada $k \in I$ tem-se que $w(c_k) = \max\limits_{0 \leq i \leq k}\{w(a_i) + w(b_{k-i});\ \ a_i b_{k-i} \neq 0\} = \max\limits_{0 \leq i \leq k}\{p - i\nu + q - (k-i)\nu\}$, ou seja, $w(c_k) = \max\limits_{0 \leq i \leq k}\{p + q - k\nu\} = p + q - k\nu$. Portanto

$$w_1(\xi\eta) = \max_{k \in I}\{w(c_k) + k\nu\} = \max_{k \in I}\{p + q - k\nu + k\nu\} = p + q.$$

Logo $w_1(\xi\eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta)$ quando ξ e η são formas de grau $w_1(\xi)$ e $w_1(\eta)$, respectivamente.

Para verificarmos o caso geral observe que podemos reescrever ξ da seguinte maneira

$$\xi = \xi_{p_1} + \xi_{p_2} + \cdots + \xi_{p_r},$$

onde ξ_{p_i} são formas de grau $p_i = w_1(\xi_{p_i})$ e $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$. Analogamente

$$\eta = \eta_{q_1} + \eta_{q_2} + \cdots + \eta_{q_s},$$

onde η_{q_j} são formas de grau $q_j = w_1(\xi_{q_j})$ e $q_1 < q_2 < \cdots < q_s$. É imediato que $w_1(\xi) = p_r$ e $w_1(\eta) = q_s$. Veja que

$$\xi\eta = \xi_{p_1}\eta_{q_1} + \xi_{p_1}\eta_{q_2} + \cdots + \xi_{p_r}\eta_{q_s}.$$

E visto que

$$w_1(\xi_{p_r}\eta_{q_s}) = p_r + q_s > p_i + q_j = w_1(\xi_{p_i}\eta_{q_j})$$

para todo $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ e todo $j \in \{1, \ldots, s-1\}$, temos que

$$w_1(\xi\eta) = w_1(\xi_{p_r}\eta_{q_s}) = p_r + q_s = w_1(\xi) + w_1(\eta).$$

Portanto w_1 é uma função grau para o domínio $A[z]$ e esta função é uma extensão da função grau w do domínio A. $\diamondsuit$

Veja que todo elemento de T é soma finita e única de elementos da forma $c_i z^j$, onde $c_i \in C_i$ com $i, j \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq j$. Segue da proposição anterior que para definirmos uma $\mathbb{Z}$-filtração com peso em $K[x, f(x)^{-1}, z]$ basta darmos pesos $\mu \geq 1$ e ν para x e z respectivamente. Assim o peso de um elemento da forma $c_i z^j$ é definido como sendo $i\mu + j\nu$ e vamos denotá-lo por $deg(c_i z^j) = i\mu + j\nu$ e o peso de um elemento w em $K[x, f(x)^{-1}, z]$ é o maior peso dos elementos deste tipo que aparecem em w.

Assim a $\mathbb{Z}$-filtração de T é dada por $T_n = \langle c_i z^j \mid i\mu + j\nu \leq n \rangle$ e a de B é dada por $B_n = T_n \cap B$.

Como mostramos na Proposição 36 podemos extender estes pesos ao corpo de funções $K(x,z)$ definindo o peso de um elemento $\frac{p}{q}$ como a diferença dos pesos de p e q. Sabe-se que a álgebra graduada associada, $Gr(K(x,z))$, é isomorfa a subálgebra de $K(x,z)$ que consiste das frações com denominadores homogêneos.

Seja D uma derivação localmente nilpotente e não nula do anel B. Segue do item c) da Proposição 11 que existe $l \in ker\, D \setminus K$. Já o Lema 3 afirma que existe $h \in K(x,z)$ tal que $D(g) = hJac(l,g)$, onde Jac é o Jacobiano em relação a x e z.

Para atingir o nosso objetivo vamos verificar que $l \in K[x]$, pois neste caso $D(x) = hJac(l,x) = 0$, e assim teremos que $K[x] \subset ker\, D$ para todo $D \in LND(B)$ e teremos provado o Teorema 34 como consequência do Teorema 32.

Primeiro vejamos o seguinte passo intermediário.

Lema 38 $l \in K[x,z]$

Demonstração. Sabemos que $l \in ker\, D \setminus K$ e pelo Lema 31 podemos escrever, de maneira única,

$$l = l_m(x,z)y^m + \cdots l_1(x,z)y + l_0(x,z)$$

onde $m \geq 0$, $l_m(x,z) \neq 0$ e para todo $s, 0 \leq s \leq m, l_s(x,z) = 0$ ou $deg_z(l_s(x,z)) \leq d-1$. Nosso objetivo é mostrar que $l \in K[x,z]$, ou seja, que $m = 0$. Suponha, por contradição, que $m \geq 1$. Agora como $deg_z(l_s(x,z)) \leq d-1$ e

$$y = f(x)^{-1}\varphi(x,z) = f(x)^{-1}(z^d + b_{d-1}(x)z^{d-1} + \cdots)$$

podemos atribuir pêsos 1 para x e ν suficientemente grande para z de tal forma que

$$gr(l) = x^u z^v gr(y)^m \in Gr(B);\;\; gr(y) = \frac{z^d}{f(x)},\text{ e } gr(h) = x^{a_1}z^{a_2} \in Gr(K(x,z))$$

onde $u, v \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ (estamos identificando x e z com $gr(x)$ e $gr(z)$ respectivamente).

Recorde que $D(g) = hJac(l,g)$ com $h \in K(x,z)$ e que $B = \bigcup B_n$, onde $\{B_n\}$ é a $\mathbb{Z}$-filtração de B induzida pela $\mathbb{Z}$-filtração $\{T_n\}$ de T. Vamos verificar que para

$k = deg(l) + deg(h) - deg(x) - deg(z)$ temos $D(B_n) \subset B_{n+k}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Tome $x^i z^j \in B_n$ com $i, j \geq 0$ e calcule $D(x^i z^j)$, i.e.,

$$D(x^i z^j) = hJac(l, x^i z^j) = h(jx^i z^{j-1} l_x - ix^{i-1} z^j l_z).$$

Veja que $jhx^i z^{j-1} l_x$, $ihx^{i-1} z^j l_z \in B_{n+k}$ logo $D(x^i z^j) \in B_{n+k}$. Tome agora $x^i f(x)^{-j} z^t \in B_n$. Vamos calcular $D(x^i f(x)^{-j} z^t) = hJac(l, x^i f(x)^{-j} z^t)$. Observe que

$$Jac(l, x^i f(x)^{-j} z^t) = t\frac{x^i}{f(x)^j} z^{t-1} l_x - (i\frac{x^{i-1}}{f(x)^j} + j\frac{x^i f'(x)}{f(x)^{j+1}}) z^t l_z.$$

Agora veja que $thx^i f(x)^{-j} z^{t-1} l_x$, $ihx^{i-1} f(x)^{-j} z^t l_z$, $jhx^i f(x)^{-j-1} f'(x) z^t l_z \in B_{n+k}$. Assim $D(x^i f(x)^{-j} z^t) \in B_{n+k}$. Portanto $D(B_n) \subset B_{n+k}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Segue do Lema 30 que a derivação induzida por D no anel graduado $Gr(B)$ é localmente nilpotente e não nula. Seja $D_1 \in LND(Gr(B))$ a derivação induzida por D para $k = deg(l) + deg(h) - deg(x) - deg(z)$. Dado $g \in B$ temos:

$$D_1(gr(g)) = \begin{cases} gr(D(g)) & \text{se} \quad deg(D(g)) = deg(g) + k \\ 0 & \text{se} \quad deg(D(g)) < deg(g) + k. \end{cases}$$

Da igualdade $D(g) = hJac(l, g)$ iremos verificar que $D_1(gr(g)) = gr(h)Jac(gr(l), gr(g))$. Dado $g \in B$, temos que $g = gr(g) + g_1$ onde $g_1 = 0$ ou $deg(g_1) < deg(g)$, logo temos $g_x = gr(g)_x + (g_1)_x$ e $g_z = gr(g)_z + (g_1)_z$. Portanto se escrevermos $l = gr(l) + l_1$ vamos ter que $Jac(l, g) = Jac(gr(l), gr(g)) + G$, onde

$$G = gr(g)_x (l_1)_z + (g_1)_x gr(l)_z - (gr(g)_x (l_1)_z + gr(l)_z (g_1)_x + (g_1)_x (l_1)_z)$$

Observe que se $Jac(gr(l), gr(g)) \neq 0$, tem-se que $deg(G) < deg(Jac(gr(l), gr(g)))$ e neste caso temos que $D_1(gr(g)) = gr(h)Jac(gr(l), gr(g))$. Agora se $Jac(gr(l), gr(g)) = 0$ tem-se que $hJac(l, g) \in B_{n+k-1}$ onde $n = deg(g)$, ou seja, $D_1(gr(g)) = 0$. Logo

$$D_1(gr(g)) = x^{a_1} z^{b_1} Jac(gr(l), gr(g)), \; \forall\, g \in B.$$

Veja que como $gr(l) = x^u z^v gr(y)^m \in A = ker\, D_1$ e A é fatorialmente fechado obtem-se que $gr(y) = \frac{z^d}{f(x)} \in A$. Portanto $f'(x) gr(y) D_1(x) = dz^{d-1} D_1(z)$, assim $D_1(x) = 0$ se, e somente se, $D_1(z) = 0$. Mas como $Gr(B)$ é gerado por x, z e $gr(y)$ e D_1 é não nula temos que $D_1(x) \neq 0$ e $D_1(z) \neq 0$. Logo $u = 0$ e $v = 0$ pois se um deles for não nulo usando, de novo, o fato de que A é fatorialmente fechado e $gr(l) \in A = ker\, D_1$ teríamos que $D_1(x) = 0$ e $D_1(z) = 0$ o que seria um absurdo. Agora como $gr(y) = \frac{z^d}{f(x)}$, podemos escrever $gr(y)^{m-1}x^{a_1}z^{b_1} = \frac{x^{a_1}z^b}{f(x)^{(m-1)}}$.

Portanto a derivação D_1 fica com a seguinte fórmula:

$$D_1(g) = m\frac{x^{a_1}z^b}{f(x)^{(m-1)}}Jac(gr(y), gr(g))$$

e se considerarmos a derivação localmente nilpotente $D_2 = \frac{1}{m}D_1$ vamos ter que:

$$D_2(g) = \frac{x^{a_1}z^b}{f(x)^{(m-1)}}Jac(gr(y), gr(g)),\ \text{com } a_1, b \in \mathbb{Z}.$$

Agora usando o fato de D_2 ser localmente nilpotente e fazendo $deg_{D_2}(x) = p$ e $deg_{D_2}(z) = q$ tem-se que $rp - dq = 0$, pois $D_2(gr(y)) = 0$ e $gr(y) = \frac{z^d}{f(x)}$.
Mas $D_2(x) = -dx^{a_1}z^b\frac{z^{d-1}}{f(x)^m}$ e assim $p - 1 = (a_1 - mr)p + (b + d - 1)q$.
Escrevendo $a = a_1 - (m-1)r$ tem-se

$$p - 1 = (a - r)p + (b + d - 1)q \text{ e portanto } 1 = (1 - a)p + (1 - b)q.$$

Seja $\Delta = r(1 - b) + d(1 - a)$. Veja que

$$p\Delta = pr(1 - b) + pd(1 - a) = dq(1 - b) + pd(1 - a) = d((1 - a)p + (1 - b)q) = d(1) = d,$$

logo $p = d\Delta^{-1}$. De maneira análoga obtemos $q = r\Delta^{-1}$. Portanto $\Delta > 0$ e divide r e d.

Agora observe que, pelo Lema 31, B é gerado como K-espaço vetorial pelo conjunto K-linearmente independente $\{x^iz^ky^j \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq k \leq d - 1\}$ e assim

$$\{x^iz^kgr(y)^j \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq k \leq d - 1\} = \{x^iz^{k+jd}/f(x)^j \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq k \leq d - 1\}$$

é base do K-espaço vetorial $Gr(B)$. Recorde que $f(X)$ é um polinômio mônico em $K[X]$ de grau r. Logo $f'(x) = rx^{r-1} + w(x)$, onde $w(X)$ é um polinômio em $K[X]$ de grau menor que $r - 1$. Portanto

$$D_2(x) = \frac{-dx^{a_1}z^{b+d-1}}{f(x)^m} \text{ e } D_2(z) = \frac{-x^{a_1}z^{b+d-1}f'(x)}{f(x)^{m+1}} = \frac{-rx^{a_1}z^{b+d}x^{r-1}}{f(x)^{m+1}} - \frac{w(x)x^{a_1}z^{b+d}}{f(x)^{m+1}}.$$

Dessa forma para que $D_2(x)$ e $D_2(z)$ pertençam à $Gr(B)$ (lembre que $a = a_1 - (m-1)r$) é necessário que

$$(a_1 - rm, b + d - 1) = (a - r, b + d - 1) = (\beta_x - \alpha_x r, \gamma_x + \alpha_x d) \quad \text{e}$$

$$(a_1 + r - 1 - r(m+1), b + d) = (a - 1 - r, b + d) = (\beta_z - r\alpha_z, \gamma_z + \alpha_z d),$$

onde $\alpha_x, \alpha_z, \beta_x, \beta_z, \gamma_x, \gamma_z \in \mathbb{N}$.

