FUNÇÕES LORCH-HOLOMORFAS E DOMÍNIOS DE LORCH-HOLOMORFIA

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr.
Waldir Quandt,
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 11 de julho de 1989

Prof. Dr. Mário Cº Matos
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

FUNÇÕES LORCH-HOLOMORFAS
E DOMÍNIOS DE LORCH-HOLOMORFIA

WALDIR QUANDT

Este trabalho é dedicado a

RONALD EDUARD KYRMSE,

que despertou meu interesse

pela Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, Prof. Dr. Mário C. Matos, por sua orientação, pela sua paciência, e por sua fé, uma vez que, durante algum tempo, creio ter sido ele o único a acreditar que este trabalho viesse a ser concluído.

Meus agradecimentos a todos que, de uma forma ou outra, me auxiliaram, especialmente meus amigos de Campinas que contribuíram para amenizar minhas inúmeras viagens à UNICAMP; entre eles merecem especial destaque Ary O. Chiacchio e Plinio Stange.

Agradeço aos meus colegas da Universidade Federal de Santa Catarina pelo apoio e incentivo, e à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante parte do tempo.

Finalmente, agradeço especialmente à minha esposa Joana, pelo incentivo e por ter suportado o desânimo e a irritação.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Embora a Análise Complexa em espaços vetoriais de dimensão infinita tenha sido objeto de intensa pesquisa (ver, p. ex., [4] e [10]), o mesmo não ocorreu com a Análise Complexa especificamente em álgebras de Banach, ao menos nos aspectos tratados neste trabalho, embora quase meio século tenha decorrido desde o trabalho de Lorch ([9]).

Tratamos aqui de uma certa classe de funções holomorfas (ou analíticas) com domínio em um subconjunto aberto de uma álgebra de Banach A (comutativa e com elemento neutro e tal que $\|e\|=1$), e com valores em A. Essencialmente, a idéia é usar o fato de que existe um produto em A, e considerar as funções holomorfas para as quais os polinômios da expansão em série de potências são da forma particular $x \longrightarrow a_n x^n$. Essa semelhança com o caso $A=\mathbb{C}$ sugere que estas funções possuam propriedades semelhantes às das funções holomorfas em abertos de $\mathbb{C}$; por outro lado, como A é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão infinita, parece razoável que haja alguma semelhança com as situações encontradas na Análise Complexa em espaços de Banach. De fato, no presente caso se encontram semelhanças e dissemelhanças tanto com os resultados conhecidos para dimensão finita (p. ex., no que diz respeito à coincidência de topologias no espaço de funções) quanto com os resultados de dimensão infinita (p. ex. no que diz respeito a domínios de holomorfia). Da mesma forma que se passa do caso de dimensão finita para o de dimensão infinita na Análise Complexa "clássica" (i. e., de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{C}^n$ e daí para espaços de dimensão infinita sobre $\mathbb{C}$), ampliamos nosso estudo para funções com domínio em um A-módulo em com contradomínio também em um A-módulo. Novamente se percebe que os resultados se constituem numa espécie de meio-termo entre os resultados válidos para dimensão finita e aqueles válidos para funções entre espaços de Banach.

No Cap. I estabelecemos as definições e propriedades básicas das funções Lorch-holomorfas, utilizando os resultados conhecidos de holomorfia em espaços de Banach (a referência principal para este capítulo é [10]).

No Cap. II estudamos as topologias "naturais" nos espaços de funções Lorch-holomorfas. Em particular, mostramos que se o domínio é um aberto em A^n, as topologias τ_0 e τ_ω coincidem no espaço de funções Lorch-holomorfas, ao contrário do que ocorre em geral.

No Cap. III tratamos das funções Lorch-holomorfas com domínio em variedades de Riemann modeladas sobre A^n; essencialmente, se trata de transpor certas propriedades (especialmente aquelas vistas no Cap. II) para este contexto.

Como no caso geral de funções holomorfas, uma questão que surge naturalmente é a extensão de funções Lorch-holomorfas. Os conceitos de domínio de Lorch-holomorfia e domínio de Lorch-existência estabelecidos no Cap. IV são inteiramente análogos àqueles considerados para funções entre espaços de Banach, como seria de se esperar, mas os resultados obtidos são bastante diversos. Sabemos que num espaço de Banach todo subconjunto aberto convexo é um domínio de holomorfia; no entanto, em geral nem mesmo as bolas abertas em A são domínios de Lorch-holomorfia. É interessante notar que ao longo do Cap. IV uma ferramenta extremamente útil é o raio espectral μ; em contrapartida, algumas técnicas usuais no caso de espaços de Banach não se aplicam (p. ex., teorema de Hahn-Banach e argumentos que envolvem tomar potências de funções). De fato, os resultados conseguidos são válidos no caso em que a topologia da norma em A coincide com a induzida por μ. Algumas idéias neste capítulo são devidas a M. I. Arratia, que desenvolveu alguns resultados num manuscrito não publicado durante sua permanência na Unicamp (1980-1983); infelizmente algumas demonstrações continham falhas que comprometiam os resultados.

Finalmente, no Cap. V se trata da construção da envoltória de Lorch-holomorfia para um aberto em A^n, seguindo a construção de Alexander ([1]). A utilização da topologia τ_b ao invés de τ_0 nos permite aplicar um argumento de espaços de Fréchet para concluir que a aplicação de extensão é um isomorfismo topológico.

Claramente muitas questões permaneceram sem resposta; entre elas podemos mencionar duas: vale um teorema do tipo Hartogs, i. e., uma função com domínio em A^n e Lorch-holomorfa em cada variável é necessariamente Lorch-holomorfa? O espaço de funções Lorch-holomorfas em um aberto de A^n (ou de um A-módulo M), munido da topologia τ_0, é tonelado? Esperamos que estas e outras questões sejam investigadas (e respondidas) num futuro próximo.

NOTAÇÃO E OBSERVAÇÕES PRELIMINARES

Neste trabalho A denotará sempre uma álgebra de Banach comutativa, com unidade e tal que $\|e\|=1$, e U será sempre um conjunto aberto não vazio. Em A^n usaremos a norma $\|(a_1,a_2,\ldots,a_n)\| = \max\{\|a_j\|;\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.

Denotaremos por $\mathbf{0}$ o elemento neutro para a adição em A ou em algum A-módulo. $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos números naturais, e $\mathbb{N}_+$ o subconjunto $\mathbb{N}-\{0\}$.

Se $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in\mathbb{N}^n$ e $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in A^n$, usaremos as notações usuais $|s|=\sum_{j=1}^{n} s_j$ e $a^s=a_1^{s_1}a_2^{s_2}\ldots a_n^{s_n}$.

Se $x\in U$, $d_U(x)$ indicará a distância de x à fronteira de U; se $B\subset U$, $d_U(B)$ indicará analogamente a distância de B à fronteira de U.

Lembremos que se E,F são espaços de Banach complexos e $f:U\subset E\longrightarrow F$ é uma função, f é holomorfa em $x_0\in U$ se existem $r>0$ e uma seqüência de polinômios $P_m\in P(^mE;F)$ tais que $f(y)= \sum_{m\in\mathbb{N}} P_m(y-x_0)$ uniformemente para $y\in B(x_0;r)$. Se f é holomorfa em cada ponto de U diz-se que é holomorfa em U, e se denota por $\mathcal{H}(U;F)$ o espaço vetorial complexo das funções holomorfas em U com valores em F. Se $F=\mathbb{C}$, é usada a notação $\mathcal{H}(U)$.

CAPÍTULO I

FUNÇÕES LORCH-HOLOMORFAS

Sejam M e N A-módulos normados completos tais que $\forall\ a \in A$ e $\forall\ x \in M \cup N$ se tenha $\|ax\| \leq \|a\|\,\|x\|$.

<u>Definição I.1</u>- Sejam $U \subset A$, $x_0 \in U$ e $f: U \longrightarrow A$ uma função. Diz-se que f é <u>Lorch-holomorfa</u> (abreviadamente, <u>L-holomorfa</u>) em x_0 se f é holomorfa em x_0 e $\dfrac{\hat{d}^n f(x_0)}{n!} \in A$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, no sentido de que existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ satisfazendo $\dfrac{\hat{d}^n f(x_0)(y)}{n!} = a_n y^n$ $\forall\ y \in A$. Diz-se que f é L-holomorfa em U se o for em cada ponto de U.

Denotaremos por $\mathcal{H}_L(U)$ o subespaço de $\mathcal{H}(U;A)$ das aplicações L-holomorfas em U.

Dois exemplos de aplicações L-holomorfas surgem de maneira natural: $f: G = \{x \in A;\ x \text{ é inversível}\} \longrightarrow A$ definida por $f(x) = x^{-1}$ (ver, p. ex., [8], cor. 1.4.3), e a aplicação $\exp: A \longrightarrow A$ definida por $\exp(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \dfrac{x^k}{k!}$. No primeiro caso, $f \in \mathcal{H}_L(G)$, e no segundo $\exp \in \mathcal{H}_L(A)$.

Notemos que se f é L-holomorfa em $x_0 \in U$ e se $a_n \in A$ é tal que $\dfrac{\hat{d}^n f(x_0)(y)}{n!} = a_n y^n$ $\forall\ y \in A$, então $\left\|\dfrac{\hat{d}^n f(x_0)}{n!}\right\| = \left\|\dfrac{\hat{d}^n f(x_0)(e)}{n!}\right\| = \|a_n\|$. Além disso, como todo polinômio A-n-homogêneo $P: A \longrightarrow A$ (i.e., tal que $P(ax) = a^n P(x)$ $\forall\ a, x \in A$) é da forma $x \longmapsto cx^n$ para algum c em A (de fato, $c = P(e)$), uma função $f: U \subset A \longrightarrow A$ é L-holomorfa em U

se e só se é holomorfa em U e, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in U$, $\frac{\hat{d}^n f(x)}{n!}$ é A-n-homogêneo. Ora, todo polinômio $P:A \longrightarrow N$ A-n-homogêneo é da forma $x \longmapsto cx^n$ para algum $c=P(e) \in N$, o que motiva a seguinte generalização:

<u>Definição I.2</u>- Sejam $f:U \subset A \longrightarrow N$ uma aplicação e x_o um ponto de U. Diz-se que f é <u>Lorch-holomorfa</u> (abreviadamente, <u>L-holomorfa</u>) em x_o se f é holomorfa em x_o e $\frac{\hat{d}^n f(x_o)}{n!} \in N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, no sentido de que existe $z_n \in N$ satisfazendo $\frac{\hat{d}^n f}{n!}(x_o)(y)=y^n z_n \quad \forall\, y \in A$. Diz-se que f é L-holomorfa em U se o for em cada ponto de U.

Denotaremos por $\mathcal{H}_L(U;N)$ o subespaço de $\mathcal{H}(U;N)$ das aplicações L-holomorfas em U.

O resultado a seguir se demonstra como no caso de funções $f:U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$:

<u>Proposição I.3</u>- Sejam $r>0$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em N tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|z_n\| r^n <+\infty$. Então a aplicação $f:B(0;r) \longrightarrow N$ definida por $f(x)=\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n z_n$ pertence a $\mathcal{H}_L(B(0;r);N)$.

<u>Proposição I.4</u>- Sejam $z \in N$ e $k \in \mathbb{N}$. A aplicação $f:A \longrightarrow N$ definida por $f(a)=a^k z \quad \forall\, a \in A$ pertence a $\mathcal{H}_L(A;N)$ e

$$\frac{\hat{d}^n f(a)(b)}{n!}=\begin{cases} \binom{k}{n} a^{k-n} b^n z & \forall\, n \leq k \\ 0 & \forall\, n > k \end{cases}, \quad \forall\, a,b \in A .$$

Dem.: Basta observar que $f(a+b)=(a+b)^k z=\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a^{k-n} b^n z \quad \forall\, a,b \in A.$ ∎

Se $f:U\subset A\longrightarrow N$ é L-holomorfa em $x_o\in U$, então existe uma seqüência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset N$ tal que $f(y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(y-x_o)^n z_n$ uniformemente em $\bar{B}(x_o;r)$, para $r<r_f(x_o)=\left[\limsup_{n\to\infty}\|z_n\|^{1/n}\right]^{-1}$ (raio de convergência de f em x_o). Por outro lado, f é G-holomorfa em x_o, logo a série acima converge pontualmente em $B(x_o;d_U(x_o))$. A relação entre $r_f(x_o)$ e $\rho_f(x_o)$ (raio de limitação de f em x_o) é dada pela seguinte proposição:

<u>Proposição I.5</u>- Sejam $x_o\in U$ e $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$; então $r_f(x_o)\geq d_U(x_o)=\rho_f(x_o)$.

Dem.: Sejam $0<\rho<r<d_U(x_o)$. Se $z_n=\dfrac{\hat{d}^n f(x_o)}{n!}$ (no sentido da definição I.2), a série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(y-x_o)^n z_n$ converge (pontualmente) se y pertence a $B(x_o;d_U(x_o))$, logo existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $c\geqslant\|(re)^n z_n\|=$ $=|r^n|\,\|z_n\|=\|z_n\|r^n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Se $y\in\bar{B}(x_o;\rho)$, temos $\|(y-x_o)^n z_n\|\leqslant$ $\leqslant\|y-x_o\|^n\|z_n\|\leqslant\rho^n\|z_n\|\leqslant c\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Assim, a série acima converge uniformemente em $\bar{B}(x_o;\rho)$ se $\rho<d_U(x_o)$; portanto $d_U(x_o)\leqslant r_f(x_o)$. Segue que $r_f(x_o)\geq d_U(x_o)=\rho_f(x_o)=\min\{r_f(x_o),\ d_U(x_o)\}$. ∎

<u>Proposição I.6</u>- Sejam $U\subset A$ conexo, $x_o\in U$ e $f\in\mathcal{H}(U;N)$ L-holomorfa em x_o. Então $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$.

Dem.: Seja $W=\{y\in U;\ f$ é L-holomorfa em $y\}$; por hipótese $W\neq\phi$ e é aberto (pela proposição I.3). Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma seqüência em W com $\lim_{n\to\infty}x_n=x\in U$, e seja $\varepsilon=(d_U(x))/3$. Existe $n_o\in\mathbb{N}$ tal que $\|x_n-x\|<\varepsilon$ $\forall\, n\geqslant n_o$; fixemos então $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant n_o$. Como $x_m\in W$, pela proposição I.5 temos $r_f(x_m)=d_U(x_m)$, logo a série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{\hat{d}^n f(x_m)y^n}{n!}$ converge uniformemente a $f(x_m+y)$ em $\bar{B}(x_m;r)$, para $r<d_U(x_m)$, e f pertence a $\mathcal{H}_L(B(x_m;r);N)$. Como $d(x_m,x)<d_U(x_m)$, f é L-holomorfa em x e $x\in W$. Portanto W é fechado; como U é conexo, $W=U$. ∎

<u>Definição I.7</u>- Uma aplicação $f:U\subset A\longrightarrow N$ é <u>L-analítica</u> em $x_0\in U$ se existe $r>0$ tal que para todo $z\in B(x_0;r)$ existe $f'(z)\in N$ tal que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|f(z+h)-f(z)-hf'(z)\|}{\|h\|}=0$. Diz-se que f é L-analítica em U se o for em cada ponto de U.

<u>Observações</u>- a) Se $N=A$, a definição acima é aquela dada em [9]; b) Note-se que uma aplicação f é L-analítica se é diferenciável no sentido de Fréchet e, além disso, para cada $x_0\in U$ a aplicação $\hat{d}^1f(x_0):A\longrightarrow N$ é A-linear.

<u>Proposição I.8</u>- Se $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, então f é L-analítica em U.

Dem.: Como $f\in\mathcal{H}_L(U;N)\subset\mathcal{H}(U;N)$, f é diferenciável em todo ponto x_0 de U, e além disso $\hat{d}^1f(x_0)$ é uma aplicação A-linear. ∎

<u>Proposição I.9</u>- Sejam f L-analítica em U, $x_0\in U$ e r o raio da maior bola aberta de centro x_0 contida em U. Então, para cada $\rho<r$ e $z\in B(0;\rho)$,

$$f(x_0+z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}(\lambda e-z)^{-1}f(x_0+\lambda e)d\lambda .$$

Dem.: Basta observar que a demonstração dos teoremas 3.3 e 4.1 em [3] se estende ao presente caso, uma vez que, sendo N completo, as integrais envolvidas estão bem definidas e possuem as propriedades usuais. ∎

Proposição I.10- Nas condições da proposição anterior,

$$f(x_0+z)=\sum_{k\in\mathbb{N}} z^k c_k \text{ , onde } c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{f(x_0+\lambda e)d\lambda}{\lambda^{k+1}} \qquad \forall\ k\geqslant 0\ .$$

Em particular, $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$.

Dem.: Temos $f(x_0+z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}(\lambda e-z)^{-1}f(x_0+\lambda e)d\lambda$. Agora, $\left\|\frac{z}{\lambda}\right\|=\frac{1}{\rho}\|z\|<1$,

logo $e-\lambda^{-1}z$ é inversível e $(e-\lambda^{-1}z)^{-1}=\sum_{k\in\mathbb{N}}(\lambda^{-1}z)^k$. Como $(\lambda e-z)^{-1}=$ $=\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}z)^{-1}$, temos $(\lambda e-z)^{-1}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^k}{\lambda^{k+1}}$, e

$$f(x_0+z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^k}{\lambda^{k+1}}f(x_0+\lambda e)d\lambda =$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{f(x_0+\lambda e)d\lambda}{\lambda^{k+1}}\right]z^k$$

, pois, como f é limitada em $\{x_0+\lambda e;\ |\lambda|=\rho\}$, a série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{f(x_0+\lambda e)z^k}{\lambda^{k+1}}$ converge uniformemente se $|\lambda|=\rho$ e $\|z\|<\rho$. ∎

O que temos até o momento é, de certa forma, uma extensão dos conceitos de função analítica com domínio em um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e com valores em $\mathbb{C}$ ou em um espaço de Banach. Parece natural estender essa analogia, estabelecendo o conceito de função L-holomorfa com domínio em um A-módulo M. É o que será feito agora, mas para tanto necessitamos de alguns conceitos preliminares.

Para $k\in\mathbb{N}_+$, seja $\mathcal{L}_A({}^kM,N)$ o espaço vetorial complexo das aplicações A-k-lineares de M^k em N (com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais), e seja $\mathcal{L}_{A,s}({}^kM,N)$ o subespaço das aplicações A-k-lineares simétricas. Se $T\in\mathcal{L}_A({}^kM,N)$, seu simetrizado é o elemento $T_s\in\mathcal{L}_{A,s}({}^kM,N)$ definido por

$T_s(x_1,x_2,\dots,x_k)=\sum_{\mu\in S_k}\frac{1}{k!}T(x_{\mu(1)},x_{\mu(2)},\dots,x_{\mu(k)})$, onde S_k é o grupo de permutações de $\{1,2,\dots,k\}$.

Seja $L_A({}^kM,N)$ o subespaço de $\mathcal{L}_A({}^kM,N)$ das aplicações contínuas, munido da norma

$$\|T\|=\sup\{\|T(x_1,x_2,\dots,x_k)\|\ ;\ x_j\in M,\ \|x_j\|\leqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant k\}\ .$$

É claro que $\|T(x_1,x_2,\dots,x_k)\|\leqslant\|T\|\,\|x_1\|\,\|x_2\|\dots\|x_k\|$ $\forall\ T\in L_A({}^kM,N)$, $\forall\ x_j\in M$, $1\leqslant j\leqslant k$. O subespaço $\mathcal{L}_{A,s}({}^kM,N)\cap L_A({}^kM,N)$ será denotado por $L_{A,s}({}^kM,N)$, e identificaremos $L_A({}^oM,N)$ e $L_{A,s}({}^oM,N)$ com o módulo normado N. Definimos, para $T\in L_A({}^kM,N)$, $k\in\mathbb{N}_+$ e x, $x_j\in M$ para $1\leqslant j\leqslant r$ e $\sum_{j=1}^{r}k_j=k$:

$$Tx^o=T;\ Tx^k=T(\underbrace{x,x,\dots,x}_{k\text{ vezes}})\quad\text{e}$$

$$Tx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_r^{k_r}=T(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{k_1\text{ vezes}},\underbrace{x_2,\dots,x_2}_{k_2\text{ vezes}},\dots,\underbrace{x_r,\dots,x_r}_{k_r\text{ vezes}})$$

Um polinômio A-k-homogêneo de M em N é uma aplicação $P:M\longrightarrow N$ tal que existe $T\in\mathcal{L}_A({}^kM,N)$ satisfazendo $P(x)=Tx^k$ $\forall\ x\in M$; neste caso escrevemos $P=\hat{T}$.

Se $k\in\mathbb{N}_+$, denotaremos por $\mathcal{P}_A({}^kM,N)$ o espaço vetorial complexo de todos os polinômios A-k-homogêneos de M em N, e por $P_A({}^kM,N)$ o subespaço dos polinômios A-k-homogêneos contínuos, no qual tomaremos a norma $\|P\| = \sup\{\|P(x)\| \,;\, x \in M,\ \|x\| \leq 1\}$. Novamente é claro que $\|P(x)\| \leq \|P\| \, \|x\|^k$ $\forall\, P \in P_A(^kM,N)$, $\forall\, x \in M$. Identificamos $P_A(^0M,N)$ com o A-módulo normado N.

