UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Análise de uma Equação da Onda Acústica para Meios com Simetria Cilíndrica (2.5D)

Autor: RODRIGO DE SOUZA PORTUGAL

Orientador: PROF. DR. LÚCIO TUNES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos pré-requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Novembro de 1998

BIBLIOTECA CENTRAL

Análise de uma Equação da Onda Acústica para Meios com Simetria Cilíndrica (2.5D)

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Rodrigo de Souza Portugal** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de NOVEMBRO de 1998

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Portugal, Rodrigo de Souza

P838a Análise de uma equação da onda acústica para meios com simetria cilíndrica (2.5D) / Rodrigo de Souza Portugal – Campinas, [S.P.: s.n.], 1998.

Orientador: Lúcio Tunes dos Santos

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Propagação de ondas. 2. Diferenças finitas. 3. Geofísica. 4. Expansões assintóticas. I. Santos, Lúcio Tunes dos. II. Universidade Estadual de Campinas, Intituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 26 de novembro de 1998

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). LÚCIO TUNES DOS SANTOS

Prof (a). Dr (a). JÖRG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER

Prof (a). Dr (a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA

Ao meu grande avô Nelson

in memorian

Agradecimentos

Aos meu pais Vera e Paulo, por serem as referências da minha vida, ontem, hoje e sempre;

À minha esposa Denise, por seu amor, amizade e carinho que me inspiram em todas as minhas realizações;

Aos meus irmãos, Bernardo, Ana e Raquel, pelas brigas e brincadeiras que só irmãos conhecem e, sobretudo, por serem ótimos irmãos;

Ao Professor Lúcio, por sua confiança em mim (chegou a ser meu fiador), por sua paciência de fazer inveja a Jó e por sua habilidade em me orientar. Sua firmeza nas horas certas e seu padrão de qualidade certamente me fizeram crescer. Destas coisas jamais esquecerei;

Aos camaradas Biloti e Cantão, por sua longa amizade e apoio fraterno, desde a nossa graduação no período *Jurássico*. Um agradecimento especial a vocês por sempre tentarem me fazer acordar cedo, nem sempre com êxito ...;

Aos Professores Maria Amélia e Jörg pelos ótimos conselhos para a dissertação e pelo apoio em geral;

A Fátima, por ajudar a diminuir a burocracia que nos assola e por me ajudar a lembrar das datas importantes;

A Unicamp e ao IMECC, por sua estrutura e clima acadêmico motivadores;

Ao Capes e CNPq, pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos aqueles que me ajudaram um pouquinho aqui ou ali

Agradeço

Sumário

Dedicatória i

Agradecimentos iii

1 Introdução 1

1.1 Equação da Onda 2.5-Dimensional 2

2 Equações da Onda Acústica 5

2.1 Equação da Onda Tridimensional 5

2.2 Equação da Onda Bidimensional 7

2.3 Diferença Fundamental 8

3 Equação de Liner 11

3.1 Função de Green 2.5D 11

3.2 Conjectura de Liner 13

3.3 Termo da Fonte 14

4 Diferenças Finitas 16

4.1 Discretização 16

4.2 Equação da Onda 2D 17

4.3 Equação de Liner 18

4.4 Estabilidade 19

4.5 Dispersão Numérica 20

5 Teoria dos Raios 22

5.1 Aproximação Assintótica 22

5.2 Equações do Raio 24

5.3 Solução da Equação de Transporte 25
5.4 Teoria dos Raios Aplicada ao Modelo 2.5D 26
5.4.1 Equação Iconal 2.5D 27
5.4.2 Equação de Transporte 2.5D 28
5.5 Teoria do Raios Aplicada à Equação de Liner 29
5.5.1 Equação Iconal-Liner 29
5.5.2 Equação de Transporte-Liner 29
5.6 Comparação das Amplitudes: Liner × 2.5D 30
5.7 Onda Refletida 35

6 Correção da Amplitude 2D **37**
6.1 Teoria do Raios 2D 37
6.2 Correção no Domínio da Freqüência 39
6.3 Correção no Domínio do Tempo 39

7 Experimentos Numéricos **41**
7.1 Sinal da Fonte 41
7.2 Modelos 41

8 Conclusões **56**

Referências Bibliográficas **58**

A Função de Green 3D **59**

B Função de Green 2D **62**

C Dedução da Equação de Liner **65**

D Semi-Derivada no Domínio da Freqüência **67**

E Equação de Liner na Freqüência **69**

F Aproximação Assintótica **71**

G Correção da Amplitude da Equação de Liner **74**

1

Introdução

Neste trabalho, estudamos a propagação de ondas acústicas tridimensionais (3D) em um plano vertical que representa um meio especial cujas propriedades não variam na direção ortogonal ao plano.

Este problema é decorrente de um tipo de levantamento de dados muito comum na sísmica de exploração: a aquisição de dados sísmicos ao longo de uma linha na superfície da Terra. Assim, qualquer método de modelamento ou de inversão que use os dados coletados nesta linha deve ter como base alguma hipótese que acomode a restrição imposta por esta geometria de aquisição de dados. A hipótese mais simples é considerar que os eventos sísmicos ocorrem somente no plano vertical que contém a linha de levantamento de dados. Considerar esta hipótese é o mesmo que considerar que os parâmetros deste meio não variam na direção ortogonal ao plano, ou ainda que, estes parâmetros variam tão pouco nesta direção que se pode desprezar os efeitos causados por essa variação. Um meio que é independente de uma direção horizontal é de fato um meio bidimensional (2D) e do ponto de vista 3D este meio tem simetria cilíndrica.

O objetivo principal deste estudo é descrever a propagação de ondas somente no plano vertical que contém a linha sísmica. Afinal, é dele que se esperam as respostas dos experimentos realizados na linha sísmica, graças a hipótese simplificadora do problema.

Parece ser razoável que para modelar ondas acústicas neste plano basta utilizar a equação da onda 2D dentro do plano, desprezando todo o resto do espaço 3D. Entretanto este procedimento é incorreto, pois embora o plano que representa o meio seja estruturalmente 2D, o fato de fontes pontuais serem usadas no levatamento sísmico implica que as ondas emitidas são dependentes da direção ortogonal ao plano, destruindo a simetria cilíndrica do problema. A análise quantitativa (Seção 2.3) mostra que, embora a propagação aconteça completamente dentro deste plano e, portanto, a cinemática do problema seja corretamente descrita pela equação da onda bidimen-

sional, as amplitudes das ondas do meio 2D e 3D são **completamente** diferentes. A solução obtida no plano quando modelado por uma equação em duas dimensões é diferente da solução no mesmo plano quando modelado por uma equação em três dimensões.

Resumindo, o meio é 2D mas o problema é 3D. Este tipo de situação denomina-se *Problema 2.5-Dimensional (2.5D)* ou ainda *Modelo 2.5D*. Assim, apesar das propriedades do meio serem dependentes de duas variáveis, deve-se usar, em princípio, métodos tridimensionais para se determinar a propagação de ondas no Problema 2.5D.

Vale lembrar que se as fontes fossem linhas ortogonais ao plano, o problema seria puramente 2D. Entretanto, isto contraria a premissa básica de que o levantamento sísmico é realizado sobre uma linha contida no plano.

O Modelo 2.5D considerado neste trabalho tem as seguintes características: as fontes e os receptores estão sobre o eixo x, a profundidade é representada pelo eixo z. A direção sobre a qual as propriedades do meio não variam é o eixo y. A Figura 1.1 mostra um exemplo deste modelo.

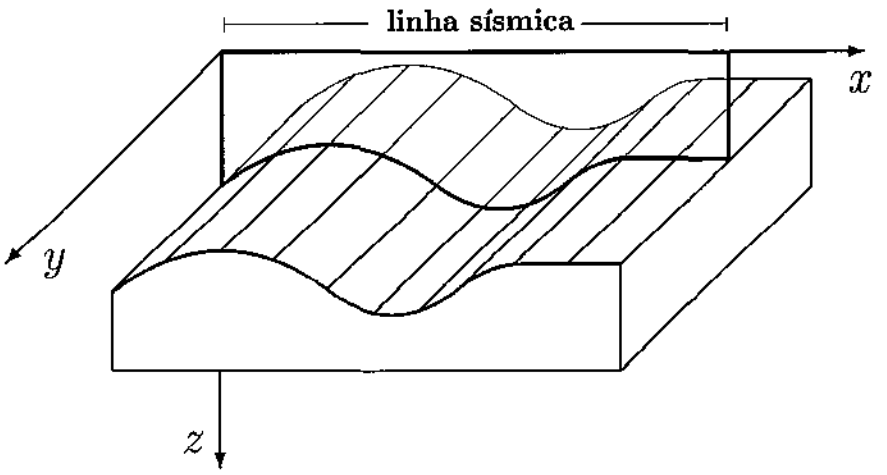

Figura 1.1: Neste meio 3D os parâmetros não dependem de y. O Modelo 2.5D é o plano que representa este meio, juntamente com a hipótese de fonte pontual sobre a linha sísmica.

1.1 Equação da Onda 2.5-Dimensional

Devido ao alto custo do modelamento 3D, há um grande interesse em se buscar métodos para os Problemas 2.5D que tenham um custo computacional de um problema 2D.

Para ilustrar somente a importância do custo computacional, sem levar em conta a qualidade da solução, pode-se considerar o problema de propagar uma onda usando o método das Diferenças Finitas com esquema explícito aplicado à equação da onda. Para a equação 3D devem ser

armazenadas três matrizes tridimensionais de dados a cada iteração, enquanto para a equação 2D devem ser armazenadas apenas três matrizes bidimensionais de dados. Desta maneira, pode-se dizer que, em termos de memória e tempo de execução, a simulação de ondas usando a equação 3D é cara em comparação à simulação com a equação 2D.

Por esta razão, já existem alguns métodos originalmente tridimensionais que são adaptados para o problema 2.5D. Por exemplo, o modelamento por Teoria dos Raios e por Kirchhoff apresentados por Bleistein (1986). Outra classe são os métodos bidimensionais que por meio de termos corretivos se ajustam ao Modelo 2.5D como por exemplo, o modelamento por Correção da Amplitude 2D (Bleistein, 1986).

Há outro método que tenta contornar a dificuldade imposta pelo Modelo 2.5D e que tem um custo bidimensional. É o conceito de uma equação diferencial parcial especial chamada Equação da Onda 2.5-Dimensional. Tal equação modela a propagação de ondas corretamente no plano que representa o Modelo 2.5D, aproveitando a parte cinemática da propagação 2D (que é correta) e corrigindo as amplitudes para 3D. Graças a este papel duplo da equação (tempos 2D e amplitudes 3D) é que vem o nome 2.5D.

Pode-se definir a equação da onda 2.5D mais precisamente pelas seguintes propriedades:

- ▷ A equação da onda 2.5D é de fato 2D, isto é, ela depende de dois parâmetros espaciais (x, z) e um temporal (t);
- ▷ A equação tem o compromisso de simular ondas tridimensionais restritas ao plano vertical que representa o meio 2D. Tais ondas seriam simplesmente a resposta 3D do meio restrita ao plano do Problema 2.5D.

Em poucas palavras:

> *"Uma Equação da Onda 2.5-Dimensional dá uma resposta* ***tridimensional*** *com custo de um modelamento* ***bidimensional.****"*

Uma equação 2.5D tem a seguinte vantagem sobre outros métodos: não é necessário considerar separadamente os eventos elementares. Ondas refletidas, refratadas, difrações, múltiplas, entre outros eventos, seriam todos levados em conta na simulação usando uma equação 2.5D, ao contrário do que ocorre com outros métodos aplicados ao Modelo 2.5D, nos quais deve-se definir a priori quais eventos serão observados. Além disso, outros métodos podem ser criados ou aperfeiçoados tomando como base a própria equação da onda 2.5D.

Deve-se ressaltar que a utilização da equação da onda 2.5D só tem sentido para problemas 2.5D. Isto é, ela não serve para modelar ondas em qualquer plano imerso no espaço.

No espírito de aproveitar a simetria do Modelo 2.5D, Liner (1991) propôs uma equação da onda 2.5-dimensional com uma característica a mais. Ele apresentou uma equação que, a princípio, cumpria as duas propriedades acima e que, além disso, era adequada à simulação por Diferenças Finitas. Entretanto, Williamson e Pratt (1995) mostraram que a equação apresentada por Liner não é exata. O objetivo deste trabalho é avaliar se esta equação é válida (ou não) do ponto de vista numérico, isto é, se a solução numérica obtida por esta equação constitui uma boa aproximação para a modelagem de ondas. Em outras palavras, vamos verificar se vale a pena utilizar esta equação para simulações numéricas mesmo sabendo que ela é analiticamente incorreta. Ressaltamos que deste ponto em diante tal equação passa a ser denominada *Equação de Liner*.

Para tanto, vamos computar a solução numérica da Equação de Liner, usando o método das Diferenças Finitas com o esquema explícito. Em seguida comparamos esta solução com duas outras soluções aproximadas. A primeira é dada pela Teoria dos Raios em Modelo 2.5D (Bleistein, 1986) e a segunda é dada pela Correção da Amplitude da solução obtida através das Diferenças Finitas aplicadas à equação da onda em duas dimensões (Bleistein, 1986).

Vale a pena lembrar que é usual considerar que o resultado obtido usando o método das Diferenças Finitas para a equação em três dimensões é a melhor possível dentre todas as soluções aproximadas, quando tratamos de modelos cuja velocidade de propagação é variável (meios não homogêneos). Entretanto, não usamos este método, pois os modelos nos quais realizamos nossas simulações numéricas são bem simplificados. Assim, consideramos que a solução dada pela Teoria do Raios é suficientemente boa para as comparações.

2

Equações da Onda Acústica

Neste capítulo são abordados as equações da onda acústica para meios com densidade constante em duas e três dimensões, bem como suas respectivas soluções fundamentais, também chamadas funções de Green, para o caso em que o meio tem velocidade constante.

As funções de Green das equações da onda 3D e 2D têm uma grande importância no estudo da propagação de ondas e também na compreensão dos próprios operadores diferenciais. A partir das funções de Green pode-se construir soluções de equações mais complexas, cujo termo da fonte é uma função qualquer. Assim, pode-se encarar cada função de Green como sendo o núcleo do operador inverso da sua respectiva equação da onda.

Além disso, para problemas ainda mais complexos (meios não homogêneos), as funções de Green servem como base para a construção de soluções aproximadas através de outros métodos de resolução. Um exemplo deste fato é a própria derivação da Equação de Liner.

As equações da Onda 3D e 2D e as expressões das suas funções de Green são mostradas nas Seções 2.1 e 2.2, respectivamente, enquanto na Seção 2.3, é ressaltada a grande diferença existente entre as expressões da função de Green 3D, restrita ao plano $y = 0$, e a função de Green 2D.

2.1 Equação da Onda Tridimensional

A equação diferencial parcial que determina a propagação de ondas acústicas em um meio 3D com velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$ e densidade constante é

$$\left[\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz}\right] u(\mathbf{x}, t) \;=\; S(\mathbf{x}, t), \tag{2.1}$$

juntamente com as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} u(\mathbf{x},0) &= 0, \\ \partial_t u(\mathbf{x},0) &= 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as coordenadas no espaço e $S(\mathbf{x}, t)$ é o termo forçante da equação. Uma solução $\phi(\mathbf{x}, t)$ é chamada de *fundamental*, quando esta solução resolve o problema (2.1)–(2.2) para $S(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$, onde $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ é a função Delta de Dirac tridimensional. A grande vantagem de se conhecer $\phi(\mathbf{x}, t)$ é que para encontrar uma solução para (2.1)–(2.2) basta computar

$$u(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) \star S(\mathbf{x}, t), \tag{2.3}$$

onde $\star$ representa a convolução em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

O problema de propagação de ondas acústicas mais comum na Geofísica é aquele que cumpre duas hipóteses: a fonte é pontual e vale o Princípio da Causalidade, isto é, não há propagação de ondas até o instante em que há uma excitação no meio dada pela fonte. Em outras palavras, este princípio diz que as ondas não propagam para o "passado". Em geral considera-se, sem perda de generalidade, que este instante é $t = 0$.

Este problema pode ser representado por uma caso particular da equação (2.1), cujo lado direito assume uma expressão mais simplificada:

$$\left[\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz}\right] u(\mathbf{x}, t) \;=\; \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(t), \tag{2.4}$$

onde $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ é a posição da fonte, t é o tempo e f é o sinal emitido pela fonte. Além da equação (2.4), as seguintes condições iniciais, que representam a o Princípio da Causalidade, são

$$\begin{cases} u(\mathbf{x},t) &= 0, \;\; t \leq 0, \\ \partial_t u(\mathbf{x},0) &= 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

No caso em que $S(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(t)$, utiliza-se o resultado (2.3) chegando-se a

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \phi(\mathbf{x}, t) \star [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(t)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t')\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_s) f(t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s, t - t') f(t') \\ &= \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s, t) * f(t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $*$ representa a convolução apenas no tempo.

Para o caso particular em que $c(\mathbf{x}) = c_0$ (constante), é possível obter uma expressão para a solução fundamental (veja Apêndice A):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(t - \|\mathbf{x}\|/c_0)}{4\pi\|\mathbf{x}\|}, \tag{2.7}$$

onde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Esta solução recebe o nome de *função de Green* para a equação da onda acústica com velocidade constante em três dimensões. Aplicando este resultado em (2.6), a solução do problema (2.4)-(2.5) é

$$u(\mathbf{x}, t) = G_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s, t) * f(t) = \frac{f(t - \tau_3)}{4\pi R}, \tag{2.8}$$

onde $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ e $\tau_3 = R/c_0$.

Vamos tentar dar um interpretação física para (2.8). Na equação (2.4), podemos interpretar $f(t)$ como sendo um som de curta duração l de intensidade unitária que foi emitido em $t = 0$ por um alto falante localizado em $\mathbf{x}_s$. Fixando um observador a uma distância R de $\mathbf{x}_s$, pela equação (2.8) podemos presumir que antes de $t = \tau_3$ e depois de $t = \tau_3 + l$ ele não ouvirá qualquer som. Entretanto, no tempo $t = \tau_3$ até $t = \tau_3 + l$ ele ouvirá o mesmo sinal emitido com uma "intensidade" de $1/4\pi R$. Em outras palavras, a solução possui simetria radial, seu suporte é a região do espaço que satisfaz $t = \tau_3$ e quanto mais o tempo passa, este suporte, que se chama frente de onda, afasta-se cada vez mais da fonte.

2.2 Equação da Onda Bidimensional

No caso da equação da onda bidimensional, o vetor posição tem apenas duas dimensões $\mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{R}^2$. Mesmo assim, a equação e as condições iniciais são semelhantes a (2.4)-(2.5), isto é

$$\left[\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] u(\mathbf{x}, t) \;=\; \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(t), \tag{2.9}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) &= 0, \;\; t \leq 0 \quad \text{(Causalidade);} \\ u_t(\mathbf{x}, 0) &= 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Uma observação interessante é que o modelo representado pela equação em duas dimensões com fonte pontual pode ser interpretado como sendo um problema tridimensional cuja fonte é uma linha infinita paralela ao eixo y.