E a partir destas igualdades temos que:

$$a + (\alpha_x - 1)r = \beta_x \geq 0, \quad b - 1 - (\alpha_x - 1)d = \gamma_x \geq 0,$$
$$a - 1 + (\alpha_z - 1)r = \beta_z \geq 0, \quad b - (\alpha_z - 1)d = \gamma_z \geq 0,$$

E então tem-se:

$$\tfrac{b}{d} > \tfrac{b-1}{d} \geq \alpha_x - 1 \geq \tfrac{-a}{r}, \quad \tfrac{b}{d} \geq \alpha_z - 1 \geq \tfrac{1-a}{r} > \tfrac{-a}{r}.$$

Agora veja que $\alpha_x - 1, \alpha_z - 1 \in [\frac{-a}{r}, \frac{b}{d}]$. O tamanho deste intervalo é

$$\begin{aligned}
\frac{b}{d} + \frac{a}{r} &= \frac{rb + ad}{rd} \\
&= \frac{rb + ad + (r - r) + (d - d)}{rd} \\
&= \frac{r + d - r(1-b) - d(1-a)}{rd} \\
&= \frac{r + d - \Delta}{rd} \\
&< \frac{r + d}{rd} \leq 1
\end{aligned}$$

pois $r > 1$ e $d > 1$. Portanto $\alpha_x - 1 = \alpha_z - 1$ e dessa forma

$$\frac{b-1}{d} \geq \frac{1-a}{r}, \text{ ou seja, } 0 \geq \frac{1-a}{r} + \frac{1-b}{d} = \frac{\Delta}{rd}.$$

Logo $\Delta \leq 0$. Absurdo! Portanto temos que $l \in K[x, z]$. $\diamondsuit$

Para concluir a prova do Teorema 34 temos:

Lema 39 $l \in K[x]$.

Demonstração. Suponha que $l \in K[x,z] \setminus K[x]$ e $\mu = 1$, $\nu = N$ sendo N suficientemente grande para que $gr(y) = \frac{z^d}{f(x)}$, $gr(l)$ e $gr(h)$ tenham o mesmo grau em z que l e h respectivamente. Seja D_1 a derivação localmente nilpotente, induzida por D, definida na prova do lema anterior. Como vimos $D_1(gr(g)) = gr(h)Jac(gr(l), gr(g))$. Da suposição de que $l \notin K[x]$ tem-se que $gr(l) = \alpha x^i z^j$ com $j > 0$ e $\alpha \in K \setminus \{0\}$. Logo z divide $gr(l)$, e portanto $z \in ker\, D_1$ (Lembre que $ker\, D_1$ é fatorialmente fechado em $Gr(B)$), mas $f(x)gr(y) = z^d$ logo $gr(y)$ e x também estão em $ker\, D_1$ e assim podemos concluir que $D_1 = 0$ o que é um absurdo. Portanto $l \in K[x]$.

$\diamondsuit$

Agora estamos em condições de determinar um conjunto de geradores para o grupo dos K-automorfismos do anel $B = K[X,Y,Z]/(f(X)Y - \varphi(Z))$, com $\varphi(Z) \in K[Z]$ de grau $d > 1$. Em [20] Makar-Limanov determinou tal conjunto quando $f(X) = X^r$, assim neste parágrafo vamos supor K algebricamente fechado e que $f(X)$ tem pelo menos uma raiz não nula. Na caracterização de tais geradores vamos utilizar de maneira essencial que o AK invariante de B é $K[x]$.

Como estamos interessados nos K-automorfismos de B podemos supor sem perda de generalidade que o coeficiente do termo de grau $d-1$ do polinômio $\varphi(Z)$ e o coeficiente do termo de grau $r-1$ de $f(X)$ são nulos (se necessário basta trocar Z por $Z-a$ e X por $X-b$ para convenientes $a, b \in K$).

Lema 40 *Seja $g(X)$ um polinômio mônico de grau $r \geq 2$ em $K[X]$ com ao menos uma raiz não nula e com coeficiente do termo de grau $(r-1)$ nulo. Sejam $\lambda, \beta \in K$ e $\lambda \neq 0$. Então: $\lambda^r g(X) = g(\lambda X + \beta)$ se e somente se $\beta = 0$, λ é uma s-ésima raiz da unidade e $g(X) = X^i h(X^s)$ com $h(X)$ em $K[X]$ mônico.*

Demonstração. Suponha que $\lambda^r g(X) = g(\lambda X + \beta)$. Fazendo a expansão de Taylor de $g(X)$ tem-se que:

$$g(X) = \frac{g^{(r)}(0)}{r!}X^r + \frac{g^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}X^{r-1} + \cdots + g'(0)X + g(0) \tag{2.3}$$

Derivando sucessivamente $\lambda^r g(X) = g(\lambda X + \beta)$ obtemos, por indução, que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda^r g^{(n)}(X) = \lambda^n g^{(n)}(\lambda X + \beta). \tag{2.4}$$

Agora calculando a derivada de ordem $r-1$ na equação (2.3) obtemos

$$g^{(r-1)}(X) = g^{(r)}(0)X + g^{(r-1)}(0). \tag{2.5}$$

Logo

$$\lambda g^{(r-1)}(0) = g^{(r-1)}(\beta) = g^{(r)}(0)\beta + g^{(r-1)}(0). \tag{2.6}$$

Mas, por hipótese, $g^{(r-1)}(0) = 0$ e $g^{(r)}(0) = 1$, assim $\beta = 0$ e então $\lambda^r g(X) = g(\lambda X)$.

Vejamos agora que $g(X)$ é da forma $X^i h(X^s)$. Como $g(X)$ tem uma raiz não nula existem $t \in \mathbb{N}$ e inteiros positivos $0 \leq n_0 < \ldots < n_t \leq r-2$ tais que

$$g(X) = a_0 X^{n_0} + a_1 X^{n_1} + \cdots + a_t X^{n_t} + X^r$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_t \in K^*$. Como $\lambda^r g(X) = g(\lambda X)$ temos que $\lambda^r a_i = \lambda^{n_i} a_i$ e logo $\lambda^{r-n_i} = 1$ para $i = 0, 1, \ldots, t$ e assim λ é uma raiz da unidade. Seja s a ordem de λ, logo s divide $mdc\{r-n_0, \ldots, r-n_t\}$. Tome n e i inteiros positivos tais que $r = ns + i$, $0 \leq i < s$. Como $\lambda^r = \lambda^i$ temos $\lambda^i g(X) = \lambda^r g(X) = g(\lambda X)$ e logo $\lambda^i a_l = a_l \lambda^{n_l}$ para $l = 0, 1, \ldots, t$. Assim $\lambda^{n_l - i} = 1$ para $l = 0, 1, \ldots, t$ e portanto $n_l = s m_l + i$ para todo l em $\{1, \ldots, t\}$. Logo

$$X^r + \sum_{l=0}^{t} a_l X^{n_l} = X^{sn+i} + \sum_{l=0}^{t} a_i X^{sm_l + i} = X^i[X^{sn} + \sum_{l=0}^{r-2} a_l X^{sm_l}].$$

Tome $h(X) = X^n + \sum_{l=0}^{t} a_i X^{m_l}$ e temos que $g(X) = X^i h(X^s)$. $\diamondsuit$

Iniciamos o estudo dos K-automorfismos de B fixando um K-automorfismo T do anel B. Segue do Lema 20 que $T(K[x]) = K[x]$, pois $K[x]$ é o ML invariante de B. Desse modo $T(x) = \lambda x + \beta$ com $\lambda, \beta \in K$ e $\lambda \neq 0$. Seja $D = f(x)\frac{\partial}{\partial z}$ a derivação localmente nilpotente de B, dada pelo Corolário 35, logo $D^2(z) = 0$. Assim, pelo mesmo Corolário 35, para qualquer derivação localmente nilpotente, ∂, de B temos $\partial^2(z) = 0$. Portanto $T^{-1}\partial^2(T(z)) = 0$ para qualquer $\partial \in LND(B)$ e deste modo $\partial^2(T(z)) = 0$ para qualquer $\partial \in LND(B)$. Logo $\partial(T(z)) \in K[x]$ para qualquer $\partial \in LND(B)$. Agora tome m suficientemente grande de tal forma que $h(x,z) = f(x)^m T(z) \in K[x,z]$. Assim, como $D(x) = 0$, $D(z) = f(x)$ e $D^2(T(z)) = 0$, temos

$$D(f(x)^m T(z)) \;=\; D(h(x,z)) = D(z)h_z(x,z) = f(x)h_z(x,z) \in K[x] = Ker\ D.$$

Como $K[x]$ é fatorialmente fechado temos que $h_z(x,z) \in K[x]$. Assim $h(x,z) = \alpha_1(x)z + b_1(x)$ com $\alpha_1(x), b_1(x) \in K[x]$. Segue do Lema 31 junto com a igualdade $h(x,z) = f(x)^m T(z)$ que $T(z) = \alpha_2(x,y)z + b_2(x,y)$, onde $\alpha_2(x,y), b_2(x,y) \in K[x,y]$. Logo $f(x)^m \alpha_2(x,y) = \alpha_1(x)$ e $f(x)^m b_2(x,y) = b_1(x)$ e utilizando de novo que $K[x]$ é fatoriamente fechado em B tem-se que $\alpha_2(x,y) = \alpha(x) \in K[x]$ e $b_2(x,y) = b(x) \in K[x]$. Portanto $T(z) = \alpha(x)z + b(x)$ e $\alpha(x) = \alpha \in K \setminus \{0\}$, pois T é invertível. Ou seja para todo automorfismo, T, de B existem $\lambda, \alpha \in K \setminus \{0\}$, $\beta \in K$ e $b(x) \in K[x]$ de tal forma que $T(x) = \lambda x + \beta$ e $T(z) = \alpha z + b(x)$.

Lema 41 *Seja T um K-automorfismo de B. Então $T(z) = \alpha z + b(x)$, $T(x) = \lambda x$ onde $\lambda, \alpha \in K^*$, $b(x) \in K[x]$, $b(x) \equiv 0\ (mod\ f(x))$ e $\varphi(\alpha z) = \alpha^d \varphi(z)$. Mais ainda $f(x) = x^i h(x^s)$ e $\lambda^s = 1$.*

Demonstração. Seja T um K-automorfismo de B e $D = f(x)\partial/\partial z$ a derivação localmente nilpotente dada pelo corolário 35 . Sabemos pelas nossas observações anteriores que $T(x) = \lambda x + \beta$, $T(z) = cz + b(x)$ onde $\lambda, \beta, c \in K$, $\lambda c \neq 0$ e $b(x) \in K[x]$. Temos que TDT^{-1} também é uma derivação localmente nilpotente de B. Observe que

$$TDT^{-1}(z) = TD(c^{-1}z - c^{-1}T^{-1}(b(x)) = c^{-1}T(f(x)) = c^{-1}f(\lambda x + \beta). \tag{2.7}$$

Pelo corolário 35 $f(x)$ divide $D(z)$ para qualquer derivação localmente nilpotente de B. Então pela equação 2.7 $f(x)$ divide $f(\lambda x + \beta)$, i.e., $\delta f(x) = f(\lambda x + \beta)$ com $\delta \in K^*$. Utilizando a igualdade de polinômios concluímos que $\delta = \lambda^r$. Logo temos $\lambda^r f(x) = f(\lambda x + \beta)$ e portanto pelo Lema 40 obtemos o resultado para $T(x)$ e o polinômio $f(x)$.

Aplicando T na igualdade $f(x)y = \varphi(z)$ temos

$$\lambda^r f(x)T(y) = f(\lambda x)T(y) = T(f(x))T(y) = T(\varphi(z)) = \varphi(cz + b(x)). \tag{2.8}$$

Veja que $\varphi(cz + b(x)) = c^d\varphi(z) + \nu(x,z)$ onde $\nu(x,z) \in K[x,z]$ e $deg_z(\nu) \leq d-1$. Da equação (2.8) temos que $\lambda^r T(y) = f(x)^{-1}(c^d\varphi(z) + \nu(x,z)) = c^d y + \nu(x,z)f(x)^{-1}$, assim $\nu(x,z)f(x)^{-1} \in K[x,y,z]$ e portanto $\nu(x,z) \equiv 0 \ (mod\ f(x))$. Agora observe que $0 \equiv_{f(x)} \nu(x,z) = \varphi(cz+b(x)) - c^d\varphi(z) = c^{d-1}z^{d-1}b(x) + \sigma$ onde $\sigma \in K[x,z]$ e $deg_z(\sigma) < d-1$ (lembre que o coeficiente do termo de grau (d-1) do polinômio φ é nulo). Logo concluímos que $b(x) \equiv 0 \ (mod\ f(x))$, Lema 31. Segue da igualdade $\nu(x,z) = \varphi(cz + b(x)) - c^d\varphi(z)$ que $\varphi(cz + b(x)) \equiv \varphi(cz) \ (mod\ f(x))$ e a partir da equivalência $b(x) \equiv 0 \ (mod\ f(x))$ obtemos $\varphi(cz) \equiv c^d\varphi(z) \ (mod\ f(x))$, que só é possível quando $\varphi(cz) - c^d\varphi(z) = 0$. $\diamondsuit$

Teorema 42 *O grupo $Aut_K(B)$ é gerado pelos seguintes automorfismos.*

i) Se $f(X) = X^j h(X^s)$ com $h(X)$ tendo raiz não nula então $T(x) = \lambda x$ onde $\lambda^s = 1$, $T(y) = \lambda^j y$ e $T(z) = z$.

ii) $H(x) = x$, $H(y) = y + [\varphi(z + h(x)f(x)) - \varphi(z)]f(x)^{-1}$ e $H(z) = z + h(x)f(x)$ onde $h(x) \in K[x]$.

iii) Se $\varphi(z) = z^d$ então $R(x) = x$, $R(y) = \lambda^d y$ e $R(z) = \lambda z$.

iv) Se $\varphi(z) = z^i\phi(z^m)$ então $S(x) = x$, $S(y) = \mu^i y$ e $S(z) = \mu z$ onde $\mu^m = 1$.

