

AÇÕES EXÓTICAS DO GRUPO ORTOGONAL

SOBRE ESFERAS DE BREDON

MIRIAN ELIZABETH FINARDI SCANAVINI

Dissertação apresentada
ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
da Universidade Estadual de Campinas
como requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. HUGO HORACIO TORRIANI

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

CAMPINAS, NOVEMBRO DE 1976

Para João

INTRODUÇÃO

Um dos problemas básicos da teoria dos grupos de transformações consiste em achar condições que garantam que o conjunto $F(\theta, G, X)$ dos pontos fixos de uma ação θ de um grupo G sobre um espaço de Hausdorff X herda propriedades topológicas de X . Suponhamos, por exemplo, que G é o grupo ortogonal $O(m)$, X é a esfera unitária S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ ($1 \leq m \leq n+1$), e que a ação θ de $O(m)$ sobre S^n é ortogonal, isto é, dada por transformações lineares ortogonais. Então é fácil mostrar que $F(\theta, G, X)$ é uma esfera S^r , onde $-1 \leq r \leq n$ e S^{-1} indica o conjunto vazio. Neste exemplo vemos que o subconjunto $F(\theta, G, X)$ de X herda uma propriedade topológica de X .

Como $F(\theta, G, X)$ é uma "função" de três "variáveis", é razoável começar por analisar o problema fixando duas delas e tomando como X um espaço "simples" e como G um grupo "conhecido". Se consideramos, por exemplo, o caso em que X e G são como acima, surge imediatamente a seguinte pergunta: Será que o conjunto dos pontos fixos de qualquer ação de $O(m)$ sobre S^n é uma esfera?

Esta pergunta tem toda a aparência de ser extremamente natural, mas apesar disso (ou, talvez, precisamente por isso) ela ficou sem resposta por muito tempo. Um dos primeiros resultados a respeito dela foi o célebre teorema que P.A. Smith obteve por volta de 1939, e que, na essência, pode ser descrito assim. A esfera usual S^n é substituída por uma n -esfera de homologia mod p , isto é, por um espaço topológico X que possui os mesmos grupos de homologia que S^n com coeficientes em

$Z_p = Z/pZ$, onde p é um número primo; e em lugar de agir sobre X com um grupo ortogonal, se opera com um p -grupo G , onde p é o mesmo primo que acima. Smith demonstrou que, sob estas hipóteses, $F(\theta, G, X)$ é então uma r -esfera de homologia mod p , onde $-1 \leq r \leq n$ e S^{-1} indica como antes o conjunto vazio. Em outras palavras, sob as condições mencionadas o subconjunto $F(\theta, G, X)$ de X herda uma propriedade topológica de X .

Por volta de 1965, G.E. Bredon exibiu um exemplo que mostrou a necessidade da utilização da homologia com coeficientes em Z_p na hipótese e na tese do teorema de Smith acima descrito. Na sua forma mais simples, o exemplo de Bredon consiste em exibir uma involução (ou seja, uma ação θ do grupo Z_2) sobre uma variedade diferenciável X , difeomorfa à esfera usual S^5 , tal que $F(\theta, Z_2, X)$ é um espaço lenticular L de dimensão 3. Como Z_2 é isomorfo ao grupo ortogonal $O(1)$ e L não é homeomorfo a uma esfera, o exemplo de Bredon fornece uma resposta negativa à pergunta que formulamos acima.

Mais geralmente, Bredon constrói variedades diferenciáveis Σ^{4m+1} , homeomorfas à esfera usual S^{4m+1} , e ações θ do grupo ortogonal $O(2m+1)$ sobre Σ^{4m+1} tais que o subconjunto $F(\theta, O(2m+1), \Sigma^{4m+1})$ de Σ^{4m+1} não é homeomorfo a nenhuma esfera. Em outras palavras, estas ações não são "equivalentes" a nenhuma ação ortogonal do grupo $O(2m+1)$ sobre S^{4m+1} ; ou, dito de outra forma, um grupo compacto tão "usual" como o grupo ortogonal pode agir sobre dois espaços indistinguíveis (desde o ponto de vista da Topologia Geral) de maneiras essencialmente diferentes. As construções de ações "exóticas" devidas a Bre-

don, Brieskorn, Hirzebruch, Mayer e outros (para as referências ver o livro de Bredon, p. 54), são de muito interesse por que elas fornecem importantes esclarecimentos sobre a complexidade das ações de grupos compactos sobre variedades.

Resumindo, podemos dizer que o nosso tema principal é a determinação de limites para o campo de validade do teorema de pontos fixos de Smith para ações sobre esferas. Pareceu-nos que o tema, além da sua importância específica na teoria dos grupos de transformações, poderia ser de muito interesse a alunos que desejem iniciar-se nesse ou em outros ramos da topologia algébrica e, talvez, a pessoas ativas em algum campo da geometria ou da topologia. A apresentação feita por Bredon do seu exemplo no seu artigo original e no seu livro é, contudo, muito concisa, o que dificulta a difusão desses importantes resultados fora de círculos altamente especializados. No seu livro, Bredon simplificou alguns detalhes, mas como seu principal objetivo ali era o de prevenir o leitor das dificuldades que surgem no estudo dos grupos de transformações, e não o de fazer uma análise detalhada do seu exemplo, ele se limitou a indicar, em pouco mais de três páginas, os passos mais importantes da construção.

O objetivo desta tese é, então, apresentar os resultados de Bredon mencionados acima de um modo que esperamos seja considerado acessível pelos leitores. Como o nosso desejo foi produzir um texto que pudesse ser lido sem muitas dificuldades por pessoas que se iniciam no estudo da topologia algébrica, optamos pela inclusão de muitos detalhes nas construções.

A organização do trabalho responde também a esse desejo. Assim, na parte inicial do primeiro capítulo fazemos um resumo de alguns conceitos sobre grupos de transformações e colagens equivariantes de espaços topológicos. Ali também introduzimos as variedades $\sum^{2n-1}$ mencionadas antes, e que nós chamamos de "esferas de Bredon" neste trabalho. Estes espaços são obtidos por colagem equivariante de dois toros sólidos através de um homeomorfismo que "deforma" e identifica os bordos. No segundo capítulo estudamos o grau homológico e o grau diferenciável de uma aplicação, e o automorfismo induzido em homologia pelo homeomorfismo de colagem. A sequência de Mayer-Vietoris é utilizada no terceiro capítulo para calcular a homologia singular sobre os inteiros das esferas de Bredon. Finalmente, o quarto capítulo contém uma exposição mais detalhada do exemplo, dado por Bredon, de uma involução exótica sobre a esfera S^5 .

Quero externar aqui meus agradecimentos ao Prof. Dr. Hugo H. Torriani pela proposição do trabalho e pela orientação. Registro, ainda, meu reconhecimento ao Prof. Dr. Francesco Mercuri pelas valiosas indicações recebidas durante a última fase da preparação do manuscrito; ao Prof. Dr. Antonio Conde e ao Prof. Michael Bix por diversas consultas a respeito deste trabalho; e ao Prof. Dr. Wolf Iberkleid por ter me enviado um exemplar da sua tese de mestrado, que foi necessário utilizar aqui. Agradeço também aos meus colegas Sueli Irene Rodrigues Costa e José Luiz Boldrini pelas sugestões recebidas.

Este trabalho deve-se em parte ao apoio do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq) através de Bolsas de Iniciação Científica (FFCL Rio Claro, 1969-1970), e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) através de uma Bolsa de Aperfeiçoamento (IMECC - UNICAMP, 1971).

AÇÕES EXÓTICAS DO GRUPO ORTOGONAL SOBRE ESFERAS DE BREDON

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

1.1 - Alguns Conceitos sobre Grupos de Transformações.....	2
1.2 - Colagens de Espaços Topológicos.....	5
1.3 - Colagens Equivariantes.....	8
1.4 - Esferas de Bredon.....	12

CAPÍTULO II

2.1 - Grau Topológico.....	18
2.2 - Grau de uma Aplicação Diferenciável.....	19
2.3 - Cálculo do Grau de uma Aplicação Diferenciável.....	22
2.4 - Cálculo de um Automorfismo em $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$	25

CAPÍTULO III

3.1 - Sequência de Mayer-Vietores para Esferas de Bredon.....	33
3.2 - Cálculo de Grupos de Homologia para $S^{n-1} \times S^{n-1}$ e $S^{n-1} \times D^n$	40
3.3 - Cálculo dos Grupos de Homologia para Esferas de Bredon.....	43

CAPÍTULO IV

4.1 - Propriedades Topológicas das Esferas de Bredon.....	53
4.2 - Ação Exótica de $O(n)$ sobre $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$	58

BIBLIOGRAFIA.....	61
-------------------	----

CAPÍTULO - I

1.1 - ALGUNS CONCEITOS SOBRE GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES

Referência: Bredon, pp. 32,44.

(1.1.1) Definição. Sejam G um grupo topológico e X um espaço de Hausdorff. Dizemos que o grupo G age sobre X como grupo de transformações se existe uma aplicação contínua $\theta: G \times X \rightarrow X$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$, para todo $g, h \in G$ e todo $x \in X$.

(ii) $\theta(e, x) = x$, para todo $x \in X$, onde e é a identidade de G .

A aplicação θ é chamada uma ação de G sobre X . O espaço X junto com a ação θ é chamado um G -espaço (à esquerda).

(1.1.2) Exemplos.

(i) Seja $G = SO(2)$ o grupo das matrizes reais ortogonais de ordem 2 com determinante igual a 1, agindo sobre $\mathbb{R}^2$ da maneira usual, isto é, através das rotações do plano euclidiano sobre a origem.

(ii) Seja $\{\pm 1\}$ (com a topologia discreta) o grupo multiplicativo de dois elementos. Este grupo age como grupo de transformações sobre a esfera unitária S^2 em $\mathbb{R}^3$, se definirmos a aplicação $\theta: \{\pm 1\} \times S^2 \rightarrow S^2$ por $\theta(\pm 1, (x, y, z)) = (\pm x, \pm y, \pm z)$.

(1.1.3) Observações.

(i) Usamos $g(x)$ ou gx no lugar de $\theta(g, x)$ quando θ está explícita no contexto. Neste caso as condições (i) e (ii)

de (1.1.1) podem ser escritas: $g(h(x)) = (gh)(x)$ e $e(x) = x$. Se $C \subseteq G$ e $A \subseteq X$ colocamos $C(A) = \{g(x) / g \in C, x \in A\}$. Um subconjunto A de X é dito invariante sob a ação de G se $G(A) = A$. A ação θ de G sobre X induz uma ação de G sobre todo subconjunto invariante de X , que será denotada também por θ .

(ii) Para cada elemento $g \in G$ seja $\theta_g: X \rightarrow X$ a aplicação definida por $\theta_g(x) = g(x) = \theta(g, x)$. Como $\theta_g \theta_h = \theta_{gh}$ e $\theta_e = 1_X$, temos $\theta_g \theta_{g^{-1}} = \theta_e = 1_X = \theta_{g^{-1}} \theta_g$, e portanto cada θ_g é um homeomorfismo de X .

(1.1.4) Definição. Seja X um G -espaço. Um ponto $x \in X$ é chamado um ponto fixo de G em X se $G(x) = \{x\}$. Denotaremos o subespaço dos pontos fixos de G em X por $F(G, X)$ ou por X^G . Assim, $F(G, X) = \{x \in X / g(x) = x \text{ para todo } g \in G\}$. Se H é um subgrupo de G , o conjunto dos pontos fixos de H em X será denotado por $F(H, X)$ ou por X^H .

