Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos Solúveis

Irene Naomi Nakaoka

Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutora** em **MATEMÁTICA**.

CAMPINAS
1998

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Nakaoka, Irene Naomi

N145s Sobre o produto tensorial não abeliano de grupos solúveis / Irene Naomi Nakaoka -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Noraí Romeu Rocco

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos nilpotentes. 2. Grupos finitos. 3. Anéis de grupo. I. Rocco, Noraí Romeu. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

SOBRE O PRODUTO TENSORIAL NÃO ABELIANO DE GRUPOS SOLÚVEIS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Irene Naomi Nakaoka** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de Novembro de 1998

Prof. Dr: Noraí Romeu Rocco
Orientador

Prof. Dr: Paulo Roberto Brumatti
Co-orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Titulo de **DOUTORA** em **MATEMÁTICA.**

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 27 novembro de 1998

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). NORAÍ ROMEU ROCCO

Prof (a). Dr (a). FRANCISCO CÉSAR POLCINO MILIES

A. Sidki

Prof (a). Dr (a). SAID NAJATI SIDKI

Antonio José Engler

Prof (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof (a). Dr (a). ANTONIO PAQUES

SUMÁRIO

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$C_{n,2}$	coeficiente binomial $n(n-1)/2$
$m.d.c.\ \{a_1, \ldots, a_n\}$	máximo divisor comum de $a_1, \ldots, a_n$
$m.m.c.\{a_1, \ldots, a_n\}$	mínimo múltiplo comum de $a_1, \ldots, a_n$
$a \mid b$	a divide b
$\leq$	é um subgrupo de , menor ou igual que
$<$	é um subgrupo próprio de , estritamente menor que
$\trianglelefteq$	é um subgrupo normal de
$\triangleleft$	é um subgrupo normal próprio de
$\rightarrowtail$	monomorfismo
$\twoheadrightarrow$	epimorfismo
$\cong$	isomorfismo
1_X	função identidade sobre o conjunto X
$(g)\alpha$	imagem de g por α
Nuc	núcleo de um homomorfismo
Im	imagem de uma função, homomorfismo
1	elemento identidade de G
$[x, y]$	comutador $x^{-1}y^{-1}xy$
$\|X\|$	cardinalidade do conjunto X
$< X >$	subgrupo de G gerado por $X \subseteq G$
$\overline{R}, < R >^G$	fecho normal de $R \subseteq G$
$\dfrac{G}{N}$, G/N	grupo quociente de G por N
G'	grupo derivado de G
G^{ab}	grupo abelianizado, G/G'
$\gamma_i(G)$	i – ésimo termo da série central inferior de G
G_i	i – ésimo termo da série derivada de G
$cl(G)$	classe de nilpotência de G
$l(G)$	comprimento derivado de G
$Z(G)$	centro de G
$Aut(G)$	grupo de automorfismo de G
$d(G)$	número mínimo de geradores de G
$G \times H$	produto direto de grupos, produto cartesiano de conjuntos
$G \rtimes H$, $G \ltimes H$	produto semidireto de grupos
$G * H$	produto livre de grupos
$G \otimes_R H$	produto tensorial de R-módulos
$G \otimes H$	produto tensorial não abeliano de grupos

$\mathbb{Z}G$	anel de grupo de G
$I(G)$	ideal de aumento de G
$\mathbb{Z}_n$	grupo cíclico de ordem n
D_n	grupo diedral de grau n
Q_n	grupo quaterniônico de ordem $4n$
S_n	grupo simétrico de grau n
A_n	grupo alternado de grau n

INTRODUÇÃO

O produto tensorial não abeliano de grupos G e H, da maneira como foi introduzido por R. Brown e J.L. Loday [6, 7], generaliza o produto tensorial usual $\frac{G}{G'} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{H}{H'}$ dos grupos abelianizados, uma vez que leva em conta ações de G sobre H e de H sobre G. Especificamente, sejam G e H grupos munidos de uma ação $(g, h) \mapsto g^h$ de H sobre G e uma ação $(h, g) \mapsto h^g$ de G sobre H, de tal forma que para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

$$g^{(h^{g_1})} = g^{g_1^{-1}hg_1} \quad \text{e} \quad h^{(g^{h_1})} = h^{h_1^{-1}gh_1}, \tag{1}$$

onde G e H atuam sobre si mesmo por conjugação. O *produto tensorial não abeliano* $G \otimes H$ dos grupos G e H é o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h, g \in G, h \in H$, sujeito às relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h)$$
$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$$

para todo $g, g_1 \in G,\ h, h_1 \in H$.

Em particular, como a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (1), o *quadrado tensorial* $G \otimes G$ de um grupo G é sempre definido.

A introdução deste conceito deve-se originalmente a razões topológicas, já que o produto tensorial não abeliano aparece no estudo das aplicações de um Teorema de Van Kapem Generalizado na teoria de homotopia. [7]. Além disso, invariantes importantes do grupo G, tais como o multiplicador de Schur e o quadrado exterior não abeliano, aparecem como seções de $G \otimes G$.

Logo após a publicação dos trabalhos de Brown e Loday [6, 7], que mostram a importância topológica do produto tensorial não abeliano de grupos, vários artigos surgiram sobre esse assunto. Alguns investigam propriedades gerais do produto tensorial não abeliano, enquanto outros (por exemplo, [2] e [5]) concentram-se na descrição do quadrado tensorial não abeliano de certas classes de grupos, tais como diedral, quaterniônico, metacíclico, p-grupo 2-gerado de classe 2, grupos livres e grupos perfeitos.

Brown e Loday em [7] estabeleceram a finitude do quadrado tensorial não abeliano de um grupo finito. Logo após, Ellis em [9] estendeu este resultado para o produto tensorial não abeliano de grupos finitos.

N. Rocco [23] introduziu uma construção relacionada ao quadrado tensorial não abeliano e é definida como segue: Sejam G e G^{φ} grupos isomorfos por $\varphi : G \to G^{\varphi}$, $g \mapsto g^{\varphi}$, $\forall g \in G$. O grupo é definido por

$$\nu(G) := \langle G, G^{\varphi} \mid [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} = [{g_1}^{g_3}, ({g_2}^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}}], \ \forall g_1, g_2, g_3 \in G \rangle.$$

A relação entre $\nu(G)$ e $G \otimes G$ está no fato de que o subgrupo comutador $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$ é isomorfo a $G \otimes G$, [23]. Há também uma conexão entre $\nu(G)$ e um grupo $\chi(G)$, introduzido por S. Sidki [29], definido por

$$\chi(G) := \langle G, G^{\varphi} \mid [g, g^{\varphi}] = 1, \ \forall g \in G \rangle.$$

Esta relação foi usada para dar uma prova alternativa da finitude de $\nu(G)$, quando G é finito e, conseqüentemente, de $G \otimes G$.

Rocco [23] mostrou que $\nu(G)$ preserva propriedades do argumento G tais como finitude, conjunto de primos divisores, nilpotência e solubilidade. Além disso, para G um p-grupo finito, encontrou uma limitação para $|G \otimes G|$. Posteriormente, G. Ellis e A. McDermott [11] melhoraram a cota de Rocco e a estenderam para o produto tensorial não abeliano de um p-grupo finito e um q-grupo finito, onde p e q são primos (não necessariamente iguais).

O objetivo deste trabalho é estudar o produto tensorial não abeliano de grupos solúveis, em especial problemas relativos a limitações da ordem de $G \otimes H$. Para isso, estudaremos também uma generalização do grupo $\nu(G)$, definida em [25] como segue: Sejam G, H dois grupos agindo compativelmente um sobre o outro e H^{φ} uma cópia de H, isomorfo por $\varphi : H \to H^{\varphi}$, $h \mapsto h^{\varphi}$, $\forall h \in H$. Então

$$\eta(G, H) := \langle G, H^{\varphi} | [g, h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}], \ [g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} = \left[g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}\right], \ \forall g, g_1 \in G, h, h_1 \in H \rangle$$

Observamos que se $G = H$ e as ações são conjugação, então $\eta(G, H) = \nu(G)$.

A seguir faremos um resumo dos capítulos que compõem esta tese.

No Capítulo 1 (Seções 1 a 7) fixamos notações e abordamos os principais conceitos e resultados relevantes para o desenvolvimento da tese. Neste sentido, incluímos aí, nas Seções 5 e 6, os resultados gerais sobre o produto tensorial não abeliano de grupos G e H e também resultados sobre $\nu(G)$. Na seção 7, exibimos o resultado de Ellis e McDermott [11], que fornece uma estimativa para $|G \otimes H|$, quando G e H são grupos de ordem potência de primo.

O Capítulo 2 divide-se em quatro seções. Na primeira seção deste capítulo (Seção 8) introduzimos o grupo $\eta(G, H)$ e provamos o seguinte resultado:

Proposição 8.3 O subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $\eta(G, H)$ é isomorfo a $G \otimes H$.

Vamos denotar o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $\eta(G, H)$ por $\tau(G, H)$. Com o isomorfismo da Proposição 8.3 podemos estudar o produto tensorial $G \otimes H$ como um subgrupo comutador de $\eta(G, H)$ e usar as propriedades que conhecemos de subgrupos comutadores. Usamos esse método para obtermos a descrição das séries central inferior e derivada de $G \otimes H$, em termos das respectivas séries de $[G, H]$ e $[H, G]$, onde $[G, H] = \langle g^{-1}g^{h} | g \in G,\ h \in H\rangle \leq G$ e $[H, G] = \langle h^{-1}h^{g} | g \in G,\ h \in H\rangle \leq H$. Provamos na Seção 9

Teorema 9.2(i) Para $i \geq 2$ o i-ésimo termo da série central descendente de $\tau(G, H)$ é dado por

$$\gamma_i(\tau(G, H)) = [\gamma_{i-1}([G, H]), [H, G]^{\varphi}]$$

(ii) Para $i \geq 1$ o i-ésimo termo da série derivada de $\tau(G, H)$ é dado por

$$\tau(G, H)_i = [[G, H]_{i-1}, [H, G]^{\varphi}_{i-1}]$$

Conseqüentemente, se o subgrupo $[G, H]$ de G é nilpotente (respectivamente solúvel), então $G \otimes H$ é nilpotente (respectivamente solúvel). A descrição das séries central inferior e derivada de $\tau(G, H)$ obtida no teorema anterior nos permitiu estabelecer cotas para a classe de nilpotência de $G \odot H$ e para o comprimento derivado de $G \odot H$ semelhantes às de Visscher [31]. Provamos

Teorema 9.3(i) Se $[G, H]$ é nilpotente de classe c então $G \odot H$ é nilpotente de classe c ou $c + 1$.

(ii) Se $[G, H]$ é solúvel de comprimento derivado l então $G \odot H$ é solúvel de comprimento derivado l ou $l + 1$

O caso particular em que $G = H$ e as ações são conjugações já aparece em [5]. Uma das questões levantadas em [5] faz referência à existência de uma caracterização de grupos solúveis G tais que o comprimento derivado de $G \otimes G$ é l e de grupos solúveis G tais que o comprimento derivado de $G \otimes G$ é $l - 1$, onde l é o comprimento derivado de G. Na Seção 9 estabelecemos uma condição suficiente sobre $[G, H]$ para que $G \odot H$ seja solúvel de comprimento derivado igual ao de $[G, H]$.

Proposição 9.7 Suponhamos que G e H são subgrupos normais de algum grupo M agindo um sobre o outro por conjugação em M. Se $[G, H]$ é solúvel de comprimento derivado $l \geq 1$ e $[G, H]_{l-1}$ é cíclico, então $G \odot H$ é solúvel de comprimento derivado l.

Conseqüentemente obtemos

Corolário 9.8 Se G é solúvel de comprimento derivado $l \geq 2$ com G_{l-1} cíclico, então $G \odot G$ é solúvel de comprimento derivado $l - 1$.

Uma vez que o grupo $\nu(G)$ preserva algumas propriedades do grupo argumento G, uma questão natural é: quais propriedades dos grupos G e H são preservadas por $\eta(G, H)$? Foi observado em [25] que se G e H são grupos finitos, então $\eta(G, H)$ também é finito. Mostramos na Seção 10 que a solubilidade de G e H é preservada por $\eta(G, H)$. Entretanto, nilpotência de G e H não implica nilpotência de $\eta(G, H)$ (conforme exemplo 1 dessa seção). Isso ocorre porque os termos da série central inferior de $\eta(G, H)$ dependem das ações de G sobre H e de H sobre G. Assim, devemos impor algumas condições sobre essas ações. Provamos na Seção 10

Teorema 10.6 Sejam G e H grupos nilpotentes de classes a e b respectivamente.

Suponha que a ação de H sobre G é l-Engeliana e que a ação de G sobre H é k-Engeliana. Então $\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)'}$ satisfaz a n-ésima condição de Engel para $n = c + (2c-1)m$, onde $c = \max\{a,b\}$ e $m = \max\{l,k\}$. Em particular. se além disso G e H são grupos finitamente gerados, então $\eta(G,H)$ é nilpotente.

Teorema 10.7 Sejam G e H grupos nilpotentes de classes a and b respectivamente, tais que a ação de H sobre G é l-nilpotente e a ação de G sobre H é k-nilpotente. Coloquemos $c = \max\{a,b\}$, $m = \max\{l,k\}$, $n = c+(2c-1)m$ e $s = 1+\min\{a,b,k,l\}$. Então $\eta(G,H)$ é um grupo nilpotente e sua classe não é maior que $nC_{s+1,2} - C_{s,2}$.

No final da Seção 10 estendemos o resultado de Ellis e McDermott (enunciado na seção 7) que fornece uma cota para a ordem de $G \otimes H$, quando G e H são grupos de ordem potência de primo, para o caso em que G e H são grupos nilpotentes agindo nilpotentemente um sobre o outro.

Na Seção 11 estudamos limitações para a ordem do quadrado tensorial não abeliano de um grupo solúvel finito. Provamos aí

Teorema 11.7 Se G é um grupo solúvel finito de comprimento derivado l, então

$$\begin{aligned}|G\otimes G| \ \leq & \left|G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \prod_{i=1}^{l-1}\left(\left|G_i^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right|^{2^{i-1}} \cdot \left|G_i^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}\frac{G}{G_i}} I\left(\tfrac{G}{G_i}\right)\right|\right)\cdot \\ & \cdot \prod_{i=1}^{l-2}\prod_{k=i+1}^{l-1}\left|G_k^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_i}{G_k}\right]} I\left(\tfrac{G_i}{G_k}\right)\right|^{2^{i-1}}\end{aligned}$$

Para o caso em que G é um grupo metabeliano mostramos

Teorema 11.8 Seja G um grupo metabeliano finito. Então

$$|G\otimes G| \text{ divide } \left|G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G'\wedge G'\right| \left|G'\otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})\right|$$

onde $G'\wedge G'$ é o quadrado exterior (usual) do $\mathbb{Z}$-módulo G'. No caso particular em que $[G',G]=1$, então

$$|G\otimes G| \leq \left|G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G'\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right|$$

Concluímos nosso trabalho dando exemplos de grupos metabelianos G tais que $|G \odot G|$ atingem a cota obtida no resultado anterior. Em alguns desses exemplos calculamos também o quadrado tensorial.

Grande parte do trabalho apresentado aqui foi realizado durante o período em que estive na Universidade de Brasília - UnB. Agradeço ao Prof. Noraí R. Rocco, pela orientação e constante estímulo recebidos durante o desenvolvimento desta pesquisa e também a todos os membros do Departamento de Matemática da UnB, pela hospitalidade e por terem oferecido as condições necessárias para a realização deste trabalho.

Deixo também o meu agradecimento aos meus amigos de Campinas, Brasília, Maringá e, em especial, ao meu marido, Emerson, pelos incentivos recebidos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

CAPÍTULO I

Preliminares

Neste capítulo, as três primeiras seções têm por objetivo fixar notações, além de destacar alguns resultados da teoria de grupos que serão úteis ao nosso trabalho. Esses resultados terão suas demonstrações omitidas e como referência citamos [21], [22] e [28] para a seção 1, [19] e [17] para a 2 e [27] para a 3. Na seção 4 damos a definição do funtor quadrático de Whitehead e citamos algumas de suas propriedades. Como nosso trabalho envolve os produtos tensoriais não abelianos e uma generalização do grupo $\nu(G)$, as seções 6,7 e 8 são dedicadas a estes grupos. Nelas introduzimos os conceitos, damos algumas de suas propriedades básicas, além de enunciarmos os resultados relevantes para todo o trabalho.

1 Cálculo de Comutadores

Sejam $x_1, x_2, \ldots$ elementos de um grupo. O *conjugado* de x_1 por x_2 é

$$x_1^{x_2} := x_2^{-1}x_1x_2$$

e o comutador de x_1 e x_2 (nesta ordem) é

$$[x_1, x_2] := x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 \ (= x_1^{-1}x_1^{x_2}).$$

Para $n \geq 2$ o *comutador simples de peso n* é definido indutivamente pelas regras

$$[x_1, \ldots, x_n] := [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n] \quad \text{e} \quad [x_1] := x_1.$$

Escrevemos $[x,_{n+1} y] = [[x,_n y], y]$ com $[x,_1 y] = [x, y]$

Seja G um grupo. Se X é um subconjunto não vazio de G, então escrevemos $\langle X\rangle$ para o subgrupo de G gerado por X e $\langle X\rangle^G$ para denotar o fêcho normal de X em G.

O centro de G é indicado por $Z(G)$. Para X, Y subconjuntos não vazios de G, $[X, Y]$ denota o subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x, y]$, com $x \in X,\ y \in Y$. Para $X_1, X_2, \cdots, X_n$ subconjuntos não vazios de G, com $n \geq 2$, definimos

$$[X_1, X_2, \cdots, X_n] := [[X_1, \cdots, X_{n-1}], X_n]$$

Usamos a notação

$$[X,_n Y] = [X, \underbrace{Y, \cdots, Y}_{n}]$$

A seguir daremos algumas propriedades básicas referentes a comutadores.

Proposição 1.1 *(cf. [21], pag. 119). Sejam x, y, z elementos de um grupo. Então*

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1} = [x, y^{-1}]^{-y} = [x^{-1}, y]^{-x}$

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$; $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$

(iii) $[x, y]^z = [x, y][x, y, z] = [x^z, y^z]$

(iv) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ *(identidade de Hall-Witt).*

Se $\alpha : G \to G_1$ é um homomorfismo do grupo G no grupo G_1, então escrevemos $(g)\alpha$ para a imagem do elemento g (de G) por α. Se X é um subconjunto não vazio de G, então $(X)\alpha$ denota o conjunto $\{(x)\alpha \,|\, x \in X\}$.

Proposição 1.2 *(cf. [22], pag. 12). Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Então*

(i) $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle$;

(ii) $[H, K] = [K, H]$;

(iii) *Se $\alpha : G \to G_1$ é um homomorfismo de grupos, então $([H, K])\alpha = [(H)\alpha, (K)\alpha]$;*

(iv) *Se H e K são normais (respectivamente característicos) em G, então $[H, K]$ é um subgrupo normal (respectivamente característico) de G;*

(v) *Se $K = \langle Y \rangle$ então $[H, K] = [H, Y]^K$;*

(vi) *Se $H = \langle X \rangle$ e $K = \langle Y \rangle$, então $[H, K] = [X, Y]^{HK}$.*

Denotamos por G_i ao i-ésimo termo da série derivada de um grupo G. Assim,

$$G_0 = G,\ G_1 = [G, G] \text{ e, para } i \geq 1,\ G_i = [G_{i-1}, G_{i-1}]$$

É comum escrever G' no lugar de G_1 e G^{ab} para indicar $\frac{G}{G'}$. Quando $G_{l-1} \neq G_l = 1$, o grupo é *solúvel*, de comprimento derivado l. Se G é solúvel indicaremos o seu comprimento derivado por $l(G)$.

Escreveremos $\gamma_i(G)$ para o i-ésimo termo da série central inferior de G. Desta forma, $\gamma_1(G) = G$ e $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$ para $i \geq 1$; esta série satisfaz:

(i) $\gamma_i(G) \trianglelefteq G, \quad i \geq 1$;

(ii) $\dfrac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} \leq Z\left(\dfrac{G}{\gamma_{i+1}(G)}\right), \quad i \geq 1$

Se $\gamma_c(G) \neq \gamma_{c+1}(G) = 1$, então dizemos que G é *nilpotente*, de classe de nilpotência c. Para um grupo nilpotente G, denotaremos a sua classe por $cl(G)$.

Algumas propriedades básicas referentes a grupos nilpotentes estão resumidas no resultado a seguir:

Proposição 1.3 *(cf. [21], pag. 118 e 126).*

(i) *Seja G um grupo nilpotente de classe c. Então todo subgrupo e grupo quociente de G são nilpotentes e suas classes de nilpotência são no máximo c.*

(ii) *Um produto direto de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente.*

(iii) *Todo p-grupo finito é nilpotente.*

(iv) *Um grupo finito G é nilpotente se e somente se é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.*

Se r é um número natural, escreveremos $C_{r,2}$ para o coeficiente binomial $r(r-1)/2$.

O próximo resultado fornece uma condição para um grupo ser nilpotente.

Teorema 1.4 *(Critério de P. Hall, cf. [28], VI.6.g). Se N é um subgrupo normal de G tal que N e $\frac{G}{N'}$ são nilpotentes de classes s e n, respectivamente, então G é nilpotente e $cl(G) \leq nC_{s+1,2} - C_{s,2}$.*

Definição. Dizemos que um grupo G é um *grupo engeliano*, ou *que satisfaz a condição de Engel*, se para qualquer par de elementos x, y de G, existe um inteiro n (que pode depender de x e y) tal que $[x,_n y] = 1$. Se existe um inteiro n (fixo) tal que $[x,_n y] = 1$ para todo x, y em G, então G é dito ser *n-engeliano* ou que *satisfaz a n-ésima condição de Engel.*

É claro que todo grupo nilpotente de classe n é n-engeliano. Dois resultados importantes sobre grupos engelianos são os seguintes:

Teorema 1.5 *(Zorn, cf. [21], pag. 358). Todo grupo engeliano finito é nilpotente.*

Teorema 1.6 *(Gruenberg [13]) Todo grupo engeliano solúvel finitamente gerado é nilpotente.*

2 Grupos Livres

Nesta seção introduzimos os conceitos de grupo livre e apresentação de um grupo bem como algumas de suas propriedades.

Definição. Um grupo F é dito *livre* sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que

$$x\theta' = x\theta \tag{2.1}$$

para todo $x \in X$. O cardinal $|X|$ é chamado o *posto* de F.

Há outras formas de expressar a propriedade (2.1). Por exemplo, podemos dizer que θ' estende θ ou, denotando por $i : X \to F$ a inclusão de X em F, que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, "\theta'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

é comutativo, i.e., $i\theta' = \theta$. Observemos que a composição de funções é feita da esquerda para a direita.

Substituindo a palavra "grupo" por "grupo abeliano" nos dois lugares em que ela aparece obtemos o conceito de grupo *abeliano livre.*

Proposição 2.1 *(cf. [17], pag. 7). Todo grupo é uma imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Seja G um grupo e $\phi : F \to G$ um epimorfismo de um grupo livre $F = F(X)$ sobre G. Temos então $G \cong F/N$ onde N é o núcleo de ϕ. Agora seja $R \subseteq F$ um conjunto que gera N como subgrupo normal de F, i.e., $< R >^F = N$. Observemos que X e R determinam G (a menos de isomorfismo). Assim escrevemos $G =< X \mid R >$ e chamamos este par uma *apresentação livre*, ou simplesmente apresentação, do grupo G. Os elementos de X são denominados *geradores* e os de R *relatores*. Dizemos que G é *finitamente apresentado* se existe uma apresentação $G =< X|R >$ onde X e R são finitos. Quando $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ é comum escrevermos $G =< x_1, \ldots, x_n \mid r_1 = 1, \ldots, r_m = 1 >$. Neste caso chamamos $r_i = 1$, $1 \leq i \leq m$, de *relações definidoras* para G.