Demonstração. É fácil verificar que estas aplicações são automorfismos de B. Segue do Lema 41 que todo automorfismo é a composição de um automorfismo V, definido por $V(x) = \lambda x$ e $V(z) = z$, um automorfismo L dado por $L(x) = x$, $L(z) = \alpha z$ e o automorfismo H. Os automorfismos dos itens *iii*) e *iv*) descrevem os polinômios $\varphi(z)$ para os quais temos $\varphi(\alpha z) = \alpha^d\varphi(z)$ quando $\alpha \neq 1$. Os automorfismos dos itens *i*) e *ii*) descrevem as formas possíveis do automorfismo V quando $\lambda \neq 1$. $\diamondsuit$

Observação 43 *Para o caso particular em que $f(x)$ é do tipo $f(x) = x^i h(x)$, com*

$$h(x) = X^{r-i} + \sum_{l=0}^{t} a_l X^{m_l},$$

onde $a_l \in K^*$, para $0 \leq l \leq t$, $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_t < r-i$ e $mdc\{r-i, m_1, \cdots, m_t\} = 1$ tem-se que todo K-automorfismo de B é $K[X]$-automorfismo.

Mais ainda neste caso se tomarmos $\varphi(z) = z^d + b_{d-2}(x)z^{d-2} + \cdots + b_0(x) \in K[x,z]$ vamos ter que o grupo de automorfismos de B podem ser gerados pelos automorfismos descritos nos itens ii), iii) e iv) do teorema anterior.

Vamos encerrar essa seção com um exemplo sobre esses automorfismos.

Exemplo 44 *Seja $B = \mathbb{C}[x,y,z]$ onde os geradores satisfazem a relação $f(x)y = \varphi(z)$, sendo $\varphi(Z) = Z^3 + Z + 1 \in \mathbb{C}[X]$, $f(X) = X^2h(X^4) \in \mathbb{C}[Z]$ e $h(X) = X^5 + 2X^4 + X^2 - 2$. Então o Teorema 42 afirma que a aplicação H definido por*

$$H(x) = x, \quad H(z) = z + (x^2+1)f(x) = x^{24} + x^{22} + 2x^{20} + 2x^{18} + x^{12} + x^{10} - 2x^4 - 2x^2,$$

$H(y) = y + [\varphi(z + (x^2+1)f(x)) - \varphi(z)]f(x)^{-1} = y + (1+x^2)(1 + 4x^4 + 8x^6 + 4x^8 - 4x^{12} - 8x^{14} - 4x^{16} - 7x^{20} - 14x^{22} - 11x^{24} - 8x^{26} + 8x^{30} + 6x^{32} + 4x^{34} + 6x^{36} + 8x^{38} + 8x^{40} + 8x^{42} + 5x^{44} + 2x^{46} + x^{48} - 6x^2z - 6x^4z + 3x^{10}z + 3x^{12}z + 6x^{18}z + 6x^{20}z + 3x^{22}z + 3x^{24}z + 3z^2)$, *é um automorfismo de B.* $\diamondsuit$

2.3 O anel $K[X_1, \ldots, X_{n+1}, Z]/(X_1 \cdots X_{n+1} - \varphi(Z))$

Nesta seção C é o anel quociente definido por

$$K[X_1, \ldots, X_{n+1}, Z]/(X_1 \cdots X_{n+1} - \varphi(Z)),$$

onde $\varphi(Z)$ pertence ao anel polinomial $K[Z]$, $deg_Z(\varphi) \geq 2$ e $n \geq 1$.

No artigo [5] D. Daigle estuda as derivações localmente nilpotentes do anel C quando $n = 1$. Nesse artigo D. Daigle mostra que C é um dóminio normal, que C é DFU se, e somente se, φ é irredutível em $K[Z]$, exibe derivações em C que são localmente nilpotentes e irredutivéis, além disso caracteriza os núcleos dessas derivações. Nesta seção generalizamos o anel estudado por D. Daigle, C, e obtemos resultados similares.

O próximo Lema, apesar de simples, será muito útil nos resultados a seguir.

Lema 45 *Seja $C = K[x_1, \ldots, x_{n+1}, z]$ onde $x_1 \cdots x_{n+1} = \varphi(z)$ e $r = deg_Z(\varphi)$. Então para cada $b \in C$ existe um único $G \in K[X_1, \ldots X_{n+1}, Z] = K^{[n+2]}$ tal que $deg_Z(G) < r$ e $b = g(x_1, \ldots, x_{n+1}, z)$.*

Demonstração. Segue do algoritmo da divisão. Considere $X_1 \cdots X_{n+1} - \varphi(Z)$ como polinômio na variável Z e com coeficientes em $K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. $\Diamond$

Teorema 46 *O anel C é um domínio normal.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre n. O caso $n = 0$ foi mostrado por Daigle em [5]. Assim para $n > 0$ basta mostrar que $C = K(x_1)[x_2 \ldots, x_{n+1}, z] \cap K(x_2)[x_1 \ldots, x_{n+1}, z]$. É claro que

$$C \subset K(x_1)[x_2 \ldots, x_{n+1}, z] \cap K(x_2)[x_1 \ldots, x_{n+1}, z].$$

Vejamos que $K(x_1)[x_2 \ldots, x_{n+1}, z] \cap K(x_2)[x_1 \ldots, x_{n+1}, z] \subset C$. De fato:
seja $\alpha \in K(x_1)[x_2 \ldots, x_{n+1}, z] \cap K(x_2)[x_1 \ldots, x_{n+1}, z]$, então $\alpha = F(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}, z)/f(x_1)$ e também $\alpha = G(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}, z)/g(x_2)$, onde $f(X_1) \in K[X_1]$, $g(X_2) \in K[X_2]$ e $F(X_1, X_2 \ldots, X_{n+1}, Z)$, $G(X_1, X_2 \ldots, X_{n+1}, Z) \in K[X_1, \ldots X_{n+1}, Z]$. Pelo Lema 45 podemos supor que F, G satisfazem $deg_z(F) < r = deg_z(\varphi)$ e $deg_z(G) < r$. Já a unicidade do Lema 45 junto com a igualdade $g(x_2)F(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}, z) = f(x_1)G(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}, z)$ nós fornece a seguinte igualdade $g(X_2)F(X_1, X_2 \ldots, X_{n+1}, Z) = f(X_1)G(X_1, X_2 \ldots, X_{n+1}, Z)$ no anel polinomial $K[X_1, \ldots X_{n+1}, Z]$. Logo f divide F em $K[X_1, \ldots X_{n+1}, Z]$ e assim $\alpha = F(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}, z)/f(x_1) \in C$. $\Diamond$

Lema 47 $K(x_1, \ldots, x_n) \cap C = K[x_1, \ldots, x_n]$

Demonstração. Seja $0 \neq b \in C \cap K(x_1, \ldots, x_n)$. Do fato de $b \in C$ nós temos pelo Lema 45 que $b = \sum_{i=0}^{r-1} a_i z^i$, onde $a_i \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ para $i = 1, \ldots, r-1$. Visto que $b \in K(x_1, \ldots, x_n)$ podemos encontrar $a \in K[x_1, \ldots, x_n]$ satisfazendo $ab \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Desse modo $\sum_{i=0}^{r-1} (aa_i)z^i = ab \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Portanto $a_i = 0$ para todo $i > 0$. Logo $b = a_0$. E assim $b \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}] \cap K[x_1, \ldots, x_n] = K[x_1, \ldots, x_n]$. Donde segue o resultado. $\Diamond$

Lema 48 *O anel $K[x_1, \ldots, x_n]$ é fatorialmente fechado em C. Em particular $C^* = K^*$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in C$ tais que $ab \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$, então a, b são unidades em $S^{-1}C = K(x_1, \ldots, x_n)^{[1]}$, onde $S = K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$. Assim $a, b \in K(x_1, \ldots, x_n) \cap C$ e do Lema 47 segue que $a, b \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Portanto $K[x_1, \ldots, x_n]$ é fatorialmente fechado em C. Disto temos que $C^* = K[x_1, \ldots, x_n]^* = K^*$. $\Diamond$

Observação 49 *Uma consequência direta desse Lema é o fato de cada x_i, para $1 \leq i \leq n$, ser irredutível em C. De fato: cada x_i é irredutível em $K[x_1, \ldots, x_n]$ que é fatorialmente fechado em C. Portanto cada x_i é um elemento irredutível de C.*

Considere D a derivação de C dada por $D(x_1) = \cdots = D(x_n) = 0$, $D(x_{n+1}) = \varphi'(z)$ e $D(z) = x_1 \cdots x_n$. É facil observar que D é uma derivação localmente nilpotente em C. Agora veja que $K \leq K[x_1, \ldots, x_n] \leq ker\, D$. Considerando o grau de transcendência sobre K, nesta desigualdade, obtemos que $ker\, D$ é algébrico sobre $K[x_1, \ldots, x_n]$ e como $K[x_1, \ldots, x_n]$ é algebricamente fechado em C, pelo Lema 48, obtemos que $K[x_1, \ldots, x_n] = kerD$.

Teorema 50 *Seja $D \in LND(C)$ dada acima. Temos que $ker\, D = K[x_1, \ldots, x_n]$, $LND_{K[x_1,\ldots,x_n]}(C) = \{hD \mid h \in K[x_1, \ldots, x_n]\}$ e D é irredutível.*

Demonstração. Seja $0 \neq D_1 \in LND_{K[x_1,\ldots,x_n]}(C)$ note que $ker\, D_1 = K[x_1, \ldots, x_n]$. Como $D(z) \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ segue do item *d*) do Lema 11 que $D_1(z) \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ e $D(z)D_1 = D_1(z)D$. Assim temos

$$x_1 \cdots x_n D_1 = D_1(z)D \tag{2.9}$$

Pelo Lema 45 temos $D_1(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i z^i$, onde $a_i \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, dessa forma temos

$$\sum_{i=0}^{r-1} x_1 \cdots x_n a_i z^i = x_1 \cdots x_n D_1(x_{n+1}) = D_1(z)D(x_{n+1}) = D_1(z)\varphi'(z). \tag{2.10}$$

Como $D_1(z) \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$, segue do Lema 45 junto com a equação 2.10 que para todo $i \in \{0, \ldots r-1\}$ nós temos $x_1 \cdots x_n a_i = \lambda_i D_1(z)$, onde $\lambda_i \in K$ são definidos pelo polinômio $\varphi'(Z) = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i Z^i$. Portanto

$$D_1(z) \in K[x_1, \ldots, x_n] \cap x_1 \cdots x_n K[x_1, \ldots, x_{n+1}] = x_1 \cdots x_n K[x_1, \ldots, x_n],$$

isto é, $D_1(z) = x_1 \cdots x_n h$ para algum $h \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Substituindo $D_1(z) = x_1 \cdots x_n h$ na equação 2.9 nós obtemos que $D_1 = hD$.

Agora vejamos que D é irredutível. Pelo Lema 16 temos que $D = hD_0$ para algum $h \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e $D_0 \in LND_{K[x_1,\ldots,x_n]}(C)$ irredutível. Pelo que já demonstramos $D_0 = h_0 D$

para algum $h_0 \in K[x_1, \ldots, x_n]$, assim temos $D = hh_0D$ e portanto $h, h_0 \in K^*$. Donde segue que D é irredutível. $\diamondsuit$

Para cada $1 \leq i \leq n+1$ seja D_i a derivação do anel C definida por $D_i(x_i) = \varphi'(z)$, $D_i(z) = x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_{n+1}$ e $D_i(x_k) = 0$ quando $i \neq k$. Veja que $D_{n+1} = D$ e que trocando D_i por D no teorema anterior temos um resultado análogo para cada D_i.