Note-se que $P_A(^kM,N)$ é um subespaço fechado de $P(^kM,N)$ (o espaço dos polinômios $\mathbb{C}$-k-homogêneos de M em N contínuos); de fato, se $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $P_A(^kM,N)$ que converge a P em $P(^kM,N)$, então $P_j \longrightarrow P$ pontualmente. Então, para cada $a \in A$ e $x \in M$, $P(ax) = \lim\limits_{j\to\infty} P_j(ax) = \lim\limits_{j\to\infty} a^k P_j(x) = a^k \lim\limits_{j\to\infty} P_j(x) = a^k P(x)$, logo P pertence a $P_A(^kM,N)$.

Se $k,n \in \mathbb{N}_+$ e $M=A^n$, então $\mathcal{P}_A(^kM,N) = P_A(^kM,N)$, pois todo $P \in \mathcal{P}_A(^kM,N)$ é, neste caso, da forma

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \longmapsto \sum_{|r|=k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n} z_r \,,$$

onde $r=(r_1,r_2,\ldots,r_n) \in \mathbb{N}^n$, e $z_r \in N$.

Finalmente, denotaremos por $\mathcal{P}_A(M,N)$ o espaço vetorial complexo das aplicações da forma $P=P_1+P_2+\ldots+P_k$, com $P_j \in \mathcal{P}_A(^jM,N)$ $0 \leq j \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, e por $P_A(M,N)$ o subespaço de $\mathcal{P}_A(M,N)$ das aplicações contínuas.

<u>Definição I.11</u>- Sejam $U \subset M$ e $f: U \longrightarrow N$ uma função. Dizemos que f é <u>Lorch-holomorfa</u> (abreviadamente, <u>L-holomorfa</u>) em U se $\forall\, x_0 \in U$ existirem $r>0$ e uma seqüência $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos $P_k \in P_A(^kM,N)$ tal que $f(y) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} P_k(y-x_0)$ uniformemente em $B(x_0;r)$. O espaço vetorial complexo das funções L-holomorfas de U em N será denotado por $\mathcal{H}_L(U;N)$ no caso geral, e por $\mathcal{H}_L(U)$ no caso $N=A$.

Observações: a) Essencialmente, o que temos é que f é um elemento de $\mathcal{H}_L(U;N)$ se e só se $f \in \mathcal{H}(U;N)$ e, para cada $x \in U$ e $k \in \mathbb{N}_+$, $\dfrac{\hat{d}^k f(x)}{k!}$ é um polinômio A-k-homogêneo; b) Se $M=A$, a definição acima coincide com as definições I.1 ou I.2, conforme o caso, dada a forma particular dos polinômios envolvidos. Pela mesma razão, se $M=A^n$ e $N=A$, esta definição coincide com aquela dada em [2].

Exemplos I.12- a) Se M_1, M_2 e N são A-módulos e a aplicação $B: M_1 \times M_2 \longrightarrow N$ é A-bilinear contínua, então $B \in \mathcal{H}_L(M_1 \times M_2; N)$. Com efeito, basta observar que, $\forall\ x,y \in M_1$, $\forall\ u,v \in M_2$, $B(x+y,u+v)=$ $=B(x,u)+B(x,v)+B(y,u)+B(y,v)$, onde a aplicação $(y,v) \longmapsto B(x,v)+B(y,u)$ pertence a $P_A({}^1(M_1 \times M_2),N)$ e a aplicação $(y,v) \longmapsto B(y,v)$ pertence a $P_A({}^2(M_1 \times M_2),N)$. Em particular, são L-holomorfas as aplicações

$$\begin{array}{l} A^2 \longrightarrow A \\ (a,b) \longmapsto ab \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} A \times M \longrightarrow M \\ (a,x) \longmapsto ax \end{array} .$$

b) É claro que se $f,g \in \mathcal{H}_L(U;N)$ então $f+g$ e af pertencem a $\mathcal{H}_L(U;N)$ $\forall\ a \in A$. Se $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e $g \in \mathcal{H}_L(U;N)$ então $\begin{array}{l} fg: U \longrightarrow N \\ \quad x \longmapsto f(x)g(x) \end{array}$ pertence a $\mathcal{H}_L(U;N)$; a demonstração será vista na parte (b) do exemplo I.24.

c) Como no caso $M=A$, se tem $P_A(M,N) \subset \mathcal{H}_L(M;N)$.

d) Seja $\sum_{m \in \mathbb{N}} P_m(x)$ uma série de potências de M em N com raio de convergência infinito, e tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ $P_m \in P_A({}^m M,N)$. Definamos $f: M \longrightarrow N$ por $f(x)=\sum_{m \in \mathbb{N}} P_m(x)$ $\forall\ x \in M$; então $f \in \mathcal{H}_L(M;N)$.

e) Seja $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos $T_m \in L_A({}^1 M,A)$ tal que $T_m \longrightarrow 0$ pontualmente. Seja $f: M \longrightarrow A$ definida por $f(x)=\sum_{m \in \mathbb{N}} (T_m(x))^m$.

Então $f \in \mathcal{H}_L(M)$. A demonstração é feita de maneira análoga à do exemplo seguinte.

f) Sejam $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ como antes e $f : M \longrightarrow A$ definida por $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_+} \left[\prod_{j=1}^{k} T_j(x) \right]$. Mostremos que $f \in \mathcal{H}_L(M)$. Pelo princípio da limitação uniforme, existe $c > 0$ tal que $\|T_j\| \leqslant c$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Sejam $\delta > 0$ e $0 \leqslant r < c^{-1}$ tais que $\delta + rc < 1$. Fixemos $x \in M$; como $\lim_{j \to \infty} T_j(x) = 0$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\left\{\|T_j(x)\| \,;\, j \geqslant s\right\} \leqslant \delta$. Agora, como

$$f(y) = \sum_{n=1}^{s-1} \left[\prod_{j=1}^{n} T_j(y) \right] + \left[\prod_{n=1}^{s-1} T_n(y) \right] \left[\sum_{n \geqslant s} \left[\prod_{j=s}^{n} T_j(y) \right] \right],$$

podemos considerar apenas o caso $s = 1$. Temos então

$$+\infty > \sum_{m \in \mathbb{N}_+} (\delta + cr)^m = \sum_{m \in \mathbb{N}_+} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \delta^{m-k} c^k r^k \right] = \sum_{m \in \mathbb{N}_+} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{m!}{m!} \delta^{m-k} c^k r^k \right] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{m \in \mathbb{N}_+} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{m!} \sum_{\mu \in S_m} \|T_{\mu(1)}(x)\| \cdots \|T_{\mu(m-k)}(x)\| \, \|T_{\mu(m-k+1)}\| \cdots \|T_{\mu(m)}\| \, r^k \right]$$

Portanto, temos que

$$+\infty > \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\sum_{m=k+1}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{1}{m!} \sum_{\mu \in S_m} \|T_{\mu(1)}(x)\| \cdots \|T_{\mu(m-k)}(x)\| \, \|T_{\mu(m-k+1)}\| \cdots \|T_{\mu(m)}\| \, r^k \right]$$

Assim,

$$+\infty > \sum_{m=k+1}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{1}{m!} \sum_{\mu \in S_m} \|T_{\mu(1)}(x)\| \cdots \|T_{\mu(m-k)}(x)\| \, \|T_{\mu(m-k+1)}\| \cdots \|T_{\mu(m)}\|,$$

e a série $\sum_{m=k+1}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{1}{m!} \sum_{\mu \in S_m} T_{\mu(1)}(x) \cdots T_{\mu(m-k)}(x) T_{\mu(m-k+1)} \cdots T_{\mu(m)}$

define, para cada $k \in \mathbb{N}$, um elemento Q_k de $P_A({}^kM, A)$. Por outro lado, temos que $f(y) = \sum_{m \in \mathbb{N}_+} \left[\prod_{k=1}^{m} T_k(y) \right] = \sum_{m \in \mathbb{N}_+} \left[\prod_{k=1}^{m} T_k(x) + T_k(y-x) \right] =$

$$= \sum_{m \in \mathbb{N}_+} \left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{m!} \sum_{\mu \in S_m} T_{\mu(1)}(x) \cdots T_{\mu(m-j)}(x) T_{\mu(m-j+1)}(y-x) \cdots T_{\mu(m)}(y-x) \right] =$$

$$=\sum_{j\in\mathbb{N}}\left[\sum_{m=j+1}^{\infty}\binom{m}{j}\frac{1}{m!}\sum_{\mu\in S_m}T_{\mu(1)}(x)\ldots T_{\mu(m-j)}(x)T_{\mu(m-j+1)}(y-x)\ldots T_{\mu(m)}(y-x)\right]=$$

$=\sum_{j\in\mathbb{N}}Q_j(y-x)$, uniformemente em $\bar{B}(x;r)$. Portanto, $f\in\mathcal{H}_L(M)$.

Proposição I.13- Sejam $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$ e $T\in L_A({}^1N,A)$; sejam $x_0\in U$ e $y\in M$. A aplicação $F:\{a\in A;\ x_0+ay\in U\}\longrightarrow A$ definida por $F(a)=T\circ f(x_0+ay)$ é L-holomorfa em seu domínio.

Dem.: Sejam $a\in\{a\in A;\ x_0+ay\in U\}$ e $h\in A$ tal que $a+h$ ainda pertença àquele conjunto. Então $F(a+h)=T\circ f(x_0+(a+h)y)=$

$$=T\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\hat{d}^kf(x_0+ay)(hy)}{k!}\right]=T\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}h^k\frac{\hat{d}^kf(x_0+ay)(y)}{k!}\right]=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{N}}T\left[\frac{\hat{d}^kf(x_0+ay)(y)}{k!}\right]h^k\ .$$

∎

Proposição I.14- Sejam $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, $x_0\in U$, $y\in M$ e $r>0$ tal que $x_0+ay\in U$ $\forall\ a\in\bar{B}(0;r)$. Então, para $\rho<r$ e $a\in B(0;\rho)$,

$$f(x_0+ay)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}(\lambda e-a)^{-1}f(x_0+\lambda y)d\lambda\ .$$

Dem.: Sejam $U_{x_0}=\{a\in A;\ x_0+ay\in U\}$ e $g:U_{x_0}\longrightarrow N$ definida por $g(a)=f(x_0+ay)$. Então $g\in\mathcal{H}_L(U_{x_0};N)$ e, usando a proposição I.9, temos

$$g(a)=g(0+a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}(\lambda e-a)^{-1}g(\lambda e)d\lambda\ ,\ \text{ou seja,}$$

$$f(x_0+ay)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}(\lambda e-a)^{-1}f(x_0+\lambda y)d\lambda\ .$$

∎

Proposição I.15- Sejam $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, $x_0\in U$, $z\in M$ e $r>0$ tal que $x_0+az\in U$ $\forall\ a\in\bar{B}(0;r)$. Então, para $\rho<r$ e $a\in B(0;\rho)$,

$$f(x_0+az)=\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k a^k \text{ , onde } c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} f(x_0+\lambda z)\lambda^{-(k+1)}d\lambda \text{ , sendo a}$$

convergência uniforme para $\|a\|\leqslant s$ se $s<\rho$.

Dem.: Da proposição anterior temos, para $\|a\|<|\lambda|=\rho$,

$$f(x_0+az)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}(\lambda e-a)^{-1}f(x_0+\lambda z)d\lambda .$$

Como $(\lambda e-a)^{-1}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{a^k}{\lambda^{k+1}}$, e como f é limitada em $\{a+\lambda z;\ |\lambda|=\rho\}$, a série $(\lambda e-a)^{-1}f(x_0+\lambda z)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{a^k f(x_0+\lambda z)}{\lambda^{k+1}}$ converge uniformemente se $|\lambda|=\rho$ e $\|a\|\leqslant s<\rho$. Portanto $f(x_0+az)=\sum_{k\in\mathbb{N}}a^k c_k$, com c_k como no enunciado. ∎

<u>Proposição I.16</u>- Sejam $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, $x_0\in U$, $y_j\in M$ e $r_j>0$, $1\leqslant j\leqslant n$, tais que $x_0+\sum_{j=1}^n a_jy_j\in U$ $\forall$ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in A^n$ tal que $\|a_j\|\leqslant r_j$ $\forall$ $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Então, para $\rho_j<r_j$ e $(a_1,\ldots,a_n)$ em A^n tal que $\|a_j\|<\rho_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, tem-se

$$f(x_0+\sum_{j=1}^n a_jy_j)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\substack{|\lambda_j|=\rho_j\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(\lambda_1e-a_1)^{-1}\ldots(\lambda_ne-a_n)^{-1}f(x_0+\sum_{j=1}^n\lambda_jy_j)d\lambda_1\ldots d\lambda_n .$$

Dem.: Sejam $U_{x_0}=\{(a_1,\ldots,a_n)\in A^n;\ x_0+\sum_{j=1}^n a_jy_j\in U\}$ e $g:U_{x_0}\longrightarrow N$ definida por $g(a_1,\ldots,a_n)=f(x_0+\sum_{j=1}^n a_jy_j)$. A aplicação g é L-holomorfa em cada variável, e a proposição I.9 nos dá $g(a_1,a_2,\ldots,a_n)=$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\lambda_1|=\rho_1}(\lambda_1 e-a_1)^{-1}d\lambda_1 \ldots \int_{|\lambda_n|=\rho_n}(\lambda_n e-a_n)^{-1}f(x_o+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j)d\lambda_n ,$$

para $\|a_j\|<\rho_j$, $1\leqslant j\leqslant n$. A aplicação

$(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\longmapsto(\lambda_1 e-a_1)^{-1}\ldots(\lambda_n e-a_n)^{-1}f(x_o+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j)$ é contínua no compacto $\{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n;\ |\lambda_j|=\rho_j,\ 1\leq j\leq n\}$, e podemos substituir a integral iterada pela integral múltipla, obtendo o resultado desejado. ∎

<u>Proposição I.17</u>- Nas condições da proposição anterior, $f(x_o+\sum_{j=1}^{n}a_j y_j)=\sum_{s\in\mathbb{N}^n}c_s a_1^{s_1}a_2^{s_2}\ldots a_n^{s_n}$, onde, para cada $s\in\mathbb{N}^n$,

$$c_s=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\substack{|\lambda_j|=\rho_j\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\frac{f(x_o+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j)}{\lambda_1^{s_1+1}\lambda_2^{s_2+1}\ldots\lambda_n^{s_n+1}}d\lambda_1 d\lambda_2\ldots d\lambda_n$$

. Esta série converge uniformemente para $\|a_j\|\leqslant t_j<\rho_j$, $1\leqslant j\leqslant n$.

Dem.: A demonstração é análoga à da proposição I.15, usando I.16 em lugar de I.14, e o fato de que, se $\|a_j\|<|\lambda_j|=\rho_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, tem-se

$$(\lambda_1 e-a_1)^{-1}\ldots(\lambda_n e-a_n)^{-1}=\sum_{s\in\mathbb{N}^n}a_1^{s_1}a_2^{s_2}\ldots a_n^{s_n}(\lambda_1^{s_1+1}\lambda_2^{s_2+1}\ldots\lambda_n^{s_n+1})^{-1} .$$

∎

Em relação a raio de convergência e raio de limitação de uma função $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, o resultado visto para o caso $U\subset A$ não é válido em geral. Por exemplo, sejam $M=C_o(A)$ e, para cada $m\in\mathbb{N}$, $T_m:M\longrightarrow A$ definida por $T_m((a_n)_{n\in\mathbb{N}})=a_m$. Então a seqüência $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$

em $L_A({}^1M,A)$ converge pontualmente para zero e $\|T_m\|=1$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}$. Assim, $f:M\longrightarrow A$ definida por $f(x)=\sum_{m\in\mathbb{N}}(T_m(x))^m$ pertence a $\mathcal{H}_L(M)$ e $\rho_f(0)=r_f(0)=1$, mas $d_M(0)=+\infty$.

<u>Proposição I.18</u>- Sejam $U\subset M$, $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$ e $m\in\mathbb{N}_+$. Então $\frac{\hat{d}^m f}{m!}\in\mathcal{H}_L(U;P_A({}^mM,N))$, e $\frac{\hat{d}^j}{j!}\left[\frac{\hat{d}^m f}{m!}\right](x)=\frac{\hat{d}^m}{m!}\left[\frac{\hat{d}^{m+j}f(x)}{(m+j)!}\right]$ $\forall$ $j\in\mathbb{N}$, $x\in U$.

Dem.: Decorre do resultado conhecido para funções holomorfas e do fato de que todos os polinômios envolvidos são A-homogêneos. ∎

<u>Corolário I.19</u>- Sejam $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, $m\in\mathbb{N}_+$ e $y\in M$. A aplicação
$$\frac{\hat{d}^m f(\ )(y)}{m!}:U\longrightarrow M,\qquad x\longmapsto\frac{\hat{d}^m f(x)(y)}{m!}$$
é L-holomorfa em U.

<u>Definição I.20</u>- Uma função $f:U\longrightarrow N$ é <u>G-L-analítica</u> em U se $\forall$ $x\in U$, $y\in M$ a aplicação $a\longmapsto f(x+ay)$ é L-holomorfa em $U_x=\{a\in A;\ x+ay\in U\}$. Denotaremos o espaço vetorial complexo de tais funções por $\mathcal{H}_{GL}(U;N)$ no caso geral, e por $\mathcal{H}_{GL}(U)$ se $N=A$.

<u>Exemplos I.21</u>- a) É claro que $\mathcal{H}_L(U;N)\subset\mathcal{H}_{GL}(U;N)$; b) Se $x,y\in M$ e $P\in\mathcal{P}_A(M,N)$, a aplicação $Q:A\longrightarrow N$ definida por $Q(a)=P(x+ay)$ pertence a $\mathcal{P}_A(A;N)$, logo $\mathcal{P}_A(M;N)\in\mathcal{H}_{GL}(M;N)$.

<u>Nota</u>- As proposições I.14 e I.15 são válidas para funções pertencentes a $\mathcal{H}_{GL}(U;N)$, pois só este fato é usado em cada uma das demonstrações. Analogamente, as proposições I.16 e I.17 são válidas

para uma função f G-L-analítica cujas restrições a submódulos livres finitamente gerados são contínuas.

<u>Teorema I.22</u>- Seja $f:U\subset M \longrightarrow N$ uma função. São equivalentes: a) $f\in \mathcal{H}_L(U;N)$

b) $f\in \mathcal{H}_{GL}(U;N)$ e f é contínua

c) f é contínua e, para cada $G\subset M$ submódulo livre finitamente gerado, $f\in \mathcal{H}_L(G\cap U;N)$.

Dem.: (a)$\Rightarrow$(b): Imediata.

(b)$\Rightarrow$(c): Seja $G\subset M$ submódulo livre gerado por $\{y_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$, i. e., $G=\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j y_j;\ a_j\in A,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$. Seja $x_o\in G\cap U$. Pela observação anterior temos $f(x_o+\sum_{j=1}^{n} a_j y_j)=\sum_{s\in\mathbb{N}^n} c_s a_1^{s_1}\dots a_n^{s_n}$, a convergência sendo uniforme para $\|a_j\|\leqslant r_j$, com $r_j>0$, $1\leqslant j\leqslant n$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ definimos $P_k:G\longrightarrow N$ por $P_k(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j)=\sum_{|s|=k} c_s a_1^{s_1}\dots a_n^{s_n}$; então P_k é um elemento de $P_A({}^kG,N)$ e temos uma expansão em série $f(x_o+\sum_{j=1}^{n} a_j y_j)=$ $=\sum_{k\in\mathbb{N}} P_k(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j)$, a convergência sendo uniforme para $\|a_j\|\leqslant r_j$. Assim, $f\in \mathcal{H}_L(G\cap U;N)$.

(c)$\Rightarrow$(a): Sejam $x_o\in U$ e $r>0$ tal que $B(x_o;r)\subset U$; seja G um submódulo finitamente gerado de M contendo x_o. Então existe uma série de potências $\sum_{k\in\mathbb{N}} P_k^G(x-x_o)$ de G em N de modo que cada P_k^G é A-k-homogêneo e $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}} P_k^G(x-x_o)$ $\forall\ x\in G\cap B(x_o;r)$. Se F é um submódulo finitamente gerado contendo x_o, da unicidade da expansão em série de Taylor segue que $P_k^G|_{G\cap F}=P_k^F|_{G\cap F}$ $\forall\ k\in\mathbb{N}$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ definimos $P_k:M\longrightarrow N$ por $P_k(z)=P_k^G(z)$ se G é submódulo finitamente gerado contendo z e x_0. Então $P_k\in\mathcal{P}_A({}^kM,N)$ e para todo $x\in B(x_0;r)$ temos $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}}P_k(x-x_0)$. Como f é contínua, é localmente limitada e existem $s>0$ e $c>0$ tais que $\bar{B}(x_0;s)\subset B(x_0;r)$ e $\|f\|_{\bar{B}(x_0;s)}<c$. Se $z\in M$ e $\|z\|<1$, seja G um submódulo finitamente gerado contendo x_0 e z. Pela fórmula integral de Cauchy, para cada $k\in\mathbb{N}$ temos

$$P_k(z)=P_k^G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=s} f(x_0+\lambda z)\lambda^{-(k+1)}d\lambda\ ,$$

donde $\|P_k\|\leqslant cs^{-k}$. Assim, P_k é contínuo e a série $\sum_{k\in\mathbb{N}}P_k(x-x_0)$ tem raio de convergência não menor que s. Portanto $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$. ∎

<u>Definição I.23</u>- Uma função $f:U\subset M\longrightarrow N$ é L-diferenciável em U se para cada $x\in U$ existe $T_x\in L_A(M,N)$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-T_x(h)\|}{\|h\|}=0\ .$$

Se f é L-diferenciável, então é diferenciável no sentido de Fréchet e $T_x=Df(x)$, motivo pelo qual usaremos essa notação. A recíproca, no entanto, é falsa; basta, por exemplo, considerar uma aplicação $T\in A'$ e $F:A\longrightarrow A$ definida por $F(x)=T(x)e$.