(1.1.5) Exemplo. Com as notações de (1.1.2) temos $F(SO(2), \mathbb{R}^2) = \{0\}$ e $F(\{\pm 1\}, S^2) = \emptyset$.

(1.1.6) Definição. Sejam G um grupo de transformações sobre $\mathbb{R}^n$ e A um subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$ invariante sob a ação de G . A ação θ de G induzida sobre A é dita linear (respectivamente ortogonal) se e somente se θ_g é a restrição de uma transformação linear (respectivamente ortogonal) de $\mathbb{R}^n$ para todo $g \in G$.

(1.1.7) Exemplo. Sejam m e n inteiros tais que $n \geq m \geq 1$, G o grupo $O(m)$ das matrizes reais ortogonais de ordem m agindo de maneira usual sobre $\mathbb{R}^m$, ou seja, por multiplicação (e sobre $\mathbb{R}^n$ através da inclusão $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times (0, \dots, 0)$ ($n-m$ zeros)), e A a esfera unitária S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$. Então a ação de G sobre $\mathbb{R}^n$ é ortogonal e induz uma ação (ortogonal) sobre S^{n-1} .

(1.1.8) Observação. Sejam $GL(n, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes reais não singulares de ordem n e G um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ agindo de maneira natural sobre $\mathbb{R}^n$. Se $x, y \in F(G, \mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $\theta_g(x) = x$ e $\theta_g(y) = y$ para todo $g \in G$, donde $\theta_g(x+y) = \theta_g(x) + \theta_g(y) = x+y$ e $\theta_g(\alpha x) = \alpha \theta_g(x) = \alpha x$, pois cada θ_g é linear. Portanto, $F(G, \mathbb{R}^n)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Seja agora G um subgrupo de $O(n)$ agindo de maneira natural sobre $\mathbb{R}^n$. Como G induz uma aplicação sobre S^{n-1} (cf. (1.1.7)), temos $F(G, S^{n-1}) \subset S^{n-1}$. Então $F(G, S^{n-1}) = F(G, \mathbb{R}^n) \cap S^{n-1} = (r\text{-subespaço}) \cap S^{n-1} = S^r$, ou seja, $F(G, S^{n-1}) = S^r$ ($-1 \leq r \leq n-1$), onde $S^{-1} = \emptyset$.

(1.1.9) Exemplos.

(i) Consideremos a ação antípoda (cf. (1.1.2 (ii))) de $O(1) \cong \{\pm 1\}$ sobre S^2 . Como vimos em (1.1.5) vale aqui $F(O(1), S^2) = S^{-1}$.

(ii) Seja agora $G = SO(2)$ agindo sobre S^2 através de rotações ao redor do eixo z . Como G está parametrizado pelo ângulo ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$), a ação θ de G sobre S^2 é dada por

$\theta(\phi, (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})) = (x \cos\phi + y \sin\phi, -x \sin\phi + y \cos\phi, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})$. Portanto, s3o ficam fixos os polos $(0, 0, \pm 1)$, ou seja, $F(SO(2), S^2) = S^0$.

(iii) Seja $G = O(1)$ agindo sobre S^2 pela reflex3o sobre o plano xy . Como $G = \{\pm 1\}$ esta a3o3o 3e definida por $\theta(-1, (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})) = (x, y, \mp\sqrt{1-x^2-y^2})$. 3e claro que $F(O(1), S^2) = S^1$.

(iv) Finalmente, seja G um subgrupo qualquer de $O(3)$ agindo trivialmente sobre S^2 , isto 3e, $g(x) = x$ para todo $g \in G$ e todo $x \in S^2$. Por defini3o3o temos ent3o $F(G, S^2) = S^2$.

1.2 - COLAGENS DE ESPA3OS TOPOL3GICOS

Refer3ncia: Dugundji, p. 127.

(1.2.1) Defini3o. Sejam X_1 e X_2 espa3os topol3gicos. Consideremos $X_1 \times \{1\}$ e $X_2 \times \{2\}$ com a topologia produto da topologia de X_1 (respec. de X_2) com a topologia discreta de $\{1\}$ (respec. de $\{2\}$). Ent3o a uni3o disjunta de X_1 com X_2 3e o conjunto

$X_1 + X_2 = \{(x_1, 1), (x_2, 2), \text{ para todo } x_1 \in X_1 \text{ e todo } x_2 \in X_2\}$ com a seguinte topologia $U \subset (X_1 + X_2)$ 3e aberto $\iff U \cap \{X_1 \times \{1\}\}$ e $U \cap \{X_2 \times \{2\}\}$ s3o ambos subconjuntos abertos.

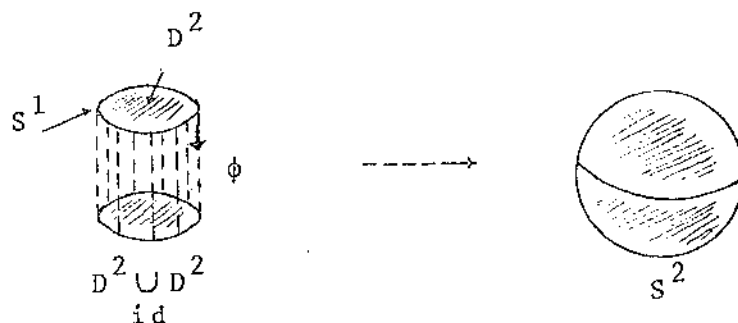
(1.2.2) Defini3o. Sejam A um subespa3o fechado de X_1 e

$\phi: A \rightarrow X_2$ uma função contínua. A relação R , na união disjunta $X_1 + X_2$, dada por $(x,1) R (x,1)$, para todo $x \in X_1$; $(y,2) R (y,2)$, para todo $y \in X_2$; $(x,1) R (y,2)$, se $y = \phi(x)$, $x \in A$; é uma relação de equivalência. A colagem dos espaços X_1 e X_2 através de ϕ é o espaço

$$X_1 \underset{\phi}{\cup} X_2 = X_1 + X_2 / R$$

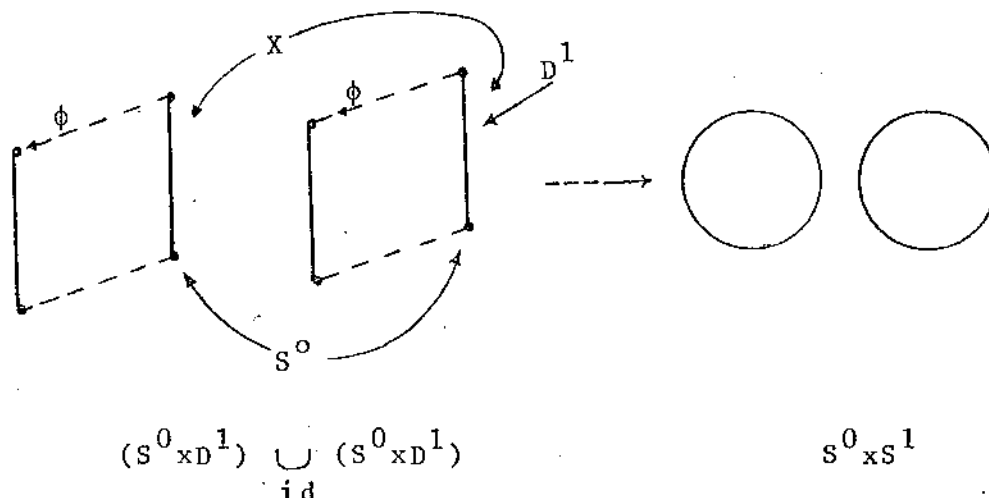
com a topologia quociente.

(1.2.3) Sejam X a bola unitária D^n em $\mathbb{R}^n$, $Y = X$, $A = S^{n-1}$ e ϕ a identidade em A . Então a colagem $D^n \underset{id}{\cup} D^n$ é homeomorfa a S^n . Tomando-se $n = 2$, teremos $X = D^2$, $Y = X$, $A = S^1$, ϕ identidade em S^1 , é fácil vermos geometricamente (v. figura) que a colagem de X e Y é homeomorfa a S^2



(1.2.4) Sejam $X = S^{n-1} \times D^n$ com a topologia do produto cartesiano e $A = S^{n-1} \times S^{n-1}$, então A é um subconjunto fechado de X . Tomemos $X = Y$ e ϕ a aplicação identidade em $S^{n-1} \times S^{n-1}$. Então a colagem $(S^{n-1} \times D^n) \underset{id}{\cup} (S^{n-1} \times D^n)$ é homeomorfa a $S^{n-1} \times S^n$. No caso em que $n = 1$ é fácil vermos geometricamente (v. figu-

ra) que a colagem $(S^0 \times D^1) \cup_{id} (S^0 \times D^1)$ (a aplicação identidade sobre $S^0 \times S^0$) é homeomorfa a $S^0 \times S^1$.



(1.2.5) Concluimos estes exemplos mencionando o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Godbillon, Prop. 1.7, p.33.

Lema. Sejam p e q inteiros não negativos tais que $p \geq 1$ e $m = p+q$. Então a esfera S^m é homeomorfa ao espaço obtido pela colagem de $D^p \times S^q$ e $S^{p-1} \times D^{q+1}$ através da aplicação identidade sobre $S^{p-1} \times S^q$.

Se tomarmos $m = 2n-1$, $p = n$, $q = n-1$, $X = D^n \times S^{n-1}$, $Y = S^{n-1} \times D^n$, $A = S^{n-1} \times S^{n-1}$ e ϕ a aplicação identidade sobre A , teremos um homeomorfismo de $(D^n \times S^{n-1}) \cup_{id} (S^{n-1} \times D^n)$ sobre S^{2n-1} . Como $(S^{n-1} \times D^n) \cup_{id} (D^n \times S^{n-1})$ é homeomorfo a $(D^n \times S^{n-1}) \cup_{id} (S^{n-1} \times D^n)$,

podemos concluir que existe também um homeomorfismo

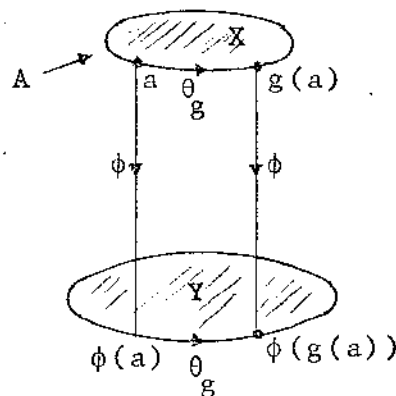
$$(S^{n-1} \times D^n) \cup_{\text{id}} (D^n \times S^{n-1}) \simeq S^{2n-1}.$$

1.3 - COLAGENS EQUIVARIANTES

Referência : Bredon, pp. 48,50.

(1.3.1) Definição. Sejam X e Y G -espaços e $\phi: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que ϕ é uma aplicação equivariante se ϕ comuta com a ação do grupo, isto é, $\phi(g(x)) = g(\phi(x))$, para todo $g \in G$ e todo $x \in X$.

(1.3.2) Observação. Sejam X e Y G -espaços disjuntos, $A \subset X$ um subespaço invariante (cf. (1.1.3 (i))) e $\phi: A \rightarrow Y$ uma aplicação contínua equivariante. Como $g(\phi(a)) = \phi(g(a))$ para todo $a \in A$ e todo $g \in G$, a colagem $X \cup_{\phi} Y$ dos espaços X e Y através da ϕ é também um G -espaço.