Uma consequência desta observação é o seguinte resultado

Teorema 51 *O invariante $ML(C)$ é igual a K.*

Demonstração. Veja que $K \subset ML(C) \subset ker\, D_1 \cap \cdots \cap ker\, D_{n+1} = K$. $\diamondsuit$

Teorema 52 *Seja $C = K[x_1, \ldots, x_{n+1}, z]$ e $I = K[z] \cap x_{n+1}C$ ideal de $K[z]$. Temos que $x_1 \cdots x_{n+1}$ é um gerador de I.*

Demonstração. Lembre que $C = K[x_1, \ldots, x_{n+1}, z]$, onde $x_1 \cdots x_{n+1} = \varphi(z)$ em C com $\varphi(Z) \in K[Z] \setminus K$. Seja $d = deg_Z\varphi$ e $b \in I$, então $b = g(z)$ para algum $g \in K[Z]$. Pelo algoritmo da divisão existem únicos $q, p \in K[Z]$ tais que $g = q\varphi + p$, em $K[Z]$, com $deg_Z(p) < d$. Assim temos

$$p(z) = g(z) - q(z)\varphi(z) = b - q(z)x_1 \cdots x_{n+1} \in x_{n+1}C. \tag{2.11}$$

Logo $p(z) = x_{n+1}F(x_1, \ldots, x_{n+1}, z)$, para algum $F \in K[X_1, \ldots, X_{n+1}, Z]$ com $deg_Z(F) < n$. Então $p = X_{n+1}F$, pelo Lema 45, e logo X_{n+1} divide p em $K[X_1, \ldots, X_{n+1}, Z]$ e portanto $p = 0$. Segue da equação 2.11 que $b = q(z)x_1 \cdots x_{n+1} \in x_1 \cdots x_{n+1}K[z]$. $\diamondsuit$

Definição 53 *Um sistema de coordenadas em C é uma $(n+2)$-upla $(x_1, \ldots, x_{n+1}, z) \in C^n$ satisfazendo $C = K[x_1, \ldots, x_{n+1}, z]$ e $x_1 \cdots x_{n+1} \in K[z] \setminus K$.*

Teorema 54 *Sejam $(x_1, \ldots, x_{n+1}, z)$ e $(y_1, \ldots, y_{n+1}, w)$ sistemas de coordenadas do anel C. Se $K[x_1, \ldots, x_n] = K[y_1, \ldots, y_n]$ e $K[z] = K[w]$ então $K[x_{n+1}] = K[y_{n+1}]$.*

Demonstração. Sendo $(y_1, \ldots, y_{n+1}, w)$ um sistema de coordenadas de C e $K[z] = K[w]$ segue que $(y_1, \ldots, y_{n+1}, z)$ é um sistema de coordenadas de C. Considere $D_1, D_2 \in LND(C)$ tais que $D_1(z) = x_1 \cdots x_n$ e $D_2(z) = y_1 \cdots y_n$ e $ker\, D_1 = K[x_1, \ldots, x_n] = kerD_2$. Como

D_2 é irredutível e $LND_{K[x_1,\dots,x_n]}(C) = \{hD_1 \mid h \in K[x_1,\dots,x_n]\}$ temos que $D_2 = \lambda D_1$ para algum $\lambda \in K^*$. Portanto $y_1 \cdots y_n = D_2(z) = \lambda D_1(z) = \lambda x_1 \cdots x_n$. Pela Observação 49 para cada $1 \leq i \leq n$ temos $x_i = \lambda_j y_j$ para um $1 \leq j \leq n$ com $\lambda_j \in K^*$. Dessa forma $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_{n+1}, z)$ é um sistema de coordenadas de C, onde σ é uma permutação do conjunto $\{1, \dots, n\}$. Pelo Teorema 52 temos que o ideal $I = K[z] \cap x_{n+1}C$ de $K[z]$ é gerado por $x_{\sigma(1)} \cdots, x_{\sigma(n)} y_{n+1}$ e por $x_1 \cdots x_{n+1}$. Portanto $x_{\sigma(1)} \cdots, x_{\sigma(n)} y_{n+1} = \alpha x_1 \cdots x_{n+1}$ para algum $\alpha \in K^*$, donde $y_{n+1} = \alpha x_{n+1}$ e assim $K[x_{n+1}] = K[y_{n+1}]$. $\diamondsuit$

O próximo lema é uma ferramenta muito conhecida e útil para verificar se certos domínios são domínos de fatoração única.

Lema 55 (Nagata) *Seja R um domínio noetheriano. Se p é um elemento primo de R e $R[1/p]$ é DFU então R também é DFU.*

Demonstração. Veja o artigo [23]. $\diamondsuit$

A seguir temos um lema técnico visando o próximo resultado.

Lema 56 *Sejam $p_1, \dots, p_n$ primos, dois a dois, distintos e não associados em um domínio integral R . Então p_n é primo em $R[1/p_1 \cdots p_{(n-1)}]$.*

Demonstração. Vamos considera somente o caso $n = 2$, para $n \geq 3$ o procedimento é análogo. Considere p e q elementos primos e não associados em R. Vejamos se p é realmente primo em R_q. Sejam $q^n a$ e $q^m b$ em R_q tal que p divide $(q^n a)(q^m b)$, i.e., $pq^k c = (q^n a)(q^m b)$. Multiplicando esta igualdade por q^{-k} temos que $pc = (q^{n+m-k} ab)$, donde p divide a ou b.

$\diamondsuit$

Teorema 57 *C é DFU se, e somente se, φ é irredutível em $K[Z]$.*

Demonstração. Segue da Observação 49 que cada x_i é um elemento irredutível de C. Agora veja que

$$
\begin{aligned}
\frac{C}{x_iC} &= \frac{K[X_1,\ldots,X_{n+1},Z]}{(X_i,\varphi - X_1\cdots X_{n+1})}\\
&= \frac{K[X_1,\ldots,X_{n+1},Z]}{(X_i,\varphi)}\\
&= \frac{K[X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i-1},\ldots,X_{n+1},Z]}{(\varphi)}\\
&= (\frac{K[Z]}{(\varphi)})^{[n]}
\end{aligned}
$$

assim cada x_i é primo em C se, e somente se, φ é primo em $K[Z]$. Em particular se C é DFU então x_1 é primo em C e então φ é primo em $K[Z]$.

Agora se φ é primo em $K[Z]$ entãoo x_i é primo em C para cada $1 \leq i \leq n$ e como

$$
\begin{aligned}
C[1/x_1\cdots x_n] &= K[x_1,\frac{1}{x_1},\ldots,x_n,\frac{1}{x_n},x_{n+1},z]\\
&= K[x_1,\frac{1}{x_1},\ldots,x_n,\frac{1}{x_n},z]\\
&= K[x_1,\frac{1}{x_1},\ldots,x_n,\frac{1}{x_n}]^{[1]},
\end{aligned}
$$

nós temos que $C[1/x_1\cdots x_n]$ é DFU. Agora pelo Lema 56 x_n é primo em $C[1/x_1\cdots x_{(n-1)}]$ e pelo Lema 55 $C[1/x_1\cdots x_{(n-1)}]$ é DFU e continuando este procedimento temos que C é DFU. $\diamondsuit$

CAPÍTULO 3

O anel B_n^m

Já sabemos que as derivações localmente nilpotentes de um anel são amplamente utilizadas em diversos problemas (veja [2], [7]). Contudo caracterizar o conjunto das derivações localmente nilpotentes de um determinado anel já é uma questão relevante (veja [6], [27], [31]) e tem-se mostrado uma árdua tarefa.

Em alguns casos temos uma resposta positiva a este problema, por exemplo quando A é um domínio é fácil verificar que as A-derivações localmente nilpotentes do anel polinomial $A[t]$ são da forma $a\frac{\partial}{\partial t}$ onde $a \in A$. Se K é um corpo de característica zero R. Rentschler mostrou no artigo [27] que as derivações localmente nilpotentes do anel polinomial em duas variáveis sobre K, $K[X,Y]$, são da forma $f\frac{\partial}{\partial y}$ onde $f \in K[X]$. Até o presente momento não é conhecida uma caracterização das derivações localmente nilpotentes do anel polinomial em três variáveis sobre K. Neste caso existe um resultado parcial obtido por D. Daigle no artigo [6].

Neste capítulo estudamos as derivações localmente nilpotentes do anel

$$B_n^m = \frac{\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]}{(X_1^m + \cdots + X_n^m)} \tag{3.1}$$

onde, $n \geq 3$ e $m \geq 2$. Na literatura este anel é conhecido como *Anel Generalizado de Fermat.* Neste texto vamos nós referir ao anel B_n^m como *anel de Fermat.* Observe que o anel de Fermat, B_n^m, é isomorfo ao domínio finitamente gerado $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ onde os geradores satisfazem a relação $x_1^m + \cdots + x_n^m = 0$.

No artigo [10], Lema 2.7, foi provado que quando $m \geq n^2 - 2n$ o conjunto das derivações localmente nilpotentes do domínio B_n^m se resume a derivação nula, ou seja, B_n^m é um *domínio rígido* . Assim naturalmente surgiu a seguinte questão: O que ocorre nos outros casos?

Aqui mostramos que a resposta, a esta indagação, é negativa no caso em que $m = 2$, ou seja, o anel de Fermat B_n^2 não é um domínio rígido, ou melhor, existem derivações localmente nilpotentes não nulas em B_n^2 (Exemplos 70, 71). No caso em que $m > 2$ mostramos que a única derivação triangular do anel B_n^m é a nula. Contudo ainda não sabemos se o anel de Fermat B_n^m é um domínio rígido para todo $m > 2$ e $n \geq 3$.

Na primeira seção determinamos um conjunto de geradores pro B_n^m-módulo $Der(B_n^m)$, Teorema 59. A segunda seção é dedicada ao estudo das derivações localmente nilpotentes do anel de Fermat B_n^m, $LND(B_n^m)$. Onde mostramos que a única derivação triangular do anel B_n^m é a nula (Teorema 62).

A Terceira é dedicada ao estudo do caso particular $m = 2$, ou seja, as derivações localmente nilpotentes do anel de Fermat B_n^2, $LND(B_n^2)$. Nesse caso encontramos exemplos (veja Exemplos 70, 71) de derivações localmente nilpotentes e irredutíveis. Além disso conseguimos determinar os núcleos destas derivações (Lema 74) e calcular o seu ML invariante (Teorema 79).

3.1 Geradores do módulo $Der(B_n^m)$

Esta seção tem como base o exemplo *c*) da sétima seção do artigo [17] de J. Lipman. O principal resultado é a obtenção de um conjunto de geradores pro B_n^m-módulo $Der(B_n^m)$, Teorema 59.

Vamos recordar algumas notações: o anel polinomial em n variáveis $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ é denotado por $\mathbb{C}^{[n]}$. Vamos indicar as derivadas parciais, $\frac{\partial(H)}{\partial X_i}$, de um polinômio H em $\mathbb{C}^{[n]}$, por H_{X_i}. Por exemplo, se $F = X_1^m + \cdots + X_n^m$ então $F_{X_i} = mX_i^{m-1}$.

A derivação E do anel polinômial $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ definida por $E = X_1\frac{\partial}{\partial X_1} + \cdots + X_n\frac{\partial}{\partial X_n}$ é dita *derivação de Euler* . Dado um polinômio H em $\mathbb{C}^{[n]}$ definimos as derivações $D_{ij} = H_{X_j}\frac{\partial}{\partial X_i} - H_{X_i}\frac{\partial}{\partial X_j}$ do anel $\mathbb{C}^{[n]}$, para todo i, j em $\{1, \ldots, n\}$. Observe que as derivações

D_{ij} dependem do polinômio H. Veja que para $i < j$ temos

$$D_{ij}(X_k) = \begin{cases} H_{X_j} & \text{se} \quad k = i \\ -H_{X_i} & \text{se} \quad k = j \\ 0, & \text{se} \quad k \neq \{i, j\}. \end{cases}$$

Sendo $F = X_1^m + \cdots + X_n^m$ é fácil ver que $E(F) = mF$. Assim a derivação de *Euler* induz uma derivação em B_n^n que denotamos por ε.

O próximo lema, que será muito útil, foi obtido utilizando os mesmos argumentos de um resultado de O. Zariski, apresentado por J. Lipman em 1965 no artigo [17].

Lema 58 *Seja F um polinômio em $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\{F_{X_n}, \ldots, F_{X_1}\}$ é uma sequência regular. Se existe uma derivação ∂ de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\partial(F) = \alpha F$, para algum α em $\mathbb{C}^*$, então o $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$-módulo*

$$M := \{D \in Der(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]) \mid D(F) \subset (F)\}$$

é gerado pelas derivações D_{ij} (em relação a F) com $i < j$ e a derivação ∂.

Demonstração. Seja D uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $D(F) = HF$, onde $H \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Como $\partial(F) = \alpha F$, com α em $\mathbb{C}^*$, segue que $(D - \frac{H}{\alpha}\partial)(F) = 0$. Assim basta determinarmos um conjunto de geradores para as derivações do módulo M que satisfazem $D(F) = 0$ e estes geradores junto com a derivação ∂ irão formar um conjunto de geradores para M.

