

INTERPOLAÇÃO EM ESPAÇOS
QUASE-NORMADOS E ALGUMAS APLICAÇÕES

JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez.

CAMPINAS
1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

*Para
Antonieta e
Felipe*

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo exemplo vivo que foram para mim.

À minha esposa pelo sentido novo que trouxe à minha vida, principalmente agora com a chegada de Felipe.

Ao Prof. Dicesar pela segura e incansável orientação durante a elaboração deste trabalho.

A todos os outros professores do IMECC que colaboraram para a minha formação, especialmente ao prof. Marco Antonio Teixeira.

A D. Olga, é que ... ela me ensinou a ler.

5.2 - O Teorema de Marcinkiewicz Clássico	73
5.3 - A Versão de E. Stein e G. Weiss do Teorema de Marcinkiewicz	75
CAPÍTULO VI - UMA APLICAÇÃO ÀS INTEGRAIS SINGULARES	81
6.1 - Um Lema de Recobrimento e a Decomposição de Calderón - Zygmund	81
6.2 - Uma Aplicação às Integrais Singulares	83
CAPÍTULO VII - INTERPOLAÇÃO ENTRE H^1 e C_w	90
7.1 - Os Espaços H^1 e Algumas Propriedades Especiais	90
7.2 - Caracterização de $(H^1, C_w)_{\theta, q, K}$	92
Bibliografia	98

INTRODUÇÃO

i.

Neste trabalho estudamos alguns resultados básicos da teoria de interpolação para espaços quase-normados e fazemos algumas aplicações.

O estudo dos espaços de interpolação inicialmente se restringiu aos espaços de Banach. Entretanto, casos extremos, porém importantes, do teorema de interpolação de Marcinkiewicz não se enquadravam dentro da categoria dos espaços de Banach. Inspirado em resultados de R. Hunt [15], P. Krée [13] estabeleceu os primeiros resultados de uma teoria de interpolação em espaços que "não eram nem normados nem completos". Não eram normados mas eram quase-normados; isto é, a desigualdade triangular era mais fraca: $\|x+y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$, onde $C > 1$. Esta categoria de espaços engloba os espaços L^1 -fracos e mais geralmente os espaços L^p com $0 < p \leq \infty$ e também os espaços de Lorentz L^{pq} com $0 < p, q < \infty$.

No primeiro capítulo desenvolvemos a K-teoria de interpolação para espaços quase-normados definindo os espaços de interpolação $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ onde A_0 e A_1 são espaços quase-normados que satisfazem uma condição de compatibilidade. A extensão para o caso quase-normado do K-método não apresenta dificuldades especiais.

Um ponto importante da teoria de interpolação é a estabilidade do método de construção dos espaços de interpolação. No caso dos espaços de Banach a estabilidade é dada pelo teorema de reiteração e é necessário desenvolver o J-método de interpolação

ção para se obter este teorema. Como o J-método utiliza integração de funções vetoriais a sua extensão para o caso quase-normado apresenta dificuldades.

Inspirando-se em Hunt [15] e Oklander [6] T. Holmstedt estabeleceu uma fórmula que permite obter os teoremas de reiteração sem utilizar o J-método.

No capítulo 3, estabelecemos então o teorema de reiteração utilizando a fórmula de Holmstedt. Terminamos o capítulo estabelecendo um teorema geral de interpolação para espaços quase-normados utilizando o teorema de reiteração.

No quarto capítulo desenvolvemos de forma sistemática e sucinta, a teoria básica dos espaços normados e quase-normados de Lorentz L^{pq} .

Iniciamos o quinto capítulo caracterizando os espaços de interpolação $(L^{pq}, L^{\bar{p}\bar{q}})_{\theta, r}$ para diversos valores dos parâmetros envolvidos. Com estas caracterizações e os teoremas de interpolação passamos a obter as várias versões do teorema de Marcinkiewicz: teorema de Marcinkiewicz - Zygmund, teorema de Marcinkiewicz - Stein - Weiss, teorema de Marcinkiewicz - Calderón e o teorema de Marcinkiewicz - Calderón - Krée - Homstedt.

No sexto capítulo procuramos dar uma aplicação não trivial do teorema de Marcinkiewicz. Aqui o ponto crucial é a demonstração de que certo operador integral singular é do tipo $(1,1)$. Para isto fazemos uso da "decomposição de Calderón - Zygmund".

Finalmente no sétimo capítulo, desenvolvemos uma caracterização dos espaços de Lorentz L^{pq} como espaço de interpolação em

iii.

tre os espaços H^1 e C_w . Esta caracterização é devida a Riviere-Sagher [12].

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO QUASE-NORMADOS

Neste capítulo daremos a definição e algumas propriedades dos espaços de interpolação quase-normados gerados pelo k -método de J. Peetre.

1.1 - ESPAÇOS QUASE-NORMADOS

Uma quase-norma $\| \cdot \|$ num espaço vetorial E é um funcional de finido em E tal que

- i) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, onde λ é real ou complexo.
- iii) $\|x+y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$, $C \geq 1$

EXEMPLO: L^p , $0 < p < 1$

Com efeito, considerando a função $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(t) = \frac{1+t^p}{(1+t)^p}, \quad 0 < p < 1$$

verifica-se, facilmente, que $1 \leq \phi(x)$.

Para $f, g \in L^p$ façamos $t = |f|/|g|$.

Vamos ter

$$1 \leq \phi\left(\frac{|f|}{|g|}\right) = \frac{1 + \frac{|f|^p}{|g|^p}}{\left(1 + \frac{|f|}{|g|}\right)^p}$$

$$= \frac{|g|^p + |f|^p}{(|g| + |f|)^p} \leq \frac{|g|^p + |f|^p}{|f+g|^p}$$

portanto

$$|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \int |f+g|^p &\leq \int |f|^p + \int |g|^p \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \int |f|^p + \frac{1}{2} \int |g|^p\right) \end{aligned}$$

Agora, como $H(s) = s^\alpha$, $\alpha > 1$, é convexa, e se $s_1 = \int |f|^p$ e $s_2 = \int |g|^p$ (aqui $\alpha = \frac{1}{p} > 1$) segue que

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= \left(\int |f+g|^p\right)^{1/p} \\ &= 2^{1/p} \left(\frac{1}{2} \int |f|^p + \frac{1}{2} \int |g|^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2} \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= 2^{\frac{1-p}{p}} (\|f\|_p + \|g\|_p) . \end{aligned}$$

Vamos introduzir, também, os conceitos de aplicação quase-linear e de aplicação quase linear contínua.

Consideremos, então, dois espaços quase-normados, E e F , Dizemos que uma aplicação $T: E \rightarrow F$ é quase-linear se existe uma constante $C = C(T)$, tal que para todo f e todo g em E , vale

$$\|T(f+g)\|_F \leq C(\|Tf\|_F + \|Tg\|_F)$$

e que T é contínua ou limitada se, para toda f em E , vale

$$\|Tf\|_F \leq C\|f\|_E .$$

EXEMPLO (trivial de aplicação quase-linear): Sejam E e F dois espaços quase-normados e

$$T: E \rightarrow F$$

tal que

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) .$$

É claro que T é uma aplicação quase-linear.

1.2 - ESPAÇOS INTERMEDIÁRIOS

Sejam E_0 e E_1 dois espaços quase-normados contidos em um mesmo espaço vetorial topológico de Hausdorff V .

Suponhamos que as imersões

$$E_i \hookrightarrow V, \quad i = 0, 1$$

sejam contínuas.

Dizemos então que o par (E_0, E_1) é um par admissível (de espaços quase-normados).

Seja (E_0, E_1) um par admissível. Podemos então considerar a interseção $E_0 \cap E_1$ e a envoltória linear $E_0 + E_1$ (o espaço de todos os elementos $x \in V$ da forma $x = x_0 + x_1$ com $x_i \in E_i$, $i = 0, 1$) de E_0 e E_1 .

Os espaços $E_0 \cap E_1$ e $E_0 + E_1$ são espaços quase-normados sob as quase-normas

$$\|x\|_{E_0 \cap E_1} = \max\{\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\}$$

e

$$\|x\|_{E_0 + E_1} = \inf\{\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} / x = x_0 + x_1, x_i \in E_i, i=0,1\}$$

1.2.1 - Definição: Um espaço quase-normado $E \subset V$ será chamado de espaço intermediário em relação a E_0 e E_1 se satisfizer:

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1$$

(Usaremos o símbolo $\subset$ para indicar que a inclusão é algébrica e

topológica).

1.2.2. Sejam (E_0, E_1) e (F_0, F_1) dois pares admissíveis em relação a V e W , respectivamente e E e F dois outros espaços quase-normados tais que

$$E \subset V \quad \text{e} \quad F \subset W.$$

Dizemos que E e F são espaços de interpolação em relação aos pares (E_0, E_1) e (F_0, F_1) se a seguinte propriedade de interporlação se verificar:

Para todo operador T de $E_0 + E_1$ em $F_0 + F_1$ tal que as restrições

$$T/E_j : E_j \rightarrow F_j$$

são quase-lineares e contínuas tivermos que a restrição

$$T/E : E \rightarrow F$$

está bem definida, é quase-linear e contínua.

1.3 - A QUASE-NORMA FUNCIONAL $K(t; x)$.

Seja (E_0, E_1) um par de espaços admissíveis com $E_i \subset V$, $i = 0, 1$.

Para todo $x \in E_0 + E_1$ definimos a quase-norma funcional.

$$1.3.0(1) - K(t, x; E_0, E_1) = K(t, x)$$

$$= \inf_{x_0 + x_1 = x} \{ \|x_0\|_{E_0} + t \|x_1\|_{E_1} \}$$

onde $x_i \in E_i$, $i = 0, 1$; $0 < t < \infty$

Observemos que para todo t fixo $K(t, x)$ é uma quase-norma em $E_0 + E_1$. Mais ainda

$$K(1; x) = \|x\|_{E_0 + E_1}$$

Da definição é fácil ver que $K(t; x)$ é uma função não negativa, crescente e concava de t . Claramente $t^{-1} K(t; x)$ é decrescente.

As seguintes desigualdades serão úteis posteriormente.

Para todo $x \in E_0 + E_1$

$$1.3.0.(2) - \min(1, t) \|x\|_{E_0 + E_1} \leq K(t; x) \leq \max(1, t) \|x\|_{E_0 + E_1};$$

e para todo $x \in E_0 \cap E_1$

$$1.3.0.(3) - K(t, x) \leq \min(1, t) \|x\|_{E_0 \cap E_1}.$$

1.4 - ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO.

Seja (E_0, E_1) um par admissível de espaços quase normados. Pa

ra $0 < \theta < 1$ e $0 < q \leq \infty$ denotamos por

$$(E_0, E_1)_{\theta, q}$$

o espaço dos elementos $x \in E_0 + E_1$ tais que

$$\|x\|_{\theta, q} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, x))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

(com a modificação habitual quando $q = \infty$).

Como $K(t, x)$ é uma quase-norma funcional segue que $\|x\|_{\theta, q}$ é uma quase-norma sobre o espaço $(E_0, E_1)_{\theta, q}$.

Os espaços $(E_0, E_1)_{\theta, q}$ são espaços intermediários em relação a E_0 e E_1 , i. é:

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta, q} \subset E_0 + E_1$$

com efeito como $C = \|t^{-\theta} \min(1, t)\|_{L_*^q} < \infty$

(lembramos que $f \in L_*^q$ se e so se $t^{-1} f \in L^q$) de 1.3.0(2) segue que

$$\|x\|_{E_0 + E_1} \leq C^{-1} \|x\|_{\theta, q}$$

e de 1.3.0(3) segue que

$$\|x\|_{\theta, q} \leq C \|x\|_{E_0 \cap E_1}$$

Além de serem espaços intermediários os espaços $(E_0, E_1)_{\theta, q}$ gozam da propriedade de interpolação.

1.4.1 - Proposição: Se (E_0, E_1) e (F_0, F_1) são dois pares de espaços quase-normados com $E_i \subset V$ e $F_i \subset W$, $i = 0, 1$, e se T é um operador quase-linear contínuo tal que

$$T: E_0 \rightarrow F_0, \quad T: E_1 \rightarrow F_1$$

com as quase-normas M_0 e M_1 respectivamente, então

$$T: (E_0, E_1)_{\theta, q} \rightarrow (F_0, F_1)_{\theta, q}$$

é também quase-linear e contínua, e para sua quase-norma M temos a chamada desigualdade convexa

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

Demonstração:

Da definição de $K(t, a)$ temos que

$$K(t, Ta; F_0, F_1) \leq M_0 K(M_1 t / M_0, a; E_0, E_1)$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, Ta; F_0, F_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ & \leq \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} M_0 K(M_1 t / M_0, a; E_0, E_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

e a mudança de variável $s = M_1 t / M_0$ implica que

$$\|Ta\|_{(F_0, F_1)_{\theta, q}} \leq M_1^{1-\theta} M_1^{\theta} \|a\|_{(E_0, E_1)_{\theta, q}}$$

donde segue o resultado.

Os espaços $(E_0, E_1)_{\theta, q}$ formam uma escala de espaços quase-normados em relação ao parâmetro q .