Exemplo. O grupo diedral de grau n, D_n, tem apresentação

$$D_n \cong < x, y \mid x^2 = 1,\ y^n = 1,\ y^x = y^{-1} > .$$

Proposição 2.2 *(cf. [17], pag. 27). Se G, H, K são grupos e $\alpha : G \to H$, $\beta : G \to K$ são homomorfismos com α sobrejetora e tais que $Nuc(\alpha) \subseteq Nuc(\beta)$ então existe um homomorfismo $\gamma : H \to K$ tal que $\alpha\gamma = \beta$*

$$\begin{tikzcd}
Nuc\ \beta \arrow[dr, hook] & & H \arrow[dd, "\gamma"] \\
& G \arrow[ur, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
Nuc\ \alpha \arrow[uu] \arrow[ur, hook] & & K
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.3 *(Teste de Substituição, cf. [17], pag. 29). Sejam G um grupo com apresentação $< X|R >$, H um grupo e $\theta : X \to H$ uma função. Então θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e somente se, θ é consistente com todas as relações definidoras para G, i.e.. se para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $x\theta$ em r dá a identidade de H.*

Proposição 2.4 *(cf. [17], pag. 32). Se G e H são grupos com apresentações $< X \mid R >$ e $< Y \mid S >$ respectivamente, então o produto direto $G \times H$ tem a apresentação*

$$< X, Y \mid R, S, [X, Y] >$$

Sejam $G =< X \mid R >$ e $H =< Y \mid S >$ duas apresentações. O grupo $< X, Y \mid R, S >$ é chamado o *produto livre* de G e H e é denotado por $G * H$.

Proposição 2.5 *(cf. [21], pag. 167). Seja $G * H$ o produto livre de dois grupos não triviais. Então o subgrupo comutador $[G, H]$ de $G * H$ é normal. Além disso, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto*

$$\{[g, h] \mid g \in G,\ h \in H,\ g, h \neq 1\}$$

3 Multiplicador de Schur

Definição . Seja G um grupo com apresentação $< X|R >$. O *multiplicador de Schur* de G é definido por

$$M(G) = \frac{F' \cap \overline{R}}{[F, \overline{R}]}$$

onde $\overline{R}$ denota o fêcho normal de R em $F = F(X)$.

Proposição 3.1 *(cf. [27], pag. 363 e 202).*

(i) *$M(G)$ depende apenas de G e não da apresentação $< X|R >$ para G;*

(ii) *Se G é um grupo finito então $M(G)$ é um grupo abeliano finito e o expoente de $M(G)$ divide $|G|$.*

Proposição 3.2 *Sejam G um grupo finito e $\tilde{G}$ um grupo que possui um subgrupo central A tal que $\tilde{G}/A \cong G$. Então $A \cap \tilde{G}'$ é uma imagem homomórfica de $M(G)$.*

Seja G um grupo. Um grupo $\tilde{G}$ que possui um subgrupo A tal que $A \leq Z(\tilde{G}) \cap \tilde{G}'$ e $\tilde{G}/A \cong G$ é chamado um *grupo de recobrimento* de G. Se além disso $A \cong M(G)$, então dizemos que $\tilde{G}$ é um *grupo de recobrimento total* de G.

O exemplo a seguir mostra que um grupo de recobrimento de um grupo não é necessariamente único.

Exemplo. Sejam

$$\begin{array}{ll} D_4 & = \langle x, y \,|\, x^2 = 1,\, y^4 = 1,\, y^x = y^{-1} \rangle \\ Q_2 & = \langle a, b \,|\, a^2 = b^2,\, b^4 = 1,\, a^b = a^{-1} \rangle \end{array}$$

Temos

$$D_4' = Z(D_4) = \langle y^2 \rangle \quad \text{e} \quad \frac{D_4}{Z(D_4)} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$Q_2' = Z(Q_2) = \langle a^2 \rangle \quad \text{e} \quad \frac{Q_2}{Z(Q_2)} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Logo D_4 e Q_2 são grupos de recobrimento (não isomorfos) de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4 O Funtor Quadrático de Whitehead

Nesta seção definiremos o funtor quadrático de Whitehead Γ e veremos algumas de suas propriedades. As demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser encontradas em [30].

Definição. Dado um grupo abeliano (aditivo) A, ΓA é o grupo gerado por todos os símbolos γa com $a \in A$ satisfazendo as relações

$$\gamma(-a) = \gamma a\ ; \tag{4.1}$$

$$\gamma(a+b+c) + \gamma a + \gamma b + \gamma c = \gamma(a+b) + \gamma(b+c) + \gamma(c+a) \tag{4.2}$$

para todos os elementos $a, b, c \in A$.

Proposição 4.1 $\Gamma \mathbb{Z}_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_n, & se\ \ n\ \ é\ ímpar \\ \mathbb{Z}_{2n}, & se\ \ n\ \ é\ par \end{cases}$

Proposição 4.2 *Sejam A e B grupos abelianos. Então*

$$\Gamma(A \oplus B) \cong \Gamma A \oplus \Gamma B \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

Proposição 4.3 *Se A é um grupo abeliano finito então ΓA também é.*

5 O Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

Nesta seção introduzimos o produto tensorial não abeliano de grupos e destacamos os principais resultados referentes a este assunto e que serão importantes no nosso trabalho.

Uma ação de um grupo G sobre um grupo H é um homomorfismo $\theta : G \to Aut(H)$, onde $Aut(H)$ é o grupo de automorfismos de H. Escrevemos $(h)g\theta$ como h^g, representando assim uma ação à direita de H. Se θ é o homomorfismo trivial então dizemos que G age trivialmente sobre H ou que H é G-trivial.

Sejam G e H dois grupos munidos de uma ação de G sobre H e de uma ação de H sobre G. Suponhamos que cada um desses grupos atue sobre si mesmo por conjugação, i.e., para $g, x \in G$ e $h, y \in H$, $g^x = x^{-1}gx$ e $h^y = y^{-1}hy$. Dessa forma temos uma ação do produto livre $G * H$ sobre G e H. Vamos dizer que as ações de G sobre H e de H sobre G são *compatíveis* se: para todo $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$

$$g^{(h^{g_1})} = g^{g_1^{-1}hg_1} := ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \tag{5.1}$$

$$h^{(g^{h_1})} = h^{h_1^{-1}gh_1} := ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1} \tag{5.2}$$

Se G e H atuam um sobre o outro compativelmente, o produto tensorial (não abeliano) de G e H, como introduzido por R. Brown e J.L. Loday em [7], é definido como o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h, g \in G, h \in H$ satisfazendo as relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{5.3}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{5.4}$$

para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Tal grupo é denotado por $G \otimes H$.

Notemos que as relações (5.3) e (5.4) têm a forma das identidades de comutadores quando $g \otimes h$ é substituído por $[g, h]$ e as ações por conjugação.

Uma vez que a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (5.1) e (5.2), o *quadrado tensorial* não abeliano $G \otimes G$ de um grupo G pode sempre ser definido.

Observação 1. Fazendo $g_1 = 1$ em (5.3) e $h_1 = 1$ em (5.4) vemos que $g \otimes 1 = 1 \otimes h$, onde $g \in G$ e $h \in H$, é o elemento neutro de $G \otimes H$.

Observação 2. É fácil ver que se G e H são grupos agindo um sobre o outro, com G abeliano e H G-trivial, então as ações são compatíveis.

Exemplo 1. Sejam $G = < a \mid a^2 >$ e $H = < b \mid b^3 >$. Suponhamos que H age trivialmente sobre G e que G age sobre H por $h^a = h^{-1}.h \in H$. Pela observação anterior temos que essas ações são compatíveis. Da definição de $G \otimes H$ e da observação 1, $G \otimes H$ é gerado por $\{a \otimes b, a \otimes b^2\}$. Mas, por (5.4)

$$a \otimes b^2 = (a \otimes b)(a^b \otimes b^b) = (a \otimes b)(a \otimes b) = (a \otimes b)^2$$

Logo $G \otimes H = < a \otimes b >$. Também temos

$$1 \otimes b = a^2 \otimes b = (a^a \otimes b^a)(a \otimes b) = (a \otimes b^2)(a \otimes b) = (a \otimes b)^3.$$

é fácil verificar que a aplicação $G \otimes H \to \mathbb{Z}_3, a \otimes b \mapsto \bar{1}$ é um isomorfismo. ■

Exemplo 2. Sejam $\mathbb{Z}_p = \langle x | x^p \rangle$, com p primo, $p \neq 2$ e $K = \langle a, b \mid a^2, b^2, [a, b] \rangle$ ($\cong C_2 \times C_2$). Suponhamos que $\mathbb{Z}_p$ atue trivialmente sobre K e que a ação de K sobre $\mathbb{Z}_p$ seja dada por:

$$x^a = x^{-1}, \quad x^b = x^{-1}$$

Pela observação 2, essas ações são compatíveis. Logo o produto tensorial não abeliano $\mathbb{Z}_p \otimes K$ está definido. Observamos que $\mathbb{Z}_p \otimes K$ é gerado pelo conjunto

$$\{x^m \otimes a, \ x^m \otimes b, \ x^m \otimes ab | m = 1, 2, \cdots . p - 1\}$$

Mas

$$x^2 \otimes a = (x^x \otimes a^x)(x \otimes a) = (x \otimes a)(x \otimes a) = (x \otimes a)^2$$

e, por indução, mostramos que

$$x^m \otimes a = (x \otimes a)^m, \quad \forall m \in \{1, 2, \cdots . p - 1\}$$

Como $x^p = 1$, $(x \otimes a)^p = 1$. Analogamente

$$x^m \otimes b = (x \otimes b)^m, \ (x \otimes b)^p = 1, \ x^m \otimes ab = (x \otimes ab)^m \text{ e } (x \otimes ab)^p = 1$$

Além disso.

$$x \otimes ab = (x \otimes b)(x^b \otimes a^b) = (x \otimes b)(x^{p-1} \otimes a) = (x \otimes b)(x \otimes a)^{p-1} \tag{5.5}$$

Logo. $\mathbb{Z}_p \otimes K$ é gerado por $(x \otimes a)$ e $(x \otimes b)$. Mas

$$\begin{aligned}
(x \otimes ab)^2 &= (x \otimes ab)(x \otimes ba) \\
&= (x \otimes b)(x^b \otimes a^b)(x \otimes a)(x^a \otimes b^a) \\
&= (x \otimes b)(x^{p-1} \otimes a)(x \otimes a)(x^{p-1} \otimes b) \\
&= (x \otimes b)(x \otimes a)^{p-1}(x \otimes a)(x \otimes b)^{p-1} \\
&= (x \otimes b)(x \otimes a)^p(x \otimes b)^{p-1} \\
&= (x \otimes b)(x \otimes b)^{p-1} \\
&= (x \otimes b)^p \\
&= 1
\end{aligned}$$

Como também $(x \otimes ab)^p = 1$ e $mdc(2,p) = 1$ segue que $x \otimes ab = 1$. Isto, juntamente com (5.5), nos dá

$$x \otimes b = (x \otimes a)^{-(p-1)}$$

e, portanto,

$$\mathbb{Z}_p \otimes K = \langle x \otimes a \rangle$$

Vamos verificar que $\mathbb{Z}_p \otimes K \cong \mathbb{Z}_p$. Seja $X = \{x^m \otimes a^i b^j \mid m,i,j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq m \leq p-1,\ 0 \leq i,j \leq 1\}$ e definamos

$$\begin{array}{ll} \alpha : X & \longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ x^m \otimes a^i b^j & \mapsto x^{m\varepsilon_{i,j}} \end{array}$$

onde $\varepsilon_{i,j} = 0$ se $i = j$ e $\varepsilon_{i,j} = 1$ se $i \neq j$. Para todo $m,n \in \{0,1,\cdots,p-1\}$ e $i,j \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned} (x^m x^n \otimes a^i b^j)\alpha &= (x^{m+n} \otimes a^i b^j)\alpha \\ &= x^{(m+n)\varepsilon_{i,j}} \\ &= x^{m\varepsilon_{i,j}} x^{n\varepsilon_{i,j}} \\ &= (x^m \otimes a^i b^j)\alpha(x^n \otimes a^i b^j)\alpha \\ &= ((x^m)^{x^n} \otimes (a^i b^j)^{x^n})\alpha(x^n \otimes a^i b^j)\alpha \end{aligned}$$

pois $\mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre K. Além disso, para todo $m \in \{0,1,\cdots,p-1\}$ e $i,j,k,l \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned} (x^m \otimes a^i b^j a^k b^l)\alpha &= (x^m \otimes a^{i+k} b^{j+l})\alpha \\ &= (x^m \otimes a^{\varepsilon_{i,k}} b^{\varepsilon_{j,l}})\,\alpha \quad (\text{pois } a^2 = b^2 = 1) \\ &= x^{m\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}}} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (x^m \otimes a^k b^l)\alpha \left((x^m)^{a^k b^l} \otimes (a^i b^j)^{a^k b^l}\right)\alpha &= x^{m\varepsilon_{k,l}} \left(x^{(-1)^{\varepsilon_{k,l}} m} \otimes a^i b^j\right)\alpha \\ &= x^{m\varepsilon_{k,l}} x^{(-1)^{\varepsilon_{k,l}} m\varepsilon_{i,j}} \\ &= x^{m\left(\varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}} \varepsilon_{i,j}\right)} \end{aligned}$$

Vamos verificar que

$$\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}} \varepsilon_{i,j} \tag{5.6}$$

Temos 4 casos:

(1) $i = j$ e $k = l$. Neste caso, $\varepsilon_{i,k} = \varepsilon_{j,l}$ e, então

$$\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = 0 = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}} \varepsilon_{i,j}$$

(2) $i = j$ e $k \neq l$. Isto implica que $\varepsilon_{i,k} \neq \varepsilon_{j,l}$ e, então

$$\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = 1 = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j}$$

(3) $i \neq j$ e $k = l$. Este é análogo ao anterior.

(4) $i \neq j$ e $k \neq l$. Neste caso,

$$\varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j} = 1 + (-1)^1 1 = 0$$

Se $i = k$, então devemos ter $j = l$. Daí

$$\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = \varepsilon_{0,0} = 0$$

Se $i \neq k$, então $j \neq l$. Conseqüentemente

$$\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = \varepsilon_{1,1} = 0$$

Em qualquer caso, (5.6) ocorre. Logo,

$$(x^m \otimes a^i b^j a^k b^l)\alpha = (x^m \otimes a^k b^l)\alpha \left((x^m)^{a^k b^l} \otimes (a^i b^j)^{a^k b^l}\right)\alpha$$

Segue então que α é consistente com as relações definidoras de $\mathbb{Z}_p \otimes K$ e, portanto, estende-se a um homomorfismo α' de $\mathbb{Z}_p \otimes K$ em $\mathbb{Z}_p$. Como $(x \otimes a)\alpha' = x$, $\mathbb{Z}_p \otimes K = \langle x \otimes a \rangle$ e $(x \otimes a)^p = 1$, temos que α' é um isomorfismo. Portanto,

$$\mathbb{Z}_p \otimes K \cong \mathbb{Z}_p.$$

A seguir veremos alguns resultados obtidos por R. Brown e J. L. Loday [7].

Proposição 5.1 *Os grupos G e H atuam sobre $G \otimes H$ de modo que*

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g \ , \ (g \otimes h_1)^h = g^h \otimes h_1^h$$

para todo $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$. Conseqüentemente, temos uma ação de $G * H$ sobre $G \otimes H$ dada por

$$(g \otimes h)^p = g^p \otimes h^p$$

onde $g \in G, h \in H$ e $p \in G * H$.

Proposição 5.2 *(cf. [7]). Suponhamos que $\alpha : G \to A, \beta : H \to B$ sejam homomorfismos de grupos, A, B atuem compativelmente um sobre o outro e que α e β preservem as ações, no seguinte sentido:*

$$(h^g)\beta = (h\beta)^{g\alpha} \ , \ (g^h)\alpha = (g\alpha)^{h\beta}$$

para todo $g \in G, h \in H$. Então existe um único homomorfismo

$$\alpha \otimes \beta : G \otimes H \to A \otimes B$$

tal que $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = g\alpha \otimes h\beta$ para todo $g \in G, h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras então $\alpha \otimes \beta$ também é.

Proposição 5.3 *(cf. [7]). Existe um único isomorfismo*

$$\nu : G \otimes H \to H \otimes G \tag{5.7}$$

tal que $(g \otimes h)\nu = (h \otimes g)^{-1}$ para todo $g \in G, h \in H$.

Proposição 5.4 *(cf. [7]). Para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ temos*

(a) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$;

(b) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$;

(c) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$;

(d) $g_1 \otimes h^{-g}h = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$;

(e) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1$.

Definição. Um *módulo cruzado* é um homomorfismo de grupos $\mu : M \to P$ junto com uma ação de P sobre M satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned} (MC1)\ (m^p)\mu &= p^{-1}(m)\mu p \ , \ p \in P, m \in M \\ (MC2)\ (m_1)^{(m)\mu} &= m^{-1}m_1 m \ , \ m, m_1 \in M \end{aligned}$$

Proposição 5.5 *(cf. [7]).*

(a) *Existem homomorfismos de grupos* $\lambda : G \otimes H \to G, \mu : G \otimes H \to H$ *tais que* $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^{h}$, $(g \otimes h)\mu = h^{-g}h$;

(b) *Os homomorfismos* λ, μ *com as ações dadas na Proposição 5.1 são módulos cruzados;*

(c) *Se* $g \in G, h \in H, t \in G \otimes H$ *então*

$$\begin{aligned} t\lambda \otimes h &= t^{-1}t^{h} \\ g \otimes t\mu &= t^{-g}t; \end{aligned}$$

(d) $t\lambda \otimes t_1\mu = [t, t_1]$ *para todo* $t, t_1 \in G \otimes H$;

(e) *As ações de* G *sobre* $Nuc(\mu)$ *e de* H *sobre* $Nuc(\lambda)$ *são triviais.*

Proposição 5.6 *(cf. [7]). Se* G *atua trivialmente sobre* H *e* H *atua trivialmente sobre* G *então*

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$$

A seguir veremos algumas propriedades de produtos tensoriais não abelianos de grupos.

Proposição 5.7 *(G. Ellis, [8]) Sejam duas extensões centrais*

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow M \xrightarrow{i_1} G \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2} H \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 1 \end{aligned}$$

tais que G *e* H *são grupos cada um atuando compativelmente sobre o outro,* A *e* B *também,* α, β *são homomorfismos que preservam as ações com* $Nuc(\alpha), Nuc(\beta)$ *atuando trivialmente sobre* H, G *respectivamente. Então existe uma seqüência exata*

$$(G \otimes N) \times (M \otimes H) \xrightarrow{\widetilde{\theta}} G \otimes H \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} A \otimes B \longrightarrow 1$$

na qual $Im\widetilde{\theta}$ *é central em* $G \otimes H$.

Em particular, dada uma extensão central

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{inc} K \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$$

existe uma seqüência exata

$$(A \otimes K) \times (K \otimes A) \xrightarrow{i} K \otimes K \xrightarrow{\nu \otimes \nu} G \otimes G \longrightarrow 1$$

na qual Imi é central.

Sejam G um grupo e $\mathbb{Z}G$ o anel de grupo de G sobre $\mathbb{Z}$. Um elemento típico de $\mathbb{Z}G$ tem a forma $\sum\limits_{g \in G} x_g g$ onde os $x_g \in \mathbb{Z}$ e apenas um número finito deles é diferente de zero. Consideremos o seguinte homomorfismo de anéis, chamado de aplicação de aumento

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{Z}G &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{g \in G} x_g g &\mapsto \sum_{g \in G} x_g \end{aligned}$$

O núcleo deste homomorfismo é dito o *ideal de aumento* de G e é denotado por $I(G)$. é fácil vermos que $I(G)$ é gerado como $\mathbb{Z}$-módulo pelo conjunto $\{g - 1; g \in G \setminus \{1\}\}$. Também $I(G)$ (como ideal de $\mathbb{Z}G$) é um $\mathbb{Z}G$-módulo.

Se A é um grupo abeliano com uma ação de G, $(a, g) \mapsto a^g$, $\forall a \in A$, $g \in G$, façamos $r = \sum x_g g \in \mathbb{Z}G$ operar à direita sobre um elemento $a \in A$ por

$$a. \sum_{g \in G} x_g g = \sum_{g \in G} x_g a^g$$

Facilmente se verifica que para todos $a, b \in A$ e $r, s \in \mathbb{Z}G$

$$(a + b).r = a.r + b.r, \ a.(r + s) = a.r + a.s, \ a.(rs) = (a.r).s, \ a.1 = a$$

de modo que A é um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita.

Proposição 5.8 *(D. Guin, [14]) Sejam A e G grupos como acima e suponhamos que G seja A-trivial. Então*

$$A \otimes G \cong A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G)$$

R. Brown, D.L. Johnson e E.F. Robertson [5] provaram que sob certas condições favoráveis, o produto tensorial não-abeliano se distribui sobre produtos diretos.

Proposição 5.9 *Sejam A, B, C grupos com ações dadas de A sobre B e C e de B e C sobre A. Suponhamos que essas últimas ações*

(a) *comutem: $a^{bc} = a^{cb}$, de modo que $B \times C$ atue sobre A;*

(b) *induzam a ação trivial de B sobre $A \otimes C : (a \otimes c)^b = a \otimes c$ e*

(c) *induzam a ação trivial de C sobre $A \otimes B : (a \otimes b)^c = a \otimes b$, para todo $a \in A$, $b \in B, c \in C$. Então*

$$A \otimes (B \times C) \cong (A \otimes B) \times (A \otimes C)$$

Deste resultado e da Proposição 5.3 obtemos

$$(B \times C) \otimes A \cong (B \otimes A) \times (C \otimes A)$$

Sejam G e H grupos com cada um atuando trivialmente sobre o outro e sobre si mesmo por conjugação, de modo que pela Proposição 5.6, $G \otimes H, H \otimes G$ são produtos tensoriais usuais. Nestas condições temos

Proposição 5.10 *(cf. [5])*

$$(G \times H) \otimes (G \times H) = (G \otimes G) \times (G \otimes H) \times (H \otimes G) \times (H \otimes H)$$

Definição Sejam G e H subgrupos normais de um grupo M agindo um sobre o outro por conjugação em M. O *produto exterior (não abeliano)* $G \wedge H$ é o grupo obtido do produto tensorial não abeliano $G \otimes H$ adicionando as relações $x \otimes x = 1$, para todo $x \in G \cap H$.

Em [5], R. Brown, D.L. Johnson e E.F. Robertson provaram o seguinte resultado:

Proposição 5.11 *Se G é um grupo finito (resp. p-grupo finito, p primo), então $G \otimes G$ também é finito (resp. um p-grupo finito).*

Ellis, em [9], estendeu o resultado acima, provando a finitude do produto tensorial não abeliano de grupos finitos. Entretanto, sua demonstração usa argumentos homológicos (como veremos a seguir) e nenhuma prova puramente por métodos da teoria dos grupos desse resultado é conhecida.