Se ϕ é um homeomorfismo equivariante de A sobre sua imagem podemos supor que A é um subespaço de X e de Y com a mes-

ma G -ação sobre A nos dois casos. Se $\phi:A \rightarrow A$ se estende a um homeomorfismo equivariante de X sobre si mesmo (resp. de Y sobre si mesmo), então $X \underset{\phi}{\cup} Y \approx X \underset{id}{\cup} Y$ como G -espaços, o homeomorfismo sendo dado por ϕ em X e pela identidade em Y (resp. por ϕ em Y e pela identidade em X). Entretanto se ϕ não se estende a X ou a Y , $X \underset{\phi}{\cup} Y$ pode ser um novo G -espaço.

(1.3.3) Agora vamos aplicar as considerações precedentes ao caso particular em que G é o grupo ortogonal $O(n)$, X e Y são iguais ao produto cartesiano $S^{n-1} \times D^n$ e A é o bordo $S^{n-1} \times S^{n-1}$ de $S^{n-1} \times D^n$. As ações de $O(n)$ sobre estes espaços serão dadas pela ação usual sobre S^{n-1} e sobre D^n , e pela ação diagonal sobre $S^{n-1} \times D^n$. A construção de uma família enumerável de $O(n)$ -espaços por colagem equivariante de duas cópias de $S^{n-1} \times D^n$ através de auto-homeomorfismos equivariantes de $S^{n-1} \times S^{n-1}$, que descrevemos nesta secção e na seguinte, é devida a G.E. Bredon [artigo], [livro].

O primeiro passo da construção é encontrar uma aplicação equivariante $\theta:S^{n-1} \rightarrow O(n)$ conveniente que leve $x \in S^{n-1}$ em $\theta_x \in O(n)$, onde $O(n)$ age sobre si mesmo por conjugação. Uma discussão a respeito das distintas possibilidades que se apresentam "a priori" pode ser encontrada em Bredon [livro] p.50. Para nossos propósitos será suficiente considerarmos a aplicação $\theta:S^{n-1} \rightarrow O(n)$ definida por

$$\theta_x(y) = 2 \langle x, y \rangle x - y, \quad ,$$

para todo $x \in S^{n-1}$ e todo $y \in \mathbb{R}^n$, onde $\langle x, y \rangle$ denota o produto interno usual de x e y . A aplicação está bem definida pois

$$\|\theta_x(y)\|^2 = \langle 2\langle x, y \rangle x - y, 2\langle x, y \rangle x - y \rangle = \|y\|^2, \text{ então } \theta_x(y) \in O(n)$$

(1.3.4) Lema. A aplicação θ é equivariante com respeito a $O(n)$.

Demonstração Para cada $g \in O(n)$, $x \in S^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}^n$ temos por definição

$$\theta_{g(x)}(g(y)) = 2\langle g(x), g(y) \rangle g(x) - g(y).$$

Como $x \mapsto g(x)$ é uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^n$ ela preserva o produto interno, logo

$$2\langle g(x), g(y) \rangle g(x) - g(y) = 2\langle x, y \rangle g(x) - g(y) = g(2\langle x, y \rangle x - y)$$

pela linearidade de g . Portanto,

$$\theta_{g(x)}(g(y)) = g\theta_x(y). \quad (1)$$

mas para todo $y \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\theta_{g(x)}(y) = \theta_{g(x)}(g(g^{-1}(y))) ,$$

e por (1)

$$\theta_{g(x)}(g(g^{-1}(y))) = g\theta_x(g^{-1}(y)) = g\theta_x g^{-1}(y)$$

Dai vem que

$$\theta_{g(x)} = g\theta_x g^{-1} \quad (2)$$

Portanto, θ é equivariante, como desejávamos.

(1.3.5) Lema. Seja a aplicação $\phi: S^{n-1}_x S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}_x S^{n-1}$ definida por $\phi(x,y) = (\theta_x(y), x)$. Então ϕ é um homeomorfismo equivariante (a menos de menção em contrário, em produtos cartesianos consideraremos a ação diagonal).

Demonstração. Esta asserção decorre do fato de ϕ poder ser decomposta em duas aplicações

$$(x,y) \mapsto (\theta_x(x), \theta_x(y)) \mapsto (\theta_x(y), \theta_x(x))$$

que são homeomorfismos equivariantes e do fato que $\theta_x(x) = x$.

(1.3.6) Lema. Para cada inteiro k (positivo, negativo ou nulo) a potência k -ésima $\phi^k: S^{n-1}_x S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}_x S^{n-1}$ de ϕ é um homeomorfismo equivariante.

Demonstração. É claro que ϕ^k é um homeomorfismo para todo k . Além disso a identidade ϕ^0 é uma aplicação equivariante e já vimos que ϕ é equivariante, logo a afirmação vale para $k=0$ e $k=1$. Suponhamos a válida para $k = n$. Pela hipótese de indução e o fato de ϕ ser equivariante temos

$$\begin{aligned} \phi(\phi^n(g(x,y))) &= \phi(g(\phi^n(x,y))) \\ &= g(\phi(\phi^n(x,y))) , \end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Portanto,

$$\phi^{n+1}(g(x,y)) = g(\phi^{n+1}(x,y)) ,$$

donde ϕ^k é equivariante para todo $k \geq 0$. Além disso, do fa-

to de ϕ ser equivariante decorre que ϕ^{-1} também o é. Com efeito (cf. Bredon, p.35), se $y = \phi(x)$ e $g \in G$ vale

$$\phi^{-1}(g(y)) = \phi^{-1}(g(\phi(x))) = \phi^{-1}(\phi(g(x))) = g(x) = g(\phi^{-1}(y))..$$

Aplicando o processo de indução para o conjunto dos inteiros $k \leq -1$ deduzimos que ϕ^k é um homeomorfismo equivariante para cada inteiro k .

(1.3.7) Observação. Com as notações de (1.3.6), é fácil ver que todas as potências ϕ^k de ϕ são auto-difeomorfismos (equivariantes) de $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

1.4 - ESFERAS DE BREDON

Referências: Bredon [livro] pp. 50,55; Bredon [artigo].

(1.4.1) Definição. Sejam n um número natural ≥ 1 e k um inteiro (positivo, negativo ou nulo). O $O(n)$ -espaço

$$\sum_k^{2n-1} = (S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi^k} (S^{n-1} \times D^n)$$

obtido por colagem equivariante de duas cópias de $S^{n-1} \times D^n$ através do homeomorfismo equivariante ϕ^k de $S^{n-1} \times S^{n-1}$ recebe o nome de esfera de Bredon de dimensão $2n-1$ e tipo k .

A seguir daremos alguns exemplos de esferas de Bredon.

(1.4.2) Sejam n qualquer e $k = 0$, o homeomorfismo ϕ^k é então a identidade e já vimos em (1.2.3) que a colagem de duas cópias de D^n pela identidade em S^{n-1} é homeomorfa a S^n . Portanto temos um homeomorfismo

$$\sum_0^{2n-1} \approx S^{n-1} \times S^n.$$

Aqui $O(n)$ pode ser considerado como agindo sobre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ através da inclusão de $O(n)$ em $O(n+1)$ dada por

$$A \longmapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para toda matriz $A \in O(n)$, onde os zeros denotam vetores nulos de n componentes. Se fizermos $O(n)$ agir diagonalmente sobre $S^{n-1} \times S^n$ o homeomorfismo precedente se torna um homeomorfismo de $O(n)$ -espaços.

(1.4.3) Sejam n qualquer e $k = 1$. Primeiramente observemos que $\sum_k^{2n-1}$ também pode ser descrita como espaço obtido pela colagem de $S^{n-1} \times D^n$ a $D^n \times S^{n-1}$ através da aplicação

$$\phi': S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \times S^{n-1},$$

definida por $\phi'(x, y) = (x, \theta_x(y))$. Com efeito, ϕ' nada mais é do que ϕ composta com uma mudança de fatores. Mas $\theta_x(y) \in D^n$ para todo $y \in D^n$, pois $\theta_x(y)$ é a reflexão de y sobre a reta que passa pela origem e pelo ponto x (cf. (1.3.3)); logo ϕ'

pode ser definida sobre todo o conjunto $S^{n-1} \times D^n$. Seja

$$\bar{\phi}': S^{n-1} \times D^n \longrightarrow S^{n-1} \times D^n$$

a aplicação definida pela mesma fórmula que ϕ' . É óbvio que $\bar{\phi}'$ é um auto-homeomorfismo equivariante de $S^{n-1} \times D^n$. Como observamos em (1.3.2), existe então um homeomorfismo (claramente equivariante) de

$$\sum_1^{2n-1} = (S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi'} (D^n \times S^{n-1})$$

sobre $(S^{n-1} \times D^n) \cup_{\text{id}} (D^n \times S^{n-1})$. Mas, por (1.2.5) existe também

um homeomorfismo de $(S^{n-1} \times D^n) \cup_{\text{id}} (D^n \times S^{n-1})$ sobre S^{2n-1} , onde S^{2n-1} é considerada contida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $O(n)$ age diagonalmente sobre S^{2n-1} . Prova-se que este segundo homeomorfismo é também equivariante, então $\sum_1^{2n-1}$ é equivariantemente homeomorfa a esfera usual S^{2n-1} , onde as ações de $O(n)$ sobre estes espaços são mencionadas acima.

(1.4.4) Sejam n e k quaisquer. Consideremos dois pontos P e Q de $S^{n-1} \times S^{n-1}$. Então identificamos P com Q se e somente se $Q = \phi^k(P)$, ou seja, se e somente se $P = \phi^{-k}(Q)$. Isto significa que, trocando os papéis desempenhados pelas duas cópias de $S^{n-1} \times D^n$, obtemos um homeomorfismo

$$\sum_k^{2n-1} \approx \sum_{-k}^{2n-1}$$

que é obviamente equivariante. Será suficiente então conside-

rarmos esferas de Bredon do tipo $k \geq 0$.