Mais precisamente, vale a seguinte proposição:

1.4.2 - Proposição. Se $0 < p \leq q$ então

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} \subset (E_0, E_1)_{\theta, q}$$

e

$$\|x\|_{\theta, q} \leq c[\theta(1-\theta)]^{1/p - 1/q} \|x\|_{\theta, p}.$$

Demonstração:

Como $K(t, x)$ é crescente temos:

$$\|x\|_{\theta, p}^p = \int_0^{\infty} t^{-\theta p - 1} K(t, x)^p dt$$

$$\geq \int_t^{\infty} s^{-\theta p - 1} K(s, x)^p ds$$

$$\geq K(t, x)^p t^{-\theta p} (\theta p)^{-1}$$

Por outro lado, como $t^{-1}K(t,x)$ é decrescente temos:

$$\begin{aligned} \|x\|_{\theta,p}^p &\geq \int_0^t s^{-\theta p-1} K(s,x)^p ds \\ &\geq K(t,x)^p t^{-p} \int_0^t s^{(1-\theta)p-1} ds \\ &= K(t,x)^p t^{-\theta p} (1-\theta)^{-1} p^{-1} \end{aligned}$$

assim

$$K(t,x) \leq C \|x\|_{\theta,p} t^{\theta} t^{1/p} (1-\theta)^{1/p}$$

Mas como $p \leq q$

$$\begin{aligned} \|x\|_{\theta,q}^q &= \int_0^\infty t^{-\theta p-1} K(t,x)^p t^{-\theta(q-p)} K(t,x)^{q-p} dt \\ &\leq \|x\|_{\theta,p}^p C^{q-p} \|x\|_{\theta,p}^{(q-p)\theta} (1-\theta)^{(q-p)/p} \end{aligned}$$

Logo

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,q}} \leq C(\theta(1-\theta))^{1/p - 1/q} \|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}}$$

CAPÍTULO 2

A FÓRMULA DE HOLMSTEDT

Nêste capítulo faremos uma demonstração cuidadosa da fórmula de Holmstedt (2.1.1(1)). Esta fórmula permite calcular o funcional $K(t, a; E_0, E_1)$ em função de $K(t, a; A_0, A_1)$, onde $E_i = (A_0, A_1)_{\theta_i, q_i}$, $i = 0, 1$. Isto será fundamental para obtermos, no próximo capítulo, o Teorema de Reiteração para espaços quase-normados.

2.1 - A FÓRMULA DE HOLMSTEDT

Dizemos que $f(t) \sim g(t) \iff \exists C > 0 / Cf(t) \leq g(t) \leq C^{-1}f(t)$

2.1.1 - TEOREMA Seja (A_0, A_1) um par de espaços quase-normados e consideremos

$$E_i = (A_0, A_1)_{\theta_i, q_i} = A_{\theta_i, q_i}; \quad i = 0, 1$$

Então

$$2.1.1(1) \quad K(t, a; E_0, E_1) \sim \left(\int_0^{t^{1/q_0}} (s^{-\theta_0} K(\bar{s}, a; A_0, A_1))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} + \\ t \left(\int_{t^{1/q_1}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(s, a; A_0, A_1))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1}$$

onde $\eta = \theta_1 - \theta_0$ $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ e $0 < q_0, q_1 \leq \infty$

A demonstração desta fórmula será feita somente para $q_0, q_1 \geq 1$. Dividiremos a demonstração em duas partes.

2.2 - DEMONSTRAÇÃO: 1ª PARTE

Façamos

$$L_0 = \left(\int_0^{t^{1/n}} (s^{-\theta_0} K(s, a))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0};$$

$$L_1 = t \left(\int_{t^{1/n}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(s, a))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1},$$

onde

$$K(t, a) = K(t, a ; A_0, A_1)$$

e

$$H(t, a) = L_0 + L_1$$

Nesta primeira parte da demonstração provaremos que

$$2.2.0(1) \quad H(t, a) \leq C K(t, a ; E_0, E_1)$$

Então, por definição temos

$$K(t, a ; E_0, E_1) = \inf_{a_0 + a_1 = a} (\|a_0\|_{E_0} + t \|a_1\|_{E_1}) =$$

$$\inf_{a_0+a_1=a} \left\{ \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_0} K(s, a_0))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} + t \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a_1))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1} \right\}$$

Seja $k = \max\{k_0, k_1\}$ onde

$$\|a+b\|_{A_i} \leq k_i (\|a\|_{A_i} + \|b\|_{A_i})$$

então

$$\begin{aligned} 2.2.0(2) \quad K(t, a+b) &= \inf(\|a_0+b_0\|_{A_0} + t\|a_1+b_1\|_{A_1}) \\ &\leq k \inf(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} + \|b_0\|_{A_0} + t\|b_1\|_{A_1}) \\ &= k(K(t, a) + K(t, b)) \end{aligned}$$

onde o ínfimo foi tomado em $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) = a + b$.

Seja $a_0 + a_1 = a$ uma decomposição de $a \in E_0 + E_1$ com $a_i \in E_i$, $i = 0, 1$. Então usando (2.2.0(2)) e a desigualdade de Minkowski teremos:

$$k^{-1} H(t, a) \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad \text{onde}$$

$$I_1 = \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0} K(s, a_0))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0}$$

$$I_2 = \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0} K(s, a_1))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0}$$

$$I_3 = t \left(\int_t^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a_0))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1}$$

$$I_4 = t \left(\int_t^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a_1))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1}$$

Façamos

$$J_i = \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_i} K(u, a_i))^{q_i} \frac{du}{u} \right)^{1/q_i}, \quad i = 0, 1.$$

Usando o fato de que $K(t, a)$ é crescente e de que $t^{-1} K(t, a)$ é de crescente teremos:

$$\begin{aligned} J_i^{q_i} &\geq \int_0^s u^{-\theta_i q_i - 1} K(u, a_i)^{q_i} du \\ &\geq (s^{-1} K(s, a_i))^{q_i} \int_0^s u^{(1-\theta_i)q_i - 1} du \\ &= K(s, a_i)^{q_i} s^{-\theta_i q_i} [(1-\theta_i)q_i]^{-1} \end{aligned}$$

e

$$J_i^{q_i} \geq \int_s^\infty u^{-\theta_i q_i - 1} K(u, a_i)^{q_i} du$$

$$\geq K(s, a_i)^{q_i} \int_s^\infty u^{-\theta_i q_i - 1} du$$

$$= K(s, a_i)^{q_i} s^{-\theta_i q_i} (\theta_i q_i)^{-1}$$

Logo, para $i = 0, 1$,

$$2.2.0(3) \quad K(s, a_i) \leq J_i s^{\theta_i q_i} [\min(\theta_i; (1-\theta_i))]^{1/q_i}$$

$$= J_i s^{\theta_i} C_i$$

É fácil ver que

$$I_1 \leq J_0 \quad e \quad I_4 \leq t J_1$$

Vamos estimar I_2 e I_3 usando (2.2.0(3))

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\int_0^t (s^{-\theta_0} K(s, a_1))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} \\ &\leq \left(\int_0^t (s^{-\theta_0} J_1 s^{\theta_1} C_1)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} = J_1 C_1 \left(\int_0^t s^{(\theta_1 - \theta_0) q_0 - 1} ds \right)^{1/q_0} \\ &= t J_1 C_1 (\eta q_0)^{-1/q_0}; \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
 I_3 &= t \left(\int_{t^{1/\eta}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(s, a_0))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1} \\
 &\leq t \left(\int_{t^{1/\eta}}^{\infty} (s^{-\theta_1} J_0 s^{\theta_0} C_0)^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1} = t J_0 C_0 \left(\int_{t^{1/\eta}}^{\infty} (s^{(\theta_0 - \theta_1)q_1 - 1} ds) \right)^{1/q_1} \\
 &= J_0 C_0 (\eta q_1)^{-1/q_1}
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 k^{-1} H(t, a) &\leq J_0 + t J_1 C_1 (\eta q_0)^{-1/q_0} + J_0 C_0 (\eta q_1)^{-1/q_1} + t J_1 \\
 &\leq C (J_0 + t J_1)
 \end{aligned}$$

onde $C = O(\eta^{-\max(1/q_0, 1/q_1)})$ com $\eta \rightarrow 0$.

Se tomarmos o ínfimo sobre todas as partições $a_0 + a_1 = a$ teremos:

$$H(t, a) \leq C K(t, a; E_0, E_1)$$

2.3 - DEMONSTRAÇÃO: 2ª PARTE

Com as notações da 1ª parte provaremos agora que

$$2.3.0(1) \quad K(t, a ; E_0, E_1) \leq C H(t, a)$$

Sejam, então $a_i(t) \in A_i$, $i = 0, 1$ tais que

$$a_0(t) + a_1(t) = a$$

e

$$\|a_0(t)\|_{A_0} + t\|a_1(t)\|_{A_1} \leq 2K(t, a) \text{ para } t > 0.$$

Definimos a'_0 e a'_1 por

$$a'_i(t) = a_i(t^{1/\eta}), \quad i = 0, 1.$$

$$\text{Logo } a'_0 + a'_1 = a \text{ e}$$

$$2.3.0(2) \quad K(s, a'_0(t)) \leq \|a'_0(t)\|_{A_0} = \|a_0(t^{1/\eta})\|_{A_0} \leq 2K(t^{1/\eta}, a)$$

$$2.3.0(3) \quad K(s, a'_1(t)) \leq s \|a'_1(t)\|_{A_1} = s \|a_1(t^{1/\eta})\|_{A_1} \leq 2s t^{-1/\eta} K(t^{1/\eta}, a)$$

Pela desigualdade quase-triangular temos:

$$2.3.0(4) \quad K(s, a'_0(t)) \leq k(K(s, a) + K(s, a'_1(t)))$$

$$2.3.0(5) \quad K(s, a'_1(t)) \leq k(K(s, a) + K(s, a'_0(t)))$$

Como $a'_0 + a'_1 = a$ é uma decomposição de a teremos:

$$K(t, a; E_0, E_1) \leq \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_0} K(s, a'_0(t)))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} +$$

$$t \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a'_1(t)))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1}$$

$$\leq k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \text{ onde}$$

$$k_1 = \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0} K(s, a'_0(t)))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0}$$

$$k_2 = \left(\int_{t^{1/\eta}}^\infty (s^{-\theta_0} K(s, a'_0(t)))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0}$$

$$k_3 = t \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_1} K(s, a'_1(t)))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1}$$

$$k_4 = t \left(\int_{t^{1/\eta}}^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a'_1(t)))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1}$$

Façamos

$$P_i = \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_i} K(u, a))^{q_i} \frac{du}{u} \right)^{1/q_i}$$

então

$$P_i^{q_i} = \int_0^\infty (u^{-\theta_i} K(u, a))^{q_i} \frac{du}{u}$$

$$\geq \int_0^s u^{-\theta_i q_i - 1} K(u, a)^{q_i} du$$

$$= \int_0^s u^{-q_i} K(u, a)^{q_i} u^{(1-\theta_i)q_i - 1} du$$

$$\geq (s^{-1} K(s, a))^{q_i} \int_0^s u^{(1-\theta_i)q_i - 1} du$$

$$= K(s, a)^{q_i} s^{-\theta_i q_i} [(1-\theta_i)q_i]^{-1}$$

e

$$P_i^{q_i} \geq \int_s^\infty u^{-\theta_i q_i - 1} K(u, a)^{q_i} du$$

$$\geq K(s, a)^{q_i} \int_s^\infty u^{-\theta_i q_i - 1} du$$

$$= K(s, a)^{q_i} s^{-\theta_i q_i} [\theta_i q_i]^{-1}$$

Logo

$$K(s, a) \leq P_i s^{\theta_i} q_i^{1/q_i} [\min(\theta_i ; (1-\theta_i))]^{1/q_i}$$

Portanto, para $s \leq t^{1/\eta}$

$$2.3.0(6) \quad K(s, a) \leq L_0 s^{\theta_0} (q_0(1-\theta_0))^{1/q_0},$$

$$2.3.0(7) \quad K(s, a) \leq L_0 s^{\theta_0} (q_0 \theta_0)^{1/q_0};$$

e para $s \geq t^{1/\eta}$

$$2.3.0(8) \quad K(s, a) \leq t^{-1} L_1 s^{\theta_1} (q_1 \theta_1)^{1/q_1},$$

$$2.3.0(9) \quad K(s, a) \leq t^{-1} L_1 s^{\theta_1} (q_1(1-\theta_1))^{1/q_1},$$

De (2.3.0(4)), (2.3.0(3)) e (2.3.0(6)) teremos:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0} K(s, a'_0(t)))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} \\
 &\leq \int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0} k(K(s, a) + K(s, a'_1(t))))^{q_0} \frac{ds}{s}^{1/q_0} \\
 &\leq k \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0} K(s, a))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} + k \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0 q_0 - 1} K(s, a'_1(t)))^{q_0} ds \right)^{1/q_0} \\
 &\leq k L_0 + 2k K(t^{1/\eta}, a) t^{-\theta_0/\eta} (q_0(1-\theta_0))^{-1/q_0}
 \end{aligned}$$

Desta desigualdade segue que

$$k^{-1} k_1 \leq L_0 + 2K(t^{1/\eta}, a) t^{-\theta_0/\eta} (q_0(1-\theta_0))^{-1/q_0} \leq 3 L_0$$

pois (2.3.0(6)) se verifica para $s = t^{1/\eta}$.

De (2.3.0(5)), (2.3.0(2)) e (2.3.0(8)) teremos:

$$\begin{aligned}
 k^{-1} K_4 &\leq t \left(\int_{t^{1/\eta}}^{\infty} s^{-\theta_1 q_1 - 1} K(s, a)^{q_1} ds \right)^{1/q_1} \\
 &+ t \left(\int_{t^{1/\eta}}^{\infty} s^{-\theta_1 q_1 - 1} K(s, a'_0(t))^{q_1} ds \right)^{1/q_1} \\
 &\leq L_1 + 2K(t^{1/\eta}, a) t^{1-\theta_1/\eta} (q_1 \theta_1)^{-1/q_1} \leq 3 L_1
 \end{aligned}$$

bastando tomar $s = t^{1/\eta}$ em (2.3.0(8)).

Do fato de $k^{-1} \leq 1$ e de (2.3.0(2)), (2.3.0(3)), (2.3.0(7)) e (2.3.0(9)) teremos:

$$\begin{aligned}
 k^{-1} K_2 &\leq \left(\int_{t^{1/\eta}}^{\infty} (s^{-\theta_0} 2K(t^{1/\eta}, a))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0} \\
 &\leq 2K(t^{1/\eta}, a) \left(\int_{t^{1/\eta}}^{\infty} s^{-\theta_0 q_0 - 1} ds \right)^{1/q_0}
 \end{aligned}$$

$$= 2K(t^{1/\eta}, a) t^{-\theta_0/\eta} (q_0 \theta_0)^{-1/q_0} \leq C L_0$$

e

$$k^{-1} K_3 \leq 2K(t^{1/\eta}, a) t^{(1-\theta_1)/\eta} (q_1 (1-\theta_1))^{-1/q_1} \leq C L_1$$

onde $C = O(1)$ quando $\eta \rightarrow 0$.