Teorema 5.12 *Se G e H são grupos finitos então $G \otimes H$ também é. Se, além disso, G e H são p-grupos então $G \otimes H$ também é.*

Demonstração. Ellis primeiramente demonstra este resultado para o caso especial em que G e H são subgrupos normais finitos de algum grupo M, onde cada um deles atua sobre o outro por conjugação em M. Esta demonstração usa duas seqüências exatas de R. Brown e J.L. Loday ([7], Teoremas 2.12 e 4.5), a saber

$$\to H_3(GH/G) \oplus H_3(GH/H) \to V \to H_2(GH) \to$$

e

$$\Gamma(G \cap H/[G, H]) \to G \otimes H \to G \wedge H \to 1$$

onde V é o núcleo da função comutador $G \wedge H \to [G, H], g \wedge h \mapsto [g, h]$. A finitude de $G \otimes H$, neste caso, segue do fato que a homologia de um grupo finito é finito (veja [26], Capítulo 10) e da Proposição 4.2. No caso em que G e H são p-grupos finitos a prova é análoga.

Caso geral: Sejam G e H grupos finitos e seja N o subgrupo do produto semidireto $G \rtimes H$ gerado pelos elementos $(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)$ com $g \in G, h \in H$.

Afirmação 1. N é um subgrupo normal de $G \rtimes H$. De fato, sejam $g, x \in G$ e $h, y \in H$. Então temos que

$$\begin{aligned}
(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)^{(x,1)} &= (x^{-1}, 1)(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)(x, 1) \\
&= ((g^{-1}g^h)^x, (h^{-1}h^g)^x) \\
&= ((g^x)^{-1}(g^x)^{h^x}, (h^x)^{-1}(h^x)^{g^x}) \in N
\end{aligned}$$

e

$$(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)^{(1,y)} = (1, y^{-1})(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)(1, y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(g^{-1}g^{h}, y^{-g^{-1}g^{h}}h^{-1}h^{g}y\right)\\
&= \left(g^{-1}g^{h}, y(y^{-g^{-1}g^{h}})^{y}(h^{-1}h^{g})^{y}\right)\\
&= \left(g^{-1}g^{h}(g^{-1}g^{h})^{-y}(g^{-1}g^{h})^{y}, yy^{-(g^{-1}g^{h})^{y}}(h^{-1}h^{g})^{y}\right)\\
&= \left(g^{-1}g^{h}(g^{-1}g^{h})^{-y}, y^{((g^{-1}g^{h})^{y})^{-1}}y^{-1}\right)\left((g^{-1}g^{h})^{y}, (h^{-1}h^{g})^{y}\right)
\end{aligned}
$$

Agora como

$$y^{((g^{-1}g^{h})^{y})^{-1}}y^{-1} = y^{y^{-1}(g^{-1}g^{h})^{-1}y}y^{-1} = y^{-1}y^{(g^{-1}g^{h})^{-1}}yy^{-1} = y^{-1}y^{(g^{-1}g^{h})}$$

segue que $(g^{-1}g^{h}, h^{-1}h^{g})^{(1,y)} \in N$. Assim $(g^{-1}g^{h}, h^{-1}h^{g})^{(x,y)} \in N$ uma vez que $(x, y) = (x, 1)(1, y)$. Logo N é normal em $G \bowtie H$.

Seja $G \circ H = \dfrac{G \bowtie H}{N}$ e denotemos a classe lateral (à direita) de (g, h) por $\overline{(g, h)}$.

Afirmação 2. Existe uma ação de $G \circ H$ sobre G e H dada por

$$g_1^{\overline{(g,h)}} = g_1^{gh} \quad \text{e} \quad h_1^{\overline{(g,h)}} = h_1^{gh}$$

para todo $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$. De fato, para cada $g \in G, h \in H$ a função

$$
\begin{aligned}
\theta_{(g,h)} : G &\to G\\
g_1 &\mapsto g_1^{gh}
\end{aligned}
$$

é claramente um automorfismo de G. Definamos

$$
\begin{aligned}
\theta : G \circ H &\to Aut(G)\\
\overline{(g, h)} &\mapsto \theta_{(g,h)}
\end{aligned}
$$

Se $g, g' \in G, h, h' \in H$ são tais que $\overline{(g, h)} = \overline{(g', h')}$ então $(g, h) = n.(g', h')$ para algum $n \in N$. Agora como

$$g_1^{x^{-1}x^{y}y^{-1}y^{x}} = g_1$$

para todo $g_1, x \in G$ e $y \in H$ concluímos que $\theta_{(g,h)} = \theta_{(g',h')}$, ou seja, θ está bem definida. Claramente θ é um homomorfismo de grupos.

Afirmação 3. Os homomorfismos

$$\begin{array}{rcl} \sigma : G & \to & \overline{G \circ H} \\ g & \mapsto & \overline{(g,1)} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \nu : H & \to & \overline{G \circ H} \\ h & \mapsto & \overline{(1,h)} \end{array}$$

são módulos cruzados. De fato. Sejam $g, x \in G$ e $y \in H$. Temos que

$$(g,1)^{(x,y)} = (x^{-1}, y^{-x^{-1}})(g,1)(x,y) = (g^x, y^{-g^x}y) = (g^x(g^x)^{-y}, y^{-1}y^{(g^x)^{-1}})(g^{xy},1)$$

e como $(g^x(g^x)^{-y}, y^{-1}y^{(g^x)^{-1}}) \in N$ segue que

$$(g^{\overline{(x,y)}})\sigma = \overline{(g^{xy},1)} = \overline{(x,y)}^{-1}(g)\sigma\overline{(x,y)}$$

Claramente $g^{x\sigma} = x^{-1}gx$ e portanto σ é um módulo cruzado. A prova para ν é análoga.

Para todo $h \in H$ e $x \in Nuc\sigma$

$$h^x = h^{\overline{(x,1)}} = h^{x\sigma} = h$$

Logo $Nuc\sigma$ atua trivialmente sobre H. Analogamente, a ação de $Nuc\nu$ sobre G é trivial. Além disso, para todo $g \in G$ e $x \in Nuc\sigma$

$$g^x = g^{\overline{(x,1)}} = g^{x\sigma} = g$$

ou seja, $Nuc\sigma$ é central em G. Analogamente $Nuc\nu$ é central em H. Dessa forma, as extensões

$$1 \to Nuc\sigma \to G \to Im\sigma \to 1$$

$$1 \to Nuc\nu \to H \to Im\nu \to 1$$

são centrais. Para cada $g \in G, h \in H$

$$(g^h)\sigma = (g^{h\nu})\sigma = (g^{\overline{(1,h)}})\sigma = (g\sigma)^{\overline{(1,h)}} = (g\sigma)^{h\nu}$$

e

$$(h^g)\nu = (h^{g\sigma})\nu = (n\nu)^{g\sigma}.$$

ou seja, σ e ν preservam as ações.

Assim, pela Proposição 5.7 existe uma seqüência exata

$$(G \otimes Nuc\nu) \times (Nuc\sigma \otimes H) \to G \otimes H \to Im\sigma \otimes Im\nu \to 1.$$

Agora, como σ e ν são módulos cruzados segue que $Im\sigma$ e $Im\nu$ são subgrupos normais de G e H. Assim, $Im\sigma \otimes Im\nu$ é finito. Pela Proposição 5.8, $G \otimes Nuc\nu \cong I(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} Nuc\nu$, o qual é finito pois $I(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} Nuc\nu$ é um grupo abeliano finitamente gerado de torção. Da mesma forma, $Nuc\sigma \otimes H$ é finito. Segue então da seqüência anterior que $G \otimes H$ é um grupo finito. Se G e H são também p-grupos então $I(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} Nuc\nu$, $Nuc\sigma \otimes_{\mathbb{Z}G} I(H)$ e $Im\sigma \otimes Im\nu$ são p-grupos e conseqüentemente $G \otimes H$ também.

■

6 Uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial

Nesta seção vamos ver um pouco do trabalho de N. Rocco ([23] e [24]), sobre uma construção de grupo relacionada ao quadrado tensorial não abeliano. Especificamente, sejam G e G^{φ} dois grupos isomorfos por um isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G^{\varphi}$, $g \mapsto g^{\varphi}$, para todo g em G. O grupo é definido por

$$\nu(G) := \left\langle G, G^{\varphi} \mid [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}}, \qquad \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle$$

Consideremos o subgrupo

$$\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$$

A relação entre $\nu(G)$ e $G \otimes G$ é dada pelo seguinte resultado:

Proposição 6.1 *(cf. [23])* $\Upsilon(G) \cong G \otimes G$.

Observamos que $\Upsilon(G)$ é normal em $\nu(G)$ e, portanto, $\nu(G)$ pode ser descrito como $\nu(G) = \Upsilon(G)\ GG^{\varphi}$. Assim do resultado acima e do Teorema 5.11 segue que $\nu(G)$ é finito se G é finito. Rocco dá uma prova alternativa da finitude de $\nu(G)$ quando G

é finito usando uma conexão entre $\nu(G)$ e um grupo, $\chi(G)$. introduzido por S. Sidki [29], definido por

$$\chi(G) := \langle G, G^{\varphi} \mid [g, g^{\varphi}] = 1, \qquad \forall g \in G \rangle$$

A seguir citamos um resultado de [29] sobre $\chi(G)$.

Teorema 6.2 *Seja G um π-grupo finito (π um conjunto de primos), nilpotente finito ou solúvel de grau finito. Entao $\chi(G)$ é também um π-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel de grau finito.*

O grupo $\chi(G)$ tem um subgrupo $R(G)$ tal que as relações

$$[g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^{\varphi}]$$

são satisfeitas em $\frac{\chi(G)}{R(G)}$ para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ (cf. [29]). Aqui $R(G) = [G, L(G), G^{\varphi}]$, onde $L(G) := \langle g^{-1}g^{\varphi} \mid g \in G \rangle$.

Seja $\Delta(G)$ o subgrupo de $\nu(G)$ gerado por todos comutadores $[g, g^{\varphi}]$, com $g \in G$. Temos

Teorema 6.3 *(cf. [24]) Para todo grupo G*

$$\frac{\chi(G)}{R(G)} \cong \frac{\nu(G)}{\Delta(G)}$$

Além disso, $\Delta(G) \leq \nu(G)' \cap Z(\nu(G))$.

O teorema anterior e a Proposição 3.2 implicam que $\Delta(G)$ é uma imagem homomórfica do Multiplicador de Schur de $\dfrac{\chi(G)}{R(G)}$. Isto, juntamente com o Teorema 6.2 e Proposição 3.1 (b), fornece

Proposição 6.4 *(cf. [23]) Seja G um π-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel de comprimento derivado finito. Então $\nu(G)$ é também um π-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel de grau finito.*

Observe que o resultado acima dá uma prova alternativa da finitude de $G \otimes G$ quando G é finito. A seguir citamos algumas propriedades do grupo $\nu(G)$.

Proposição 6.5 *(cf. [23] e [24]) As seguintes relações se verificam em $\nu(G)$:*

(i) $[g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3, g_4^{\varphi}]} = [g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3, g_4]}, \quad \forall g_1, g_2, g_3, g_4 \in G;$

(ii) $[g_1, g_2^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}]$ *e* $[g_1^{\varphi}, g_2, g_3] = [g_1^{\varphi}, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, g_3]; \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G;$

(iii) $[g, g^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G), \quad \forall g \in G;$

(iv) $[g_1, g_2^{\varphi}][g_1, g_2^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G), \quad \forall g_1, g_2 \in G;$

(v) $[g, g^{\varphi}] = 1, \quad \forall g \in G';$

(vi) $[g, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}] = [gh, (gh)^{\varphi}] \cdot [h, h^{\varphi}]^{-1} \cdot [g, g^{\varphi}]^{-1}, \quad \forall g, h \in G;$

(vii) $[g, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}] = [h, g^{\varphi}][g, h^{\varphi}], \quad \forall g, h \in G;$

(viii) *Se* $h \in G'$ *então* $[g, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}] = 1, \quad \forall g, h \in G;$

(ix) *Se* $gG' = hG'$ *então*$[g, g^{\varphi}] = [h, h^{\varphi}], \quad \forall g, h \in G.$

Seja N um subgrupo normal de G. O epimorfismo canônico $\pi : G \to G/N$ induz um epimorfismo $\tilde{\pi} : \nu(G) \to \nu(G/N)$ tal que $g \mapsto Ng,\ g^{\varphi} \mapsto Ng^{\varphi}$.

Proposição 6.6 *(cf. [23]) Com a notação acima* $Nuc\tilde{\pi} = \langle N, N^{\varphi}\rangle[N, G^{\varphi}] \cdot [G, N^{\varphi}]$.

O próximo resultado fornece uma descrição da série central inferior e da série derivada de $\nu(G)$ em termos das correspondentes séries de G.

Teorema 6.7 *(cf. [23])*

(i) *Para $i \geq 2$ o i-ésimo termo da série central inferior de $\nu(G)$ é dado por*

$$\gamma_i(\nu(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^{\varphi})[\gamma_{i-1}(G), G^{\varphi}][G, \gamma_{i-1}(G^{\varphi})];$$

(ii) *Para o i-ésimo termo da série derivada de $\nu(G)$ é dado por*

$$\nu(G)_i = G_i G_i^{\varphi}[G_{i-1}, G_{i-1}^{\varphi}].$$

Como consequência

Corolário 6.8 *(cf. [23]) Se G é um grupo nilpotente de classe c (resp. solúvel de comprimento derivado l), então $\nu(G)$ é nilpotente de classe no máximo $c+1$ (resp. solúvel de comprimento derivado no máximo $l+1$).*

Proposição 6.9 *(cf. [23]) Seja $G = N \cdot H$ um produto semi-direto de seus subgrupos $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$. Então*

(i) $\nu(G) = \langle N, N^{\varphi}\rangle\,[N, H^{\varphi}][H, N^{\varphi}] \cdot \langle H, H^{\varphi}\rangle;$

(ii) $\langle H, H^{\varphi}\rangle \cong \nu(G).$

Proposição 6.10 *(cf. [23]) Seja $G = N \times H$ o produto direto de seus subgrupos normais N e H. Então*

(i) $\nu(G) = \langle N, N^{\varphi}\rangle \cdot [N, H^{\varphi}] \cdot [H, N^{\varphi}] \cdot \langle H, H^{\varphi}\rangle$

(ii) $\langle N, N^{\varphi}\rangle \cong \nu(N); \quad \langle H, H^{\varphi}\rangle \cong \nu(H)$

(iii) $\Upsilon(G) = \Upsilon(N) \times \Upsilon(H) \times [N, H^{\varphi}] \times [H, N^{\varphi}]$

Proposição 6.11 *(cf. [23]) Seja $G = P_1 \times \ldots \times P_n$ um grupo nilpotente finito onde $\{P_1, \ldots, P_n\}$ é o conjunto de p-subgrupos de Sylow de G. Então,*

(i) $\nu(G) \cong \nu(P_1) \times \ldots \times \nu(P_n)$

(ii) $\Upsilon(G) \cong \Upsilon(P_1) \times \ldots \times \Upsilon(P_n)$

Para G um p-grupo finito Rocco encontra um limite polinomial para a ordem de $\nu(G)$.

Teorema 6.12 *(cf. [23]) Seja G um p-grupo finito com $|G| = p^n$ e $\left|G'\right| = p^m$. Então $|\nu(G)|$ divide $p^{n^2+2n-mn}$*

Este limite é atingido para $G = Q_2$, o grupo quaterniônico de ordem 8. Em particular são obtidos limites para a ordem de $G \otimes G$.

Corolário 6.13 *(cf. [23]) Seja $|G| = p^n$, $\left|G'\right| = p^m$ e $d = d(G)$ o número minimal de geradores de G. Então*

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}.$$

7 Produtos Tensoriais de Grupos de Ordem Potência de Primo

G. Ellis e A. McDermott [11] melhoraram a cota que Rocco encontrou para a ordem de $G \otimes G$, quando G é um p-grupo finito (veja Corolário 6.13) e a estenderam para o produto tensorial não abeliano de um p-grupo finito e um q-grupo finito, onde p e q são primos. Vamos apresentar aqui esta cota. Nesta seção G será um p-grupo finito e H um q-grupo finito.

Primeiramente vamos supor que existe um grupo E contendo G e H como subgrupos normais. Definimos

$$G_H = \left\{g \in G \mid \exists h \in H \text{ tal que } gh^{-1} \in Z(GH)\right\}$$

Notamos que G_H é um subgrupo normal de G e que $G_H = G$ se $G \subseteq H$. Vamos denotar o subgrupo de Frattini de G por $\Phi(G)$

Proposição 7.1 *[11] Suponhamos que G e H são subgrupos normais de E e que as ações originam-se da conjugação em E. Então*

(i) *Se* $p \neq q$ *então* $|G \otimes H| = 1$;

(ii) *Se* $p = q$ *e* G *é um grupo* d*-gerado de ordem* p^n, H *é um grupo* d'*-gerado de ordem* $p^{n'}$ *e* $|G_H| \,/\, |G_H \cap \Phi(G)| = p^k$, *então*

$$|G \otimes H| \leq p^{nn'-(k+n-d)(n'-d')}.$$

Demonstração. (i) Suponhamos $p \neq q$. Como $[G, H] \subseteq G \cap H$ segue que $[G, H]$ é trivial. Logo, pela Proposição 5.6

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$$

o qual é trivial.

(ii) Suponhamos $p = q$. Primeiramente vamos considerar o caso particular $[G, H] = 1$. Seja $H^{ab} \cong C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{d'}$, onde C_i denota um p-grupo cíclico. Pela Proposição 5.6

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab} \cong \left(G^{ab} \otimes C_1\right) \times \left(G^{ab} \otimes C_2\right) \times \ldots \times \left(G^{ab} \otimes C_{d'}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |G \otimes H| &\leq \left|G^{ab} \otimes C_1\right| \times \left|G^{ab} \otimes C_2\right| \times \ldots \times \left|G^{ab} \otimes C_{d'}\right| \\ &\leq \left|G^{ab}\right|^{d'} \\ &\leq |G|^{d'} \\ &= p^{nd'}. \end{aligned}$$

Uma vez que $k \leq d$ temos

$$\begin{aligned} |G \otimes H| &\leq p^{nd'} \\ &= p^{nn'-(d+n-d)(n'-d')} \\ &\leq p^{nn'-(k+n-d)(n'-d')} \end{aligned}$$

como queríamos.

<u>Caso geral</u>: A demonstração se dará por indução sobre t, onde t é tal que $|G|\,|H| = p^t$. Se $t = 2$ então ou $G \cap H$ é trivial ou $G = H = C_p$. Em qualquer caso temos $[G, H] = 1$ e o resultado segue de (i). Suponhamos $t \geq 2$ e que a proposição é verdadeira para todos os p-grupos G^*, H^* com $|G^*|\,|H^*| \leq p^t$ e sejam G, H dois p-grupos não triviais,

com $|G||H| = p^{t+1}$. Por causa do caso anterior podemos supor $[G, H] \neq 1$. Como $[G, H] \trianglelefteq GH$ temos $[G, H] \cap Z(GH) \neq 1$ e, portanto, existe um subgrupo N de $[G, H]$ central em GH e tal que $|N| = p$. Da Proposição 5.7 segue que existe uma seqüência exata

$$(G \otimes N) \times (N \otimes H) \to G \otimes H \to \frac{G}{N} \otimes \frac{H}{N} \to 1 \tag{7.1}$$

A inclusão $N \subset [G, H]$ implica que a imagem do homomorfismo canônico $\alpha : G_H \otimes N \to G \otimes H$ está contido na imagem do homomorfismo canônico $\beta : N \otimes H \to G \otimes H$. De fato, sejam $g \in G_H$ e $u = [g_1, h_1] \cdots [g_k, h_k]$ um elemento de N. Seja $\tilde{u} = (g_1 \otimes h_1) \cdots (g_k \otimes h_k)$ $(\in G \otimes H)$. Observamos que $(\tilde{u})\lambda = (\tilde{u})\mu = u$, onde λ, μ são os homomorfismos dados na Proposição 5.5. Pela definição de G_H existe $h \in H$ tal que $gh^{-1} \in Z(GH)$. Daí, para todo i,

$$g_i{}^h = g_i^g \quad \text{e} \quad h_i^h = h_i^g$$

Assim, $\tilde{u}^h = \tilde{u}^g$. Agora, pela Proposição 5.5 (c)

$$g \otimes u = g \otimes (\tilde{u})\mu = \tilde{u}^{-g}\tilde{u} = \tilde{u}^{-h}\tilde{u} = (\tilde{u}^{-1}\tilde{u}^h)^{-1} = ((\tilde{u})\lambda \otimes h)^{-1} = (u \otimes h)^{-1}$$

Logo $(G_H \otimes N)\alpha \subset (N \otimes H)\beta$. Isto, juntamente com 7.1, implica numa seqüência exata

$$\left(\frac{G}{G_H} \otimes N\right) \times (N \otimes H) \to G \otimes H \to \frac{G}{N} \otimes \frac{H}{N} \to 1$$

Esta seqüência e o isomorfismo $\dfrac{G}{G_H} \otimes N \cong \dfrac{G}{G_H \Phi(G)}$ dão

$$\begin{aligned}
|G \otimes H| &\leq \left|\tfrac{G}{N} \otimes \tfrac{H}{N}\right| \left|\tfrac{G}{G_H} \otimes N\right| |N \otimes H| \\
&= \left|\tfrac{G}{N} \otimes \tfrac{H}{N}\right| \left|\tfrac{G}{G_H \Phi(G)}\right| \left|\tfrac{H}{\Phi(H)}\right| \\
&= \left|\tfrac{G}{N} \otimes \tfrac{H}{N}\right| p^{d-k} p^{d'} \\
&\leq p^{(n-1)(n'-1)-(k+n-d-1)(n'-d'-1)+d-k+d'} \\
&= p^{nn'-(k+n-d)(n'-d')}
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Conforme observaram Ellis e McDermott em [11], nem todas as ações compatíveis se originam da conjugação em um grupo E contendo G e H. Por exemplo: sejam

$G = \langle x | x^8 \rangle$, $H = \langle y | y^8 \rangle$ e as ações dadas por

$$x^y = x^{-1}, \quad y^x = y^{-1}$$

Se essas ações se originassem da conjugação, então teríamos

$$x^2 = x \cdot x = x^{-y} x = y^{-1} y^x = y^{-1} y^{-1} = y^{-2}$$

e, assim, a contradição

$$x^{-2} = (x^2)^y = (y^{-2})^y = y^{-2} = x^2$$

Sejam G um p-grupo finito e H um q-grupo finito quaisquer, agindo compativelmente um sobre o outro. Vamos usar a ação de G sobre H para formar o produto semi-direto $G \rtimes H$. Assim como na demonstração do Teorema 5.12, seja $G \circ H = \dfrac{G \rtimes H}{N}$, onde N é o subgrupo (normal) de $G \rtimes H$ gerado pelos elementos $(g^{-1} g^h, h^{-1} h^g)$. Vimos lá que os homomorfismos

$$\sigma : G \longrightarrow G \circ H,\ g \longmapsto N(g, 1), \quad \upsilon : H \longrightarrow G \circ H,\ h \longmapsto N(1, h)$$

são módulos cruzados, que preservam as ações, $Nuc\sigma$ age trivialmente sobre H e $Nuc\nu$ age trivialmente sobre G. Segue então que $Nuc\sigma$ é um subgrupo central de G e que $g^h \in Nuc\sigma$, $\forall g \in Nuc\sigma$ e $h \in H$. Logo $Nuc\sigma$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo. Analogamente, $Nuc\nu$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo. Coloquemos $\overline{G} = Im\sigma$, $\overline{H} = Im\nu$ e sejam

$$[Nuc\sigma, H] = \langle g^{-1} g^h | g \in Nuc\sigma, h \in H \rangle \ \text{ e } \ [Nuc\nu, G] = \langle h^{-1} h^g | h \in Nuc\nu, g \in G \rangle$$

Notemos que $[Nuc\sigma, H]$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo e $[Nuc\nu, G]$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Denotemos o primeiro grupo de homologia de G com coeficientes em um G -módulo A por $H_1(G, A)$.