<u>Exemplos I.24</u>- a) Se $P\in P_A({}^kM,N)$ $(k\geqslant 1)$, P é L-diferenciável em M e, para cada $x\in M$, $DP(x)=kTx^{k-1}:y\longmapsto kTx^{k-1}y$, onde T é um elemento de $L_{A,s}({}^kM,N)$ tal que $P=\hat{T}$. b) Se Q é um A-módulo, $U\subset M$ e $V\subset N$ são abertos e $F:U\longrightarrow N$ e $g:V\longrightarrow Q$ são funções L-di-

ferenciáveis, com $f(U)\subset V$, então $g\circ f:U\longrightarrow Q$ é diferenciável, com $D(g\circ f)(x)=Dg(f(x))\circ Df(x)$. Portanto $g\circ f$ é L-diferenciável. Isto, a parte (a) de I.12 e o teorema abaixo justificam (b) em I.12.

Teorema I.25- Uma função $f:U\subset M\longrightarrow N$ é L-diferenciável em U se e só se é L-holomorfa em U. Neste caso, $Df(x)=\hat{d}^1 f(x)$ $\forall\ x\in U$.

Dem.: Se f é L-holomorfa em U, é holomorfa em U, e portanto diferenciável com $Df(x)=\hat{d}^1 f(x)$ $\forall\ x\in U$. Como $\hat{d}^1 f(x)$ é, $\forall\ x\in U$, uma aplicação A-linear contínua, f é L-diferenciável. Reciprocamente, se f é L-diferenciável em U, fixemos $y\in M$, $x\in U$, e seja $g_y:U_x\longrightarrow N$ definida por $g_y(a)=f(x+ay)$, onde $U_x=\{a\in A;\ x+ay\in U\}$. Numa vizinhança de zero temos $Dg_y(a)\in L_A(A,N)$ e portanto $g_y\in\mathcal{H}_L(U_x;N)$. Para $a\in U_x$ e $\rho>0$ adequado temos, para cada $m\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\hat{d}^m g_y(0)(a)}{m!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} a^m g_y(\lambda e)\lambda^{-(m+1)}d\lambda=$$

$$=\frac{a^m}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} f(x+\lambda y)\lambda^{-(m+1)}d\lambda = a^m\frac{\hat{d}^m f(x)(y)}{m!} \quad ,$$

a última igualdade sendo válida porque f, sendo diferenciável, pertence a $\mathcal{H}(U;N)$. Por outro lado, para cada $m\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\hat{d}^m f(x)(ay)}{m!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} f(x+\lambda ay)\lambda^{-(m+1)}d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} g_y(\lambda a)\lambda^{-(m+1)}d\lambda =\frac{1}{m!}\hat{d}^m g_y(0)(a)=a^m\frac{\hat{d}^m f(x)(y)}{m!} .$$

Portanto $\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}$ é um polinômio A-m-homogêneo para cada $m\in\mathbb{N}$ e f pertence a $\mathcal{H}_L(U;N)$. ∎

CAPÍTULO II

TOPOLOGIAS EM $\mathcal{H}_L(U;N)$

Denotemos por $C_F(U;N)$ o espaço vetorial complexo das aplicações $f:U\longrightarrow N$ tais que $f|_K$ é contínua para todo $K\subset U$ compacto e contido num submódulo finitamente gerado de M. Sejam $\mathcal{K}_F(U)$ a família de tais conjuntos K e, para cada $K\in\mathcal{K}_F(U)$, p_K a semi-norma em $C_F(U;N)$ definida por $p_K(f)=\|f\|_K$.

<u>Definição II.1</u>- A <u>topologia τ_{oF} em $C_F(U;N)$</u> é aquela gerada pela família de seminormas $\{p_K;\ K\in\mathcal{K}_F(U)\}$.

Note-se que, substituindo "submódulo finitamente gerado" por "subespaço de dimensão finita", teríamos o espaço das funções $f:U\longrightarrow N$ tais que $f|_{U\cap G}$ é contínua se $\dim(G)<+\infty$, uma vez que todo subespaço de dimensão finita de M é localmente compacto e fechado em M.

<u>Proposição II.2</u>- O espaço $(C_F(U;N),\ \tau_{oF})$ é completo.

Dem.: Seja $(f_s)_{s\in I}$ uma rede de Cauchy em $(C_F(U;N),\tau_{oF})$; para cada $x\in U$, $\{x\}\in\mathcal{K}_F(U)$ e a rede $(f_s(x))_{s\in I}$ é de Cauchy em N. Fica portanto definida uma função $f:U\to N$ dada por $f(x)=\lim\limits_{s\in I} f_s(x)$ para todo $x\in U$. Sejam $K\in\mathcal{K}_F(U)$ e $x\in K$. Dado $\varepsilon>0$, existe $s_o\in I$ (dependendo de ε e K) tal que $p_K(f_s-f_t)<\varepsilon/3$ se $s,t\geqslant s_o$. Passando ao limite, temos $\|f_s-f\|_K<\varepsilon/3$ $\forall\ s\geqslant s_o$. Como f_{s_o} é contínua em K existe $\delta_K>0$ tal que $\|f_{s_o}(x)-f_{s_o}(y)\|<\varepsilon/3$ $\forall\ y\in K\cap B(x;\delta_K)$. Para y nestas condições,

$\|f(x)-f(y)\| \leq \|f(x)-f_{s_o}(x)\| + \|f_{s_o}(x)-f_{s_o}(y)\| + \|f_{s_o}(y)-f(y)\| < \mathcal{E}$. Portanto f é contínua em K. ∎

É imediato que $\mathcal{H}_{GL}(U;N) \subset C_F(U;N)$; tomando em $\mathcal{H}_{GL}(U;N)$ a topologia induzida por τ_{oF} (que denotaremos pelo mesmo símbolo), temos o seguinte resultado:

<u>Proposição II.3</u>- $(\mathcal{H}_{GL}(U;N), \tau_{oF})$ é um subespaço fechado de $(C_F(U;N), \tau_{oF})$. Em particular, é completo.

Dem.: Seja $(f_s)_{s\in I}$ uma rede em $\mathcal{H}_{GL}(U;N)$ τ_{oF}-convergente a f em $C_F(U;N)$. Se $x\in U$ e $y\in M$, seja $r>0$ tal que $\{x+ay;\ \|a\|\leq r\}\subset U$. Para $0<\rho\leq r$, $m\in\mathbb{N}$ e $s\in I$ temos

$$P_m^s(x)(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} f_s(x+\lambda y)\lambda^{-(m+1)}d\lambda \qquad (1)$$

Como $f|_K$ é contínua $\forall\, K\in\mathcal{K}_F(U)$ e $\{x+\lambda y;\ |\lambda|=\rho\}\in\mathcal{K}_F(U)$, podemos definir, para cada $m\in\mathbb{N}$,

$$P_m(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} f(x+\lambda y)\lambda^{-(m+1)}d\lambda \qquad (2)$$

Como $f_s \xrightarrow[\tau_{oF}]{} f$, a expressão à direita em (1) converge para a expressão à direita em (2), e P_m independe da escolha de ρ. Como $P_m^s(x)$ é um elemento de $\mathcal{P}_A({}^mM,N)$ para cada $m\in\mathbb{N}$ e $s\in I$, temos que para cada $m\in\mathbb{N}$ $P_m(x)\in\mathcal{P}_A({}^mM,N)$. Seja agora $y\in U$ tal que para algum $\delta>1$ se tenha $\{x+ay;\ \|a\|\leq\delta\}\subset U$; das desigualdades de Cauchy temos $\|P_m^s(x)(y)\|\leq\delta^{-m}\sup\{\|f(x+\lambda y)\|;\ |\lambda|=\delta\}$, e portanto

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\|P_m(x)(y)\|\leq\frac{\delta}{\delta-1}\sup\{\|f(x+\lambda y)\|;\ |\lambda|=\delta\}<+\infty .$$

Assim, a aplicação $y \longmapsto g(x+y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} P_m(x)(y)$ define um elemento de N. Temos

$$g(x+y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \delta} f(x+\lambda y)\lambda^{-(m+1)} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \delta} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} f(x+\lambda y)\lambda^{-(m+1)} \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \delta} f(x+\lambda y)(\lambda - 1)^{-1} d\lambda \quad .$$

Por outro lado, $f_s(x+y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \delta} f_s(x+\lambda y)(\lambda-1)^{-1} d\lambda \quad \forall\, s \in I$ e, passando ao limite, $f(x+y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \delta} f(x+\lambda y)(\lambda-1)^{-1} d\lambda = g(x+y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} P_m(x)(y)$. Como $P_m(x) \in \mathcal{P}_A({}^m M, N) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{H}_{GL}(U;N)$. ∎

Consideremos agora a família $\mathcal{K}(U) = \{K \subset U;\ K$ é compacto$\}$ e, para cada $K \in \mathcal{K}(U)$, a seminorma p_K em $\mathcal{H}_L(U;N)$ definida por $p_K(f) = \|f\|_K$.

<u>Definição II.4</u>- A <u>topologia τ_0 em $\mathcal{H}_L(U;N)$</u> é aquela gerada pela família de seminormas $\{p_k;\ K \in \mathcal{K}(U)\}$.

<u>Proposição II.5</u>- $\mathcal{H}_L(U;N)$ é τ_0-fechado em $\mathcal{H}(U;N)$; em particular, é τ_0-completo.

Dem.: Seja $(f_s)_{s \in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_L(U;N), \tau_0)$ e seja $f \in \mathcal{H}(U;N)$ tal que $\lim_{s \in I} f_s = f$. Então f é contínua; além disso,

$(f_s)_{s\in I}\subset \mathcal{H}_{GL}(U;N)$ e $f_s\longrightarrow f$ para τ_{oF}, logo $f\in\mathcal{H}_{GL}(U;N)$. Pela proposição I.22, $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$. ∎

Para cada $n\in\mathbb{N}$ e $K\in\mathcal{K}(U)$, seja $p_{K,n}$ a seminorma em $\mathcal{H}_L(U;N)$ definida por $p_{K,n}(f)=\|\hat{d}^n f\|_K$.

<u>Definição II.6</u>- Para cada $k\in\mathbb{N}$, a <u>topologia τ_k em $\mathcal{H}_L(U;N)$</u> é aquela gerada pela família de seminormas $\{p_{K,n};\ K\in\mathcal{K}(U),\ 0\leqslant n\leqslant k\}$. A <u>topologia τ_∞</u> é aquela gerada pela família $\{p_{K,n};\ K\in\mathcal{K}(U),\ n\in\mathbb{N}\}$.

<u>Proposição II.7</u>- Se $M=A^n$, $\tau_o=\tau_k=\tau_\infty$ em $\mathcal{H}_L(U;N)$ $\forall\ k\in\mathbb{N}$.

Dem.: É claro que $\tau_o\subset\tau_k\subset\tau_\infty$ $\forall\ k\in\mathbb{N}$. Devemos mostrar que, dados $K\in\mathcal{K}(U)$ e $m\in\mathbb{N}$, existem $L\in\mathcal{K}(U)$ e uma constante $c\geqslant 0$ tais que $p_{K,m}(f)\leqslant cp_L(f)$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$.

Sejam então $K\in\mathcal{K}(U)$, $m\in\mathbb{N}$, $x\in K$ e, para cada $1\leqslant j\leqslant n$, $\tilde{e}_j=(0,0,\dots,e,0,\dots,0)\in A^n$, onde e aparece na j-ésima posição. Para cada $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$ e $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in A^n$ temos

$$\frac{\hat{d}^m f(x)(a)}{m!}=\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}\Big(\sum_{j=1}^n a_j\tilde{e}_j\Big)=\sum_{|s|=m} z_s(x)a_1^{s_1}a_2^{s_2}\dots a_n^{s_n}\,,$$ onde cada $z_s(x)$ é um elemento de N. Assim,

$$\left\|\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}\right\|=\sup\left\{\left\|\sum_{|s|=m} z_s(x)a_1^{s_1}a_2^{s_2}\dots a_n^{s_n}\right\|;\ \left\|\sum_{j=1}^n a_j\tilde{e}_j\right\|\leqslant 1\right\}.$$ Mas se $\left\|\sum_{j=1}^n a_j\tilde{e}_j\right\|\leqslant 1$, então temos que

$$\left\|\sum_{|s|=m} z_s(x)a_1^{s_1}a_2^{s_2}\dots a_n^{s_n}\right\|\leqslant\sum_{|s|=m}\|z_s(x)\|\,\|a_1\|^{s_1}\|a_2\|^{s_2}\dots\|a_n\|^{s_n}\leqslant\sum_{|s|=m}\|z_s(x)\|\,.$$

Por outro lado, da proposição I.17 temos que, para algum $r>0$ tal que $K+\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{e}_j \ ; \ \|a_j\| \leq r, \ 1 \leq j \leq n\right\} \subset U$ e $\rho < r$, $\|z_s(x)\| =$

$$= \left\| \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\lambda_j|=\rho} \frac{f(x+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \tilde{e}_j)}{\lambda_1^{s_1+1}\lambda_2^{s_2+1}\ldots\lambda_n^{s_n+1}} d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_n \right\|$$ se $|s|=m$. Segue que

$\|z_s(x)\| \leq R_x \rho^{-m}$, onde $R_x = \sup\left\{ f(x+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \tilde{e}_j); \ |\lambda_j|=\rho, \ 1 \leq j \leq n\right\}$. Assim, se $L = K + \left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \tilde{e}_j; \ |\lambda_j|=\rho, \ 1 \leq j \leq n\right\}$, $L \in \mathcal{K}(U)$ e para cada $x \in K$ temos $\left\|\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}\right\| \leq \sum_{|s|=m} \|z_s(x)\| \leq \sum_{|s|=m} R_x \rho^{-m} = \binom{m+n-1}{n-1} R_x \rho^{-m}$.

Portanto, $p_{K,m}(f) \leq \binom{m+n-1}{n-1} (m!)\rho^{-m} \sup\left\{R_x; \ x \in K\right\} = \binom{m+n-1}{n-1} (m!)\rho^{-m} p_L(f)$. ∎

Corolário II.8- Se $M=A^n$, $(\mathcal{H}_L(U;N),\tau_k)$ é completo para $k \in \mathbb{N}$ ou $k=\infty$.

Definição II.9- Uma seminorma p em $\mathcal{H}_L(U;N)$ é portada por $K \in \mathcal{K}(U)$ se para todo V aberto tal que $K \subset V \subset U$ existe $c(V)$ maior que zero tal que $p(f) \leq c(V)\|f\|_V$ $\forall f \in \mathcal{H}_L(U;N)$. A topologia τ_ω em $\mathcal{H}_L(U;N)$ é aquela gerada por todas as seminormas portadas por elementos de $\mathcal{K}(U)$.

Notemos que, se $K \in \mathcal{K}(U)$, p_K é portada por K, logo $\tau_0 \subset \tau_\omega$ em $\mathcal{H}_L(U;N)$. Por outro ladd, se $k \in \mathbb{N}$ ou $k=\infty$, a topologia τ_k em $\mathcal{H}_L(U;N)$ como definida acima é a topologia induzida pela topologia τ_k definida em $\mathcal{H}(U;N)$. No caso de τ_ω, é claro que uma seminorma portada por K em $\mathcal{H}(U;N)$ o é em $\mathcal{H}_L(U;N)$, mas se p é portada por K em $\mathcal{H}_L(U;N)$, não é necessariamente portada por algum compacto em $\mathcal{H}(U;N)$. Ou seja, a topologia τ_ω em $\mathcal{H}_L(U;N)$, como definida em II.9, não necessariamente coincide com a topologia induzida pela topologia τ_ω definida em $\mathcal{H}(U;N)$.

A mesma demonstração do caso $\mathcal{H}(U;N)$ (ver, por exemplo, [11]) se aplica à seguinte

<u>Proposição II.10</u>- Sejam p uma seminorma em $\mathcal{H}_L(U;N)$ e $K\in\mathcal{K}(U)$. São equivalentes: a) p é portada por K

b) $\forall\ \varepsilon>0$ existe $c(\varepsilon)\geqslant 0$ tal que

$$p(f)\leqslant c(\varepsilon)\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon^m}{m!}\,p_{K,m}(f)\quad \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$$

c) $\forall\ \varepsilon>0$ e V aberto tal que $K\subset V\subset U$ existe $c(\varepsilon,V)\geqslant 0$ tal que $p(f)\leqslant c(\varepsilon,V)\sum_{m\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\hat{d}^m f}{m!}\right\|_V\quad \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$.

<u>Teorema II.11</u>- Se $M=A^n$, $\tau_\omega=\tau_0$ em $H_L(U;N)$.

Dem.: Basta mostrar que $\tau_\omega\subset\tau_0$; sejam então $K\in\mathcal{K}(U)$ e p uma seminorma portada por K em $\mathcal{H}_L(U;N)$. Pela proposição anterior, dado $\varepsilon>0$ existe $c=c(\varepsilon)\geqslant 0$ tal que $p(f)\leqslant c\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon^m}{m!}\,p_{k,m}(f)\quad\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$. Sejam ρ e L como na proposição II.7; da demonstração daquela proposição temos $p_{K,m}(f)\leqslant\binom{m+n-1}{n-1}\frac{m!}{\rho^m}\,p_L(f)\quad\forall\ m\in\mathbb{N},\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$. Seja $\varepsilon=\rho/2$; então, para algum $c\geqslant 0$, $p(f)\leqslant c\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon^m}{m!}\binom{m-n-1}{n-1}\frac{m!}{\rho^m}\,p_L(f) = $ $=cp_L(f)\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^m}\binom{m+n-1}{n-1}\quad\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$. A série $\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^m}\binom{m+n-1}{n-1}$ converge para algum $b\in\mathbb{R}$, e portanto $p(f)\leqslant cbp_L(f)\quad\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$. ∎

<u>Corolário II.12</u>- Se $M=A^n$, $(\mathcal{H}_L(U;N),\tau_\omega)$ é completo.

<u>Definição II.13</u>- Se $S=\{W_n;\ n\in\mathbb{N}_+\}$ é um recobrimento aberto enumerável de U, <u>uma seminorma p</u> em $\mathcal{H}_L(U;N)$ <u>é portada por S</u> se existem $c>0$ e $n_j\in\mathbb{N}_+$, $1\leqslant j\leqslant k$, tais que $p(f)\leqslant c\,\|f\|_W$ para toda $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, onde $W=\bigcup\limits_{j=1}^{k} W_{n_j}$.

<u>Proposição II.14</u>- A topologia bornológica associada a τ_o em $\mathcal{H}_L(U;N)$, τ_{ob}, é aquela gerada por todas as seminormas portadas por recobrimentos abertos enumeráveis de U.

Dem.: Dado $S=\{W_n;\ n\in\mathbb{N}_+\}$ recobrimento aberto enumerável de U, consideremos $S_o=\{f\in\mathcal{H}_L(U;N);\ \|f\|_{W_n}<+\infty\ \forall\ n\geqslant 1\}$, com a topologia gerada pelas seminormas $q_k(f)=\sup\{\|f(u)\|;\ u\in\bigcup\limits_{j=1}^{k} W_j\}$. Com essa topologia S_o é um espaço de Fréchet. Por outro lado, $\mathcal{H}_L(U;N)=\bigcup S_o$, com S percorrendo a família de todas as coberturas abertas enumeráveis de U, pois se $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, tomamos $S^f=\{W_{f,n};\ n\in\mathbb{N}_+\}$, com $W_{f,n}=$ $=\{x\in U;\ \|f(x)\|<n\}$. Claramente S^f é uma cobertura aberta enumerável de U e $f\in S_o^f$. Consideremos agora em $\mathcal{H}_L(U;N)$ a topologia localmente convexa τ dada pelo limite indutivo das topologias dos S_o; então $(\mathcal{H}_L(U;N),\tau)$ é um espaço bornológico, e $\tau_o\subset\tau$. Para mostrar que $\tau_{ob}=\tau$, basta mostrar que os subconjuntos τ_o-limitados e os τ-limitados de $\mathcal{H}_L(U;N)$ são os mesmos. Seja então $B\subset\mathcal{H}_L(U;N)$ τ_o-limitado, e portanto localmente limitado. Para cada $n\in\mathbb{N}_+$ sejam $\Omega_n=\{x\in U;\ \sup\limits_{f\in B}\|f(x)\|<n\}$ e $W_n=\mathrm{int}(\Omega_n)$. Cada W_n é aberto e se $x\in U$, como B é localmente limitado, existem $\rho>0$ e $c>0$ tais que $\sup\{\|f(z)\|;\ z\in B(x;\rho),\ f\in B\}\leqslant c$; logo, para $n>c$, $x\in W_n$. Assim, temos $U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} W_n$, e se p é uma seminorma τ-contínua, existem $d>0$ e $k\in\mathbb{N}_+$ tais que $p(f)\leq d\|f\|_{W_k}$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$. Segue que $\sup_{f\in B} p(f)\leq$ $\leq dk$ e B é τ-limitado.