A grande distinção entre as equações bi e tridimensional fica evidente pela expressão da solução fundamental para $c(\mathbf{x}) = c_0$, constante. A função de Green $G_2(\mathbf{x}, t)$ para a equação da onda acústica com velocidade do meio constante em duas dimensões é (confira a dedução no Apêndice B)

$$G_2(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t - \|\mathbf{x}\|/c_0)}{2\pi\sqrt{t^2 - (\|\mathbf{x}\|/c_0)^2}}, \tag{2.11}$$

onde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + z^2}$ e H é a função de Heaviside, i.e.,

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Como antes, a solução da equação (2.9)–(2.10), para velocidade constante, é representada pela convolução da função de Green 2D com o lado direito da equação

$$u(\mathbf{x}, t) = G_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s, t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \frac{H(t - t' - \tau_2)}{2\pi\sqrt{(t - t')^2 - \tau_2^2}} f(t'), \tag{2.13}$$

onde $\tau_2 = r/c_0$ e $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2}$.

Vamos tentar, novamente, dar uma interpretação física para (2.13). Na equação (2.9), podemos interpretar $f(t) = \delta(t)$ como sendo uma bomba que explode na posição da fonte em $t = 0$. Posicionando um observador a uma distância r da fonte, pela fórmula (2.11) podemos observar que antes de $t = \tau_2$ ele não ouvirá qualquer som. Por outro lado, logo depois do tempo $t = \tau_2$ ele ouvirá som da bomba para sempre, com volume decaindo conforme o tempo passa, indicando que o sinal emitido é distorcido na propagação. Neste caso a solução também possui simetria radial, mas o suporte desta solução é a região do espaço que satisfaz $t \geq \tau_2$. Com o tempo passando, o suporte torna-se cada vez maior, com sua borda, que é a frente de onda, afastando-se da fonte.

2.3 Diferença Fundamental

Existe uma grande diferença entre as funções de Green 2D e 3D. Basta notar que no plano $y = 0$ as duas funções têm expressões completamente diferentes

$$G_3(x, 0, z, t) = \frac{\delta(t - r/c_0)}{4\pi r} \neq \frac{H(t - r/c_0)}{2\pi\sqrt{t^2 - (r/c_0)^2}} = G_2(x, z, t), \tag{2.14}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + z^2}$. É esta diferença que nos impede de utilizar a equação 2D para modelar o que acontece num plano imerso numa região do espaço. Na realidade, podemos usar a equação

da onda 2D para computar tempos de trânsito, desde que sejamos cautelosos, na medida em que sabemos que as amplitudes estão erradas.

Na Figura 2.1 é mostrado um exemplo de como as propagações 2D e 3D são diferentes. Para construir este exemplo, um receptor é posicionado no plano $y = 0$ a 20 metros de distância da fonte pontual, isto é $r = 20$ m. Consideramos o meio homogêneo com $c_0 = 1$ m/ms. O sinal da fonte e as soluções 3D e 2D são, respectivamente, dadas por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq l, \\ 0, & \text{c.c.}; \end{cases} \tag{2.15a}$$

$$u_3(x, 0, z, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi r}, & \tau \leq t \leq \tau + l, \\ 0, & \text{c.c.}; \end{cases} \tag{2.15b}$$

$$u_2(x, z, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log\left[t/\tau + \sqrt{(t/\tau)^2 - 1}\right], & \tau \leq t \leq \tau + l, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log\left[\dfrac{t + \sqrt{t^2 - \tau^2}}{t - l - \sqrt{(t-l)^2 - \tau^2}}\right], & t \geq \tau + l, \\ 0, & \text{c.c.}; \end{cases} \tag{2.15c}$$

onde $\tau = 20$ ms e $l = 2$ ms. Na Figura 2.1.a é mostrado o sinal emitido pela fonte, enquanto nas Figuras 2.1.b e c são mostradas as respostas 3D e 2D, respectivamente, percebidas pelo receptor. A partir da observação destas figuras, três considerações podem ser feitas:

- ▷ Os tempos de trânsito das propagações 3D e 2D são iguais;
- ▷ Para ondas diretas, a forma do sinal é preservado somente na propagação 3D, enquanto na propagação 2D ele é distorcido;
- ▷ A amplitude do sinal recebido na propagação 2D é muito maior do que na propagação 3D.

Uma observação final: como as funções de Green estão associadas a operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes, é fácil ver que uma translação no sistema de coordenadas não altera as fórmulas (2.7) e (2.11), bastando-se trocar as definições de R e r. Portanto, deste ponto em diante assumimos que as funções de Green estão associadas a problemas cujas fontes pontuais podem estar em qualquer lugar, isto é

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|/c_0)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|} \tag{2.16}$$

e

$$G_2(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|/c_0)}{2\pi\sqrt{t^2 - (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|/c_0)^2}}. \tag{2.17}$$

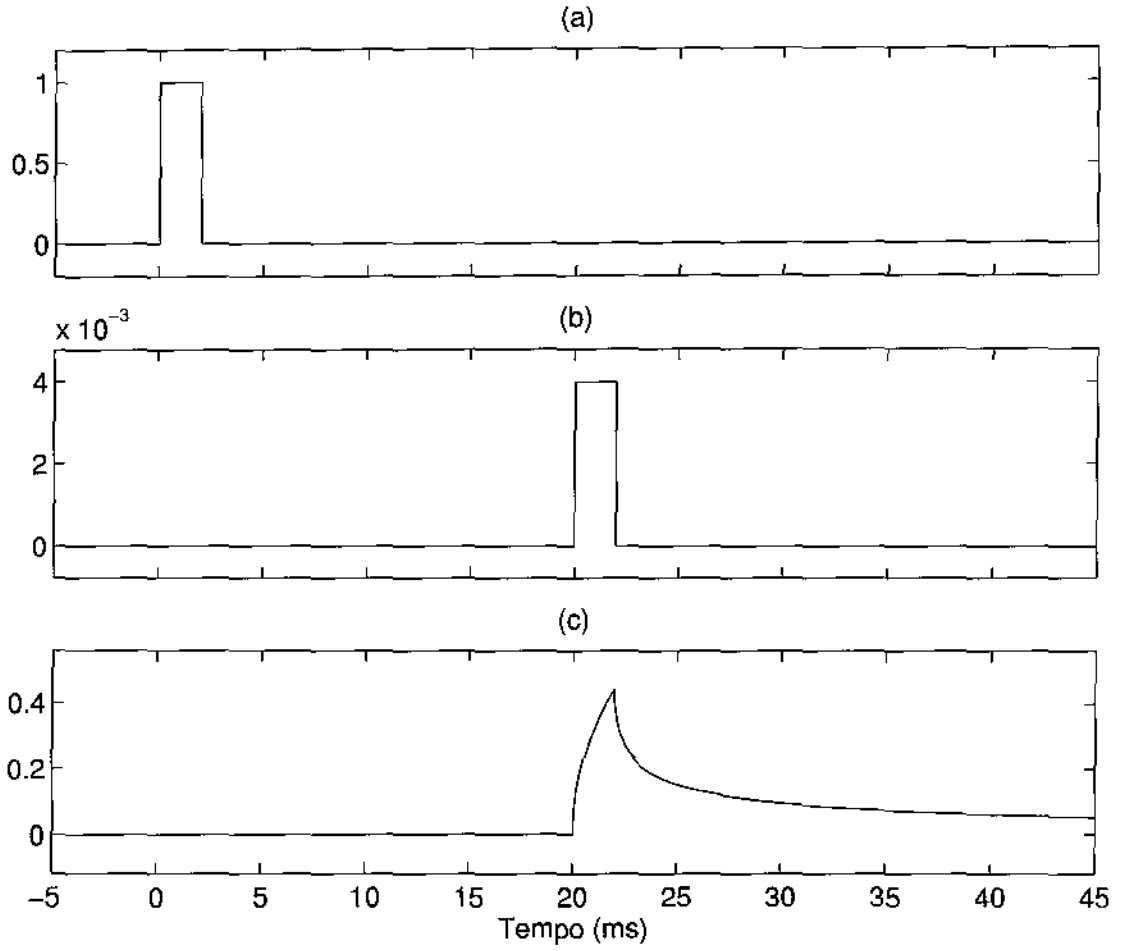

Figura 2.1: Ondas no plano $y = 0$ registradas por um receptor a 20 m da fonte, em um meio com velocidade $c_0 = 1$ m/ms. (a) Sinal da fonte; (b) solução 3D; (c) solução 2D.

3

Equação de Liner

Neste capítulo é abordada a Equação de Liner, bem como sua validade e sua dedução a partir dos conceitos expostos no Capítulo 2. Além disso, é mostrado como lidar com o problema da falta de uma fonte nesta equação (lado direito da equação), de modo que a equação fique adequada para uma modelagem por Diferenças Finitas. Por fim, é discutido o principal problema da Equação de Liner: a função de Green 2.5D não é de fato uma função de Green (solução fundamental) para a Equação de Liner.

A dedução da Equação de Liner é feita considerando-se duas hipóteses razoáveis: o meio é homogêneo em uma região suficientemente próxima da fonte e o tempo de duração do sinal da fonte é pequeno em comparação ao tempo de simulação. Com estas hipóteses, chega-se analiticamente a uma equação que é válida para a função de Green 3D restrita ao plano.

Esta equação, que é bidimensional, serve como ponto de partida para a dedução da Equação de Liner. Liner extrapola, por meio de uma conjectura, a validade desta equação para uma região distante da fonte, considerando uma equação mais geral que seria válida para meios não-homogêneos.

Pode-se adiantar que a parte frágil de toda esta dedução é justamente o fato de se derivar um caso geral (velocidade variável) a partir de um caso particular (velocidade constante).

3.1 Função de Green 2.5D

Como a Equação de Liner é uma equação em duas dimensões que tem o propósito de modelar a propagação de ondas tridimensionais em um plano ($y = 0$) que representa o Modelo 2.5D, isto leva a crer que a Equação de Liner tem alguma conexão com a equação da onda em duas dimensões. Assim é natural desconfiar que a Equação de Liner seja uma equação da onda 2D com termos adicionais que corrijam a solução.

Para chegarmos à uma equação de fato, definimos a função de Green 2.5D, que nada mais é do que a função de Green 3D para a equação da onda com velocidade constante (c_0) restrita ao plano $y = 0$, isto é

$$G_{2.5}(x, z, t) := G_3(x, y = 0, z, t) = \frac{\delta(t - r/c_0)}{4\pi r}. \tag{3.1}$$

onde $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2}$. A Figura 3.1 ilustra o suporte da função de Green 2.5D, onde a casca esférica representa a frente de onda (ou suporte) da função de Green 3D.

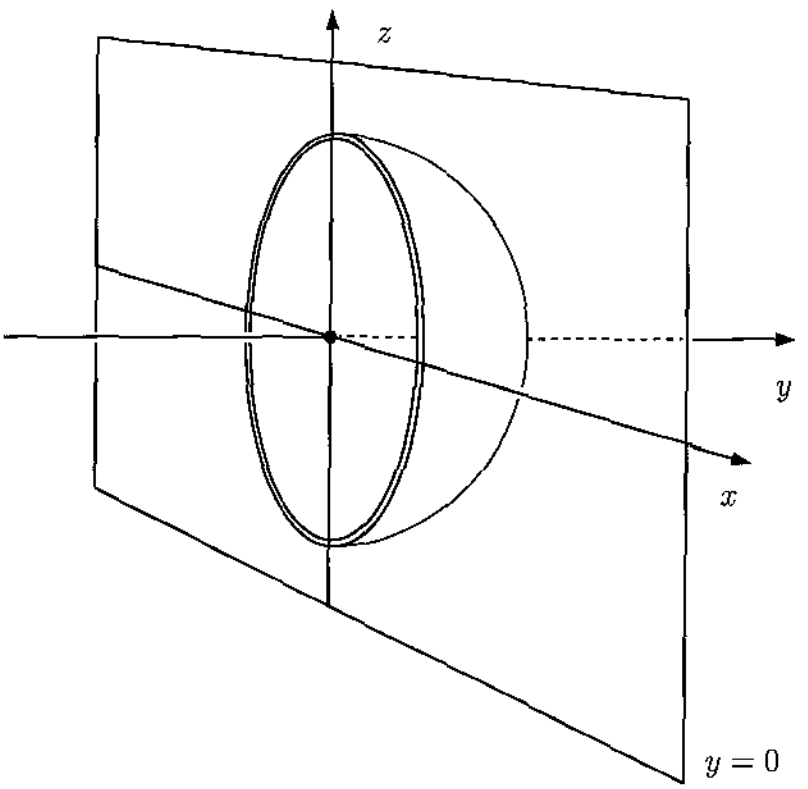

Figura 3.1: A função de Green 2.5D é simplesmente a função de Green 3D restrita ao plano $y = 0$.

Claramente, $G_{2.5}$ é solução da equação tridimensional, pois é um caso particular da função de Green 3D. Por outro lado, seria ótimo se encontrássemos uma equação bidimensional tal que $G_{2.5}$ fosse sua solução, pois deste modo obteríamos uma equação 2D que modelaria a resposta 3D do meio e o problema estaria resolvido, pelo menos no caso de velocidade constante.

Como procuramos uma equação que esteja relacionada de algum modo com a equação da onda 2D, aplicamos o operador diferencial da onda bidimensional em $G_{2.5}$ e guardamos o resultado em L,

$$L(x, z, t) = \left[\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] G_{2.5}(x, z, t). \tag{3.2}$$

Podemos mostrar (veja Apêndice C) que para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_s$,

$$L(x,z,t) = -\left[\frac{1}{c_0 r}\partial_t + \frac{1}{r^2}\right] G_{2.5}(x,z,t), \tag{3.3}$$

Assim, substituindo $L(x,z,t)$ em (3.2), obtemos

$$\left[\frac{1}{c_0^2}\left(\partial_{tt} + \frac{c_0}{r}\partial_t + \frac{c_0^2}{r^2}\right) - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] G_{2.5}(x,z,t) = 0, \tag{3.4}$$

que de fato é uma equação da onda 2D com dois termos adicionais. Observando que o suporte da função $G_{2.5}(x,z,t)$ é a região do plano que satisfaz

$$r = c_0 t, \tag{3.5}$$

pode-se substituir a expressão acima na equação (3.4), obtendo-se

$$\left[\frac{1}{c_0^2}\left(\partial_{tt} + \frac{1}{t}\partial_t + \frac{1}{t^2}\right) - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] G_{2.5}(x,z,t) = 0. \tag{3.6}$$

3.2 Conjectura de Liner

Embora a equação (3.6) seja exata, ela tem duas características importantes: é obtida assumindo-se que a velocidade do meio é constante (c_0) e é válida somente para a função de Green 2.5D. Estas características vão contra o nosso objetivo que é conseguir uma equação para um meio não homogêneo (um meio cujo campo de velocidades é variável) que possa ser simulada por Diferenças Finitas.

Para alcançar tal objetivo, devemos modificar a equação (3.6), usando as seguintes hipóteses

- ▷ A velocidade $c(\mathbf{x})$ varia pouco para $\mathbf{x}$ suficientemente próximo da fonte (origem), de modo que $c(\mathbf{x}) = c(x_s, z_s)$ para $\mathbf{x}$ numa vizinhança da fonte.
- ▷ O tempo de simulação é muito maior que a duração do sinal da fonte, de modo que $t \approx \tau_2$, onde τ_2 é o tempo de trânsito (em um meio homogêneo: $\tau_2 = r/c_0$). Em outras palavras, o suporte da frente da onda propagada é bem estreito.

A primeira hipótese implica que o meio é homogêneo suficientemente perto da fonte, de modo que podemos utilizar a equação (3.6) com $c_0 = c_s \equiv c(x_s, z_s)$ para simulações nesta região específica, obtendo

$$\left[\frac{1}{c_s^2}\left(\partial_{tt} + \frac{c_0}{r}\partial_t + \frac{c_0^2}{r^2}\right) - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] u(x,z,t) = 0, \tag{3.7}$$

Neste caso, podemos observar que os coeficientes dos termos adicionais são

$$c_0/r = 1/\tau_2 \quad \text{e} \quad c_0^2/r^2 = 1/\tau_2^2. \tag{3.8}$$

Assim, usando a segunda hipótese, substituímos $1/\tau_2$ por $1/t$, obtendo

$$\left[\frac{1}{c_s^2}\left(\partial_{tt} + \frac{1}{t}\partial_t + \frac{1}{t^2}\right) - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] u(x,z,t) = 0. \tag{3.9}$$

A conjectura de Liner (1991) é considerar que a equação obtida até então passa a ser válida para uma região longe da fonte, onde o meio é não homogêneo. Portanto, extrapolando o resultado da equação acima para além da região perto da fonte, chegamos a uma expressão mais geral para a equação (3.9)

$$\left[\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\left(\partial_{tt} + \frac{1}{t}\partial_t + \frac{1}{t^2}\right) - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] u(x,z,t) = 0 \tag{3.10}$$

que chamamos de *Equação de Liner.*

3.3 Termo da Fonte

Cabe observar que a equação (3.10) não possui qualquer termo de fonte. Isto representa outro problema a ser resolvido, pois para uma simulação completa por Diferenças Finitas uma fonte é necessária.

Não podemos usar a fonte bidimensional usual $\delta(x)\delta(z)f(t)$, pois esta fonte representa uma fonte em linha no meio 3D, contrariando a nossa intenção que é registrar a resposta do meio à perturbação causada por uma fonte pontual. Por outro lado, não podemos usar a fonte tridimensional usual $\delta(x)\delta(y)\delta(z)f(t)$, pois simplesmente a variável y não existe na Equação de Liner.

Uma forma de solucionar este problema é usar novamente primeira parte da conjectura de Liner que diz que o meio é homogêneo suficientemente perto da fonte pontual. Assim, podemos considerar que, por um pequeno período de tempo contado a partir do zero, a propagação acontece em um meio homogêneo, cuja solução é representada pela convolução de $f(t)$ com a função de Green 3D. Depois deste instante, podemos tomar esta solução (que pode ser calculada analiticamente) como condição inicial para a Equação de Liner. Este procedimento é adequado aos nossos propósitos, pois pode ser facilmente traduzido em termos de Diferenças Finitas.

Resumindo, temos duas etapas: Para $0 < t \leq t_0$ computamos a condição inicial

$$u(x,z,t) = G_3(x,0,z,t) * f(t) = \frac{f(t - r/c_s)}{4\pi r}, \tag{3.11}$$

onde $c_s = c(x_s, 0, z_s)$, e para $t > t_0$

$$\left[\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\left(\partial_{tt} + \frac{1}{t}\partial_t + \frac{1}{t^2}\right) - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] u(x, z, t) = 0. \tag{3.12}$$

onde t_0 deve ser da ordem da duração do pulso. Se tomamos t_0 muito grande, estaremos extrapolando em demasiado a hipótese da homogeneidade ao redor da fonte. Por outro lado, se escolhemos t_0 muito pequeno, não há tempo suficiente para o pulso ser espalhado.

Outra forma de se lidar com a falta do termo da fonte é deduzida por Williamson e Pratt (1995). Neste caso, a fonte bidimensional $\delta(\mathbf{x})\delta(t)$ é corrigida por meio de um filtro, de modo semelhante ao método da Correção da Amplitude. Entretanto, os próprios autores reconhecem que não há um filtro que seja adequado à simulação por Diferenças Finitas e, portanto, não implementamos este método neste trabalho.

4

Diferenças Finitas

Neste capítulo é apresentado o método das Diferenças Finitas com o esquema explícito para a equação da onda bidimensional e para a Equação de Liner.

A solução dada pela modelagem da equação da onda tridimensional (ou bidimensional) por Diferenças Finitas é considerada como sendo a melhor dentre todas as soluções aproximadas. A solução é tão boa quanto mais refinadas forem as malhas espacial e temporal. Outra vantagem é que este método considera todos os eventos ao mesmo tempo, pois não faz qualquer hipótese adicional sobre a solução. A desvantagem é que é um método caro, sobretudo para meios tridimensionais, e é mais adequado para configurações de tiro único, isto é, uma fonte pontual e vários receptores. Quando se deseja produzir um sismograma cuja configuração de aquisição é de afastamento comum (um número fixo de pares fonte-receptores, cujo afastamento é constante) deve-se simular a equação da onda tantas vezes quantas forem o número de pares fonte-receptores.