Visto que toda derivação D do anel $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ pode ser expressa como

$$D = G_1 \frac{\partial}{\partial_{X_1}} + \cdots + G_n \frac{\partial}{\partial_{X_n}}$$

onde $G_1, \ldots, G_n \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ e são únicos, então toda derivação D do anel $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ pode ser identificada com um único vetor $(G_1, \ldots, G_n)$ em $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^n$. Assim estamos interessados nas derivações $(G_1, \ldots, G_n)$ de M que satisfazem

$$G_1 \frac{\partial(F)}{\partial_{X_1}} + \cdots + G_n \frac{\partial(F)}{\partial_{X_n}} = D(F) = 0.$$

Tome $(G_1, \ldots, G_n)$ um vetor do módulo M que satisfaça

$$G_1F_{X_1} + G_2F_{X_2} + \cdots + G_nF_{X_n} = 0. \tag{3.2}$$

Como $\{F_{X_n}, \ldots, F_{X_1}\}$ é uma sequência regular $(F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}) : (F_{X_1}) = (F_{X_2}, \ldots, F_{X_n})$, assim a igualdade (3.2) implica que

$$G_1 = H_{12}F_{X_2} + \cdots + H_{1n}F_{X_n}.$$

Subtraindo do vetor $(G_1, \ldots, G_n)$ o vetor

$$\begin{gathered} H_{12}(F_{X_2}, -F_{X_1}, 0, \ldots, 0) + \cdots + \\ H_{1p}(F_{X_p}, 0, \ldots, 0, \overbrace{-F_{X_1}}^{p-\text{posição}}, 0, \ldots, 0) + \cdots + H_{1n}(F_{X_n}, 0, \ldots, 0, -F_{X_1}), \end{gathered}$$

que está em M, podemos supor que $G_1 = 0$. Visto que

$$(F_{X_3}, \ldots, F_{X_n}) : (F_{X_2}) = (F_{X_3}, \ldots, F_{X_n}),$$

a igualdade (3.2) implica que

$$G_2 = H_{23}F_{X_3} + \cdots + H_{2n}F_{X_n}$$

Agora subtraindo do vetor $(0, G_2, \ldots, G_n)$ o vetor

$$\begin{gathered} H_{23}(0, F_{X_3}, -F_{X_2}, 0, \ldots, 0) + \cdots + \\ H_{2p}(0, F_{X_p}, 0, \ldots, 0, \overbrace{-F_{X_2}}^{p-\text{posição}}, 0 \ldots, 0) + \cdots + H_{2n}(0, F_{X_n}, 0, \ldots, 0, -F_{X_2}), \end{gathered}$$

que está em M, podemos supor que $G_2 = 0$. Supondo $G_1 = G_2 = \cdots = G_{q-1} = 0$ para $1 \leq q \leq n-3$. Como $(F_{X_q}, \ldots, F_{X_n}) : (F_{X_{q-1}}) = (F_{X_q}, \ldots, F_{X_n})$ a igualdade (3.2) implica que

$$G_q = H_{q(q+1)}F_{X_{q+1}} + \cdots + H_{qn}F_{X_n}.$$

E subtraindo do vetor $(0, \ldots, 0, G_q, \ldots, G_n)$ o vetor

$$\begin{gathered} H_{q(q+1)}(0, \ldots, 0, \overbrace{F_{X_{q+1}}}^{q-\text{posição}}, -F_{X_q}, 0, \ldots, 0) + \cdots + \\ H_{qp}(0, \ldots, 0, \overbrace{F_{X_p}}^{q-\text{posição}}, 0, \ldots, 0, \overbrace{-F_{X_q}}^{p-\text{posição}}, 0, \ldots, 0) + \cdots + \\ H_{qn}(0, \ldots, 0, \overbrace{F_{X_n}}^{q-\text{posição}}, 0, \ldots, 0, -F_{X_q}), \end{gathered}$$

que está em M, podemos supor $G_q = 0$. Desse modo podemos supor, sem perda de generalidade, que $G_1 = \cdots = G_{n-2} = 0$ na equação (3.2). Visto que $(F_{X_n}) : (F_{X_{n-1}}) = (F_{X_n})$, a igualdade (3.2) implica que $G_{n-1} = LF_{X_n}$ e $G_n = -LF_{X_{n-1}}$. Assim

$$(0, \ldots, 0, G_{n-1}, G_n) = L(0, \ldots, 0, F_{X_n}, -F_{X_{n-1}}).$$

Portanto a derivação D pode ser reescrita como uma combinação linear das derivações $F_{pq} = (0, \ldots, 0 \overbrace{, F_{X_p},}^{q-\text{posição}} 0, \ldots, 0, \overbrace{-F_{X_q}}^{p-\text{posição}}, 0, \ldots, 0)$, onde $p < q$, com coeficientes em $\mathbb{C}^{[n]}$. Pelo exposto acima temos que os vetores F_{pq} junto com o vetor $(X_1, \ldots, X_n)$ geram o módulo M. Mas estes vetores são justamente as derivações ∂ e D_{ij} com $i < j$. $\diamondsuit$

Deste ponto sempre que nós referirmos as derivações D_{ij} será em relação ao polinômio $X_1^m + \cdots + X_n^m$ e também só consideramos $i < j$, ou seja,

$$D_{ij}(X_k) = \begin{cases} mX_j^{m-1} & \text{se} \quad k = i \\ -mX_i^{m-1} & \text{se} \quad k = j \\ 0, & \text{se} \quad k \neq \{i, j\}. \end{cases}$$

As derivações de B_n^m induzidas por $\frac{D_{ij}}{m}$, $i < j$ serão denotadas por d_{ij} ,ie,
$d_{ij} = x_j^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_i} - x_i^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$

Teorema 59 *As derivações d_{ij}, com $i < j$, e a induzida da derivação de Euler, ε, geram o B_n^m-módulo $Der(B_n^m)$.*

Demonstração. Seja I o ideal $(X_1^m + \cdots + X_n^m))$. Lembre que $d \in Der(B_n^m)$ se, e somente se, existe $D \in Der(\mathbb{C}^{[n]})$ tal que $D(I) \subset I$. Além disso $d(f + I) = D(f) + I$. Agora veja que $E(X_1^m + \cdots + X_n^m) = m(X_1^m + \cdots + X_n^m)$ e que $\{X_1^{m-1}, \cdots, X_n^{m-1}\}$ é uma sequência regular. Portanto o resultado segue do Lema 58. $\diamondsuit$

Chamamos a atenção do leitor para um detalhe na prova do Teorema anterior. Veja que para aplicarmos o Lema 58 foi preciso encontrar uma derivação D satisfazendo $D(F) = \alpha F$, para algum $\alpha \in \mathbb{C}$, que no caso do anel de Fermat foi a derivação de Euler, visto que $E(F) = deg(f)F$ para qualquer polinômio homogêneo. Logo se F é um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ e $\{F_{X_n}, \ldots, F_{X_1}\}$ é uma sequência regular sempre vamos poder utilizar a derivação de Euler para aplicar o Lema 58.

A partir desta observação o leitor poder ser induzido a pensar que enunciamos o Lema 58 com uma generalidade desnecessária. Contudo não foi este o caso. O resultado a seguir é bem instrutivo nesta questão, pois mostra uma aplicação do Lema 58 quando o polinômio F não é homogêneo. Antes do resultado, propriamente dito, fixemos algumas notações. Considere B o anel $\frac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{(f(X)Y-Z^m)}$ onde $m \geq 2$ e $deg_X(f) \geq 2$, além disso vamos supor que $f(X)$ e sua derivada ordinária, $f^{'}(X)$, não tenham raízes em comum. Vamos identificar B com o anel $\mathbb{C}[x,y,z]$ onde $f(x)y = z^m$. Vejamos agora como podemos encontrar um conjunto de geradores para o B-módulo $Der(B)$.

Teorema 60 *As derivações*

$$d_{xy} = f(x)\frac{\partial}{\partial x} - f'(x)y\frac{\partial}{\partial y}, \;\; d_{xz} = -mz^{m-1}\frac{\partial}{\partial x} - f'(x)y\frac{\partial}{\partial z}$$
$$d_{yz} = -mz^{m-1}\frac{\partial}{\partial y} - f(x)\frac{\partial}{\partial z}, \;\; d = y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{m}\frac{\partial}{\partial z}$$

geram o B-módulo $Der(B)$.

Demonstração. É análoga a prova do Teorema 59. Observe que sendo $P = f(X)Y - Z^m$ a derivação D, definida por, $D = Y\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{Z}{m}\frac{\partial}{\partial Z}$ satisfaz $D(P) = P$. Agora note que a sequência $\{P_Z, P_Y, P_X\} = \{-mZ^{m-1}, f(X), f'(X)Y\}$ é regular e aplique o Lema 58. $\diamondsuit$

3.2 Sobre $LND(B_n^m)$

Nesta seção estudamos o conjunto $LND(B_n^m)$, ou seja, as derivações localmente nilpotentes do anel B_n^m quando $n \geq 3$ e $m \geq 2$. O seguinte lema vai nós auxiliar neste estudo.

Lema 61 *Seja h em B_n^m. Então para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ existe único $G \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ satisfazendo $h = G(x_1, \ldots, x_n)$ e $deg_{X_k}(G) < m$.*

Demonstração. Lembre que o anel de Fermat, B_n^m, é definido pelo anel anel quociente $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^m + \cdots + X_n^m)$. Considere $T = X_1^m + \cdots + X_n^m$ como um polinômio na variável X_k e coeficientes em $\mathbb{C}[X_1, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, X_n]$. Desse modo o coeficente lider de T pertence a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}[X_1, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, X_n]^*$. O algoritmo da divisão afirma que para cada $F \in \mathbb{C}^{[n]}$ existe um único par (Q, G) de polinômios em $\mathbb{C}^{[n]}$ satisfazendo $F = TQ + G$ e $deg_{X_k}(G) < n$. O resultado segue desta observação. $\diamondsuit$

Dado uma derivação D em B_n^m temos que D satisfaz $D(x_1^m + \cdots + x_n^m) = 0$ e pelo Lema 61 fixado X_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, existem únicos $G_j \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ com $deg_{X_k}(G) < m$ tais que $D(x_j) = G_j(x_1, \ldots, x_n)$. Assim convencionamos que toda derivação do anel B_n^m satisfaz o Lema 61 e $D(x_1^m + \cdots + x_n^m) = 0$.

Seja $D \in Der(B_n^m)$. Se $D(x_k) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{k-1}]$ para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ e $D(x_1) \in \mathbb{C}$ dizemos que D é *triangular*.

Teorema 62 *Se $D \in Der(B_n^m)$ é triangular, então D é identicamente nula.*

Demonstração. Aplicando D na igualdade $x_1^m + \cdots + x_n^m = 0$ obtemos

$$x_1^{m-1}D(x_1) + \cdots + x_n^{m-1}D(x_n) = 0$$

e isto significa que no anel polinomial temos

$$X_1^{m-1}D(X_1) + \cdots + X_n^{m-1}D(X_n) = G \bullet (X_1^m + \cdots , X_n^m), \tag{3.3}$$

para algum $G \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Segue do Lema 61 e do fato de D ser triangular que $D(X_i) \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{i-1}]$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$ e $D(X_1) \in \mathbb{C}$.

Suponha que $G \neq 0$. Então o grau, em relação a variável X_n, do lado esquerdo da igualdade (3.3) é $m-1$ e no lado direito é $m + deg_{X_n}(G)$, que é um absurdo. Logo devemos ter $G = 0$. Substituíndo $G = 0$ em (3.3), temos

$$X_1^{m-1}D(X_1) + \cdots + X_n^{m-1}D(X_n) = 0. \tag{3.4}$$

De (3.4) temos $D(X_n) = 0$, logo $X_1^{m-1}D(X_1) + \cdots + X_{n-1}^{m-1}D(X_{n-1}) = 0$. Desta igualdade temos $D(X_{n-1}) = 0$, logo $X_1^{m-1}D(X_1) + \cdots + X_{n-2}^{m-1}D(X_{n-2}) = 0$. De forma análoga temos $D(X_1) = \cdots = D(X_{n-2}) = 0$. Portanto D é nula. $\diamondsuit$

Seja $D \in Der(B_n^m)$. Se $D(x_k) = \alpha_k x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ onde $\alpha_k \in \mathbb{C}$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, dizemos que D é *monomial*.

Corolário 63 *Seja $D \in LND(B_n^m)$. Se D é monomial, então D é identicamente nula.*

Demonstração. Vamos mostrar que neste caso D é triangular e o resultado seguirá do Teorema 62. Suponha que para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$ nós temos $Dx_k \neq 0$. Como D é monomial $Dx_k = \alpha_k x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ onde $\alpha_k \in \mathbb{C}$ e $m_j \geq 0$. Visto que D é localmente nilpotente e escrevendo $\nu_D(x_i) := deg_D(x_i)$ nós podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\nu_D(x_1) \leq \nu_D(x_2) \leq \cdots \leq \nu_D(x_k) \leq \cdots \leq \nu_D(x_n).$$

Assim

$$\nu_D(x_k) - 1 = m_1\nu_D(x_1) + m_2\nu_D(x_2) + \cdots + m_k\nu_D(x_k) + \cdots + m_n\nu_D(x_n).$$

Contudo esta igualdade só é possível quando $m_n = m_{n-1} = \cdots = m_k = 0$. Donde segue que D é triangular. $\diamondsuit$

Concluimos este parágrafo com o seguinte resultado:

Teorema 64 *As derivações d_{ij} e ε do anel B_n^m não são localmente nilpotentes.*

Demonstração. Basta observar que as derivações d_{ij} e ε são monomiais . $\diamondsuit$

3.3 O caso B_n^2

Relembramos que B_n^2 é o anel $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ onde $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ e $n \geq 3$. Neste caso temos exemplos de irredutíveis que são localmente nilpotentes, determinamos o ML invariante e conhecemos o conjunto $LND_A(B_n^2)$ para certos subanéis A de B_n^2.