Finalmente

$$K(t, a ; E_0, E_1) \leq C H(t, a) .$$

ooo0ooo

CAPÍTULO 3

O TEOREMA DE REITERAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos o Teorema de Reiteração. Este teorema é central na teoria de interpolação. Para sua demonstração será essencial o uso da fórmula de Holmstedt.

Como aplicação do Teorema de Reiteração obteremos um importante teorema de interpolação.

3.1 - O TEOREMA DE REITERAÇÃO

3.1.1 - TEOREMA Se (A_0, A_1) é um par de espaços quase-normados e (E_0, E_1) um par de espaços de interpolação, onde

$$E_i = (A_0, A_1)_{\theta_i, q_i}, \quad 0 < \theta_i < 1, \quad \theta_0 \neq \theta_1, \quad 0 < q_i \leq \infty, \quad i = 0, 1$$

Então

$$(E_0, E_1)_{\lambda, p} = (A_0, A_1)_{\theta, p};$$

e

$$C\lambda^{-\min(\frac{1}{p}; \frac{1}{q_0}) - \min(\frac{1}{p}; \frac{1}{q_1})} \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}$$

$$\leq \|a\|_{(E_0, E_1)_{\lambda, p}}$$

$$\leq C^{-1} \lambda^{-\max(1/p; 1/q_0)} (1-\lambda)^{-\max(1/p; 1/q_1)} \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}$$

com $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, $0 < \lambda < 1$ e $0 < p \leq \infty$.

Demonstração.

Provaremos primeiro para $p \geq 1$ e $\theta_0 < \theta_1$.

Do teorema 2.1.1 nós temos:

$$\|a\|_{(E_0, E_1)_{\lambda, p}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\lambda} K(t, a; E_0, E_1))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ \sim I_0 + I_1$$

onde

$$I_0 = \left(\int_0^\infty (t^{-\lambda} \left(\int_0^{t^{1/\eta}} (s^{-\theta_0} K(s, a))^{1/q_0} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_0, p} \frac{dt}{t} \right)^{1/p}$$

$$I_1 = \left(\int_0^\infty (t^{1-\lambda} \left(\int_{t^{1/\eta}}^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q_1, p} \frac{dt}{t} \right)^{1/p}$$

As constantes que aparecem na equivalência acima são claramente independentes de λ .

Se fizermos $s = t^{1/\eta} u$ em I_0 e I_1 e depois $t = v^\eta$ teremos:

$$I_0 = \eta^{1/p} \left(\int_0^\infty v^{-\theta} \left(\int_0^1 (u^{-\theta} {}_0K(uv, a))^{q_0} \frac{du}{u} \right)^{1/q_0, p} \frac{dv}{v} \right)^{1/p}$$

$$I_1 = \eta^{1/p} \left(\int_0^\infty v^{-\theta} \left(\int_1^\infty (u^{-\theta} {}_1K(uv, a))^{q_1} \frac{du}{u} \right)^{1/q_1, p} \frac{dv}{v} \right)^{1/p}$$

Para estimarmos estas integrais separaremos em vários casos.

1º caso: $q_0 \leq p$.

Pela desigualdade Integral de Minkowski temos:

$$\begin{aligned} 3.1.1(1) \quad I_0 &\leq \eta^{1/p} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty (u^{-\theta} {}_0K(uv, a))^p \frac{dv}{v} \right)^{q_0/p} \frac{du}{u} \right)^{1/q_0} \\ &= \eta^{1/p} \left(\int_0^1 u^{-q_0(\theta_0 - \theta)} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^p \frac{dt}{t} \right)^{q_0/p} \frac{du}{u} \right)^{1/q_0} \\ &= \eta^{1/p} \left(\int_0^1 u^{-q_0(\theta_0 - \theta)} \frac{du}{u} \right)^{1/q_0} \|a\|_{A_{\theta, p}}^{q_0} = C \lambda^{-1/q_0} \|a\|_{A_{\theta, p}}^{q_0} \end{aligned}$$

onde C é independente de λ .

2º caso: $q_1 \leq p$

Novamente aplicando Minkowski teremos:

$$\begin{aligned}
 3.1.1(2) \quad I_1 &\leq \eta^{1/p} \left(\int_1^\infty \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_1} v^{-\theta} K(uv, a))^p \frac{dv}{v} \right)^{q_1/p} \frac{du}{u} \right)^{1/q_1} \\
 &= \eta^{1/p} \left(\int_1^\infty u^{-q_1(\theta_1 - \theta)} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^p \frac{dt}{t} \right)^{q_1/p} \frac{du}{u} \right)^{1/q_1} \\
 &= \eta^{1/p} \left(\int_1^\infty u^{-q_1(\theta_1 - \theta)} \frac{du}{u} \right)^{1/q_1} \|a\|_{A_{\theta, p}} = C(1-\lambda)^{-1/q_1} \|a\|_{A_{\theta, p}}
 \end{aligned}$$

3º caso: $q_0 \geq p$

Fazendo

$$B = \int_0^1 (u^{-\theta_0} K(uv, a))^p \frac{du}{u} ;$$

para $0 \leq s \leq 1$ vamos ter

$$B \geq \int_0^s (u^{-\theta_0} K(uv, a))^p \frac{du}{u}$$

$$\geq \left(\frac{K(sv, a)}{sv} \right)^p v^p \int_0^s u^{p(1-\theta_0)-1} du$$

$$= K(sv, a)^p s^{-p\theta_0} (p(1-\theta_0))^{-1} ;$$

isto é

$$K(sv, a) \leq B^{1/p} s^{\theta_0} (p(1-\theta_0))^{1/p}$$

Logo

3.1.1(3)

$$A = \left(\int_0^1 (u^{-\theta_0} K(uv, a))^{q_0} \frac{du}{u} \right)^{p/q_0}$$

$$= \left(\int_0^1 u^{-\theta_0 p-1} K(uv, a)^p u^{\theta_0(p-q_0)} K(uv, a)^{q_0-p} du \right)^{p/q_0}$$

$$\leq \left(\int_0^1 u^{-\theta_0 p-1} K(uv, a)^p du \right)^{p/q_0} (B^{(q_0-p)/p} (p(1-\theta_0))^{(q_0-p)/p})^{p/q_0}$$

$$= B(p(1-\theta_0))^{(q_0-p)q_0} = CB .$$

Se usarmos (3.1.1(3)) em I_0 teremos

$$\begin{aligned}
 3.1.1(4) \quad I_0 &\leq C \left(\int_0^\infty \int_0^1 (u^{-\theta} v^{-\theta} K(uv, a))^p \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \right)^{1/p} \\
 &= C \left(\int_0^1 u^{(\theta-\theta_0)p} \frac{du}{u} \right)^{1/p} \|a\|_{A_{\theta,p}} = C \lambda^{-1/p} \|a\|_{A_{\theta,p}}
 \end{aligned}$$

4º caso:

Se $q_1 \geq p$ nós poderemos obter de maneira análoga à anterior

$$3.1.1(5) \quad I_1 \leq C(1-\lambda)^{-1/p} \|a\|_{A_{\theta,p}}$$

de (3.1.1(1)), (3.1.1(2)), (3.1.1(4)) e (3.1.1(5)) teremos

$$\|a\|_{(E_0, E_1)_{\lambda, p}} \leq C \lambda^{-\max(1/p; 1/q_0)} (1-\lambda)^{-\max(1/p; 1/q_1)} \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}$$

Aplicando o mesmo método usado acima poderemos mostrar que

$$\|a\|_{(E_0, E_1)_{\lambda, p}} \geq C \lambda^{-\min(1/p; 1/q_0)} (1-\lambda)^{-\min(1/p; 1/q_1)} \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}$$

Se $p < 1$ o mesmo princípio de estimativas pode ser usado, a constante C irá depender do fato de $L_p, 0 < p < 1$ ser quase-normado.

Observemos que

$$K(t, a; A_0, A_1) = t K(1/t, a; A_1, A_0)$$

o qual implica que

$$3.1.1(6) \quad (A_0, A_1)_{\theta, p} = (A_1, A_0)_{1-\theta, p}$$

com

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} = \|a\|_{(A_1, A_0)_{1-\theta, p}}$$

Assim se $\theta_0 > \theta_1$ nós temos de 3.1.1(6) e da parte já provada do teorema 3.1.1 que

$$\|a\|_{(A_{\theta_0, q_0}, A_{\theta_1, q_1})_{\lambda, p}} = \|a\|_{(A_{\theta_1, q_1}, A_{\theta_0, q_0})_{1-\lambda, p}} = \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta', p}}$$

com $\theta' = (1-(1-\lambda))\theta_1 + (1-\lambda)\theta_0 = \theta$. O teorema está demonstrado.

Aplicaremos agora o Teorema de Reiteração para demonstrar o seguinte teorema de interpolação.

3.2 - O TEOREMA DE INTERPOLAÇÃO

3.2.1 - TEOREMA Se (A_0, A_1) e (B_0, B_1) são dois pares de espaços quase-normados e T um operador quase-linear tal que

$$T: (A_0, A_1)_{\eta_0, p_0} \rightarrow (B_0, B_1)_{\theta_0, q_0}$$

com norma M_0 ,

$$T: (A_0, A_1)_{\eta_1, p_1} \rightarrow (B_0, B_1)_{\theta_1, q_1}$$

com norma M_1 , e

se $\eta = (1-\lambda)\eta_0 + \lambda\eta_1$, $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, $0 < \lambda < 1$

e $p \leq q$ então

$$T: (A_0, A_1)_{\eta, p} \rightarrow (B_0, B_1)_{\theta, q}$$

com norma M onde

$$M \leq C M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda \lambda^{\alpha_0} (1-\lambda)^{\alpha_1}$$

$$e \quad \alpha_i = \min(1/q; 1/q_i) - \max(1/p; 1/p_i) + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} ; i = 0, 1 .$$

Demonstração:

Pelo teorema 3.1.1 temos:

3.2.1(1)

$$\|Ta\|_{(B_0, B_1)_{\theta, q}} \leq C \lambda^{\min(1/p; 1/q_0)} (1-\lambda)^{\min(1/p; 1/q_1)} \|Ta\|_{(B_{\theta_0, q_0}, B_{\theta_1, q_1})_{\lambda, q}}$$

A proposição 1.4.2 nos garante

3.2.1(2)

$$\|Ta\|_{(B_{\theta_0, q_0}, B_{\theta_1, q_1})_{\lambda, q}} \leq C \lambda^{1/p - 1/q} (1-\lambda)^{1/p - 1/q} \|Ta\|_{(B_{\theta_0, q_0}, B_{\theta_1, q_1})_{\lambda, p}} .$$

Da proposição 1.4.1 e novamente pelo teorema 3.1.1 temos res
pectivamente.

3.2.1(3)

$$\|Ta\|_{(B_{\theta_0, q_0}, B_{\theta_1, q_1})_{\lambda, p}} \leq M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda \|a\|_{(A_{\eta_0, p_0}, A_{\eta_1, p_1})_{\lambda, p}}$$

e

3.2.1(4)

$$\|a\|_{(A_{\eta_0, p_0}, A_{\eta_1, p_1})_{\lambda, p}} \leq C \lambda^{-\max(1/p, 1/q_0)} (1-\lambda)^{-\max(1/p, 1/q_1)} \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}$$

Pela aplicação sucessiva de 3.2.1(1), 3.2.1(2), 3.2.1(3) e 3.2.1(4) temos

$$\|Ta\|_{(B_0, B_1)_{\theta, q}} \leq C M_0^{1-\lambda} M_1^{\lambda} \lambda^{\alpha_0} (1-\lambda)^{\alpha_1} \quad \text{onde}$$

$$\alpha_i = \min(1/p; 1/q_i) - \max(1/p; 1/q_i) + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \quad i = 0, 1.$$

ooooo

CAPÍTULO 4

ESPAÇOS DE LORENTZ

4.1 - FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO.

Vamos estudar a função de distribuição de uma função mensurável f definida num espaço de medida (X, μ) .

4.1.1. - DEFINIÇÃO. Denominamos função de distribuição da função f , a função $m: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$m_f(\lambda) = \mu\{x \in X / |f(x)| > \lambda\}$$

4.1.2. - PROPOSIÇÃO. A função de distribuição é:

- i) não-negativa
- ii) não-crescente
- iii) contínua à direita.

Demonstração.

Os itens (i) e (ii) são imediatos a partir da definição, provaremos (iii).

Se $\lambda_n \downarrow \lambda$ então

$$\{x / |f(x)| > \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x / |f(x)| > \lambda_n\}$$

mas

$$\{x / |f(x)| > \lambda\} \supset \{x / |f(x)| > \lambda_n\}$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_f(\lambda_n) = m_f(\lambda).$$

4.1.3. - PROPOSIÇÃO. Sejam f e g funções mensuráveis e $\lambda > 0$.

Então

$$m_{f+g}(2\lambda) \leq m_f(\lambda) + m_g(\lambda).$$

Demonstração.

Se x é tal que $|f(x) + g(x)| > 2\lambda$ então $|f(x)| > \lambda$ ou $|g(x)| > \lambda$.

Logo

$$x \in \{x / |f(x)| > \lambda\} \cup \{x / |g(x)| > \lambda\}$$

e portanto

$$\{x / |f(x) + g(x)| > 2\lambda\} \subset \{x / |f(x)| > \lambda\} \cup \{x / |g(x)| > \lambda\}$$

o que implica

$$m_{f+g}(2\lambda) \leq m_f(\lambda) + m_g(\lambda).$$

Nossa próxima proposição mostra que podemos expressar a nor

ma L^p de uma função mensurável usando a função de distribuição desta função.