Teorema 7.2 *[11]* **(i)** *Se $p \neq q$ então $G \otimes H \cong [Nuc\sigma, H] \times [Nuc\nu, G]$ e, conseqüentemente,*

$$|G \otimes H| = |[Nuc\sigma, H]|\,|[Nuc\nu, G]|$$

(ii) *Suponhamos que* $p = q$, G *é um grupo d-gerado de ordem* p^n, H *é um grupo* d'*-generado de ordem* $p^{n'}$, *e* $\left|\overline{G_{\overline{H}}}\right| / \left|\overline{G_{\overline{H}}} \cap \Phi(\overline{G})\right| = p^k$. *Então*

$$|G \otimes H| \leq Kp^{nn'-(k+n-d)(n'-d')}$$

onde $K = |H_1(G, Nuc\nu)|\,|H_1(H, Nuc\sigma)|\,|[Nuc\sigma, H]|\,|[Nuc\nu, G]|$.

Demonstração. A Proposição 5.7 fornece a seqüência exata

$$(G \otimes Nuc\nu) \times (Nuc\sigma \otimes H) \longrightarrow G \otimes H \longrightarrow \overline{G} \otimes \overline{H} \longrightarrow 1 \tag{7.2}$$

Observamos que $\overline{G}$ e $\overline{H}$ são normais em $G \circ H$ e agem um sobre o outro por conjugação. Pelo Corolário 3.3 em [15] existe uma seqüência exata

$$1 \longrightarrow H_1(G, Nuc\nu) \longrightarrow G \otimes Nuc\nu \longrightarrow [Nuc\nu, G] \longrightarrow 1 \tag{7.3}$$

(i) Suponhamos $p \neq q$. Pela Proposição 7.1 (i), $\overline{G} \otimes \overline{H} = 1$. Como G é um p-grupo e $Nuc\nu$ é um q-grupo, $H_1(G, Nuc\nu) = 1$. Segue então de 7.2

$$G \otimes Nuc\nu \cong [Nuc\nu, G]$$

Analogamente

$$Nuc\sigma \otimes H \cong [Nuc\sigma, H]$$

Uma vez que o homomorfismo composto

$$[Nuc\nu, G] \xrightarrow{\cong} G \otimes Nuc\nu \longrightarrow G \otimes H \longrightarrow H$$

leva $[Nuc\nu, G]$ injetivamente em H, o q-grupo $[Nuc\nu, G]$ é isomorfo a um subgrupo de $G \otimes H$. De modo análogo, o p-grupo $[Nuc\sigma, H]$ é isomorfo a um subgrupo de $G \otimes H$. Como $p \neq q$, temos por 7.3

$$[Nuc\sigma, H] \times [Nuc\nu, G] \cong G \otimes H$$

(ii) Suponhamos $p = q$. Neste caso, o limite desejado segue da Proposição 7.1 e das seqüências 7.2 e 7.3. $\square$

CAPÍTULO II

Produtos Tensoriais não Abelianos de Grupos Solúveis

8 O Grupo $\eta(G, H)$

Começaremos esta seção considerando uma generalização da construção apresentada na seção 6, definida em [25] como segue: Sejam G, H dois grupos agindo compativelmente um sobre o outro e H^φ uma cópia de H, isomorfo por $\varphi : H \to H^\varphi$, $h \mapsto h^\varphi$, $\forall h \in H$. Então

$$\eta(G,H) := \langle G, H^\varphi | [g, h^\varphi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi],\ [g, h^\varphi]^{h_1^\varphi} = \left[g^{h_1}, (h^{h_1})^\varphi\right],\ \forall g, g_1 \in G, h, h_1 \in H\rangle$$

Observamos que se $G = H$ e as ações são conjugações, então $\eta(G, H) = \nu(G)$.

Exemplo. Sejam $G = \langle a | a^3\rangle$ e $H = \langle b | b^2\rangle$. Suponhamos que H é G-trivial e que H age sobre G por $a^b = a^{-1}$ $(= a^2)$. Então

$$\begin{aligned}\eta(G,H) = \ & \langle a, b^\varphi | a^3 = 1,\ (b^\varphi)^2 = 1.\ [a, b^\varphi]^a = [a, b^\varphi], [a, b^\varphi]^{a^2} = [a, b^\varphi] \\ & [a, b^\varphi]^{b^\varphi} = [a^2, b^\varphi],\ [a^2, b^\varphi]^a = [a^2, b^\varphi],\ [a^2, b^\varphi]^{a^2} = [a^2, b^\varphi],\ [a^2, b^\varphi]^{b^\varphi} = [a, b^\varphi]\rangle\end{aligned}$$

Temos

$$[a^2, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^a [a, b^\varphi] = [a, b^\varphi][a, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^2.$$

Logo,

$$1 = [1, b^\varphi] = [a^3, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^3 \ \text{ e } \ [a, b^\varphi]^{-1} = [a^2, b^\varphi].$$

Daí

$$\eta(G,H) = \langle a, b^\varphi | a^3 = 1,\ (b^\varphi)^2 = 1,\ [a, b^\varphi]^a = [a, b^\varphi],\ [a, b^\varphi]^{b^\varphi} = [a, b^\varphi]^{-1}\rangle$$

Seja $V = \langle x, y \,|\, x^3, y^3, [x, y]\rangle$ $(\cong C_3 \times C_3)$ e seja α o automorfismo de V tal que

$$x \longmapsto xy, \quad y \longmapsto y^{-1}$$

Consideremos o produto semi-direto $V \rtimes \langle\alpha\rangle$. É fácil ver que a correspondência: $a \mapsto x$, $b^{\varphi} \mapsto \alpha$ é consistente com as relações definidoras de $\eta(G,H)$ e, assim, estende-se a um homomorfismo

$$\theta_1 : \eta(G,H) \longrightarrow V \rtimes \langle\alpha\rangle$$

A aplicação $\theta_2 : V \rtimes \langle\alpha\rangle \longrightarrow \eta(G,H)$ definida por:

$$(x^i y^j, \alpha^{\varepsilon}) \longmapsto a^i [a, b^{\varphi}]^j (b^{\varphi})^{\varepsilon}$$

para todo $i, j \in \{0,1,2\}$ e $\varepsilon \in \{0,1\}$ é um homomorfismo de grupos. É claro que $\theta_1\theta_2 = 1_{\eta(G,H)}$ e $\theta_2\theta_1 = 1_{V \rtimes \langle\alpha\rangle}$. Portanto,

$$\eta(G,H) \cong V \rtimes \langle\alpha\rangle$$

Nesta seção G e H serão sempre grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Diremos que um subgrupo M de G é um *H-subgrupo* se $m^h \in M$, para todo $m \in M$ e $h \in H$.

Proposição 8.1 *Sejam M, N subgrupos normais de G e H respectivamente. Se M é um H-subgrupo de G e N é um G-subgrupo de H, então*

(i) $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$;

(ii) $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$, $\quad \forall i, j \geq 1$;

(iii) $[M_i, (N_j)^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$, $\quad \forall i, j \geq 0$.

Demonstração. (i) Pelas relações definidoras de $\eta(G,H)$ temos

$$[m, n^{\varphi}]^g = [m^g, (n^g)^{\varphi}], \quad \forall m \in M,\ n \in N,\ g \in G.$$

Como $M \trianglelefteq G$ e N é um G-subgrupo de H segue que G normaliza $[M, N^{\varphi}]$. Analogamente H^{φ} normaliza $[M, N^{\varphi}]$. Portanto, $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$;.

(ii) e (iii) são consequências da Proposição 1.2 e parte (i). $\square$

Vamos denotar o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $\eta(G, H)$ por $\tau(G, H)$. Observamos que pelo resultado anterior $\tau(G, H)$ é um subgrupo normal de $\eta(G, H)$. Além disso, $\eta(G, H)$ pode ser descrito como

$$\eta(G, H) = \tau(G, H)GH^{\varphi}$$

Há uma outra construção de grupo devida a G. Ellis e F. Leonard [10], que é isomorfa a $\eta(G, H)$. Este grupo é construído da seguinte forma: Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Consideremos Z_G, Z_H conjuntos de geradores para G e H, respectivamente e coloque $Z = Z_G \cup Z_H$. Agora sejam U, V outros conjuntos de geradores para G, H, respectivamente, satisfazendo a seguinte condição

$$g^z \in U \text{ e } h^z \in V, \quad \forall z \in Z, g \in U, h \in V.$$

Tomamos então o grupo $\dfrac{G * H}{J}$, onde $G * H$ é o produto livre de G e H e J o fêcho normal em $G * H$ do seguinte conjunto

$$\{z^{-1}[g, h]z[h^z, g^z]; \;\; g \in U, h \in V, z \in Z\}$$

Os homomorfismos canônicos $G \to \dfrac{G * H}{J}$, $H \to \dfrac{G * H}{J}$ são injetivos (cf [10]) e assim, podemos identificar G e H com suas imagens em $\dfrac{G * H}{J}$.

Pela Proposição 5.1 existem ações de G e H sobre $G \otimes H$ dadas por

$$(g \otimes h)^x = g^x \otimes h^x$$

onde x está em G ou H. Usamos a ação de G sobre $G \otimes H$ para formar o produto semi-direto

$$G \rtimes G \otimes H$$

O grupo H age sobre $G \rtimes G \otimes H$ por

$$(g, t)^h = (g, (g \otimes h)t^h)$$

para todo $g \in G$, $h \in H$, e $t \in G \otimes H$. Esta ação é utilizada para formar o produto semi-direto

$$H \rtimes (G \rtimes G \otimes H)$$

Teorema 8.2 *(G. Ellis e F. Leonard [10]). Existe um isomorfismo*

$$\phi : \frac{G * H}{J} \to H \rtimes (G \rtimes G \otimes H)$$

tal que $(g)\phi = (1, g, 1)$, $(h)\phi = (h, 1, 1)$ *e* $([g, h])\phi = (1, 1, g \otimes h)$

É fácil ver que o subgrupo $[G, H]$ de $\dfrac{G * H}{J}$ é isomorfo a $\tau(G, H)$. Agora, o isomorfismo do último teorema fornece

$$[G, H] \cong G \otimes H$$

Conseqüentemente, temos

Proposição 8.3 *O subgrupo* $\tau(G, H)$ *de* $\eta(G, H)$ *é isomorfo a* $G \otimes H$.

A seguir damos uma prova alternativa para este último resultado

Consideremos o produto livre $G * H^{\varphi}$. Pela Proposição 2.5 o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $G * H^{\varphi}$ é livre, livremente gerado pelos comutadores $[g, h^{\varphi}]$, onde $g \in G \setminus \{1\}, h^{\varphi} \in H^{\varphi} \setminus \{1\}$. Tomamos os seguintes subconjuntos de $G * H^{\varphi}$

$$R = \left\{ [g, h^{\varphi}]^{-x} \cdot [g^x, (h^x)^{\varphi}], \quad [g, h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}} \cdot [g^y, (h^y)^{\varphi}] \right\},$$

$$S = \left\{ [gg_1, h^{\varphi}]^{-1} \cdot [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}] \cdot [g_1, h^{\varphi}], \quad [g, (hh_1)^{\varphi}]^{-1} \cdot [g, h_1^{\varphi}] \cdot [g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}] \right\}$$

para todo $g, g_1, x \in G \setminus \{1\}$, $h, h_1, y \in H \setminus \{1\}$. Como $[G, H^{\varphi}]$ é um subgrupo normal de $G * H^{\varphi}$, R, S são subconjuntos de $[G, H^{\varphi}]$. Por definição

$$\eta(G, H) = \frac{G * H^{\varphi}}{\langle R \rangle^{G * H^{\varphi}}}.$$

Mostraremos que

$$\langle S \rangle^{[G, H^{\varphi}]} \trianglelefteq G * H^{\varphi} \tag{8.1}$$

e

$$\langle R \rangle^{G * H^{\varphi}} = \langle S \rangle^{[G, H^{\varphi}]} \tag{8.2}$$

Para (8.1), seja $s = [gg_1, h^\varphi]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi][g_1, h^\varphi]$ um elemento de S e $x \in G$. Então pelas identidades de comutadores, temos

$$\begin{aligned}
s^x &= [gg_1, h^\varphi]^{-x}[g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi]^x[g_1, h^\varphi]^x \\
&= \left([(gg_1)x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right)^{-1}\left([g^{g_1}x, (h^{g_1})^\varphi][x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}\right)\left([g_1x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right) \\
&= \left([x, h^\varphi][gg_1x, h^\varphi]^{-1}\right)\left([g^{g_1}x, (h^{g_1})^\varphi][x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}\right)[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]^{-1}[g^{g_1}x, (h^{g_1})^\varphi] \\
&\cdot [g^{g_1}x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}[gg_1x, h^\varphi][gg_1x, h^\varphi]^{-1}[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]\left([g_1x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right) \\
&= \left((s_1)^{-[g^{g_1}x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}[gg_1x, h^\varphi]}s_2\right)^{[x, h^\varphi]},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
s_1 &= [g^{g_1}x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}\cdot[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]\cdot[x, (h^{g_1})^\varphi] \\
s_2 &= [gg_1x, h^\varphi]^{-1}\cdot[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]\cdot[g_1x, h^\varphi].
\end{aligned}$$

Isto implica que $s^x \in \langle S\rangle^{[G,H^\varphi]}$. Agora, para $y \in H$, observamos que

$$(g^y)^{(g_1)^y} = g^{g_1y}, \qquad (h^y)^{(g_1)^y} = h^{g_1y} \tag{8.3}$$

Novamente pelas identidades de comutadores, obtemos

$$\begin{aligned}
s^{y^\varphi} &= [gg_1, h^\varphi]^{-y^\varphi}[g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi]^{y^\varphi}[g_1, h^\varphi]^{y^\varphi} \\
&= \left([gg_1, (hy)^\varphi]^{-1}[gg_1, y^\varphi]\right)\left([g^{g_1}, y^\varphi]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1}y)^\varphi]\right)\left([g_1, y^\varphi]^{-1}[g_1, (hy)^\varphi]\right) \\
&= \left([gg_1, (hy)^\varphi]^{-1}[gg_1, y^\varphi]\right)[g^yg_1^y, (h^y)^\varphi]\,[g^yg_1^y, (h^y)^\varphi]^{-1}\left[(g^y)^{(g_1)^y}, \left((h^y)^{(g_1)^y}\right)^\varphi\right]\cdot \\
&\cdot[g_1^y, (h^y)^\varphi][g_1^y, (h^y)^\varphi]^{-1}\,[g^{g_1y}, (h^{g_1y})^\varphi]^{-1}\left([g^{g_1}, y^\varphi]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1}y)^\varphi]\right)\cdot \\
&\cdot[g_1^y, (h^y)^\varphi]\,[g_1^y, (h^y)^\varphi]^{-1}\left([g_1, y^\varphi]^{-1}[g_1, (hy)^\varphi]\right) \quad \text{(by (8.3))} \\
&= s_3s_4[g_1^y, (h^y)^\varphi]^{-1}s_5^{-1}[g_1^y, (h^y)^\varphi]s_6^{-1}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
s_3 &= [gg_1, (hy)^\varphi]^{-1}[gg_1, y^\varphi]\,[g^yg_1^y, (h^y)^\varphi], \\
s_4 &= [g^yg_1^y, (h^y)^\varphi]^{-1}\left[(g^y)^{(g_1)^y}, \left((h^y)^{(g_1)^y}\right)^\varphi\right][g_1^y, (h^y)^\varphi], \\
s_5 &= [g^{g_1}, (h^{g_1}y)^\varphi]^{-1}\,[g^{g_1}, y^\varphi]\,[g^{g_1y}, (h^{g_1y})^\varphi], \\
s_6 &= [g_1, (hy)^\varphi]^{-1}[g_1, y^\varphi]\,[g_1^y, (h^y)^\varphi].
\end{aligned}$$

Assim, $s^{y^\varphi} \in \langle S\rangle^{[G,H^\varphi]}$. De modo análogo verificamos que o conjugado de um elemento em S do tipo $[g, (hh_1)^\varphi]^{-1}[g, h_1^\varphi][g^{h_1}, (h^{h_1})^\varphi]$ por um elemento em $G * H^\varphi$ está em $\langle S\rangle^{[G,H^\varphi]}$. Portanto, $\langle S\rangle^{[G,H^\varphi]} \trianglelefteq G * H^\varphi$. Agora sejam

$$r = [g, h^\varphi]^{-x}[g^x, (h^x)^\varphi] \quad \text{e} \quad r' = [g, h^\varphi]^{-y^\varphi}[g^y, (h^y)^\varphi]$$

elementos de R. Então

$$\begin{aligned} r &= [g, h^{\varphi}]^{-x}[g^x, (h^x)^{\varphi}] \\ &= [x, h^{\varphi}][gx, h^{\varphi}]^{-1}[g^x, (h^x)^{\varphi}] \\ &= [x, h^{\varphi}]s[x, h^{\varphi}]^{-1} \end{aligned}$$

onde $s = [gx, h^{\varphi}]^{-1}[g^x, (h^x)^{\varphi}][x, h^{\varphi}]$ $(\in S)$. Analogamente.

$$r' = [g, (hy)^{\varphi}]^{-1}[g, y^{\varphi}][g^y, (h^y)^{\varphi}] \ \ (\in S).$$

Logo $R \subseteq \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$ e $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \subseteq \langle R\rangle^{G*H^{\varphi}}$. Como $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \trianglelefteq G * H^{\varphi}$ nós temos $\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}} = \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$, e (8.2) está provado.

De (8.1) e (8.2) segue que $\eta(G,H) = \dfrac{G * H^{\varphi}}{\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}}$ e, conseqüentemente,

$$\tau(G,H) = \frac{[G, H^{\varphi}]}{\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}}.$$

Portanto, o homomorfismo γ do grupo livre $[G, H^{\varphi}]$ sobre $G \otimes H$ tal que $([g, h^{\varphi}])\gamma = g \otimes h$ induz um epimorfismo $\alpha : \tau(G,H) \to G \otimes H$. Por outro lado, a função $\beta : G \otimes H \to \tau(G,H)$ definida sobre os geradores por $(g \otimes h)\beta = [g, h^{\varphi}]$ estende-se a um epimorfismo de $G \otimes H$ sobre $\tau(G,H)$. Temos $\alpha\beta = 1_{\tau(G,H)}$ e $\beta\alpha = 1_{G\otimes H}$. $\square$

A Proposição 8.3 pode ser reenunciada da seguinte maneira:

Proposição 8.3' *Existe um isomorfismo*

$$\alpha : \tau(G,H) \to G \otimes H$$

tal que $([g, h^{\varphi}])\alpha = g \otimes h$.

Ellis e Leonard [10] usam sua contrução de grupo $\left(\dfrac{G * H}{J}\right)$ na elaboração de um algoritmo para calcular produtos tensoriais não abelianos de grupos finitos. Nossa opção por trabalhar com o grupo $\eta(G, H)$, ao invés de $\dfrac{G * H}{J}$, deve-se a uma questão notacional. Em $\eta(G,H)$, se H age sobre G pelo homomorfismo $\theta : H \to Aut(G)$, então g^h é o elemento $(g)((h)\theta)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, enquanto que $g^{h^{\varphi}}$ é o conjugado de g por h^{φ}. Assim, facilmente se diferencia a ação da conjugação (o que não ocorre em $\frac{G*H}{J}$). Isso irá facilitar o nosso trabalho, uma vez que estaremos lidando freqüentemente com elementos dos tipos $(g)((h)\theta)$ e $h^{-1}gh$.

Proposição 8.4 **(i)** *As seguintes relações acontecem para todo $g, x \in G$ and $h, y \in H$:*

(a) $[g, h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} = [g, h^{\varphi}]^{x^{-1}x^{y}} = [g, h^{\varphi}]^{(y^{-x}y)^{\varphi}}$;

(b) $[g, h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]^{-1}} = [g, h^{\varphi}]^{x^{-y}x} = [g, h^{\varphi}]^{(y^{-1}y^{x})^{\varphi}}$;

(c) $[g^{-1}g^{h}, y^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{y^{\varphi}}$;

(d) $[x, (h^{-g}h)^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-x}[g, h^{\varphi}]$;

(e) $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]] = [g^{-1}g^{h}, (y^{-x}y)^{\varphi}]$;

(f) $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]^{-1}] = [g^{-1}g^{h}, (y^{-1}y^{x})^{\varphi}]$.

(ii) *Existem homomorfismos de grupos $\lambda : \tau(G, H) \to G$, $\mu : \tau(G, H) \to H$ tais que $([g, h^{\varphi}])\,\lambda = g^{-1}g^{h}$, $([g, h^{\varphi}])\,\mu = h^{-g}h$;*

(iii) $[(t)\lambda, ((t_1)\mu)^{\varphi}] = [t, t_1]$, *para todo $t, t_1 \in \tau(G, H)$.*

Demonstração. **(i)** (a)

$$\begin{aligned} [g, h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} &= [g, h^{\varphi}]^{x^{-1}y^{-\varphi}xy^{\varphi}} = \\ &= [g^{x^{-1}}, (h^{x^{-1}})^{\varphi}]^{y^{-\varphi}xy^{\varphi}} \\ &= [g^{x^{-1}y^{-1}}, (h^{x^{-1}y^{-1}})^{\varphi}]^{xy^{\varphi}} \\ &= [g^{x^{-1}y^{-1}xy}, (h^{x^{-1}y^{-1}xy})^{\varphi}] \end{aligned}$$

Mas

$$g^{x^{-1}y^{-1}xy} = \left(g^{x^{-1}y^{-1}x}\right)^{y} = \left(g^{y^{-x}}\right)^{y} = g^{y^{-x}y} \quad \text{(pelas relações de compatibilidade)}$$

e

$$h^{x^{-1}y^{-1}xy} = \left(yh^{x^{-1}}y^{-1}\right)^{xy} = \left(y^{x}hy^{-x}\right)^{y} = \left(h^{y^{-x}}\right)^{y} = h^{y^{-x}y}$$

Portanto,

$$[g, h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} = [g^{y^{-x}y}, (h^{y^{-x}y})^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{(y^{-x}y)^{\varphi}}$$

Analogamente,

$$[g, h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} = [g, h^{\varphi}]^{(x^{-1}x^{y})}$$

(b)

$$\begin{aligned}
[g,h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]^{-1}} &= [g,h^{\varphi}]^{[x^{-1},y^{\varphi}]^{x}} \\
&= [g,h^{\varphi}]^{[x^{-1},(y^{x})^{\varphi}]} && \text{(pelas relações definidoras de } \eta(G,H)) \\
&= [g,h^{\varphi}]^{xx^{-y^{x}}} && \text{(por (a))} \\
&= [g,h^{\varphi}]^{\left((y^{x})^{-x^{-1}}y^{x}\right)^{\varphi}} && \text{(por (a))}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[g,h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]^{-1}} = [g,h^{\varphi}]^{xx^{-y^{x}}} = [g,h^{\varphi}]^{\left((y^{x})^{-x^{-1}}y^{x}\right)^{\varphi}}.$$

Mas

$$xx^{-y^{x}} = x(x^{-1})^{x^{-1}yx} = x(x^{-1})^{yx} = x((x^{-1})^{y})^{x} = xx^{-1}(x^{-y})x = x^{-y}x$$

e

$$(y^{x})^{-x^{-1}}y^{x} = (y^{-1})^{xx^{-1}}y^{x} = y^{-1}y^{x}$$

Portanto

$$[g,h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]^{-1}} = [g,h^{\varphi}]^{x^{-y}x} = [g,h^{\varphi}]^{(y^{-1}y^{x})^{\varphi}}$$

(c)

$$\begin{aligned}
[g^{-1}g^{h},y^{\varphi}] &= [g^{-1}g^{h},y^{\varphi}]^{h^{-\varphi}h^{\varphi}} \\
&= \left[\left(g^{-1}g^{h}\right)^{h^{-1}},\left(y^{h^{-1}}\right)^{\varphi}\right]^{h^{\varphi}} \\
&= [g^{-h^{-1}}g,(y^{h^{-1}})^{\varphi}]^{h^{\varphi}} \\
&= [g^{-h^{-1}},(y^{h^{-1}})^{\varphi}]^{gh^{\varphi}}[g,(hyh^{-1})^{\varphi}]^{h^{\varphi}} \\
&= [g^{-1},y^{\varphi}]^{h^{-\varphi}gh^{\varphi}}[g,h^{-\varphi}]^{h^{\varphi}}[g,(hy)^{\varphi}]^{h^{-\varphi}h^{\varphi}} \\
&= [g,y^{\varphi}]^{-g^{-1}h^{-\varphi}gh^{\varphi}}[g,h^{\varphi}]^{-1}[g,y^{\varphi}][g,h^{\varphi}]^{y^{\varphi}} \\
&= [g,h^{\varphi}]^{-1}[g,y^{\varphi}]^{-1}[g,h^{\varphi}][g,h^{\varphi}]^{-1}[g,y^{\varphi}][g,h^{\varphi}]^{y^{\varphi}} \\
&= [g,h^{\varphi}]^{-1}[g,h^{\varphi}]^{y^{\varphi}}
\end{aligned}$$

(d) é provado de modo análogo a (c).