Primeiro observe que $B_n^2 = \frac{B_{n+1}^2}{(x_{n+1})}$. Assim podemos nós restringir ao estudo das derivações localmente nilpotentes tais que $Dx_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 65 *Uma derivação D do anel B_n^m é dita **linear** se*

$$D(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \ para\ i = 1, \ldots, n,$$

*onde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. A matriz $[a_{ij}]$ é dita **matriz associada** à derivação D.* $\diamondsuit$

Lema 66 *Seja D uma derivação linear em B_n^m e $[a_{ij}]$ a sua matriz associada. Se D é localmente nilpotente então $[a_{ij}]$ é uma matriz nilpotente.*

Demonstração. Lembre que B_n^m é uma $\mathbb{C}$-álgebra e que, para todo $m \geq 2$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset B_n^m$ é um conjunto $\mathbb{C}$-linearmente independente. Como D é uma derivação localmente nilpotente existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $D^r(x_1) = D^r(x_2) = \ldots = D^r(x_n) = 0$. Agora o resultado segue da igualdade

$$\begin{bmatrix} D^s(x_1) \\ \vdots \\ D^s(x_n) \end{bmatrix} = [a_{ij}]^s \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

que vale para todo $s \in \mathbb{N}$ e pode ser verificada por indução. $\diamondsuit$

Como consequência do teorema 59 pode-se provar que, no caso $m > 2$, o anel B_n^m não admite derivação localmente nilpotente não nula que seja linear.

Proposição 67 *O anel B_n^m com $m > 2$ não admite derivação que seja localmente nilpotente, linear e não nula.*

Demonstração. Suponha $D \in LND(B_n^m)$ e que D seja linear com matriz associada $A = (a_{ij})$. O Teorema 59 assegura que

$$D = \sum_{i<j} f_{ij} d_{ij} + g\varepsilon$$

com $g = G + (F)$, $f_{ij} = F_{ij} + (F)$, $F = X_1^m + \cdots + X_n^m$, G, $F_{ij} \in K[X_1, \cdots, X_n]$, $\varepsilon = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $d_{ij} = x_j^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_i} - x_i^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Assim temos que

$$D(x_1) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = \sum_{k\geq 2} f_{1k}x_k^{m-1} + gx_1,$$

ou seja,

$$\sum_{k\geq 2} F_{1k}X_k^{m-1} + GX_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j = FH, \text{ com } H \in K[X_1, \cdots, X_n],$$

mas como $m - 1 \geq 2$ e para todo j, $a_{1j} \in K$ podemos concluir que $a_{1j} = 0$ qualquer que seja $j \geq 2$, ou seja, $D(x_1) = a_{11}x_1$, mas D sendo nilpotente temos que $a_{11} = 0$ também. Evidentemente podemos repetir tal prova para qualquer i. Assim $A = 0$ e $D = 0$. $\diamondsuit$

A proposição anterior nós mostrou que para derivações localmente nilpotentes e lineares o único caso interessante é B_n^2 e o próximo resultado dá uma caracterização de uma derivação localmente nilpotente deste anel de Fermat.

Teorema 68 *Seja $d \in Der(B_n^2)$ linear. Então d é localmente nilpotente se, e somente se, a sua matriz associada é nilpotente e anti-simétrica.*

Demonstração. Seja $d \in B_n^2$ uma derivação linear. Sabemos pelo Teorema 59 que d é combinação linear das derivações (lineares) d_{ij} e ε e assim, para todo k, podemos escrever

$$d(x_k) = \sum_{i<k}^{n}(-c_{ik})x_i + \sum_{k<j}^{n} c_{kj}x_j + bx_k \text{ para } k = 1, \ldots, n,$$

onde b, $c_{ij} \in \mathbb{C}$. Sendo $[a_{ij}]$ a sua matriz associada observe que quando $i = j$ nós temos $a_{ii} = b$, e quando $i < j$ temos $a_{ij} = -c_{ij}$ e $a_{ji} = c_{ij}$. Suponha agora que d também é localmente nilpotente. Então a matriz associada a derivação d, $[a_{ij}]$, é nilpotente (pelo Lema 66). Disto segue que o traço de $[a_{ij}]$ é zero, ou seja, $nb = 0$. Assim $b = 0$ e temos $a_{ii} = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Portando sendo d uma derivação linear e localmente nilpotente do anel B_n^2 a sua matriz associada $[a_{ij}]$ tem que ser nilpotente e anti-simétrica.

Agora suponha que temos uma matriz quadrada $[a_{ij}]$ de ordem n e coeficientes nos números complexos, anti-simétrica e nilpotente. Defina a derivação D no anel polinomial $\mathbb{C}^{[n]}$ do seguinte modo

$$D(X_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Como $[a_{ij}]$ é uma matriz nilpotente então D, definida acima, é uma derivação localmente nilpotente no anel polinomial $\mathbb{C}^{[n]}$ (isto segue da igualdade 3.5). Aplicando D no polinômio $F = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ temos

$$
\begin{aligned}
D(F) = 2X_1D(X_1) + \cdots + 2X_nD(X_n) &= 2\sum_{i=1}^{n} X_iD(X_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} X_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j \\
&= 2.0 = 0.
\end{aligned}
$$

O somatório $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j$ é zero pois $X_iX_j = X_jX_i$ e $a_{ij} = -a_{ji}$. Assim $D(F) = 0$ e logo o ideal (F) é um ideal diferencial em relação a derivada D. Portanto D induz uma derivação d em B_n^2 definida por

$$d(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Observe que sendo D localmente nilpotente em $\mathbb{C}^{[n]}$ então a derivação d no anel B_n^2, induzida por D, é localmente nilpotente. $\diamondsuit$

Agora para determinarmos uma matriz nilpotente e anti-simétrica temos a ajuda do próximo resultado.

Primeiro fixemos a notação. Seja K um corpo de característica zero. Dado um número natural $n > 1$, $\mathbb{M}_n(K) = \mathbb{M}_n$ denotará o anel das matrizes $n \times n$ com entradas em K, $I_n \in \mathbb{M}_n$ é a matriz identidade e S_n é o grupo das permutações de $\{1, \cdots, n\}$. Iniciamos fixando a seguintes notações: dado $\sigma \in S_n$, $F_\sigma = \{i \in \mathbb{N};\ 1 \leq i \leq n \quad \text{e} \quad \sigma(i) = i\}$ e $(-1)^\sigma = 1$ se σ é par e -1 se for ímpar.

Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n$ e $f(X) = det(XI_n - A) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0 \in K[X]$ seu polinômio característico. Um resultado elementar envolvendo A e $f(X)$ é dado pelo seguinte lema:

Lema 69 *Dados $A \in \mathbb{M}_n$ e seu polinômio característico, $f(X)$ descrito acima, temos:*

a) Se para todo i, $1 \leq i \leq n$, tem-se que $a_{ii} = 0$ então para todo j, $0 \leq j \leq n-1$, $b_j = \sum_{\sigma \in F_j} (-1)^\sigma (-1)^{n-j} (\prod_{i \neq \sigma(i)} a_{i\sigma(i)})$, onde $F_j = \{\sigma \in S_n; \sharp(F_\sigma) = j\}$. Em particular $b_{n-1} = 0$.

b) Se A é anti-simétrica (i.e., $A^t = -A$) então $b_{n-2} = \sum_{i<j} a_{ij}^2$.

Demonstração. **a)** Observe que se $D = X.I_n - A = (d_{ij})$ e $\sigma \in S_n$, então

$$(-1)^{\sigma} d_{1\sigma(1)} \cdots d_{n\sigma(n)} = (-1)^{\sigma}(-1)^{n-\sharp(F_\sigma)}(\prod_{i\neq\sigma(i)} a_{i\sigma(i)}).X^{\sharp(F_\sigma)}.$$

Agora $b_{n-1} = 0$ porque não existe $\sigma \in S_n$ tal que $\sharp(F_\sigma) = n-1$.

b) Veja que $\sharp(F_\sigma) = n-2$, com $\sigma \in S_n$ se e somente se σ é uma transposição, i.e., $\sigma = (ij)$, $i \neq j$, portanto como (ij) é ímpar e $a_{ij} = -a_{ji}$ temos o que queríamos. $\diamondsuit$

Estas ferramentas, Teorema 68 e Lema 69, nós direcionaram na busca por exemplos de derivações localmente nilpotentes não nulas e lineares no anel de Fermat B_n^2.

Vejamos os exemplos.

Exemplo 70 *Seja n um número ímpar. Considere a derivação definida pela matriz $n \times n$*

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & i \\ -1 & -i & \ldots & -1 & -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que I é anti-simétrica e a soma dos quadrados dos elementos abaixo da diagonal principal é zero. Desse modo para que a derivação I definada por essa matriz seja localmente nilpotente no anel de Fermat B_n^2 é suficiente que a matriz I seja nilpotente(veja o Teorema 68*). Vejamos que a matriz I é nilpotente. De fato:*

$$I^2 = II = \begin{bmatrix} -1 & -i & \ldots & -1 & -i & 0 \\ -i & 1 & \ldots & -i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -i & \ldots & -1 & -i & 0 \\ -i & 1 & \ldots & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $I^3 = II^2 = 0$. *Portanto a matriz* I *é nilpotente e assim a derivação* I *definida por*

$$Ix_n = x_1 + ix_2 + \cdots + x_{n-2} + ix_{n-1},$$

e para $k < n$

$$I(x_k) = \begin{cases} -x_n, & se \quad k \text{ é ímpar.} \\ -ix_n, & se \quad k \text{ é par.} \end{cases}$$

é localmente nilpotente em B_n^2.

Exemplo 71 *Seja* n *um número par. Considere a derivação definida pela matriz* $n \times n$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \varepsilon^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \varepsilon^{n-2} \\ -1 & -\varepsilon & \dots & -\varepsilon^k & \dots & \varepsilon^{n-2} & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\varepsilon^{n-1} = 1$. *Veja que a matriz* P *é anti-simétrica e a soma dos quadrados dos elementos abaixo da diagonal principal é zero. Desse modo para que a derivação* P *definada por essa matriz seja localmente nilpotente no anel de Fermat* B_n^2 *é suficiente que a matriz* P *seja nilpotente(veja o Teorema* 68*). O leitor pode verificar que* $P^3 = 0$, *ou seja, a matriz* P *é nilpotente. E portanto a derivação* P *definida por*

$$Px_k = -\varepsilon^{k-1}x_n, \text{ para } k < n$$

e

$$Px_n = x_1 + \varepsilon x_2 + \cdots + \varepsilon^{k-1}x_k + \cdots + \varepsilon^{n-2}x_{n-1}$$

é localmente nilpotente em B_n^2. *Podemos verificar que* P *é localmente nilpotente diretamente. Observe que*

$$\begin{aligned}
P(x_1^2+\cdots+x_k^2+\cdots+x_n^2) &= 2(x_1P(x_1)+\cdots+x_kP(x_k)+\cdots+x_nP(x_n)) \\
&= -2(x_1x_n+\cdots+\varepsilon^{k-1}x_kx_n+\cdots+\varepsilon^{n-2}x_{n-1}x_n) \\
&\quad +2x_n(x_1+\varepsilon x_2+\cdots+\varepsilon^{k-1}x_k+\cdots+\varepsilon^{n-2}x_{n-1}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo P é bem definida. E como

$$\begin{aligned}
P^2(x_n) &= P(x_1+\varepsilon x_2+\cdots+\varepsilon^{k-1}x_k+\cdots+\varepsilon^{n-2}x_{n-1}) \\
&= P(x_1)+\varepsilon P(x_2)+\cdots+\varepsilon^{k-1}P(x_k)+\cdots+\varepsilon^{n-2}P(x_{n-1}) \\
&= -(1+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{2(k-1)}+\cdots+\varepsilon^{2(n-2)})x_n \\
&= -(1+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{(k-1)}+\cdots+\varepsilon^{(n-2)})x_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

P é localmente nilpotente.

No anel B_n^2 para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ definimos o subanel B_k do anel B_n^2, por $\mathbb{C}[x_1,\ldots,\widehat{x_k},\ldots,x_n]$, onde $\widehat{x_k}$ significa que excluímos a variável x_k do anel B_n^2.

Lema 72 *Seja $h \in B_n \subset B_n^2$. Então:*

1. *$P(h) \in x_nB_n$, se n for par, P definida no exemplo* 71*;*

2. *$I(h) \in x_nB_n$, se n for ímpar, I definida no exemplo* 70.