∎

Se $M=A^n$, um argumento análogo ao da proposição I.5 (com $\tilde{e}$ no lugar de e) mostra que se $x\in U$ e $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, então $\rho_f(x)=$ $=r_f(x)=d_U(x)$. Portanto, se, com $1\leq j\leq m$ tomarmos $x_j\in U$ e $0\leq\rho_j<$ $<d_U(x_j)$, e se $f\in\mathcal{H}_L(U;N)$, então f é limitada em $B=\bigcup_{j=1}^{m}\bar{B}(x_j;\rho_j)$. Consideremos então a família $\bar{\mathcal{B}}(U)$ de todos os conjuntos B da forma acima, e para cada $B\in\bar{\mathcal{B}}(U)$ seja p_B a seminorma em $\mathcal{H}_L(U;N)$ definida por $p_B=\|f\|_B$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U;N)$.

<u>Definição II.15</u>- Se $U\subset A^n$, a <u>topologia τ_b</u>- em $\mathcal{H}_L(U;N)$ é aquela gerada pela família de seminormas $\{p_B;\ B\in\bar{\mathcal{B}}(U)\}$.

O seguinte resultado é devido a Baryton (ver [2], teorema 2.4) no caso $N=A$, mas aquela demonstração se aplica ao caso geral:

<u>Proposição II.16</u>- Sejam A separável e $U\subset A^n$. Então $(\mathcal{H}_L(U;N),\tau_b)$ é um espaço de Fréchet.

<u>Teorema II. 17</u>- Nas condições da proposição anterior, τ_b é a topologia bornológica associada a τ_0 em $\mathcal{H}_L(U;N)$.

Dem.: Em vista da proposição anterior, basta mostrar que os subconjuntos de $\mathcal{H}_L(U;N)$ τ_0-limitados e os τ_b-limitados são os mesmos. É claro que todo conjunto τ_b-limitado é τ_o-limitado; seja então $G \subset \mathcal{H}_L(U;N)$ τ_o-limitado. Consideremos a aplicação

$f_G : U \longrightarrow \ell^\infty(G;N) = \left\{ (z_g)_{g \in G};\ z_g \in N \text{ e } \sup_{g \in G} \|z_g\| < \infty \right\}$ definida por

$f_G(x) = (g(x))_{g \in G}$ $\forall\, x \in U$. Sabemos que f_G pertence a $H(U;\ell^\infty(G;N))$ e, para cada $m \in \mathbb{N}$, $P_m(f_G)(x) = (P_m g(x))_{g \in G} : h \longmapsto (P_m g(x)(h))_{g \in G}$ é uma aplicação A-m-homogênea. Portanto $f_G \in \mathcal{H}_L(U;\ell^\infty(G;N))$. Como $r_{f_G}(x) = \rho_{f_G}(x) = d_U(x)$ $\forall\, x \in U$, segue que f_G é limitada em todo $B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$; portanto G é uniformemente limitado em B e conseqüentemente é τ_b-limitado. ∎

CAPÍTULO III

FUNÇÕES LORCH-HOLOMORFAS EM DOMÍNIOS DE RIEMANN MODELADOS SOBRE A^n

Definição III.1- Um par (X,φ) é uma variedade de Riemann modelada sobre A^n se: a) $\phi \neq X$ é um espaço de Hausdorff

b) $\varphi : X \longrightarrow A^n$ é um homeomorfismo local.

Se (X,φ) é uma variedade de Riemann modelada sobre A^n e X é conexo, diz-se que (X,φ) é um domínio de Riemann modelado sobre A^n.

Sejam (X,φ) uma variedade de Riemann modelada sobre A^n e $x \in X$. Definimos então $d_X(x) = \sup\{r > 0$ tal que existe $V \subset X$ tal que $x \in V$ e $\varphi|_V : V \longrightarrow B(\varphi(x);r)$ é homeomorfismo$\}$. Se $0 \leq r \leq d_X(x)$, seja $B_X(x;r)$ a componente conexa de $\varphi^{-1}(B(\varphi(x);r))$ que contém x; se $0 \leq r < d_X(x)$, seja $\bar{B}_X(x;r)$ a componente conexa de $\varphi^{-1}(\bar{B}(\varphi(x);r))$ que contém x.

Se $S \subset X$, definimos $d_X(S) = \{\inf d_X(x);\ x \in S\}$, e, para $0 \leq r \leq d_X(S)$, $S_r = \bigcup_{x \in S} B_X(x;r)$.

Se $W \subset A^n$, usaremos a notação $x + W \subseteq X$ se existir uma vizinhança Ω de x em X tal que $\varphi|_{\Omega} : \Omega \longrightarrow \varphi(\Omega)$ é um homeomorfismo e $\varphi(x) + W \subseteq \varphi(\Omega)$. Neste caso $x + W$ denotará o conjunto $\left(\varphi|_{\Omega}\right)^{-1}(\varphi(x) + W)$. Se $S \subset X$, a notação $S + W \subseteq X$ será usada quando $t + W \subseteq X$ $\forall\, t \in S$, e neste caso $S + W$ denotará o conjunto $\bigcup_{t \in S}(t + W)$.

Proposição III.2- A aplicação $d_X : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua e

$|d_X(x)-d_X(y)| \leqslant \|\varphi(x)-\varphi(y)\| \quad \forall\ x,y \in X.$

Dem.: A demonstração é a mesma do caso de variedades modeladas sobre espaços de Banach (ver, p. ex., [13]). ∎

<u>Definição III.3</u>- Sejam (X,φ) um domínio de Riemann modelado sobre A^n e $f:X \longrightarrow A$ uma função. Diz-se que f é <u>Lorch--holomorfa</u> (abreviadamente, <u>L-holomorfa</u>) em X se $\forall\ x \in X$ existe $0 < r \leqslant d_X(x)$ tal que $f\circ\left(\varphi\big|_{B_X(x;r)}\right)^{-1}:B(\varphi(x);r)\longrightarrow A$ é L-holomorfa.

Denotaremos por $\mathcal{H}_L(X)$ o espaço vetorial complexo das aplicações L-holomorfas em X.

Notemos que $f;X\longrightarrow A$ é L-holomorfa se e só se para cada $x \in X$ existem $0 < r \leqslant d_X(x)$ e uma seqüência de polinômios A-homogêneos contínuos de grau m de A^n em A, $(d^m f(x))_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sup\left\{\left\|f(y)-\sum_{m=0}^{k}\frac{\hat{d}^m f}{m!}(x)(\varphi(x)-\varphi(y))\right\| \ ;\ y\in B_X(x;r)\right\}\right]=0 .$$

<u>Definição III.4</u>- A topologia τ_0 em $\mathcal{H}_L(X)$ é aquela gerada pelas seminormas $\{p_K;\ K\subset X$ é compacto$\}$, sendo $p_K(f)=\|f\|_K$.

Se $k\in\mathbb{N}$, a topologia τ_k em $\mathcal{H}_L(X)$ é a gerada pelas seminormas $\{p_{K,m};\ K\subset X$ é compacto, $0\leqslant m\leqslant k\}$, onde $p_{K,m}(f)=\|\hat{d}^m f\|_K$.

Finalmente, a <u>topologia τ_∞</u> é a gerada pelas seminormas $\{p_{K,m};\ K\subset X$ é compacto, $m\in\mathbb{N}\}$.

<u>Definição III.5</u>- Sejam (X,φ) um domínio de Riemann modelado sobre A^n. Um conjunto $B\in X$ é <u>φ-limitado</u> se existem $x\in B$ e $0<r<d_X(x)$ tais que $B\subset B_X(x;r)$.

<u>Proposição III.6</u>- Sejam (X,φ) um domínio de Riemann sobre A^n e $K \subset X$ compacto. Então K é uma união finita de compactos φ-limitados.

Dem.: Para cada $x \in K$, seja $0 < r_x < \frac{1}{2} d_X(x)$; a família $\{B_X(x;r_x); x \in K\}$ é uma cobertura aberta de K, e portanto existem $x_j \in K$ e $r_j = r_{x_j}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_X(x_j;r_j)$. Seja, para cada $j \in \{1,\dots,m\}$, $K_j = K \cap \bar{B}_X(x_j;r_j)$; cada K_j é compacto em X e está contido em $B_X(x_j;2r_j)$, logo é φ-limitado. Agora, $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_X(x_j;r_j) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bar{B}_X(x_j;r_j)$ logo $K = K \cap (\bigcup_{j=1}^{m} \bar{B}_X(x_j;r_j)) = \bigcup_{j=1}^{m} K_j$. ∎

Até o final deste capítulo, (X,φ) será sempre um domínio de Riemann modelado sobre A^n.

<u>Corolário III.7</u>- As topologias τ_0, τ_k $(k \in \mathbb{N}_+)$ e τ_∞ em $\mathcal{H}_L(X)$ coincidem com aquelas geradas segundo a definição III.4, mas tomando-se apenas subconjuntos compactos de X φ-limitados.

<u>Definição III.8</u>- Uma seminorma p em $\mathcal{H}_L(X)$ é <u>portada por um subconjunto compacto</u> K de X se $\forall\, V \subset X$ aberto contendo K existe $c(V) > 0$ tal que $p(f) \leqslant c(V)\|f\|_V$ $\forall\, f \in \mathcal{H}_L(X)$. A <u>topologia τ_ω</u> em $\mathcal{H}_L(X)$ é aquela gerada pelas seminormas portadas por compactos φ-limitados de X.

Se p é uma seminorma em $\mathcal{H}_L(X)$ portada por um compacto, não necessariamente é portada por um compacto φ-limitado. Assim, a topologia τ_ω em $\mathcal{H}_L(X)$ é menos fina que aquela gerada pelas semi normas portadas por compactos (quaisquer) de X, embora elas possam coincidir (por exemplo, no caso em que $\varphi: X \longrightarrow A^n$ é um homeomorfismo).

Proposição III.9- Sejam p uma seminorma em $\mathcal{H}_L(X)$ e $K \subset X$ compacto. São equivalentes: a) p é portada por K

b) $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) \geqslant 0$ tal que $p(f) \leqslant c(\varepsilon) \sum_{m \in \mathbb{N}} p_{K,m}(f) \frac{\varepsilon^m}{m!}$ $\forall\, f \in \mathcal{H}_L(X)$

c) $\forall\, \varepsilon > 0$ e V aberto tal que $K \subset V \subset X$ existe $c = c(\varepsilon, V) \geqslant 0$ tal que $p(f) \leqslant c \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \left\| \frac{\hat{d}^m f}{m!} \right\|_V$ $\forall\, f \in \mathcal{H}_L(X)$.

Dem.: A implicação (b)$\Longrightarrow$(c) é clara. Suponhamos (a) válida; como K é compacto e d_X é contínua, existe $\rho > 0$ tal que $\varphi|_{B_X(t;\rho)} : B_X(t;\rho) \longrightarrow B(\varphi(t);\rho)$ é homeomorfismo $\forall\, t \in K$. Sejam então $0 < \varepsilon < \rho$, $t \in K$, $y \in B_X(t;\varepsilon)$ e $f \in \mathcal{H}_L(X)$. Temos $f(y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\hat{d}^m f(t)(\varphi(y) - \varphi(t))}{m!}$, e $\sup\left\{\|f(y)\|;\ y \in B_X(t;\varepsilon),\ t \in K\right\} \leqslant$

$$\leqslant \sum_{m \in \mathbb{N}} \sup\left\{\left\| \frac{\hat{d}^m f(t)(\varphi(y) - \varphi(t))}{m!} \right\|;\ t \in K,\ y \in B_X(t;\varepsilon)\right\} \leqslant \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \left\| \frac{\hat{d}^m f}{m!} \right\|_K .$$

Seja $W = \bigcup_{t \in K} B_X(t;\varepsilon)$; W é aberto e contém K, logo existe $c(W) \geqslant 0$ tal que $p(f) \leqslant c(W) \|f\|_W$. Assim, $p(f) \leqslant c(W) \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^m}{m!} p_{K,m}(f)$. Isto mostra que (a)$\Longrightarrow$(b).

Suponhamos agora (c) válida e sejam W aberto tal que $K \subset W \subset X$ e $\rho > 0$ tal que $\varphi|_{B_X(t;2\rho)} : B_X(t;2\rho) \longrightarrow B(\varphi(t);2\rho)$ é homeomorfismo $\forall\, t \in K$ e $\bigcup_{t \in K} \bar{B}_X(t;2\rho) \subset W$. Sejam ainda $\varepsilon = \rho/2$ e $V = \bigcup_{t \in K} B_X(t;\rho)$; por (c), existe $c(\rho) \geqslant 0$ tal que, para $f \in \mathcal{H}_L(X)$,

$$p(f) \leq c(\rho) \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^m \left\| \frac{\hat{d}^m f}{m!} \right\|_V \leq c(\rho) \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^m \sup \left\{ \frac{1}{\rho^m} \|f\|_{B_X(y;\rho)};\ y \in V \right\} \leq$$

$$\leq c(\rho) \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \|f\|_W = 2c(\rho) \|f\|_W \text{ . Isto completa a demonstração.}$$ ∎

<u>Proposição III.10</u>- Em $\mathcal{H}_L(X)$, $\tau_0 = \tau_k = \tau_\infty \ \forall\ k \in \mathbb{N}_+$.

Dem.: É claro que $\tau_0 \subset \tau_k \subset \tau_\infty \ \forall\ k \in \mathbb{N}_+$. Mostremos que, dados $K \subset X$ compacto (que podemos tomar φ-limitado) e $m \in \mathbb{N}$, existem $L \subset X$ compacto e $c \geq 0$ tais que $p_{K,m}(f) \leq c p_L(f) \ \forall\ f \in \mathcal{H}_L(X)$. Sejam então t pertencente a K e $\rho > 0$ tal que $K \subset B_X(t;\rho)$. Temos $S = \varphi(K)$ compacto contido em $B(\varphi(t);\rho)$ e $\tau_0 = \tau_k = \tau_\infty$ em $\mathcal{H}_L(B(\varphi(t);\rho)$ $\forall\ k \in \mathbb{N}$, logo existem $c \geq 0$ e $T \subset B(\varphi(t);\rho)$ compacto tal que $p_{K,m}(f) =$
$= p_{S,m}\left(f \circ \left(\varphi|_{B_X(t;\rho)}\right)^{-1}\right) \leq c p_T\left(f \circ \left(\varphi|_{B_X(t;\rho)}\right)\right)^{-1} = c p_L(f) \ \forall\ f \in \mathcal{H}_L(X)$,
onde $L = \left(\varphi|_{B_X(t;\rho)}\right)^{-1}(T)$ é compacto. ∎

<u>Proposição III.11</u>- $(\mathcal{H}_L(X), \tau_0)$ é completo.

Dem.: Seja $(f_s)_{s \in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_L(X), \tau_0)$. Sejam $x \in X$, $0 < r < d_X(x)$ e, para cada $s \in I$, $h_s = f_s \circ \left(\varphi|_{B_X(x;r)}\right)^{-1} : B(\varphi(x);r) \longrightarrow A$.
Cada h_s é L-holomorfa em $B(\varphi(x);r)$ e $(h_s)_{s \in I}$ é uma rede de Cauchy em $\mathcal{H}_L(B(\varphi(x);r), \tau_0)$, pois se $R \subset B(\varphi(x);r)$ é compacto, então $K = \left(\varphi|_{B_X(\varphi(x);r)}\right)^{-1}(R)$ é compacto em X. Dado $\varepsilon > 0$, existe $s_0 \in I$ tal que $\|f_s - f_u\|_K < \varepsilon \ \forall\ s,u \geq s_0$. Se $y \in R$ e $s,u \geq s_0$, temos

$$\|h_s(y) - h_u(y)\| = \left\| f_s \circ \left(\varphi|_{B_{X(x;r)}}\right)^{-1}(y) - f_u \circ \left(\varphi|_{B_X(x;r)}\right)^{-1}(y) \right\| \leq$$

$\leq \|f_s - f_u\|_K < \varepsilon$, logo $\|h_s - h_u\|_R < \varepsilon$.

Como $\{x\}$ é compacto, $(f_s(x))_{s \in I}$ é uma rede de Cauchy em A, logo fica definida uma função $f:X\to A$ dada por $f(x) = \lim_{s\in I} f_s(x)$ $\forall\, x\in X$. Se $0<\rho<d_X(x)$ e $y\in B_X(x;\rho)$, temos então $\lim_{s\in I} h_s(\varphi(y))=\lim_{s\in I} f_s\circ\left(\varphi|_{B_X(x;\rho)}\right)^{-1}(\varphi(y))=\lim_{s\in I} f_s(y)=f(y)$. Por outro lado, como $\mathcal{H}_L(B(\varphi(x);\rho),\tau_0)$ é completo, existe $h\in\mathcal{H}_L(B(\varphi(x);\rho))$ tal que $\lim_{s\in I} h_s=h$ para τ_0. Então, para $y\in B_X(x;\rho)$, $f(y)= \lim_{s\in I} h_s(\varphi(y))=h(\varphi(y))$, logo $h=f\circ\left(\varphi|_{B_X(x;\rho)}\right)^{-1}$ e $f\in\mathcal{H}_L(X)$. Resta mostrar que $f_s\longrightarrow f$ para τ_0. Seja então $K\subset X$ compacto φ-limitado; para algum $t\in K$ e $0<r<d_X(t)$, $K\subset B_X(t;r)$. Sejam $\varepsilon>0$ e $z\in K$; como $\varphi(K)\subset B(\varphi(t);r)$ é compacto, e como

$\left(f_s\circ\left(\varphi|_{B_X(t;r)}\right)^{-1}\right)_{s\in I}$ converge a $f\circ\left(\varphi|_{B_X(t;r)}\right)^{-1}$ em

$(\mathcal{H}_L(B(\varphi(t);r),\tau_0)$, existe $s_0\in I$ tal que $s\geqslant s_0$ implica

$\left\|f_s\circ\left(\varphi|_{B_X(t;r)}\right)^{-1}(\varphi(z)) - f\circ\left(\varphi|_{B_X(t;r)}\right)^{-1}(\varphi(z))\right\|<\varepsilon$, ou seja,

$\|f_s(z)-f(z)\|<\varepsilon$. Assim, $p_K(f_s-f)<\varepsilon$ se $s\geqslant s_0$. ∎

<u>Teorema III.12</u>- Em $\mathcal{H}_L(X)$, $\tau_0=\tau_\omega$.

Dem.: Claramente $\tau_0\subset\tau_\omega$; sejam então $K\subset X$ compacto φ-limitado e p uma seminorma em $\mathcal{H}_L(X)$ portada por K. Se $f\in\mathcal{H}_L(X)$, $x\in K$ e $K\subset B_X(t;\rho)$ (para algum $t\in K$ e $0<\rho<d_X(t)$), temos

$\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\tilde{e}_j\right) = \sum_{|s|=m} z_s(x)a_1^{s_1}\ldots a_n^{s_n}$ e, como na demonstração da proposição II.7, $\left\|\frac{\hat{d}^m f(x)}{m!}\right\|\leqslant \sum_{|s|=m}\|z_s(x)\|\leqslant\binom{m+n-1}{n-1}R_x\delta^{-m}$, onde $0<\delta<r$ são tais que $\varphi(K)+\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j\tilde{e}_j\ ;\ \|a_j\|\leq r,\ 1\leq j\leq n\right\}\subset B(\varphi(t);\rho)$ e

$R_x=\sup\left\{\left\|f\circ\left(\varphi|_{B_X(t;\rho)}\right)^{-1}\left(\varphi(x)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{e}_j\right)\right\|\ ;|\lambda_j|=\delta,\ 1\leq j\leq n\right\}$. Assim,

se $L=\left(\varphi|_{B_X(t;\rho)}\right)^{-1}\left(\varphi(K)+\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{e}_j\ ;\ |\lambda_j|=\delta,\ 1\leq j\leq n\right\}\right)$, L é compacto em X e $p_{K,m}(f) \leqslant \sup\limits_{x\in K} \frac{m!}{\delta^m} R_x \leqslant \binom{m+n-1}{n-1} \frac{m!}{\delta^m} p_L(f)$. Sejam $\varepsilon = \delta/2$ e $\ell = \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m}\binom{m+n-1}{n-1}$; da proposição III.9 temos que existe $c \geqslant 0$ tal que $p(f) \leqslant c \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon^m}{m!} p_{K,m}(f) \quad \forall\ f \in \mathcal{H}_L(X)$.