(e)

$$\begin{aligned}
[[g,h^{\varphi}],[x,y^{\varphi}]] &= [g,h^{\varphi}]^{-1}[g,h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} \\
&= [g,h^{\varphi}]^{-1}[g,h^{\varphi}]^{(y^{-x}y)^{\varphi}} && \text{(por (a))} \\
&= [g^{-1}g^{h},(y^{-x}y)^{\varphi}] && \text{(por (c))}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}[[g,h^{\varphi}],[x,y^{\varphi}]^{-1}] &= [[g,h^{\varphi}],[x^{-1},y^{\varphi}]^{x}] \\ &= [[g,h^{\varphi}],[x^{-1},(y^{x})^{\varphi}]] \\ &= \left[g^{-1}g^{h},(y^{-1}y^{x})^{\varphi}\right] \quad \text{(por (e))}\end{aligned}$$

(ii) Consideremos o subgrupo (livre) $[G,H^{\varphi}]$ de $G*H^{\varphi}$ e seja $\alpha:[G,H^{\varphi}]\to G$ tal que

$$([g,h^{\varphi}])\alpha = g^{-1}g^{h}.$$

Para todo $g,g_1\in G$ e $h,h_1\in H$ temos

$$\begin{aligned}(([gg_1,h^{\varphi}])\alpha)^{-1}\cdot([g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]\alpha)\cdot([g_1,h^{\varphi}])\,\alpha &= \left((gg_1)^{-1}(gg_1)^{h}\right)^{-1}(g^{g_1})^{-1}\left(g^{g_1}\right)^{h^{g_1}}g_1^{-1}g_1^{h} \\ &= g_1^{-h}g^{-h}gg_1\left(g^{-g_1}\right)g^{hg_1}g_1^{-1}g_1^{h} = \\ &= g_1^{-h}g^{-h}gg^{-1}g^{h}g_1^{h} \\ &= 1\end{aligned}$$

Analogamente,

$$(([g,(hh_1)^{\varphi}])\,\alpha)^{-1}\cdot([g,(h_1)^{\varphi}])\,\alpha\cdot\left(\left[g^{h_1},\left(h^{h_1}\right)^{\varphi}\right]\right)\alpha = 1$$

Logo α induz um homomorfismo

$$\begin{aligned}\lambda:\frac{[G,H^{\varphi}]}{\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}} &\longrightarrow G \\ \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}[g,h^{\varphi}] &\longmapsto g^{-1}g^{h}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}S=\{\ & [gg_1,h^{\varphi}]^{-1}\cdot[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]\cdot[g_1,h^{\varphi}],\quad [g,(hh_1)^{\varphi}]^{-1}\cdot[g,h_1^{\varphi}]\cdot[g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}] \text{ tal que} \\ & g,g_1,x\in G\setminus\{1\},\ h,h_1,y\in H\setminus\{1\}\}\end{aligned}$$

Como

$$\tau(G,H)=\frac{[G,H^{\varphi}]}{\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}},$$

identificando $[g,h^{\varphi}]$ com $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}[g,h^{\varphi}]$ obtemos que λ é um homomorfismo de $\tau(G,H)$ em G tal que $([g,h^{\varphi}])\lambda = g^{-1}g^{h}$, para todos $g\in G$ e $h\in H$. O outro caso é provado de modo análogo.

(iii) segue de (i) e (ii). □

Observação. A Proposição 8.4 é também uma conseqüência imediata das Proposições 8.3', 5.4 e 5.5.

9 As Séries Central Inferior e Derivada de $G \otimes H$

Vamos denotar o subgrupo $\langle g^{-1}g^h | g \in G,\ h \in H\rangle$ de G por $[G, H]$. Este subgrupo é chamado *derivado de G relativo a H*. Observamos que se G e H são grupos agindo compativelmente um sobre o outro então $[G, H] = Im\lambda$ enquanto que $[H, G] = Im\mu$, onde λ e μ são os homomorfismos da Proposição 8.4. O próximo resultado fornece algumas propriedades desses subgrupos.

Proposição 9.1 (i) *$[G, H]$ é um H-subgrupo normal de G e $[H, G]$ é um G-subgrupo normal de H.*

(ii) *Para todo $i \geq 1$ e $j \geq 0$, $\gamma_i([G, H])$ e $[G, H]_j$ são H-subgrupos normais de G e $\gamma_i([H, G])$ e $[H, G]_j$ são G-subgrupos normais de H.*

(iii) *$[G, H]_i = (\tau(G, H)_i)\lambda$ e $[H, G]_i = (\tau(H, G)_i)\mu$.*

(iv) *$g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ e $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$, para todo $g \in G,\ h \in H,\ t \in \tau(G, H)$.*

Demonstração. (i) Para todo $g, x \in G$ e $h \in H$, temos

$$\left(g^{-1}g^h\right)^x = (g^{-1})^x g^{hx} = (g^x)^{-1}g^{xx^{-1}(hx)} = (g^x)^{-1}(g^x)^{x^{-1}hx} = (g^x)^{-1}(g^x)^{h^x}$$

pela compatibilidade das ações . Logo, $[G, H]$ é normal em G. Além disso, para todo $g \in G$, $h, y \in H$

$$\left(g^{-1}g^h\right)^y = (g^{-1})^y g^{hy} = (g^y)^{-1}g^{yy^{-1}(hy)} = (g^y)^{-1}(g^y)^{y^{-1}hy} = (g^y)^{-1}(g^y)^{h^y}$$

e, portanto, $[G, H]$ é um H-subgrupo de G. De modo análogo provamos que $[H, G]$ é um G-subgrupo normal de H.

(ii) Como $\gamma_i([G, H])$ é um subgrupo característico de $[G, H]$ e (por (i)) $[G, H]$ é um H-subgrupo normal de G temos $\gamma_i([G, H])$ um H-subgrupo normal de G. Os outros casos são análogos.

(iii) segue do fato que $[G, H] = (\tau(G, H))\lambda$, $[H. G] = (\tau(G, H))\mu$ e λ, μ são homomorfismos de grupos.

(iv) Sejam $g, x \in G$ e $y \in H$. Pela compatibilidade das ações temos:

$$g^{x^{-1}y^{-1}xy} = (g^{x^{-1}y^{-1}x})^y = \left(g^{y^{-x}}\right)^y = g^{y^{-x}y}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g^{x^{-1}y^{-1}xy} &= (xgx^{-1})^{y^{-1}xy} \\ &= \left(x^{y^{-1}}g^{y^{-1}}x^{-y^{-1}}\right)^{xy} \\ &= \left(x^{-1}x^{y^{-1}}g^{y^{-1}}x^{-y^{-1}}x\right)^y \\ &= x^{-y}xgx^{-1}x^y \\ &= g^{x^{-1}x^y} \end{aligned}$$

Logo, $g^{([x,y^\varphi])\lambda} = g^{([x,y^\varphi])\mu}$ para todo $g, x \in G$ e $y \in H$. Como $\tau(G, H)$ é gerado por todos comutadores $[x, y^\varphi]$ com $x \in G$ e $y \in H$ e λ, μ são homomorfismos temos

$$g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}, \quad \forall g \in G,\, t \in \tau(G, H).$$

O outro caso é análogo. $\square$

Pela Proposição 8.3, o subgrupo $\tau(G, H)$ $(= [G, H^\varphi])$ de $\eta(G, H)$ é isomorfo a $G \otimes H$. Isto nos permite considerar $G \otimes H$ como um subgrupo comutador de $\eta(G, H)$ e usar as propriedades que conhecemos de comutadores. Usamos esta técnica para obter uma descrição da série central inferior e também da série derivada de $G \otimes H$.

Teorema 9.2 **(i)** *Para $i \geq 2$ o i-ésimo termo da série central descendente de $\tau(G, H)$ é dado por*

$$\gamma_i(\tau(G, H)) = [\gamma_{i-1}([G, H]), [H. G]^\varphi]$$

(ii) *Para $i \geq 1$ o i-ésimo termo da série derivada de $\tau(G. H)$ é dado por*

$$\tau(G, H)_i = [[G, H]_{i-1}, [H, G]^\varphi_{i-1}]$$

Demonstração. Primeiramente nós observamos que se $[G. H] = 1$ então pela Proposição 8.4 (i)-(a)

$$[g, h^\varphi]^{[x,y^\varphi]} = [g, h^\varphi]^{x^{-1}x^y} = [g, h^\varphi]$$

para todo $g, x \in G$, $h, y \in H$. Portanto, $\tau(G,H)$ é um grupo abeliano e, conseqüentemente, $[H,G]$ $(= Im\mu)$ também. Assim, podemos assumir que $[G,H]$ é não trivial.

(i) Pela Proposição 8.4 (iii)

$$[u, v] = [u\lambda, (v\mu)^{\varphi}]$$

para todo $u, v \in \tau(G,H)$. Como $[G,H] = Im\lambda$ e $[H,G] = Im\mu$, temos

$$\gamma_2(\tau(G,H)) = [\gamma_1([G,H]), [H,G]^{\varphi}].$$

Suponhamos, por indução sobre $i \geq 2$, que

$$\gamma_i(\tau(G,H)) = [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}]$$

Então

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}, \tau(G,H)]$$

Assim, pela Proposição 1.2 (v)

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = \langle [x, (v\mu)^{\varphi}, t]^{z} \mid x \in \gamma_{i-1}([G,H]),\ v, t \in \tau(G,H),\ z \in [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}] \rangle.$$

Agora

$$\begin{aligned}
[x, (v\mu)^{\varphi}, t] &= [(([x, (v\mu)^{\varphi}])\lambda,\ (t\mu)^{\varphi}] \quad \text{(pela Prop. 8.4}(iii)) \\
&= [x^{-1}x^{v\mu}, (t\mu)^{\varphi}] \\
&= \left[x^{-1}x^{v\lambda}, (t\mu)^{\varphi}\right] \quad \text{(pela Prop. 9.1}(iv))
\end{aligned}$$

Como $[\gamma_i([G,H]), [H,G]^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$ (pelas Proposições 8.1 (ii) e 1.2), temos

$$[x, (v\mu)^{\varphi}, t]^{z} \in [\gamma_i([G,H]), [H,G]^{\varphi}]$$

para todo $x \in \gamma_{i-1}([G,H])$, $v, t \in \tau(G,H)$, $z \in [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}]$. Portanto,

$$\gamma_{i+1}(\tau(G.H)) \subseteq [\gamma_i([G,H]), [H,G]^{\varphi}]$$

Por outro lado,

$$[\gamma_i([G,H]), [H,G]^{\varphi}] = \langle [[x, v\lambda], (t\mu)^{\varphi}]^{g} \mid x \in \gamma_{i-1}([G,H]),\ v, t \in \tau(G,H),\ g \in \gamma_i([G.H]) \rangle$$

Uma vez que $\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) \trianglelefteq \eta(G,H)$

$$[[x, v\lambda], (t\mu)^{\varphi}]^{g} = \left[x^{-1}x^{v\lambda}, (t\mu)^{\varphi}\right]^{g} = [x, (v\mu)^{\varphi}, t]^{g}$$

o qual pertence a $\gamma_{i+1}(\tau(G,H))$, $\forall x \in \gamma_{i-1}([G,H])$, $v, t \in \tau(G,H)$, $g \in \gamma_i([G,H])$. Portanto,

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = [\gamma_i([G,H]), [H,G]^{\varphi}],$$

como queríamos.

(ii) Para $i = 1$, temos

$$\tau(G,H)_1 = \gamma_2(\tau(G,H)) = [[G,H], [H,G]^{\varphi}]$$

Suponhamos então $i \geq 1$ e que

$$\tau(G,H)_i = [[G,H]_{i-1}, [H,G]^{\varphi}_{i-1}]$$

Então

$$\tau(G,H)_{i+1} = [\tau(G,H)_i, \tau(G,H)_i] = [[[G,H]_{i-1}, [H,G]^{\varphi}_{i-1}], [[G,H]_{i-1}, [H,G]^{\varphi}_{i-1}]]$$

e, portanto, pela Proposição 1.2

$$\tau(G,H)_{i+1} = [X,X]^{\tau(G,H)_i \tau(G,H)_i}$$

onde $X = \{[g, h^{\varphi}] \mid g \in [G,H]_{i-1}, \quad h \in [H,G]_{i-1}\}$. Da Proposição 9.1 (iii) segue que

$$[[G,H]_i, [H,G]^{\varphi}_i] = [(\tau(G,H)_i)\lambda, \ ((\tau(G,H)_i)\mu)^{\varphi}]$$

Logo,

$$[[G,H]_i, [H,G]^{\varphi}_i] = [Y, Y_1]^{(\tau(G,H)_i)\lambda \ ((\tau(G,H)_i)\mu)^{\varphi}}$$

onde

$$\begin{aligned} Y &= \{[t,u]\lambda \mid t, u \in \tau(G,H)_{i-1}\} \\ Y_1 &= \{([t,u]\mu)^{\varphi} \mid t, u \in \tau(G,H)_{i-1}\} \end{aligned}$$

Agora sejam $g, g_1 \in [G,H]_{i-1}$ e $h, h_1 \in [H,G]_{i-1}$. Pela Proposição 9.1 (iii), existem $t, t_1, u, u_1 \in \tau(G,H)_{i-1}$ tais que

$$g = (t)\lambda, \ g_1 = (t_1)\lambda, \ h = (u)\mu, \ h_1 = (u_1)\mu$$

Temos

$$\begin{aligned}
[[g, h^{\varphi}], [g_1, h_1^{\varphi}]] &= \left[g^{-1}g^{h}, (h_1^{-g_1}h_1)^{\varphi}\right] \quad \text{(pela Proposição 8.4}(i) - (e)\text{)} \\
&= \left[((t)\lambda)^{-1}\,((t)\lambda)^{(u)\mu}, \left(((u_1)\mu)^{-(t_1)\lambda}\,(u_1)\mu\right)^{\varphi}\right] \\
&= \left[((t)\lambda)^{-1}\,((t)\lambda)^{(u)\lambda}, \left(((u_1)\mu)^{-(t_1)\mu}\,(u_1)\mu\right)^{\varphi}\right] \quad \text{(Prop. 9.1}(iv)\text{)} \\
&= \left[([t, u])\lambda, (([t_1, u_1])\mu)^{\varphi}\right]
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$[X, X] = [Y, Y_1]$$

Como $[[G, H]_i, [H, G]_i^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$ (pelas Proposições 9.1 (ii) e 8.1)

$$\tau(G, H)_{i+1} = [X, X]^{\tau(G,H)_i \tau(G,H)_i} = [Y, Y_1]^{\tau(G,H)_i \tau(G,H)_i} \subseteq [[G, H]_i, [H, G]_i^{\varphi}]$$

Da mema forma,

$$[[G, H]_i, [H, G]_i^{\varphi}] \subseteq \tau(G, H)_{i+1}$$

Portanto,

$$\tau(G, H)_{i+1} = [[G, H]_i, [H, G]_i^{\varphi}],$$

provando o resultado. □

Do teorema anterior segue que se $[G, H]$ é nilpotente (respectivamente solúvel), então $G \otimes H$ é nilpotente e $cl(G \otimes H) \leq cl([G, H]) + 1$ (respectivamente solúvel e $l(G \otimes H) \leq l([G, H]) + 1$). Vamos ver que algo semelhante ocorre no caso em que $[G, H]$ é n-engeliano, e também a determinação do limite inferior para $cl(G \otimes H)$ e $l(G \otimes H)$, em função da $cl([G, H])$ e $l([G, H])$, respectivamente.

Teorema 9.3 **(i)** *Se $[G, H]$ é nilpotente de classe c então $G \otimes H$ é nilpotente de classe c ou $c + 1$.*

(ii) *Se $[G, H]$ é solúvel de comprimento derivado l então $G \otimes H$ é solúvel de comprimento derivado l ou $l + 1$.*

(iii) *Se $[G, H]$ satisfaz a n-ésima condição de Engel então $G \otimes H$ e $[H, G]$ satisfazem a $(n + 1)$-ésima condição de Engel.*

Demonstração. **(i)** Suponhamos que $[G,H]$ é nilpotente de classe c. Pelo Teorema 9.2 (i)

$$\gamma_{c+2}(\tau(G,H)) = [\gamma_{c+1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}] = \{1\}$$

Portanto, $\tau(G,H)$ é nilpotente de classe no máximo $c+1$. Vamos mostrar que sua classe não pode ser inferior a c. Sejam $M = [\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$ e α a restrição do homomorfismo λ a M. É claro que $Im\alpha = [\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]]$. Mas,

$$\begin{aligned}
[\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]] &= \left\langle g^{-1}g^{h} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]),\ h \in [H,G]\right\rangle \\
&= \left\langle g^{-1}g^{(t)\mu} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]),\ t \in \tau(G,H)\right\rangle \\
&= \left\langle g^{-1}g^{(t)\lambda} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]),\ t \in \tau(G,H)\right\rangle \\
&\text{(pela Proposição 9.1)} \\
&= \gamma_c([G,H])
\end{aligned}$$

Uma vez que a classe de nilpotência de $[G,H]$ é c temos $\gamma_c([G,H]) \neq \{1\}$ e, portanto, $Im\alpha \neq \{1\}$. Assim, devemos ter $M \neq \{1\}$. Agora, pelo Teorema 9.2 (i)

$$\gamma_c(\tau(G,H)) = [\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}] = M \neq \{1\}$$

Portanto, $cl(\tau(G,H)) \geq c$. Agora, o item (i) segue do isomorfismo $\tau(G,H) \cong G \otimes H$.

(ii) é provado de modo análogo a (i).

(iii) Sejam $u,v \in \tau(G,H)$. Vamos provar por indução sobre $i \geq 1$ que

$$[u,_i v] = \left[[(u)\lambda,_{(i-1)} (v)\lambda],((v)\mu)^{\varphi}\right] \tag{9.1}$$

O caso $i=1$ é a Proposição 8.4 (iii). Agora

$$\begin{aligned}
[u,_{(i+1)} v] &= [[u,_i v],v] \\
&= \left[\left[[(u)\lambda,_{(i-1)} (v)\lambda],((v)\mu)^{\varphi}\right],v\right] \\
&= \left[[(u)\lambda,_{(i-1)} (v)\lambda]^{-1}[(u)\lambda,_{(i-1)} (v)\lambda]^{(v)\mu},((v)\mu)^{\varphi}\right] \quad (\text{Prop. } 8.4(iii)) \\
&= \left[\left[[(u)\lambda,_{(i-1)} (v)\lambda],(v)\lambda\right],((v)\mu)^{\varphi}\right] \quad (\text{Prop. } 9.1(iv)) \\
&= [[(u)\lambda,_i (v)\lambda],((v)\mu)^{\varphi}]
\end{aligned}$$

Suponhamos que $[G,H]$ satisfaz a n-ésima condição de Engel. Então, por (9.1)

$$[u,_{(n+1)} v] = [[(u)\lambda,_n (v)\lambda],((v)\mu)^{\varphi}] = 1$$

para todo $u, v \in \tau(G, H)$. Portanto $\tau(G, H)$ satisfaz a $(n+1)$-ésima condição de Engel. Agora sejam $h, h_1 \in [H, G]$. Existem $t, t_1 \in \tau(G. H)$ tais que $h = (t)\mu$ e $h_1 = (t_1)\mu$. Temos

$$[h,_{n+1} h_1] = [(t)\mu,_{n+1} (t_1)\mu] = ([t,_{n+1} t_1])\mu = 1$$

Logo, $[H, G]$ também satisfaz a $(n+1)-$ésima condição de Engel. $\square$

Observação. Resultados semelhantes àqueles no Teorema 9.3 também foram obtidos por M. Visscher em [31].

Observação. Os itens (i) e (ii) do Teorema 9.3 generalizam o seguinte resultado que aparece em [5]

Teorema 9.4 **(i)** *Se G é um grupo nilpotente então $G \otimes G$ também é nilpotente e*

$$cl(G') \leq cl(G \otimes G) \leq cl(G') + 1$$

(ii) *Se G é um grupo solúvel então $G \otimes G$ também é solúvel e*

$$l(G) - 1 \leq l(G \otimes G) \leq l(G)$$

Em em [5] Brown, Johnson e Robertson levataram as seguintes questões:

1. Existe alguma caracterização de grupos nilpotentes G tais que $cl(G \otimes G) = cl(G') + 1$ e de grupos nilpotentes G tais que $cl(G \otimes G) = cl(G')$?

2. Existe alguma caracterização de grupos solúveis G tais que $l(G \otimes G) = l(G)$ e de grupos solúveis G tais que $l(G \otimes G) = l(G) - 1$?

M. Bacon e L.C. Kappe, em [2], provaram

Teorema 9.5 *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então $G \otimes G$ é abeliano.*

Uma outra contribuição ao Problema 1 é fornecida também por Bacon e Kappe, juntamente com R.F.Morse em [3]

Teorema 9.6 *Seja T_n o grupo nilpotente livre de classe 3 e posto n. Então $T_2 \otimes T_2$ é abeliano e $T_n \otimes T_n$ é nilpotente de classe 2 para todo $n \geq 3$.*

Este resultado sugere que a resposta para o Problema 1 depende não só da classe de nilpotência de G mas também do número de geradores de G.

A seguir damos nossa contribuição ao Problema 2.