(1.4.5) Sejam $n = 1$ e k qualquer. Neste caso ϕ é um autohomeomorfismo de $S^0 \times S^0$, e como $S^0 = \{\pm 1\}$ basta conhecermos $\theta_{\pm 1}(\pm 1)$ para conhecermos ϕ . Pela definição de $\theta_x(y)$ dada em (1.3.3) temos $\theta_1(1) = 1$, $\theta_1(-1) = -1$, $\theta_{-1}(1) = 1$ e $\theta_{-1}(-1) = -1$. Portanto θ_x é identidade para todo $x \in S^0$. Então ϕ fica definida por $\phi(x,y) = (y,x)$, e daí segue imediatamente que

$$\phi^k = \begin{cases} \text{identidade, se } k \text{ é par } \geq 0 ; \\ \phi, & \text{se } k \text{ é ímpar } \geq 1 . \end{cases}$$

Se k é par ≥ 0 , temos por definição

$$\sum_k^1 = (S^0 \times D^1) \cup_{\text{id}} (S^0 \times D^1)$$

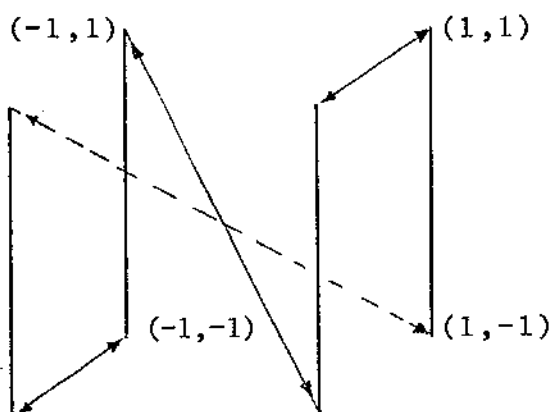
onde id é a identidade sobre $S^0 \times S^1$. Vimos em (1.2.4) que $(S^0 \times D^1) \cup_{\text{id}} (S^0 \times D^1)$ é homeomorfo a $S^0 \times S^1$ (Prova-se facilmente que o homeomorfismo é equivariante com respeito a $O(1)$). Logo, se k é par ≥ 0 existe um homeomorfismo de $O(1)$ -espaços.

$$\sum_k^1 \approx S^0 \times S^1 .$$

Se k é ímpar ≥ 1 , vimos acima que $\phi^k = \phi$. Como $S^0 \times S^0$ consiste dos quatro pontos $(\pm 1, \pm 1)$ e $\phi: S^0 \times S^0 \rightarrow S^0 \times S^0$ satisfaz $\phi(x,y) = (y,x)$, para todo $(x,y) \in S^0 \times S^0$, podemos representar

$$\sum_k^1 = (S^0 \times D^1) \cup_{\phi} (S^0 \times D^1)$$

Neste caso, observemos a figura seguinte, onde as flechas indicam as identificações a serem feitas pela ϕ



Fazendo-se essas identificações deduzimos que se k é ímpar ≥ 1 existe um homeomorfismo de $O(1)$ -espaços

$$\sum_k^1 \approx S^1$$

Nos casos particulares descritos acima as esferas de Bredon $\sum_k^{2n-1}$ reduziram-se as esferas usuais (ou produtos delas) e as ações do grupo ortogonal $O(n)$ sobre aqueles espaços foram também as usuais. No capítulo IV veremos que quando $n \geq 2$ e $k \geq 2$ as esferas de Bredon $\sum_k^{2n-1}$ fornecem exemplos de $O(n)$ -espaços com propriedades inesperadas.

C A P Í T U L O - I I

2.1 - GRAU TOPOLÓGICO

Referências: Vick, Greenberg.

(2.1.1) Lema Sejam q e n inteiros ≥ 0 . Então a homologia da esfera S^n é a seguinte: se $n = 0$

$$H_q(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0; \\ 0, & \text{se } q > 0; \end{cases}$$

e se $n \geq 1$

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \text{ ou } q = n \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq n \end{cases}$$

Demonstração. Ver Vick pp. 7, 10, Greenberg p. 62.

(2.1.2) Sejam $n \geq 1$, f uma aplicação de S^n em S^n , e α um gerador de $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Seja f_* o homomorfismo induzido por f em $H_n(S^n)$, então $f_*(\alpha) = m\alpha$ para algum inteiro m . Observe-mos que este inteiro independe da escolha do gerador pois

$$f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -m\alpha = m(-\alpha)$$

(2.1.3) Definição. Nas condições de (2.1.2) definimos m como grau de f e denotamos $m = d(f)$.

(2.1.4) As seguintes propriedades seguem imediatamente da definição anterior:

(a) $d(\text{identidade}) = 1$

(b) Se f e g são aplicações de S^n em S^n então,
 $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$.

(c) $d(\text{aplicação constante}) = 0$

(2.1.5) Lema Sejam $n > 0$ e f uma aplicação de S^n em S^n dada por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$$

Então $d(f) = -1$.

Demonstração Ver Vick p. 31.

(2.1.6) Corolário. Seja A a aplicação antípoda de S^n em S^n . Então $d(A) = (-1)^{n+1}$.

Demonstração Segue imediatamente do Lema (2.1.5) e da parte (b) de (2.1.4).

2.2 - GRAU DE UMA APLICAÇÃO DIFERENCIÁVEL

Referências: Conde, Milnor.

(2.2.1) Definição. Sejam B e B' bases de um espaço vetorial real E de dimensão finita. Dizemos que B e B' determinam a mesma orientação de E se a transformação linear que leva B em B' tem determinante positivo.

A relação $B \equiv B' \iff B$ e B' determinam a mesma orientação de E é uma relação de equivalência sobre o conjunto das bases de E e dá origem a exatamente duas classes de equivalência que chamaremos orientações de E .

(2.2.2) Definição. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma orientação em M é uma escolha de orientação nos espaços tangentes a M em cada um de seus pontos, de tal modo que a seguinte condição seja satisfeita: Para cada x de M existe uma carta local (U, h) com $x \in U$ tal que $Dh(y)$ leve a orientação escolhida em $T(M)_y$, para todo $y \in U$, na orientação de $\mathbb{R}^n$ dada por sua base canônica. Se a variedade M tem dimensão zero, dispensa-se esta condição.

(2.2.3) Sejam agora M e N variedades diferenciáveis e de mesma dimensão, suponhamos que M é compacta sem bordo. Sejam f uma aplicação C^∞ de M em N e y um valor regular de f . Pelo teorema de Sard e o fato de M ser compacta deduzimos (cf. Conde pp. 52-53) que $f^{-1}(y)$ tem só um número finito de pontos. Além disso, se $x \in f^{-1}(y)$, então $Df(x)$ é um isomorfismo entre $T(M)_x$ e $T(N)_y$. Dizemos que f preserva a orientação de M em x se $Df(x)$ leva uma base de $T(M)_x$, pertencente a orientação de M , numa base $T(N)_{f(x)}$, pertencente a orientação de N . Se isto não ocorre, dizemos que f inverte a orientação de M em x .

(2.2.4) Observação. Com as notação e observações anteriores, esta definição pode ser reformulada. Seja (U, h) com

$x \in U$ uma carta do atlas que dá orientação de M e (V, k) com $y \in V$ uma carta do atlas que dá orientação de N . Então dizemos que f preserva a orientação de M em x se o jacobiano de $k_0 f_0 h^{-1}$ tem determinante positivo, e dizemos que f inverte a orientação de M em x se este jacobiano tem determinante negativo.

Associemos a $x \in f^{-1}(y)$ o valor $\text{sgn } Df(x) = 1$, se f preserva a orientação de M em x e $\text{sgn } Df(x) = -1$ se f inverte a orientação de M em x .

(2.2.5) Definição. Com as notações de (2.2.3) e (2.2.4) o grau diferenciável de f em y é definido por

$$\partial(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } Df(x)$$

Observemos que $\partial(f, y)$ está bem definido pois, como mencionamos em (2.2.3), $f^{-1}(y)$ tem só um número finito de pontos.

(2.2.6) Lema. Sejam M e N variedades C^∞ de mesma dimensão, orientadas e sem bordo. Suponhamos que M é compacta e N é conexa. Seja f uma aplicação C^∞ de M em N . Então $\partial(f, y)$ tem o mesmo valor para todo valor regular y de f .

Demonstração. Ver Conde, p. 83.

Sob as hipóteses de (2.2.6), o valor comum de $\partial(f, y)$ para qualquer valor regular y de f será chamado o grau diferen-

ciável de f e denotado simplesmente por $\partial(f)$.

(2.2.7) Proposição. O grau topológico e o diferenciável são iguais, isto é, $d(f) = \partial(f)$.

Demonstração. Ver W. IBERKLEID, p. 16 .

2.3 - CÁLCULO DO GRAU DE UMA APLICAÇÃO DEFERENCIÁVEL

Referências: Bredon, Conde.

(2.3.1) Consideremos a aplicação F de S^{n-1} em S^{n-1} dada por $x \mapsto \theta_x(*) = 2 \langle x, * \rangle x - *$. Esta aplicação é a restrição a S^{n-1} da aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(x) = (2x_1^2 - 1, 2x_1 x_2, \dots, 2x_1 x_n),$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, e $* = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

(2.3.2) Lema. Seja f como acima. Então a imagem inversa de qualquer valor regular y de f tem exatamente dois pontos.

Demonstração. A matriz jacobiana de f em x é

$$J f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 2x_3 & 0 & 2x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 2x_n & 0 & 0 & \dots & 2x_1 \end{bmatrix}$$

Como seu determinante vale $2^{n+1}x_1^n$, ele se anula se e somente se $x_1 = 0$. Concluimos então que o único valor crítico de f é $(-1, 0, \dots, 0)$.

Se y é um valor regular de f podemos escrever $y = f(x)$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é tal que $x_1 \neq 0$. Suponhamos que exista um ponto $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $y = f(z)$. Então

$$(2z_1^2 - 1, 2z_1 z_2, \dots, 2z_1 z_n) = (2x_1^2 - 1, 2x_1 x_2, \dots, 2x_1 x_n),$$

donde, em particular, $2z_1^2 - 1 = 2x_1^2 - 1$. Assim $z_1^2 = x_1^2$ e $z_1 = \pm x_1$. Mas também vale $2z_1 z_i = 2x_1 x_i$ ($2 \leq i \leq n$), donde $(\pm x_1) z_i = x_1 x_i$, e como $x_1 \neq 0$ obtemos $z_i = \pm x_i$. A relação $z_1 z_i = x_1 x_i$ implica que se $z_1 = x_1$ (resp. $z_1 = -x_1$) então $z_i = x_i$ (resp. $z_i = -x_i$) para todo i ($2 \leq i \leq n$). Portanto $z = x$ ou $z = -x$.

(2.3.3) Observação. Se $y \in S^{n-1}$ é valor regular de f , então y é valor regular da restrição F de f em S^{n-1} . Sabemos que $\mathbb{R}^n$ é uma variedade orientável e que $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ subvariedade. S^{n-1} é uma variedade orientável e a orientação de $\mathbb{R}^n$ induz uma orientação em S^{n-1} que definimos do seguinte modo. Seja $x \in S^{n-1}$, escolhemos uma base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $T(\mathbb{R}^n)_x (= \mathbb{R}^n)$ dada pela orientação de $\mathbb{R}^n$ e tal que v_1 é vetor normal externo a S^{n-1} em x e $(v_2, \dots, v_n)$ é base de $T(S^{n-1})_x$. Assim sendo a escolha de $(v_2, \dots, v_n)$, para cada $x \in S^{n-1}$, determina uma orientação de S^{n-1} , que chamamos de induzida pela de $\mathbb{R}^n$.

(2.3.4) Lema. Seja a aplicação F de S^{n-1} em S^{n-1} dada por $x \mapsto \theta_x(*)$ definida em (2.3.1). Então $\partial(f) = 2$, se n é par e $\partial(f) = 0$, se n é ímpar.

Demonstração. Como S^{n-1} é variedade conexa, o grau independe do valor regular y considerado (cf. Lema (2.2.6)). Fixemos $y = (1, 0, \dots, 0)$, cuja imagem inversa será $\{y, -y\}$ (cf. Lema (2.3.2)).

Para o ponto regular y , consideremos a base canônica de $T(\mathbb{R}^n)_y = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ (portanto ℓ_1 é vetor normal externo a S^{n-1} em y .) A base $(\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n)$ é coerente com a orientação anterior dada a S^{n-1} . Analisemos o caso em que $f(y) = F(y) = y$. Temos que $Jf(y)(\ell_2) = 2\ell_2, \dots, Jf(y)(\ell_n) = 2\ell_n$. Logo a matriz mudança de base (de ordem $n-1$) de $(\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n)$ para $(2\ell_2, 2\ell_3, \dots, 2\ell_n)$ tem determinante positivo, então F preserva a orientação de S^{n-1} em y . Associamos então ao ponto regular y , o valor

$$\text{sgn } DF(y) = 1$$

independendo do fato de n ser par ou ímpar.