Demonstração. Suponha que n é par e que $h \in B_n$. Então

$$h = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_{n-1})} a_i x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}$$

e assim

$$\begin{aligned}
P(h) &= \frac{\partial h}{\partial x_1}P(x_1)+\cdots+\frac{\partial h}{\partial x_k}P(x_k)+\cdots+\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}P(x_{n-1}) \\
&= \frac{\partial h}{\partial x_1}(-x_n)+\cdots+\frac{\partial h}{\partial x_k}(-\varepsilon^{k-1}x_n)+\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}(-\varepsilon^{n-2}x_n)
\end{aligned}$$

e como $\frac{\partial h}{\partial x_k} \in B_n$ para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$, temos o resultado para n par. O caso n ímpar é análogo. $\diamondsuit$

Lema 73 *Seja $h \in B_n^2$. Então*

1. *$P(h) = 0$ se, e somente se, $h \in B_n$ e $P(h) = 0$, quando n par;*

2. *$I(h) = 0$ se, e somente se, $h \in B_n$ e $I(h) = 0$, quando n ímpar.*

Demonstração. Suponha que n é par e seja $h \in B_n^2$. Pelo Lema 61 existem únicos $h_0, h_1 \in B_n$ tais que $h = h_1 x_n + h_0$. Suponha que $h_1 \neq 0$. Aplicando P na igualdade acima obtemos

$$0 = P(h) = P(h_1)x_n + h_1 P(x_n) + P(h_0). \tag{3.6}$$

Pelo Lema 72 temos que $P(h_1), P(h_0) \in x_n B_n$. Assim $P(h_1) = bx_n$ para algum $b \in B_n$. Logo $P(h_1)x_n = (bx_n)x_n = bx_n^2 = b(-x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2) \in B_n$. Pela definição de P temos que $h_1 P(x_n) = h_1(x_1 + \varepsilon x_2 + \cdots + \varepsilon^{i-1} x_i + \cdots + \varepsilon^{n-2} x_{n-1}) \in B_n$. Agora veja que $P(h_0) = \frac{Ph_0}{x_n} x_n$ e novamente pelo Lema 72 nós temos $\frac{P(h_0)}{x_n} \in B_n$. Segue então da igualdade 3.6 e da unicidade do Lema 61 que $0 = P(h_1)x_n + h_1 P(x_n) = P(h_1 x_n)$. Como $ker\, P$ é fatorialmente fechado segue que $x_n \in ker\, P$, ou seja, $P(x_n) = 0$. Contrariando o fato de $P(x_n) \neq 0$. Portanto $h_1 = 0$. O caso n ímpar é análogo. $\diamondsuit$

Lema 74 *Seja $n \geq 3$ um número natural. Então*

1. *se n é par*

$$ker\, P = \mathbb{C}[x_1 - \varepsilon^{(n-2)} x_2, \ldots, x_1 - \varepsilon^{(n-k)} x_k, \ldots, x_1 - \varepsilon x_{n-1}];$$

2. *se n é ímpar*

$$ker\, I = \mathbb{C}[x_1 + ix_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_{k-2}, x_1 - ix_{k-1}].$$

Demonstração. Suponha que n é par e $A = \mathbb{C}[x_1 - \varepsilon^{(n-2)} x_2, \ldots, x_1 - \varepsilon^{(n-k)} x_k, \ldots, x_1 - \varepsilon x_{n-1}]$. Como $P(x_1 - \varepsilon^{(n-k)} x_k) = P(x_1) - \varepsilon^{(n-k)} P(x_k) = -x_n - \varepsilon^{(n-k)}(-\varepsilon^{(k-1)} x_n) = 0$ segue que $A \subset ker\, P$. Observe também que $A \subset B_n$ e portanto é imediato que

$$y_2 = x_1 - \varepsilon^{(n-2)} x_2, \ldots, y_k = x_1 - \varepsilon^{(n-k)} x_k, \ldots, y_{n-1} = x_1 - \varepsilon x_{n-1}$$

são algebricamente independentes.

Pelo Lema 73 dado $h \in ker\, P$, temos que $P(h) = 0$ e $h \in B_n$, então

$$h = \sum_{j=(j_1,\dots,j_{n-1})} a_j x_1^{j_1} \cdots x_{n-1}^{j_{n-1}},$$

onde $a_i \in \mathbb{C}$. Utilizando a mudança de variáveis dada por $y_k = x_1 - \varepsilon^{(n-k)} x_k$ obtemos $x_k = \varepsilon^k x_1 - \varepsilon^k y_k$ e assim

$$h = \sum_{j=(j_1,\dots,j_{n-1})} a_j x_1^{j_1} (\varepsilon^2 x_1 - \varepsilon^2 y_2)^{i_2} \cdots (\varepsilon^k x_1 - \varepsilon^k y_k)^{j_k} \cdots (x_1 - y_{n-1})^{j_{n-1}}.$$

Desse modo podemos reescrever h como um polinômio na variável x_1 e coeficentes em A, ou seja,

$$h = \sum_{i=0}^{n} a_i x_1^i$$

onde $a_i \in A \subset ker\, P$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Se $n = 0$ temos o resultado. Suponha que $n > 0$. Aplicando P na última igualdade obtemos (lembre que $Px_1 = -x_n$)

$$0 = P(h) = -[a_1 x_1 + \cdots + n a_n x_1^{n-1}] x_n.$$

A unicidade do Lema 61 nós fornece $a_1 x_1 + \cdots + n a_n x_1^{n-1} = 0$ e logo $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Portanto $h = a_0 \in A \subset ker\, P$. O caso n ímpar é análogo. $\diamondsuit$

Agora estamos em condição de mostrar que as derivações P e I são irredutíveis. Para nós auxiliar nesta tarefa precizamos de dois lemas bem conhecidos (veja [11]), que listamos abaixo.

Lema 75 *Seja B um domínio de integridade e D_1, D_2 derivações localmente nilpotentes de B tais que $ker\, D_1 = A = ker\, D_2$. Se existir $s \in B$ tal que $0 \neq D_1(s) \in A$, então $0 \neq D_2(s) \in A$ e $D_2(s) D_1 = D_1(s) D_2$.* $\diamondsuit$

Lema 76 *Seja B um domínio de característica zero, $A \in KLND_A(B)$ e S o conjunto definido por $\{D \in LND_A(B)\}$. Se B satisfaz a condição de cadeia ascendente para ideais principais então $S \neq \emptyset$ e $LND_A(B) = \{aD \mid a \in A \text{ e } D \in S\}$.* $\diamondsuit$

Teorema 77 *Seja $n \geq 3$ um número natural.*

1. *Se n é par, então $P \in LND(B_n^2)$, definida no Exemplo 71, é irredutível e*

$$LND_A(B_n^2) = \{aP \mid a \in A\},$$

onde $A = \mathbb{C}[x_1 - \varepsilon^{(n-2)}x_2, \ldots, x_1 - \varepsilon^{(n-k)}x_k, \ldots, x_1 - \varepsilon x_{n-1}]$.

2. *Se n ímpar, então $I \in LND(B_n^2)$, definida no Exemplo 70, é irredutível e*

$$LND_S(B_n^2) = \{sI \mid s \in S\},$$

onde $S = \mathbb{C}[x_1 + ix_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_{n-2}, x_1 - ix_{n-1}]$.

Demonstração. Seja n par e $D \in LND_A(B_n^2)$ não nula. Sendo D não nula a Proposição 11 afirma que $ker\, D = A$. Como $P(x_n) = x_1 + \varepsilon x_2 + \cdots + \varepsilon^{n-2}x_{n-1} \in A$ segue do Lema 75 que $D(x_n) \in A$ e

$$P(x_n)D = D(x_n)P. \tag{3.7}$$

Aplicando a igualdade 3.7 em x_1, obtemos

$$P(x_n)D(x_1) = -D(x_n)x_n. \tag{3.8}$$

Como $D(x_n) \in B_n^2$ sabemos, pelo Lema 61, que existem únicos $g_0, g_1 \in B_n$ tais que $D(x_1) = g_1x_n + g_0$. Substituindo esta igualdade na equação 3.8, obtemos

$$P(x_n)g_1x_n + P(x_n)g_0 = -D(x_n)x_n. \tag{3.9}$$

A unicidade do Lema 61 nós fornece $D(x_n) = -P(x_n)g_1$ ($P(x_n) \in A \subset B_n$). Visto que $D(x_n) \in A$ nós temos que $P(D(x_n) = 0$ e assim

$$0 = P(D(x_n)) = P(-D(x_n)g_1),$$

e então $P(g_1) = 0$, pois A é fatorialmente fechado em B_n^m. Logo $g_1 \in A$. Substituindo $D(x_n) = -P(x_n)g_1$ em 3.7 temos

$$P(x_n)D = D(x_n)D = -P(x_n)g_1D$$

Donde $D = -g_1P$, onde $-g_1 \in A$.

Pelo Lema 76 sabemos que $P = hD_0$ para algum $h \in A$ e $D_0 \in LND(B_n^2)$ irredutível. Pelo que já verificamos $D_0 = h_0 P$, para algum $h_0 \in A$. Desse modo

$$P = hD_0 = h(h_0 P) = (hh_0)P.$$

Portanto $h \in A^* = \mathbb{C}$ e logo P é irredutível. O caso n ímpar é análogo. $\diamondsuit$

Lembre que o ML invariante de um anel é definido como a interseção dos núcleos de todas as derivações localmente nilpotentes deste anel.

Para determinarmos o ML invariante de B_n^2, $ML(B_n^2)$, precizamos do seguinte resultado (veja [11]).

Lema 78 *Seja B um anel e $\theta \in Aut_{\mathbb{C}}(B)$. Se $D \in LND(B)$ então $\theta D \theta^{-1} \in LND(B)$. Além disso $ker\, \theta D \theta^{-1} = \theta(ker\, D)$.* $\diamondsuit$

Seja θ uma permutação do grupo S_n. É rotina verificar que $\theta(x_j) = x_{\theta(j)}$ é um $\mathbb{C}$-automorfismo de B_n^2. Vamos denotar por τ_j a transposição (j, n) do grupo S_n para cada $1 \leq j \leq n$. Suponha que n é par. Vamos denotar por P_j a derivação $\tau_j P {\tau_j}^{-1}$ onde P é a derivação definida no Exemplo 71, para cada $1 \leq j \leq n$. Segue do Lema 78 que cada $P_j \in LND(B_n^2)$ e que

$$ker\, P_j = \tau_j(\mathbb{C}[x_1 - \varepsilon^{(n-2)}x_2, \ldots, x_1 - \varepsilon^{(n-k)}x_k, \ldots, x_1 - \varepsilon x_{n-1}]).$$

Observe que

$$\tau_j(x_1 - \varepsilon^{(n-k)}x_k) = \begin{cases} x_n - \varepsilon^{(n-k)}x_k, & \text{se} \quad j = 1 \\ x_1 - \varepsilon^{(n-k)}x_n, & \text{se} \quad j = k \\ x_1 - \varepsilon^{(n-k)}x_k, & \text{caso} \quad \text{contrário.} \end{cases}$$

Segue desta observação que $ker\, P_j \subset B_j$.

Agora suponha que n é ímpar. Para cada $1 \leq j \leq n$ denote por I_j a derivação $\tau_j I {\tau_j}^{-1}$, onde I é a derivação definida no Exemplo 70. Pelo Lema 78 temos

$$ker\, I_j = \tau_j(\mathbb{C}[x_1 + ix_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_{n-2}, x_1 - ix_{n-1}]).$$

Se k é ímpar

$$\tau_j(x_1 - x_k) = \begin{cases} x_n - x_k, & \text{se} \quad j = 1 \\ x_1 - x_n, & \text{se} \quad j = k \\ x_1 - x_k, & \text{caso} \quad \text{contrário.} \end{cases}$$

Se k é par

$$\tau_j(x_1 - ix_k) = \begin{cases} x_n - ix_k, & \text{se} \quad j = 1 \\ x_1 - ix_n, & \text{se} \quad j = k \\ x_1 - ix_k, & \text{caso} \quad \text{contrário.} \end{cases}$$

Segue desta observação que $ker\, I_j \subset B_j$.

Teorema 79 *O ML invariante do anel B_n^2 é $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Pelo exposto acima, que $ker\, \tau_i \subset B_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, independente de n ser par ou ímpar. Portanto

$$\cap_{i=1}^n ker\, \tau_i \subset \cap_{i=1}^n B_i = \mathbb{C}.$$

E como $\mathbb{C} \subset ker\, \tau_i$, para todo $i \in 1, \ldots, n$ temos o resultado. $\diamondsuit$

3.4 A conjectura de Nakai

Neste parágrafo vamos trabalhar com um corpo de característica zero K. Em [29] B. Singh mostrou que a conjectura de Nakai é verdadeira para o anel do tipo $A = \frac{K[X,Y,Z]}{(F)}$ com $F \in K[X,Y,Z]$ sendo homogêneo. Na verdade ele demonstrou que se $Diff_K^2(A) = diff_K^2(A)$ (ou $Der_K^2(A) = der_K^2(A)$) então A é regular e fez, baseado também em resultados sobre curvas, a pergunta (mais forte que a conjectura de Nakai): tal resultado é verdadeiro em geral? Em [28] A. Schreiner, utilizando ideais monomiais deu um exemplo mostrando que a resposta à conjectura de Singh é, no geral, falsa , mas para hipersuperfícies homogêneas a pergunta continua em aberto. Aqui mostramos que a conjectura de Singh (e portanto também a de Nakai) é verdadeira para o anel, a princípio um pouco mais geral que o de Fermat, $B = \frac{K[X_1,\ldots,X_n]}{(F)}$ com $F = X_1^m + a_2X_2^m + \cdots + a_nX_n^m$, e $a_i \in K \setminus \{0\}$.

Iniciamos com algumas notações. Neste parágrafo K é um corpo de característica zero, S é o anel polinomal em n variavéis $K[X_1, \ldots, X_n]$, B é o anel quociente $\frac{S}{(F)} = K[x_1, \ldots, x_n]$ onde $F = X_1^m + a_2X_2^m + \cdots + a_nX_n^m$ e para todo i, $1 \leq i \leq n$, $J_i = (X_1^{m-1}, \ldots, X_{i-1}^{m-1}, X_i, X_{i+1}^{m-1}, \ldots, X_n) \subseteq S$. Também omiteremos o K quando nós referirmos às K-derivações de S ou B (i.e, $Der_K^q(S) := Der^q(S)$).

Para apresentar o resultado final vamos necessitar de vários fatos preliminares que colocamos em dois lemas.