4.1.4. - PROPOSIÇÃO. Se f é uma função mensurável e $0 < p < \infty$, então

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^\infty y^{p-1} m_f(y) dy .$$

Demonstração

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} py^{p-1} dy \right)$$

$$= \int_X \left(\int_0^\infty \chi_{[0, |f(x)|]}(y) py^{p-1} dy \right) d\mu$$

$$= \int_0^\infty (py^{p-1} \int_X \chi_{[0, |f(x)|]}(y) d\mu) dy$$

$$= \int_0^\infty py^{p-1} \left(\int_0^\infty \chi_{E_y}(x) d\mu \right) dy$$

$$= \int_0^\infty py^{p-1} m_f(y) dy$$

com $\chi_{(0, |f(x)|)}(y) = \chi_{E_y}(x)$ onde

$$E_y = \{x \in X / |f(x)| > y\}.$$

4.2 - FUNÇÃO REORDENADA NÃO-CRESCENTE

Seja f uma função mensurável definida num espaço de medida (X, μ) .

4.2.1. - DEFINIÇÃO. A função $f^*(t)$ definida em $(0, \infty)$ por

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 / m_f(\lambda) \leq t\}$$

$$= \sup_{t>0} \{\lambda > 0 / m_f(\lambda) > t\}$$

é denominada função reordenada (não crescente) da função f .

Do caráter não-crescente da função de distribuição segue a proposição.

4.2.2. - PROPOSIÇÃO. Para todo $t > 0$, temos

$$f^*(t) = m_{m_f}(t)$$

Como $m_f(\lambda) < \infty$ para algum $\lambda > 0$ e f é finita quase sempre te

mos que $m_f(\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Da definição de $f^*(t)$ e do fato de $m_f(\lambda)$ ser contínua à direita temos, imediatamente, a seguinte proposição.

4.2.3. - PROPOSIÇÃO. Para todo $\lambda, t > 0$, temos

$$4.2.3(1) \quad f^*(m_f(\lambda)) \leq \lambda$$

$$4.2.3(2) \quad m_f(f^*(t)) \leq t.$$

Também para a função reordenada temos um resultado análogo à 4.1.2.

4.2.4. - PROPOSIÇÃO. A função reordenada é:

- i) não-negativa
- ii) não-crescente
- iii) contínua à direita.

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 4.2.2.

4.2.5. - PROPOSIÇÃO. As funções f e f^* são equimensuráveis, isto é,

$$m_{f^*}(\lambda) = m_f(\lambda) ,$$

para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Desde que f^* é não-crescente temos

$$4.2.5(1) \quad m_f^*(\lambda) = \sup\{t > 0 / f^*(t) > \lambda\}$$

Agora, como $f^*(m_f(\lambda)) \leq \lambda$, temos

$$\begin{aligned} m_f^*(\lambda) &\leq m_f^*(f^*(m_f(\lambda))) \\ &= \sup\{t > 0 / f^*(t) > f^*(m_f(\lambda))\} \\ &\leq m_f(\lambda). \end{aligned}$$

Se $t > m_f^*(\lambda)$, então 4.2.5(1) implica $f^*(t) \leq \lambda$. Logo, $m_f(\lambda) \leq m_f(f^*(t)) \leq t$, e segue que $m_f(\lambda) \leq m_f^*(\lambda)$ e 4.2.5 está provado.

4.2.6. - PROPOSIÇÃO. Se $t_1, t_2 > 0$, então

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$$

Demonstração. O conjunto

$$\{x \in X / |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\}$$

está claramente contido em

$$\{x \in X / |f(x)| > f^*(t_1)\} \cup \{x \in X / |g(x)| > g^*(t_2)\}.$$

Logo

$$m_{f+g}(f^*(t_1) + g^*(t_2)) \leq m_f(f^*(t_1)) + m_g(g^*(t_2))$$

$$\leq t_1 + t_2 ,$$

donde segue o resultado.

4.2.7 - PROPOSIÇÃO. Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis e seja f tal que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ quase sempre.

Então para $t \geq 0$

$$f^*(t) \leq \underline{\lim} f_n^*(t)$$

Demonstração. É claro que

$$\underline{\lim} \{x / |f_n(x)| > \omega\} \supset \{x / |f(x)| > \omega\}$$

consequentemente

$$\underline{\lim} m_{f_n^*}(\omega) \geq m_f(\omega) .$$

Então

$$f^*(t) = \inf\{\omega / m_f(\omega) \leq t\}$$

$$\leq \inf\{\omega / \underline{\lim} m_{f_n}(\omega) \leq t\}$$

$$\leq \inf \overline{\lim} \{\omega / m_{f_n}(\omega) \leq t\}$$

$$\leq \liminf \bigcup_{n \geq K} \{\omega / m_{f_n}(\omega) \leq t\}$$

$$< \liminf_{K \rightarrow \infty} \inf_{n \geq K} f_n^*(t) = \underline{\lim} f_n^*(t) .$$

4.3 - A FUNÇÃO MÉDIA

4.3.1. - Definição. A função média f^{**} da função f é a aplicação

$$f^{**}: (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$$

definida por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

Desta definição e do caráter não crescente da f^* temos

$$f^* \leq f^{**} .$$

4.3.2. - Proposição. Sejam f e χ_A funções mensuráveis, então

$$\int_A |f(x)| d\mu \leq \int_0^{\mu(A)} f^*(t) dt$$

Demonstração: É claro que se $|f| \leq |g|$, então $f^* \leq g^*$.

Tomando então $h = f \chi_A$, vamos ter

$$h^* \leq f^* .$$

Também, vamos ter

$$m_h(\omega) \leq \mu(A)$$

para todo $\omega \geq 0$ e portanto $h^*(t) = 0$ para $t \geq \mu(A)$.

Portanto

$$\int_A |f| d\mu = \int_X |h| d\mu = \int_0^\infty h^*(t) dt = \int_0^{\mu(A)} h^*(t) dt$$

$$\leq \int_0^{\mu(A)} f^*(t) dt .$$

4.3.3. - Proposição. Se μ é uma medida não atômica e f é uma função mensurável, então para cada $t \geq 0$ e $\mu(X) \geq t$, existe um conjunto $B_t \subset X$, tal que $\mu(B_t) = t$ e

$$\int_0^t f^*(s) ds = \int_{B_t} |f| d\mu$$

Demonstração.

Consideremos os conjuntos:

$$C = \{x \in X / |f(x)| > f^*(t)\}$$

$$E = \{x \in X / |f(x)| \geq f^*(t)\}$$

Logo

$$\mu(C) = m_f(f^*(t)) \leq t \leq m_f'(f^*(t)) = \mu(E)$$

onde

$$m_f'(s) = \mu\{x \in X / |f(x)| \geq s\}$$

Sendo μ uma medida não atômica, existe um conjunto B_t tal que $\mu(B_t) = t$.

Seja $h = f\chi_{B_t}$. Então

$$h^*(s) = f^*(s) \chi_{(0,t)}(s)$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \int_{B_t} |f(x)| d\mu \\ &= \int_X |h(x)| d\mu = \int_0^\infty h^*(s) ds \end{aligned}$$

$$= \int_0^t h^*(s) ds = \int_0^t f^*(s) ds$$

4.3.4. - Corolário. Temos

$$4.3.4(1) \quad \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x)| d\mu = \int_0^t f^*(s) ds$$

e

$$4.3.4(2) \quad f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x)| d\mu .$$

4.3.5. - PROPOSIÇÃO. Se f e g são funções mensuráveis e integráveis sobre conjuntos de medida finita, então:

$$(f+g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (f+g)^{**}(t) &= \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f+g| d\mu \\ &\leq \frac{1}{t} \left(\sup_{\mu(E)=t} \int_E |f| d\mu + \sup_{\mu(E)=t} \int_E |g| d\mu \right) \\ &= f^{**}(t) + g^{**}(t) . \end{aligned}$$

4.4 - ESPAÇOS DE LORENTZ

Consideremos, como antes, funções mensuráveis definidas num espaço de medida σ -finito (X, μ) .

4.4.1. - Definição. O espaço de Lorentz $L(p, q)$ é a coleção de todas as funções f tais que $\|f\|_{pq}^* < \infty$, onde

$$\|f\|_{pq}^* = \begin{cases} \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L_*^q} & ; 0 < p < \infty ; 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & , 0 < p < \infty , q = \infty \end{cases}$$

O caso $p = \infty$, $0 < q < \infty$ não interessa pois

$$\int_0^\infty (f^*(t))^q \frac{dt}{t} < \infty$$

implica $f = 0$ quase sempre.

4.4.2. - PROPOSIÇÃO. O funcional $\|f\|_{pq}^*$ é uma quase-norma sobre $L(p, q)$, que é portanto um espaço quase-normado.

Demonstração.

$$\|f+g\|_{pq}^* = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} (f+g)^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

fazendo a substituição $t = 2s$

temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^\infty (2^{1/p} s^{1/p} (f+g)^*(2s))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \\
 &= 2^{1/p} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} (f+g)^*(2t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 &\leq 2^{1/p} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} (f^*(t) + g^*(t)))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 &= 2^{1/p} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t) + t^{1/p} g^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 &\leq 2^{1/p} \left(\left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty (t^{1/p} g^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right) \\
 &= 2^{1/p} (\|f\|_{pq}^* + \|g\|_{pq}^*) .
 \end{aligned}$$

Os espaços de Lorentz podem também ser definidos por uma

quase-norma dada através da função de distribuição.

4.4.3. - PROPOSIÇÃO. Se $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$ então

$$\|f\|_{pq}^* = \left(\int_0^\infty p y^{q-1} m_f(y)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração

$$(\|f\|_{p,q})^q = \int_0^\infty (f^*(t) \cdot t^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty f^*(t)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt$$

$$= \int_0^\infty f^*(t)^q du(t) \quad (du(t) = t^{\frac{q}{p}-1} dt)$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^{f^*(t)} q y^{q-1} dy \right] du(t)$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \chi_{[0, f^*(t)]}(y) q y^{q-1} dy \right] du(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} qy^{q-1} \left[\int_0^{\infty} \chi_{[0, f^*(t)]}(y) du(t) \right] dy \\
 &= \int_0^{\infty} qy^{q-1} \left[\int_0^{\infty} \chi_{E_y}(t) du(t) \right] dy \\
 &= \int_0^{\infty} py^{q-1} \left[\int_0^{m_f(y)} t^{\frac{q}{p}-1} dt \right] dy \\
 &= \int_0^{\infty} py^{q-1} m_f(y)^{\frac{q}{p}} dy
 \end{aligned}$$

onde $E_y = \{t / f^*(t) > y\}$.

4.4.4. - PROPOSIÇÃO. Se $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$, então

$$L(p, p) = L^p.$$

Demonstração. Fazendo $p = q$ na proposição anterior obtemos

$$\int_0^{\infty} |f^*(t)|^p dt = \int_0^{\infty} py^{p-1} m_f(y) dy$$

Mas, por outro lado (proposição 4.1.4)

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_0^\infty p y^{p-1} m_f(y) dy ,$$

donde o resultado.

4.5 - TEOREMAS DE INCLUSÃO.

Os espaços de Lorente $L(p,q)$ formam uma escala de espaços no sentido que precisaremos nas proposições seguintes.

4.5.1. - Proposição. Sejam $1 < p, q < \infty$. Então

$$L(p,q) \subset L(p,\infty)$$

e a imersão é contínua.

Demonstração.

Como f^{**} é não-crescente temos

$$\frac{q}{p} f^{**}(x)^q = \frac{q}{p} f^{**}(x)^q \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} dt$$

$$\leq \frac{q}{p} \int_0^x f^{**}(t)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq \frac{q}{p} \|f\|_{pq}^{*q}$$

4.5.2 - PROPOSIÇÃO. Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq r \leq s \leq \infty$, então

$$L(p,r) \subset L(p,s)$$

e a imersão é contínua.

Demonstração:

Pela proposição anterior, temos:

$$\begin{aligned} \|f\|_{ps}^s &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{p}-1} f^{**}(x)^s dx \\ &= \int_0^\infty f^{**}(x)^r f^{**}(x)^{s-r} x^{\frac{s}{p}-1} dx \\ &\leq C \int_0^\infty f^{**}(x)^r (\|f\|_{pr}^*)^{-\frac{r}{p}} x^{-\frac{1}{p}} x^{\frac{s}{p}-1} dx \\ &= C \|f\|_{pr}^{*s-r} \|f\|_{pr}^{*r} = C \|f\|_{pr}^{*s} \end{aligned}$$

4.5.3 - PROPOSIÇÃO. Se $\mu(X) < \infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $1 \leq r \leq s \leq \infty$, então

$$L(q,r) \subset L(p,s)$$

e a imersão é contínua.

Demonstração. As proposições anteriores afirmam que $L(q,r) \subset L(q,\infty)$ e $L(p,1) \subset L(p,s)$. Vamos mostrar que $L(q,\infty) \subset L(p,1)$, mostrando que

a imensão de $L(q, \infty)$ em $L(p, 1)$ é contínua.

Seja f pertencente a $L(q, \infty)$. Então se $\mu(X) = 1$, temos (se $p < q$)

$$\begin{aligned} \|f\|_{p1}^* &= \int_0^1 t^{1/p} f^*(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 t^{1/p - 1/q} t^{1/q} f^*(t) \frac{dt}{t} \\ &\leq \left(\int_0^1 t^{1/p - 1/q - 1} dt \right) \|f\|_{q\infty}^* \\ &= \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{q\infty}^* \end{aligned}$$

4.6 - NORMAS SOBRE $L(p, q)$

Consideremos o funcional

$$\|f\|_{pq}^{**} \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 1 < p < \infty \\ & 1 \leq q \leq \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t), & 1 < p < \infty \\ & q = \infty \end{cases}$$

4.6.1 - PROPOSIÇÃO. O funcional $\|f\|_{pq}^{**}$ é uma norma em $L(p, q)$.

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 4.3.5.