Assim, $p(f) \leqslant c \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon^m}{m!}\binom{m+n-1}{n-1}\frac{m!}{\delta^m} p_L(f) = c\ell p_L(f) \quad \forall\ f \in \mathcal{H}_L(X)$. ∎

Seja $\bar{\mathcal{B}}(X)$ a família dos conjuntos da forma $B = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \bar{B}_X(x_j;r_j)$, com $x_j \in X$ e $0 < r_j < d_X(x_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}_+$. Se B pertence a $\bar{\mathcal{B}}(X)$ e $f \in \mathcal{H}_L(X)$ então f é limitada em B. De fato, seja $B = \bar{B}_X(x;r) \in \bar{\mathcal{B}}(X)$. Seja $r < \rho < d_X(x)$; então existe $V \subset X$ contendo x tal que $\varphi|_V : V \longrightarrow B(\varphi(x);\rho)$ é homeomorfismo, e a função $F = f \circ \left(\varphi|_{B_X(x;\rho)}\right)^{-1} : B(\varphi(x);\rho) \longrightarrow A$ é L-holomorfa em $B(\varphi(x);\rho)$. Portanto existe $R > 0$ tal que $\|F\|_{\bar{B}(\varphi(x);r)} \leqslant R$. Se $y \in \bar{B}_X(x;r)$, então $z = \varphi(y) \in \bar{B}(\varphi(x);r)$ e $\|f(y)\| = \left\| f\circ\left(\varphi|_{B_X(x;\rho)}\right)^{-1}(z)\right\| = \|F(z)\| \leqslant R$, logo $\|f\|_B \leqslant R$.

<u>Definição III.13</u>- A <u>topologia τ_b</u> em $\mathcal{H}_L(X)$ é aquela gerada pela família de seminormas $\{p_B;\ B \in \bar{\mathcal{B}}(X)\}$, onde $p_B(f) = \|f\|_B$ $\forall\ f \in \mathcal{H}_L(X)$.

<u>Proposição III.14</u>- Sejam A separável e (X,φ) um domínio de Riemann modelado sobre A^n. Então X é separável.

Dem.: Aplica-se a este caso a demonstração válida para domínios de Riemann modelados sobre espaços de Banach (ver, p. ex., [13]). ∎

<u>Proposição III.15</u>- Se A é separável, então $(\mathcal{H}_L(X), \tau_b)$ é um espaço de Fréchet.

Dem.: Da proposição anterior decorre que $(\mathcal{H}_L(X), \tau_b)$ é metrizável, pois τ_b é gerada pelas seminormas do tipo p_B, com B união finita de conjuntos da forma $\tilde{B}_X(x,r)$, com x pertencente a um subconjunto enumerável e denso de X, e $r \in (0, d_X(x)) \cap \mathbb{Q}$. Agora, usando-se a proposição II.16, um argumento análogo ao da demonstração da proposição III.11 mostra que $(\mathcal{H}_L(X), \tau_b)$ é completo. ∎

CAPÍTULO IV

DOMÍNIOS DE LORCH-HOLOMORFIA

Definição IV.1- Um subconjunto aberto $U \subset M$ é um Domínio de Lorch-holomorfia se não existem abertos U_1 e U_2 em M satisfazendo: a) $\phi \neq U_2 \subset U_1 \cap U$

b) $U_1 \not\subset U$ e U_1 é conexo

c) $\forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$ existe $f_1 \in \mathcal{H}_L(U_1)$ tal que $f_1|_{U_2} = f|_{U_2}$.

Definição IV.2- Seja $a=(a_1,\ldots,a_n) \in A^n$. Definimos o raio espectral de a por $\mu(a)=$ máx$\{\mu(a_j),\ 1 \leq j \leq n\}$, onde $\mu(a_j)$ é o raio espectral de a_j, i.e., $\mu(a_j)= \lim\limits_{n\to\infty} \|a_j^n\|^{1/n}$. Se $U \subset A^n$ e $x \in U$, definimos $d_{U,\mu}(x)= \inf\{\mu(x-y);\ y \in U^c\}$. Se $0 \leq r$, definimos $B_\mu(x;r)= =\{y \in A^n;\ \mu(y-x) < r\}$ e $\bar{B}_\mu(x;r)=\{y \in A^n;\ \mu(y-x) \leq r\}$.

Proposição IV.3- Se $U \subset A^n$ é um Domínio de Lorch-holomorfia, então U é μ-aberto (i.e., aberto na topologia induzida por μ) e $d_{U,\mu}(x)=d_U(x)$ $\forall\ x \in U$.

Dem.: Sejam $x \in U$ e $\rho=d_U(x)>0$. Seja $f \in \mathcal{H}_L(U)$; então, para y em $B(x;\rho)$ temos $f(y)=\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^n} z_s(f,x)(y-x)^s$. Definimos $f_1 : B_\mu(x;\rho) \longrightarrow A$ por $f_1(u)= \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^n} z_s(f,x)(u-x)^s$. Esta aplicação está bem definida; de fato, sejam $u \in B_\mu(x;\rho)$ e ρ_1, ρ_2 tais que $\mu(u-x)<\rho_1<\rho_2<\rho$. Para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$ temos $\mu(u_j-x_j)= \lim\limits_{m\to\infty} (\|(u_j-x_j)^m\|)^{1/m} < \rho_1$, logo existe $c>0$ tal que $\|(u_j-x_j)^m\| \leq c\rho_1^m$ $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$. Por outro lado, para cada $s \in \mathbb{N}^n$ temos $\|z_s(f,x)\| \leq \rho_2^{-|s|} R_x$, onde $R_x=\|f\|_{\bar{B}(x;\rho_2)}$.

Assim, para u $B_\mu(x;\rho)$,

$$\left\|\sum_{s\in\mathbb{N}^n} z_s(f;x)(u-x)^s\right\| \leqslant \sum_{s\in\mathbb{N}^n}\|z_s(f,x)\|\,\|(u_1-x_1)^{s_1}\|\ldots\|(u_n-x_n)^{s_n}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s\in\mathbb{N}^n} R_x \rho_2^{-|s|}(c\rho_1^{s_1})\ldots(c\rho_1^{s_n}) = \sum_{s\in\mathbb{N}^n} R_x c^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{|s|} < \infty .$$

Portanto, $f_1 \in \mathcal{H}_L(B_\mu x;\rho))$. Como $f_1|_{B(x;\rho)} = f|_{B(x;\rho)}$ e U é Domínio de Lorch-holomorfia, $B_\mu(x;\rho)\subset U$. Portanto U é μ-aberto. Por outro lado, $d_{U,\mu}(x) \geqslant \rho = d_U(x) \geqslant d_{U,\mu}(x)$, logo $d_{U,\mu}(x) = d_U(x)$. ∎

Proposição IV.4- Se $B(x;\rho)=B_\mu(x;\rho)$ para algum $x\in A^n$ e $\rho>0$, então $\mu(a)=\|a\|$ $\forall$ $a\in A$.

Dem.: Sejam $B(x;\rho)=B_\mu(x;\rho)$ e $y\in \bar{B}_\mu(x;\rho)$; então $\mu(y-x)\leqslant\rho$ e portanto $\mu\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)(y-x)\right)<\rho$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_+$. Assim, $\left(\frac{n-1}{n}\right)(y-x)\in B_\mu(0;\rho)$ $\forall$ n $\mathbb{N}_+$. Como $B(x;\rho)=B_\mu(x;\rho)$, temos $B(0;\rho)=B_\mu(0;\rho)$, e portanto $\left(\frac{n-1}{n}\right)(y-x)$ pertence a $B(0;\rho)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_+$. Tomando o limite com $n\to\infty$, temos que $\|y-x\|\leqslant\rho$ e $y\in\bar{B}(x;\rho)$. Assim, $\bar{B}_\mu(x;\rho)=\bar{B}(x;\rho)$ e segue que $\bar{B}_\mu(0;\rho)=$ $=\bar{B}(0;\rho)$. Isto implica que A é semisimples, pois do contrário existiria $a\in A$ tal que $\mu(a)\leqslant\rho$ e $\|a\|>2\rho$. Neste caso teríamos $x=(a,0,\ldots,0)\in\bar{B}_\mu(0;\rho)$ e $x\notin B(0;\rho)$. Assim, A é semisimples e para todo $a\in A-\{0\}$ temos $x=\rho(\mu(a))^{-1}(a,0,\ldots,0)\in\bar{B}_\mu(0;\rho)=\bar{B}(0;\rho)$, logo $\|x\|=\rho(\mu(a))^{-1}\|a\|\leqslant\rho$. Portanto $\|a\|\leqslant\mu(a)$; como $\mu(a)\leqslant\|a\|$, segue a igualdade. ∎

Proposição IV.5- Se $B(x;\rho)$ é Domínio de Lorch-holomorfia para algum $x\in A^n$ e $\rho>0$, então $B(x;\rho)=B_\mu(x;\rho)$.

Dem.: Temos $B(x;\rho)\subset B_\mu(X;\rho)$ sempre; da proposição IV.3 segue que $B_\mu(x;\rho)\subset B(x;\rho)$, e portanto a igualdade. ∎

Como corolário das proposições anteriores temos o seguinte resultado:

Teorema IV.6- Se $\mu(a)<\|a\|$ para algum $a\in A$, então, para quaisquer $x\in A^n$ e $\rho>0$, $B(x;\rho)$ não é Domínio de Lorch-holomorfia.

Definição IV.7- Se $B\subset U$, o envólucro $\mathcal{H}_L(U)$-convexo de B é o conjunto $\hat{B}_{\mathcal{H}_L(U)}=\{x\in U;\ \|f(x)\|\leqslant\|f\|_B\ \ \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)\}$. Defini- ainda $\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)}=\{x\in U;$ existe $c>0$ tal que $\|f(x)\|\leqslant c\|f\|_B\ \ \forall\ f\in \mathcal{H}_L(U)\}$.

Se $X\subset U\subset A^n$, seja $d_{U,\mu}(X)=\inf\{d_{U,\mu}(x);\ x\in X\}$. Denotaremos por $\bar{\mathcal{B}}_\mu(U)$ a família de todos os conjuntos da forma $\bigcup_{j=1}^{k}\bar{B}_\mu(x_j;r_j)$, com $x_j\in U$ e $r_j<d_{U,\mu}(x_j)$, $1\leqslant j\leqslant k$.

Proposição IV.8- Sejam $U\subset A^n$ um Domínio de Lorch-holomorfia e $B\in\bar{\mathcal{B}}(U)$. Então $d_U(\hat{B}_{\mathcal{H}_L(U)})=d_{U,\mu}(\hat{B}_{\mathcal{H}_L(U)})=d_{U,\mu}(B)=d_U(B)=$ $=d_U(\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)})=d_{U,\mu}(\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)})$.

Dem.: Claramente $B\subset\hat{B}_{\mathcal{H}_L(U)}\subset\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)}$; com este fato e a proposição IV.3, basta provar que $d_U(B)=d_U(\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)})$. Seja $r=d_U(B)>0$, então $d_U(\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)})\leqslant r$ e para obtermos a igualdade provemos que, para $0\leqslant\rho<r$, $x+B(\mathbb{O};\rho)\subset U\ \ \forall\ x\in\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)}$. Sejam x e ρ nestas condições e $f\in\mathcal{H}_L(U)$; definimos então $g:B(x;\rho)\longrightarrow A$ por $g(u)=\sum_{s\in\mathbb{N}^n}z_s(f,x)(u-x)^s$. Para cada $s\in\mathbb{N}^n$ a aplicação $\begin{array}{l}U\longrightarrow A\\ y\longmapsto z_s(f,y)\end{array}$

pertence a $\mathcal{H}_L(U)$ e, como $x\in\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)}$, existe $c>0$ tal que $\|z_s(f,x)\|\leqslant c\|z_s(f,\ )\|_B$. Agora, para $\rho<\delta<r$, $s\in\mathbb{N}^n$ e $y\in B$ temos $\|z_s(f,y)\|\leqslant R\delta^{-|s|}$, onde $R=\|f\|_{B+\bar{B}(0;\delta)}$. Assim, se $u\in B(x;\rho)$, temos $\left\|\sum_{s\in\mathbb{N}^n} z_s(f,x)(u-x)^s\right\|\leqslant\sum_{s\in\mathbb{N}^n}\|z_s(f,x)\|\rho^{|s|}\leqslant cR\sum_{s\in\mathbb{N}^n}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{|s|}$. Portanto g está bem definida e pertence a $\mathcal{H}_L(B(x;\rho))$, e se $0<\rho_1<d_U(x)$, $g|_{B(x;\rho_1)}=f|_{B(x;\rho_1)}$. Como U é Domínio de Lorch-holomorfia, $B(x;\rho)\subset$ $\subset U$, como queríamos demonstrar. ∎

<u>Teorema IV.9</u>- Sejam A separável e $U\subset A^n$. São equivalentes: a) U é Domínio de Lorch-holomorfia

b) $d_U(\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)})>0\quad\forall\ B\in\bar{\mathcal{B}}(U)$

c) $d_{U,\mu}(\tilde{B}_{\mathcal{H}_L(U)})>0\quad\forall\ B\in\bar{\mathcal{B}}(U)$

d) $U=\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} B_m$, com B_m aberto, limitado, contido em B_{m+1} e tal que $d_U((\widetilde{B_m})_{\mathcal{H}_L(U)})>0$, $\forall\ m\in\mathbb{N}_+$

e) $U=\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} B_m$, com B_m aberto, limitado, contido em B_{m+1} e tal que $d_{U,\mu}((\widetilde{B_m})_{\mathcal{H}_L(U)})>0$, $\forall\ m\in\mathbb{N}_+$

f) Se $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset U$ é uma seqüência tal que $x_j\longrightarrow x\in\partial U$, então existe $f\in\mathcal{H}_L(U)$ tal que $\sup\left\{\|f(x_j)\|;\ j\in\mathbb{N}\right\}=+\infty$.

Dem.: (a)$\Longrightarrow$(b),(c): Proposição IV.8 .

Sejam $D\subset U$ enumerável e denso, e $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_+}\subset D$ uma seqüência tal que para cada $y\in D$ existe $J_y\subset\mathbb{N}_+$ infinito tal que $y=x_j\ \ \forall\ j\in J_y$. Para cada $m\in\mathbb{N}_+$ seja $B_m=\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j;(1-1/j)\rho_j)$, com $\rho_j=d_U(x_j)$. É claro que cada B_m é aberto e limitado, e $B_m\subset B_{m+1}$

$\forall\ m\in\mathbb{N}_+$. Se $x\in U$, seja $\rho=d_U(x)>0$; como D é denso em U, existe $y\in D\cap B(x;\rho/4)$ e portanto $d_U(y)\geqslant(3\rho)/4>\rho/2$. Pela definição de $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_+}$, existe uma subseqüência $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}_+}$ tal que $x_{j_k}=y$ para todo $k\geqslant 1$. Se $k\in\mathbb{N}_+$ é tal que $(1-\frac{1}{j_k})d_U(y)>\rho/2$, temos $\|x_{j_k}-x\|=$ $=\|y-x\|<\rho/4$ e $x\in B(y;(1-\frac{1}{j_k})\rho_{j_k})$, logo $x\in B_m\ \forall\ m\geqslant j_k$. Portanto, $U=\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} B_m$. Por outro lado, para cada $m\in\mathbb{N}_+$ $B_m\subset\bigcup_{j=1}^{m}\bar{B}(x_j;(1-\frac{1}{j})\rho_j)\in$ $\in\mathfrak{B}(U)$. Como $X\subset Y\subset U$ implica $\tilde{X}_{\mathcal{H}_L(U)}\subset\tilde{Y}_{\mathcal{H}_L(U)}$, as hipóteses (b) e (c) implicam (d) e (e) respectivamente.

Consideremos agora $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset U$ tal que $x_j\longrightarrow x\in\partial U$, e suponhamos que $\sup_{j\in\mathbb{N}}\|f(x_j)\|<+\infty\ \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$. Então a aplicação $p:\mathcal{H}_L(U)\longrightarrow\mathbb{R}_+$ definida por $p(f)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\|f(x_j)\|\ \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$ é uma seminorma em $\mathcal{H}_L(U)$, semicontínua superiormente em relação a τ_0. Portanto p é contínua em relação à topologia bornológica associada a τ_0 e existem $m\in\mathbb{N}_+$ e $c>0$ tais que $p(f)<c\|f\|_{B_m}\ \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$, onde $\{B_k;\ k\in\mathbb{N}_+\}$ é uma família de abertos satisfazendo (d) ou (e). Assim, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset(\widetilde{B_m})_{\mathcal{H}_L(U)}$; como $x_j\longrightarrow x\in\partial U$, $\lim_{j\to\infty}d_{U,\mu}(x_j)\leqslant$ $\leqslant\lim_{j\to\infty}d_U(x_j)=0$, contrariando (d) e (e). Assim, qualquer destas duas hipóteses implica (f).

Finalmente, suponhamos (f) válida e U não Domínio de Lorch-holomorfia. Então existem abertos U_1 e U_2 satisfazendo as condições (a),(b) e (c) da definição IV.1. Podemos supor U_2 uma componente conexa de $U\cap U_1$; seja $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset U_2$ tal que $x_j\longrightarrow x\in$ $\in U_1\cap\partial U\cap\partial U_2$. Por (f), existe $f\in\mathcal{H}_L(U)$ tal que $\sup_{j\in\mathbb{N}}\|f(x_j)\|=+\infty(*)$. Agora, para cada $j\in\mathbb{N}$ $f(x_j)=f_1(x_j)$; como $f_1\in\mathcal{H}_L(U_1)$, é contínua em x e $f(x_j)=f_1(x_j)\longrightarrow f_1(x)$, contradizendo (*). Portanto U é Domínio de Lorch-holomorfia.

∎

<u>Proposição IV.10</u>- Se $U\subset A^n$, se μ e $\| \ \|$ são equivalentes em A, e se $B\in\bar{\mathcal{B}}_\mu(U)$, então f é limitada em B $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$.

Dem.: Basta considerar o caso $B=\bar{B}_\mu(x;\rho)$. Seja $c>0$ tal que $\|y\|\leqslant c\mu(y)$ $\forall\ y\in A$. Como $\rho<d_{U,\mu}(x)\leqslant d_U(x)$, a série $\sum_{s\in\mathbb{N}^n}\|z_s(f,x)\|\rho^{|s|}$ converge a $R\in\mathbb{R}_+$ se $f\in\mathcal{H}_L(U)$. Se $y\in\bar{B}_\mu(x;\rho)$, então

$$\Big\|\sum_{s\in\mathbb{N}^n} z_s(f,x)(y-x)^s\Big\|\leqslant\sum_{s\in\mathbb{N}^n}\|z_s(f,x)\|\,\|(y-x)^s\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s\in\mathbb{N}^n}\|z_s(f,x)\|\,c\mu((y-x)^s)\leqslant c\sum_{s\in\mathbb{N}^n}\|z_s(f,x)\|\,(\mu(y-x))^{|s|}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{s\in\mathbb{N}^n}\|z_s(f,x)\|\,\rho^{|s|}=cR\ .$$

∎

<u>Definição IV.11</u>- Se $B\subset U$, definimos <u>$\hat{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)}$</u> $=\{x\in U;\ \mu(f(x))\leqslant\mu_B(f)\ \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)\}$ e <u>$\tilde{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)}$</u> $=\{x\in U;$ existe $c>0$ tal que $\mu(f(x))\leqslant c\mu_B(f)\ \forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)\}$, onde <u>$\mu_B(f)$</u> $=\sup\{\mu(f(y));\ y\in B\}$.

<u>Proposição IV.12</u>- Sejam A tal que μ e $\| \ \|$ são equivalentes, $U\subset A^n$ um Domínio de Lorch-holomorfia e $B\in\bar{\mathcal{B}}_\mu(U)$. Então $\tilde{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)}$ é limitado e $d_{U,\mu}(\tilde{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)})=d_U(\tilde{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)})=d_U(B)=d_{U,\mu}(B)=$
$=d_{U,\mu}(\hat{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)})=d_U(\hat{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)})$.

Dem.: Da proposição IV.10 temos que, para cada $j\in\{1,2,\dots,n\}$, a aplicação $\begin{array}{l}\pi_j:U\longrightarrow A\\ \quad x\longmapsto x_j\end{array}$ é limitada em B; logo existe $R\in\mathbb{R}$ tal que $\|y_j\|\leqslant R$ $\forall\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in B$, $\forall\ j\in\{1,2,\dots,n\}$. Se $x\in\tilde{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)}$ e

$c\in\mathbb{R}_+$ é tal que $\|a\|\leqslant c\mu(a)$ $\forall$ $a\in A$, existe $c_1>0$ tal que, para cada $j\in\{1,2,\dots,n\}$, $\|x_j\|\leqslant c\mu(x_j)=c\mu(\pi_j(x))\leqslant cc_1\mu_B(\pi_j)\leqslant cc_1\|\pi_j\|_B\leqslant$ $\leqslant cc_1R$. Portanto $x\leqslant cc_1R$ $\forall$ $x\in\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}$, o que demonstra a primeira afirmação.

Por outro lado, como $B\subset\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}\subset B^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}$, da proposição IV.3 segue que basta provarmos que $d_{U,\mu}(B)=d_{U,\mu}(\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)})$. Para isso, usamos a mesma argumentação da demonstração da proposição IV.8: se $x\in\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}$, sejam $\delta=d_{U,\mu}(B)$ e $r=d_U(x)=d_{U,\mu}(x)>0$. Então, se f pertence a $\mathcal{H}_L(U)$, a aplicação $y\longmapsto g(y)=\sum_{s\in\mathbb{N}^n} z_s(f,x)(y-x)^s$ está bem definida em $B_\mu(x;\delta)$ e é L-holomorfa neste conjunto. Além disso $g|_{B_\mu(x;r)}=f|_{B_\mu(x;r)}$; como U é Domínio de Lorch-holomorfia, temos $B_\mu(x;\delta)\subset U$ e $d_{U,\mu}(x)\geqslant\delta$. ∎

<u>Proposição IV.13</u>- Sejam A tal que μ e $\|\ \|$ são equivalentes, $U\subset A^n$ Domínio de Lorch-holomorfia e $B\in\tilde{\mathcal{B}}(U)$. Então $\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}$ é limitado e $d_{U,\mu}(\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)})=d_U(\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)})=d_U(B)=d_{U,\mu}(B)=$ $=d_{U,\mu}(\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)})=d_U(\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)})$.