Para o ponto regular $-y$, consideremos uma base em $T(\mathbb{R}^n)_{(-y)}$, $(-\ell_1, -\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n)$, (portanto $-\ell_1$ é vetor normal externo a S^{n-1} em $(-y)$). A base $(-\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n)$ de $T(S^{n-1})_{(-y)}$ é coerente com a orientação anterior dada a S^{n-1} . Temos que $Jf(-y)(-\ell_2) = 2\ell_2$, $Jf(-y)(\ell_3) = -2\ell_3, \dots, Jf(-y)(\ell_n) = -2\ell_n$. A base fixada anteriormente em $y = F(-y)$ é $(\ell_2, \dots, \ell_n)$, logo

a matriz mudança de base, (de ordem $n-1$), em $T(\mathbb{R}^n)_{\bar{y}}$, de $(\ell_2, \dots, \ell_n)$ para $(2\ell_2, -2\ell_3, \dots, -2\ell_n)$ tem determinante positivo, se n é par e tem determinante negativo, se n é ímpar. Então (cf. (2.2.4)).

$$\text{sgn } DF(-\bar{y}) = 1, \quad \text{se } n \text{ é par};$$

e

$$\text{sgn } DF(-y) = -1, \quad \text{se } n \text{ é ímpar}.$$

Portanto

$$\partial F = 2, \quad \text{se } n \text{ é par},$$

$$\partial F = 0, \quad \text{se } n \text{ é ímpar}.$$

2.4 - CÁLCULO DE UM AUTOMORFISMO EM $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$

Referências: Bredon, Greenberg, Vick.

Em nosso estudo consideraremos sempre os grupos de homologia com coeficientes inteiros.

(2.4.1) Sejam X e Y variedades cujos grupos de homologia de dimensão menor que n são livres, então

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{p=0}^n H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y).$$

Este resultado é conhecido como Fórmula de Künneth (cf. e.g. Greenberg, p. 198).

Exemplo. Seja $X = Y = S^n$, $n \geq 1$. Calculemos $H_n(S^n \times S^n)$.

$$\begin{aligned} H_n(S^n \times S^n) &\cong \bigoplus_{p=0}^n H_p(S^n) \otimes H_{n-p}(S^n) \\ &= [H_0(S^n) \otimes H_n(S^n)] \oplus [H_1(S^n) \otimes H_{n-1}(S^n)] \oplus \\ &\dots \oplus [H_n(S^n) \otimes H_0(S^n)] \end{aligned}$$

Utilizando Lema (2.1.1) e o fato que $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, concluímos que

$$H_n(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

(2.4.2) Sejam α_1 gerador de $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, α e β classes geradoras de $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Então $\alpha = (\alpha_1, 0)$ e $\beta = (0, \alpha_1)$. Seja ϕ a aplicação de $S^{n-1} \times S^{n-1}$, dada por

$$\phi(x, y) = (\theta_x(y), x)$$

onde $\theta_x(y)$ é a aplicação definida em (1.3.3). Então ϕ induz um automorfismo em $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$, dado por $\phi_*(\alpha) = a_1\alpha + a_2\beta$ e $\phi_*(\beta) = b_1\alpha + b_2\beta$, onde $a_i (i=1,2)$, $b_i (i=1,2)$ são constantes a serem determinadas.

(2.4.3) Lema. Sejam $*$ = (1,0,...,0) um ponto fixo de S^{n-1} , e $F^i (i = 1,2)$ a aplicação $F^i = p_i \circ \phi \circ i$ (p_i = projeção no i -ésimo fator)

$$S^{n-1} \times_x (*) \xrightarrow{i} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\phi} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{p_i} S^{n-1}$$

Então com as notações e observações de (2.4.2) temos que $a_i (i = 1,2)$ é o grau de $F^i (i = 1,2)$.

Demonstração:

(I) Para $i = 1$ temos $F^1 = p_1 \circ \phi \circ i$. Sabemos que F^1 induz um automorfismo em $H_{n-1}(S^{n-1})$ dado por $F_*^1 = p_{1*} \circ \phi_* \circ i_*$. Então

$$\begin{aligned} F_*^1(\alpha_1) &= (p_{1*} \circ \phi_* \circ i_*)\alpha_1 = (p_{1*} \circ \phi_*)(\alpha_1, 0) \\ &= (p_{1*} \circ \phi_*)(\alpha) = p_{1*}(a_1\alpha + a_2\beta) \\ &= p_{1*}(a_1(\alpha_1, 0) + a_2(0, \alpha_1)) = a_1\alpha_1 \end{aligned}$$

além disso, temos (cf. (2.1.3)) que $F_*^1(\alpha_1) = d(F^1)\alpha_1$.

Portanto, concluímos que

$$a_1 = d(F^1).$$

(II) Para $i = 2$, $F^2 = p_2 \circ \phi \circ i$. F^2 induz um automorfismo em $H_{n-1}(S^{n-1})$ dado por $F_*^2 = p_{2*} \circ \phi_* \circ i_*$. Então de maneira idêntica a parte (I) provamos que $a_2 = d(F^2)$.

(2.4.4) Lema. Sejam $*$ = (1,0,...,0) um ponto fixo de S^{n-1} e G^i ($i=1,2$) a aplicação composta $G^i = p_i \circ \phi \circ i$ (p_i = projeção no i -ésimo fator)

$$(*) \times S^{n-1} \xrightarrow{i} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\phi} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{p_i} S^{n-1}.$$

Então com as notações e observações de (2.4.2), temos que b_i ($i=1,2$) é o grau de G^i ($i=1,2$).

Demonstração. Análoga a do Lema (2.4.3).

(2.4.5) Proposição. Seja ϕ_* um automorfismo de $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ nas condições anteriores. Então

$$\phi_*(\alpha) = 1 + (-1)^n \alpha + \beta;$$

$$\phi_*(\beta) = (-1)^{n-1} \alpha,$$

isto é, $a_1 = 1 + (-1)^n$, $a_2 = 1$, $b_1 = (-1)^{n-1}$, $b_2 = 0$.

Demonstração.

(i) Temos que $a_1 = d(F^1)$, e $F^1(x, *) = (p_1 \circ \phi \circ i)(x, *)$ (cf. Lema (2.4.3)). Então

$$\begin{aligned} F^1(x, *) &= (p_1 \circ \phi \circ i)(x, *) = (p_1 \circ \phi)(x, *) \\ &= p_1(\phi(x, *)) = p_1(\theta_x(*), x) \end{aligned}$$

Logo,

$$F^1(x, *) = \theta_x(*) .$$

Utilizando Lema (2.3.4) e o fato que o grau de uma aplicação diferenciável é igual ao grau topológico (cf. Proposição (2.2.7)), temos que

$$a_1 = 1 + (-1)^n .$$

(ii) Como $F^2(x, *) = p_2 \circ \phi \circ i(x, *)$ (cf. Lema (2.4.3), e parte anterior (i)), temos que

$$F^2(x, *) = x .$$

Então $d(F^2) = 1$ (cf. (2.1.4), parte (a)). Portanto

$$a_2 = 1 .$$

(iii) Pelo lema anterior $b_1 = d(G^1)$, onde $G^1(*, x) = (p_1 \circ \phi \circ i)(x, *)$, temos que $G^1(x, *) = \theta_*(x)$.

Logo se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, então

$$G^1(*, x) = 2\langle *, x \rangle * - x = (2x_1, 0, \dots, 0) - (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$G^1(*, x) = (x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

Portanto, $d(G^1) = (-1)^{n-1}$ (cf. (2.1.4), Lema (2.1.5) e corolário (2.1.6)), ou seja

$$b_1 = (-1)^{n-1}.$$

(iv) Temos que $b_2 = d(G^2)$ e $G^2(*, x) = (p_2 \circ \phi \circ i)(*, x)$,

então

$$G^2(*, x) = *$$

Para todo $x \in S^{n-1}$. Logo $d(G^2) = 0$ (cf. (2.1.4), parte (c)), então

$$b_2 = 0.$$

(2.4.6) Concluimos então que a matriz do automorfismo ϕ_* de $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ em relação a base usual será dada por

$$\phi_* = \begin{bmatrix} 1 + (-1)^n & (-1)^{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.4.7) Lema. Sejam n um número natural, tal que $n \geq 1$, k um número inteiro. Então

(i) Se n é par e k qualquer,

$$\phi_*^k = \begin{bmatrix} 1+k & -k \\ k & 1-k \end{bmatrix}$$

(ii) Se n é ímpar e k é par,

$$\phi_*^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) Se n é ímpar e k é ímpar

$$\phi_*^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração.

(i) O resultado é verdadeiro para $k = 0$, $\phi_*^0 = \text{id}$,

logo

$$\phi_*^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $k = 1$, temos

$$\phi_* = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix}$$

Então o resultado é verdadeiro para $k=1$. Suponhamos válido quando $k = r-1$ e provemos que vale para $k=r$.

$$\phi_*^{r-1} = \begin{bmatrix} r & -r+1 \\ r-1 & 2-r \end{bmatrix}$$

Como $\phi_*^r = \phi_* \circ \phi_*^{r-1}$, vem que

$$\phi_*^r = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & -r+1 \\ r-1 & 2-r \end{bmatrix}$$

$$\phi_*^r = \begin{bmatrix} r+1 & -r \\ r & 1-r \end{bmatrix}$$

donde o resultado é válido para todo $k \geq 0$. Se $k \leq -1$ aplicamos analogamente o processo de indução, lembrando apenas que a matriz de ϕ_*^{-1} é a matriz inversa de ϕ_* . Logo

$$\phi_*^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Com um raciocínio análogo provamos (ii) e (iii).

ooo $\equiv$ ooo

C A P Í T U L O - I I I

3.1 - SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORES PARA ESFERAS DE BREDON

Referências: Bredon, Greenberg, Vick, Artin.

Para efetuarmos o cálculo da homologia das esferas de Bredon, $\sum_k^{2n-1}$ ($n \geq 2$), necessitaremos construir uma sequência de Mayer-Vietoris.

(3.1.1) - Definição. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U} = \{U, V\}$ uma cobertura de X , tal que, $(\text{int } U) \cup (\text{int } V) = X$. Então podemos estabelecer a partir da sequência exata curta

$$0 \rightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g_{\#}} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h_{\#}} S_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0$$

uma sequência exata longa dos grupos de homologia

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \rightarrow \\ \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

que recebe o nome de sequência de Mayer Vietoris.

$$(3.1.2) - \text{Consideremos } X = \sum_k^{2n-1} = (S^{n-1} \times D^n) \bigcup_{\phi_k} (D^n \times S^{n-1}),$$

tomemos uma cobertura de X dada por

$$\mathcal{U} = \{U, V\} \text{ onde } U = (S^{n-1} \times D^n) \bigcup_{\phi_k} (A \times S^{n-1}),$$

$$V = (S^{n-1} \times A) \bigcup_{\phi_k} (D^n \times S^{n-1}) \text{ e } A = \{x \in D^n \mid \delta < \|x\| \leq 1, 0 < \delta < 1\}$$

um subconjunto aberto de D^n .

(3.1.3) - Lema. Sejam U e V , como em (3.1.2) subespaços topológicos de X . Então U e V são subconjuntos abertos de X .