4.6.2 - PROPOSIÇÃO. Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então os funcionais $\|\cdot\|_{pq}^*$ e $\|\cdot\|_{pq}^{**}$ são equivalentes, isto é:

$$\frac{1}{p'} \|f\|_{pq}^{**} \leq \|f\|_{pq}^* \leq \|f\|_{pq}^{**}$$

Demonstração. A segunda desigualdade segue imediatamente da desigualdade $f^* \leq f^{**}$. Para demonstrar a primeira façamos

$$F(t) = f^{**}(t)$$

na desigualdade de Hardy;

obtemos assim

$$\left[\int_0^\infty (f^{**}(t))^q t^{\frac{q}{p-1}} dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq \frac{pq}{pq-q} \left[\int_0^\infty (f^*(t))^q t^{\frac{q}{p-1}} dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

donde

$$\frac{1}{p'} \|f\|_{pq}^{**} \leq \|f\|_{pq}^*$$

se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

Agora se $q = \infty$, vamos ter

$$f^*(t) \leq \|f\|_{p\infty}^* t^{-1/p}$$

e então

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

$$\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|f\|_{p\infty}^* s^{-1/p} ds$$

$$= p' \|f\|_{p\infty}^* t^{-1/p}$$

donde, para todo $t > 0$,

$$f^{**}(t) t^{1/p} \leq p' \|f\|_{p^\infty}^*$$

e portanto

$$1/p' \|f\|_p^{**} \leq \|f\|_{p^\infty}^* .$$

4.6.3 - COROLÁRIO. Quando $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, os espaços $L(p,q)$ são normados.

Veremos, mais tarde, que quando $p = 1$ os espaços $L(p,q)$ não são espaços normados mas somente quase-normados.

Por outro lado, vimos então, que $\|f\|_{pq}^*$ e $\|f\|_{pq}^{**}$ geram a mesma topologia em $L(p,q)$ quando $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Passaremos, então, a escrever $\|f\|_{pq}$ para denotar qualquer um desses dois funcionais.

4.6.4 - PROPOSIÇÃO. Sejam $0 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Então os espaços $L(p,q)$ são completos.

Demonstração.

Suponhamos inicialmente que $q < \infty$. Como a imersão de $L(p,q)$ em $L(p,\infty)$ é contínua, toda sequência de Cauchy (f_n) em $L(p,q)$ é uma sequência de Cauchy em $L(p,\infty)$.

Por outro lado (ver [3])

$$\sup_{w>0} w \{m_f(w)\}^{1/2} = \sup_{t>0} f^*(t) t^{1/p} \leq \|f\|_{p^\infty}$$

Portanto se (f_m) é uma sequência de Cauchy em $L(p,q)$, vamos ter

$$\|f_n - f_m\|_{pq}^p \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$$

e então

$$\mu\{x \in X / |f_n(x) - f_m(x)| > w\} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$$

Ou seja, a sequência $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em medida, e portanto, converge em medida para uma função f .

Consequentemente, existe uma subsequência $(f_{n(i)})$ de (f_n) que converge em quase toda parte para a função f .

Agora, dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n(k)} - f_N\|_{pq} < \varepsilon$$

para K suficientemente grande.

Seja $g_K = f_{n(k)} - f_N$ e $g = f - f_N$;

logo

$$g_K \xrightarrow{K \rightarrow \infty} g \text{ quase sempre.}$$

Pela proposição 4.2.7 e para todo $t > 0$, vamos ter

$$g^*(t) \leq \liminf g_K^*(t)$$

e pelo lema de Fatou

$$\|g\|_{pq} \leq \lim \|g_k\|_{pq} = \lim \|f_{n_k} - f_N\|_{pq} \leq \epsilon$$

ou seja

$$\|f - f_N\|_{pq} \leq \epsilon$$

e portanto $L(p,q)$ é completo se $q < \infty$.

Suponhamos, agora, $p < \infty$, $q = \infty$.

Se (f_n) é uma sequência de Cauchy em $L(p,\infty)$, então é sequência de Cauchy em medida e conseqüentemente existe uma subsequência $(f_{n(k)})$ que converge para uma função mensurável f , em quase toda parte.

A convergência em quase toda parte implica na convergência em medida e portanto

$$W\{m_{f_{n(k)} - f}(w)\}^{1/p} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

ou seja

$$\|f_{n(k)} - f\|_{p^\infty} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

o resultado segue, agora, sem dificuldade.

4.7 - UM TEOREMA DE DENSIDADE

4.7.1 - PROPOSIÇÃO. Funções simples são densas em $L(p,q)$, $q \neq \infty$.

Demonstração:

Seja $f \in L(p,q)$, $p \neq \infty$. Podemos supor $f \geq 0$. Vamos mostrar que

dados $\varepsilon, \tau > 0$, existe uma função simples f_n tal que $0 \leq f_n \leq f$ e $(f-f_n)^*(t) \leq \varepsilon$ para todo $t \geq \tau$.

Observemos que

$$\mu\{x \in X / |f(x)| > \varepsilon\} < \infty$$

pois

$$f^*(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Logo, podemos achar uma função simples $f_n \geq 0$ tal que $f_n(x) = 0$, para x não pertencente ao conjunto

$$\{y / |f(y)| > \varepsilon\} \quad \text{e} \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

para todo ponto x do conjunto $\{y / |f(y)| > \varepsilon\}$, exceto num conjunto de medida menor do que τ .

Então

$$\mu\{x \in X / |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\} < \tau$$

Logo, para $t \geq \tau$

$$(f - f_n)^*(t) \leq \varepsilon$$

Temos, então, uma sequência (f_n) de funções simples tal que

$$(f - f_n)^*(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

e para todo $t > 0$

$$f_n^*(t) \leq f^*(t)$$

temos também,

$$(f-f_n)^*(t) \leq f^*(t_2) + f_n^*(t_2) \leq 2 f^*(t_2)$$

Finalmente, o teorema da convergência dominada implica que

$$\|f-f_n\|_{pq} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Como aplicação do teorema de densidade vamos demonstrar o seguinte interessante e útil resultado.

4.7.2 - PROPOSIÇÃO. Seja T um operador linear definido sobre funções características de conjuntos de medida finita com valores num espaço de Banach B tal que:

$$\|T\chi_E\| \leq K \|\chi_E\|_{p1}^*$$

Então, existe uma única extensão linear de T como aplicação contínua de $L(p,1)$ em B.

Demonstração. Suponhamos $f \geq 0$ uma função simples. Então $f = \sum f_n$, onde $f_n = c_n \chi_{A_n}$ e $f^* = \sum f_n^*$

Portanto

$$\begin{aligned} \|Tf\| &= \|T(\sum f_n)\| \leq \sum \|Tf_n\| \\ &\leq K \sum \|f_n\|_{p1}^* = K \|f\|_{p1}^* \end{aligned}$$

Logo, para funções simples à valores complexos temos:

$$\|Tf\| \leq K \|f\|_{p_1}^*.$$

Finalmente, como as funções simples são densas em $L(p,1)$ segue que T pode ser estendido continuamente, e de maneira única, de $L(p,1)$ em B .

4.8 - DUALIDADE

Paremos um estudo sucinto da dualidade dos espaços L^{pq} . Para um estudo completo ver Hunt [15] e Yoshinaga [10].

Inicialmente estabeleceremos a desigualdade de Hölder para espaços $L(p,q)$.

4.8.1 - PROPOSIÇÃO. Se $f \in L(p,q)$ e $g \in L(p',q')$ então

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{pq} \|g\|_{p'q'}$$

onde $1 < p < \infty$ $1 \leq q \leq \infty$ e $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

Demonstração. Suponhamos $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$.

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_X |fg| d\mu \\ &= \int_0^\infty (fg)^*(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt \\ &= \int_0^\infty f^*(t) t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} g^*(t) t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} dt \end{aligned}$$

$$\leq \|f\|_{pq} \|g\|_{p'q'}$$

Também,

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &\leq \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt \\ &\leq \|g\|_{p',\infty} \int_0^\infty t^{-1/p'} f^*(t) dt \\ &\leq \|g\|_{p',\infty} \|f\|_{p1} . \end{aligned}$$

4.8.2 - PROPOSIÇÃO. Se $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ então toda função g em $L(p',q')$ induz um funcional linear contínuo, F_g , sobre $L(p,q)$ da forma

$$F_g(f) = \int_X fg \, d\mu ,$$

para toda f em $L(p,q)$.

Isto é, $L(p',q')$ está contido no espaço dual de $L(p,q)$:

$$L(p',q') \subset (L(p,q))' .$$

Demonstração. Segue imediatamente da desigualdade de Hölder.

4.8.3 - PROPOSIÇÃO. Se F é um funcional linear contínuo sobre $L(p,1)$ então existe uma função g em $L(p',\infty)$ tal que

$$F(f) = \int_X fg \, d\mu , \text{ para toda } f \text{ em } L(p,1) .$$

Demonstração. Seja E um subconjunto de X tal que χ_E pertença a $L(p,1)$.

Façamos

$$\mu(E) = F(\chi_E)$$

Então, existe uma g integrável sobre conjuntos de medida finita tal que

$$\mu(E) = F(\chi_E) = \int_X \chi_E f \, d\mu$$

donde

$$\left| \int_X fg \, d\mu \right| \leq K \|f\|_{p,1}$$

para toda f em $L(p,1)$.

Tomando

$$f(x) = [\exp(-i \arg g(x))] \chi_E(x)$$

obtemos

$$\int_E |g| \, d\mu \leq K(\mu(E))^{1/p}$$

e

$$\begin{aligned} (1 / \mu(E)) \int_E |g| \, d\mu &\leq K(\mu(E))^{-1/p}, \\ &\leq K t^{-1/p}, \end{aligned}$$

para $t \leq \mu(E)$, onde $1/p + 1/p' = 1$ e portanto

$$g^{**}(t) \leq K t^{-1/p'}$$

para todo $t > 0$, e consequentemente

$$g \in L(p', \infty),$$

e a proposição esta demonstrada.

4.8.4 - PROPOSIÇÃO. Seja $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

Se F é um funcional linear contínuo sobre $L(p,q)$, então existe uma função g em $L(p',q')$ tal que

$$F(f) = \int_X fg \, d\mu,$$

para toda f em $L(p,q)$. Em outros termos

$$(L(p,q))' \subset L(p',q').$$

Demonstração. Como $L(p,1)$ esta continuamente imerso em $L(p,q)$, todo funcional linear contínuo em $L(p,q)$ é também um funcional linear contínuo em $L(p,1)$. Portanto existe uma g em $L(p',\infty)$ tal que

$$F(s) = \int_X sg \, d\mu$$

para toda função simples s . Logo

$$F(f) = \int_X fg \, d\mu$$

para toda função f em $L(p,q)$.

Por outro lado, a proposição (4.8.1) implica que g pertence a $L(p',q')$, o que conclui a demonstração.

As proposições anteriores nos dizem que o espaço dual de $L(p,1)$ é $L(p',\infty)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e que, o espaço dual de $L(p,q)$, $1 < p < \infty$,

$1 \leq q < \infty$, é $L(p', q')$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Passemos agora a estudar sucintamente a dualidade nos espaços $L(p, q)$ quando $0 < p < 1$, $0 < q < \infty$ e $L(1, q)$, $1 < q < \infty$.

4.8.5 - PROPOSIÇÃO. Se (i) $0 < p < 1$, $0 < q < \infty$ ou (ii) $p = 1$, $1 < q < \infty$ o espaço dual de $L(p, q)$ é trivial, isto é,

$$(L(p, q))' = \{0\}.$$

Demonstração. Suponhamos ℓ um funcional linear contínuo em $L(p, 1)$, $0 < p < 1$.

Nos assumimos $\mu(X) < \infty$. Desde que (X, μ) é σ -finito o seguinte argumento não resultará em nenhuma perda de generalidade. Temos

$$\begin{aligned} |\ell(\chi_E)| &\leq B \|\chi_E\|_{p, 1} \\ &= B [\mu(E)]^{1/p} \\ &\leq B [\mu(X)]^{1/p-1} \|\chi_E\|_{1, 1}^*. \end{aligned}$$

Assim, por (4.7.2), ℓ pode ser estendida para uma funcional linear contínuo de $L(1, 1) = L^1$. Então existe uma função $g \in L^\infty$ tal que $\ell(f) = \int_X f(x) g(x) d\mu$ para todo $f \in L^1$.

Também,

$$\left| \int_X f(x) g(x) d\mu(x) \right| \leq B \|f\|_{p, 1}^*$$

Logo

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |g(x)| d\mu(x) \leq B [\mu(E)]^{1/p-1}.$$

Demonstração. Suponhamos ℓ um funcional linear contínuo em $L(p,1)$, $0 < p < 1$.

Nos assumimos $\mu(X) < \infty$. Desde que (X,μ) é σ -finito o seguinte argumento não resultará em nenhuma perda de generalidade. Temos

$$\begin{aligned} |\ell(\chi_E)| &\leq B \|\chi_E\|_p \\ &= B[\mu(E)]^{1/p} \\ &\leq B[\mu(X)]^{1/p-1} \|\chi_E\|_{11}^* . \end{aligned}$$

Assim, por (4.7.2), ℓ pode ser estendida para uma funcional linear contínuo de $L(1,1) = L^1$. Então existe uma função $g \in L^\infty$ tal que $\ell(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu$ para todo $f \in L^1$.

Também,

$$\left| \int_X f(x) g(x) d\mu(x) \right| \leq B \|f\|_{p1}^*$$

Logo

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_X |g(x)| d\mu(x) \leq B[\mu(E)]^{1/p-1} .$$

No caso em que (X,μ) é não atômico isto implica que $g(x) = 0$ quase sempre, e assim $\ell \equiv 0$ em $L(p,1)$. Segue que o funcional trivial $\ell \equiv 0$ é o único funcional linear contínuo em $L(p,q)$, $0 < p < 1$, $0 < q < \infty$.