Dem.: É inteiramente análoga à da proposição anterior. ∎

<u>Definição IV.14</u>- Diz-se que $U\subset M$ é um <u>Domínio de Lorch -existência</u> se existe $f\in\mathcal{H}_L(U)$ tal que não existem abertos U_1 e U_2 satisfazendo: a) $\emptyset\neq U_2\subset U_1\cap U$

b) $U_1\not\subset U$ e U_1 é conexo

c) existe $f_1\in\mathcal{H}_L(U_1)$ tal que $f_1|_{U_2}=f|_{U_2}$.

<u>Teorema IV.15</u>- Sejam A separável tal que μ e $\| \|$ são equivalentes, e $U \subset A^n$. São equivalentes:

(1) U é Domínio de Lorch-holomorfia

(2) $d_U(\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$

(3) $d_{U,\mu}(\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$

(4) $d_U(\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$

(5) $d_{U,\mu}(\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$

(6) $d_U(\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}_{\mu}(U)$

(7) $d_{U,\mu}(\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}_{\mu}(U)$

(8) $d_U(\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}_{\mu}(U)$

(9) $d_{U,\mu}(\tilde{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}_{\mu}(U)$

(10) $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} B_m$ com B_m aberto, limitado e contido em B_{m+1}, e tal que $d_U(\widehat{(B_m)}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ m \in \mathbb{N}_+$

(11) $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} B_m$ com B_m aberto, limitado e contido em B_{m+1}, e tal que $d_{U,\mu}(\widehat{(B_m)}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ m \in \mathbb{N}_+$

(12) $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} B_m$ com B_m aberto, limitado e contido em B_{m+1}, e tal que $d_U(\widetilde{(B_m)}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ m \in \mathbb{N}_+$

(13) $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} B_m$ com B_m aberto, limitado e contido em B_{m+1}, e tal que $d_{U,\mu}(\widetilde{(B_m)}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ m \in \mathbb{N}_+$

(14) U é Domínio de Lorch-existência

Dem.: (1) $\Longrightarrow$ (2),(3),(4),(5): proposição IV.13; (1) $\Longrightarrow$ (6),(7),(8),(9): proposição IV.12.

Sejam $D \subset U$ enumerável e denso e $(x_j)_{j\geqslant 1} \subset D$ tal que $\forall\, y \in D$ existe $J_y \subset \mathbb{N}_+$ infinito tal que $y = x_j$ $\forall\, j \in J_y$. Para cada $m \in \mathbb{N}_+$ seja $B_m = \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j;(1-\frac{1}{j})\rho_j)$, com $\rho_j = d_U(x_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Então cada B_m é aberto, limitado e contido em B_{m+1}, e $U = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} B_m$ (vide demonstração da proposição IV.9). Como, para cada $m \in \mathbb{N}_+$, B_m está contido em $\bigcup_{j=1}^{m} \bar{B}(x_j;(1-\frac{1}{j})\rho_j) \in \bar{\mathcal{B}}(U)$, as hipóteses (2),(3),(4) e (5) implicam (10),(11),(12) e (13) respectivamente.

Se D e $(x_j)_{j\geqslant 1}$ são como acima e, para cada $m \in \mathbb{N}_+$, $B_m = \bigcup_{j=1}^{m} B_\mu(x_j;(1-\frac{1}{j})\rho_j)$, com $\rho_j = d_{U,\mu}(x_j)$; então cada B_m é limitado e aberto (pois μ e $\|\ \|$ são equivalentes) e contido em B_{m+1}. Da mesma forma que na demonstração do teorema IV.9, usando μ em lugar de $\|\ \|$, se mostra que $U = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} B_m$. Como $B_m \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bar{B}_\mu(x_j;(1-\frac{1}{j})\rho_j) \in \bar{\mathcal{B}}_\mu(U)$ $\forall\, m \in \mathbb{N}_+$, as hipóteses (6),(7),(8) e (9) implicam (10),(11),(12) e (13) respectivamente.

Seja $(x_k)_{k\geqslant 1} \subset U$ tal que $x_k \longrightarrow x \in \partial U$, e suponhamos que $\sup\left\{\|f(x_j)\|;\ k \in \mathbb{N}_+\right\} < +\infty$ $\forall\, f \in \mathcal{H}_L(U)$. Então $\sup\left\{\mu(f(x_k));\ k \in \mathbb{N}_+\right\} < +\infty$ $\forall\, f \in \mathcal{H}_L(U)$ e $p: \mathcal{H}_L(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(f) = \sup\left\{\mu(f(x_k)); k \in \mathbb{N}_+\right\}$ é uma seminorma semicontínua superiormente em relação a τ_0 e portanto contínua em relação à topologia bornológica associada a τ_0. Assim, se $\left\{B_m;\ m \in \mathbb{N}_+\right\}$ é uma família de abertos satisfazendo qualquer das hipóteses (10) a (13), existem $c > 0$ e $m \in \mathbb{N}_+$ tais que

$p(f) \leqslant c\mu_{B_m}(f) \quad \forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$. Como $p(f^k) = (p(f))^k$ e $\mu((f(u))^k) = (\mu(f(u)))^k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_+$, $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e $u \in U$, temos $p(f) \leqslant \mu_{B_m}(f)$ para toda $f \in \mathcal{H}_L(U)$. Assim, para $k \in \mathbb{N}_+$ e $f \in \mathcal{H}_L(U)$, $\mu(f(x_k)) \leqslant p(f) \leqslant \mu_{B_m}(f)$ e $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}_+\} \subset (\widehat{B_m})^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)} \subset (\widetilde{B_m})^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}$. Por outro lado, como $x_k \longrightarrow x \in \partial U$, $d_U(\{x_k;\ k \in \mathbb{N}_+\}) = 0 = d_{U,\mu}(\{x_k;\ k \in \mathbb{N}_+\})$, contrariando (10), (11), (12) e (13). Assim, qualquer uma destas quatro hipóteses implica a existência de $f \in \mathcal{H}_L(U)$ tal que $\sup\{\|f(x_k)\|;\ k \in \mathbb{N}_+\} = +\infty$. Pelo teorema IV.9, U é Domínio de Lorch-holomorfia.

A implicação (14)$\Rightarrow$(1) é imediata; provemos agora que (7) implica (14). Sejam $D \subset U$ enumerável e denso e $(x_j)_{j \geqslant 1} \subset D$ tal que $\forall\ y \in D$ existe $J_y \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $y = x_j \quad \forall\ j \in J_y$. Para cada $m \geqslant 1$, seja $B_m = \bigcup_{j=1}^{m} \bar{B}_\mu(x_j; (1-\frac{1}{j})\rho_j)$, com $\rho_j = d_{U,\mu}(x_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Por (7), $d_{U,\mu}((\widehat{B_m})_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0 \quad \forall\ m \in \mathbb{N}_+$, e sabemos que $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} B_m$. Para cada $j \geqslant 1$ temos $d_{U,\mu}(B_\mu(x_j; \rho_j)) = 0$, logo $B_\mu(x_j; \rho_j) \not\subset (\widehat{B_j})^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}$. Seja, então, para cada $j \in \mathbb{N}_+$, $z_j \in B_\mu(x_j; \rho_j) - (\widehat{B_j})^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}$; como $x_j = x_{j+k}$ para uma infinidade de valores de k, tomando k tal que $(1-\frac{1}{j+k})\rho_j > d(x_j, z_j)$ temos $z_j \in B_{j+k}$. Portanto, passando a uma subseqüência de $(B_m)_{m \in \mathbb{N}_+}$ se necessário, podemos supor $z_j \in B_{j+1} \quad \forall\ j \in \mathbb{N}_+$. Agora existe g_1 pertencente a $\mathcal{H}_L(U)$ tal que $\mu(g_1(z_1)) > \mu_{B_1}(g_1)$; multiplicando g_1 por constantes e tomando potências, se necessário, podemos obter f_1 em $\mathcal{H}_L(U)$ tal que $\mu(f_1(z_1)) \geqslant 2$ e $\mu_{B_1}(f_1) < 2^{-1}$. Indutivamente obtemos uma seqüência $(f_j)_{j \geqslant 1} \subset \mathcal{H}_L(U)$ tal que $\mu_{B_j}(f_j) < 2^{-j}$ e

$\mu(f_j(z_j)) \geqslant 1 + j + \mu(\sum_{i<j} f_i(z_j)) \quad \forall\ j \in \mathbb{N}_+$.

Consideremos a seqüência $\left(\sum_{j=1}^{k} f_j\right)_{k \geqslant 1}$; se $K \subset U$ é compacto, para $k,m \in \mathbb{N}_+$ temos $p_K\left(\sum_{j=1}^{k+m} f_j - \sum_{j=1}^{k} f_j\right) = \left\|\sum_{j=k+1}^{k+m} f_j\right\|_K$. Como $K \subset B_s$ para algum $s \in \mathbb{N}_+$, seja $k \geq s$. Neste caso $\left\|\sum_{j=k+1}^{k+m} f_j\right\|_K \leq \left\|\sum_{j=k+1}^{k+m} f_j\right\|_{B_s} \leq$

$$\leq \sup\left\{\sum_{j=k+1}^{k+m} \|f_j(y)\|;\ y \in B_s\right\} \leq \sup\left\{\sum_{j=k+1}^{k+m} c\mu(f_j(y));\ y \in B_s\right\} \leq c\sum_{j=k+1}^{k+m} 2^{-j} =$$

$= c\,\dfrac{2^m - 1}{2^{k+m}}$. Portanto a seqüência $\left(\sum_{j=1}^{k} f_j\right)_{k \geq 1}$ é de Cauchy em $(\mathcal{H}_L(U), \tau_o)$, e fica definida $f = \sum_{j \in \mathbb{N}_+} f_j \in \mathcal{H}_L(U)$. Além disso, para cada $j \in \mathbb{N}_+$, $\mu(f(z_j)) > j$, pois $\mu\left(\sum_{i > j} f_i(z_j)\right) \leq \sum_{i > j} \mu(f_i(z_j)) \leq$

$\leq \sum_{i > j} \mu_{B_i}(f_i) \leq \sum_{i > j} 2^{-i} \leq 1$, logo $\mu(f(z_j)) =$

$$= \mu\left(\sum_{i < j} f_i(z_j) + f_j(z_j) + \sum_{i > j} f_i(z_j)\right) \geq$$

$$\geq \mu(f_j(z_j)) - \mu\left(\sum_{i < j} f_i(z_j)\right) - \mu\left(\sum_{i > j} f_i(z_j)\right) \geq$$

$$\geq 1 + j + \mu\left(\sum_{i < j} f_i(z_j)\right) - \mu\left(\sum_{i < j} f_i(z_j)\right) - 1 = j.$$

Afirmamos que U é Domínio de Lorch-existência para f. De fato, suponhamos que não o seja; então existe U_1 e U_2 abertos e f_o satisfazendo (a), (b) e (c) da definição IV.14. Podemos supor U_2 uma componente conexa de $U_1 \cap U$; sejam então $a \in U_1 \cap \partial U \cap \partial U_2$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B_\mu(a; 2\varepsilon) \subset U_1$. Seja $x \in D \cap U_2 \cap B_\mu(a;\varepsilon)$; então $a \in \partial U \cap B_\mu(x;\varepsilon)$ e $B_\mu(x; d_{U,\mu}(x)) \subset B_\mu(x;\varepsilon) \subset B_\mu(a;2\varepsilon) \subset U_1$. Seja $(x_{j_k})_{k \geq 1}$ subseqüência de $(x_j)_{j \geq 1}$ tal que $x_{j_k} = x$ $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$; então para cada $k \in \mathbb{N}_+$ temos $z_{j_k} \in B_\mu(x; d_{U,\mu}(x)) = B_\mu(x_{j_k}; \rho_{j_k})$ e, como $\mu(f(x_{j_k})) \geq j_k$, $\sup\left\{\mu(f(u));\ u \in B_\mu(x; d_{U,\mu}(x))\right\} = +\infty$. Por outro lado, $B_\mu(x; d_{U,\mu}(x))$ é conexo e está contido em $U \cap U_1$; como $x \in U_2$ e U_2 é conexo, $B_\mu(x; d_{U,\mu}(x)) \subset U_2$. Portanto, $f|_{B_\mu(x;d_{U,\mu}(x))} =$

$=f_0|B_\mu(x;d_{U,\mu}(x))$ e $\sup\{\mu(f_0(u));\ u\in B_\mu(x;d_{U,\mu}(x))\}=+\infty$. Segue que, para todo $\varepsilon>0$ tal que $B_\mu(a;2\varepsilon)\subset U_1$, $\sup\{\mu(f_0(u));\ u\in$ $\in B_\mu(a;2\varepsilon)\}=+\infty$, absurdo, pois $f_0\in\mathcal{H}_L(U_1)$ e é portanto localmente limitada. ∎

<u>Proposição IV.16</u>- Sejam A separável tal que μ e $\|\ \|$ são equivalentes, $x\in A^n$ e $\rho>0$. Então $B_\mu(x;\rho)$ é Domínio de Lorch-holomorfia.

Dem.: Como $B_\mu(x;\rho)=\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} B_\mu(x;(1-\frac{1}{m})\rho)$, pela proposição anterior basta provar que, para cada $m\in\mathbb{N}_+$, $d_{U,\mu}((\widehat{B_m})^\mu_{\mathcal{H}_L(B_\mu(x;\rho))})>0$, onde $B_m=$ $=B_\mu(x;(1-\frac{1}{m})\rho)$.

Para cada $k\in\{1,2,\dots,n\}$ a aplicação $B_\mu(x;\rho)\longrightarrow A$

$$y\longmapsto y_k-x_k$$

pertence a $\mathcal{H}_L(B_\mu(x;\rho))$, logo, se $y\in(\widehat{B_m})^\mu_{\mathcal{H}_L(B_\mu(x;\rho))}$, $\mu(y_k-x_k)\leqslant$ $\leqslant\sup\{\mu(u_k-x_k);\ u\in B_m\}<\frac{m-1}{m}\rho$, e portanto $\mu(y-x)<\frac{m-1}{m}\rho$. Assim, $(\widehat{B_m})^\mu_{\mathcal{H}_L(B_\mu(x;\rho))}=B_m$, e portanto $d_{U,\mu}((\widehat{B_m})^\mu_{\mathcal{H}_L(B_\mu(x;\rho))})>0$. ∎

<u>Proposição IV.17</u>- O conjunto $G=\{x\in A;\ x$ é inversível$\}$ é um Domínio de Lorch-existência.

Dem.: Sabemos que $f:G\longrightarrow A$ definida por $f(x)=x^{-1}$ pertence a $\mathcal{H}_L(G)$ e que, se $x\in G$ e $0\leqslant r<\|x^{-1}\|^{-1}$, temos, para $y\in\bar{B}(0;r)$, $f(x+y)=$ $=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k x^{-(k+1)}y^k$. Suponhamos que G não seja Domínio de Lorch-existência para f; então existem U_1 e U_2 abertos e f_0 satisfazendo (a),(b) e (c) da definição IV.14. Podemos supor U_2 uma componente conexa de $U\cap U_1$; seja então $y\in\partial G\cap\partial U_2\cap U_1$. Sejam $\varepsilon>0$ tal que $B(y;2\varepsilon)\subset U_1$ e $x\in G\cap B(y;\varepsilon/2)$; então $y\in B(x;\varepsilon)\subset U_1$. Como $f|_{U_2}=$ $=f_o|_{U_2}$, se $\delta>0$ é tal que $B(x;\delta)\subset U_2$, temos $f_o(x+u)=$

$=\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\hat{d}^m f_o}{m!}(x)u^m=\sum_{m\in\mathbb{N}}(-1)^m x^{-(m+1)}u^m=f(x+u)$ para $0<\delta<\varepsilon$ tal que $\delta\leqslant\|x^{-1}\|^{-1}$. Da unicidade da série de Taylor temos $\frac{\hat{d}^m f_o}{m!}(x)=(-1)^m x^{-(m+1)}$ $\forall\ m\in\mathbb{N}$. Para $u=y-x$, $f_o(x+u)=\sum_{m\in\mathbb{N}}(-1)^m(x)^{-(m+1)}u^m$ e $(x+u)f_o(x+u)=$ $=(x+u)x^{-1}\sum_{m\in\mathbb{N}}(-1)^m(x)^{-m}u^m=\sum_{m\in\mathbb{N}}(-1)^m x^{-m}u^m+\sum_{m\in\mathbb{N}}(-1)^m x^{-(m+1)}u^{m+1}=e$.
Assim, y possui um inverso, $f_o(y)$, uma contradição. Portanto G é Domínio de Lorch-existência para f. ∎

<u>Definição IV.18</u>- Sejam $U\subset A^n$ e $f\in\mathcal{H}_L(U)$. Um ponto x da fronteira de U é chamado de <u>ponto regular</u> para f se existem U_1 e U_2 abertos conexos em A^n tais que $\neq U_2\subset U\cap U_1$, x e U_2 na mesma componente conexa de $U\cap U_1$, e existe $f_o\in\mathcal{H}_L(U_1)$ tal que $f_o|_{U_2}=f|_{U_2}$. Um <u>ponto x é singular</u> para f se não for regular para f. Uma função $f\in\mathcal{H}_L(U)$ é singular em ∂U se todo ponto $x\in\partial U$ é singular para f.

Denotaremos por $S(U)$ o conjunto das funções $f\in\mathcal{H}_L(U)$ que são singulares em ∂U. Claramente U é Domínio de Lorch-existência se e só se $S(U)\neq\phi$.

<u>Proposição IV.19</u>- Se A é separável e $U\subset A^n$, são equivalentes: (1) U é Domínio de Lorch-holomorfia

(2) U é Domínio de Lorch-existência

(3) $S(U)\neq\phi$

(4) $\mathcal{H}_L(U)-S(U)$ é de primeira categoria em $(\mathcal{H}_L(U),\tau_b)$

Dem.: São calaras as implicações (3)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(1). Como $(\mathcal{H}_L(U), \tau_b)$ é de Fréchet, pelo Teorema de Baire temos (4)$\Rightarrow$(3). Sejam agora U_1 e U_2 abertos conexos tais que $\phi \neq U_2 \subset U \cap U_1$ e $U_1 \not\subset U$, e seja $\mathcal{H}_L(U,U_1,U_2)$ o conjunto das funções $f \in \mathcal{H}_L(U)$ tais que existe f_1 em $\mathcal{H}_L(U_1)$ satisfazendo $f_1\big|_{U_2} = f\big|_{U_2}$. Para $m \in \mathbb{N}_+$, seja $\mathcal{H}_L^m(U,U_1,U_2) = \{f \in \mathcal{H}_L(U,U_1,U_2);\ \|f_1\|_{U_1} \leqslant m\}$. Afirmamos que $\mathcal{H}_L^m(U,U_1,U_2)$ é fechado em $\mathcal{H}_L(U)$. Com efeito, seja $(f_j)_{j\geqslant 1} \subset \mathcal{H}_L^m(U,U_1,U_2)$ tal que $f_j \longrightarrow f$ em $\mathcal{H}_L(U)$. Como $\|(f_j)_1\|_{U_1} \leqslant m \quad \forall\ j \in \mathbb{N}_+$, $((f_j)_1)_{j\geqslant 1}$ é uma seqüência τ_0-limitada em $\mathcal{H}_L(U_1)$, e possui portanto uma subrede que converge a $f_0 \in \mathcal{H}_L(U_1)$ para τ_0. Segue que $\|f_0\|_{U_1} \leqslant m$ e, como $(f_j)_1\big|_{U_2} = f_j\big|_{U_2}$, temos que $f_0\big|_{U_2} = f\big|_{U_2}$. Assim, $f \in \mathcal{H}_L^m(U,U_1,U_2)$.

Agora, por (1), $\mathcal{H}_L(U,U_1,U_2)$ é um subespaço próprio de $\mathcal{H}_L(U)$, logo $\mathcal{H}_L(U) - \mathcal{H}_L(U,U_1,U_2)$ é denso em $\mathcal{H}_L(U)$, o mesmo ocorrendo com $\mathcal{H}_L(U) - \mathcal{H}_L^m(U,U_1,U_2)$. Portanto $\mathcal{H}_L^m(U,U_1,U_2)$ tem interior vazio em $\mathcal{H}_L(U)$ $\forall\ m \in \mathbb{N}_+$. Sendo A separável, $\mathcal{H}_L(U) - S(U) = \bigcup \mathcal{H}_L(U,U_1,U_2)$ (a união segundo as possíveis escolhas de U_1 e U_2 com as propriedades desejadas) pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos da forma $\mathcal{H}_L^m(U,V_1,V_2)$. Portanto $\mathcal{H}_L(U) - S(U)$ é de primeira categoria. ∎

Seja S(A) o espectro de A, isto é, o conjunto dos homomorfismos de álgebra $h: A \longrightarrow \mathbb{C}$. Se $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ e $h \in S(A)$ usaremos a notação $h(a)$ para denotar o elemento $(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ de $\mathbb{C}^n$. O espectro conjunto de a é o conjunto $\sigma(a) = \bigcup\limits_{h \in S(A)} h(a)$.