Proposição 9.7 *Suponhamos que G e H são subgrupos normais de algum grupo M e que as ações de G sobre H e de H sobre G se originam da conjugação em M. Temos*

(i) $[c, c^{\varphi}] = 1, \quad \forall c \in [G, H]$;

(ii) *Se $[G, H]$ é solúvel de comprimento derivado $l \geq 1$ e $[G, H]_{l-1}$ é cíclico, então $G \otimes H$ é solúvel de comprimento derivado l.*

Demonstração. (i) Seja $c \in [G, H]$. Então c tem a forma

$$c = [g_1, h_1] \ldots [g_n, h_n]$$

onde $g_1, \ldots, g_n \in G,\ h_1, \ldots, h_n \in H$. Como as ações de G sobre H e de H sobre G são por conjugação em M, temos

$$c = (t)\lambda \qquad e \qquad c = (t)\mu$$

onde $t = [g_1, h_1^{\varphi}] \ldots [g_n, h_n^{\varphi}] \quad (\in \tau(G, H))$. Logo, pela Proposição 8.4 (iii)

$$[c, c^{\varphi}] = [(t)\lambda, ((t)\mu)^{\varphi}] = [t, t] = 1$$

(ii) Suponhamos que $[G, H]$ é solúvel de comprimento derivado $l \geq 1$ e que $[G, H]_{l-1} = \langle x \rangle$. Pelos Teoremas 9.3 (ii) e 9.2 (ii), basta provarmos que o subgrupo comutador $\left[[G, H]_{l-1}, [H, G]_{l-1}^{\varphi}\right]$ de $\tau(G, H)$ é trivial. Mas isto segue do fato que

$$\left[[G, H]_{l-1}, [H, G]_{l-1}^{\varphi}\right] = \left\langle [x^i, (x^j)^{\varphi}] \mid i, j \in \mathbb{Z} \right\rangle$$

e, $[x^i, (x^j)^{\varphi}] = [x, x^{\varphi}]^{ij} = 1, \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}$ (por (i)). $\square$

Como conseqüência deste resultado, temos

Corolário 9.8 *Se G é solúvel de comprimento derivado $l \geq 2$ com G_{l-1} cíclico, então $G \otimes G$ é solúvel de comprimento derivado $l - 1$.*

Não é verdade que para todo grupo solúvel G temos $l(G \otimes G) = l(G) - 1$. A seguir damos exemplos de grupos solúveis G tais que $l(G \otimes G) = l(G)$.

Exemplo. Seja G um grupo abeliano não trivial. Pela Proposição 5.6

$$G \otimes G \cong G \otimes_{\mathbb{Z}} G$$

o qual é abeliano não trivial.

Exemplo. O grupo alternado A_4 é solúvel de comprimento derivado 2 e $l(A_4 \otimes A_4) = 2$, pois $A_4 \otimes A_4 \cong Q_2 \times \mathbb{Z}_3$ (conforme [5]).

10 Nilpotência de $\eta(G, H)$

Vimos na seção 6 que se G é um grupo nilpotente (respectivamente solúvel), então $\nu(G)$ é nilpotente (respectivamente solúvel). Veremos a seguir que se G e H são solúveis, então $\eta(G, H)$ também é solúvel.

Proposição 10.1 *Se G e H são grupos solúveis então $\eta(G, H)$ é solúvel e*

$$l(\eta(G, H)) \leq l(G) + l(H) + 1.$$

Demonstração. Uma vez que $\eta(G, H) = \tau(G, H)GH^{\varphi}$, temos

$$\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \cong G \times H^{\varphi}$$

Logo, se G e H são grupos solúveis, $\dfrac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)}$ é também solúvel e

$$l\left(\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)}\right) \leq \max\{l(G), l(H)\}$$

Pelo Teorema 9.3 (ii) , $\tau(G, H)$ é também solúvel e

$$l(\tau(G.H)) \leq \min\{l([G,H]), l([H,G])\} + 1 \leq \min\{l(G), l(H)\} + 1.$$

Portanto, $\eta(G, H)$ é solúvel e

$$l(\eta(G,H)) \leq l(G) + l(H) + 1. \quad \square$$

Exemplo 1. Consideremos o grupo $\eta(C_3, C_2)$, onde $C_3 = \langle a|a^3\rangle$, $C_2 = \langle b|b^2\rangle$, C_3 age trivialmente sobre C_2 e C_2 age sobre C_3 por $a^b = a^{-1}$. Temos

$$\begin{aligned} [a, b^\varphi, b^\varphi] &= [a^{-1}a^b, b^\varphi] \quad \text{(pela Proposição 8.4 (c))} \\ &= [a^{-1}a^{-1}, b^\varphi] \\ &= [a, b^\varphi] \end{aligned} \tag{10.1}$$

De um modo geral vale:

$$[a,_n b^\varphi] = [a, b^\varphi], \qquad \forall n \geq 1$$

Agora, do exemplo 1 da seção 5 concluimos que $[a, b^\varphi] \neq 1$. Logo, $\eta(C_3, C_2)$ não é nilpotente.

O exemplo anterior mostra que nilpotência de G e H não implica nilpotência de $\eta(G, H)$. Isto ocorre porque os termos da série central inferior dependem das ações de G sobre H e de H sobre G (como pode ser visto em (10.1)). Assim, precisaremos impor algumas condições sobre essas ações.

Para $g \in G$, $h \in H$ colocamos $[g,_0 h] := g^{-1}$, $[g,_1 h] := g^{-1}g^h$ e para $i \geq 1$, $[g,_{i+1} h] := [[g,_i h], h]$.

Dizemos que a ação de H sobre G é n-engeliana (à direita) se $[g,_n h] = 1$, $\forall g \in G$, $h \in H$. Em particular, se $G = H$ e a ação é conjugação em G então a ação n-engeliana (à direita) coincide com a n-ésima condição de Engel.

Proposição 10.2 *Sejam $G = C_n = \langle g|g^n\rangle$ e $H = C_m = \langle h|h^m\rangle$. Suponhamos que o grupo H age sobre G por*

$$g^h = g^r$$

onde $1 \leq r \leq n-1$, $mdc(r,n) = 1$ e tal que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $n|(r-1)^k$. Então a ação de H sobre G é k-engeliana.

Demonstração. Sejam $0 \leq i \leq n-1$ e $0 \leq j \leq m-1$. Vamos mostrar por indução sobre $l \geq 1$ que

$$[g^i,_l h^j] = g^{i(r^j-1)^l} \qquad (*)$$

Para $l = 1$

$$[g^i, h^j] = g^{-i}(g^i)^{h^j} = g^{-i}g^{ir^j} = g^{i(r^j-1)}$$

Suponha que $l \geq 1$ e que $(*)$ é verdadeiro. Então

$$\begin{aligned} [g^i,_{l+1} h^j] &= [[g^i,_l h^j], h^j] \\ &= [g^{i(r^j-1)^l}, h^j] \\ &= g^{-i(r^j-1)^l}\left(g^{i(r^j-1)^l}\right)^{h^j} \\ &= g^{-i(r^j-1)^l}g^{r^j i(r^j-1)^l} \\ &= g^{i(r^j-1)^{l+1}} \end{aligned}$$

Em particular, para $l = k$

$$[g^i,_k h^j] = g^{i(r^j-1)^k} = g^{i(r-1)^k(r^{j-1}+\cdots+r+1)^k} = 1$$

uma vez que $o(g) = n$ e $n|(r-1)^k$. Logo, $[x,_k y] = 1$, para todo $x \in G$ e $y \in H$ e, portanto, a ação de H sobre G é k-engeliana. $\square$

Exemplo 2. Sejam $G = D_4 = \langle x, y | x^4, y^2, (xy)^2\rangle$ e $H = C_2 = \langle h | h^2\rangle$. Suponha que H age sobre G por

$$x^h = x^{-1}, \quad y^h = x^2 y$$

Os elementos de G são da forma $x^i y^j$ com $0 \leq i \leq 3$ e $0 \leq j \leq 1$. Como $x^4 = 1$

$$[y, h, h] = [y^{-1}y^h, h] = [y^{-1}x^2y. h] = [x^{-2}, h] = x^4 = 1$$

Também para $i \in \{1, 2, 3\}$ temos

$$[x^i, h, h] = [x^{-i}(x^i)^h, h] = [x^{-i}x^{-i}. h] = x^{2i}(x^{-2i})^h = x^{4i} = 1$$

Como $y^{-1}xy = x^{-1}$, temos para $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} [x^i y, h, h] &= [y^{-1}x^{-i}(x^i y)^h, h] \\ &= [y^{-1}x^{-i}x^{-i}x^2 y, h] \\ &= [x^{2(i-1)}, h] \\ &= x^{-2(i-1)}(x^h)^{2(i-1)} \\ &= x^{-2(i-1)}x^{-2(i-1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $[a,_2 b] = 1$, $\forall a \in G$, $\forall b \in H$ e, portanto, a ação de H sobre G é 2-engeliana.

Sejam $[G,_0 H] := G$, $[G,_1 H] := [G, H]$ e, para $i \geq 1$, $[G,_{i+1} H] := [[G,_i H], H]$.

Definição. Dizemos que a ação de H sobre G é *n-nilpotente (à direita)* se $[G,_n H] = \{1\}$.

Exemplo 3. Se G é um grupo nilpotente de classe n, então a ação de G sobre si mesmo por conjugação é n-nilpotente.

Exemplo 4. Sejam G e H grupos como na Proposição 10.2. Vimos lá que

$$[g^i, h^j] = g^{i(r^j-1)}, \quad \forall 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq m-1.$$

Assim, para todo $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j_l \leq m-1$, $l = 1, 2, \cdots, k$

$$\begin{aligned}
[g^i, h^{j_1}, \cdots, h^{j_k}] &= [g^{i(r^{j_1}-1)}, h^{j_2}, \cdots, h^{j_k}] \\
&= [g^{i(r^{j_1}-1)(r^{j_2}-1)}, h^{j_3}, \cdots, h^{j_k}] \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= g^{i\prod_{l=1}^{k}(r^{j_l}-1)} \\
&= g^{i\prod_{l=1}^{k}(r-1)^{j_l}(r^{j_l-1}+\cdots+r+1)^{j_l}} \\
&= g^{i(r-1)^k c}
\end{aligned}$$

onde $c = (r-1)^{\sum_{l=1}^{k}(j_l) - k} \prod_{l=1}^{k}(r^{j_l-1} + \cdots + r + 1)^{j_l}$. Como $g^n = 1$ e $n | (r-1)^k$, temos

$$[g^i, h^{j_1}, \cdots, h^{j_k}] = 1$$

para todo $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j_l \leq m-1$, $l = 1, 2. \cdots, k$. É claro que se $j_l = 0$ para algum $1 \leq l \leq k$, então

$$[g^i, h^{j_1}, \cdots, h^{j_l}] = 1$$

Portanto a ação de H sobre G é k-nilpotente.

Proposição 10.3 *Se a ação de H sobre G é n-engeliana (resp. c-nilpotente), então $[G, H]$ satisfaz a n-ésima condição de Engel (resp. é nilpotente de classe no máximo c).*

Demonstração. Sejam $g, x_1, \cdots, x_c \in [G, H]$. Como $[G, H] = Im\lambda$, existem $t_1, \cdots, t_c \in \tau(G, H)$ tais que $x_i = (t_i)\lambda$, $i = 1, 2, \cdots, c$. Pela Proposição 9.1 (iii)

$$[g, x_1] = [g, (t_1)\lambda] = g^{-1}g^{(t_1)\lambda} = g^{-1}g^{(t_1)\mu} = [g, (t_1)\mu]$$

e, por indução

$$[g, x_1, \cdots, x_c] = [g, (t_1)\mu, \cdots, (t_c)\mu]$$

Logo, se a ação de H sobre G é c-nilpotente, então $[G, H]$ é nilpotente de classe no máximo c. Analogamente, se a ação de H sobre G é n-engeliana então $[G, H]$ satisfaz a n-ésima condição de Engel. □

Como consequência deste resultado e do Teorema 9.3, temos

Corolário 10.4 *Se a ação de H sobre G é n-engeliana (resp. c-nilpotente), então $G \otimes H$ satisfaz a $(n+1)$-ésima condição de Engel (resp. é um grupo nilpotente de classe no máximo $c+1$).*

Mais adiante daremos as condições sobre G e H suficientes para $\eta(G, H)$ ser nilpotente. Para isso, precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 10.5 *Sejam $g \in \gamma_i(G)$, $h \in \gamma_j(H), x \in G, y \in H$ e escrevamos*

$$C_{ij} = [\gamma_{i+1}(G).\gamma_j(H^\varphi)][\gamma_i(G), \gamma_{j+1}(H^\varphi)].$$

Então

(i) $[[g, h^\varphi], [x, y^\varphi]] \in C_{ij}$;

(ii) $[g, h^\varphi]^x \equiv [g, h^\varphi]\,[g, [h, x]^\varphi]\,(\mathrm{mod}\ C_{ij})$;

(iii) $[g, h^{\varphi}]^{y^{\varphi}} \equiv [g, h^{\varphi}]\,[[g, y], h^{\varphi}]\,(\text{mod } C_{ij})$;

(iv) $[g, h^{\varphi}]^{xy^{\varphi}} \equiv [g, h^{\varphi}]\,[g, [h, x]^{\varphi}]\,[[g, y], h^{\varphi}]\,[[g, y^{\varphi}], [x, h^{\varphi}]^{-1}]\,(\text{mod } C_{ij})$.

Demonstração. **(i)** Pelas Proposições 8.4 (i), 9.1 (iii) e identidades de comutadores, obtemos

$$\begin{aligned}
[g, h^{\varphi}]^{[x, y^{\varphi}]} &= \left[g^{x^{-1}x^{y}}, (h^{y^{-x}y})^{\varphi}\right] \\
&= \left[[x^{-1}x^{y}, g^{-1}]\,g, [y^{-x}y, h^{-1}]^{\varphi}\,h^{\varphi}\right] \\
&= [[x^{-1}x^{y}, g^{-1}], h^{\varphi}]^{g}\,[g, h^{\varphi}]\left[[x^{-1}x^{y}, g^{-1}], [y^{-x}y, h^{-1}]^{\varphi}\right]^{gh^{\varphi}} \cdot \\
&\quad \cdot \left[g, [y^{-x}y, h^{-1}]^{\varphi}\right]^{h^{\varphi}}
\end{aligned}$$

Disto segue que

$$\begin{aligned}
[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]] &= [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{[x, y^{\varphi}]} \\
&= [[x^{-1}x^{y}, g^{-1}], h^{\varphi}]^{g[g, h^{\varphi}]}\left[[x^{-1}x^{y}, g^{-1}], [y^{-x}y, h^{-1}]^{\varphi}\right]^{gh^{\varphi}} \cdot \\
&\quad \cdot \left[g, [y^{-x}y, h^{-1}]^{\varphi}\right]^{h^{\varphi}}
\end{aligned}$$

Agora como $C_{ij} \trianglelefteq \eta(G, H)$ (pela Proposição 8.1 (ii)), segue que $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]] \in C_{ij}$.

(ii) Das relações definidoras de $\eta(G, H)$, temos

$$\begin{aligned}
[g, h^{\varphi}]^{x} &= [g^{x}, (h^{x})^{\varphi}] \\
&= [[x, g^{-1}]\,g, (h^{x})^{\varphi}] \\
&= [[x, g^{-1}], (h^{x})^{\varphi}]^{g}\,[g, (h^{x})^{\varphi}] \qquad \text{(pelas identidades de comutadores)} \\
&\equiv [g, (h^{x})^{\varphi}] \quad (\text{mod } C_{ij}) \\
&\equiv [g, (hh^{-1}h^{x})^{\varphi}] \quad (\text{mod } C_{ij}) \\
&\equiv [g, (h^{-1}h^{x})^{\varphi}]\,[g, h^{\varphi}]^{(h^{-1}h^{x})^{\varphi}} \quad (\text{mod } C_{ij}) \\
&\equiv [g, [h, x]^{\varphi}]\,[g, h^{\varphi}]^{[x, h^{\varphi}]^{-1}} \quad (\text{mod } C_{ij}) \quad \text{(pela Propos. 8.4 (i)-(b))} \\
&\equiv [g, [h, x]^{\varphi}]\,[g, h^{\varphi}]\,[g, h^{\varphi}]^{-1}\,[g, h^{\varphi}]^{[x, h^{\varphi}]^{-1}} \quad (\text{mod } C_{ij}) \\
&\equiv [g, h^{\varphi}]\,[g, [h, x]^{\varphi}]\,[[g, [h, x]^{\varphi}], [g, h^{\varphi}]]\,[[g, h^{\varphi}], [x, h^{\varphi}]^{-1}]\,(\text{mod } C_{ij}) \\
&\equiv [g, h^{\varphi}]\,[g, [h, x]^{\varphi}] \quad (\text{mod } C_{ij}) \qquad \text{(by (i))}.
\end{aligned}$$

A prova de (iii) é análoga a (ii), enquanto que a de (iv) segue de (ii), (iii) e Proposição 8.4 (i)-(f). □

Teorema 10.6 *Sejam G e H grupos nilpotentes de classes a e b respectivamente. Suponha que a ação de H sobre G é l-Engeliana e que a ação de G sobre H é k-Engeliana. Então $\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)'}$ satisfaz a n-ésima condição de Engel para $n = c + (2c - 1)m$, onde $c = \max\{a, b\}$ e $m = \max\{l, k\}$. Em particular, se além disso G e H são grupos finitamente gerados, então $\eta(G,H)$ é nilpotente.*

Demonstração. Primeiramente notamos que pela Proposição 8.1 (ii), $[\gamma_i(G), \gamma_j(H)^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$, para todo $i, j \geq 1$. Sejam u, v elementos de $\eta(G,H)$ e coloquemos $c = \max\{a, b\}$ e $m = \max\{l, k\}$. Vamos provar por indução sobre $s \geq 0$ que

$$[u,_{c+sm} v] \equiv 1 \left(\operatorname{mod} \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{s+1} [\gamma_i(G), \gamma_{s+2-i}(H)^{\varphi}] \right) \tag{10.2}$$

Para $s = 0$ observamos $\eta(G,H) = \tau(G,H)GH^{\varphi}$ implica

$$\gamma_i\left(\frac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)}\right) \cong \gamma_i(G)\gamma_i(H^{\varphi}), \qquad \forall i.$$

Assim $\gamma_{c+1}\left(\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)}\right) = 1$ e, portanto, $[u,_c v] \equiv 1 \operatorname{mod} (\tau(G,H))$. Agora suponhamos $s \geq 0$ e que (10.2) é verdadeira. Então $[u,_{c+sm} v]$ tem a forma

$$[u,_{c+sm} v] \equiv \prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} \left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right] (\operatorname{mod} \tau(G,H)'),$$

onde $g_{i_t} \in \gamma_i(G), h_{i_t} \in \gamma_{s+2-i}(H), 1 \leq t \leq r_i, 1 \leq i \leq (s+1)$. Podemos escrever $v \quad (\in \eta(G,H))$ como $v = zxy^{\varphi}$, onde $z \in \tau(G,H), x \in G$ e $y \in H$. Assim, usando que $\tau(G,H)' \trianglelefteq \eta(G,H)$ e as identidades de comutadores, obtemos

$$\begin{aligned}
[u,_{c+sm+1} v] &= [u,_{c+sm} v, v] \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} \left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right], zxy^{\varphi}\right] (\operatorname{mod} \tau(G,H)') \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1} \prod_{t=1}^{r_i} \left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right], xy^{\varphi}\right] \left[\prod_{i=1}^{s} \prod_{t=1}^{r_i} \left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right], z\right]^{xy^{\varphi}} (\operatorname{mod} \tau(G,H)')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}\left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right], xy^{\varphi}\right] (\mathrm{mod}\ \tau(G,H)') \quad (\text{pois } z \in \tau(G,H))\\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}\left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right]^{-1}\left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right]^{xy^{\varphi}} (\mathrm{mod}\ \tau(G,H)')\\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}\left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right]^{-1}\left[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}\right]\left[g_{i_t}, \left[h_{i_t}, x\right]^{\varphi}\right]\left[\left[g_{i_t}, y\right], h_{i_t}^{\varphi}\right]\left[\left[g_{i_t}, y^{\varphi}\right], \left[x, h_{i_t}^{\varphi}\right]^{-1}\right]\\
&\left(\mathrm{mod}\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{s+1}\left(\left[\gamma_{i+1}(G), \gamma_{s+2-i}(H)^{\varphi}\right]\left[\gamma_i(G), \gamma_{s+2-i+1}(H)^{\varphi}\right]\right)\right)\\
&(\text{pelo Lema 10.5 (iv)})\\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}\left[g_{i_t}, \left[h_{i_t}, x\right]^{\varphi}\right]\left[\left[g_{i_t}, y\right], h_{i_t}^{\varphi}\right] \quad \left(\mathrm{mod}\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{s+2}\left[\gamma_i(G), \gamma_{s+3-i}(H)^{\varphi}\right]\right)
\end{aligned}
$$

Agora usando, passo a passo, argumentos análogos aos da prova da identidade anterior e a Proposição 8.4 (i)-(f) mostramos (por indução sobre $j \geq 1$) que

$$
\begin{aligned}
\left[u,_{c+sm+j}\, v\right] &\equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}\left[g_{i_t}, \left[h_{i_t},_j\, x\right]^{\varphi}\right]\left[\left[g_{i_t},_j\, y\right], h_{i_t}^{\varphi}\right]\\
&\left(\mathrm{mod}\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{s+2}\left[\gamma_i(G), \gamma_{s+3-i}(H)^{\varphi}\right]\right)
\end{aligned}
$$

Em particular, se $j = m$ então

$$
\left[u,_{(c+(s+1)m)}\, v\right] \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{s+2}\left[\gamma_i(G), \gamma_{(s+1)+2-i}(H)^{\varphi}\right]\right)
$$

uma vez que $[h,_m\, g] = [g,_m\, h] = 1, \forall g \in G, h \in H$. Assim, (10.2) acontece para todo $s \geq 0$.

Finalmente, observamos que se $s = 2c - 1$ então $s + 2 - i \geq c + 1$ sempre que $i \leq c$. Conseqüentemente

$$
\left[u,_{(c+(2c-1)m)}\, v\right] = 1,
$$

e, portanto, $\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)'}$ satisfaz a n-ésima condição de Engel para $n = c + (2c-1)m$. Se, além disso, G e H são grupos finitamente gerados, então $\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)'}$ é um grupo engeliano solúvel finitamente gerado. Logo, pelo Teorema 1.3, $\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)'}$ é um grupo nilpotente. Como, pela Proposição 9.2, $\tau(G,H)$ é também nilpotente, segue pelo Critério de Hall (Teorema 1.4) que $\eta(G,H)$ é nilpotente e o teorema está provado. □

Teorema 10.7 *Sejam G e H grupos nilpotentes de classes a and b respectivamente, tais que a ação de H sobre G é l-nilpotente e a ação de G sobre H é k-nilpotente. Coloquemos $c = \max\{a, b\}$, $m = \max\{l, k\}$, $n = c+(2c-1)m$ e $s = 1+\min\{a, b, k, l\}$. Então $\eta(G, H)$ é um grupo nilpotente e sua classe não é maior que $nC_{s+1,2} - C_{s,2}$.*

Demonstração. Utilizando argumentos análogos àqueles usados no resultado anterior provamos que $\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)'}$ é nilpotente de classe no máximo n. Pelo Teorema 9.2 e Corolário 10.4 $\tau(G,H)$ é nilpotente de classe s. Portanto, $\eta(G,H)$ é nilpotente e sua classe não é maior que $nC_{s+1,2} - C_{s,2}$ (conforme Teorema 1.4). □

Os limites que se obtém para a classe de nilpotência e para o comprimento derivado de $\nu(G)$ ($= \eta(G,G)$) através do Teorema 10.7 e Proposição 10.1, para o caso particular em que $G = H$ e as ações são por conjugação, são maiores do que as correspondentes limitações dadas pelo Teorema 6.7. Cabe observar, entretanto, que o caso geral aqui em foco não contempla relações que são verdadeiras em $\nu(G)$. Por exemplo, a relação

$$[x, y^{\varphi}, z] = [x, y, z^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}, z^{\varphi}],\ \forall x, y, z \in G$$

em geral não faz sentido em $\eta(G, H)$.

Por outro lado, vemos a seguir que as propriedades de $\nu(G)$ apresentadas pelas Proposições 6.6, 6.10 e 6.11 se estendem para $\eta(G, H)$.