Se ℓ é um funcional linear contínuo em $L(1,q)$, $1 < q$, então ℓ é um funcional linear contínuo em $L(1,1) = L^1$. Desta forma exis

te uma função $g \in L^\infty$ tal que

$$\ell(f) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x)$$

para todo $f \in L(1,1)$ e

$$\left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| \leq B \|f\|_{1q}^* .$$

Se (X, μ) é não-atômico nós podemos usar isto para mostrar que $g = 0$ quase sempre, e assim, o funcional trivial $\ell \equiv 0$ é o único funcional linear contínuo em $L(1,q)$, $1 < q < \infty$.

Como consequência da proposição 4.8.5 vemos, usando o teorema de Hahn-Banach, que para $0 < p < 1$ e $0 < q < \infty$ ou $p = 1$ e $1 < q < \infty$ o espaço $L(p,q)$ não pode ser normado. Isto é, não existe uma norma em $L(p,q)$ equivalente a $\|\cdot\|_{pq}^*$.

ooo0ooo

CAPÍTULO V

INTERPOLAÇÃO EM ESPAÇOS DE LORENTZ

E O TEOREMA DE MARCINKIEWICZ

Neste capítulo iniciamos as aplicações da teoria desenvolvida anteriormente. O objetivo aqui será a caracterização dos espaços $(L^{pq}, L^{\bar{p}\bar{q}})_{\theta, r, K}$, para variados valores de $p, q, \bar{p}$ e $\bar{q}$, como espaços do tipo L^{rs} . A seguir utilizaremos estas caracterizações para demonstrar diversas versões do teorema clássico de interpolação de Marcinkiewicz.

5.1 - CÁLCULO DE $K(t, f)$ E CARACTERIZAÇÃO DE ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO ENTRE L^r e L^∞ :

O seguinte resultado devido a Peetre [9] é básico. Este resultado foi também obtido independentemente por Oklander [6].

5.1.1 PROPOSIÇÃO - Se $f \in L^1 + L^\infty$, então

$$K(t, f) = K(t, f; L^1, L^\infty) = \int_0^t f^*(s) ds$$

DEMONSTRAÇÃO - Vamos mostrar primeiramente que

$$K(t, f) \geq \int_0^t f^*(s) ds$$

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, $\mu(s) = t$ e χ_S a função característica de S , escrevemos $\chi_S f = \chi_{x_0} f_0 + \chi_{x_1} f_1$.

Então

$$\begin{aligned} \int_S \|f(x)\|_E dx &\leq \int \|\chi_S(x) f_0(x)\|_E dx + \int \|\chi_S(x) f_1(x)\|_E dx \\ &\leq \|f_0\|_1 + t \|f_1\|_\infty \end{aligned}$$

como isto se verifica para todo S com $\mu(s) = t$, temos

$$t \sup_{\mu(s)=t} \frac{1}{\mu(s)} \int_S \|f(x)\|_E dx \leq K(t, f)$$

e, portanto 4.3.4 nos fornece

$$\int_0^t f^*(s) ds \leq K(t, f)$$

Provaremos agora que

$$\int_0^t f^*(s) ds \geq K(t, f).$$

Omitindo o caso trivial $f^*(t) = \infty$, podemos assumir $f^*(t) < \infty$.

Então, se verifica que

$$\begin{aligned} \mu\{x/\|f(x)\|_E = f^*(t)\} &= m_f(f^*(t) - 0) - m_f(f^*(t)) \\ &\geq t - m_f(f^*(t)). \end{aligned}$$

Assim, podemos tomar um subconjunto mensurável

$$S_1 \subset \{x; \|f(x)\|_E = f^*(t)\}$$

com

$$\mu(S_1) = t - m_f(f^*(t)).$$

Logo, se

$$S = \{x/\|f(x)\|_E > f^*(t)\} \cup S_1$$

teremos que $\mu(S) = t$.

Definimos

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) - f^*(t) \frac{f(x)}{\|f(x)\|_E}, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

e

$$f_1(x) = f(x) - f_0(x)$$

com a convenção de que $\frac{0}{\|0\|_E} = 0$.

É de fácil verificação que

$$\|f_1\|_\infty \leq f^*(t) \text{ e } m_{f_0}(\lambda) = m_f(\lambda + f^*(t)).$$

Assim

$$f_0^*(s) = \begin{cases} f^*(s) - f^*(t), & 0 < s < t \\ 0 & t \leq s \end{cases}$$

e, também

$$\begin{aligned} \|f_0\|_1 &= \int_S \|f_0(x)\|_E dx \leq \int_0^t f_0^*(s) ds \\ &= \int_0^t f^*(x) dx - t f^*(t) \end{aligned}$$

donde

$$K(t, f) \leq \|f_0\|_1 + t \|f_1\|_\infty \leq \int_0^t f^*(s) ds$$

o que completa a prova.

Daremos a seguir um resultado devido a Krée [13], o qual ge
neraliza a proposição anterior, e que será fundamental no que se
gue.

5.1.2 PROPOSIÇÃO - Suponhamos que $f \in L^p + L^\infty$, $0 < p < \infty$. Então

$$5.1.2(1) \quad K(t, f; L^p, L^\infty) \sim \left(\int_0^{t^p} (f^*(s))^p ds \right)^{1/p}$$

DEMONSTRAÇÃO - Provaremos primeiro a parte " $\leq$ " de 5.1.2(1).

Consideremos

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) - f^*(t^p) f(x) / |f(x)| & \text{se } |f(x)| > f^*(t^p) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $f_1 = f - f_0$. Seja $E = \{x/f_0(x) \neq 0\}$.

Então $\mu(E) \leq t^p$, e temos, uma vez que $f^*(s)$ é constante em $[\mu(E), t^p]$,

$$\begin{aligned} K(t, f; L^p, L^\infty) &\leq \|f_0\|_p + t\|f_1\|_\infty \\ &= \left(\int_E (|f(x)| - f^*(t^p))^p d\mu \right)^{1/p} + t f^*(t^p) \\ &= \int_0^{\mu(E)} (f^*(s) - f^*(t^p))^p ds)^{1/p} + \left(\int_0^{t^p} (f^*(t^p))^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^{t^p} (f^*(s) - f^*(t^p))^p ds \right)^{1/p} + \left(\int_0^{t^p} (f^*(t^p))^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\int_0^{t^p} (f^*(s))^p ds \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

onde $C = 1$ se $p = 1$.

Provaremos, agora, a parte " $\geq$ ".

Assumimos que $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in L^p$, $f_1 \in L^\infty$.

Usando a desigualdade

$$m_f(\sigma_0 + \sigma_1) \leq m_{f_0}(\sigma_0) + m_{f_1}(\sigma_1)$$

temos:

$$f^*(s) \leq f_0^*((1-\varepsilon)s) + f_1^*(\varepsilon s), \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^t (f^*(s))^p ds \right)^{1/p} &\leq c \left\{ \left(\int_0^t (f_0^*((1-\varepsilon)s))^p ds \right)^{1/p} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_0^t (f_1^*(\varepsilon s))^p ds \right)^{1/p} \right\} \\
 &\leq c \left\{ \left(\int_0^\infty (f_0^*((1-\varepsilon)s))^p ds \right)^{1/p} + t f_1^*(0) \right\} \\
 &= c \{ (1-\varepsilon)^{-1/p} \|f_0\|_p + t \|f_1\|_\infty \}.
 \end{aligned}$$

Tomando-se o ínfimo com $\varepsilon \rightarrow 0$ 5.1.2(1) fica provado.

5.1.3 TEOREMA (FUNDAMENTAL). Se $0 < p < \infty$, $0 < r < q \leq \infty$ e $1/p = (1-\theta)/r$, $0 < \theta < 1$, então

$$(L^r, L^\infty)_{\theta, q} = L^{pq}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Usando 5.1.2(1), temos

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{(L^r, L^\infty)_{\theta, q}} &= \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f; L^r, L^\infty))^q dt/t \right)^{1/q} \\
 &\sim \left(\int_0^\infty (t^{-\theta r} \int_0^t (f^*(s))^r ds)^{q/r} dt/t \right)^{1/q} \\
 &= \left(\int_0^\infty (t^{-\theta r + r} \int_0^1 (f^*(st^r))^r s ds/s)^{q/r} dt/t \right)^{q_0/q}.
 \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Minkowski ($q/r > 1$), temos:

$$\begin{aligned} \|f\|_{(L^r, L^\infty)_{\theta, q}} &\leq e \int_0^1 (s^{q/r} \int_0^\infty t^{(1-\theta)q} (f^*(st^r))^q dt/t)^{r/q} ds/s \\ &\leq e \|f\|_{L^{pq}} \end{aligned}$$

desde que $1/p = (1-\theta)/r$.

Reciprocamente, por ser f^* não-negativa e não-crescente temos:

$$\begin{aligned} \|f\|_{(L^r, L^\infty)_{\theta, q}} &\geq e \left(\int_0^\infty (t^{-\theta r} t^r (f^*(t^r))^r)^{q/r} dt/t \right)^{1/q} \\ &\geq e \|f\|_{L^{pq}} . \end{aligned}$$

o que conclui a prova.

5.1.4 PROPOSIÇÃO - Suponhamos $0 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$ e $1/p = (1-\lambda)/p_0 + \lambda/p_1$ onde $0 < \lambda < 1$. Então, se $p_0 \neq p_1$,

$$(L^{p_0 q_0}, L^{p_1 q_1})_{\lambda, q} = L^{pq}$$

e

$$e_m \|a\|_{L^{pq}} \leq \|a\|_{(L^{p_0 q_0}, L^{p_1 q_1})_{\lambda, q}} \leq e^{-1} M \|a\|_{L^{pq}}$$

onde

$$m = \lambda \frac{-\min(1/q; 1/q_0)}{(1-\lambda)} \quad -\min(1/q; 1/q_1)$$

$$M = \lambda \frac{-\max(1/q; 1/q_0)}{(1-\lambda)} \quad -\max(1/q; 1/q_1)$$

DEMONSTRAÇÃO - Usando 5.1.3 e o teorema de reiteração, temos:

$$\begin{aligned} (L^{p_0 q_0}, L^{p_1 q_1})_{\lambda, q} &= ((L^r, L^\infty)_{\theta_0 q_0}, (L^r, L^\infty)_{\theta_1 q_1})_{\lambda, q} \\ &= (L^r, L^\infty)_{\theta, q} \\ &= L^{pq} \end{aligned}$$

onde $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$ e $\theta_i = 1 - \frac{r}{p_i}$ com $0 < r < \min\{p_i\}$; $i = 0, 1$.

5.1.5 COROLÁRIO - Se $p_0 = q_0$ e $p_1 = q_1$ então,

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\lambda, q} = L^{pq}$$

5.1.6 COROLÁRIO - Se $q_0 = q_1 = \infty$ e $0 < p_1 \leq \infty$, então

$$(L^{p_0 \infty}, L^{p_1 \infty})_{\lambda, q} = L^{pq}$$

5.1.7 COROLÁRIO - Se $q_0 = q_1 = 1$ então

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\lambda, q} = L^{pq}.$$

5.1.8 COROLÁRIO - Se $p_0 = p_1 = \infty$, $q_0 = q_1 = \infty$, então

$$(L^{1\infty}, L^{1\infty})_{\lambda, q} = L^{pq}$$

5.2 - O TEOREMA DE MARCINKIEWICZ CLÁSSICO.

Dizemos que um operador linear T , definido num subespaço denso de $L^p(X, \mu)$, com valores num espaço de funções mensuráveis definidas em um espaço de medida (Y, ν) , é de tipo fraco $(p, \bar{p})$, se existir $C > 0$ tal que

$$\lambda \cdot m_{Tf}(\lambda)^{1/\bar{p}} \leq C \|f\|_p$$

para todo $\lambda > 0$ e toda função simples em L^p .

O teorema clássico de Marcinkiewicz (Zygmund [2, 228]) é o seguinte:

5.2.1 TEOREMA - Seja T simultaneamente de tipo fraco $(p_0, \bar{p}_0)$ e $(p_1, \bar{p}_1)$ com $1 \leq p_1 \leq \bar{p}_1 \leq \infty$, $p_0 < p_1$, $\bar{p}_0 \neq \bar{p}_1$. Se $0 < \theta < 1$, e $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/\bar{p} = (1-\theta)/\bar{p}_0 + \theta/\bar{p}_1$ então T aplica L_p em $L_{\bar{p}}$ e

$$\|Tf\|_{\bar{p}} \leq \|f\|_p.$$

Agora como

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda m_{T_f}(\lambda)^{1/\bar{p}} = \|T_f\|_{L^{\bar{p}}_\infty}$$

podemos enunciar o teorema de Marcinkiewicz na seguinte forma.

5.2.2 TEOREMA - Seja T um operador linear tal que

$$T: L^{p_i} \rightarrow L^{\bar{p}_i^\infty} \text{ com norma } M_i, i = 0, 1,$$

então, se $\bar{p}_0 \neq \bar{p}_1$, $1/p = (1-\lambda)/p_0 + \lambda/p_1$, $1/\bar{p} = (1-\lambda)/\bar{p}_0 + \lambda/\bar{p}_1$,
 $0 < \lambda < 1$ e $0 < p \leq \bar{p} < \infty$

$$T: L_p \rightarrow L_{\bar{p}} \text{ com norma } M \text{ onde}$$

$$5.2.2(1) \quad M \leq C M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda \lambda^{-1/\bar{p}} (1-\lambda)^{-1/\bar{p}}$$

DEMONSTRAÇÃO - Pela proposição 1.4.1 temos que

$$T: (L^{p_0}, L^{p_1})_{\lambda p} \rightarrow (L^{\bar{p}_0^\infty}, L^{\bar{p}_1^\infty})_{\lambda p}$$

Usando o teorema fundamental 5.1.3 e o teorema de reiteração temos:

$$\begin{aligned} (L^{p_0}, L^{p_1})_{\lambda p} &= ((L^r, L^\infty)_{\theta, p_0}, (L^r, L^\infty)_{\theta, p_1})_{\lambda p} \\ &= (L^r, L^\infty)_{\theta, p} \\ &= L_p \end{aligned}$$

e

$$(L^{\bar{p}_0^\infty}, L^{\bar{p}_1^\infty})_{\lambda p} = L^{\bar{p}p}.$$

Como $p \leq \bar{p}$, temos

$$L^{\bar{p}p} \subset L^{\bar{p}}$$

e portanto

$$T: L^p \rightarrow L^{\bar{p}}$$

A estimada da norma 5.2.2(1) segue por aplicação sucessiva das estimadas dadas por 5.1.4, 1.4.2, 1.4.1 e novamente 5.1.4.