Demonstração. A topologia em $\sum_k^{2n-1}$ é a topologia quociente. Consideremos a projeção

$$p: (S^{n-1} \times D^n) + (D^n \times S^{n-1}) \rightarrow \sum_k^{2n-1}$$

e observemos que $p^{-1}(U) = U$ está contido em $(S^{n-1} \times D^n) + (D^n \times S^{n-1})$ como um subconjunto aberto. Portanto $U \subset \sum_k^{2n-1}$ é aberto. Analogamente provamos que $V \subset \sum_k^{2n-1}$ é aberto.

(3.1.4) Observação. Temos que

$$\text{int}(U) \cup \text{int } V = U \cup V = X$$

(3.1.5) Nosso passo seguinte é a construção da sequência exata curta

$$0 \rightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g_{1\#}} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h_{1\#}} S_n^1(X) \rightarrow 0$$

Para isto precisamos primeiramente definirmos algumas aplicações. Seja

$$\phi_1: U \cap V \rightarrow V,$$

isto é,

$$\phi_1: (S^{n-1} \times A) \cup_{\phi^k} (A \times S^{n-1}) \rightarrow (S^{n-1} \times A) \cup_{\phi^k} (D^n \times S^{n-1})$$

dada por $\phi_1(x, y) = \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$ (ϕ definida c.f. Lema (1.3.5)).

(3.1.6) Lema. Sejam ϕ e ϕ_1 como definidas anteriormente. Então para todo k inteiro, temos que,

$$\phi_1^k(x,y) = \phi^k\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right).$$

Demonstração. Para $k=1$ é válido por definição. Suponhamos verdadeiro para $k = r-1$, isto é,

$$\phi_1^{r-1}(x,y) = \phi^{r-1}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$$

provemos que vale para $k=r$. Temos que

$$\phi_1^r(x,y) = \phi_1(\phi_1^{r-1}(x,y)) = \phi_1\left(\phi^{r-1}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right)$$

sabemos que $\phi^{r-1}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$, então

$$\phi^{r-1}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) = (x', y') \in S^{n-1} \times S^{n-1}. \text{ Portanto,}$$

$$\phi_1\left(\phi^{r-1}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right) = \phi_1(x', y') = \phi(x', y').$$

Temos que

$$\phi_1^r(x,y) = \phi(x', y') = \phi\left(\phi^{r-1}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right).$$

Logo,

$$\phi_1^r(x,y) = \phi^r\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right), \quad r \geq 1.$$

Para $k=0$, temos $\phi_1^0 = \text{id} = \phi^0$. Se $k < 0$, colocamos

$$\phi_1^k(x,y) = (\phi^{-1})^{-k}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$$

e a prova é feita de maneira análoga à anterior.

(3.1.7) Com as considerações anteriores definimos

$$g_{1\#}: S_j(U \cap V) \rightarrow S_j(U) \oplus S_j(V)$$

dada por

$$g_{1\#}(b_i) = (i_{c\#}^1(b_i), \phi_{1\#}^k(b_i))$$

onde $i_c^1: U \cap V \rightarrow U$ é a inclusão. É fácil ver que $g_{1\#}$ é monomorfismo. $g_{1\#}$ induz um homomorfismo

$$g_{1*}(b) = (i_{c*}^1(b), \phi_{1*}^k(b))$$

(g_{1*} não é necessariamente um monomorfismo).

Vamos agora construir um homomorfismo

$$h_{1\#}: S_j(U) \oplus S_j(V) \rightarrow S_j(\sum_k^{2n-1})$$

dado por $h_{1\#}(a_i', a_j'') = \phi_1^k(a_i') - a_j''$. É fácil vermos que $h_{1\#}$ é epimorfismo. Além disso $\ker h_{1\#} = \text{Im } g_{1\#}$.

(3.1.8) Temos portanto a sequência exata curta

$$0 \rightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g_{1\#}} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h_{1\#}} S_n(\sum_k^{2n-1}) \rightarrow 0$$

A partir desta, obtemos a sequência exata longa dos grupos de homologia, sequência de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{j+1}(\sum_k^{2n-1}) &\rightarrow H_j(U \cap V) \xrightarrow{g_{1*}} H_j(U) \oplus H_j(V) \rightarrow \\ &\xrightarrow{h_{1*}} H_j(\sum_k^{2n-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{j+1}(\sum_k^{2n-1}) &\rightarrow H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})) \rightarrow \\ &\xrightarrow{g_{1*}} H_j((S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})) \oplus H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi_k} (D^n \times S^{n-1})) \rightarrow \\ &\xrightarrow{h_{1*}} H_j(\sum_k^{2n-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Visando facilitar o cálculo dos grupos de homologia desta sequência de Mayer-Vietoris introduziremos algumas considerações que nos ajudarão bastante.

(3.1.9) Observação. Se X é um espaço topológico e B um subespaço de X tal que B é um retrato de deformação de X . Então os grupos de homologia $H_j(B)$ e $H_j(X)$ são isomorfos para todo j . (j natural). (ver Artin, p.51).

(3.1.10) Lema. Com as definições e observações anteriores, temos que, para todo j , $j=0,1,2,\dots$

- i) $H_j((S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})) \underset{v_{1*}}{\cong} H_j(S^{n-1} \times D^n)$
- ii) $H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi_k} (D^n \times S^{n-1})) \underset{v_{2*}}{\cong} H_j(D^n \times S^{n-1})$
- iii) $H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})) \underset{v_{3*}}{\cong} H_j(S^{n-1} \times S^{n-1})$

Demonstração.

i) Para demonstrarmos nossa primeira afirmação provaremos que $S^{n-1} \times D^n$ é retrato de deformação de $(S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})$, para isto consideremos a aplicação,

$$H_1 : ((S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})) \times I \longrightarrow (S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})$$

dada por,

$$H_1((x,y),t) = \left(\frac{x}{\|x\|} + t(x - \frac{x}{\|x\|}), y \right)$$

É evidente que H_1 é contínua, e H_1 é uma homotopia entre a identidade de $(S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})$ e a composição de v_1 com a inclusão

$S^{n-1} \times D^n \subset (S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})$, onde v_1 é a aplicação ,

$$v_1 : (S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1}) \longrightarrow S^{n-1} \times D^n$$

dada por $v_1(x,y) = (\frac{x}{\|x\|}, y)$, v_1 é uma retração de deformação. Logo $S^{n-1} \times D^n$ é um retrato de deformação de $(S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})$.

Pela observação (3.1.9) temos que

$$H_j((S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi_k} (A \times S^{n-1})) \underset{v_{1*}}{\cong} H_j(S^{n-1} \times D^n) ,$$

para $j=0,1,2,\dots$

ii) A demonstração da afirmativa (ii) é análoga a anterior, logo

$$H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi_k} (D^n \times S^{n-1})) \underset{v_{2*}}{\cong} H_j(D^n \times S^{n-1}) ,$$

para $j=0,1,2,\dots$

iii) Consideremos a aplicação,

$$H_3: (U \cap V) \times I \longrightarrow (U \cap V)$$

definida por

$$H_3((x,y),t) = \left(\frac{x}{\|x\|} + t(x - \frac{x}{\|x\|}), \frac{y}{\|y\|} + t(y - \frac{y}{\|y\|}) \right)$$

H_3 é uma homotopia entre a identidade de $U \cap V$ e a composição de v_3 com a inclusão $S^{n-1} \times S^{n-1} \subset U \cap V$, onde v_3 é

$$v_3: U \cap V \longrightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$$

dada por $v_3(x,y) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right)$, que é uma retração. Portanto, $S^{n-1} \times S^{n-1}$ é retrato de deformação de $U \cap V$. Pela observação anterior,

$$H_j(U \cap V) \cong H_j(S^{n-1} \times S^{n-1})$$

para todo j natural, ou seja,

$$H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi^k} (A \times S^{n-1})) \cong_{v_3*} H_j(S^{n-1} \times S^{n-1}).$$

(3.1.11) Consideremos o homomorfismo

$$g_{\#}: S_j(S^{n-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow S_j(S^{n-1} \times D^n) \oplus S_j(S^{n-1} \times D^n),$$

definido por $g_{\#}(b_i) = (i_{c_{\#}}(b_i), i_{c_{\#}} \circ \phi_{\#}^k(b_i))$, onde

$\phi: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$ e $i_c: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \times D^n$ é a

inclusão. É fácil vermos que $g_{\#}$ é monomorfismo, e que $g_{\#}$ in-

duz um homomorfismo

$$g_*: H_*(S^{n-1} \times S^{n-1}) \rightarrow H_*(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_*(S^{n-1} \times D^n)$$

dado por $g_*(b) = (i_{c_*}(b), i_{c_*} \circ \phi_*^k(b))$, (que não é necessariamente um monomorfismo).

(3.1.12) Com todas as considerações anteriores temos que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_{j+1}(\sum_k^{2n-1}) & \xrightarrow{\Delta} & H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi^k} (A \times S^{n-1})) & \xrightarrow{g_{1*}} & H_j((S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi^k} (A \times S^{n-1})) \oplus H_j((S^{n-1} \times A) \cup_{\phi^k} (D^n \times S^{n-1})) & \rightarrow & H_j(\sum_k^{2n-1}) \rightarrow \dots \\ & \searrow \Delta_* & \downarrow v_{j*} & & \downarrow (v_{1*} \oplus v_{2*}) & & \nearrow \\ & & H_j(S^{n-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{g_*} & H_j(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_j(D^n \times S^{n-1}) & & \end{array}$$

Temos então a sequência exata,

$$\dots \rightarrow H_{j+1}(\sum_k^{2n-1}) \xrightarrow{\Delta} H_j(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{(i_*, \phi_*^k)} H_j(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_j(D^n \times S^{n-1}) \xrightarrow{h_*} H_j(\sum_k^{2n-1}) \rightarrow \dots$$

o que vai facilitar bastante nosso trabalho.

3.2 - CÁLCULO DOS GRUPOS DE HOMOLOGIA DE $S^{n-1} \times S^{n-1}$ e $S^{n-1} \times D^n$ ($n \geq 1$)

Referências : Greenberg, Vick .

No capítulo anterior vimos que a fórmula de Künneth para variedades X e Y , cujos grupos de homologia de dimensão menor que n são livres, se reduz a

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{p=0}^n H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y)$$

Utilizando esta fórmula, como fizemos para alguns casos no Cap. II, provamos facilmente os seguintes resultados.

(3.2.1) Para $n \geq 1$, consideremos o produto cartesiano $S^{n-1} \times S^{n-1}$, então

$$H_{2n-2}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_0(S^{n-1} \times S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_j(S^{n-1} \times S^{n-1}) \cong 0, \text{ se } j \neq 2n-2, n-1, 0$$

(3.2.2) Para $n \geq 1$, tomemos $S^{n-1} \times D^n$, temos que

$$H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_0(S^{n-1} \times D^n) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_j(S^{n-1} \times D^n) \cong 0, \text{ se } j \neq 0, n-1.$$

(3.2.3) Portanto nossa sequência de Mayer-Vietoris pode ser reescrita como,

$$0 \longrightarrow H_{2n-1} \left(\sum_k^{2n-1} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta} H_{2n-2}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{g_*} 0 \xrightarrow{h_*} H_n \left(\sum_k^{2n-1} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \xrightarrow{h_*} H_{n-1} \left(\sum_k^{2n-1} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta} 0 \xrightarrow{\Delta} H_0(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{g_*} H_0(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_0(S^{n-1} \times D^n) \xrightarrow{h_*} H_0 \left(\sum_k^{2n-1} \right) \longrightarrow 0$$

Ou seja,

$$0 \longrightarrow H_{2n-1} \left(\sum_k^{2n-1} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_*} 0 \xrightarrow{h_*} H_n \left(\sum_k^{2n-1} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{h_*} H_{n-1} \left(\sum_k^{2n-1} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta} 0 \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{h_*} H_0 \left(\sum_k^{2n-1} \right) \xrightarrow{\Delta} 0$$

3.3 - CÁLCULO DOS GRUPOS DE HOMOLOGIA DAS ESFERAS DE BREDON

Referências: Bredon, Greenberg, Vick, Bourbaki.