Proposição 10.8 *Suponhamos que $\alpha : G \to A$, $\beta : H \to B$ são homomorfismos de grupos e que α, β preservam as ações. Então*

(i) *Existe um homomorfismo $\gamma : \eta(G,H) \to \eta(A,B)$ tal que $g \mapsto g\alpha$, $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$;*

(ii) *Se α e β são sobrejetores então γ também é e*

(a) $Nuc\gamma = \langle Nuc\alpha, (Nuc\beta)^{\varphi}\rangle [Nuc\alpha, H^{\varphi}][G, (Nuc\beta)^{\varphi}]$;

(b) *Se γ' é a restrição de γ a $\tau(G,H)$, então a seguinte seqüência de grupos é exata:*

$$1 \longrightarrow [Nuc\alpha, H^{\varphi}][G, Nuc\beta^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G,H) \xrightarrow{\gamma'} \tau(A,B) \longrightarrow 1$$

Demonstração. Sejam $\alpha : G \to A$, $\beta : H \to B$ homomorfismos que preservam as ações. Observamos que α, β induzem um homomorfismo $\sigma : G * H^{\varphi} \to \eta(A,B)$ tal que $g \mapsto g\alpha$, $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$. Uma vez que $\eta(G,H) = \dfrac{G * H^{\varphi}}{\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}}}$, onde

$$R = \{[g,h^{\varphi}]^{-x} \cdot [g^x,(h^x)^{\varphi}],\ [g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}} \cdot [g^y,(h^y)^{\varphi}] \mid g,x \in G,\ h,y \in H\},$$

é suficiente mostrarmos que $R \subseteq Nuc(\sigma)$. Para todo $g, x \in G$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned} ([g^x,(h^x)^{\varphi}])\sigma &= [(g^x)\alpha, ((h^x)\beta)^{\psi}] \\ &= [(g\alpha)^{x\alpha}, ((h\beta)^{x\alpha})^{\psi}] \qquad \text{(pois } \beta \text{ preserva a ação)} \\ &= [g\alpha, (h\beta)^{\psi}]^{x\alpha} \qquad \text{(pelas relações definidoras de } \eta(A,B)) \\ &= ([g,h^{\varphi}]^x)\sigma \end{aligned}$$

isto é , $[g,h^{\varphi}]^{-x} \cdot [g^x,(h^x)^{\varphi}] \in Nuc(\sigma)$. Analogamente $[g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}} \cdot [g^y,(h^y)^{\varphi}] \in Nuc(\sigma)$ para todo $g \in G$ e $h, y \in H$. Portanto, $R \subseteq Nuc\sigma$ e σ induz um homomorfismo $\gamma : \eta(G,H) \to \eta(A,B)$ tal que $g \mapsto g\alpha$, $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$.

(ii) Suponhamos que os homomorfismos α, β são sobrejetores. É claro que, neste caso, γ também é sobrejetor.

(a) Escrevemos $M = Nuc\alpha$ e $N = Nuc\beta$. É fácil ver que $K = \langle M, N^{\varphi}\rangle[M,H^{\varphi}][G,N^{\varphi}]$ está no núcleo de γ. Além disso, $K \trianglelefteq \eta(G,H)$, pois M é um H-subgrupo normal de G e N é um G-subgrupo normal de H. Logo, γ induz um epimorfismo

$$\bar{\gamma} : \frac{\eta(G,H)}{K} \to \eta(A,B)$$

tal que $Kg \mapsto g\alpha$, $Kh^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$. Mostraremos que $\bar{\gamma}$ admite um homomorfismo inverso. Sendo α e β sobrejetores, para cada $a \in A$ e $b \in B$ existem $g_a \in G$ e $h_b \in H$ tais que

$$(g_a)\alpha = a \quad \text{e} \quad (h_b)\beta = b$$

Assim definimos

$$\begin{aligned} \theta : A \cup B^{\psi} &\to \tfrac{\eta(G,H)}{K} \\ a &\longmapsto Kg_a \\ b^{\psi} &\longmapsto Kh_b^{\varphi} \end{aligned}$$

Uma vez que $M = Nuc\alpha \subseteq K$ e $N = Nuc\beta \subseteq K$, θ está bem definida. As restrições de θ a A e a B são ambas homomorfismos, de modo que existe um único homomorfismo θ^* do produto livre $A * B$ a $\frac{\eta(G,H)}{K}$ estendendo θ. Como

$$((g_a)^{g_{a_1}})\alpha = a^{a_1} \quad \text{e} \quad ((h_b)^{g_{a_1}})\beta = (h_b\beta)^{(g_{a_1})\alpha} = b^{a_1}$$

temos,

$$([a, b^{\psi}]^{a_1}[a^{a_1}, (b^{a_1})^{\psi}]^{-1})\theta^* = [Kg_a, Kh_b^{\varphi}]^{Kg_{a_1}}[K(g_a)^{g_{a_1}}, K(h_b^{g_{a_1}})^{\varphi}]^{-1} = 1$$

Analogamente,

$$([a, b^{\psi}]^{b_1^{\psi}}[a^{b_1}, (b^{b_1})^{\psi}]^{-1})\theta^* = 1$$

Portanto, θ^* induz um homomorfismo

$$\bar{\theta}: \eta(A, B) \to \frac{\eta(G, H)}{K}$$

tal que $a \mapsto Kg_a$, $b^{\psi} \mapsto Kh_b^{\varphi}$. É claro que $\bar{\theta}\bar{\gamma} = 1_{\eta(A,B)}$ e $\bar{\gamma}\bar{\theta} = 1_{\frac{\eta(G,H)}{K}}$.

b) Seja γ' a restrição de γ a $\tau(G, H)$. Sendo α e β sobrejetores, γ' é um epimorfismo de $\tau(G, H)$ em $\tau(A, B)$, tal que $[g, h^{\varphi}] \mapsto [g\alpha, (h\beta)^{\varphi}]$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Uma vez que $L = [M, H^{\varphi}][G, N^{\varphi}] \subseteq Nuc\gamma'$ e é normal em $[G, H^{\varphi}]$, γ' induz um epimorfismo $\overline{\gamma'}$ de $[G, H^{\varphi}]/L$ sobre $\tau(A, B)$. Como em (a), mostramos que existe um homomorfismo

$$v : \tau(A, B) \longrightarrow \frac{\tau(G, H)}{L}$$

tal que $[a, b^{\psi}] \mapsto L[g_a, h_b^{\varphi}]$, onde $g_a \in G$, $h_b \in H$ são tais que $(g_a)\alpha = a$, $(h_b)\beta = b$. Logo, $\overline{\gamma'}$ é um isomorfismo e, conseqüentemente, a seguinte seqüência é exata:

$$1 \longrightarrow [Nuc\alpha, H^{\varphi}][G, Nuc\beta^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G, H) \xrightarrow{\gamma'} \tau(A, B) \longrightarrow 1 \quad \square$$

Lema 10.9 *Sejam g um elemento de G e h um elemento de H. Temos:*

(i) *Se $[g, h] = 1$ então $[g, (h^n)^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Conseqüentemente, se h é um elemento de torção de ordem $o(h)$, então $o([g, h^{\varphi}]) \mid o(h)$;*

(ii) *Se $[h, g] = 1$ então $[g^n, h^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Conseqüentemente, se g é um elemento de torção, então $o([g, h^{\varphi}]) \mid o(g)$.*

Demonstração. **(i)** Se $[g,h]=1$ então $g^h=g$. Daí, pelas identidades de comutadores,

$$\begin{aligned}
[g,(h^2)^\varphi] &= [g,h^\varphi][g,h^\varphi]^{h^\varphi} \\
&= [g,h^\varphi][g^h,h^\varphi] \qquad \text{(pelas relações definidoras de } \eta(G,H)) \\
&= [g,h^\varphi][g,h^\varphi] \\
&= [g,h^\varphi]^2
\end{aligned}$$

Por indução, mostramos que $[g,(h^n)^\varphi]=[g,h^\varphi]^n$, $\forall n\geq 0$. Para $n<0$, observamos que

$$[g,(h^n)^\varphi]=[g,(h^{-n})^\varphi]^{-(h^n)^\varphi}=([g,h^\varphi]^{-n})^{-(h^n)^\varphi}=([g,h^\varphi]^n)^{(h^n)^\varphi}=[g,h^\varphi]^n$$

Portanto, $[g,(h^n)^\varphi]=[g,h^\varphi]^n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

(ii) É provado de modo análogo a (i). □

Proposição 10.10 *Sejam $G=P\times M$ e $H=Q\times N$ produtos diretos de seus subgrupos normais P,M e Q,N, respectivamente. Suponhamos que P,M são H-subgrupos de G e que Q,N são G-subgrupos de H, de modo que as ações de G e de H induzem ações de P sobre Q, Q sobre P, M sobre N e de N sobre M. Então*

(i) *Se Q é M-trivial e P é N-trivial*

$$\eta(G,H)=\langle P,Q^\varphi\rangle\,[P,N^\varphi]\,[M,Q^\varphi]\,\langle M,N^\varphi\rangle\,;\quad \langle P,Q^\varphi\rangle\cong\eta(P,Q)$$

(ii) *Se G e H são grupos finitos tais que $mdc(|Q|,|M|)=mdc(|P|,|N|)=1$, Q e M agem trivialmente um sobre o outro e P,N analogamente, então*

(a) $\eta(G,H)=\langle P,Q^\varphi\rangle\,\langle M,N^\varphi\rangle\,;\quad \langle P,Q^\varphi\rangle\cong\eta(P,Q);\quad \langle M,N^\varphi\rangle\cong\eta(M,N)$;

(b) $\tau(G,H)\cong\tau(P,Q)\times\tau(M,N)$.

Demonstração. (i) Pela Proposição 8.1 os subgrupos $[P,Q^\varphi]$, $[P,N^\varphi]$, $[M,Q^\varphi]$, $[M,N^\varphi]$ são todos normais em $\eta(G,H)$. Com isso,

$$\tau(G,H)=[P\times M,Q^\varphi\times N^\varphi]=[P,Q^\varphi]\,[P,N^\varphi]\,[M,Q^\varphi]\,[M,N^\varphi]$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\eta(G,H) &= \tau(G,H)GH^{\varphi}\\ &= [P,Q^{\varphi}]\,[P,N^{\varphi}]\,[M,Q^{\varphi}]\,[M,N^{\varphi}]\,(P\times M)\cdot(Q^{\varphi}\times N^{\varphi})\\ &= \langle P,Q^{\varphi}\rangle\,[P,N^{\varphi}]\,[M,Q^{\varphi}]\,\langle M,N^{\varphi}\rangle\,.\end{aligned}$$

Sejam $\alpha : P\times M \longrightarrow P$, $\beta : Q\times N \longrightarrow Q$ os epimorfismos canônicos. Uma vez que N age trivialmente sobre P, temos para todo $p\in P$, $m\in M$, $q\in Q$ e $n\in N$ que

$$\left((pm)^{(qn)}\right)\alpha = (p^{q}m^{qn})\,\alpha = p^{q} = ((pm)\alpha)^{(qn)\beta}$$

Logo α preserva as ações . Analogamente, β preserva as ações . Assim, pela Proposição 10.8 existe um epimorfismo

$$\gamma : \eta(G,H) \longrightarrow \eta(P,Q)$$

tal que $(g)\gamma = p$, $(h^{\varphi})\gamma = q^{\psi}$ se $g = pm$ com $p\in P$, $m\in M$, e $h = qn$, com $q\in Q$, $n\in N$. A restrição $\gamma_{|\langle P,Q^{\varphi}\rangle}$ de γ ao subgrupo $\langle P,Q^{\varphi}\rangle$ vai sobre $\eta(P,Q)$. Por outro lado, as inclusões $P\longrightarrow G$, $Q\longrightarrow H$ também induzem um homomorfismo $\theta : \eta(P,Q)\longrightarrow \eta(G,H)$ tal que $p\mapsto p$, $q^{\psi}\mapsto q^{\varphi}$. É claro que

$$\theta\left(\gamma_{|\langle P,Q^{\varphi}\rangle}\right) = 1_{\eta(P,Q)} \qquad e \qquad \left(\gamma_{|\langle P,Q^{\varphi}\rangle}\right)\theta = 1_{\langle P,Q^{\varphi}\rangle}$$

Portanto, $\langle P,Q^{\varphi}\rangle \cong \eta(P,Q)$.

(ii)-(a) Uma vez que $mdc(|P|\,,|N|) = 1$ e N age trivialmente sobre P temos pelo Lema anterior que $[P,N^{\varphi}] = 1$. Analogamente, $[M,Q^{\varphi}] = 1$. Agora a parte (i) implica

$$\eta(G,H) = \langle P,Q^{\varphi}\rangle\,\langle M,N^{\varphi}\rangle$$

onde $\langle P,Q^{\varphi}\rangle \cong \eta(P,Q)$. Como também M é Q-trivial e N é P-trivial temos (também) por (i)) que $\langle M,N^{\varphi}\rangle \cong \eta(M,N)$.

(b) Uma vez que $[P,N^{\varphi}] = [M,Q^{\varphi}] = 1$ temos

$$\tau(G,H) = [P,Q^{\varphi}]\,[M,N^{\varphi}]$$

Vamos verificar que isto é um produto direto. Se $t\in [P,Q^{\varphi}]\cap[M,N^{\varphi}]$, então

$$t = \prod_{i=1}^{r}[p_i,q_i^{\varphi}]^{\varepsilon_i} \qquad e \qquad t = \prod_{j=1}^{s}\left[m_j,n_j^{\varphi}\right]^{\delta j}$$

onde $p_i \in P,\ q_i \in Q,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1, \ldots, r$ e $m_j \in M,\ n_j \in N,\ \delta_j = \pm 1,\ j = 1, \ldots, s$. Desta forma

$$(t)\lambda = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{-1} p_i^{q_i}\right)^{\varepsilon_i} \in P \qquad e \qquad (t)\lambda = \prod_{j=1}^{s} \left(m_j^{-1} m_j^{n_j}\right)^{\delta_j} \in M$$

Sendo $P \cap M = \{1\}$ temos $[P, Q^{\varphi}] \cap [M, N^{\varphi}] = \{1\}$. Além disso, se $t \in [P, Q^{\varphi}]$ e $t_1 \in [M, N^{\varphi}]$, então pela Proposição 8.4 (iii)

$$[t, t_1] = [(t)\lambda, ((t_1)\mu)^{\varphi}] \in [P, N^{\varphi}] = \{1\}$$

Logo, $[[P, Q^{\varphi}], [M, N^{\varphi}]] = \{1\}$. Portanto

$$\tau(G, H) = [P, Q^{\varphi}] \times [M, N^{\varphi}]$$

e, agora, a parte (b) segue de (a). $\square$

Nosso interesse agora é obter uma decomposição de $\eta(G, H)$ e de $\tau(G, H)$ semelhante a que foi obtida no resultado anterior para o caso em que G e H são grupos nilpotentes finitos agindo nilpotentemente um sobre o outro. Para isso, precisaremos do seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [12].

Lema 10.11 *Seja p um primo. Se A é um p'−grupo de automorfismos do p-grupo finito P, então*

$$[P, A, A] = [P, A]$$

Em particular, se $[P, A, A] = \{1\}$ então $A = \{1\}$.

Sejam P um p−grupo finito e Q um p'-grupo finito. Suponhamos que seja dada uma ação de Q sobre P e que $\theta : Q \longrightarrow Aut(P)$ seja o homomorfismo representando esta ação. É claro que

$$Nuc\theta = C_Q(P) = \left\{h \in Q \mid g^h = g, \quad \forall g \in P\right\}$$

e, portanto, Q/C é um p'-grupo de automorfismos de P, onde $C = C_Q(P)$. Pelo Teorema 10.11

$$\left[P, \frac{Q}{C}, \frac{Q}{C}\right] = \left[P, \frac{Q}{C}\right]$$

Assim, se $\left[P,_n \frac{Q}{C}\right] = \{1\}$ para algum $n \geq 1$, então $\frac{Q}{C} = \{1\}$. Conseqüentemente, temos o seguinte

Lema 10.12 *Se P é um p-grupo finito e Q é um p'-grupo finito tal que a ação de Q sobre P é nilpotente então Q age trivialmente sobre P.*

Suponhamos que G e H são grupos nilpotentes finitos e que as ações de H sobre G e de G sobre H são nilpotentes. Podemos escrever G e H como

$$G = P_1 \times \ldots \times P_r \times P_{r+1} \times \ldots \times P_m\ , \qquad H = Q_1 \times \ldots \times Q_r \times Q_{r+1} \times \ldots \times Q_n \qquad (*)$$

onde P_i é o p_i-subgrupo de Sylow de G, $i = 1, 2, \ldots, m$, Q_j é o q_j-subgrupo de Sylow de H, $j = 1, 2, \ldots, n$, $p_k = q_k$ para $k = 1, 2, \ldots, r$ e $p_k \neq q_l$, $r < k \leq m$, $r < l \leq n$. É claro que cada P_i é um H-subgrupo normal de G e que todo Q_j é um G-subgrupo normal de H. Assim, as ações de G sobre H e de H sobre G induzem ações de P_i sobre Q_j e de Q_j sobre P_i, para todo i, j. Além disso, pelo lema anterior, P_i e Q_j agem trivialmente um sobre o outro sempre que $p_i \neq q_j$. Assim, usando a Proposição 10.10 (iii) e indução, obtemos

Proposição 10.13 *Sejam G e H grupos nilpotentes finitos (como em $(*)$) tais que as ações de G sobre H e de H sobre G são nilpotentes. Então*

(i) $\eta(G, H) \cong \eta(P_1, Q_1) \times \ldots \times \eta(P_r, Q_r) \times (P_{r+1} \times \ldots \times P_m) \times (Q_{r+1} \times \ldots \times Q_n)^{\varphi}$

(ii) $\tau(G, H) \cong \tau(P_1, Q_1) \times \ldots \times \tau(P_r, Q_r)$

Em particular, se $r = 0$, isto é, se $mdc(|G|, |H|) = 1$ então $\eta(G, H) \cong G \times H^{\varphi}$ e $\tau(G, H) = \{1\}$.

Vimos na seção 7 uma cota dada por Ellis e Mcdermott (Teorema 7.2) para a ordem do produto tensorial não abeliano de grupos de ordem potência de primo. Usando aquele resultado, juntamente com a última proposição acima, obtemos a seguinte

Proposição 10.14 *Sejam G e H grupos nilpotentes tais que as ações de G sobre H e de H sobre G são nilpotentes. Temos*

(i) *Se* $mdc(|G|, |H|) = 1$ *então* $|\eta(G,H)| = |G|\,|H|$ *e* $|\tau(G,H)| = 1$*;*

(ii) *Se mdc* $(|G|, |H|) = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $p_1, \dots, p_r$ *números primos distintos,* P_i *e* Q_i *são os* p_i*-subgrupos de Sylow de* G *e* H*,respectivamente, tais que* P_i *é um grupo* d_i*-generado de ordem* $p_i^{n_i}$, Q_i *é um grupo* c_i*-generado de ordem* $p_i^{m_i}$, $\left|\overline{P_i}_{\overline{Q_i}}\right| / \left|\overline{P_i}_{\overline{Q_i}} \cap \Phi(\overline{P_i})\right| = p_i^{k_i}$, $\sigma_i = \sigma|_{P_i}$ *e* $\nu_i = \nu|_{Q_i}$, $i = 1, \dots, r$, *então*

$$|G \otimes H| \leq \prod_{i=1}^{r} K_i p_i^{n_i m_i - (k_i + n_i - d_i)(m_i - c_i)}$$

e

$$|\eta(G,H)| \leq |G|\,|H| \prod_{i=1}^{r} K_i p_i^{n_i m_i - (k_i + n_i - d_i)(m_i - c_i)}$$

onde $K_i = |H_1(P_i, Nuc\nu_i)|\,|H_1(Q_i, Nuc\sigma_i)|\,|D(Nuc\sigma_i, Q_i)|\,|D(Nuc\nu_i, P_i)|$.

11 Quadrados Tensoriais não Abelianos de Grupos Solúveis Finitos

Os quadrados tensoriais não abelianos foram determinados em [5] para várias classes de grupos. Citamos, a seguir, alguns desses cálculos:

Proposição 11.1 *Se* G *é um grupo livre, então*

$$G \otimes G \cong G' \times \Gamma(G^{ab}),$$

onde Γ *é o funtor de Whitehead descrito na seção 4.*

Proposição 11.2 *Se* G *é um grupo perfeito, então* $G \otimes G$ *é o grupo de recobrimento de* G*.*

Sejam $Q_n = \langle x, y \,|\, x^n = y^2, x^y = x^{-1} \rangle$ o grupo quaterniônico de ordem $4n$ e $D_n = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^n = 1, b^a = b^{-1} \rangle$ o grupo diedral de ordem $2n$.

Proposição 11.3

$$Q_n \otimes Q_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2+k} \times \mathbb{Z}_2 & \text{se } n = 4r + k, \text{ onde } k = 0 \text{ ou } k = 2. \end{cases}$$

Proposição 11.4

$$D_n \otimes D_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n & n \text{ ímpar}, \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & n \text{ par}. \end{cases}$$

Em [24] e [10] foram encontradas cotas para a ordem do produto tensorial não abeliano de grupos de ordem potência de primo (como vimos no Corolário 6.13 e Teorema 7.2). Na seção 10 a limitação dada pelo Teorema 7.2 foi estendido para os produtos tensoriais não abelianos de grupos nilpotentes finitos agindo nilpotentemente um sobre o outro (Proposição 10.14). Nesta seção obteremos um limite para a ordem do quadrado tensorial não abeliano de um grupo solúvel finito e veremos alguns exemplos de quadrados tensoriais, cujas ordens atingem este limite.

Seja G um grupo. A conjugação em G induz ações compatíveis entre os termos da série derivada de G, de G_i sobre G_j e de G_j sobre G_i, para todo $i, j \geq 0$. Assim, o produto tensorial não abeliano $G_i \otimes G_j$ está definido para todo $i, j \geq 0$.