Neste trabalho a solução dada pelas Diferenças Finitas aplicadas à equação bidimensional é usada como dado de entrada para o método da Correção da Amplitude 2D.

No final deste capítulo, são abordados as condições de estabilidade para os esquemas de Diferenças Finitas e a dispersão numérica causada pela malha espacial e como solucionar este problema.

4.1 Discretização

Para nossos experimentos numéricos, utilizamos o método das Diferenças Finitas com o esquema explícito e uma discretização uniforme no espaço e no tempo.

As derivadas de primeira e segunda ordem no tempo são aproximadas, respectivamente, pelas seguintes diferenças:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x,z,t+\Delta t) - u(x,z,t-\Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(x,z,t+\Delta t) - 2u(x,z,t) + u(x,z,t-\Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2). \tag{4.2}$$

Para as derivadas de segunda ordem no espaço usamos a seguinte aproximação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{-u(p+2\Delta p,t) + 16u(p+\Delta p,t) - 30u(p,t) + 16u(p-\Delta p,t) - u(p-2\Delta p,t)}{12\,\Delta p^2} + O(\Delta p^4), \tag{4.3}$$

onde p faz o papel de x ou z. Deve-se destacar que as discretizações das derivadas são todas obtidas usando-se combinações de aproximações de Taylor em torno do ponto (x,z,t).

Além disso, deve-se discretizar o domínio onde ocorre a simulação de propagação de ondas. Para um domínio bidimensional, duas hipóteses são consideradas: (a) uma caixa $[x_a, x_b] \times [z_a, z_b] \subset \mathbb{R}^2$, que contenha a região de interesse e que seja suficientemente grande, a fim de evitar as reflexões indesejáveis das bordas, e (b) uma janela de tempo $[0,T] \subset \mathbb{R}$. Estes conjuntos são discretizados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x_i &= x_a + (i-1)\Delta x, & 1 \le i \le L, \quad & \Delta x = (x_b - x_a)/(L-1); \\ z_i &= z_a + (j-1)\Delta z, & 1 \le j \le M, \quad & \Delta z = (z_b - z_a)/(M-1); \\ t_k &= (k-1)\Delta t, & 1 \le k \le N, \quad & \Delta t = T/(N-1). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por último, pode-se definir as sguintes quantidades

$$u_{ijk} = u(x_i, z_j, t_k), \quad f_k = f(t_k) \quad \text{e} \quad c_{ij} = c(x_i, z_j). \tag{4.5}$$

Para domínios tridimensionais a discretização é claramente semelhante às definições acima, com a diferença de que é acrescentada uma dimensão adicional.

4.2 Equação da Onda 2D

Nesta seção apresentamos um esquema numérico para a equação da onda 2D, lembrando que a solução numérica dada por este esquema é uma parte necessária no método de modelamento Correção da Amplitude 2D, descrito no Capíulo 6.

Para a equação da onda bidimensional, usando as aproximações (4.1)–(4.3) e as definições (4.4)–(4.5), obtém-se a seguinte equação discretizada

$$\begin{aligned}\frac{u_{ijk+1}-2u_{ijk}+u_{ijk-1}}{c_{ij}^2\Delta t^2} &= \frac{-u_{i+2jk}+16u_{i+1jk}-30u_{ijk}+16u_{i-1jk}-u_{i-2jk}}{12\Delta x^2} \\ &+ \frac{-u_{ij+2k}+16u_{ij+1k}-30u_{ijk}+16u_{ij-1k}-u_{ij-2k}}{12\Delta z^2} \\ &+ a_{ijk}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde a_{ijk} é a aproximação do termo $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)f(t)$:

$$\delta(x_i - x_{i_s}, z_j - z_{j_s})f(t_k) \approx \frac{\delta_{ii_s}\delta_{jj_s}}{\Delta x \Delta z} f_k = a_{ijk}, \tag{4.7}$$

onde (x_{i_s}, z_{j_s}) é a posição da fonte na malha e δ_{pq} é o delta de Kroneker: $\delta_{pq} = 1$, se $p = q$ e $\delta_{pq} = 0$, caso contrário.

Considerando a malha espacial regular, i.e., tomando $\Delta x = \Delta z = \Delta$, chega-se ao esquema explícito para a equação da onda 2D

$$\begin{aligned} u_{ijk+1} &= \left(2-5\lambda_{ij}^2\right)u_{ijk} - u_{ijk-1} + c_{ij}^2\Delta t^2 a_{ijk} \\ &- \frac{\lambda_{ij}^2}{12}\left(u_{i+2jk}+u_{i-2jk}+u_{ij+2k}+u_{ij-2k}\right) \\ &+ \frac{16\lambda_{ij}^2}{12}\left(u_{i+1jk}+u_{i-1jk}+u_{ij+1k}+u_{ij-1k}\right), \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde $\lambda_{ij} = c_{ij}\Delta t/\Delta$ é o número de Courant. Pelas condições (2.10) deduzimos as seguintes condições iniciais para o esquema (4.8): $u_{ij1} = u_{ij2} = 0$, para todo $i = 1, \ldots, L$ e $j = 1, \ldots, M$.

4.3 Equação de Liner

No caso da Equação de Liner, o Laplaciano é discretizado da maneira usual, usando (4.3), e a aproximação da parte que envolve derivadas temporais é

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c(x_i,z_j)^2}\left[\partial_{tt}+\frac{1}{t}\partial_t+\frac{1}{t^2}\right]u(x_i,z_j,t_k) \\ &\approx \frac{1}{c_{ij}^2}\left(\frac{u_{ijk+1}-2u_{ijk}+u_{ijk-1}}{\Delta t^2}+\frac{u_{ijk+1}-u_{ijk-1}}{2(k-1)\Delta t^2}+\frac{u_{ijk}}{(k-1)^2\Delta t^2}\right) \\ &= \frac{1}{c_{ij}^2\Delta t^2}[b_1\,u_{ijk+1}+b_2\,u_{ijk}+b_3\,u_{ijk-1}]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde

$$b_1 = \frac{(2k-1)}{(2k-2)}; \qquad b_2 = \frac{(1-2(k-1)^2)}{(k-1)^2} \qquad \text{e} \qquad b_3 = \frac{(2k-3)}{(2k-2)}. \tag{4.10}$$

Portanto, a Equação de Liner discretizada é

$$\begin{aligned}\frac{b_1\, u_{ijk+1} + b_2\, u_{ijk} + b_3\, u_{ijk-1}}{c_{ij}^2 \Delta t^2} &= \frac{-u_{i+2jk} + 16u_{i+1jk} - 30u_{ijk} + 16u_{i-1jk} - u_{i-2jk}}{12\Delta x^2} \\ &+ \frac{-u_{ij+2k} + 16u_{ij+1k} - 30u_{ijk} + 16u_{ij-1k} - u_{ij-2k}}{12\Delta z^2},\end{aligned} \tag{4.11}$$

Tomando $\Delta x = \Delta z = \Delta$ e reagrupando os termos, o seguinte esquema explícito para a Equação de Liner é obtido:

$$\begin{aligned}u_{ijk+1} &= \frac{1}{b_1}\Big[\left(-b_2 - 4\lambda_{ij}^2\right) u_{ijk} - b_3\, u_{ijk-1} \\ &- \frac{\lambda_{ij}^2}{12}\left(u_{i+2jk} + u_{i-2jk} + u_{ij+2k} + u_{ij-2k}\right) \\ &+ \frac{16\lambda_{ij}^2}{12}\left(u_{i+1jk} + u_{i-1jk} + u_{ij+1k} + u_{ij-1k}\right)\Big].\end{aligned} \tag{4.12}$$

Em virtude do que foi discutido a respeito da condição inicial para a Equação de Liner, as condições iniciais para o esquema (4.12) podem ser tomadas como sendo:

$$u_{ij1} = \frac{f\left(n_0\Delta t - r_{ij}/c_{i_s j_s}\right)}{4\pi r_{ij}} \quad \text{e} \tag{4.13a}$$

$$u_{ij2} = \frac{f\left((n_0+1)\Delta t - r_{ij}/c_{i_s j_s}\right)}{4\pi r_{ij}}, \tag{4.13b}$$

para todo $i = 1, \ldots, L$ e $j = 1, \ldots, M$, onde $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_{i_s})^2 + (z_j - z_{j_s})^2}$. O número interiro n_0 é escolhido de modo que $n_0\Delta t$ seja da ordem da duração do pulso da fonte.

4.4 Estabilidade

Como estamos usando esquemas explícitos para as equações da onda bidimensional e de Liner, devemos impor alguma condição em Δt e Δ para que esses esquemas tenham estabilidade numérica.

Definindo $c_{\text{máx}} = \text{máx}\{c_{ij} \mid i = 1, \ldots, L;\ j = 1, \ldots, M\}$, no caso da equação da onda bidimensional, usamos a condição dada por Alford *et al.* (1974)

$$\frac{\Delta t\, c_{\text{máx}}}{\Delta} < \sqrt{\frac{3}{8}}\,, \tag{4.14}$$

e para a Equação de Liner, exigimos que (Bording & Liner, 1993)

$$\frac{\Delta t\, c_{\text{máx}}}{\Delta} < \frac{1}{2}. \tag{4.15}$$

4.5 Dispersão Numérica

As condições apresentadas na seção anterior garantem a convergência e estabilidade dos esquemas (4.8) e (4.12) na norma Euclidiana. Entretanto, o erro da aproximação nesta norma não consegue detectar oscilações na solução aproximada. Isto representa uma dificuldade quando estas oscilações crescem em magnitude, pois podem atrapalhar a interpretação dos resultados.

O papel intromissor destas oscilações recebe o nome de dispersão numérica. Em geral, podemos diminuir o efeito da dispersão tomando a seguinte medida: logo depois de determinarmos Δt e Δ que satisfaçam a condição de estabilidade, fazemos Δ e Δt diminuirem na mesma proporção, de modo que a condição de estabilidade continue valendo.

A Figura 4.1 mostra um exemplo no qual a dispersão acaba comprometendo a qualidade na interpretação dos dados. Na Figura 4.1.a podemos identificar dois eventos: a onda direta (com o pico em aproximadamente 90ms) e a onda refletida (com o pico em aproximadamente em 240ms). No entanto, nas Figuras 4.1.b e 4.1.c conseguimos identificar com clareza somente a onda direta, pois a onda refletida fica mascarada pela dispersão devida à malha espacial. Para construir este exemplo, usamos o esquema (4.8) com três valores diferentes para Δ e um valor para Δt de modo a satisfazer a condição de estabilidade nos três casos. Neste caso observamos que, quanto maior Δ, isto é, quanto mais grosseira é a malha, maior a dispersão.

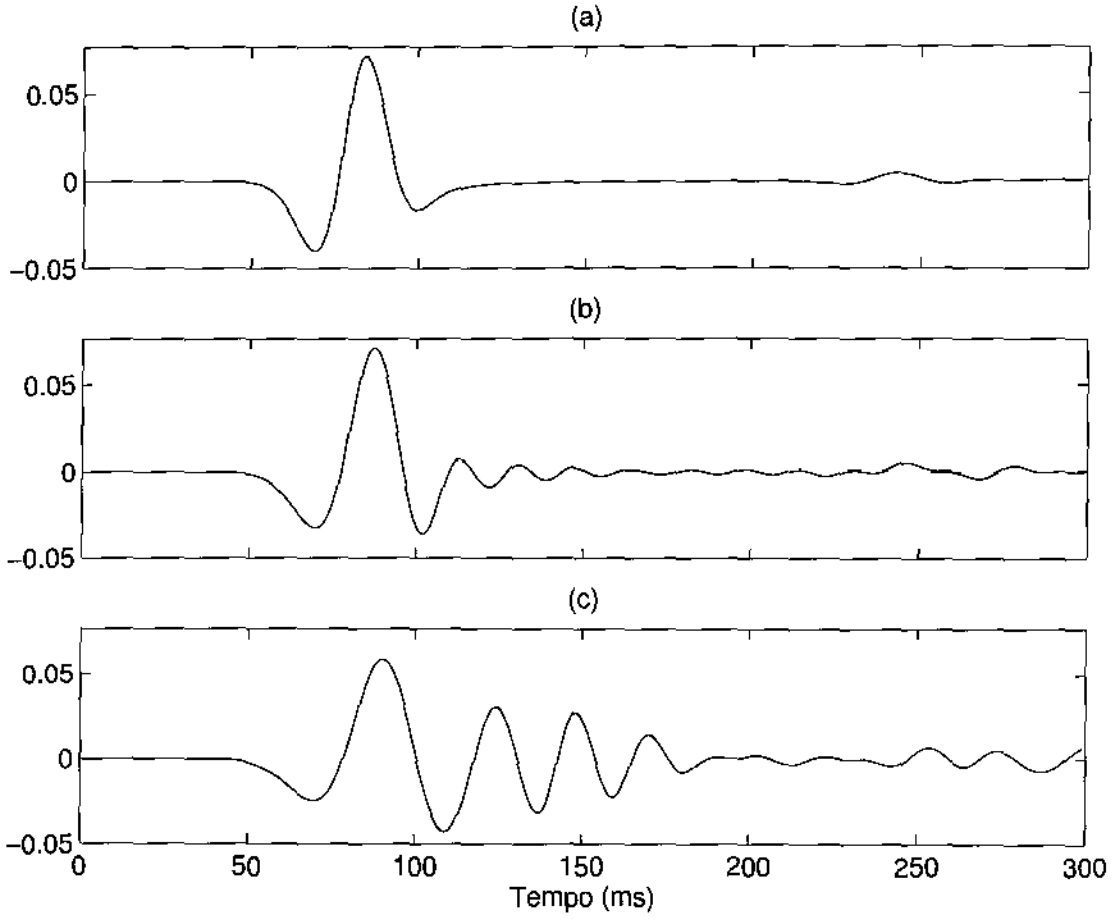

Figura 4.1: Ondas direta e refletida (bidimensionais). Solução numérica usando o esquema (4.8) com: (a) $\Delta = 5$m, (b) $\Delta = 10$m e (c) $\Delta = 15$m. Em todos os casos $\Delta t = 1$ ms.

5

Teoria dos Raios

Neste capítulo apresentamos alguns resultados relativos à Teoria dos Raios de ordem zero, também chamada de *Óptica Geométrica*.

Este método é principalmente utilizado para modelamento, isto é, para a construção de sismogramas sintéticos. Além disso, esta teoria auxilia na derivação dos métodos de inversão de dados que, por hipótese, assumem um comportamento assintótico na freqüência.

Basicamente, vamos utilizar a Teoria dos Raios para alcançar quatro resultados. Mostramos que as equações Iconal-2.5D e Iconal-Liner são iguais, provando que a parte cinemática da equação de Liner está correta. Em seguida, estimamos a diferença entre as amplitudes obtidas pela Equação de Transporte 2.5D e Equação de Transporte da Equação de Liner, para o caso especial em que a velocidade depende linearmente da profundidade. Por último, utilizamos a Teoria dos Raios para obter duas aproximações assintóticas: função de Green para meios não homogêneos e função de Green para o problema da onda refletida em uma interface suave.

Um quinto resultado é própria derivação do método da Correção da Amplitude 2D, o qual é abordado no Capítulo 6.

5.1 Aproximação Assintótica

Em primeiro lugar, como as aproximações assintóticas são realizadas na freqüência, é preferível se trabalhar com a equação da onda reduzida, também chamada de *Equação de Helmholtz*,

$$\left[\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\right] \hat{u}(\mathbf{x}, w) = 0, \tag{5.1}$$

que é obtida pela Transformada de Fourier no tempo da equação da onda 3D para $\mathbf{x} \neq 0$.

A idéia principal da Teoria dos Raios é assumir, por hipótese, que a solução do problema

acima tem uma expressão assintótica do tipo

$$\hat{g}(\mathbf{x},\omega) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-i\omega)^{-k} A_k(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}. \tag{5.2}$$

No caso da Óptica Geométrica, considera-se apenas o primeiro termo da série assintótica, isto é

$$\hat{g}(\mathbf{x},\omega) \approx A(\mathbf{x}) e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}, \tag{5.3}$$

onde, por economia de notação, $A \equiv A_0$.

Quando a solução tentativa (5.3) é inserida na Equação de Helmholtz, obtém-se uma equação polinomial de segundo grau em ω (veja Apêndice F). Igualando os coeficientes deste polinômio a zero, três equações são obtidas

$$\omega^0: \quad \Delta A(\mathbf{x}) = 0, \tag{5.4a}$$

$$\omega^1: \quad 2\,\nabla A(\mathbf{x}) \cdot \nabla\tau(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x})\,\Delta\tau(\mathbf{x}) = 0, \tag{5.4b}$$

$$\omega^2: \quad \|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}, \tag{5.4c}$$

onde ∇ é o *Gradiente* e Δ é o *Laplaciano*, que são definidos por

$$\nabla f = (\partial_x f\,,\, \partial_y f\,,\, \partial_z f) \tag{5.5a}$$

$$\Delta f = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f. \tag{5.5b}$$

Assume-se que a equação (5.4a) é satisfeita. As equações (5.4b) e (5.4c) chamam-se respectivamente *Equação de Transporte* e *Equação Iconal*.

A Equação Iconal traz informação somente sobre tempos de trânsito τ. Por outro lado, a Equação de Transporte relaciona os tempos de trânsito τ com as amplitudes A, mostrando como estas quantidades são transportadas, como diz o próprio nome da equação. Assim, o procedimento natural é buscar uma solução da Equação Iconal em primeiro lugar, para em seguida substituir esta solução na Equação de Transporte. Em poucas palavras, a Equação Iconal resolve a parte cinemática do problema enquanto a Equação de Transporte soluciona a parte dinâmica.

Em geral, utiliza-se o método das características para se encontrar soluções da Equação Iconal. As características, ou raios, são curvas que cobrem toda uma região do espaço, de modo que ao longo cada raio os tempos de trânsito ficam determinados. Por outro lado, para cada

raio, estes tempos de trânsito podem ser inseridos na Equação de Transporte, determinando-se, portanto, a amplitude correspondente a cada tempo de trânsito.

Resumindo, para se computar a solução assintótica do problema de propagação de ondas em uma região do espaço, procede-se do seguinte modo: cobre-se densamente tal região com um feixe de raios que são regidos pelas equações características, derivadas da Equação Iconal; em seguida, ao longo de cada raio, computa-se o tempo de trânsito e determina-se, através da Equação de Transporte, a amplitude correspondente a cada tempo de trânsito.

5.2 Equações do Raio

Como a Equação Iconal só depende de $\tau(\mathbf{x})$, busca-se primeiro a sua solução, usando o método das características. Basicamente o método das características é uma mudança de variáveis,

$$(x, y, z) \longleftrightarrow (\sigma, \theta, \phi), \tag{5.6}$$

de maneira que quando se insere estas novas variáveis no problema, a Equação Iconal, que é uma equação diferencial parcial (EDP) não-linear de primeira ordem, é transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO), cujo parâmetro é σ. As outras duas variáveis, θ e ϕ, são responsáveis pela parametrização de uma superfície no espaço, onde, por hipótese, a solução do problema é conhecida.