Sabemos que $\sigma(a)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}^n$ e denotaremos por $\mathcal{H}(\sigma(a))$ o espaço dos germes de funções holomorfas em $\sigma(a)$, com a topologia usual. Um resultado importante que usaremos é o seguinte (ver [15]):

<u>Teorema</u> (Silov-Arens-Calderon-Waelbroeck): Fixado $a=(a_1,\ldots,a_n)\in A^n$, existe um único homomorfismo contínuo da álgebra $\mathcal{H}(\sigma(a))$ em A, $\varphi_a:\mathcal{H}(\sigma(a))\longrightarrow A$, $f\longmapsto\varphi_a(f)=f[a]$, tal que:

(1) $\varphi_a(c_e)=e$, onde $c_e(x)=e$ $\forall\ x\in\sigma(a)$

(2) $\varphi_a(u)=u(a)$ $\forall$ $u\in(\mathbb{C}^n)^*$

(3) Se $m\geq n$, $m\in\mathbb{N}$, $b\in A^{m-n}$ e $c=(a,b)$, seja $P_{m,n}:\mathcal{H}(\sigma(c))\longrightarrow\mathcal{H}(\sigma(a))$ definido por $P_{m,n}(g)(z_1,\ldots,z_n)=g(z_1,\ldots,z_n,\mathbb{0},\mathbb{0},\ldots,\mathbb{0})$. Então $Pm,n(f)[a]=f[(a,\mathbb{0})]$.

Notemos que, além disso, segue que $h(f[a])=f(h(a))$ para todo $h\in S(A)$, $f\in\mathcal{H}(\sigma(a))$. Sejam $V\subset\mathbb{C}^n$ um domínio de holomorfia e $U\subset A^n$ o aberto definido por $U=\sigma^{-1}(V)=\{a\in A^n;\ \sigma(a)\subset V\}$. Se $f\in\mathcal{H}(V)$ definimos $\tilde{f}:U\longrightarrow A$ por $\tilde{f}(x)=f[x]$. Afirmamos que $\tilde{f}\in\mathcal{H}_L(U)$. De fato, seguindo o esquema da demonstração do teorema acima, podem-se encontrar $b_j\in A$ $(1\leq j\leq p)$, polinômios P_i $(1\leq i\leq k)$ em $\mathbb{C}^{n+p}$ e r_s $(1\leq s\leq n+p+k)$ reais positivos tais que:

(1) Se $\pi:\mathbb{C}^{n+p}\longrightarrow\mathbb{C}^n$ é a projeção natural $(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1},\ldots,z_{n+p})\longmapsto(z_1,\ldots,z_n)$, e $D(P_1,\ldots,P_k;r_1,\ldots,r_{n+p+k})=\{z=(z_1,\ldots,z_{n+p})\in\mathbb{C}^{n+p};\ P_j(z)<r_{n+p+j},\ 1\leq j\leq k,\ |z_s|<r_s,\ 1\leq s\leq n+p\}$ então $\sigma(a)\subset\sigma_{[a,b]}(a)\subset\pi(D(P_1,\ldots,p_k;r_1,\ldots,r_{n+p+k}))$

(2) Existem $\varepsilon>0$ e T analítica em $\Delta(\mathbb{0};r_1,\ldots,r_{n+p+k})=\{z\in\mathbb{C}^{n+p+k};\ |z_j|<r_j,\ 1\leq j\leq n+p+k\}$ tal que $f(z_1,\ldots,z_n)=$

$=T(z_1,\dots,z_{n+p},P_1(z_1,\dots,z_{n+p}),\dots,P_k(z_1,\dots,z_{n+p}))$ para todo $(z_1,\dots,z_{n+p})\in\Delta(0;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p}-\varepsilon)$, e $\sigma(x,0,P_1[(x,0)],\dots,P_k[(x,0)])$ $\subset\Delta(0;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon)\subset\bar\Delta(0;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon)\subset\Delta(0;r_1,\dots,r_{n+p+k})$ (notemos que $D(P_1,\dots,P_k;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon)\subset\Delta(0;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon)$).

Definamos $F(z_1,\dots,z_n,z_{n+1},\dots,z_{n+p})=f(z_1,\dots,z_n)$; então, pelo teorema acima $f[a]=(P_{n+p,n}F)[a]=T[(a,0,P_1[a,0],\dots,P_k[a,0])]$. Notemos que se $W=\sigma^{-1}(\pi(D(P_1,\dots,P_k;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon)))$ e $x\in W$, então $\sigma(x)\subset\pi(D(P_1,\dots,P_k;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon))$ e podemos escrever $f[x]=T[(x,0,P_1[x,0],\dots,P_k[x,0])]$ (*). Sabemos que T pode ser desenvolvida em série múltipla de potências em $\Delta(0;r_1,\dots,r_{n+p+k})$, convergente absoluta e uniformemente em $\bar\Delta(0;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon)$. Assim, $T(z)=\sum_{s\in\mathbb{N}^{n+p+k}} c_s z^s$ $\forall\ z\in\Delta(0;r_1,\dots,r_{n+p+k})$ e, para algum $R\in$ $\in\mathbb{R}$, $\sum_{s\in\mathbb{N}^{n+p+k}}|c_s||z^s|\leqslant R$ $\forall\ z\in\bar\Delta(0;r_1-\varepsilon,\dots,r_{n+p+k}-\varepsilon)$. Segue que

$I=\sum_{s\in\mathbb{N}^{n+p+k}} c_s(x,0,P_1[x,0],\dots,P_k[x,0])^s$ é absolutamente convergente $\forall\ x\in W$. Pelo teorema acima, $I=T[x]$, e por (*) $I=f[x]$. Segue que $f[x]=\sum_{s\in\mathbb{N}^{n+p+k}} c_s(x,0,P_1[x,0],\dots,P_k[x,0])^s$ uniformemente em W. Portanto, como W é vizinhança de a em A^n, $f[x]=\tilde f(x)$ é Lorch-holomorfa em W; segue que $\tilde f\in\mathcal{H}_L(U)$.

<u>Proposição IV.20</u>- Sejam $V\subset\mathbb{C}^n$ um Domínio de holomorfia, $U=\sigma^{-1}(V)=\{a\in A^n;\ \sigma(a)\subset V\}$, $x\in U$ e $\rho>0$ tal que $\bar B(x;\rho)\subset U$. Então $\bigcup_{y\in\bar B(x;\rho)}\sigma(y)=\sigma(x)+D(0;\rho)$, onde $D(0;\rho)=\{\lambda\in\mathbb{C}^n;\ |\lambda_j|\leqslant\rho,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.

Dem.: Sejam $y\in\bar B(x;\rho)$, $h\in S(A)$ e $z=h(y)=(h(y_1),\dots,h(y_n))$. Temos

$\|y-x\| \leq \rho$ e, para cada $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $|h(y_j)-h(x_j)| \leq \|y_j-x_j\| \leq$ $\leq \|y-x\| \leq \rho$. Logo $z \in h(x) + D(0;\rho) \subset \sigma(x) + D(0;\rho)$ e portanto $\bigcup_{y \in \bar{B}(x;\rho)} \sigma(y) \subset \sigma(x) + D(0;\rho)$. Sejam agora $\lambda \in D(0;\rho)$ e $h \in S(A)$; então $h(x)+\lambda \in \sigma(x) + D(0;\rho)$. Tomemos $y=x+\lambda\tilde{e} \in A^n$; $\|y-x\| = |\lambda| \, \|\tilde{e}\| = |\lambda| \leq \rho$, logo $y \in \bar{B}(x;\rho)$ e $h(y)=h(x)+\lambda(1,1,\ldots,1)$. Segue que $\sigma(x) + D(0;\rho)$ está contido em $\bigcup_{y \in \bar{B}(x;\rho)} \sigma(y)$. ∎

<u>Corolário IV.21</u>- Nas condições da proposição anterior, se $B = \bigcup_{j=1}^{k} \bar{B}(x_j;\rho_j) \in \bar{\mathcal{B}}(U)$, então $B_\sigma = \bigcup_{y \in B} \sigma(y)$ é um subconjunto compacto de V.

Dem.: Notemos que $B_\sigma = \bigcup_{j=1}^{k} (\sigma(x_j) + D(0;\rho_j))$ pela proposição anterior, e $B_\sigma \subset V$ pela definição de U. ∎

<u>Proposição IV.22</u>- Sejam A separável e tal que μ e $\| \ \|$ são equivalentes, e $V \subset \mathbb{C}^n$ um Domínio de holomorfia. Então $U = \sigma^{-1}(V)$ é um Domínio de Lorch-holomorfia.

Dem.: Usando a proposição IV.15, basta mostrarmos que $d_{U,\mu}(\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)}) > 0$ $\forall\ B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$. Seja então $B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$; pela proposição anterior, $B_\sigma = \bigcup_{y \in B} \sigma(y)$ é compacto em V e $\widehat{(B_\sigma)}_{\mathcal{H}(V)}$ o é também. Sejam z pertencente a $\hat{B}^{\mu}_{\mathcal{H}_L(U)} \subset U$ e $f \in \mathcal{H}_L(U)$; então $\sup\{|h(f(z))|;\ h \in S(A)\} \leq$ $\leq \sup\{|h(f(u))|;\ h \in S(A),\ u \in B\}$ (*).

Se $g \in \mathcal{H}(V)$, então a aplicação $\tilde{g}: U \longrightarrow A$, $x \longmapsto g[x]$ pertence a $\mathcal{H}_L(U)$ e $\forall\ u \in U$, $h \in S(A)$, $h(g[u]) = h(\tilde{g}(u)) = g(h(u))$. Assim, de (*) decorre que $\sup\{|g(h(z))|;\ h \in S(A)\} \leq \sup\{|g(h(u))|;\ h \in S(A),\ u \in B\} \leq$ $\leq \sup\{|g(x)|;\ x \in B_\sigma\}$, e portanto $h(z) \in \widehat{(B_\sigma)}_{\mathcal{H}(V)}$ $\forall\ h \in S(A)$. Segue que $\sigma(z) \subset (\widehat{B_\sigma})_{\mathcal{H}(V)}$. Seja $\delta = d_V((\widehat{B_\sigma})_{\mathcal{H}(V)}) > 0$; se $y \in A^n$ e $\mu(y-z) < \delta$ então para cada $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ temos $\mu(y_j - z_j) < \delta$ e $|h(y_j) - h(z_j)| < < \delta$ $\forall\, h \in S(A)$. Logo $h(y) \in \sigma(z) + B(0;\delta)$ $\forall\, h \in S(A)$ e $\sigma(y) \subset \subset \sigma(z) + B(0;\delta) \subset V$. Portanto $y \in U$ e $B_\mu(z;\delta) \subset U$ $\forall\, z \in \hat{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)}$, ou seja, $d_{U,\mu}(\hat{B}^\mu_{\mathcal{H}_L(U)}) \geq \delta > 0$. ∎

CAPÍTULO V

ENVOLTÓRIA DE LORCH-HOLOMORFIA

Neste capítulo, U será sempre um subconjunto aberto não vazio de A^n.

Seja S_A o conjunto dos homomorfismos não nulos da A-álgebra $\mathcal{H}_L(U)$ em A, τ_b-contínuos. Exigiremos que um homomorfismo de álgebra leve o elemento neutro para a multiplicação no elemento neutro e de A. Se $h \in S_A$, existem $C > 0$ e $B \in \bar{\mathcal{B}}(U)$ tais que $\|h(f)\| \leqslant C\|f\|_B \quad \forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$; denotaremos tal fato por $h \prec (B,C)$. Se x pertence a U, é claro que a aplicação $\begin{array}{l} i_x : \mathcal{H}_L(U) \longrightarrow A \\ \quad f \longmapsto f(x) \end{array}$ pertence a S_A. Sejam $p_j : A^n \longrightarrow A$, $1 \leqslant j \leqslant n$, a j-ésima projeção (i. e., $p_j(x) = x_j$ $\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$) e $\pi : S_A \longrightarrow A^n$ a aplicação definida por $\pi(h) = (h(p_1), \ldots, h(p_n))$ $\forall\ h \in S_A$.

Se $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, seja $m_a : A^n \longrightarrow A$ definida por $m_a(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ $\forall\ x \in U$. É claro que $m_a \in \mathcal{H}_L(U)$, e, se h é um elemento de S_A, $m_a(\pi(h)) = \sum_{j=1}^{n} a_j h(p_j) = h(\sum_{j=1}^{n} a_j p_j) = h(m_a)$ $\forall\ a \in A^n$.

Se $u \in A^n$ e $f \in \mathcal{H}_L(U)$, seja $D_u f : U \longrightarrow A$ definida por $(D_u f)(x) = \frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda u)\Big|_{\lambda=0}$. Então são válidas as seguintes propriedades:

a) $f \longmapsto D_u f$ é uma aplicação A-linear τ_b-contínua de $\mathcal{H}_L(U)$ em $\mathcal{H}_L(U)$ $\forall\ u \in A^n$

b) $D_u(D_v f) = D_v(D_u f)$ $\forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$, $\forall\ u, v \in A^n$

c) $D_{\lambda u}^m f = \lambda^m D_u^m f$ $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}_+$, $\forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$, $\forall\ u \in A^n$

d) $D_{u+v}^m f = \sum_{s+t=m} \frac{m!}{s!t!} D_u^s(D_u^t f)$ $\forall\ u, v \in A^n$, $\forall\ m \in \mathbb{N}_+$, $\forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$

e) $D_u^m(fg)=\sum\limits_{s+t=m}\frac{m!}{s!t!}\left(D_u^s f\right)\cdot\left(D_u^t g\right)$ $\forall\ u\in A^n$, $\forall\ m\in\mathbb{N}_+$, $\forall\ f,g\in\mathcal{H}_L(U)$

f) $(D_{u_1}D_{u_2}\ldots D_{u_m}f)(x)=f^{(m)}(x)(u_1,u_2,\ldots,u_m)$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$, $\forall\ x\in U$, $\forall\ u_1,u_2,\ldots,u_m\in A^n$, onde $f^{(m)}(x)$ é a m-ésima derivada (no sentido de Fréchet) de f no ponto x.

Demonstraremos (1); as outras propriedades são conhecidas (vide [1]). Se $a\in A$, $x\in U$, $(\mathbb{0},\mathbb{0},\ldots,\mathbb{0})\neq u\in A^n$ e $f\in\mathcal{H}_L(U)$, temos $D_u(af)(x)=\frac{d}{d\lambda}(af(x+\lambda u))\big|_{\lambda=0}=a\,\frac{d}{d\lambda}f(x+\lambda u)\big|_{\lambda=0}=aD_uf(x)$. Se $B=\bar{B}(x;r)\in\in\bar{\mathcal{B}}(U)$, seja $\delta>0$ tal que $C=\bar{B}(x;r+\delta)\subset U$. Se $y\in B$ e $\lambda\in\mathbb{C}$, com $|\lambda|<\delta\|u\|^{-1}$, então $y+\lambda u\in C$. Seja $g:\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\lambda|<\delta\|u\|^{-1}\}\longrightarrow A$ definida por $g(\lambda)=f(y+\lambda u)$; então $\|g'(\mathbb{0})\|\leqslant\|u\|\delta^{-1}\sup\left\{\|g(\lambda)\|;|\lambda|\leqslant\delta\|u\|^{-1}\right\}$, i. e., $\|D_uf(y)\|\leqslant\|u\|\delta^{-1}\|f\|_C$. Portanto $\|D_uf\|_B\leqslant\|u\|\delta^{-1}\|f\|_C$. Que D_uf pertence a $\mathcal{H}_L(U)$ segue do fato que $D_uf(y)=f'(y)(u)$.

Seja $h\in S_A$, $h\prec(B,C)$. Como $B=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\bar{B}(x_j;r_j)$, seja $0<t<$ $<\min\left\{d_U(x_j)-r_j;\ 1\leqslant j\leqslant m\right\}$; então $B+\bar{B}(\mathbb{0};t)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\bar{B}(x_j;r_j+t)\in\bar{\mathcal{B}}(U)$. Para $u\in B(\mathbb{0};t)-\{\mathbb{0}\}$ definimos formalmente $h_u:\mathcal{H}_L(U)\longrightarrow A$ por $h_u(f)=\sum\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m!}h(D_u^mf)$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$, onde $h(D_u^0f)=h(f)$. Se $u=\mathbb{0}$, tomamos $h_u(f)=h(f)$. A série acima é absolutamente convergente. De fato, seja $c=\frac{\|u\|+t}{2\|u\|}$ $(u\neq\mathbb{0})$; então $c>1$ e para $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $|\lambda|\leqslant c$ temos $\|\lambda u\|=|\lambda|\,\|u\|\leqslant\frac{\|u\|+t}{2}<t$, logo $\{\lambda u;\ |\lambda|\leqslant c\}\subset\bar{B}(\mathbb{0};t)$. Se $y\in B$ e $g(\lambda)=f(y+\lambda u)$ $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$ com $|\lambda|\leqslant c$, temos $\left\|g^{(m)}(\mathbb{0})\right\|$ $\frac{m!}{c^m}\|g(\lambda)\|_{\{|\lambda|\leqslant c\}}$. Como $B+\bar{B}(\mathbb{0};t)\in\bar{\mathcal{B}}(U)$, a desigualdade acima implica $\left\|(D_u^mf)(y)\right\|\leqslant$ $\leqslant\frac{m!}{c^m}\|f\|_{B+\bar{B}(\mathbb{0};t)}<+\infty$, logo, $\forall\ m\in\mathbb{N}$, $\left\|D_u^mf\right\|_B\leqslant\frac{m!}{c^m}\|f\|_{B+\bar{B}(\mathbb{0};t)}$. Assim, para $m\in\mathbb{N}$, $\left\|h(D_u^mf)\right\|\leqslant C\left\|D_u^mf\right\|_B\leqslant\frac{Cm!}{c^m}\|f\|_{B+\bar{B}(\mathbb{0};t)}$, e portanto

$\sum_{m\in\mathbb{N}} \|h(D_u^m f)\| \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{C}{c^m}\|f\|_B + \bar{B}(\mathbf{0};t) = \frac{Cc}{c-1}\|f\|_B + \bar{B}(\mathbf{0};t)$; em particular, h_u é τ_b-contínua.

Proposição V.1- Se $h\in S_A$ e $h\prec(B,C)$, então existe ρ_0 positivo tal que, se $0<\rho<\rho_0$ e $u\in\bar{B}(0;\rho)$, $h_u\prec(B+\bar{B}(\mathbf{0};3\rho_0),2C)$.

Dem.: Vimos que existe $t>0$ tal que, se $\|u\|<t$, então $\|h_u(f)\|\leqslant$ $\leqslant \frac{Cc}{c-1}\|f\|_B + \bar{B}(\mathbf{0};t)$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$, com $c=\frac{\|u\|+t}{2\|u\|}$ (se $u\neq\mathbf{0}$; o caso $u=\mathbf{0}$ é claro). Seja $\rho_0=\frac{t}{3}$; se $0<\rho<\rho_0$ e $\|u\|<\rho$, $\frac{c}{c-1}=\left(\frac{\|u\|+t}{2\|u\|}\right)\left(\frac{\|u\|+t}{2\|u\|}-1\right)^{-1}$ $=\frac{\|u\|+t}{t-\|u\|}<2$. Como $\bar{B}(\mathbf{0};t)=\bar{B}(\mathbf{0};3\rho_0)$, segue que $h_u\prec(B+\bar{B}(\mathbf{0};3\rho_0),2C)$. ∎

Proposição V.2- Nas condições anteriormente fixadas, h_u pertence a S_A.

Dem.: Como D_u^m e h são A-lineares, h_u o é; para que provemos que $h_u\in S_A$, basta que verifiquemos que h_u é não nulo e que $h_u(fg)=$ $=h_u(f)h_u(g)$ $\forall\ f,g\in\mathcal{H}_L(U)$. Se $u\neq\mathbf{0}$, consideremos a aplicação $c_e: U\longrightarrow A;\ x\longmapsto e$; c_e é o elemento neutro para a multiplicação da álgebra $\mathcal{H}_L(U)$. Como $D_u^m(c_e)$ é identicamente nula $\forall\ m\in\mathbb{N}_+$, temos $h_u(c_e)=$ $=h(c_e)=e$ e h_u não é nula. Se $u=\mathbf{0}$, $h_u(f)=h(f)$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$ (em particular, $h_u(c_e)=h(c_e)=e$), e portanto $h_{\mathbf{0}}$ tampouco é identicamente nula.