(3.3.1) Proposição. Sejam n um número inteiro $n \geq 2$, k um número natural $k \neq 0$. Colocamos $n=2m$ ou $n=2m+1$ ($m \geq 1$), então segue que

$$i) \quad H_p \left(\sum_k^{4m-1} \right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0, 4m-1 \\ \mathbb{Z}_k, & \text{se } p = 2m-1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$ii) \quad H_p \left(\sum_{\text{par}}^{4m+2} \right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p=0, 2m, 2m+1, 4m+1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$iii) \quad H_p \left(\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1} \right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p=0, 4m+1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

(cf. Bredon p.52).

Demonstração. É consequência imediata dos lemas seguintes.

(3.3.2) Lema Sejam n inteiro, $n \geq 2$, e k natural ($k \neq 0$).

Então

$$H_{2n-1} \left(\sum_k^{2n-1} \right) \cong \mathbb{Z}$$

Demonstração. Por (3.2.3) vem que

$$0 \longrightarrow H_{2n-1}(\sum_k^{2n-1}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_*} 0 \longrightarrow \dots$$

como a sequência é exata então Δ é isomorfismo. Logo

$$H_{2n-1}(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

(3.3.3) Lema Sejam n natural $n \geq 2$ e k um número natural, $k \neq 0$. Então

i) Se n par e k qualquer,

$$H_n(\sum_k^{2n-1}) \cong 0$$

ii) Se n ímpar e k par,

$$H_n(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

iii) Se n ímpar e k ímpar,

$$H_n(\sum_k^{2n-1}) \cong 0$$

Demonstração. Por (3.2.3) temos

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{h_*} H_n(\sum_k^{2n-1}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

onde $\ker \Delta = \text{Im } h_* = \{0\}$. Pelo teorema do homomorfismo segue que,

$$(H_n(\sum_k^{2n-1}) / \text{Ker } \Delta) \cong \text{Im } \Delta$$

Mas, $\text{Im } \Delta = \text{Ker } g_*$ então

$$H_n(\sum_k^{2n-1}) \cong \text{Ker } g_*$$

nosso problema se resume então no cálculo de $\text{Ker } g_*$. Por construção, temos que $g_* = (i_{c_*}, i_{c_*} \circ \phi_*^k)$. Consideremos o seguinte diagrama, ($n \geq 2$),

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_{c_*}} & H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \{\alpha, \beta\} & & \{a\} \end{array}$$

onde f_1 e f_2 são isomorfismos dados pela formula de Künneth, a é um gerador de $\mathbb{Z}(\{a\}$ base de $\mathbb{Z})$, $\alpha = (a, 0)$ e $\beta = (0, a)$ ($\{\alpha, \beta\}$ base de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$).

Ou seja,

$$\begin{array}{ccccc} H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{\phi_*^k} & H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_{c_*}} & H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \phi_*^k \end{bmatrix}_{2 \times 2}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 2}} & \mathbb{Z} \\ \{\alpha, \beta\} & & \{\alpha, \beta\} & & \{a\} \end{array}$$

Mas, conforme Lema (2.4.7) ,

$$\phi_*^k = \begin{bmatrix} 1+k & -k \\ k & 1-k \end{bmatrix} \quad \text{se } n \text{ par}$$

$$\phi_*^{\text{par}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{se } n \text{ ímpar}$$

$$\phi_*^{\text{ímpar}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{se } n \text{ ímpar}$$

$$e \ i_{c_*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\alpha, \beta\} \\ \{a\} \end{matrix}$$

Então

$$i_{c_*} \circ \phi_*^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+k & -k \\ k & 1-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k & -k \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\alpha, \beta\} \\ \{a\} \end{matrix} & \text{se } n \text{ par} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\alpha, \beta\} \\ \{a\} \end{matrix} & \text{se } n \text{ ímpar, } k \text{ par} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\alpha, \beta\} \\ \{a\} \end{matrix} & \text{se } n \text{ ímpar, } k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{array}{ccc} g_*: H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{c_*}, i_{c_*} \circ \phi_*^k)} & H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \oplus f_2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \{\alpha, \beta\} & & \{\alpha, \beta\} \end{array}$$

Assim, se n é par,

$$\begin{aligned} g_*(\alpha) &= (i_{c_*}(\alpha), (i_{c_*} \circ \phi_*^k)(\alpha)) = (a, (1+k)a) \\ &= 1(a, 0) + (1+k)(0, a) \end{aligned}$$

Logo,

$$g_*(\alpha) = 1 \alpha + (1+k)\beta$$

E ainda

$$\begin{aligned} g_*(\beta) &= (i_{c_*}(\beta), (i_{c_*} \circ \phi_*^k)(\beta)) = (0, -k.a) \\ &= 0(a, 0) - k(0, a) \end{aligned}$$

Logo,

$$g_*(\beta) = 0 \alpha - k \beta$$

Portanto,

$$g_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix}$$

Analogamente provamos que se n ímpar e k par

$$g_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e se n ímpar e k ímpar,

$$g_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluimos então que

i) Se n par e k qualquer,

$$\text{Kerg}_* = \{(x,y) / (x, (1+k)x-ky) = (0,0)\} = \{(0,0)\}$$

Então,

$$H_n(\sum_k^{2n-1}) \cong 0$$

ii) Se n ímpar e k par,

$$\text{Kerg}_* = \{(x,y) / x = 0\} = \{(0,y)\} \cong \mathbb{Z}$$

Então,

$$H_n(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

iii) Se n ímpar e k ímpar

$$\text{Kerg}_* = \{(0,0)\}$$

Logo,

$$H_n(\sum_k^{2n-1}) \cong 0.$$

(3.3.4) Lema. Sejam n natural, $n \geq 2$, e k inteiro, $k \neq 0$.

Então segue que

i) Se n par e k qualquer

$$H_{n-1}(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}_k$$

ii) Se n ímpar e k par

$$H_{n-1}(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

iii) Se n ímpar e k ímpar

$$H_{n-1}(\sum_k^{2n-1}) \cong 0$$

Demonstração. Por (3.2.3) temos,

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{h_*} H_{n-1}(\sum_k^{2n-1}) \xrightarrow{\Delta} 0 \rightarrow \dots$$

Pelo teorema do homomorfismo e pelo fato da sequência ser exata, temos

$$H_{n-1}(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{Ker } h_* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{Im } g_*$$

Precisamos calcular $\text{Im } g_*$. Então

i) Se n par e k qualquer

$$g_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix},$$

(cf. Lema (3.3.3)). Logo a $\text{Im } g_*$ será formada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (1+k)x - ky \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+k \cdot (x-y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ x-y \end{bmatrix}$$

Concluimos que $\text{Im } g_* = \mathbb{Z} \oplus k\mathbb{Z}$. Então

$$H_{n-1}(\sum_k^{2n-1}) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / (\mathbb{Z} \oplus k\mathbb{Z})$$

Como $\mathbb{Z}$ e $k\mathbb{Z}$ são submódulos de $\mathbb{Z}$ temos (cf. Bourbaki p.A II 14)

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / (\mathbb{Z} \oplus k\mathbb{Z})) \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}_k \cong \mathbb{Z}_k$$

Então

$$H_{n-1}(\bigcup_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}_k$$

ii) Se n ímpar e k par,

$$g_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(cf. Lema (3.3.3)).

Então $\text{Im} g_* = \{(x,y) / x=y\} \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus 0$. Logo

$$H_{n-1}(\bigcup_k^{2n-1}) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / (\mathbb{Z} \oplus 0)$$

Como $\mathbb{Z}$ e 0 são ambos submódulos de $\mathbb{Z}$, segue que

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / (\mathbb{Z} \oplus 0) \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/0) \cong 0 \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Portanto

$$H_{n-1}(\bigcup_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

iii) Se n ímpar e k ímpar

$$g_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(cf. Lema(3.3.3)). Então $\text{Im} g_* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Concluimos que

$$H_{n-1}(\bigcup_k^{2n-1}) \cong 0$$

(3.3.5) Lema. Sejam n inteiro $n \geq 2$ e k inteiro, $k \neq 0$.

Então temos

$$H_0(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

Demonstração. Temos que $\sum_k^{2n-1}$ é conexo por caminhos, pois é união de dois espaços conexos por caminhos com intersecção não vazia. Logo, (cf. Vick Prop. 1.4 p. 9),

$$H_0(\sum_k^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

(3.3.6) Observando a Proposição (3.3.1) vemos que a homologia de $\sum_{\text{par}}^{4m+1}$ é a mesma de $S^{2m} \times S^{2m+1}$ e a de $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$ é a mesma de S^{4m+1} .

ooo $\equiv$ ooo

CAPÍTULO - IV

4.1 - PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DAS ESFERAS DE BREDON

Referências: Lyra, Spanier, Munkres, Massey, Bredon.

(4.1.1) Lema. Os espaços $S^{n-1} \times D^n$, $D^n \times S^{n-1}$, e $S^{n-1} \times S^{n-1}$ são simplesmente conexos para $n \geq 3$.

Demonstração. Para todo $n \geq 1$, o disco D^n é contrátil e portanto simplesmente conexo. Por outro lado, para todo $n \geq 3$, a esfera S^{n-1} é simplesmente conexa (ver e.g. Lyra, Teor.(10.4), p. 50). Como $\pi(S^{n-1} \times D^n) \cong \pi(S^{n-1}) \times \pi(D^n)$ (ver Lyra, Teor.(7.3), p.36) podemos concluir que $S^{n-1} \times D^n$ é simplesmente conexo. Analogamente provamos que $D^n \times S^{n-1}$ e $S^{n-1} \times S^{n-1}$ são simplesmente conexos.

(4.1.2) Lema. Sejam $n \geq 3$, e $U = (S^{n-1} \times D^n) \cup_{\phi^k} (A \times S^{n-1})$ e $V = (S^{n-1} \times A) \cup_{\phi^k} (D^n \times S^{n-1})$ como definidos em (3.1.2). Então os conjuntos $U, V, U \cap V$ são simplesmente conexos.

Demonstração. É fácil vermos que $U, V, U \cap V$ são conexos por caminhos. Sabemos pelo lema (3.1.10) que U, V e $U \cap V$ são retratos de deformação de $S^{n-1} \times D^n$, $D^n \times S^{n-1}$ e $S^{n-1} \times S^{n-1}$, respectivamente. Podemos portanto concluir (ver Lyra, Teor.(7.2), p.35) que

$$\pi(U) = \pi(S^{n-1} \times D^n) = \{0\},$$

$$\pi(V) = \pi(D^n \times S^{n-1}) = \{0\},$$

$$\pi(U \cap V) = \pi(S^{n-1} \times S^{n-1}) = \{0\},$$

Como desejávamos.