Utilizando este método (Bleistein, 1984), obtém-se as Equações do Raio (ou equações características)

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p} \tag{5.7a}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\right) \tag{5.7b}$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \tag{5.7c}$$

$$\mathbf{p} = \nabla\tau \tag{5.7d}$$

As Equações do Raio envolvem sete quantidades a serem determinadas e por isso são necessárias sete condições iniciais. Como o problema considerado é a determinação de um campo de ondas devido a uma fonte pontual, é dessa informação que se obtém as seguintes condições iniciais:

$$\mathbf{x}(0) = (x_s, y_s, z_s) \tag{5.8a}$$

$$\mathbf{p}(0) = \frac{1}{c_s}(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta) \tag{5.8b}$$

$$\tau(0) = 0 \tag{5.8c}$$

onde $c_s = c(\mathbf{x}_s)$. Os parâmetros ϕ e θ parametrizam a superfície inicial, que neste caso se reduz a uma esfera infinitesimal cujo centro é $\mathbf{x}_s$.

Das equações (5.7a) e (5.7d), pode-se tirar uma importante conclusão: o vetor tangente ao caminho que o raio percorre e o gradiente do tempo de trânsito são sempre colineares. Daí, conclui-se que os raios interceptam ortogonalmente as superfícies de nível do tempo de trânsito. Em outras palavras, os raios são ortogonais às frentes de onda.

5.3 Solução da Equação de Transporte

Ao introduzir as informações das Equações do Raio na Equação de Transporte, ela é transformada em uma EDO dependente do parâmetro σ. Mais precisamente, usando as equações do raio (5.7a) e (5.7d), pode-se reescrever a Equação de Transporte como

$$2\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\nabla A + A\Delta\tau = 0. \tag{5.9}$$

Multiplicando a equação acima por A e usando a regra da cadeia, chega-se a

$$\frac{d}{d\sigma}\left(A^2\right) = -A^2\Delta\tau. \tag{5.10}$$

Entretanto, como é mostrado por Bleistein (1984),

$$\Delta\tau = \frac{d}{d\sigma}\left(\log J_3\right), \tag{5.11}$$

onde J_3 é o módulo do Jacobiano da transformação de variáveis, isto é, $J_3 = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\sigma,\theta,\phi)}\right|$. Reescrevendo a EDO, vem

$$\frac{d}{d\sigma}\log(A^2) = -\frac{d}{d\sigma}\log(J_3) \tag{5.12}$$

e integrando em σ, chega-se a

$$A(\sigma) = A(\sigma_0)\sqrt{\frac{J_3(\sigma_0)}{J_3(\sigma)}}. \tag{5.13}$$

Para a definição completa da fórmula acima, são necessárias duas condições iniciais $A(\sigma_0)$ e $J_3(\sigma_0)$, quando $\sigma_0 \to 0$. Estas condições iniciais devem ser obtidas das próprias condições (5.8a)–(5.8c). No entanto, no caso da fonte pontual, $J_3(0) = 0$. Para se evitar esta singularidade, o

procedimento consiste em aproximar as condições iniciais obtidas sob a hipótese de fonte pontual, considerando uma esfera infinitesimal com centro na fonte $\mathbf{x}_s$, tal que no interior desta esfera o meio é homogêneo com $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}_s)$. Nesta esfera, aproxima-se $\mathbf{p}(\sigma)$ por seu valor inicial (5.8b). Deste modo, nesta região

$$\mathbf{x} = \frac{\sigma_0}{c_s}(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta) + \mathbf{x}_s, \tag{5.14}$$

onde σ_0 é pequeno o suficiente para que $\mathbf{x}$ pertença ao interior da esfera. Assim, pode-se computar o Jacobiano

$$J_3(\sigma_0) \approx \frac{\sigma_0^2 \sin\theta}{c_s^3}. \tag{5.15}$$

Por outro lado, pode-se tomar $A(\sigma_0)$ como sendo a amplitude da função de Green 3D no interior desta esfera, tomando o cuidado de considerar a função de Green 3D na freqüência, dada pela equação (A.15). Isto é,

$$A(\sigma_0) \approx \frac{1}{4\pi R}, \tag{5.16}$$

onde $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|$. No entanto, usando a equação (5.14),

$$R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\| = \sigma_0/c_s, \tag{5.17}$$

e, portanto,

$$A(\sigma_0) \approx \frac{1}{4\pi\sigma_0/c_s}. \tag{5.18}$$

Inserindo as expressões (5.15) e (5.18) na fórmula (5.13), chega-se à solução da Equação de Transporte ao longo de um raio parametrizado por σ

$$A(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\sin\theta}{c_s J_3(\sigma)}}. \tag{5.19}$$

5.4 Teoria dos Raios Aplicada ao Modelo 2.5D

No caso do Modelo 2.5D, a velocidade não depende de y, isto é,

$$c \equiv c(x, z). \tag{5.20}$$

Além disso, deseja-se obter somente a solução restrita ao plano $y = 0$. Graças a estas duas condições simplificadoras, podemos particularizar as equações Iconal e de Transporte para o caso 2.5D.

5.4.1 Equação Iconal 2.5D

Como a velocidade não depende de y, pode-se analisar facilmente a equação para a quantidade p_2. Da equação (5.7b) vem

$$\frac{dp_2}{d\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c(x,z)^2}\right) = 0, \tag{5.21}$$

então, usando a condição inicial (5.8b),

$$p_2(\sigma) = p_2(0) = \frac{\sin\phi\sin\theta}{c(x_s, z_s)}. \tag{5.22}$$

Por outro lado, utilizando (5.7a), pode-se computar a quantidade y

$$y(\sigma) = \frac{\sigma\sin\phi\sin\theta}{c(x_s, z_s)}. \tag{5.23}$$

Comparando as duas equações acima, conclui-se que

$$y(\sigma) = \sigma p_2(\sigma). \tag{5.24}$$

Além disso, como se deseja analisar as ondas confinadas ao plano $y = 0$, deve-se tomar ϕ tal que $\sin\phi = 0$, implicando que $\cos\phi = 1$.

Eliminando y e p_2 das Equações do Raio e suas condições iniciais, chega-se às Equações do Raio 2.5D e suas condições iniciais:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}(\sigma), \tag{5.25a}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\right), \tag{5.25b}$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}, \tag{5.25c}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_s, \tag{5.25d}$$

$$\mathbf{p}(0) = \frac{1}{c(\mathbf{x}_s)}(\sin\theta, \cos\theta), \tag{5.25e}$$

$$\tau(0) = 0, \tag{5.25f}$$

onde os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ e o operador ∇ são todos bidimensionais. Pode-se observar que as Equações do Raio 2.5D são simplesmente as Equações do Raio 2D, mostrando que a parte cinemática da equação da onda 2D aplicada ao Modelo 2.5D é correta.

5.4.2 Equação de Transporte 2.5D

Reescrevendo a equação de transporte,

$$2\,\nabla A \cdot \nabla\tau + \partial_y A\,\partial_y\tau + A\,\Delta\tau + A\,\partial_y\left(\partial_y\tau\right) = 0, \tag{5.26}$$

onde o gradiente ∇ e o Laplaciano Δ devem ser entendidos como operadores em duas dimensões. Procedendo como antes, usando as Equações do Raio 2.5D, a Equação de Transporte é transformada em uma EDO dependente de σ. Lembrando que

$$y = \sigma p_2 = \sigma\partial_y\tau, \tag{5.27}$$

conclui-se que

$$\partial_y\left(\partial_y\tau\right) = \partial_y\left(\frac{y}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}. \tag{5.28}$$

Portanto, para $y = 0$, a Equação de Transporte 2.5D é

$$2\,\nabla A_{2.5} \cdot \nabla\tau + A_{2.5}\,\Delta\tau + \frac{A_{2.5}}{\sigma} = 0, \tag{5.29}$$

onde $A_{2.5} = A(x, 0, z)$. Prosseguindo com o desenvolvimento da equação, obtém-se

$$\frac{dA_{2.5}^2}{d\sigma} = -A_{2.5}^2\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{d}{d\sigma}\log J_2(\sigma)\right) = -A_{2.5}^2\left(\frac{d}{d\sigma}\log(\sigma J_2(\sigma))\right), \tag{5.30}$$

onde $J_2 = \left|\det\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(\sigma,\theta)}\right|$ e foi usado o resultado (Bleistein, 1984)

$$\Delta\tau = \frac{d}{d\sigma}\log J_2(\sigma). \tag{5.31}$$

Integrando a equação diferencial em σ, chega-se ao resultado

$$A_{2.5}(\sigma) = A_{2.5}(\sigma_0)\sqrt{\frac{\sigma_0 J_2(\sigma_0)}{\sigma J_2(\sigma)}}\,. \tag{5.32}$$

Considerando as seguintes condições iniciais para $A_{2.5}(\sigma_0)$ e $J_2(\sigma_0)$, obtidas a partir das condições (5.15) e (5.18)

$$A_{2.5}(\sigma_0) = \frac{1}{4\pi\sigma_0/c_s}, \tag{5.33a}$$

$$J_2(\sigma_0) = \frac{\sigma_0}{c_s^2}, \tag{5.33b}$$

obtém-se a expressão para amplitude ao longo do raio parametrizado por σ

$$A_{2.5}(\sigma) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\sigma J_2(\sigma)}}. \tag{5.34}$$

5.5 Teoria do Raios Aplicada à Equação de Liner

O procedimento com a Equação de Liner é o mesmo que é aplicado à equação da onda 3D. Isto é, deve-se inserir a solução tentativa (5.3) na Equação de Liner na freqüência, para em seguida considerar separadamente o coeficiente de cada potência de ω. Primeiramente, deve-se aplicar a Transformada de Fourier no tempo na Equação de Liner, para obter a Equação de Liner na freqüência (veja Apêndice E):

$$c(\mathbf{x})^2 \left[\partial_{xx} + \partial_{zz} + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\right] \partial_{\omega\omega}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) + 3\omega\partial_\omega\hat{u}(\mathbf{x},\omega) + 2\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = 0. \tag{5.35}$$

Em seguida, ao inserir a solução tentiva (5.3) na equação acima e agrupando os termos, obtém-se uma equação polinomial de segundo grau em ω (Apêndice F). Igualando os coeficientes de cada potência a zero, são obtidas três equações diferenciais ordinárias:

$$\omega^0: \quad A_{\mathrm{L}}(\mathbf{x})\,\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 - \tau(\mathbf{x})\,\Delta A_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}) = 0, \tag{5.36a}$$

$$\omega^1: \quad 2\,\nabla A_{\mathrm{L}}(\mathbf{x})\cdot\nabla\tau(\mathbf{x}) + A_{\mathrm{L}}(\mathbf{x})\,\Delta\tau(\mathbf{x}) + \frac{A_{\mathrm{L}}(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})^2\tau(\mathbf{x})} = 0, \tag{5.36b}$$

$$\omega^2: \quad \|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}, \tag{5.36c}$$

onde os operadores ∇ e Δ são bidimensionais. Assume-se que equação devida à potência de ordem zero é satisfeita. Chamamos as outras duas equações, (5.36b) e (5.36c), de *Equação de Transporte-Liner* e *Equação Iconal-Liner*, respectivamente.

5.5.1 Equação Iconal-Liner

Uma primeira conclusão pode ser tomada: as equações Iconal 2.5D e Iconal-Liner são iguais. Vale lembrar que ambas equações se reduzem à própria Equação Iconal 2D, mostrando que tanto as equações da onda 3D e 2D e Equação de Liner produzem os mesmos tempos de trânsito no Modelo 2.5D, ao menos para eventos de alta freqüência. Pode-se concluir, portanto que a parte cinemática da Equação de Liner é correta.

5.5.2 Equação de Transporte-Liner

Como antes, a Equação de Transporte-Liner é reescrita como uma EDO cujo parâmetro é σ. Para isto, as próprias Equações do Raio 2.5D (5.25a)–(5.25f) podem ser usadas, uma vez que as equações Iconal 2.5D e Iconal-Liner são iguais.

Usando a equação (5.25a) na expressão (5.36b), obtém-se

$$\frac{dA_{\mathrm{L}}^2}{d\sigma} = -\frac{A_{\mathrm{L}}^2}{c^2\tau} - A_{\mathrm{L}}^2 \frac{d}{d\sigma}\log(J_2) \tag{5.37}$$

onde foi usado que $\Delta\tau = \frac{d}{d\sigma}\log(J_2)$. Dividindo por A_{L}^2, segue que

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\log A_{\mathrm{L}}^2\right) = -\frac{1}{c^2\tau} - \frac{d}{d\sigma}\log(J_2). \tag{5.38}$$

Por outro lado, lembrando que $\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{c^2}$ (equação (5.25c)), chega-se a

$$\frac{1}{c^2\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\log(\tau). \tag{5.39}$$

Portanto,

$$\frac{d}{d\sigma}\log\left(A_{\mathrm{L}}^2\right) = -\frac{d}{d\sigma}\log\left(\tau J_2\right). \tag{5.40}$$

Integrando em σ, obtém-se

$$\log\left[\frac{A_{\mathrm{L}}(\sigma)^2}{A_{\mathrm{L}}(\sigma_0)^2}\right] = \log\left[\frac{\tau(\sigma_0)J_2(\sigma_0)}{\tau(\sigma)J_2(\sigma)}\right], \tag{5.41}$$

ou melhor,

$$A_{\mathrm{L}}(\sigma) = A_{\mathrm{L}}(\sigma_0)\sqrt{\frac{\tau(\sigma_0)J_2(\sigma_0)}{\tau(\sigma)J_2(\sigma)}}. \tag{5.42}$$

Considerando as seguintes condições iniciais para $A_{\mathrm{L}}(\sigma_0)$ e $J_2(\sigma_0)$:

$$A_{\mathrm{L}}(\sigma_0) = \frac{1}{4\pi\sigma_0/c_s} \quad \text{e} \quad J_2(\sigma_0) = \frac{\sigma_0}{c_s^2}, \tag{5.43}$$

chega-se à formula da amplitude ao longo do raio parametrizado por σ:

$$A_{\mathrm{L}}(\sigma) = \frac{1}{4\pi\sqrt{c_s^2\tau(\sigma)J_2(\sigma)}}. \tag{5.44}$$

5.6 Comparação das Amplitudes: Liner × 2.5D

Comparando as expressões das amplitudes da Teoria dos Raios 2.5D e Teoria dos Raios aplicada à Equação de Liner, dadas pelas fórmulas (5.34) e (5.44), respectivamente, chega-se a

$$\frac{A_{2.5}}{A_{\mathrm{L}}} = \sqrt{\frac{c_s^2\tau}{\sigma}}. \tag{5.45}$$

Definindo esta razão como α, pode-se reescrever a equação acima

$$A_{2.5} = \alpha A_{\mathrm{L}}, \tag{5.46}$$

onde $\alpha = \sqrt{c_s^2\tau/\sigma}$. Esta equação mostra como corrigir a amplitude obtida pela Equação de Liner para a amplitude 2.5D, de modo semelhante ao método da Correção da Amplitude 2D (Capítulo 6). Na prática, com uma solução numérica da Equação de Liner e uma boa estimativa para o parâmetro σ pode-se corrigir a solução de Liner para a solução 2.5D usando a equação (5.46). Há uma vantagem desta correção sobre a Correção da Amplitude 2D: não necessita da correção da forma do pulso, operação que, na Correção de Amplitude 2D, é executada pela Semi-derivada.

Vale observar que há uma outra maneira de se chegar ao fator corretivo α, onde não é necessário o conhecimento prévio das fórmulas das amplitudes $A_{2.5}$ e A_{L}. Este desenvolvimento é feito no Apêndice G.

O fator α dá a medida de quanto a Equação de Liner é precisa. Para meios homogêneos conclui-se que $\alpha = 1$, implicando que $A_{2.5}$ e A_{L} são iguais e mostrando que neste caso Equação de Liner dá a resposta correta no sentido da aproximação assintótica de ordem zero. Por outro lado, pode-se notar que o fator $c_s^2\tau$ é uma aproximação para σ, isto é

$$\sigma = \int_0^\tau c^2\, d\tau' \approx c_s^2\tau. \tag{5.47}$$

Portanto, para meios não homogêneos a aproximação de σ por $c_s^2\tau$ já não é tão boa, implicando em uma perda na qualidade da solução da Equação de Liner.

Acreditamos que a Equação de Liner possa ser aperfeiçoada, usando-se melhores aproximações para σ. Um exemplo, não trabalhado neste texto, pode ser considerar a velocidade "*root mean square*" (RMS)

$$c_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\sum c_i^2 \Delta t_i}{\sum \Delta t_i}} \tag{5.48}$$

em lugar da velocidade c_s na Equação de Transporte de Liner (5.36b). Neste caso, assume-se que a velocidade do meio depende somente da profundidade e aproxima-se o meio por camadas horizontais. A velocidade RMS é uma média ponderada das velocidades c_i destas camadas. O peso de cada c_i nesta média é Δt_i, que é o tempo para um raio vertical atravessar a camada i.

Para melhor exemplificar o erro cometido pela solução da Equação de Liner, pode-se considerar a velocidade dependente apenas da profundidade, isto é, $c(\mathbf{x}) \equiv c(z)$. Neste caso, as expressões para σ e τ são (Bleistein, 1986)

$$\sigma = \int_{z_s}^{z} dz' \left(\frac{1}{c(z')^2} - \frac{\sin^2\theta}{c(z_s)^2} \right)^{-1/2}, \tag{5.49a}$$

$$\tau = \int_{z_s}^{z} dz' \frac{1}{c(z')^2}\left(\frac{1}{c(z')^2} - \frac{\sin^2\theta}{c(z_s)^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.49b}$$

No caso em que a velocidade do meio varia linearmente com a profundidade

$$c(\mathbf{x}) \equiv c(z) = c_0 + a\,z, \tag{5.50}$$

as integrais acima podem ser computadas, chegando-se a

$$\sigma = \frac{\cos\theta - \sqrt{1 - p^2[c_0 + a(z - z_s)]^2}}{ap^2}, \tag{5.51a}$$

$$\tau = \frac{1}{a}\log\left[\frac{(1+\cos\theta)[c_0 + a(z - z_s)]}{c_0 + c_0\sqrt{1 - p^2[c_0 + a(z - z_s)]^2}}\right], \tag{5.51b}$$

onde $p = \sin\theta/c_0$.

Considerando $z_s = 0$ m, $z = 400$ m e $c_0 = 1$ m/ms, pode-se computar o erro relativo entre A_{L} e $A_{2.5}$, onde $a \in [-0.0005, 0.002]$ e $\theta \in [0, \pi/2]$, usando as fórmulas acima. Este erro é mostrado na Figura 5.1, onde a região vazia indica a não existência do raio para o par (a, θ).

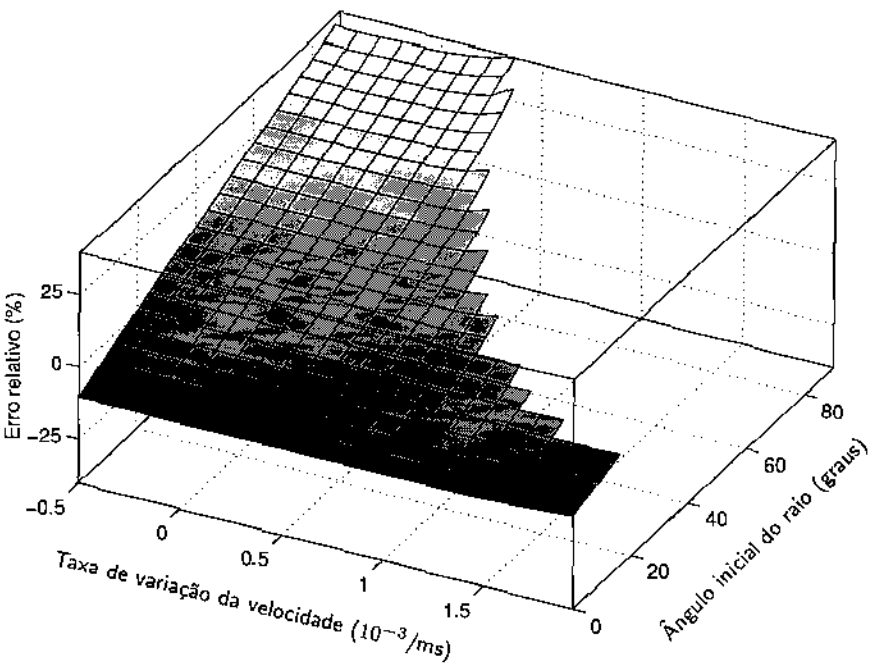

Figura 5.1: Erro relativo entre as amplitudes A_{L} e $A_{2.5}$, quando a velocidade do meio varia linearmente com a profundidade, com uma taxa linear a entre -0.0005 ms^{-1} e 0.002 ms^{-1} e com o ângulo inicial do raio θ entre 0 e 90 graus.