5.3 - A VERSÃO DE E. STEIN E G. WEISS DO TEOREMA DE MARCINKIEWICZ

5.3.1 DEFINIÇÃO - Diremos que um operador linear T é do tipo fraco restrito, $(p, \bar{p})$, se existir $c > 0$ tal que

$$\lambda_{m_T}(\lambda)^{1/\bar{p}} \leq c \|\chi_E\|_{L^p}$$

onde χ_E é a função característica de um conjunto E de medida finita.

5.3.2 TEOREMA - Se T é um operador do tipo fraco restrito (p_i, q_i) sendo $1 < p_i \leq q_i < \infty$ ($i=0,1$), $p_1 \neq p_0$, $q_1 \neq q_0$, e se

$$1/p = (1-\lambda)/p_0 + \lambda/p_1, \quad 1/q = (1-\lambda)/q_0 + \lambda/q_1$$

então

$$\|Tf\|_q \leq M\|f\|_p$$

Daremos, a seguir, uma proposição a qual nos permitirá enunciar o teorema anterior na versão de Calderón.

5.3.3 PROPOSIÇÃO - Se $1 \leq p \leq \bar{p} < \infty$, as seguintes condições são equivalentes:

5.3.3(1) T é um operador do tipo fraco restrito $(p, \bar{p})$

5.3.3(2) $T: L^{p_1} \rightarrow L^{\bar{p}_\infty}$

DEMONSTRAÇÃO. Admitamos 5.1.3(2). Então

$$\|Tf\|_{L^{\bar{p}_\infty}} \leq c\|f\|_{L^{p_1}}$$

para todo $f \in L^{p_1}$. Em particular e considerando que

$\|x_E\|_{p_1} = p\|x_E\|_p$ temos

$$\|Tx_E\|_{\bar{p}_\infty} \leq c\|x_E\|_p$$

ou seja T é do tipo fraco restrito $(p, \bar{p})$.

Admitamos, agora, 5.3.3(1)

Então

$$\|T(x)\|_{\bar{p}^\infty} \leq c \|x\|_p = K \|x\|_{p_1}$$

e vamos provar que

$$T: L^{p_1} \rightarrow L^{\bar{p}^\infty}$$

com

$$\|Tf\|_{\bar{p}^\infty} \leq K \|f\|_{p_1}$$

para toda f em L^{p_1} .

Seja f uma função simples integrável não-negativa e $f = \sum \lambda_n \chi_n$ onde $\lambda_n > 0$ e as χ_n são funções características de conjuntos tais que $\chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots \leq \chi_n$.

Então, temos

$$f^* = \sum \lambda_n \chi_n$$

o que implica que

$$\|f\|_{p_1} = \sum \lambda_n \|\chi_n\|_{p_1}.$$

Como T é linear, temos

$$|Tf| \leq \sum \lambda_n |T\chi_n|$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{\bar{p}^\infty} &\leq \sum \lambda_n \|T\chi_n\|_{\bar{p}^\infty} \\ &\leq C \sum \lambda_n \|\chi_n\|_{p_1} \\ &\leq C \|f\|_{p_1}\end{aligned}$$

Se f é uma função simples e integrável mas não é não-negativa nós tomamos $f = f_1 - f_2$ com f_1 e f_2 não-negativas e tal que $|f_1| = f_1 + f_2$. Então

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{\bar{p}^\infty} &\leq \|Tf_1\|_{\bar{p}^\infty} + \|Tf_2\|_{\bar{p}^\infty} \\ &\leq K(\|f_1\|_{p_1} + \|f_2\|_{p_1}) \\ &\leq K\|f\|_{p_1}\end{aligned}$$

Como funções simples são densas em L^{p_1} segue que

$$\|Tf\|_{\bar{p}^\infty} \leq K\|f\|_{p_1}$$

para toda f em L^{p_1} .

Com esta equivalência podemos agora, enunciar a versão de Calderón do teorema de Stein - Weiss.

5.3.4 TEOREMA - Seja T um operador linear tal que

$$T: L^{p_i^1} \rightarrow L^{q_i^\infty}$$

sendo $1 < p_i \leq q_i < \infty$ $i = 0, 1$, $p_1 \neq p_0$, $q_1 \neq q_0$, e se

$$1/p = (1-\lambda)/p_0 + \lambda/p_1, \quad 1/q = (1-\lambda)/q_0 + \lambda/q_1 \quad \text{então}$$

$$T: L^p \rightarrow L^q$$

DEMONSTRAÇÃO - Pela proposição 1.4.1 temos que

$$T: (L^{p_0^1}, L^{p_1^1})_{\lambda p} \rightarrow (L^{q_0^\infty}, L^{q_1^\infty})_{\lambda p}$$

mas pelo teorema fundamental 5.1.3

$$L^{p_0^1} = (L^r, L^\infty)_{\theta_0, 1} \quad \text{com} \quad \theta_0 = 1 - r/p_0$$

e

$$L^{p_1^1} = (L^r, L^\infty)_{\theta_1, 1} \quad \text{com} \quad \theta_1 = 1 - r/p_1.$$

Logo, usando o teorema de reiteração

$$\begin{aligned} (L^{p_0^1}, L^{p_1^1})_{\lambda p} &= ((L^r, L^\infty)_{\theta_0, 1}, (L^r, L^\infty)_{\theta_1, 1})_{\lambda p} \\ &= (L^r, L^\infty)_{\theta p} = L^p \end{aligned}$$

$$\text{onde } \theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1.$$

De maneira análoga provamos que

$$\begin{aligned}
 (L^{q_0^\infty}, L^{q_1^\infty})_{\lambda p} &= ((L^r, L^\infty)_{\theta_0^\infty}, (L^r, L^\infty)_{\theta_1^\infty})_{\lambda p} \\
 &= (L^r, L^\infty)_{\theta p} \\
 &= L^{qp} \subset L^q
 \end{aligned}$$

onde $\theta = (1-\lambda)\lambda_0 + \lambda\theta_1$.

Daremos, para concluir o capítulo, o teorema geral de Marcinkiewicz dado por Calderón.

5.3.5 TEOREMA - Seja T um operador linear tal que

$$T: L^{p_i r_i} \rightarrow L^{q_i s_i}$$

com norma M_i , $i = 0, 1$ então, se $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$, $1/p = (1-\lambda)/p_0 + \lambda/p_1$, $1/q = (1-\lambda)/q_0 + \lambda/q_1$, $0 < \lambda < 1$, $0 < r \leq s \leq \infty$

$$T: L^{pr} \rightarrow L^{qs}$$

com norma M.

e

$$M \leq C(\lambda) M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda$$

onde $C(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow 0$ ou $\lambda \rightarrow 1$.

DEMONSTRAÇÃO - Segue de forma análoga à do teorema 5.2.2.

CAPÍTULO VI

UMA APLICAÇÃO ÀS INTEGRAIS SINGULARES

Neste capítulo faremos uma aplicação não trivial do teorema de Marcinkiewicz às integrais singulares. O ponto crucial da aplicação será mostrar que um operador integral singular Kf é de tipo fraco $(1,1)$. Para isto precisaremos de um lema de recobrimento e da "decomposição de Calderón - Zygmund".

6.1 - UM LEMA DE RECOBRIMENTO E A DECOMPOSIÇÃO DE CALDERÓN - ZYGMUND

6.1.1 LEMA (de recobrimento) - Sejam $\alpha > 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$. Então existe uma sequência de cubos (Q_j) , com interiores desjuntos tal que

$$i) \quad f(x) \leq \alpha \text{ se } x \notin \bigcup_j Q_j$$

$$ii) \quad \alpha < \frac{1}{m(Q_K)} \int_{Q_K} f(x) dx \leq 2^n \alpha$$

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos uma decomposição do $\mathbb{R}^n$ em cubos (Q_j^1) de arestas paralelas aos eixos com diâmetros suficientemente grandes para que

$$\frac{1}{m(Q_j^1)} \int_{Q_j^1} f(x) dx \leq \alpha$$

Bisseccionando as arestas obtemos uma nova sequência (Q_j^2) de

cubos. Existem duas possibilidades:

$$1^a) \quad \frac{1}{m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} f(x) dx \leq \alpha$$

$$2^a) \quad \alpha < \frac{1}{m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} f(x) dx$$

No segundo caso vamos ter:

$$\begin{aligned} \alpha &< \frac{1}{m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} f(x) dx \\ &= \frac{2^n}{2^n m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} f(x) dx \\ &\leq 2^n \frac{1}{m(Q_j^1)} \int_{Q_j^1} f(x) dx \leq 2^n \alpha \end{aligned}$$

Se Q_j^2 estiver no primeiro caso, repetimos o processo sobre esses Q_j^2 e obtemos uma sequência (Q_j^3) . Novamente existirão duas possibilidades. Os Q_j^3 que estão no segundo caso serão incorporados na sequência (Q_j) , aumentando-a. Os Q_j^3 do primeiro caso serão subdivididos e teremos uma nova sequência (Q_j^4) , etc.

Repetindo o processo, obtemos a sequência final (Q_j) . Agora, se $x \notin \bigcup_j Q_j$ então existirá uma sequência de cubos $(\tilde{Q}_K)$ tal que $x \in \tilde{Q}_K$ para todo K e $m(\tilde{Q}_K) \rightarrow 0$ quando $K \rightarrow \infty$. Logo, pelo teorema de Lebesgue,

$$f(x) = \lim_{\tilde{Q}_K} \frac{1}{m(\tilde{Q}_K)} \int_{\tilde{Q}_K} f(y) dy \leq \alpha$$

6.1.2 - A decomposição de Calderón - Zygmund.

Consideremos o recobrimento pelos cubos (Q_j) construídos no Lema anterior. Agora se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$m_{Q_K}(f) = \frac{1}{m(Q_K)} \int_{Q_K} f(y) dy$$

então f pode ser decomposta como uma soma de duas funções f_1 e f_2 com

$$f_1 = \sum_K (f - m_{Q_K}(f)) \chi_{Q_K}$$

e

$$f_2 = f - f_1$$

6.2 - UMA APLICAÇÃO ÀS INTEGRAIS SINGULARES

6.2.1 TEOREMA - Seja $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que exista $C > 0$ com

$$\int_{S(y)} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C$$

onde $S(y) = \{x / |x| \geq 2|y|\}$

Para cada $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definimos $K\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\gamma(y) dy$ supondo que

$$\|K\gamma\|_{L^2} \leq C\|\gamma\|_{L^2}$$

Então, para todo $\lambda > 0$

$$\lambda m\{x / |Kf(x)| \geq \lambda\} \leq C \|f\|_1$$

isto é, K é um operador do tipo fraco $(1,1)$.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos supor $f \geq 0$ (senão tomamos $f = f^+ - f^-$).

Consideremos a decomposição de Calderón - Zygmund, ou seja

$$f = u + v \quad \text{onde}$$

$$v = \sum_j (f - m_{Q_j}(f)) \chi_{Q_j}$$

$$u = \sum_j m_{Q_j}(f) \chi_{Q_j} + f \chi_{\cap Q_j^c}$$

onde

$$m_{Q_j}(f) = \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) dx$$

Portanto

$$v(x) = 0 \quad \text{se } x \notin \cup Q_j \quad \text{e}$$

$$\int_{Q_j} v(x) dx = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots$$

Agora, como $|f(x)| \leq \lambda$ se $x \in \cap Q_j^c$ e como $\lambda \leq m_{Q_j}(f) \leq 2^n \lambda$, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x) dx = \int_{\cap Q_j^c} f^2(x) dx + \sum_j \int_{Q_j} \left(\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(y) dy \right)^2 dx$$

$$\leq \lambda \|f\|_1 + 4^n \lambda^2 m\left(\bigcup_j Q_j\right)$$

Mas, como $\lambda m(Q_j) \leq \int_{Q_j} f(x) dx$ segue que

$$m\left(\bigcup_j Q_j\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \|f\|_1$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x) dx \leq \lambda(1+4^n) \|f\|_1$$

Teremos que $Kf = Ku + Kv$ donde

$$m\{x/|Kf(x)| \geq \lambda\} \leq m\{x/|Ku(x)| \geq \lambda/2\}$$

$$+ m\{x/|Kv(x)| \geq \lambda/2\}$$

Mas

$$\begin{aligned} 6.2.1(1) \quad m\{x/|Ku(x)| \geq \lambda/2\} &\leq \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^n} |Ku|^2 dx \\ &\leq \frac{4C}{\lambda^2} \|u\|_2^2 \\ &\leq \frac{4C'}{\lambda} \|f\|_1 \end{aligned}$$

Resta avaliar o segundo termo.