Lema 11.5 *Sejam G um grupo finito e $i, j \geq 0$ com $i > j$. Então*

(i) *Existe uma seqüência exata*

$$1 \longrightarrow [G_i, G_i^{\varphi}][G_{i+1}, G_j^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G_i, G_j) \longrightarrow \tau\left(G_i^{ab}, \frac{G_j}{G_i}\right) \longrightarrow 1$$

onde $[G_i, G_i^{\varphi}]$ e $[G_{i+1}, G_j^{\varphi}]$ são subgrupos de $\tau(G_i, G_i)$;

(ii) $|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i| \left| G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_i}\right]} I\left(\frac{G_j}{G_i}\right) \right| |G_{i+1} \otimes G_j|$

Demonstração. Sejam $i, j \geq 0$ com $i > j$ e definamos

$$\begin{array}{rcl} \theta : \frac{G_j}{G_i} & \longrightarrow & Aut\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right) \\ G_i h & \longmapsto & \theta_h \end{array}$$

onde θ_h é o automorfismo de $\dfrac{G_j}{G_i}$ tal que

$$(G_{i+1})\theta = G_{i+1} g^h$$

Se $h, h_1 \in G_j$ são tais que $G_i h = G_i h_1$ então $h_1 = ch$ com $c \in G_i$. Daí, para todo $g \in G_i$,

$$\begin{aligned}
(G_{i+1}g)\,\theta_{h_1} &= G_{i+1}\left(g^{h_1}\right) \\
&= G_{i+1}\left(g^{ch}\right) \\
&= G_{i+1}\left(g^h g^{-h} g^{ch}\right) \\
&= G_{i+1}\left(g^h [g,c]^h\right) \\
&= G_{i+1} g^h \\
&= (G_{i+1}g)\,\theta_h
\end{aligned}$$

Logo θ está bem definida. É claro que θ é um homomorfismo de grupos. Assim, temos uma ação de $\dfrac{G_j}{G_i}$ sobre $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ dada por

$$(G_{i+1}g)^{G_i h} = G_{i+1}\left(g^h\right)$$

para todo $g \in G_i$ e $h \in G_j$. Também, a conjugação em G induz ação trivial de $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ sobre $\dfrac{G_j}{G_i}$ uma vez que para todo $g \in G_i$ e $h \in G_j$

$$G_i(h^g) = G_i(hh^{-1}h^g) = G_i h[h,g] = G_i h$$

Como $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ é um grupo abeliano agindo trivialmente sobre $\dfrac{G_j}{G_i}$, essas ações são compatíveis. Consideremos os seguintes epimorfismos canônicos:

$$\alpha : G_i \to G_i/G_{i+1}, \qquad \beta : G_j \to G_j/G_i$$

Para todo $g \in G_i$ e $h \in G_j$

$$\left(g^h\right)\alpha = G_{i+1}\left(g^h\right) = (G_{i+1}g)^{G_i h} = (g\alpha)^{h\beta}$$

e

$$(h^g)\,\beta = G_i\,(h^g) = G_i h = (G_i h)^{G_{i+1}g} = (h\beta)^{g\alpha}$$

Logo, α e β preservam as ações. Assim, pela Proposição 10.8, existe um epimorfismo

$$\gamma : \eta(G_i, G_j) \to \eta\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}, \frac{G_j}{G_i}\right)$$

tal que $g\gamma = g\alpha$, $(h^\varphi)\gamma = (h\beta)^\psi$, $g \in G_i$, $h \in G_j$. Além disso, se γ' é a restrição de γ a $\tau(G_i, G_j)$, então a seguinte seqüência de grupos é exata

$$1 \longrightarrow [G_i, G_i^\varphi][G_{i+1}, G_j^\varphi] \xrightarrow{inc} \tau(G_i, G_j) \xrightarrow{\gamma'} \tau\left(G_i^{ab}, \frac{G_j}{G_i}\right) \longrightarrow 1$$

(ii) É fácil ver que os subgrupos $[G_i, G_i^{\varphi}]$ e $[G_{i+1}, G_j^{\varphi}]$ são imagens epimórficas de $G_i \otimes G_i$ e $G_{i+1} \otimes G_j$, respectivamente. Assim, de (i) e Proposição 8.3, temos

$$|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i|\, |G_{i+1} \otimes G_j| \left| G_i^{ab} \otimes \frac{G_j}{G_i} \right|$$

Agora como G_i^{ab} é um grupo abeliano e age trivialmente sobre G_j/G_i, a Proposição 5.8 implica $G_i^{ab} \otimes \frac{G_j}{G_i} \cong G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_i}\right]} I\left(\frac{G_j}{G_i}\right)$, provando (ii). □

Lema 11.6 *Sejam G um grupo finito e $i \geq 0$. Então*

(i) *Existe uma seqüência exata*

$$1 \longrightarrow [G_{i+1}, G_i^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G_i, G_i) \longrightarrow \tau\left(G_i^{ab}, G_i^{ab}\right) \longrightarrow 1$$

onde $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}] \leq \tau(G_i, G_i)$;

(ii) $|G_i \otimes G_i| \leq \left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right| |G_{i+1} \otimes G_i|$.

Demonstração. (i) Consideremos o epimorfismo canônico $\pi : G_i \to G_i^{ab}$. Pela Proposição 10.8, π induz um epimorfismo

$$\gamma : \eta(G_i, G_i) \to \eta\left(G_i^{ab}, G_i^{ab}\right)$$

e se γ' é a restrição de γ a (G_i, G_i), então a seguinte seqüência de grupos é exata

$$1 \longrightarrow [G_{i+1}, G_i^{\varphi}][G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G_i, G_i) \xrightarrow{\gamma'} \tau\left(G_i^{ab}, G_i^{ab}\right) \longrightarrow 1$$

Vamos mostrar que $[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \subseteq [G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$. Daí obteremos

$$[G_{i+1}, G_i^{\varphi}][G_i, G_{i+1}^{\varphi}] = [G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$$

Como G_i age sobre si mesmo por conjugação, as seguintes relações acontecem em $\eta(G_i, G_i)$ (veja Proposição 6.5)

$$[x, y^{\varphi}, z] = [x, y, z^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}, z^{\varphi}] \tag{11.1}$$

$$[x^{\varphi}, y, z] = [x^{\varphi}, y, z^{\varphi}] = [x^{\varphi}, y^{\varphi}, z] \tag{11.2}$$

Pela Proposição 1.2

$$[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] = \langle [x,[y,z]^{\varphi}]^c \mid x,y,z \in G_i\,,\ c \in G_{i+1} \rangle$$

Agora, para todo $x, y, z \in G_i$ e $c \in G_{i+1}$

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]^{\varphi}]^c &= [y^{\varphi}, z^{\varphi}, x]^{-c} \\
&= [y^{\varphi}, z, x^{\varphi}]^{-c} \qquad \text{(por (11.2))} \\
&= [[z, y^{\varphi}]^{-1}, x^{\varphi}]^{-c} \\
&= [[z^{-1}, y^{\varphi}]^{z}, x^{\varphi}]^{-c} \\
&= [z^{-1}, (y^{z})^{\varphi}, x^{\varphi}]^{-c} \\
&= [z^{-1}, y^{z}, x^{\varphi}]^{-c} \qquad \text{(por (11.1))}
\end{aligned}$$

o qual é um elemento de $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$. Assim, $[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \subseteq [G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$

(ii) Como $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$ é uma imagem epimórfica de $G_{i+1} \otimes G_i$ e $G_i^{ab} \otimes G_i^{ab} \cong G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}$ (cf. Proposição 5.6), obtemos

$$|G_i \otimes G_i| = |\tau(G_i, G_i)| \leq \left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right| |G_{i+1} \otimes G_i| \qquad \square$$

Teorema 11.7 *Se G é um grupo solúvel finito de comprimento derivado l, então*

$$\begin{aligned}
|G \otimes G| \leq & \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \prod_{i=1}^{l-1} \left(\left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right|^{2^{i-1}} \cdot \left| G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G}{G_i}\right]} I\left(\tfrac{G}{G_i}\right) \right| \right) \cdot \\
& \cdot \prod_{i=1}^{l-2} \prod_{k=i+1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_i}{G_k}\right]} I\left(\tfrac{G_i}{G_k}\right) \right|^{2^{i-1}}
\end{aligned}$$

Demonstração. Por repetidas aplicações do Lema 11.5(ii), provamos que se $i > j$ então

$$|G_i \otimes G_j| \leq \prod_{k=i}^{l-1} |G_k \otimes G_k| \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_k}\right]} I\left(\frac{G_j}{G_k}\right) \right| \tag{11.3}$$

Seja i um inteiro, $0 \leq i \leq l-1$. Pelo Lema 11.6 (ii)

$$|G_i \otimes G_i| \leq \left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right| |G_{i+1} \otimes G_i|$$

e por (11.3)

$$
\begin{aligned}
|G_i \otimes G_i| &\leq \left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right| |G_{i+1} \otimes G_{i+1}| \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \cdot \\
&\cdot \prod_{k=i+1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_i}{G_k}\right]} I\left(\frac{G_i}{G_k}\right) \right|
\end{aligned} \tag{11.4}
$$

Assim, para $i = 0$

$$
\begin{aligned}
|G \otimes G| &\leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| |G_1 \otimes G_1| \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \cdot \\
&\cdot \prod_{k=1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G}{G_k}\right]} I\left(\frac{G}{G_k}\right) \right|
\end{aligned}
$$

Agora, usando (11.4) com $i = 1$

$$
\begin{aligned}
|G \otimes G| &\leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G_1^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_1^{ab}\right| |G_2 \otimes G_2|^2 \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}|^2 \cdot \\
&\cdot \prod_{k=1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G}{G_k}\right]} I\left(\frac{G}{G_k}\right) \right| \left| \prod_{k=2}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_1}{G_k}\right]} I\left(\frac{G_1}{G_k}\right) \right| \right|
\end{aligned}
$$

Aplicando (11.4) repetidas vezes obtemos o limite desejado. □

O limite dado no resultado anterior pode ser melhorado para o caso em que G é solúvel de comprimento derivado 2.

Teorema 11.8 *Seja G um grupo metabeliano finito. Então*

$$
|G \otimes G| \ \textit{divide} \ \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| |G' \wedge G'| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})\right|
$$

onde $G' \wedge G'$ é o quadrado exterior (usual) do $\mathbb{Z}$-módulo G'. No caso particular em que $[G', G] = 1$, então

$$
|G \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right|
$$

Demonstração. Começaremos provando a segunda parte do resultado. Seja então G um grupo finito tal que $l(G) = 2$ e $[G', G] = 1$. A Proposição 5.6 dá $G' \otimes G \cong G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$. Assim, pelo Lema 11.6 (ii)

$$
|G \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes G\right| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right|
$$

Agora seja G um grupo metabeliano finito qualquer. Fazendo $i = 0$ no Lema 11.6, obtemos uma seqüência exata

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G,G) \longrightarrow \tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right) \longrightarrow 1$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G,G)$. Logo

$$|\tau(G,G)| = \left|\tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right)\right| |[G', G^{\varphi}]| \tag{11.5}$$

É claro que a correspondência $[x, g^{\varphi}] \mapsto [x, g^{\varphi}]$, $x \in G'$. $g \in G$ estende-se a um epimorfismo

$$\alpha : \tau(G', G) \longrightarrow [G', G^{\varphi}]$$

Como $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G,G)$ segue da Proposição 9.7 que

$$[x, x^{\varphi}] = 1, \quad \forall x \in G'$$

Logo, o subgrupo $S = \langle [x, x^{\varphi}] | x \in G' \rangle$ de $\tau(G', G)$ está contido no núcleo de α. Além disso, $S \trianglelefteq \tau(G', G)$. Assim, α induz um epimorfismo

$$\beta : \frac{\tau(G', G)}{S} \longrightarrow [G', G^{\varphi}]$$

e, conseqüentemente

$$|[G', G^{\varphi}]| \text{ divide } \left|\frac{\tau(G', G)}{S}\right| \tag{11.6}$$

Agora, pelo Lema 11.5 (com $i = 1$ e $j = 0$) existe uma seqüência exata

$$1 \longrightarrow [G', (G')^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G', G) \xrightarrow{\gamma'} \tau\left(G', G^{ab}\right) \longrightarrow 1$$

onde $[G', (G')^{\varphi}] \leq \tau(G', G)$ e γ' é o homomorfismo tal que $([x, g^{\varphi}])\gamma' = [x, (G'g)^{\psi}]$, para todo $x \in G'$, $g \in G$. Observamos que

$$S \subset Nuc\gamma' \quad \text{e} \quad S \subset [G', (G')^{\varphi}]$$

Logo, a seguinte seqüência é exata:

$$\frac{[G', (G')^{\varphi}]}{S} \longrightarrow \frac{\tau(G', G)}{S} \longrightarrow \tau\left(G', G^{ab}\right) \longrightarrow 1$$

e, portanto,

$$\left|\frac{\tau(G',G)}{S}\right| \text{ divide } \left|\tau\left(G',G^{ab}\right)\right|\left|\frac{[G',(G')^{\varphi}]}{S}\right| \tag{11.7}$$

onde $\dfrac{[G',(G')^{\varphi}]}{S} \leq \dfrac{\tau(G',G)}{S}$. Seja $X = \{x \otimes y | x, y \in G'\}$. É fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} \theta_1 : X &\longrightarrow \tfrac{\tau(G',G)}{S} \\ x \otimes y &\longmapsto S[x, y^{\varphi}] \end{aligned}$$

é consistente com as relações definidoras de $G' \otimes G'$. Além disso, $x \otimes x \in Nuc\theta_1$, $\forall x \in G'$. Assim, θ_1 induz um homomorfismo

$$\theta : G' \wedge G' \longrightarrow \frac{\tau(G',G)}{S}$$

tal que $Im\theta = \dfrac{[G',(G')^{\varphi}]}{S}$. Logo

$$\left|\frac{[G',(G')^{\varphi}]}{S}\right| \text{ divide } |G' \wedge G'| \tag{11.8}$$

Como $l(G) = 2$, G' é abeliano e, então, pela Proposição 5.6

$$G' \otimes G' \cong G' \otimes_{\mathbb{Z}} G'$$

Logo, o grupo $G' \wedge G'$ é o quadrado exterior (usual) do $\mathbb{Z}$-módulo G'. Agora, de 11.5, 11.6, 11.7 e 11.8

$$|\tau(G,G)| \leq \left|\tau\left(G^{ab},G^{ab}\right)\right| |G' \wedge G'| \left|\tau\left(G',G^{ab}\right)\right|$$

Usando as Proposições 8.3 e 5.8, obtemos

$$|G \otimes G| \text{ divide } \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| |G' \wedge G'| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})\right|$$

como queríamos. $\square$

Observação. Se G é um grupo solúvel finito com G' cíclico, então $G' \wedge G'$ é trivial. Daí, pelo resultado anterior,

$$|G \otimes G| \text{ divide } \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})\right|$$

Exemplo 1. Seja $G = Q_2$. Temos

$$[G', G] = 1, \quad G' \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad G^{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Logo, pelo Teorema 11.8

$$|G \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| = 2^4 \cdot 2^2 = 2^6.$$

Este limite é atingido uma vez que $Q_2 \otimes Q_2 \cong (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2$ (conforme Proposição 11.3).

Observação. Notemos que o homomorfismo $\lambda : \tau(G, G) \longrightarrow G'$, definido por $([g, h^{\varphi}])\lambda = g^{-1}g^h$ é sobrejetor. Logo, se G é um grupo finito, $|G'|$ divide $|\tau(G, G)|$. Usando esse fato e o Teorema 11.8 vamos calcular alguns quadrados tensoriais.

Exemplo 2. Seja $G = D_n = \langle a, b \,|\, a^2 = 1,\ b^n = 1,\ b^a = b^{-1} \rangle$, com n ímpar. Temos

$$G' = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_n \quad \text{e} \quad G^{ab} = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

onde $x = G'a$. Vamos determinar $G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})$. Observamos que a conjugação em G induz ação trivial de G' sobre G^{ab} e uma ação de G^{ab} sobre G' dada por

$$b^x = b^a = b^{-1}$$

Assim, um elemento $r = i1 + jx$ de $\mathbb{Z}G^{ab}$ opera (à direita) sobre o gerador de G' (que a partir de agora consideraremos um grupo aditivo) por

$$b \cdot r = b \cdot (i1 + jx) = ib + jb^x = ib - jb$$

Notemos que

$$I(G^{ab}) = \{\alpha(x-1) \,|\, \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \theta : G' \times I(G^{ab}) &\longrightarrow \mathbb{Z}_n \\ (mb, \alpha(x-1)) &\longmapsto \overline{m\alpha} \end{aligned}$$

onde $0 \leq m \leq n-1$ e $\alpha \in \mathbb{Z}$. É claro que para todo $m, m' \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$$(mb + m'b, \alpha(x-1))\theta = (mb, \alpha(x-1))\theta + (m'b, \alpha(x-1))\theta$$

e

$$(mb, \alpha(x-1) + \beta(x-1))\theta = (mb, \alpha(x-1))\theta + (mb, \beta(x-1))\theta$$

Além disso, se $r = i1 + jx$, com $i, j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (mb \cdot r, \alpha(x-1))\theta &= (mb \cdot (i1 + jx), \alpha(x-1))\theta \\ &= (\overline{imb - jmb}, \alpha(x-1))\theta \\ &= \overline{(i-j)m\alpha} \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} (mb, r \cdot \alpha(x-1))\theta &= (mb, (i\alpha - j\alpha)(x-1))\theta \\ &= \overline{m(i\alpha - j\alpha)} \\ &= \overline{m\alpha(i-j)} \end{aligned}$$

Assim,

$$(mb \cdot r, \alpha(x-1))\theta = (mb, r \cdot \alpha(x-1))\theta$$

para todos $r \in \mathbb{Z}G^{ab}$, $0 \leq m \leq n-1$ e $\alpha \in \mathbb{Z}$. Logo existe um homomorfismo

$$\theta_1 : G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab}) \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$

tal que $mb \otimes \alpha(x-1) \mapsto \overline{m\alpha}$. Agora definamos

$$\begin{aligned} \theta_2 : \mathbb{Z}_n &\longrightarrow G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab}) \\ \overline{m} &\mapsto ma \otimes (x-1) \end{aligned}$$

θ_2 está bem definida pois se m, l são tais que $\overline{m} = \overline{l}$, então $m = kn + l$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e daí

$$\begin{aligned} ma \otimes (x-1) &= (kn+l)a \otimes (x-1) \\ &= la \otimes (x-1) \end{aligned}$$

É claro que θ_2 é um homomorfismo e que $\theta\theta_2 = 1_{G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})}$ e $\theta_2\theta = 1_{\mathbb{Z}_n}$. Portanto,

$$G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab}) \cong \mathbb{Z}_n$$

Como $G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} \cong \mathbb{Z}_2$ e $G' \wedge G' = 1$ segue do Teorema 11.8 que $|\tau(G, G)|$ divide $2n$. Pelo Lema 11.6 existe uma seqüência exata

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G, G) \longrightarrow \tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right) \longrightarrow 1 \qquad (11.9)$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G,G)$. Assim, como $|\tau(G,G)|$ divide $2n$, $\tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right) \cong \mathbb{Z}_2$ e $n = |G'|$ divide $|\tau(G,G)|$ (conforme observação anterior) temos $|[G', G^{\varphi}]| = n$. Agora sendo G' cíclico, o Corolário 9.8 implica $\tau(G,G)$ abeliano. Segue então da seqüência (11.9) e do fato de $m.d.c.(n,2) = 1$ que

$$\tau(G,G) \cong [G', G^{\varphi}] \times \mathbb{Z}_2.$$

Uma vez que o homomorfismo $\lambda : \tau(G,G) \to G'$ é sobrejetor e $G' \cong \mathbb{Z}_n$, temos $[G', G^{\varphi}] \cong \mathbb{Z}_n$. Portanto,

$$G \otimes G \cong \tau(G,G) \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2.$$

conforme resultado em [5], enunciado aqui como Proposição 11.4.

Exemplo 3. Sejam $\mathbb{Z}_p = \langle x | x^p \rangle$, com p primo, $p \neq 2$ e $K = \langle a, b | a^2, b^2, [a,b] \rangle$. Suponhamos que K age sobre $\mathbb{Z}_p$ por

$$x^a = x^{-1}, \quad x^b = x^{-1} \tag{11.10}$$

Usamos esta ação para formar o produto semi-direto $G = K \rtimes \mathbb{Z}_p$. Neste caso, $G' = \mathbb{Z}_p$ e $G^{ab} \cong K$. Segue então do Corolário 9.8 que $\tau(G,G)$ é um grupo abeliano. Observamos que $G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab}) \cong \tau(G', G^{ab}) \cong \tau(\mathbb{Z}_p, K)$, com $\mathbb{Z}_p$ agindo trivialmente sobre K e a ação de K sobre $\mathbb{Z}_p$ dada por (11.10). Com isso, $\tau(\mathbb{Z}_p, K) \cong \mathbb{Z}_p$ (veja exemplo 2 da seção 5). Assim, como $G^{ab} \otimes G^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^4$ e $G' \wedge G' = 1$, o Teorema 11.8 implica que $|\tau(G,G)|$ divide $p2^4$. Pelo Lema 11.6 existe uma seqüência exata

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G,G) \longrightarrow \tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right) \longrightarrow 1 \tag{11.11}$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G,G)$ e $\tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right) \cong G^{ab} \otimes G^{ab}$. Assim, $|[G', G^{\varphi}]|$ divide p. Concluimos então de (11.11) que

$$\tau(G,G) \cong \mathbb{Z}_p \times (\mathbb{Z}_2)^4$$

uma vez que $\tau(G,G)$ é abeliano, $m.d.c.(2,p) = 1$ e $p = |G'|$ divide $|\tau(G,G)|$.

REFERÊNCIAS

[1] M. Bacon, *On the non-abelian tensor square of a nilpotente group of class 2*, a aparecer.

[2] M. Bacon e L.C. Kappe, *The non-abelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2*, Archiv der Mathematik vol. **61** (1993), 506-516.

[3] M. Bacon, L.-C. Kappe e R.F. Morse, *On the nonabelian tensor square of a 2-Engel group*, Arch. Math, (Basel) **69** (1997) 353-364.

[4] R. Brown, *Coproducts of crossed P-modules: applications to second homotopy groups*, Topology, **23** (1984), 337-345.

[5] R. Brown, D.L. Johnson and E.F. Robertson, *Some Computations of Non-Abelian Tensor Products of Groups*, J. Algebra **111** (1987), 177-202.

[6] R. Brown and J.L. Loday, *Excision homotopique en basse dimension*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **298** (1984), 353-356.

[7] R. Brown and J.L. Loday, *Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces*, Topology **26** (1987), 311-335.

[8] G. Ellis, *"Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues"*, Ph.D. Thesis, University of Wales, 1984.

[9] G. Ellis, *The nonabelian Tensor Product of Finite Groups is Finite*, J. Algebra **111** (1987), 202-205.

[10] G. Ellis and F. Leonard, *Computing Schur Multipliers and Tensor Products of Finite Groups*, Proc. Royal Irish Acad. **95A** (1995), 137-147.

[11] G. Ellis and A. McDermott, *Tensor Products of Prime-Power Groups*, J. Pure Applied Algebra, to appear.

[12] D. Gorenstein, *"Finite Groups"*, Harper & Row, New York, 1968.

[13] K.W. Gruenberg, *Two Theorems on Engel Groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **49** (1953), 377-380.

[14] D. Guin, *Cohomologie et homologie non-abelienne des groups*, C. R. Acad. Sc. Paris **301** (1985), 337-340.

[15] D.Guin, *Cohomologie non-abeliennes des groups*, J. Pure Appl. Algebra, **50** (1988), 109-138.

[16] B. Huppert, " *Endliche Gruppen I* ", Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[17] D.L. Johnson, " *Topics in the Theory of Group Presentations*", London Mathematical Socity Lecture Note Series **42**, Great Britain, 1980.

[18] S. Maclane, *"Homology"*, Springer-Verlag, Berlin e New York, 1963.

[19] W. Magnus, Karras and Solitar, *"Combinatorial Group Theory"*, Dover, New York, 1966.

[20] I.N. Nakaoka, *"Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos"*, dissertação de mestrado, IMECC-UNICAMP, (1994).

[21] D.J.S. Robinson, *"A Course in the Theory of Groups"*, Springer, New York, 1982.

[22] N.R. Rocco, *"Métodos de Lie em Teoria dos Grupos"*, Atas da 9ª Escola de Álgebra, Brasília, (1987), 129-213.

[23] N.R. Rocco, *On a Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Group*, Bol. Soc. Bras. Mat. **22** (1991), 63-79.

[24] N.R. Rocco, *A Presentation for a Crossed Embedding of Finite Solvable Groups*, Comm. in Algebra, **22(6)** (1994), 1975-1998.

[25] N.R. Rocco, *Nonabelian Tensor Products under Engelian actions: an approach via a related construction*, preprint.

[26] J.J.Rotman, *"An Introduction to Homological Algebra"*, Academic Press, New York, 1979.

[27] J.J.Rotman, *" An Introduction to the Theory of Groups"*, Springer-Verlag, New York e Berlin, 1995, 4ª edição.

[28] E. Schenkman, *"Group Theory"*, Van Nostrand, New York, 1965.

[29] S. Sidki, *On Weak Permutability between Groups*, J. Algebra **63** (1980), 186-225.

[30] J.H.C. Whitehead, *A certain exact sequence*, Ann. of Math. **52** (1950), 51-110.

[31] M. P. Visscher, *On the Nilpotency Class and Solvability Length of Nonabelian Tensor Products of Groups*, to appear.