Para o caso especial em que $\sin\theta = 0$, isto é, quando o raio está na direção vertical, e tomando $z_s = 0$, as expressões para σ e τ são

$$\sigma = c_0 z + a\frac{z^2}{2}, \tag{5.52a}$$

$$\tau = \frac{1}{a}\log\left[\frac{c_0 + az}{c_0}\right]. \tag{5.52b}$$

Usando as fórmulas acima, podemos analisar previamente o erro cometido pela Equação de Liner com o auxílio das Figuras 5.2 e 5.3. A Figura 5.2 mostra o erro relativo entre as amplitudes A_{L} e $A_{2.5}$, no caso do raio vertical ($\theta = 0$). Neste caso, são desenhadas quatro curvas dependentes da taxa da variação da velocidade a, onde cada curva corresponde a uma profundidade final do raio. A Figura 5.3 também mostra o erro relativo entre as amplitudes A_{L} e $A_{2.5}$, no caso do raio vertical ($\theta = 0$). Entretanto, neste caso, as quatro curvas desenhadas são dependentes da profundidade final do raio, onde cada curva corresponde a uma taxa de variação da velocidade.

As curvas da Figura 5.2 se cortam em $a = 0$ e neste ponto os erros relativos são nulos, pois aí a razão $c_s^2\tau/\sigma$ é igual a um, indicando que a aproximação é ótima. Podemos observar que, quando a taxa linear a é positiva, a amplitude computada pela Equação de Liner é maior do que a amplitude computada pela Teoria dos Raios 2.5D, pois a aproximação $c_s^2\tau$ subestima o parâmetro σ, implicando que $\alpha < 1$. Por outro lado, quando a taxa linear é negativa, a amplitude da Equação de Liner é menor do que a amplitude da Teoria dos Raios 2.5D, pois a aproximação $c_s^2\tau$ superestima o parâmetro σ, fazendo com que $\alpha > 1$.

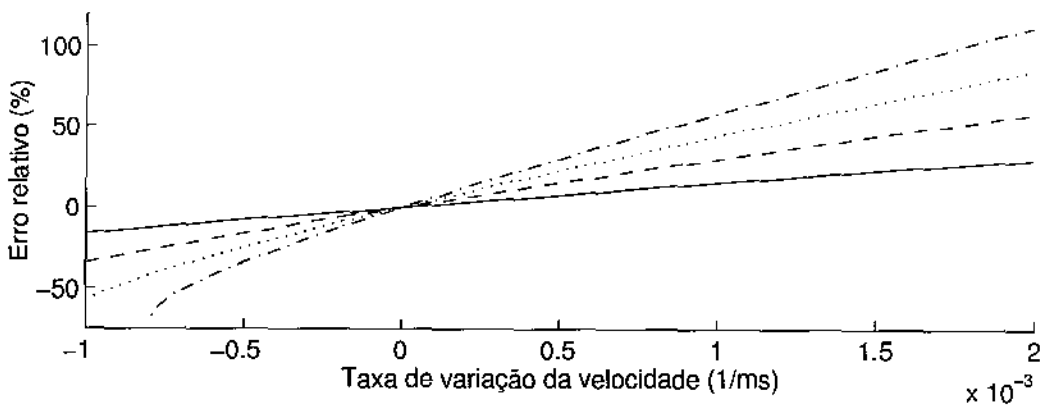

Figura 5.2: Erro relativo as amplitudes A_{L} e $A_{2.5}$, quando a velocidade do meio varia linearmente com a profundidade, para o raio vertical: $z = 500$ m (linha contínua), $z = 1000$ m (linha tracejada), $z = 1500$ m (linha ponilhada) e $z = 2000$ m (linha ponto-tracejada).

Como os erros relativos para as taxas lineares positivas e negativas têm sinais contrários, isto pode sugerir que para uma onda refletida os erros relativo das ondas descendente e ascendente se cancelem, levando a um erro acumulado pequeno. Entretanto, isto não é verdade.

Para analisar o que acontece com o erro relativo de uma onda refletida, pode-se considerar

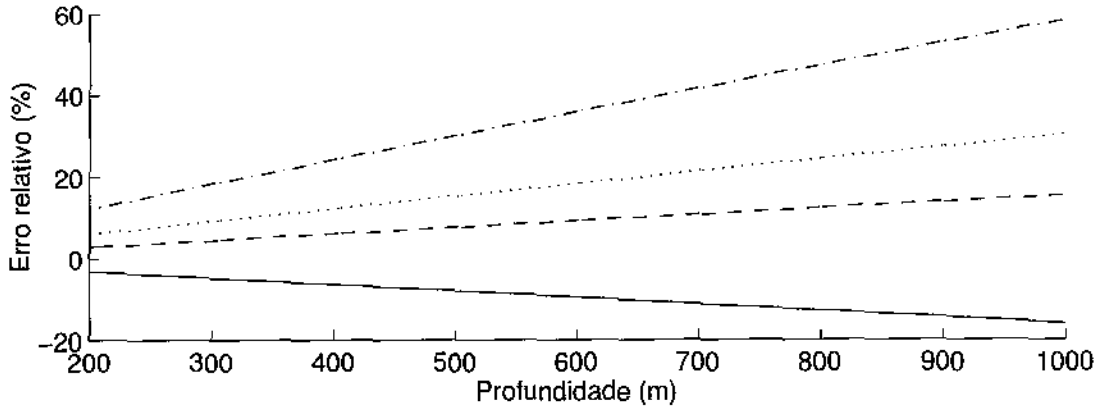

Figura 5.3: Erro relativo entre as amplitudes A_{L} e $A_{2.5}$, quando a velocidade do meio varia linearmente com a profundidade, para o raio vertical que representa a onda direta registrada na profundidade z ou a onda refletida na profundidade z e registrada em $z = 0$. Taxas lineares: $a = -0.0005$ ms^{-1} (linha contínua), $a = 0.0005$ ms^{-1} (linha tracejada), $a = 0.001$ ms^{-1} (linha pontilhada) e $a = 0.002$ ms^{-1} (linha ponto-tracejada).

que as amplitudes $A_{2.5}$ e A_{L} ao longo de todo raio (incidente e refletido) satisfazem a seguinte relação

$$A_{2.5} = \alpha_1 A_{\mathrm{L}}, \tag{5.53}$$

onde

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{c_s^2 \tau_1}{\sigma_1}}, \tag{5.54}$$

onde τ_1 e σ_1 são computados ao longo de todo raio refletido. No entanto, o tempo de trânsito da onda descendente é igual ao da onda ascendente e o parâmetro σ do raio descendente também é igual ao σ do raio ascendente. Isto implica que valem as seguintes relações: $\tau_1 = 2\tau$ e $\sigma_1 = 2\sigma$ e, portanto

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2c_s^2 \tau}{2\sigma}} = \alpha, \tag{5.55}$$

implicando que

$$A_{2.5} = \alpha A_{\mathrm{L}}, \tag{5.56}$$

isto é, o erro relativo da onda refletida é igual ao erro da onda descendente.

Para melhor exemplificar, pode-se considerar o raio vertical em um meio cuja taxa linear de crescimento da velocidade é $a = 0.001$ ms^{-1}, a profundidade final do raio é $z = 400$ m e a velocidade inicial é $c_0 = 1.6$ m/ms. Utilizando as fórmulas (5.52a) e (5.52b), chega ao seguinte

valor para α correspondente à onda refletida

$$\alpha = \sqrt{\frac{1.6^2 \times 1000 \times \log 1.25}{720}} \approx 0.8907, \tag{5.57}$$

implicando que o erro relativo da amplitude de Liner é

$$\frac{A_{\mathrm{L}} - A_{2.5}}{A_{2.5}} = \frac{1}{\alpha} - 1 \approx 12.27\%. \tag{5.58}$$

este erro é confirmado numericamente pela análise do erro da amplitude na figura 7.17.

5.7 Onda Refletida

Para o caso de uma interface suave, que separa o meio em duas camadas, a onda refletida assume a seguinte expressão

$$u_R(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{R}(\mathbf{x})}{\mathcal{L}(\mathbf{x})} f(t - \tau(\mathbf{x})), \tag{5.59}$$

onde $\mathcal{R}$ é o *coeficiente de reflexão*, $\mathcal{L}$ é o *fator do "abrimento" geométrico* e τ é o *tempo de chegada* da frente de onda. Além disso, assume-se que o ponto de reflexão $\mathbf{x}_R$ sobre o refletor já está determinado.

O coeficiente de reflexão $\mathcal{R}$ (Bleistein, 1984) é computado, aproximando-se em $\mathbf{x}_R$ a frente por uma onda plana e o próprio refletor pelo plano tangente em $\mathbf{x}_R$. Por outro lado, o fator do abrimento geométrico (Schleicher *et al.*, 1993) leva em conta não só como a onda se espalha antes e depois da reflexão, como também no próprio ato da reflexão. Em outras palavras, $\mathcal{R}$ depende somente do ângulo de reflexão e do contraste entre as velocidades e $\mathcal{L}$ depende de σ ao longo do raio e da curvatura do refletor.

No caso em que os semi-espaços acima e abaixo do refletor plano são homogêneos, com velocidades c_0 e c_1, respectivamente, as fórmulas para os coeficientes $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ e τ são

$$\tau = d/c_0; \tag{5.60a}$$

$$\mathcal{R} = \frac{1 - \sqrt{\alpha + 1}}{1 + \sqrt{\alpha + 1}}; \tag{5.60b}$$

$$\mathcal{L} = 4\pi d \tag{5.60c}$$

onde

$$\alpha = \left[(c_0/c_1)^2 - 1\right] (\sec\theta)^2 \tag{5.61a}$$

$$d = \|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|. \tag{5.61b}$$

onde $\mathbf{x}_s$ e $\mathbf{x}_r$ são a posição da fonte e o ponto de reflexão, respectivamente, e θ é o ângulo que o raio faz com a normal ao refletor no ponto de refexão. Quando o refletor é um plano horizontal e a fonte e o geofone estão situados à mesma altura, pode-se especializar ainda mais as fórmulas acima. Considerando que a distância que separa a fonte e geofone é $2h$ e que o refletor plano está a uma profundidade H, temos:

$$\alpha = \left[(c_0/c_1)^2 - 1\right]\left[(h/H)^2 + 1\right] \tag{5.62a}$$

$$d = 2\sqrt{h^2 + H^2}\,. \tag{5.62b}$$

6

Correção da Amplitude 2D

Neste capítulo é apresentado o método de modelamentro chamado Correção da Amplitude 2D. Como o próprio nome diz, a principal idéia deste método é corrigir as amplitudes de soluções bidimensionais computadas por algum método 2D, como por exemplo, Diferenças Finitas ou Elementos Finitos.

A Correção da Amplitude 2D é deduzida a partir da Teoria dos Raios aplicada ao Modelo 2.5D. Basicamente, a correção consiste em convoluir no tempo um fator específico com a solução 2D. Lembrando que convoluções no tempo são multiplicações na freqüência, é natural que a correção da Amplitude 2D seja realizada no domínio da freqüência.

De fato, a correção efetuada por este fator pode ser dividida em duas partes distintas: a correção da forma do pulso e próprio escalonamento da magnitude do pulso. A parte do fator que é responsável pela correção da distorção do pulso é a operação de Semi-Derivada no tempo. Por outro lado, a parte do fator que corrige a magnitude da amplitude envolve o fator σ, calculado pela Teoria dos Raios 2.5D.

Neste trabalho, consideramos que o dado de entrada para a Correção de Amplitude 2D é a solução dada pelas Diferenças Finitas aplicadas à equação da onda 2D.

6.1 Teoria do Raios 2D

Para se aplicar a Teoria dos Raios em um modelo 2D, basta lembrar que este modelo é completamente cilíndrico, tanto estruturalmente, quanto em relação à propagação de ondas. Portanto, pode-se aproveitar bastante da Teoria dos Raios 2.5D, sempre lembrando que nela se utilizam fontes pontuais enquanto na Teoria dos Raios 2D deve-se utilizar fontes em linha.

A Equação de Transporte 2D é simplesmente a Equação de Transporte 3D com uma variável

a menos, que neste caso é a variável y:

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A_2 + A_2 \Delta\tau = 0,$$

onde os operadores ∇ e Δ são bidimensionais e as quantidades A_2 e τ dependem somente de x e z. Observe que a equação acima seria igual à Equação de Transporte 2.5D se incluísse o termo A/σ. Procedendo da maneira usual, usa-se a informação das Equações do Raio 2.5D na equação acima, para transformá-la em uma EDO cujo parâmetro é σ. Portanto,

$$\frac{dA_2^2}{d\sigma} = -A_2^2 \frac{d}{d\sigma} \log J_2(\sigma),$$

onde é usado o fato de que $\Delta\tau = \dfrac{d}{d\sigma} \log J_2$. Integrando em σ, obtém-se

$$A_2(\sigma) = A_2(\sigma_0)\sqrt{\frac{J_2(\sigma_0)}{J_2(\sigma)}}\,. \tag{6.1}$$

Em seguida, deve-se obter valores para as condições iniciais $J_2(\sigma_0)$ e $A_2(\sigma_0)$.

Para $J_2(\sigma_0)$, utiliza-se a mesma expressão (5.33b) que é utilizada na Teoria dos Raios 2.5D, isto é

$$J_2(\sigma_0) \approx \frac{\sigma_0}{c_s^2},$$

lembrando que $c_s \equiv c(x_s, z_s)$. No entanto para $A_2(\sigma_0)$ **não podemos** usar a expressão (5.33a), pois a derivação desta condição foi feita sob a hipótese de fonte pontual em $\mathbf{x}_s$. Para obter uma aproximação para $A_2(\sigma_0)$ deve-se considerar que a fonte é uma linha infinita passando por $\mathbf{x}_s$ e ortogonal ao plano $y = 0$. Assim, considera-se que o meio é homogêneo no interior de uma circunferência cujo centro é $\mathbf{x}_s$ (ou um cilindro em 3D, cujo eixo passa por $\mathbf{x}_s$). Portanto, para $A_2(\sigma_0)$ toma-se a amplitude da função de Green 2D transformada por Fourier no tempo, dada pela equação (B.9)

$$A_2(\sigma_0) \approx \frac{e^{-i\pi/4\,\mathrm{sign}\,\omega}}{2\sqrt{2\pi|\omega|\tau/c_s}}.$$

Portanto, inserindo as condições iniciais na equação (6.1), chega-se a

$$A_2(\sigma) = \frac{e^{-i\pi/4\,\mathrm{sign}\,\omega}}{2\sqrt{2\pi|\omega|J_2(\sigma)}}. \tag{6.2}$$

Quando se compara as expressões da Amplitude 2.5D e Amplitude 2D, dadas respectivamente pelas equações (5.34) e (6.2), chega-se a

$$\frac{A_{2.5}}{A_2} = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi\sigma}}\, e^{i\pi/4\,\mathrm{sign}\,\omega},$$

que, de fato, é o próprio fator de ajuste entre as amplitudes.

6.2 Correção no Domínio da Freqüência

Sejam $u_2(x,z,t)$ a solução obtida pela simulação da equação da onda 2D e $u_3(x,0,z,t)$ a solução à qual se deseja chegar (solução tridimensional no plano $y=0$). Considere suas Transformadas de Fourier no tempo: $\hat{u}_2(x,z,\omega)$ e $\hat{u}_3(x,y,z,\omega)$. Usando a equação acima, chega-se à expressão de como corrigir uma solução 2D para uma solução 3D no plano $y=0$:

$$\hat{u}_3(x,0,z,\omega) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi\sigma(x,z)}}\exp\Big[i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\omega)\Big]\hat{u}_2(x,z,w), \tag{6.3}$$

onde $\sigma(x,z)$ é dado por

$$\sigma(x,z) = \int c(x',z')^2 dt = \int_\Gamma c(x',z')ds. \tag{6.4}$$

Na integral (6.4), Γ é o caminho percorrido pela frente de onda do ponto (x_s,z_s) até (x,z) e ds é o diferencial de comprimento de arco. No caso em que a velocidade é constante (c_0), a expressão se reduz a

$$\sigma = c_0 d,$$

onde d é a distância percorrida pela frente de onda que sai da fonte e chega ao geofone.

Cabe dizer que, embora este método apresente uma resolução simples para o problema das amplitudes erradas da solução 2D, a dificuldade aparece no cálculo da integral em (6.4). No caso em que o meio é não homogêneo, o caminho percorrido Γ pela onda não é conhecido e tem que ser determinado independentemente, usando a solução da equação Iconal. Portanto, para se achar Γ no caso geral, deve-se fazer uma modelagem por Teoria dos Raios, chamada Traçamento de Raios, implicando que o custo de determinar σ é equivalente ao custo de uma modelagem por Teoria dos Raios.

6.3 Correção no Domínio do Tempo

Pode-se definir o operador *Semi-Derivada* de uma função $g(t)$ como sendo (Oldham & Spanier, 1974)

$$D^{1/2}g(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} dt' \frac{g(t')}{\sqrt{t-t'}}, \tag{6.5}$$

onde $g(t)$ é uma uma função tal que a integral faça sentido.

Tomando a Transformada de Fourier na equação acima (veja o Apêndice D) chega-se ao seguinte resultado

$$\mathcal{F}\left[D^{1/2}g(t)\right] = \sqrt{|w|}\ \exp\Big[i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\omega)\Big]\,\hat{g}(\omega).$$

Comparando a equação acima com a expressão (6.3), pode-se concluir que

$$u_3(x,0,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(x,z)}} D^{1/2} u_2(x,z,t), \tag{6.6}$$

onde σ é dado por (6.4). A expressão acima mostra como corrigir a amplitude no domínio do tempo, onde $D^{1/2}$ corrige a forma distorcida do pulso e o fator $(2\pi\sigma)^{-1/2}$ reescala a amplitude.

7

Experimentos Numéricos

Neste capítulo são considerados três modelos para testar a viabilidade da Equação de Liner, do ponto de vista numérico. Nos três modelos, a qualidade da solução é investigada usando-se ondas refletidas por uma interface que separa o meio em dois semi-espaços.

Vale lembrar que os experimentos realizados neste trabalho, bem como os gráficos, foram todos implementados usando rotinas do MATLAB.