Agora a desigualdade $\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m!}\|h(D_u^m f)\|\leqslant\frac{Cc}{c-1}\|f\|_{B+\bar{B}(\mathbf{0};t)}$ implica $\sum_{m,k}\frac{1}{m!}\,\frac{1}{k!}\|h(D_u^m f)\|\,\|h(D_u^m g)\|<+\infty$ e podemos trocar a ordem da soma, obtendo $h_u(fg)=\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m!}h(D_u^m(fg))=\sum_{\substack{s+k=m\\ m\in\mathbb{N}}}\frac{1}{m!}\,\frac{m!}{s!k!}h(D_u^s f)h(D_u^k g)=$

$$= \left[\sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{1}{s!} h(D_u^s f)\right]\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} h(D_u^k g)\right] = h_u(f)h_u(g). \text{ Portanto } h_u \in S_A .$$ ∎

Notemos que, para $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, temos $D_u(p_j)(x)=p_j(u)$ $\forall\ x\in A^n$ e $D_u^m(p_j)\equiv 0$ $\forall\ m\geqslant 2$. Portanto $h_u(p_j)=h(p_j)+u_j$ e $\Pi(h_u)= =(h_u(p_1),\ldots,h_u(p_n))=(h(p_1)+u_1,\ldots,h(p_n)+u_n)=\Pi(h)+u$ $\forall\ h\in S_A$.

<u>Definição V.3</u>- Sejam $h\in S_A$, $h\prec(B,C)$, $\rho>0$ tal que $B+\bar{B}(0;\rho)\subset U$, e $N_{h,\rho}=\{h_u;\ u\in B(0;\rho)\}\subset S_A$. Um conjunto $W\subset S_A$ é aberto se $W=$ ou se existe, para cada $h\in W$, $\rho>0$ tal que $N_{h,\rho}\subseteq W$.

<u>Proposição V.4</u>- A família dos conjuntos W como na definição V.3 define uma topologia τ em S_A.

Dem.: É claro que S_A é aberto e que, se W_1 e W_2 são abertos, $W_1\cup W_2$ o é. Se $W_1\cap W_2\neq\phi$, seja h pertencente a esta intersecção. Para $j\in\{1,2\}$ sejam $B_j\in\bar{\mathcal{B}}(U)$ e C_j tais que $h\prec(B_j,C_j)$; sejam ainda $\rho_j>0$ tais que $B_j+\bar{B}(0;\rho_j)\in\bar{\mathcal{B}}(U)$ e $N_{h,\rho_j}\subset W_j$. Sejam $B= =B_1\cup B_2$, $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2\}$ e $C=\max\{C_1,C_2\}$. Então B e $B+\bar{B}(0;\rho)$ pertencem a $\bar{\mathcal{B}}(U)$ e $h\prec(B,C)$; além disso, $N_{h,\rho}\subseteq N_{h,\rho_1}\cap N_{h,\rho_2}\subseteq W_1\cap W_2$ e portanto $W_1\cap W_2$ é aberto. ∎

<u>Proposição V.5</u>- A aplicação $\Pi:(S_A,\tau)\longrightarrow A^n$, definida por $\Pi(h)=(h(p_1),\ldots,h(p_n))$ $\forall\ h\in S_A$, é um homeomorfismo local.

Dem.: Em cada $N_{h,\rho}$ Π é dada por $\Pi(h_u)=\Pi(h)+u$, logo basta provarmos que $N_{h,\rho}$ é aberto. Sejam $h_u\in N_{h,\rho}$, $h\prec(B,C)$ e $h_u\prec(D,E)$; seja $r>0$ tal que $D+\bar{B}(0;r)\in\bar{\mathcal{B}}(U)$ e $u+\bar{B}(0;r)\subset U$. Se $v\in\bar{B}(0;r)$ então para $f\in\mathcal{H}_L(U)$ temos

$$(h_u)_v(f)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}h_u(D_v^k f)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}\left[\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m!}h(D_u^m D_v^k f)\right]=$$

$$=\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{s!}h\left[\sum_{k+m=s}\frac{s!}{k!m!}D_u^m D_v^k f\right]=\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{s!}h(D_{u+v}^s f)=h_{u+v}(f).$$ Assim, $(h_u)_v=$ $=h_{u+v}$ e $N_{h_u,r}\subseteq N_{h,\rho}$.

∎

<u>Proposição V.6-</u> $(S_A,\mathcal{T})$ é um espaço de Hausdorff.

Dem.: Sejam $h,g\in S_A$, $h\neq g$, $h\prec(B_1,C_1)$ e $g\prec(B_2,C_2)$; sejam ρ_1 e ρ_2 reais positivos tais que $B_i+\bar{B}(\mathbb{0};\rho_i)\in\bar{\mathcal{B}}(U)$, $i\in\{1,2\}$. Se $\pi(g)\neq\pi(h)$ existem abertos disjuntos W_1 e W_2 contendo $\pi(h)$ e $\pi(g)$ respectivamente. Neste caso $\pi^{-1}(W_1)$ e $\pi^{-1}(W_2)$ são abertos disjuntos contendo h e g respectivamente.

Se $\pi(h)=\pi(g)$, suponhamos que $(S_A,\mathcal{T})$ não seja de Hausdorff. Seja $n_o\in\mathbb{N}_+$ tal que $\forall\ n\geq n_o$ $N_{h,1/n}$ e $N_{g,1/n}$ têm sentido, e existe $h_n\in N_{h,1/n}\cap N_{g,1/n}$. Então, para $n\geq n_o$, existem u_n e v_n em $\bar{B}(\mathbb{0};1/n)$ tais que $h_n=h_{u_n}=g_{v_n}$. Como $\pi(h)+u_n=\pi(h_{u_n})=\pi(h_n)=$ $=\pi(g_{v_n})=\pi(g)+v_n$, temos $u_n=v_n$ $\forall n\geq n_o$. Para tais valores de n e f em $\mathcal{H}_L(U)$, $h_{u_n}(f)-h(f)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}h(D_{u_n}^k f)-h(f)=\sum_{k\in\mathbb{N}_+}\frac{1}{k!}h(\hat{d}^k f(\ )(u_n))$, e portanto $\left\|h_{u_n}(f)-h(f)\right\|\leq\sum_{k\in\mathbb{N}_+}\frac{1}{k!}\left\|h(\hat{d}^k f(\ )(u_n))\right\|$. Como $h\prec(B_1,C_1)$, $\|h(\hat{d}^k f(\ )(u_n))\|\leq C\|\hat{d}^k f(\ )(u_n)\|_{B_1}\leq C\|\hat{d}^k f\|_{B_1}\|u_n\|^k$ para cada $k\in\mathbb{N}_+$, logo $\left\|h_{u_n}(f)-h(f)\right\|\leq C\sum_{k\in\mathbb{N}_+}\frac{\|u_n\|^k}{k!}\|\hat{d}^k f\|_{B_1}$ (*).

Seja $\rho>0$ tal que $B_1+\lambda\bar{B}(\mathbb{0};1)\subset U$ se $\lambda\in\mathbb{C}$ e $|\lambda|\leq\rho$. Das desigualdades de Cauchy temos, para $x\in B_1$, $\|v\|=1$ e $k\in\mathbb{N}_+$, $\left\|\hat{d}^k f(x)(v)\right\|\leq\frac{k!}{\rho^k}\sup\left\{\|f(x+\lambda v)\|\ ;\ |\lambda|=\rho\right\}$; segue que $\left\|\hat{d}^k f\right\|_{B_1}\leq$

$\leqslant \frac{k!}{\rho^k}\sup\{\|f(x+\lambda v)\|;\ |\lambda|=\rho,\ x\in B_1\}\leqslant \frac{k!}{\rho^k}\|f\|_{B_1+\bar{B}(0;\rho)}$ (**). Seja $n_1\in\mathbb{N}_+$ tal que $\|u_n\|<\rho$ $\forall\ n\geqslant n_1$; então de (*) e (**) segue que $\|h_{u_n}(f)-h(f)\|\leqslant C\|f\|_{B_1+\bar{B}(0;\rho)}\sum_{k\in\mathbb{N}_+}(\|u_n\|\rho^{-1})^k=C\left[\|f\|_{B_1+\bar{B}(0;\rho)}\right]q_n$, onde

$q_n=\frac{\|u_n\|}{\rho-\|u_n\|}$, $\forall\ n\geqslant n_1$. Como $u_n\in B(0;1/n)$ $\forall\ n\geqslant n_0$, segue que $\lim_{n\to\infty}\|h_{u_n}(f)-h(f)\|=0$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$. Analogamente, $\lim_{n\to\infty}\|g_{u_n}(f)-g(f)\|=0$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$. Como, para $n\geqslant n_0$, $h_{u_n}=h_n=g_{u_n}$, temos $h(f)=\lim_{n\to\infty}h_n(f)=$ $=g(f)$ $\forall\ f\in\mathcal{H}_L(U)$, logo $h=g$, uma contradição. Portanto (S_A,τ) é de Hausdorff. ∎

<u>Corolário V.7</u>- $((S_A,\tau),\pi)$ é uma variedade de Riemann modelada sobre A^n.

<u>Definição V.8</u>- Se $f\in\mathcal{H}_L(U)$, sua <u>extensão a S_A</u> é a aplicação $\tilde{f}:S_A\longrightarrow A$.
$h\longmapsto h(f)$

<u>Proposição V.9</u>- Se $f\in\mathcal{H}_L(U)$, sua extensão $\tilde{f}$ pertence a $\mathcal{H}_L(S_A)$.

Dem.: Sejam $h\in S_A$, $h\prec(B,C)$, $f\in\mathcal{H}_L(U)$ e $r>0$ tal que $B+\bar{B}(0;r)$ pertença a $\mathcal{B}(U)$. Em $\pi(h)+B(0;r)$ temos $f\circ\left(\pi|_{N_{h,r}}\right)^{-1}(\pi(h)+x)=$ $=\tilde{f}(h_x)=h_x(f)$. Mostremos que a aplicação $x\longmapsto h_x(f)$ é L-holomorfa em $B(0;r)$. Como f é limitada em $B+\bar{B}(0;r)$ por uma constante E, se $\|x\|<r$ temos $\|h_x(f)\|\leqslant C\left(\frac{\|x\|+r}{r-\|x\|}\right)\|f\|_{B+\bar{B}(0;r)}\leqslant CE\left(\frac{\|x\|+r}{r-\|x\|}\right)$. Fixemos $u\in B(0;r)$, e seja $\rho>0$ tal que $B(u;\rho)\subset B(0;r)$ e $\frac{\|v\|+r}{r-\|v\|}\leqslant\frac{\|u\|+r}{r-\|u\|}+1$ $\forall\ v\in B(u;\rho)$. Então, se $\|v-u\|<\rho$, $\|h_v(f)\|\leqslant CE\left(\frac{\|v\|+r}{r-\|v\|}\right)\leqslant CE\left(1+\frac{\|u\|+r}{r-\|u\|}\right)$, ou seja, a aplicação $x \longmapsto h_x(f)$ é localmente limitada em $B(0;r)$.

Sejam agora $y \in A$ e $t > 0$ tal que $u + \{\lambda y;\ |\lambda| \leqslant t\} \subset B(0;r)$; seja $g: \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < t\}$ A definida por $g(\lambda) = h_{u+\lambda y}(f)$. Mostremos que g é analítica em λ_0 se $|\lambda_0| < t$. De fato, se $\delta > 0$ é tal que $u + \lambda_0 y + \rho y \in B(0;r)$ para $|\rho| \leqslant \delta$, então para $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ temos $g(\lambda) = h_{u+\lambda_0 y + (\lambda - \lambda_0)y}(f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} h_{u+\lambda_0 y}\left(D^k_{\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\delta}\right)\delta y}(f)\right) =$
$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\delta}\right)^k h_{u+\lambda_0 y}(D^k_{\delta y} f)$, e este série converge uniforme e absolutamente, pois, como visto anteriormente, $u + \lambda_0 y + \delta y \in B(0;r)$ implica $\sum_{m \in \mathbb{N}} \left\| h_{u+\lambda_0 y}(D^m_{\delta y} f) \right\| < +\infty$. Assim, g é analítica e $x \longmapsto h_x(f)$ é G-analítica em $B(0;r)$; sendo localmente limitada, é analítica. Agora basta provarmos que é L-holomorfa em 0. Se $v \in B(0;r)$, $h_v(f) = h_{0+v}(f) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!} h(D^m_v f) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!} h(\hat{d}^m f(\ )(v))$. Por outro lado, $\hat{d}^m f(\ )(v) = \sum_{|s|=m} z_s(\ ) v_1^{s_1} \dots v_n^{s_n}$, logo $h_v(f) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!} h\left(\sum_{|s|=m} z_s(\ ) v_1^{s_1} \dots v_n^{s_n}\right) =$
$= \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!} \sum_{|s|=m} v_1^{s_1} \dots v_n^{s_n} h(z_s(\ ))$, e $x \longmapsto h_x(f)$ é uma aplicação L-holomorfa em 0. ∎

<u>Definição V.10</u>- Sejam $U \subset A^n$ e (X, φ) um domínio de Riemann modelado sobre A^n; diz-se que X é uma <u>envoltória de L-holomorfia</u> de U se existe $\Psi: U \longrightarrow X$ contínua tal que $\varphi \circ \Psi = I|_U$ e:
(i) para cada $f \in \mathcal{H}_L(U)$ existe uma única $\tilde{f} \in \mathcal{H}_L(X)$ tal que $\tilde{f} \circ \Psi = f$; (ii) se (Y, θ) é um domínio de Riemann modelado sobre A^n e $\sigma: U \longrightarrow Y$ é contínua tal que $\theta \circ \sigma = I|_U$ e $\forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$ existe uma única $\bar{f} \in \mathcal{H}_L(Y)$ tal que $\bar{f} \circ \sigma = f$, então existe $\mu: Y \longrightarrow X$ contínua tal que $\varphi \circ \mu = \theta$ e $\mu \circ \sigma = \Psi$.

Mostraremos agora que, se A é separável e $U \subset A^n$ é conexo, podemos obter uma envoltória de L-holomorfia (E_A, π) de U, com E_A um subcojunto de S_A, e de tal forma que a aplicação $\begin{array}{l} \mathcal{H}_L(U) \longrightarrow \mathcal{H}_L(E_A) \\ f \longmapsto \tilde{f} \end{array}$ é um isomorfismo topológico se tomarmos nestes dois espaços a topologia τ_b.

Como para cada $x \in U$ a aplicação $i_x : f \longmapsto f(x)$ é um elemento de S_A, temos uma aplicação natural $\begin{array}{l} i : U \longrightarrow S_A \\ x \longmapsto i_x \end{array}$. Além disso, temos $\pi \cdot i(x) = \pi(i_x) = (i_x(p_1), \ldots, i_x(p_n)) = (p_1(x), \ldots, p_n(x)) = x$, isto é, $\pi \cdot i = I|_U$. Portanto i é biunívoca, e, como π é um homeomorfismo local definindo a estrutura L-analítica de S_A, i é um homeomorfismo local L-analítico. Como U é conexo, $i(U)$ é um aberto conexo de S_A; seja E_A a componente conexa de S_A que contém $i(U)$. Identificamos U com $i(U)$ e i com a aplicação de inclusão $j : i(U) \longrightarrow E_A$; denotaremos ainda por π a restrição $\pi|_{E_A}$. Consideremos a aplicação induzida $j^* : \mathcal{H}_L(E_A) \longrightarrow \mathcal{H}_L(U)$ dada por $j^*(F) = F \circ j$ $\forall\ F \in \mathcal{H}_L(E_A)$. É claro que j^* é A-linear, e se $F \in \mathcal{H}_L(E_A)$ é tal que $j^*(F) \equiv 0$, então $F|_{j(U)} \equiv 0$, mas $j(U)$ é um aberto conexo não vazio em E_A, logo $F \equiv 0$. Assim, j^* é biunívoca.

Para cada $f \in \mathcal{H}_L(U)$, se $F = \tilde{f}|_{E_A}$, $j^*(F)(x) = F(j(x)) = \tilde{f}(j(x)) = i_x(f) = f(x)$ $\forall\ x \in U$, e portanto $j^*(F) = f$; logo j^* é sobrejetiva. Assim, j^* é um isomorfismo algébrico. Como é uma restrição, $j^* : (\mathcal{H}_L(E_A), \tau_b) \longrightarrow (\mathcal{H}_L(U), \tau_b)$ é contínua. Como estes dois espaços são de Fréchet, pelo teorema da aplicação aberta j^* é um isomorfismo topológico. Por outro lado, se $h,g \in E_A$ e $h \neq g$, existe $f \in \mathcal{H}_L(U)$ tal que $g(f) \neq h(f)$; então $F = \tilde{f}|_{E_A} \in \mathcal{H}_L(E_A)$ e $F(g) = g(f) \neq h(f) = F(h)$. Logo as aplicações L-holomorfas em E_A separam pontos de E_A. Temos agora o seguinte resultado:

<u>Teorema V.11</u>- Sejam A separável e $U \subset A^n$ conexo. Então existem um domínio de Riemann (E_A, π) modelado sobre A^n e uma bijeção $j: U \longrightarrow j(U)$ (um aberto de E_A) tais que:

(i) $\mathcal{H}_L(E_A)$ separa pontos de E_A

(ii) Identificando-se U com $j(U)$, toda função $f \in \mathcal{H}_L(U)$ se estende a uma função $\tilde{f} \in \mathcal{H}_L(E_A)$ e a aplicação de extensão é um isomorfismo topológico entre $(\mathcal{H}_L(E_A), \tau_b)$ e $(\mathcal{H}_L(U), \tau_b)$.

Além disso, E_A é maximal com relação a (i) e (ii) no seguinte sentido: se (G, μ) é um domínio de Riemann modelado sobre A^n e $t: U \longrightarrow t(U)$ é um bi-L-holomorfismo (i. e., uma bijeção L-holomorfa cuja inversa é L-holomorfa) entre U e um aberto de G, e se (i) e (ii) valem com G no lugar de E_A, então G pode ser identificado com um aberto de E_A através de um bi-L-holomorfismo que preserva os pontos de U.

Dem.: Só resta provar a maximalidade de E_A; seja então G como no enunciado, e definamos $T: G \longrightarrow S_A$ da seguinte maneira: dados $x \in G$ e $f \in \mathcal{H}_L(U)$, identificamos U com um subconjunto aberto de G e com um subconjunto aberto de S_A, tomamos $\bar{f}$ a extensão de f a G e colocamos $T(x)(f) = \bar{f}(x)$. Como vale (ii) com G no lugar de E_A, T está bem definida; como (i) vale para $\mathcal{H}_L(G)$, T é uma bijeção. Se mostrarmos que T é um bi-L-holomorfismo local, então teremos T le vando G bi-L-holomorficamente sobre um aberto de E_A (pois G é conexo), preservando pontos de U.

Sejam então $x \in G$ e $h=T(x) \in S_A$; por (ii) (para $\mathcal{H}_L(G)$) temos $h \prec (B,C)$ para algum $B \in \overline{\mathcal{B}}(U)$ e $C>0$. Seja $\rho>0$ tal que $B+\overline{B}(0;\rho) \subset U$ e $x+B(0;\rho) \subset G$. Sejam $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e $\bar{f}$ sua extensão a G. Agora a aplicação $g:\lambda \longmapsto \bar{f}(x+\lambda u)$ é analítica numa vizinhança de $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant 1\}$ se $u \in B(0;\rho)$. Como $g(\lambda)=\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^m}{m!} g^{(m)}(0)$, obtemos, para $\lambda=1$, $g(1)=\bar{f}(x+u)=\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!}(D_u^m\bar{f})(x)$. Ora, para cada $m \in \mathbb{N}$ temos $D_u^m\bar{f}=\overline{(D_u^m f)}$ (pois estas funções coincidem em $U \subset G$), logo $\bar{f}(x+u)=$
$=\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!}\overline{(D_u^m f)}(x)=\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!}T(x)(D_u^m f)=\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!}h(D_u^m f)=h_u(f)$. Assim, para $u \in B(0;\rho)$, $h_u(f)=\bar{f}(x+u)=T(x+u)(f)$ $\forall\ f \in \mathcal{H}_L(U)$, logo $T(x+u)=h_u$ em $B(0;\rho)$. Isto implica que T é um bi-L-holomorfismo local, completando a demonstração. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Alexander

Analytic functions on Banach spaces. Thesis, University of California, Berkeley, 1968.

[2] S. Baryton

Fonctions A-analytiques. Arch. Math., 23,1972, 630-639.

[3] E. K. Blum

A theory of analytic functions in Banach algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 78 (1955), 343-370.

[4] S. Dineen

Complex Analysis in Locally Convex Spaces. North-Holland Math. Studies 57, North-Holland, 1981.

[5] R. Gunning; H. Rossi

Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, 1965.

[6] L. Hörmander

An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, 1966.

[7] J. Horvâth

Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I. Addison-Wesley, 1966.

[8] R. Larsen

Banach Algebras: an introduction. Marcel Dekker, 1973.

[9] E. R. Lorch

The theory of analytic functions in normed abelian vector rings. Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943), 414-425.

[10] J. Mujica

Complex Analysis in Banach Spaces. North-Holland Math. Studies 120, North-Holland, 1986.

[11] L. Nachbin

Topology on Spaces of Holomorphic Mappings. Erg. der Math. 47, Springer-Verlag, 1969.

[12] L. Nachbin

Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties North-Holland Math. Studies 1, North-Holland, 1970.

[13] E. Quelho

Extensão analítica e classes regulares em espaços de Banach. Rel. Int. 109, Unicamp, Campinas, 1978.

[14] M. Schottenloher

Analytic continuation and regular classes in locally convex Hausdorff spaces. Port. Math., 33, 1974, 219-250.

[15] L. Waelbroeck

Topological Vector Spaces and Algebras. Lecture Notes in Math. 230, Springer-Verlag, 1971.

[16] W. Zelazko

Banach Algebras. Elsevier, 1973.