Lema 80 *Sejam $\delta, \delta' \in Der^1(S)$ e $D \in Der^2(S)$.*

a) Se $\delta(F) \in (F)$ então para todo i, $1 \leq \ i \leq n$, $\delta(X_i) \in J_i \quad e \quad \delta(J_i) \subseteq J_i$.

b) Se $\{\delta(F), \delta'(F)\} \subset (F)$ então $\delta'(\delta(X_1)) \in J_1$.

c) Se $\{\delta(F), \delta'(F)\} \subset (F)$, $\delta(X_1F) = HF$ e $\delta'(\delta(X_1F)) = GF$ então $H, G \in J_1$.

d) Se $2 \leq s \in \mathbb{N}$ então para todo j, $1 \leq j \leq n$, $\quad D(X_1X_j^s) \in (X_1, X_j^{s-1})$ e em particular $D(X_1F) \in J_1$.

Demonstração. A parte a) é consequência imediata de Lema 58, pois tal lema afirma que $\delta = HE + \sum_{i<j} G_{ij}.D_{ij}$ com $H, G_{ij} \in S$ e onde

$$D_{ij} = ma_jX_j^{m-1}\frac{\partial}{\partial X_i} - ma_iX_i^{m-1}\frac{\partial}{\partial X_j} \quad \text{ e } \quad E = \sum X_i\frac{\partial}{\partial X_i}.$$

A parte b) é, evidentemente, consequência imediata de a).

Para o item c) escreva $HF = \delta(X_1F) = X_1\delta(F) + F\delta(X_1)$, mas $\delta(F) = H_1F$ e dessas igualdades segue que $H = X_1H_1 + \delta(X_1)$, com $\delta(X_1), X_1 \in J_1$, ou seja, $H \in J_1$. Agora $GF = \delta'(\delta(X_1F) = \delta'(HF)$ com $H \in J_1$, mas então $GF = F\delta'(H) + H\delta'(F)$ e $\delta'(F) = H'F$. Portanto $G = \delta'(H) + HH' \in J_1$, pois pelas partes anteriores $\delta'(H), H \in J_1$.

A prova do item d) será feita por indução sobre s. Para $s = 2$ temos que (veja proposição 24) $D(X_1X_j^2) = X_1D(X_j^2) + 2X_jD(X_1) - 2X_1X_jD(X_j) - X_j^2D(X_1) \in (X_1, X_j)$. Para $s \geq 3$ tem-se que

$$\begin{aligned} D(X_1X_j^s) &= D(X_1X_jX_j^{s-1}) \\ &= X_1D(X_j^s) + X_jD(X_1X_j^{s-1}) + X_j^{s-1}D(X_1X_j) \\ &\quad -X_1X_jD(X_j^{s-1}) - X_1X_j^{s-1}D(X_j) - X_j^sD(X_1). \end{aligned}$$

Agora como $D(X_1X_j^{s-1}) \in (X_1, X_j^{s-2})$ temos que $D(X_1X_j^s) \in (X_1, X_j^{s-1})$. $\diamondsuit$

O próximo item vai ser colocado num lema para destacá-lo e também para facilitar quando precisarmos nós referir a ele.

Lema 81 *Se* $D = \delta + fD' + \sum_{i=1}^{s} \delta_i \circ \delta_i' \in Der^2(S)$ *com* $\{\delta, \delta_i, \delta_i', i = 1, \ldots, s\} \subset Der^1(S)$, $\{\delta(F), \delta_i(F), \delta_i'(F), i = 1, \ldots, s\} \subset (F)$ *e* $D' \in Der^2(S)$ *então* $D(X_1F) = HF$ *com* $H \in J_1$.

Demonstração. Pelo item c) do Lema 80 tem-se que $\delta(X_1F) + \sum_{i=1}^{s} \delta_i \circ \delta_i'(X_1F) = H_1F$ com $H_1 \in J_1$. Agora $(FD')(X_1F) = FD'(X_1F)$ e pelo item d) do Teorema 80 $D'(X_1F) = H_2F$ com $H_2 \in J_1$, portanto $D(X_1F) = HF$ com $H = H_1 + H_2 \in J_1$. $\diamondsuit$

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar o principal resultado deste parágrafo.

Teorema 82 *Sejam* $S = K^{[n]} = K[X_1, \ldots, X_n]$ *o anel de polinômios sobre um corpo de característica zero* K *e* $B = \frac{S}{(F)}$ *com* $m \geq 1$ *e* $F = X_1^m + a_2X_2^m + \cdots + a_nX_n^m,\ \ a_i \in K \setminus \{0\}$. *Então* $Der^2(B) = der^2(B)$ *se, e somente se,* $m = 1$.

Demonstração. É claro que se $m = 1$ então $B = K^{[n-1]}$ e tudo é verdadeiro. Suponha portanto $m \geq 2$ e chame $G = \prod_{j \geq 2} \frac{\partial^2(F)}{\partial X_j^2} = a_2 \cdots a_n X_2^{m-2} \cdots X_n^{m-2}$ e considere $D \in Der^2(S)$ definida por:

$$D = -(m-1)(n-2)G\tfrac{\partial}{\partial X_1} - X_1G\tfrac{\partial^2}{\partial X_1^2} - 2G\sum_{j=2}^{n} X_j \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_j} + X_1^{m-1}\sum_{j=2}^{n} \frac{G}{a_jX_j^{m-2}}\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}$$

Lembramos que $\frac{\partial^2(F)}{\partial X_1 \partial X_j} = 0$ se $j \geq 2$ e que $\frac{\partial^2(F)}{\partial X_j^2} = m(m-1)a_jX_j^{m-2}$ e assim tem-se que

$$\begin{aligned} D(F) = &\ -m(m-1)(n-2)GX_1^{m-1} - m(m-1)GX_1^{m-1} + X_1^{m-1}\sum_{j=2}^{n} \frac{G}{a_jX_j^{m-2}}.\frac{\partial^2(F)}{\partial X_j^2}D(F) \\ = &\ -m(m-1)(n-1)GX_1^{m-1} + X_1^{m-1}\sum_{j=2}^{n} m(m-1)G \end{aligned}$$

e então

$$(1) \qquad D(F) = -m(m-1)(n-1)GX_1^{m-1} + X_1^{m-1}\textstyle\sum_{j=2}^{n} m(m-1)G = 0.$$

Agora vamos calcular $D(X_1F)$.

$$\begin{aligned} D(X_1F) &= D(X_1^{m+1} + X_1(\textstyle\sum_{j=2}^{n} a_jX_j^m)) \\ &= -(m-1)(n-2)G((m+1)X_1^m + \textstyle\sum_{j=2}^{n} a_jX_j^m - m(m+1)X_1^mG \\ &\quad -2mG\textstyle\sum_{j=2}^{n} a_jX_j^m + X_1^m\sum_{j=2}^{n} m(m-1)G \\ &= -(2m + (m+1)(n-2))GX_1^m - (2m + (m+1)(n-2))G(\textstyle\sum_{j=2}^{n} a_jX_j^m), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(2) \qquad D(X_1F) = -(2m + (m+1)(n-2))GF \text{ com } G \notin J_1 = (X_1, X_2^{m-1}, \ldots, X_n^{m-1})$$

Agora, por cálculos análogos, pode-se ver facilmente que para todo $j \geq 2$ tem-se que

$$(3) \qquad D(X_jF) = 0.$$

Portanto, pelo Corolário 29 e (1),(2) e(3), D induz uma derivação de ordem 2, $\overline{D}$, de B definida por $\overline{D}(H + (F)) = D(H) + (F)$. Afirmamos que $\overline{D} \notin der^2(B)$. Suponha que $\overline{D} \in der^2(B)$, assim, por 29, $\overline{D} = \overline{\delta} + \sum_{i=1}^{s} \overline{\delta_i} \circ \overline{\delta_i'}$, onde para todo i, $\{\delta, \delta_i, \delta_i'\} \subset Der^1(S)$ e $\{\delta(F), \delta_i(F), \delta_i'(F)\} \subset (F)$. Portanto $D = \delta + \sum_{i=1}^{s} \delta_i \circ \delta_i' + FD'$, onde $D' \in Der^2(S)$, mas isto, pelo Lema 81, é absurdo pois

$$D(X_1F) = -(2m + (m+1)(n-2))GF \ \text{ e } \ -(2m + (m+1)(n-2))G \notin J_1.$$

$\diamondsuit$

Para encerrar apresentamos o resultado que diz que a conjectura de Singh é verdadeira para hipersuperfícies homogêneas definidas por polinômios homogêneos de grau 2.

Corolário 83 *Para o anel* $A = \frac{K[X_1, \cdots, X_n]}{(H)}$ *com* H *sendo homogêneo de grau* 2 *tem-se que* $Der^2(A) \neq der^2(A)$.

Demonstração. Sabemos que existe uma mudança linear de variáveis que transforma H num polinômio da forma $F = X_1^2 + a_2X_2^2 + \cdots + a_nX_n^2$. Assim, pela mudança de coordenadas ser linear, existe um K-isomorfismo entre as K-álgebras A e B que induz um isomorfismo entre as álgebras $Der^{\infty}(A)$ e $Der^{\infty}(B)$. Tal isomorfismo leva $Der^q(A)$ em $Der^q(B)$ para todo $q \in \mathbb{N}$. Agora como $Der^2(B) \neq der^2(B)$ tal fato também ocorre para A. $\diamondsuit$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

[2] D. Daigle, *A Counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in Dimension 5*, Journal of Algebra **221**, 528–535 (1999).

[3] D. Daigle, *On locally nilpotent derivations of* $K[X_1, X_2, Y]/(\varphi(Y) - X_1X_2)$, J. pure and Appl. Algebra **181**, 181–208 (2003).

[4] D. Daigle, *Locally nilpotent derivations*, Lecture notes for the Setember School of algebraic geometry, Lukęcin, Poland, Setember 2003, Avaible at `http://aix1.uottawa.ca/~ddaigle`.

[5] D. Daigle, *Locally nilpotent derivations and Danielewski surfaces*, Osaka J. Math.**41**, 37–80 (2004).

[6] D. Daigle, *Classification of Homogeneous Locally Nilpotent Derivations of* $k[X, Y, Z]$*, Part I: Positive Gradings of Positive Type*, Transform. Groups **12**, 33–47 (2007).

[7] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[8] A. van den Essen, *A simple solution of Hilbert's fourttenth problem*, Colloq. Mathh. **105**, 167–170 (2006).

[9] M. Ferreiro, Y. Lequain, A. Nowicki, *A note on locally nilpotent derivations*, J. Pure Appl. Algebra **79**, 45–50 (1992).

[10] D. Fiston, S. Maubach, *Construting (almost) rigid rings and a UFD having infinitely generated Derksen and Makar-Limanov invariant*, preprint.

[11] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **136**. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, **VII**. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[12] A. Grachiola and L. Makar-Limanov, *On the rigidity of small domains*, J. Agebra **284**, 1–12 (2005)

[13] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHES **32** (1967).

[14] S. Kuroda, *A countreexample to the fouteenth problem of Hilbert in dimension for*, J. Algebra **279**, 126–134 (2004).

[15] S. Kuroda, *A countreexample to the fouteenth problem of Hilbert in dimension three*, preprint 2004.

[16] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston (1985).

[17] J. Lipman, *Free Derivation Modules on Algebraic Varieties*, Amer. J. Math. **87**, 874–898 (1965).

[18] L. Makar-Limanov, *On groups of automorphisms of a class of surfaces*, Israel J. of Math. **68**, 250–256 (1990).

[19] L. Makar-Limanov, *On the hypersurface $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ in C^4 or a C^3-like theefold which is not C^3*, Israel J. of Math. **96**, 419–429 (1996).

[20] L. Makar-Limanov, *On the groups of automorphisms of a surface $x^n y = P(z)$*, Israel J. of Math. **121**, 113–123 (2001).

[21] L. Makar-Limanov, *Again $x+x^2y+z^2+t^3=0$*, Contempory Mathematics **369**, 177–182 (2005).

[22] L. Makar-Limanov, *Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and aplications*, Lectures notes, Bar-Ilan University, 1988. Avail. at `http://www.math.wayne.edu/~lml/`.

[23] M. Nagata, *A remark on the unique factorization theorem*, J. of the Mathematical Society of Japan, **9**, 143-145 (1957).

[24] Y. Nakai, *High order derivations I*, Osaka J. Math., **7**, 1-27 (1970).

[25] A. Nowicki, *Commutative basis of derivations in polynomial and powerseries rings*, J. of Pure and Applied Algebra **40**, 279–283 (1986).

[26] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Toruń , (1994).

[27] R. Rentschler, *Opérations du groupe additif sur le plan affine*, C. R. Acad. Sc. Paris **267**, 384–387 (1968).

[28] A. Schreiner, *On a conjecture of Nakai*, Arch. Math. **62**, 506–512 (1994).

[29] B. Singh, *Differential Operators on a Hypersurface*, Nagoya Math., J. **103**, 67-84 (1986).

[30] P. Takatsuka, *Sobre a conjectura de Nakai*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP (2003).

[31] M. Veloso, *On Locally Nilpotent Derivations of the Ring $K[X,Y,Z]/(f(X)Y-\varphi(X,Z))$*, preprint.

[32] O. Zariski, *Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert*, Bull. sci. Math. **267**, 155–168 (1959).

[33] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. *I*, Springer-Verlag, New York (1959).

[34] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. II, Springer-Verlag, New York (1960).

ÍNDICE REMISSIVO