7.1 Sinal da Fonte

Utilizamos para nossos experimentos um pulso de Ricker, cuja expressão é dada por

$$f(t) = \begin{cases} [1 - 2(\pi(t - t_c)/t_c)^2]\, e^{-[\pi(t-t_c)/t_c]^2} & , \quad t \geq 0; \\ 0 & , \quad t < 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

onde t_c é o ponto de máximo de $f(t)$. O parâmetro t_c também regula em proporção direta a duração do sinal. Se t_c é bem pequeno, obtém-se um sinal curto com poder de alta resolução, uma característica desejável. Além disso, quanto menor a duração do sinal, mais "verdadeira" é a segunda parte da conjectura de Liner, de modo que o pulso das ondas simuladas pela Equação de Liner ficam menos distorcidos. Por outro lado, um t_c muito pequeno causa o problema da dispersão cujo pior efeito é a deterioração da própria resolução. A Figura 7.1.a mostra o sinal de Ricker no tempo, enquanto na Figura 7.1.b é mostrado o sinal de Ricker no domínio da freqüência, onde o pico está exatamente em $1000/t_c$ Hz. Usamos $t_c = 36$ ms em todas as simulações deste trabalho, portanto, a freqüência de pico é de aproximadamente 28 Hz.

7.2 Modelos

Todos os três modelos considerados são compostos por uma única interface dividindo o espaço em dois semi-espaços. O meio abaixo da interface é sempre homogêneo. A configuração fonte-

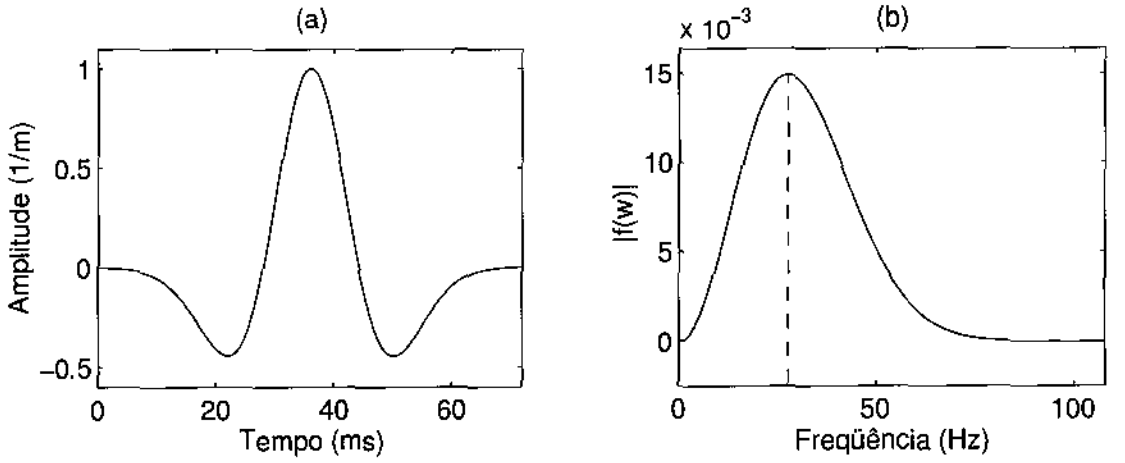

Figura 7.1: (a) Pulso de Ricker com duração de 72 ms. (b) Representação do pulso de Ricker na freqüência.

geofone escolhida para os modelos chama-se tiro comum, onde a fonte é fixada na origem e os geofones afastam-se da fonte.

Para o Modelo A computamos com a Equação de Liner as ondas direta e refletida e para os Modelo B e C computamos somente a onda refletida. No caso da onda direta, comparamos a solução obtida com a solução dada pela Correção da Amplitude da onda direta 2D (Capítulo 6) e com a solução analítica da onda direta dada pela fórmula (2.8). No caso da onda refletida, comparamos a solução obtida com a solução dada pela Correção da Amplitude da onda refletida 2D e com a solução computada através da Teoria dos Raios, usando a fórmula (5.59).

O Modelo A está representado na Figura 7.2. Consideramos 22 geofones com 20 metros de separação entre cada um. A distância entre a fonte e o primeiro geofone é de 200 m. O refletor é um plano horizontal situado a 400 m de profundidade. A velocidade do meio acima do refletor é $c_0 = 2.0$ m/ms e do meio abaixo é $c_1 = 2.5$ m/ms.

A Figura 7.3 mostra as seções sísmicas da onda direta computadas através da solução analítica, da Correção da Amplitude da solução 2D e da simulação por Diferenças Finitas da Equação de Liner, respectivamente.

Pelos traços exibidos nestas figuras, podemos observar que o tempo de chegada da onda direta pela Equação de Liner é quase coincidente com o tempo de chegada analítico. Este fato pode ser visto em detalhe pela Figura 7.4 que mostra o traço sísmico do geofone situado a 300m da fonte. Entretanto, isto não quer dizer muito, uma vez que até mesmo o tempo de chegada obtido pela equação 2D é correto, como é discutido na Subseção 5.5.1. No entanto, podemos encarar isto como um primeiro teste no qual a Equação de Liner se mostrou satisfatória.

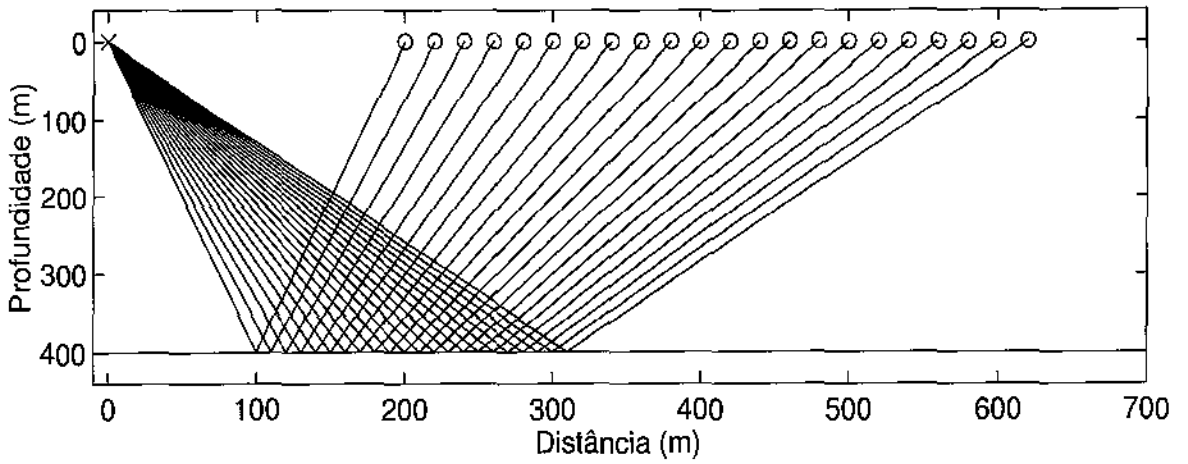

Figura 7.2: O Modelo A é composto por 22 geofones, uma fonte pontual e um refletor plano horizontal que separa o meio em dois semi-espaços homogêneos.

Um segundo teste, mais importante, é analisar a amplitude da onda computada. Pela Figura 7.4, podemos observar que embora o traço da onda de Liner esteja um pouco distorcida, seu máximo (o pico) é quase coincidente com o pico do traço analítico. A distorção do pulso computado pela Equação de Liner se deve ao não cumprimento da hipótese $t = \tau$. Quanto mais longe do posição do pico, que representa o tempo de chegada τ, mais violada está a hipótese, implicando em uma perda na qualidade da solução.

A Figura 7.5 mostra os picos registrados em cada geofone e o erros relativos cometidos pela Correção da Amplitude 2D e pela solução da Equação de Liner. Podemos observar que o erro relativo tem seu máximo em torno de 1.5%. Este erro já havia sido previsto, pela própria construção da Equação de Liner, na qual se assume que o meio é homogêneo.

No caso da onda refletida, a Figura 7.6 mostra as seções sísmicas computadas através da solução dada pela Teoria dos Raios, da Correção da Amplitude 2D e da simulação da Equação de Liner por Diferenças Finitas, respectivamente. A Figura 7.7 mostra o traço sísmico do geofone situado a 300m da fonte.

Novamente, podemos observar que o tempo de chegada da solução de Liner é praticamente o mesmo computado pela Teoria dos Raios e pela Correção da Amplitude da solução 2D. Com relação as amplitudes, pela Figura 7.8 podemos observar que o erro relativo da solução dada pela Equação de Liner tem seu máximo pouco abaixo de 3%. De fato, a solução de Liner está mais próxima da solução 2D com amplitude corrigida, indicando que parte do erro cometido pela Equação de Liner seja apenas de natureza numérica.

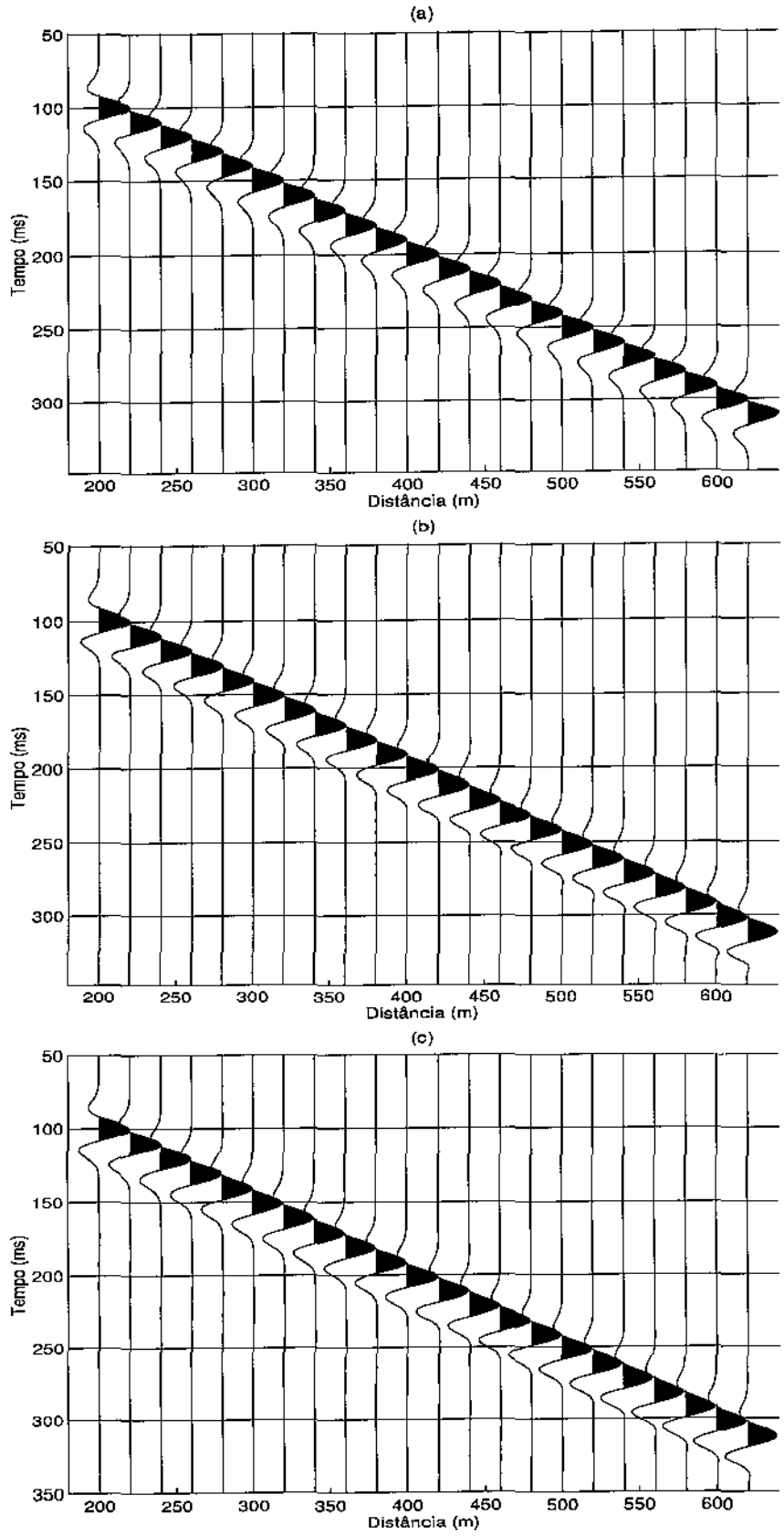

Figura 7.3: Seção sísmica da onda direta do Modelo A obtida por: (a) Solução analítica; (b) Correção da Amplitude da solução numérica da onda bidimensional; (c) Modelagem da Equação de Liner.

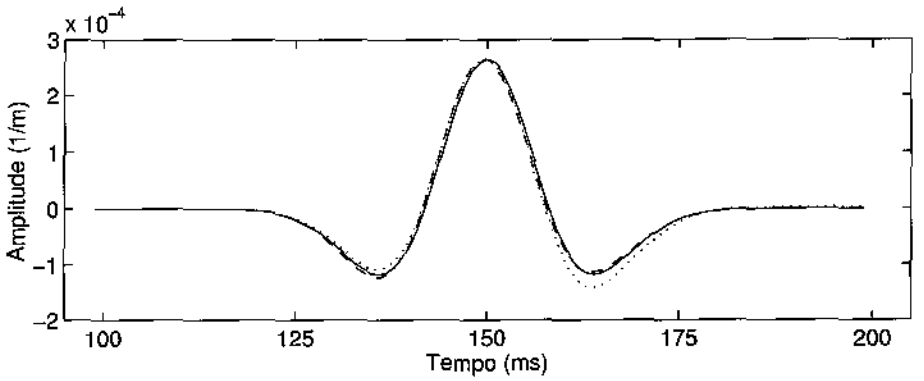

Figura 7.4: Traço da onda direta do Modelo A registrada pelo geofone localizado a 300 m da fonte. Modelamento por: Solução analítica (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada).

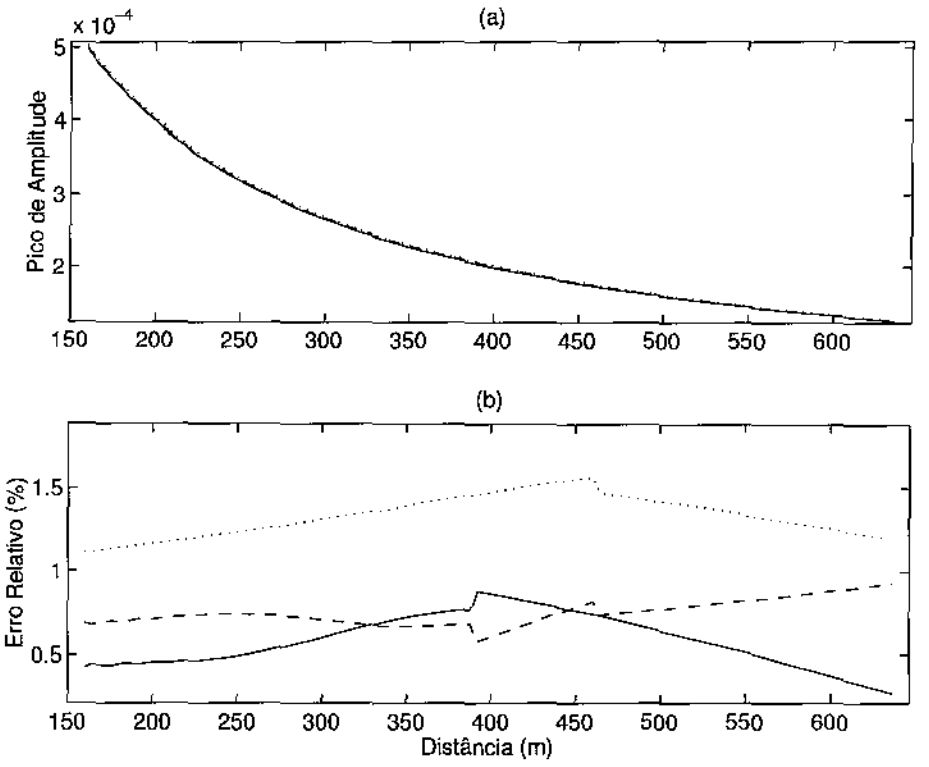

Figura 7.5: (a) Máxima amplitude da onda direta registrada nos nos geofones do Modelo A . Modelamento por: Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada). (b) Erro relativo entre: Correção da Amplitude 2D e Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D e Equação de Liner (linha tracejada) e Equação de Liner e Teoria dos Raios (linha pontilhada).

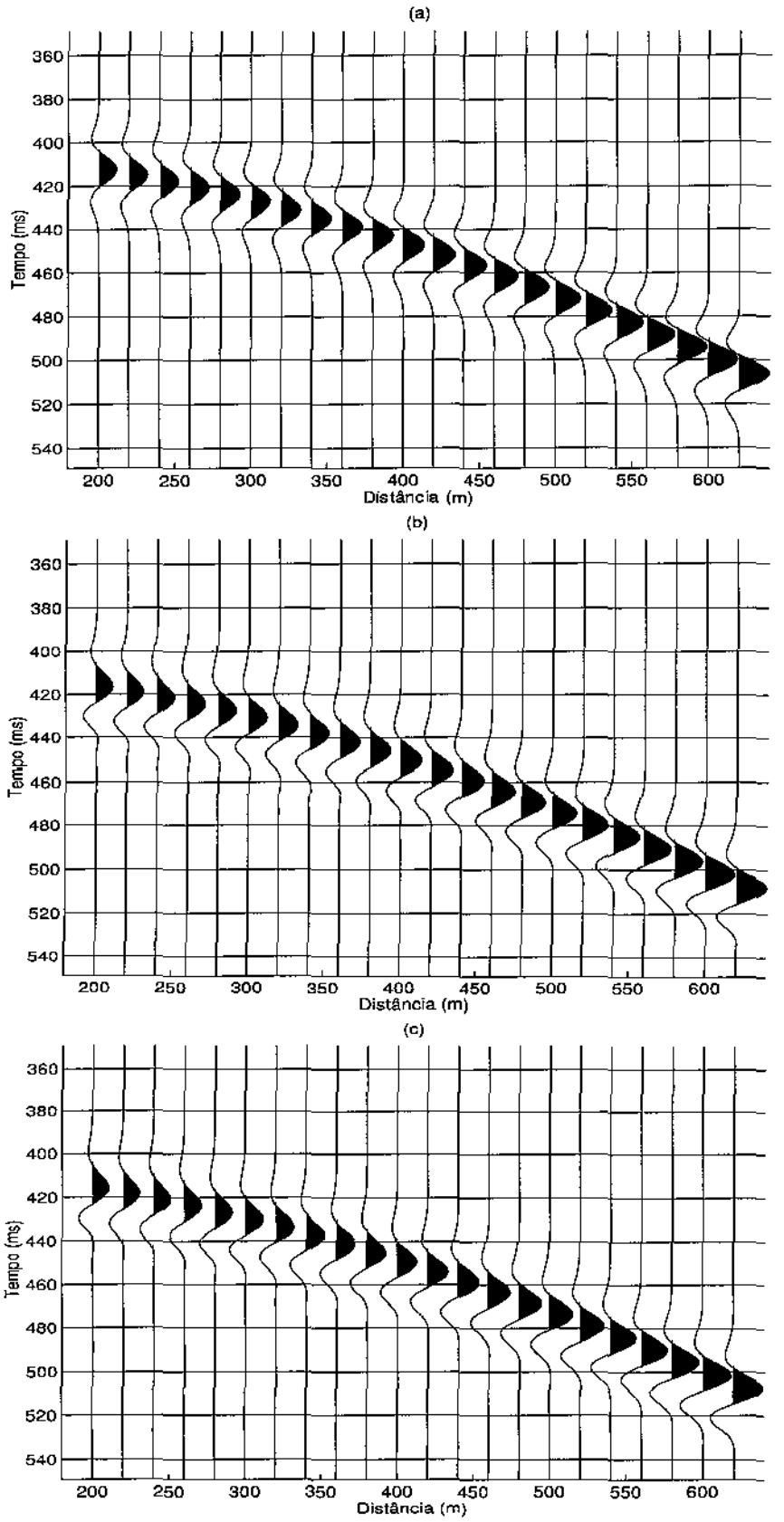

Figura 7.6: Seção sísmica da onda refletida do Modelo A obtida por: (a) Teoria dos Raios; (b) Correção da Amplitude da solução numérica da onda bidimensional; (c) Modelagem da Equação de Liner.