(4.1.3) Lema. As esferas de Bredon $\sum_k^{2n-1}$ são simplesmente conexas.

Demonstração. Consideremos a cobertura aberta de $\sum_k^{2n-1}$ dada por $\{U, V\}$, onde U e V são como no Lema (4.1.2). Por esse lema sabemos que U, V e $U \cap V$ são simplesmente conexos. Como $U \cap V \neq \emptyset$, podemos concluir que o espaço $\sum_k^{2n-1}$ é simplesmente conexo utilizando o Teor. (10.3) de Lyra, p.48.

O nosso próximo objetivo é demonstrarmos que as esferas de Bredon $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$ são esferas de homotopia para todo $n \geq 1$. Chamarémos de uma esfera de homotopia a uma variedade C^∞ , M , de dimensão finita, que é homotopicamente equivalente a uma esfera. Para isto veremos alguns resultados.

(4.1.4) Observação. Toda variedade é triangularizável (ver Munkres p. 103, Teor. 10.6) e portanto é um complexo CW. (ver Spanier p. 145, 401)

(4.1.5) Lema. A esfera de Bredon $\sum_k^{2n-1}$ é uma variedade C^∞ , sem bordo, da qual $S^{n-1} \times D^n$ e $D^n \times S^{n-1}$ são subvariedades imersas.

Demonstração. A demonstração é análoga a prova de que se M é uma variedade C^r com bordo, então o dobro de M , $D(M)$, é uma variedade C^r sem bordo do qual M é uma subva-

riedade imersa (ver Munkres, Def. 5.10, p.56). Basta apenas observarmos que em $D(M)$ a colagem é feita através da identidade no bordo de M , enquanto que no nosso caso esta colagem é realizada através do difeomorfismo ϕ^k de $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Concluimos então que $\sum_k^{2n-1}$ é um complexo CW.

(4.1.6) Teorema (Whitehead). Sejam X e Y complexos CW simplesmente conexos e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua tal que $f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ é um isomorfismo. Então f é uma equivalência homotópica.

Demonstração. Pela parte recíproca do teorema de Whitehead (ver Spanier, Teor. 9, p.399) sabemos que f é uma equivalência fraca de homotopia (Ver op. cit., p.404); e pelo Cor. 24 de op. cit, p.405, f é uma equivalência de homotopia.

(4.1.7) Teorema (Hurewicz). Sejam X um espaço topológico, conexo por caminhos e n um número inteiro $n \geq 1$. Então existe uma aplicação $\phi_n: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ tal que $\phi_n[\alpha] = \alpha_* z_n$, onde z_n é o gerador canônico de $H_n(S^n) (\cong \mathbb{Z})$. Além disso se $\pi_i(X) = 0$, $i < n$, então $\phi_k: \pi_k(X) \rightarrow H_k(X)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Em Spanier p.388, temos a definição de ϕ_n e pelo teor 5, p.398, de op. cit, temos que nas condições acima ϕ_k é um isomorfismo.

(4.1.8) Proposição. Seja M uma variedade compacta simplesmente conexa, sem bordo. Se $H_*(M) \cong H_*(S^n)$ então M é homotopicamente equivalente a S^n .

Demonstração. Temos que $\pi_i(M) = \pi_i(S^n)$ para $i=0,1$, pois M é simplesmente conexa. Pelo teorema de Hurewicz vem que

$$\pi_2(M) \cong H_2(M)$$

Além disso, por hipótese

$$H_2(M) \cong H_2(S^n)$$

Logo

$$\pi_2(M) \cong 0$$

E assim sucessivamente, temos $\pi_{n-1}(M) \cong 0$. Então

$\pi_i(M) \cong 0 \cong \pi_i(S^n)$ para, $i < n$. Utilizando novamente o teorema anterior, vem que

$$\pi_n(M) \cong_{\phi_n} H_n(M) \cong H_n(S^n) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

Seja w um gerador de $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$, $\phi_n: \pi_n(M) \rightarrow H_n(M)$, então $\phi_n^{-1}(w) \in \pi_n(M)$. Seja $f: S^n \rightarrow M$ contínua tal que $[f] \in \phi_n^{-1}(w)$. Como M, S^n são conexas, então $f_{*,0}: H_0(S^n) \rightarrow H_0(M)$ é isomorfismo. Temos ainda que $f_{*,i}: H_i(S^n) \rightarrow H_i(M)$ é isomorfismo para $i \neq n$, pois $H_i(S^n) \cong H_i(M) \cong 0$. Para $i=n$, $f_{*,n}: H_n(S^n) \rightarrow H_n(M)$, dada por $f_{*,n}(z_n) = \phi_n([f]) = w$ pela definição de ϕ_n . Logo $f_{*,n}$ leva o gerador z_n de $H_n(S^n)$ no gerador w de $H_n(M)$, então $f_{*,n}$ é isomorfismo.

Pelo teorema Whitehead, f é uma equivalência homotópica.

Concluimos então que $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$ tem o mesmo tipo de homotopia que S^{4m+1} .

(4.1.9) Veremos a seguir que $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$ é homeomorfa a S^{4m+1} . Para isto utilizaremos o seguinte resultado, provado por S. Smale em 1960, para $n \geq 5$, (cf. Annals of Mathematics 74 (1961), pp. 391-466).

"Seja M uma variedade de dimensão n , compacta, sem bordo e do mesmo tipo de homotopia que a esfera usual S^n . Então se $n \neq 3, 4$ M é homeomorfa a S^n ".

Nota. Para $n=1$ é trivial (ver Milnor, p.55). Para $n=2$ foi demonstrado por Poincaré, que conjecturou a proposição para $n=3$ (na realidade ele conjecturou que uma variedade simplesmente conexa compacta, sem bordo, de dimensão 3 é homeomorfa a S^3 . E uma tal variedade, pela prop.(4.1.8), tem o mesmo tipo de homotopia que S^3). Por isso a afirmação,

"Se M é uma variedade de dimensão n , compacta, sem bordo e do mesmo tipo de homotopia que S^n , então M é homeomorfa a S^n ".

é conhecida como a conjectura generalizada de Poincaré e ainda está em aberto os casos em que $n=3$ e $n=4$. (cf. Massey, p.142).

Podemos então afirmar que $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$ é homeomorfa a S^{4m+1} .

Em op. cit, p.241, pode ser encontrada uma tabela (devida a Kervaire-Milnor) que dá o número de estruturas diferenciáveis

veis distintas sobre a esfera usual S^n . Por esta tabela a esfera S^5 tem uma única estrutura diferenciável. Kervaire-Milnor mostraram também, que para cada inteiro n , o número de estruturas diferenciáveis distintas sobre S^n é finito. Em geral a esfera exótica $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$ não é difeomorfa a esfera usual S^{4m+1} .

4.2 - AÇÃO EXÓTICA DE $O(n)$ SOBRE $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$

Referência: Bredon.

Chamaremos de ação exótica a uma ação de um grupo compacto que não "se assemelha" a nenhuma ação linear (muito menos a uma ação ortogonal).

Vimos no cap. I que o grupo $O(n)$ agindo linearmente sobre esferas tem como conjunto de pontos fixos esferas. Vamos mostrar que existem ações de $O(n)$ sobre $\sum_{\text{ímpar}}^{4m+1}$ que não tem como conjunto de pontos fixos esferas, logo não são equivalentes a ações ortogonais sobre S^{4m+1} .

(4.2.1) Observemos que se $r \leq n$ e se $D^r \subset D^n$ (pela inclusão comum), então ϕ^k preserva $S^{r-1} \times S^{r-1}$ e restrita a $S^{r-1} \times S^{r-1}$ dá a ϕ^k definida da $O(r)$ -ação. Isto é claro se observarmos que as duas componentes $\theta_x(y)$ e x de $\phi(x,y)$ são obtidas de x e y pela rotação do plano que contém x e y , desde y a x , por um ângulo igual ao ângulo entre x e y . Então $\phi^k(x,y)$ depende so-

mente do subespaço gerado por x e y .

(4.2.2) Se H é um subgrupo de $O(n)$ e se $F(H, D^n) = D^r$, tomando a restrição ϕ^k (k ímpar, $k > 1$) a $S^{r-1} \times S^{r-1}$ teremos $\sum_k^{2r-1}$, logo $F(H, \sum_k^{2n-1}) = \sum_k^{2r-1}$. Isto produz diretamente algumas características não usuais destes exemplos.

Sejam $n=3$ e $\mathbb{Z}_2 \cong O(1) \subset O(3)$. Como $F(O(1), D^3) = D^2$ temos $r=2$, e então a inclusão leva o elemento não trivial de $\mathbb{Z}_2$ na matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então $F(O(1), \sum_k^5) = \sum_k^3$. Mas, $H_1(\sum_k^3) \cong \mathbb{Z}_k$ (ver Prop. (3.3.1)). Isto dá uma involução (um homeomorfismo de período 2) sobre S^5 , cujo conjunto de pontos fixos F , tem o primeiro grupo de homologia $H_1(F) \cong \mathbb{Z}_k$, para k ímpar. Concluimos que esta $O(1)$ -ação sobre $\sum_k^5 \cong S^5$ não é equivalente a nenhuma ação ortogonal, pois o conjunto de pontos fixos tem homologia $\mathbb{Z}_k$ (k ímpar, $k > 1$) no grau 1.

(4.2.3) Mais geralmente para $i \geq 1$ a $O(2m+1)$ -ação sobre $\sum_{2i+1}^{4m+1} \cong S^{4m+1}$ não é equivalente a nenhuma ação ortogonal para $m \geq 1$ e a ação restrita a $O(1)$ e, portanto, a $O(r)$ para $1 \leq r \leq 2m+1$, é também não ortogonal desde que $F(O(1), \sum_{2i+1}^{4m+1}) =$

$\sum_{2i+1}^{4m-1}$ tem homologia Z_{2i+1} no grau $2m-1$ (cf. Prop. (3.3.1)).

$$ooo \equiv ooo$$

BIBLIOGRAFIA

- E. ARTIN - H. BRAUN - Introduction to Algebraic Topology, Charles E. Merril Publishing Company, A. Bell & Howell Company, Columbus, Ohio, 1969.
- N. BOURBAKI - Algèbre, caps 1-3, Hermann, Paris, 1970.
- G.E. BREDON - Examples of differentiable group actions, Topology 3 (1965), 115-122.
- G.E. BREDON - Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York, 1972.
- A. CONDE - Introdução à Topologia Diferencial, 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- J. DUGUNDJI - Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- C. GODBILLON - Elements de Topologie Algébrique, Hermann, Paris, 1971.
- M. GREENBERG - Lectures on Algebraic Topology, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1967.
- W. IBERKLEID - Orientation and Degree Theory, Master's Thesis, Rutgers University, 1971.
- C.B. DE LYRA - Grupo Fundamental e Revestimentos, Publicações do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1969.
- W.S. MASSEY - Algebraic Topology: An Introduction, Harcourt, Brace & World, New York, 1967.

- J. MILNOR - Topology from the Differentiable Viewpoint,
University of Virginia Press, Charlottesville,
Va., 1965.
- J.R. MUNKRES - Elementary Differential Topology, Princeton
University Press, Princeton, N.J., 1966.
- E.H. SPANIER - Algebraic Topology, McGraw-Hill, Book Company,
1966.
- J.W. VICK - Homology Theory: An Introduction to Algebraic
Topology, Academic Press, New York and London,
1973.