Sabemos que

$$\begin{aligned} m\{x/|Kv(x)| \geq \lambda/2\} &\leq m\{x/|Kv(x)| \geq \lambda/2\} \cap \{U2Q_j\} \\ &+ m\{\{x/|Kv(x)| \geq \lambda/2\} \cap \{U(2Q_j)^c\}\} \end{aligned}$$

e como $\lambda m(\bigcup_j Q_j) \leq \|f\|_1$ teremos

$$\begin{aligned} 6.2.1(2) \quad m\{\{x/|Kv(x)| \geq \lambda/2\} \cap \{U2Q_j\}\} &\leq m(\bigcup_j 2Q_j) \\ &\leq C m(\bigcup_j Q_j) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 \end{aligned}$$

Por hipótese temos que

$$\int_{S(y)} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C$$

e como $v(x) = 0$ se $x \notin \bigcup_j Q_j$ e

$$\int_{Q_j} v(x) dx = 0, \text{ teremos}$$

$$\begin{aligned} \int_{\cap(2Q_j)^c} |Kv(x)| dx &= \int_{\cap(2Q_j)^c} \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) v(y) dy \right| dx \\ &= \int_{\cap(2Q_j)^c} \left| \int_{\bigcup_j Q_j} K(x-y) v(y) dy \right| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\cap(2Q_j)^c} \left| \sum \int_{Q_j} K(x-y) v(y) dy \right| dx \\
 &\leq \sum_j \int_{\cap(2Q_j)^c} \left| \int_{Q_j} K(x-y) v(y) dy \right| dx \\
 &= \sum_j \int_{\cap(2Q_j)^c} \left| \int_{Q_j} K(x-y) v(y) dy - \int_{Q_j} K(x-y_j) v(y) dy \right| dx \\
 &= \sum_j \int_{\cap(2Q_j)^c} \left| \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-y_j)] v(y) dy \right| dx \\
 &\leq \sum_j \int_{Q_j} |v(y)| \int_{\cap(2Q_j)^c} |K(x-y) - K(x-y_j)| dx dy \\
 &= \sum_j \int_{Q_j} |v(y)| \int_{\cap(2Q_j)^c} |K((x-y_j)-(y-y_j)) - K(x-y_j)| dx dy
 \end{aligned}$$

Como $y \in Q_j$ e $x \in \cap(2Q_j)^c$ vamos ter $|x-y_j| \geq 2|y-y_j|$ (y_j é o centro de Q_j).

Logo, aplicando a hipótese

$$\int_{(2Q_j)^c} |K(v(x))| dx \leq e \sum_j \int_{Q_j} |v(y)| dy \leq e \|f\|_1$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 6.2.1(3) \quad m\{x/|K(v(x))| \geq \lambda/2\} \cap (\cap(2Q_j)^c) \} \\
 \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\cap(2Q_j)^c} |K(v(x))| dx \\
 \leq \frac{2c}{\lambda} \|f\|_1
 \end{aligned}$$

Finalmente, de 6.2.1(1), 6.2.1(2) e 6.2.1(3) teremos:

$$\lambda m\{x/|Kf(x)| > \lambda\} \leq c \|f\|_1.$$

6.2.2 TEOREMA - Seja $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que exista $c > 0$ com

$$\int_{S(y)} |K(x-y) - K(x)| dx \leq c$$

onde $S(y) = \{x / |x| \geq 2|y|\}$.

Consideremos, para cada $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$K\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\gamma(y) dy$$

e suponhamos que

$$\|K\gamma\|_2 \leq c \|\gamma\|_2.$$

Então, para todo p , $1 < p < \infty$, teremos

$$\|K\gamma\|_p \leq C\|\gamma\|_p$$

DEMONSTRAÇÃO - As hipóteses valem se tomarmos funções simples e não $\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty$. Portanto K é do tipo fraco $(1,1)$ e do tipo fraco $(2,2)$. Logo, pelo teorema de Marcinkiewicz (5.2.1) segue que K é um operador de L^p em L^p para $1 < p < 2$.

Agora, se $p \geq 2$ temos

$$\|Kf\|_p = \sup_{\substack{\|g\|_{p'}=1 \\ g \in \mathcal{C}_c^\infty}} \int K(f(x))g(x)dx$$

$$= \sup_{\substack{\|g\|_{p'}=1 \\ g \in \mathcal{C}_c^\infty}} \int f(y)Kg(y)dy$$

$$\leq \sup_{\substack{\|g\|_{p'}=1 \\ g \in \mathcal{C}_c^\infty}} \|f\|_p \|Kg\|_{p'} \leq \sup_{\substack{\|g\|_{p'}=1 \\ g \in \mathcal{C}_c^\infty}} C\|f\|_p \|g\|_{p'}$$

$$= C\|f\|_p$$

---x---

CAPÍTULO VII

INTERPOLAÇÃO ENTRE H^1 e C_w

Nos capítulos anteriores os espaços de Lorentz L^{pq} foram usados para caracterizar espaços de interpolação entre os espaços L^r e L^∞ . Neste último capítulo vamos voltar a usá-los para caracterizar o espaço de interpolação entre o espaço H^1 de Hardy, e o espaço C_w das funções contínuas que tendem a zero no infinito.

7.1 - OS ESPAÇOS H^1 E ALGUMAS PROPRIEDADES ESPECIAIS.

Seja R_j a j -ésima transformada de Riesz, isto é:

$$R_j(f)(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \frac{y_j}{|y|^{n+1}} dy.$$

Consideremos H^1 o subespaço de L^1 definido pela norma

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^n \|R_j f\|_{L^1}.$$

7.1.1 DEFINIÇÃO - Seja I um cubo de $\mathbb{R}^n$ e r um número positivo, definimos

$$M_r(f)(x) = \sup_{x \in I} \left(\frac{1}{|I|} \int_0^t |f|_{ds}^r \right)^{1/r}$$

$$f_r(t) = \left(\frac{1}{t} \int_0^t [M_r(f)^*(s)]^r ds \right)^{1/r}.$$

7.1.2 PROPOSIÇÃO - Se o suporte de f esta no cubo I e

$$\frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt = 0,$$

então, para $1 < r < \infty$,

$$\|f\|_{H^1} \leq c \cdot |I|^{1-1/r} \|f\|_r.$$

DEMONSTRAÇÃO - Claramente

$$\|f\|_{L^1} \leq |I|^{1-1/r} \|f\|_r$$

Se denotarmos por $2I$ a dilatação simétrica de I , e por $\bar{y}$ o centro de I , teremos

$$\begin{aligned} \int_{2I} |R_j f| &\leq |I|^{1-1/r} \left(\int_{2I} |R_j f|^r \right)^{1/r} \\ &\leq c |I|^{1-1/r} \left(\int_I |f|^r \right)^{1/r} \end{aligned}$$

e

$$\int_{(2I)^c} |R_i f| \leq \int_{(2I)^c} \int_I |f(y)| \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j - \bar{y}_j}{|x-\bar{y}|^{n+1}} \right| dy dx$$

$$= \int_I |f(y)| \int_{(2I)^c} \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j - \bar{y}_j}{|x-\bar{y}|^{n+1}} \right| dx dy$$

$$\leq c \|f\|_{L^1} \leq c |I|^{1-\frac{1}{r}} \|f\|_r$$

também

$$\|R_j f\|_1 \leq c |I|^{1-\frac{1}{r}} \|f\|_r.$$

7.2 - CARACTERIZAÇÃO DE $(H^1, C_w)_{\theta, q}$

Por C_w denotamos o conjunto das funções contínuas que ten
dem a zero no infinito munido da norma

$$\|f\|_{C_w} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

7.2.1 PROPOSIÇÃO - Se o suporte de f esta no cubo I , $1 < r < \infty$

e

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^r \right)^{\frac{1}{r}} = a.$$

Então

$$K(t, f; H^1, C_w) \leq c a(t + |I|).$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja ϕ contínua, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ em $\bar{I}$ e nula fora de $2I$. Escrevemos, para um b conveniente,

$$f = f - b\phi + b\phi$$

onde

$$\int (f - b\phi) dx = 0, \quad |b| \leq a.$$

Então

$$K(t, f) \leq \|f - b\phi\|_{H^1} + t \|b\phi\|_{C_w}$$

$$\leq Ca(t + |I|)$$

7.2.2 TEOREMA - $(H^1, C_w)_{\theta, q} = L^{pq}$, onde $0 < q \leq \infty$, $p = 1/(1-\theta)$.

DEMONSTRAÇÃO - Claramente

$$(H^1, C_w)_{\theta, q} \subset (L^1, L^\infty)_{\theta, q} = L^{pq}$$

Mostraremos agora que para $f \in C_w$

$$\|f\|_{(H^1, C_w)_{\theta, q}} \leq C \|f\|_{pq}.$$

Vamos escolher $t > 0$, $1 < r < p$. Utilizando a decomposição de Calderón - Zygmund de $\mathbb{R}^n$ teremos uma sequência de cubos $\{I_j\}$ com interiores disjuntos tal que

$$f_r(t) < \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f|^r \right)^{1/r} \leq 2^n f_r(t)$$

e $|f(x)| \leq f_r(t)$ para quase todo $x \notin \cup I_j$.

Sejam

$$a_j(f) = \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f$$

e

$$f^t = \sum_j (f - a_j(f)) \chi_{I_j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f^t\|_{H^1} &\leq c \sum |I_j|^{1-1/r} \|(f - a_j(f)) \chi_{I_j}\|_{L^r} \\ &\leq c \sum f_r^{1-r}(t) \|f \chi_{I_j}\|_r^{r-1} \|f \chi_{I_j}\|_r \\ &= c f_r^{1-r}(t) \int_{\cup I_j} |f|^r \end{aligned}$$

Sejam $E = \{x / M_r(f) > f_r(t)\}$.

e $E^* = \{x / M_r(f) > M_r(f)^*(t)\}$.

É claro que

$$\cup I_j \subset E \subset E^*$$

e

$$\begin{aligned} \|f^t\|_{H^1} &\leq C f_r^{1-r}(t) \int_{E^*} M_r^r(f) dx \\ &\leq C \cdot f_r^{1-r}(t) \int_0^t [M_r(f)^*(s)] ds \\ &\leq C \cdot t f_r(t) \end{aligned}$$

Claramente $\|f-f^t\|_\infty \leq C f_r(t)$. O suporte de $f-f^t$ está contido em algum cubo I . Existe $\epsilon > 0$ tal que se $|E| < \epsilon$,

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I |f \chi_E|^r\right)^{1/r} < t f_r(t)/(t+|I|).$$

Escrevemos agora $f-f^t = g+h$, onde $g \in C_w$, $|g| \leq C f_r(t)$, e a medida do suporte de h é menor do que ϵ .

Pela proposição 7.1.3

$$K(t, h; H^1, C_w) < C t f_r(t)$$

Podemos escrever

$$f = f^t + g + h$$

Logo

$$\begin{aligned} K(t, f) &\leq K(t, f^t + g) + K(t, h) \\ &\leq \|f^t\|_{H^1} + t\|g\|_{\mathcal{C}_w} + \mathcal{O}_t f_r(t) \\ &\leq \mathcal{O}_t f_r(t) \end{aligned}$$

Desta forma temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{\theta, q} &= \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f))^q dt/t \right)^{1/q} \\ &\leq \mathcal{C} \left(\int_0^\infty t^{q/p} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (M_r(f)^*(s))^r ds \right)^{q/r} dt/t \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hardy temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{\theta, q} &\leq \mathcal{C} \left(\int_0^\infty t^{q/p} (M_r(f)^*(t))^q dt/t \right)^{1/q} \\ &= \mathcal{C} \|M_r(f)\|_{pq} \leq \mathcal{C} \|f\|_{pq} . \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}_w$ é denso em L^{pq} , $q < \infty$, o teorema está provado para $q < \infty$.

Para $q = \infty$ tomamos $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$.

Temos

$$L^{p_i} = (H, \mathcal{C}_w)_{\theta_i, p_i},$$

com $p_i = 1/(1-\theta_i)$.

Logo, usando o teorema de reiteração

$$(H^1, \mathcal{C}_w)_{\theta, \infty} = (L^{p_0}, L^{p_1})_{\lambda, \infty}$$

onde $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$. Mas

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\lambda, \infty} = L^{p_\infty}$$

com $1/p = (1-\lambda)/p_0 + \lambda/p_1 = 1-\theta$. E o teorema está provado.

Usando o teorema de reiteração e o teorema anterior, temos o seguinte teorema.

$$7.2.3 \text{ TEOREMA - } (H^1, (L^{p_1 q_1})_{\theta q})_{\theta q} = L^{pq}$$

onde

$$1/p = 1-\theta + \theta/p_1.$$

ooo0ooo

B I B L I O G R A F I A

- [1] A.P. Calderón.
Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz.
Studia Math. 26(1966), 273-299.
- [2] A. Zygmund.
On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of
operations. J Math. Pures Appl. 35(1956), 223-248.
- [3] D.L. Fernandez.
Os Espaços de Lorentz e Aplicações. UNICAMP, 1972.
- [4] D.L. Fernandez.
Interpolation Spaces.
Lecture Notes, Genova - 1977.
- [5] E.M. Stein - G. Weiss.
An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its
applications.
J. Math. Mech. 8(1959), 263-284.
- [6] E.T. Oklander.
Interpolacion, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz.
Cursos y seminarios de matematica, Universidad de Buenos Aires,
1964.
- [7] G.O. Okikiolu.
Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in
 L^p -Spaces. Acad. Press, London, 1971.
- [8] J. Bergh and J. Löfström.
Interpolation Spaces.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,
New York, 1976.

- [9] J. Peetre.
A theory of interpolation of normed spaces.
Notas de Matemática. IMPA. 39(1968), 1-86.
- [10] K. Yoshinaga.
Lorentz spaces and the Calderón - Zygmund theorem. Bull.
Kyushu Inst. Tech. Math. Natur. Sci 18(1969), 1-38.
- [11] M.M. Day.
The spaces L^p with $0 < p < 1$.
Bull. Amer. Math. Soc, 46(1940), 816-823.
- [12] N.M. Riviere and Y. Sagher.
Interpolation Between L^∞ and H^1 , The Real Method.
Journal of Functional Analysis. Vol. 14, n° 4, December
1973.
- [13] P. Krée.
Interpolation d'espaces qui ne sont ni normés, ni
complets. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 17,2(1967), 137-174.
- [14] P.L. Butzer and H. Berens.
Semi-Groups of Operators and Approximation.
Springer-Verlag, New York Inc., 1967.
- [15] R.A. Hunt.
On $L(p,q)$ Spaces.
L'Enseignement Math. 12(1966), 249-276.
- [16] T. Holmstedt.
Interpolation of quasi-normed spaces.
Math. Scand. 26(1970), 177-199.