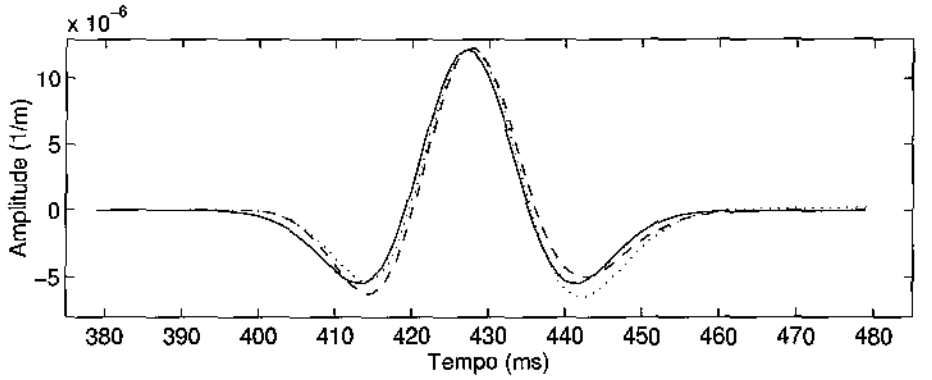

Figura 7.7: Traço da onda refletida do Modelo A registrada pelo geofone localizado a 300 m da fonte. Modelamento por: Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada).

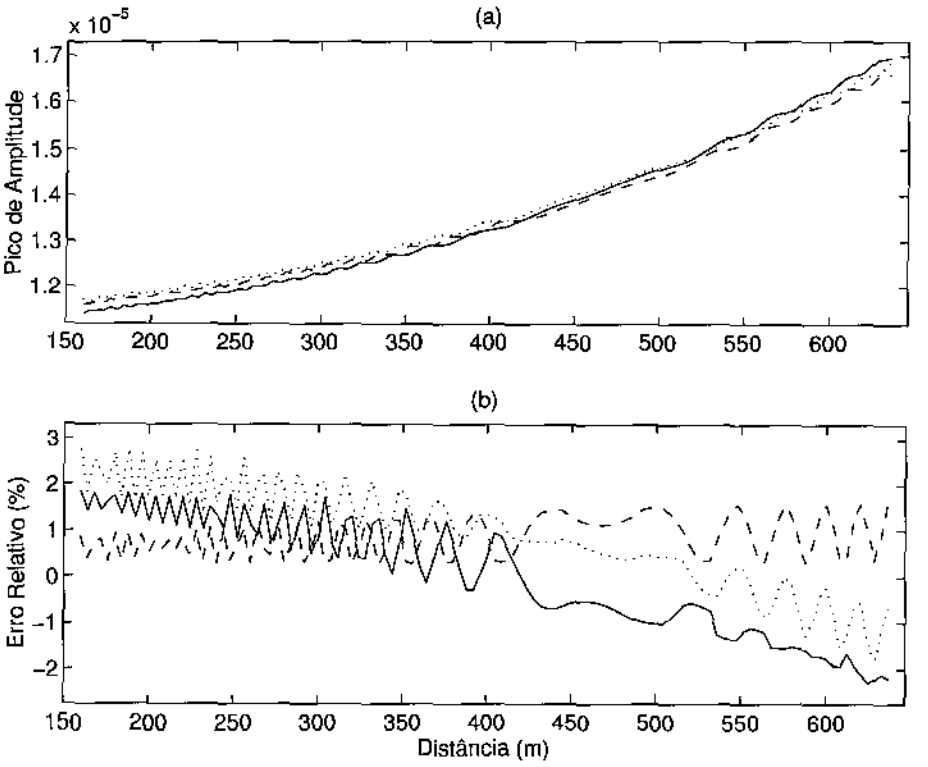

Figura 7.8: (a) Máxima amplitude da onda refletida registrada nos geofones do Modelo A. Modelamento por: Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada). (b) Erro relativo entre: Correção da Amplitude 2D e Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D e Equação de Liner (linha tracejada) e Equação de Liner e Teoria dos Raios (linha pontilhada).

O Modelo B está representado na Figura 7.9. Consideramos 31 geofones com 40 metros de separação entre cada um. O primeiro geofone está situado a 600m à esquerda da fonte. A velocidade do meio acima do refletor é $c_0 = 2.0$ m/ms e do meio abaixo é $c_1 = 2.5$ m/ms. Na Figura 7.9 também são mostrado os raios computados pela Teoria do Raios.

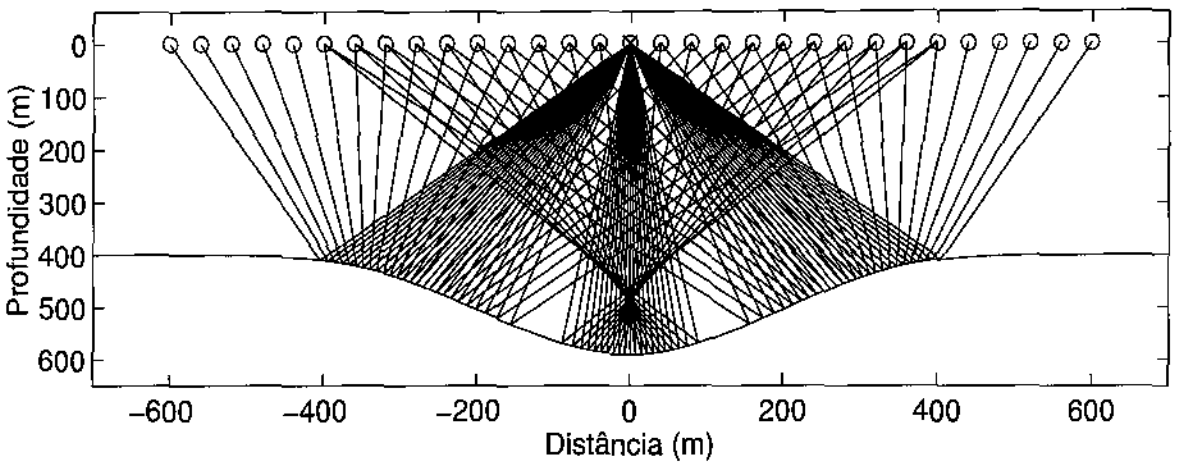

Figura 7.9: O Modelo B é composto por 31 geofones, uma fonte pontual e um refletor não linear com um vale, que separa o meio em dois semi-espaços homogêneos.

A Figura 7.10 mostra as seções sísmicas da ondas refletidas computadas usando a Teoria dos Raios, a Correção da Amplitude 2D e a simulação por Diferenças Finitas da Equação de Liner, respectivamente. A Figura 7.11 mostra os traços sísmicos dos geofones situados a 440 m, 240 m e 80 m da fonte, respectivamente.

Podemos observar que na seção sísmica computada pela Teoria dos Raios, Figura 7.10.a, faltam alguns eventos sísmicos. Mais precisamente, os geofones distantes 440 m, ou mais, da fonte não captam as difrações presentes no modelo. Isto acontece, pois a Teoria dos Raios usada neste trabalho é de ordem zero, não sendo possível modelar eventos de ordem superiores, tais como difrações. Esta característica é uma desvantagem clara com relação ao dois outros métodos usados, pois, como mostram as Figura 7.10.b e c (e em detalhe na Figura 7.11.a), estes eventos de ordem superior são modelados pela Correção da Amplitude 2D e Equação de Liner.

As Figuras 7.12 e 7.13 mostram os picos de amplitude e o erro relativo da primeira e segunda ondas refletidas, respectivamente. No caso da primeira onda refletida o erro relativo máximo fica em torno de 10% e o erro relativo máximo entre a solução da Equação de Liner e solução 2D com a amplitude corrigida fica em torno de 5%. No caso da segunda onda refletida, o erro relativo aumenta pois esta onda sofre interferência da primeira e terceira onda, ainda assim, o erro relativo entre solução da Equação de Liner e Correção da Amplitude 2D fica abaixo de 10%.

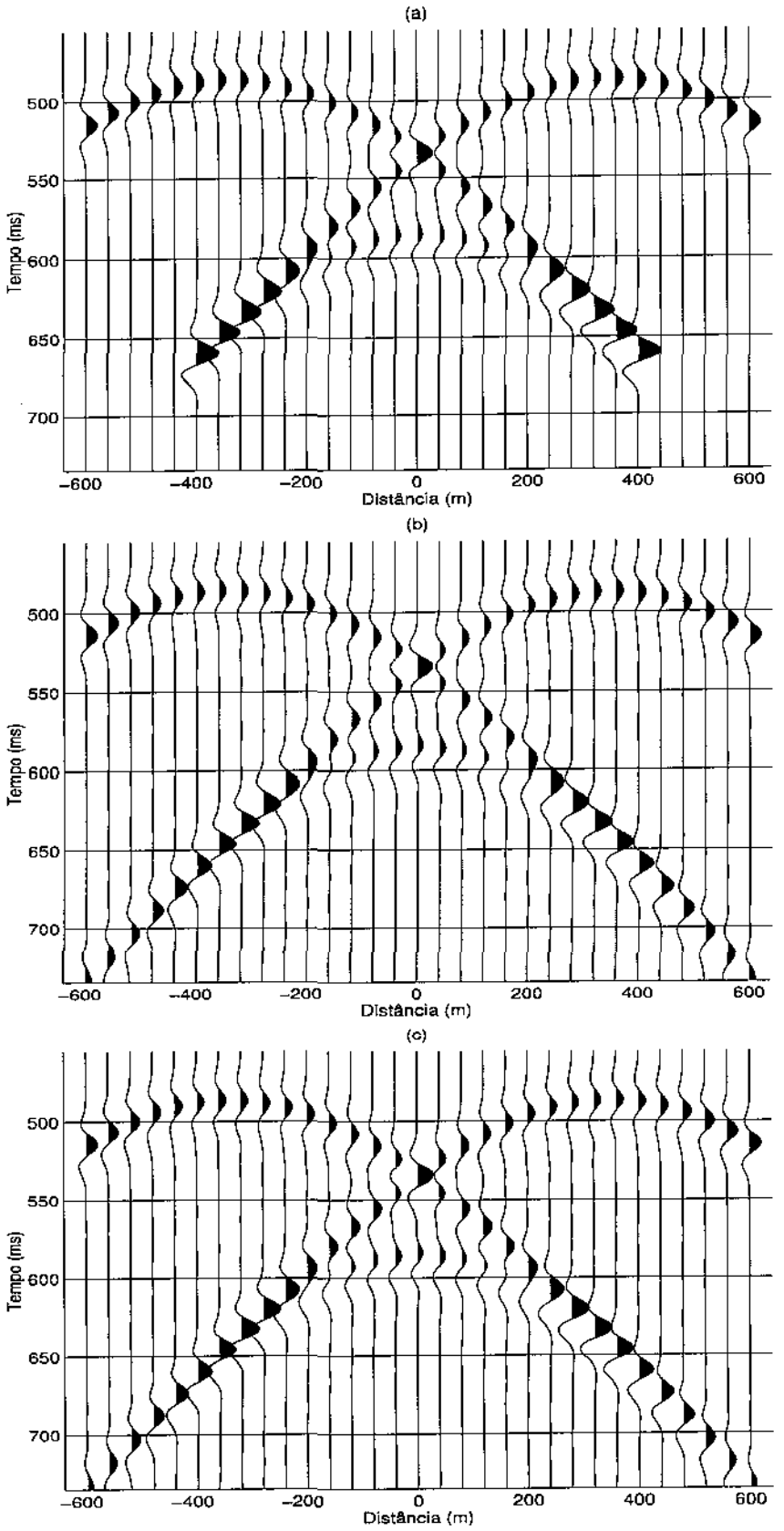

Figura 7.10: Seção sísmica da onda refletida do Modelo B obtida por: (a) Teoria dos Raios; (b) Correção da Amplitude 2D; (c) Modelagem da Equação de Liner.

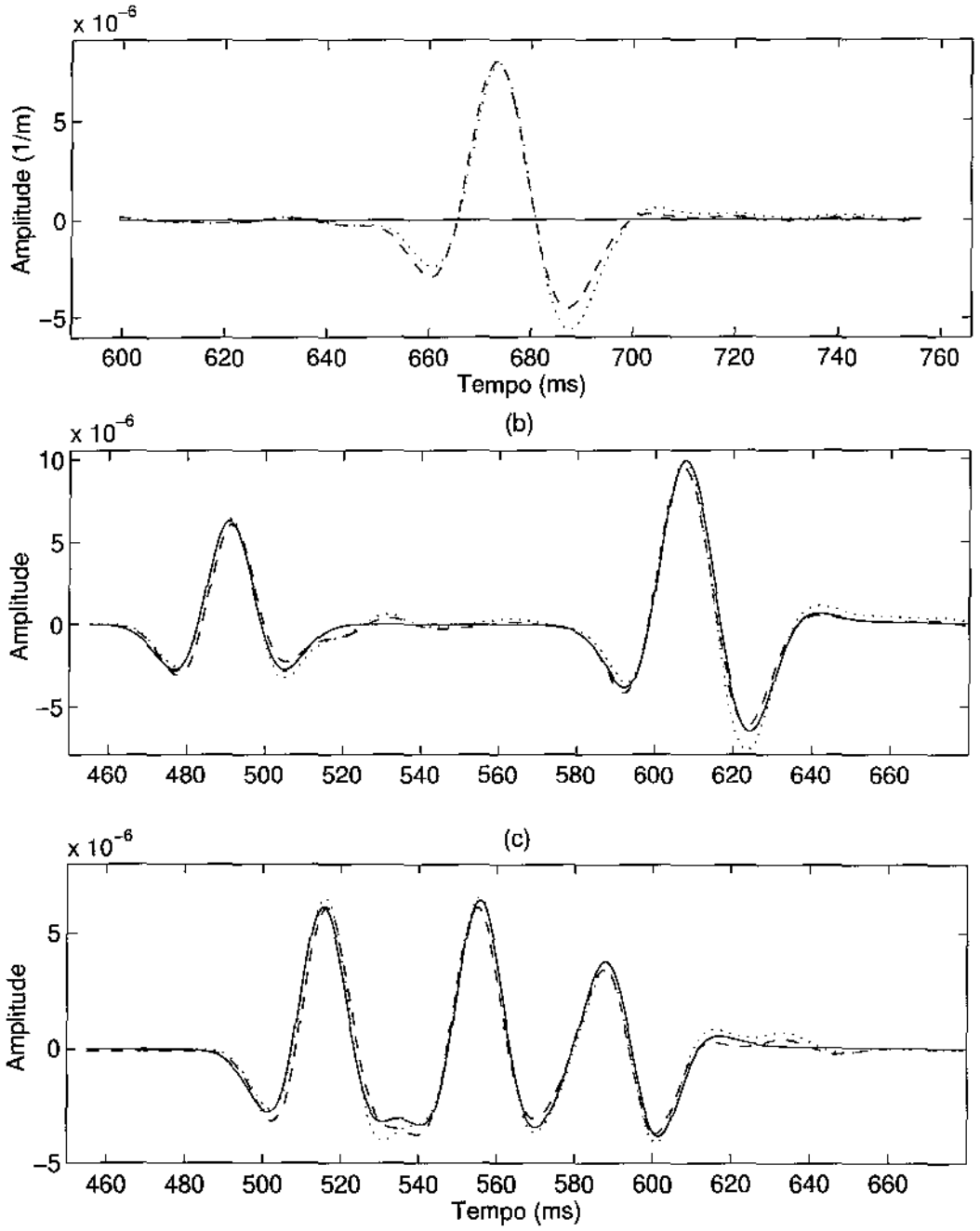

Figura 7.11: Traço da onda refletida do Modelo B registrada pelo geofone localizado a:(a) 440 m da fonte, (b) 240 m da fonte e (c) 80 m da fonte. Modelamento por: Traço obtido por Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e modelamento da Equação de Liner (linha pontilhada).

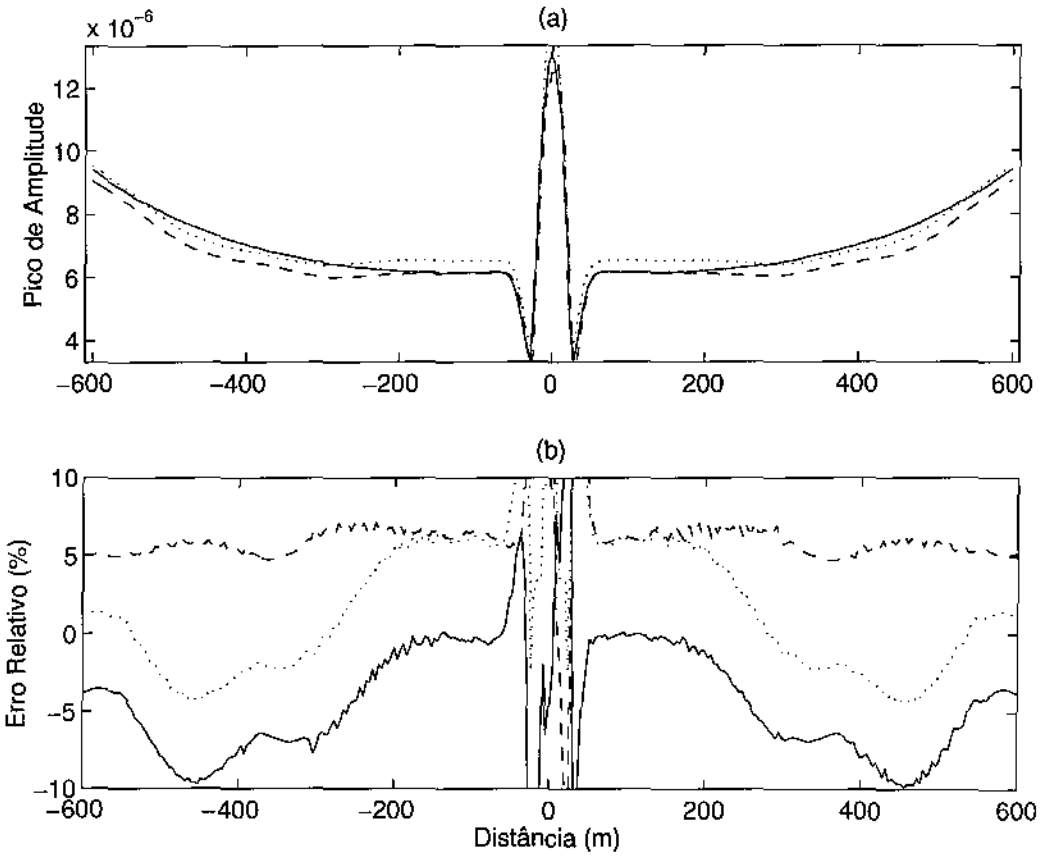

Figura 7.12: (a) Máxima amplitude da primeira onda refletida registrada nos geofones do Modelo B. Modelamento por: Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada). (b) Erro relativo entre: Correção da Amplitude 2D e Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D e Equação de Liner (linha tracejada) e Equação de Liner e Teoria dos Raios (linha pontilhada).

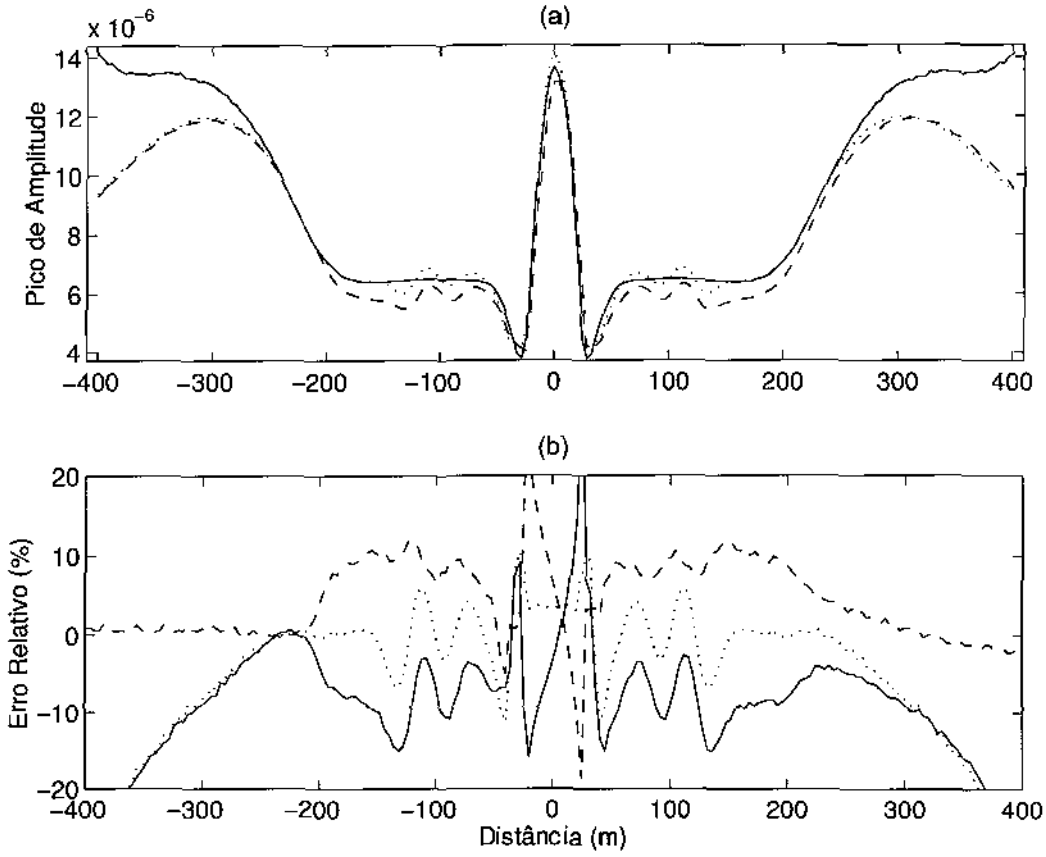

Figura 7.13: (a) Máxima amplitude da segunda onda refletida registrada nos geofones do Modelo B. Modelamento por: Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada). (b) Erro relativo entre: Correção da Amplitude 2D e Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D e Equação de Liner (linha tracejada) e Equação de Liner e Teoria dos Raios (linha pontilhada).

O Modelo C está representado na Figura 7.14. Consideramos 22 geofones com 20 metros de separação entre cada um deles. A distância entre a fonte e o primeiro geofone é de 200 m. O refletor é um plano horizontal situado a 400 m de profundidade. As velocidades do meio acima e abaixo do refletor são respectivamente $c_0 = (1.6 + z/1000)$ m/ms e $c_1 = 2.5$ m/ms.

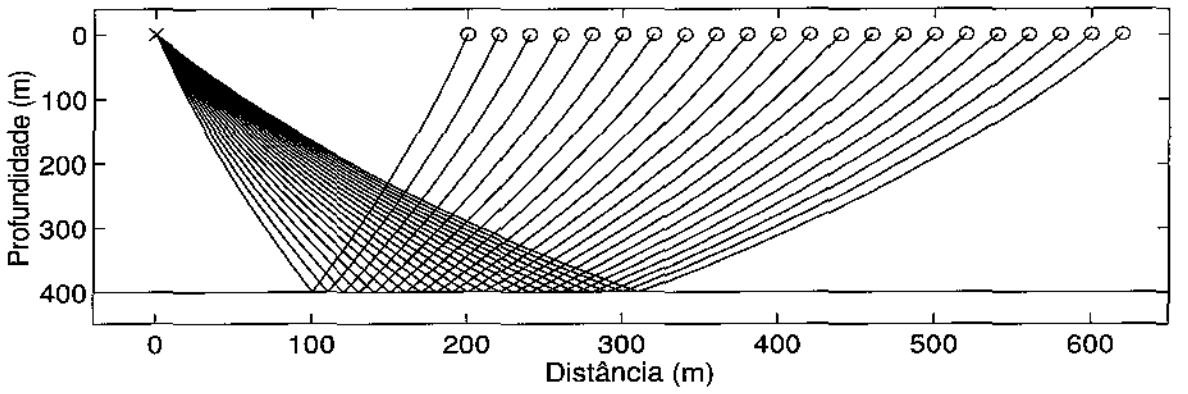

Figura 7.14: O Modelo C é composto por 22 geofones, uma fonte pontual e um refletor plano horizontal que divide o meio em dois semi-espaços. Abaixo do refletor o meio é homogêneo e acima do refletor o meio é não homogêneo.

Como o meio acima do refletor é não homogêneo, os raios da Teoria dos Raios são arcos de circunferências, cujos raios e centros podem ser computados usando as fórmulas da Seção 5.6.

A Figura 7.15 mostra as seções sísmicas da onda refletida computadas através da solução analítica, da Correção da Amplitude 2D e da simulação por Diferenças Finitas da Equação de Liner, respectivamente. Na Figura 7.16 é mostrado em detalhe um traço da onda refletida, registrada pelo geofone situado a 300 m da fonte. Por estas figuras, podemos notar que o tempo de trânsito da Equação de Liner é claramente diferente dos tempos de trânsito computados pela Teoria dos Raios e Correção da Amplitude 2D, no entanto, o erro ainda é bem pequeno.

A Figura 7.17 mostra as amplitudes máximas registradas pelos geofones, bem como seus erros relativos. Podemos notar que a curva do erro relativo entre Equação de Liner e Teoria dos Raios, cujo o máximo está pouco abaixo de 15%, é decrescente com a distância. Isto parece indicar que a qualidade da solução da Equação de Liner melhora quanto mais longe da fonte. No entanto, a curva do erro relativo entre a Correção da Amplitude 2D e Teoria dos Rais também tem o mesmo comportamento, mostrando que este decréscimo é um efeito da dispersão numérica. Neste caso, uma medida mais confiável é o erro relativo entre a Equação de Liner e a Correção da amplitude 2D, cuja curva está em torno de 10%. Este erro confirma a previsão feita no final da Seção 5.6, onde a estimativa do erro foi computada por Teoria dos Raios aplicada a Equação de Liner.

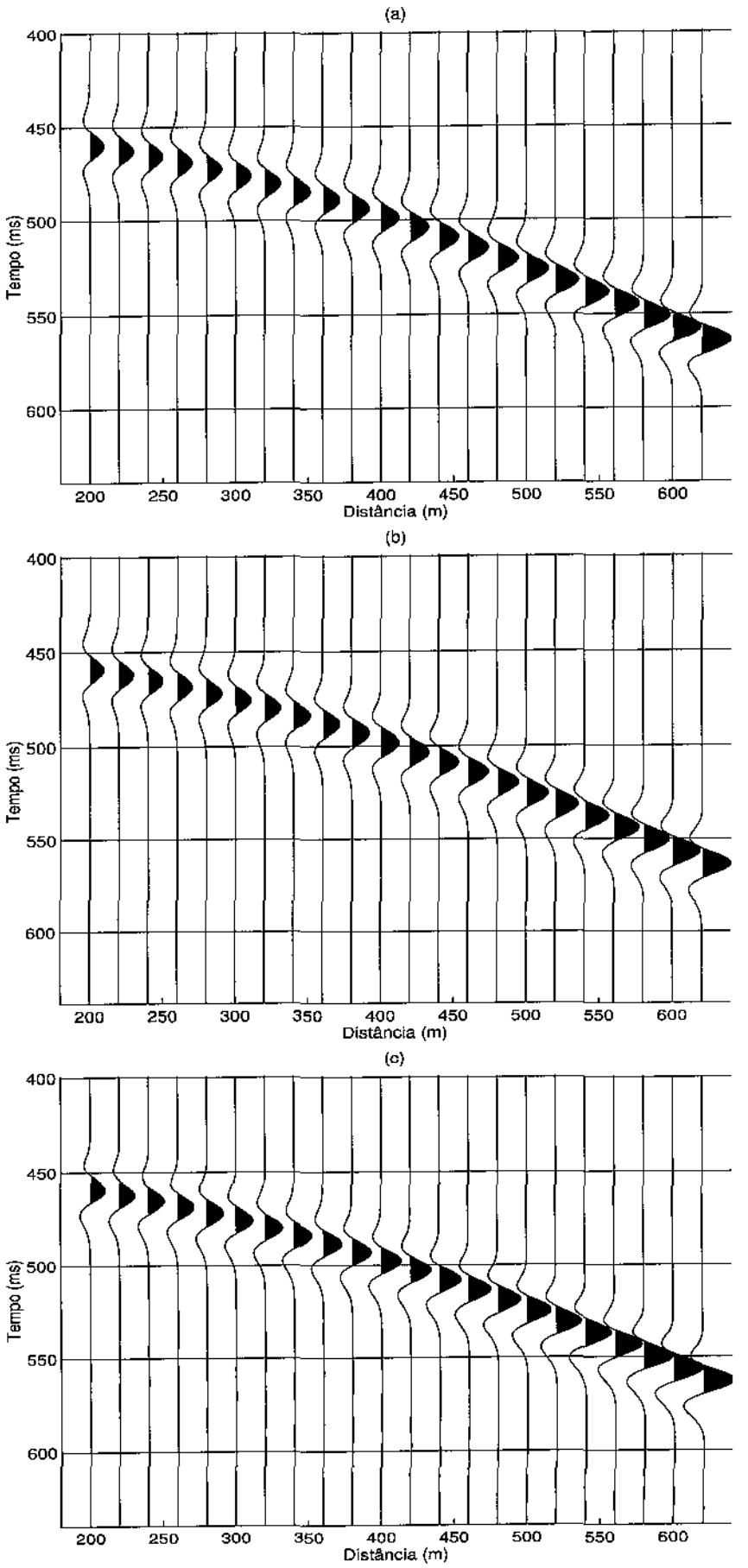

Figura 7.15: Seção sísmica da onda refletida do Modelo C obtida por: (a) Teoria dos Raios; (b) Correcão da Amplitude 2D e (c) Modelagem da Equação de Liner.

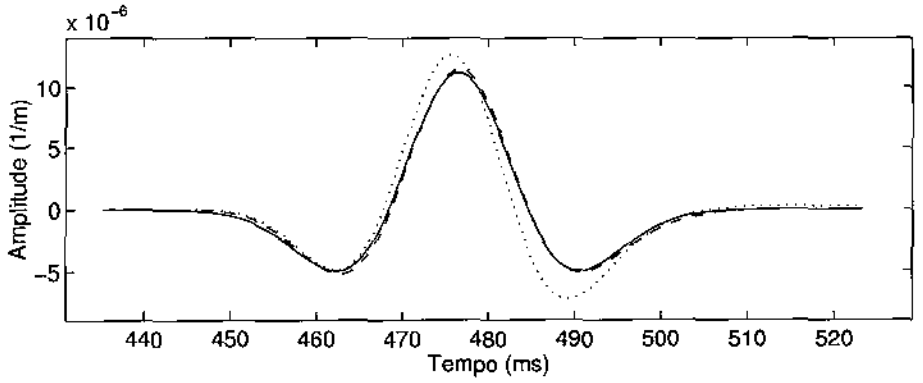

Figura 7.16: Traço da onda refletida do Modelo C registrada pelo geofone localizado a 300 m da fonte. Modelamento por: Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada).

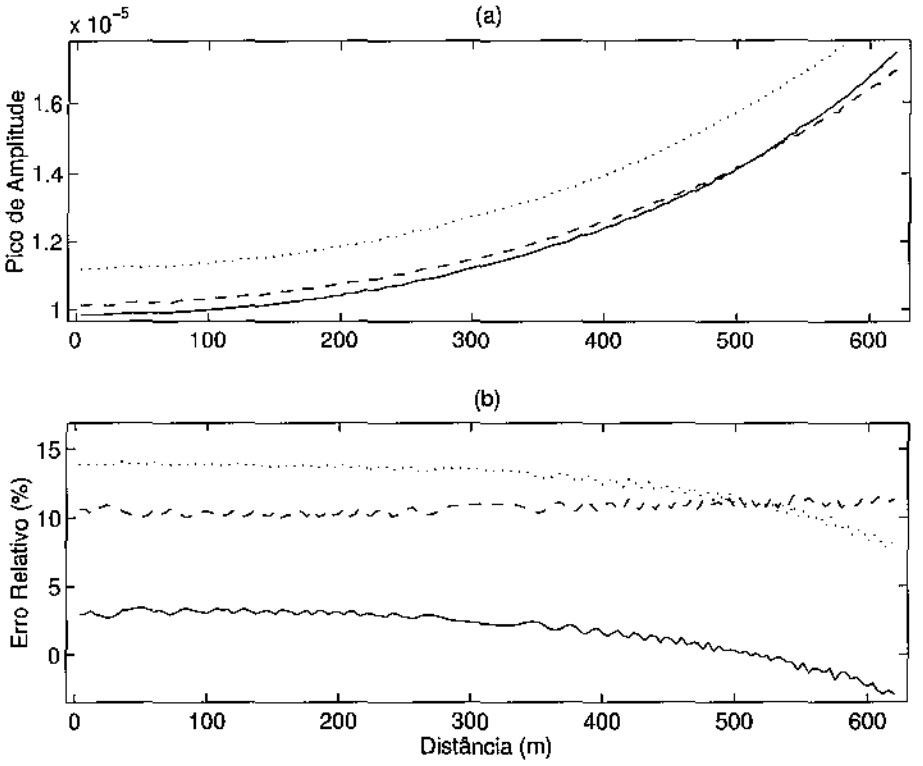

Figura 7.17: (a) Máxima amplitude da onda refletida registrada nos geofones do Modelo C . Modelamento por: Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D (linha tracejada) e Equação de Liner (linha pontilhada). (b) Erro relativo entre: Correção da Amplitude 2D e Teoria dos Raios (linha contínua), Correção da Amplitude 2D e Equação de Liner (linha tracejada) e Equação de Liner e Teoria dos Raios (linha pontilhada).

8

Conclusões

Uma equação da onda 2.5 dimensional é uma ferramenta poderosa no processamento sísmico, pois ela simula verdadeiramente ondas tridimensionais no Modelo 2.5D, com um custo computacional de um modelamento 2D. Com esta equação novos métodos poderiam ser criados ou testados e até mesmo aperfeiçoados. Além disso, o modelamento usando esta equação leva a vantagem adicional de considerar todos os eventos sísmicos presentes no modelamento, como por exemplo, ondas refratadas e múltiplas.

Até o presente momento, as equações propostas na literatura não se mostraram satisfatórias, tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista computacional. Em outras palavras, as equações analiticamente corretas são impróprias para simulações, pois são baseadas em filtros e as equações adequadas à simulação numérica são analiticamente incorretas.

O objetivo deste trabalho é verificar se a equação da onda 2.5 dimensional proposta por Liner (1991), chamada Equação de Liner, é satisfatória do ponto de vista numérico.

A Equação de Liner foi derivada considerando-se duas hipóteses corriqueiras na sísmica: o meio é homogêneno perto da fonte e a duração do pulso é curta. Além disso, foi conjecturado por Liner que a validade da equação pudesse ser extendida para longe da fonte, onde o meio é não homogêneo. Obviamente, esta conjectura já dá a medida do erro cometido pela Equação de Liner, pois implica em generalizar um resultado a partir um caso particular. Uma outra característica é que a Equação de Liner foi construída visando uma simulação por Diferenças Finitas.

A Equação de Liner trouxe bons resultados nos experimentos numéricos relativos aos modelos mais simples. Vale a pena ressaltar que, embora estes experimentos realizados sejam pequenos, seus resultados dão uma idéia clara do comportamento da Equação de Liner, indicando que em experimentos maiores, os resultados seriam muito semelhantes.

Nos nossos experimentos, o resultado da comparação entre Equação de Liner e Teoria dos Raios foi, em geral, pior do que o resultado da comparação entre Equação de Liner e Correção de Amplitude 2D. Isto se deve ao fato de que ambos métodos de modelamento são baseados em Diferenças Finitas, levando a crer que uma parte do erro cometido pela Equação de Liner é de natureza numérica.

Nossas análises foram dividas em duas partes: análise do tempo de trânsito e análise da amplitude. Na análise da amplitude, foram observados somente a magnitude do pulso, deixando de lado uma análise mais detalhada da forma do pulso.

A Equação de Liner simulou quase perfeitamente os tempos de trânsito, comprovando numericamente o que foi mostrado na Seção 5.6: as equações Iconal-Liner e Iconal-2.5D são iguais.

No caso das amplitudes, a Equação de Liner produziu um erro relativo pouco abaixo de 3% para um meio homogêneo acima de um refletor plano. Quando o refletor ficou mais complexo, o erro relativo subiu para cerca de 10%. Finalmente, quando o meio acima do refletor plano se tornou não homogêneo, com a velocidade variando linearmente com a profundidade, o erro subiu para pouco abaixo de 15%, lembrando que, neste caso, o erro relativo entre Equação de Liner e Correção de Amplitude 2D ficou em torno de 10%. Vale lembrar ainda que a amplitude 2D sem a correção é cerca de cem vezes maior que a amplitude computada pela Teoria dos Raios.

Para os modelos mais simples, a Equação de Liner é uma alternativa à equação da onda 2D, no caso do modelamento em Problemas 2.5D, pois seu custo da simulação é o mesmo que o da equação da onda 2D e, além disso, seus tempos de trânsito estão corretamente computados. Entretanto, para modelos mais complexos, que envolvem meios não homogênenos, a Equação de Liner deixa de ser uma boa escolha, pois a qualidade da sua solução fica deteriorada.

Três possíveis trabalhos futuros são apresentados:

- ▷ O tratamento da fonte na Equação de Liner pode ser melhorado com a criação de uma fonte bidimensional adequada ou com a correção por filtros da fonte bidimensioanl usual.
- ▷ Uma nova Equação de Liner "modificada" pode ser construída tomando como base a função de Green 2.5D assintótica (ou aproximada) para o caso em que a velocidade varia linearmente com a profundidade.
- ▷ A aproximação para σ ao longo do raio, que Liner aproxima por $c_s\tau$, pode ser melhorada usando a velocidade RMS, levando a crer que a equação de Liner possa ser aprimorada usando esta aproximação.

Referências Bibliográficas

Alford, R. M., Kely, K. R. and Boore, D. M. (1974), Accuracy of Finite-Difference Modeling in Acoustic Wave Equation. *Geophysics*, **39**, 834–842.

Bleistein, N. (1984), Mathematical Methods for Wave Phenomena. Academic Press.

Bleistein, N. (1986), Two-And-One-Half Dimensional In-Plane Wave Propagation. *Geophysical Prospecting*, **34**, 668–703.

Bording, R. P. & Liner, C. L. (1993), Some Numerical Aspects of the 2.5-Dimensional Wave Equation. *63rd Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 205–207.

Liner, C. L. (1991), Theory of a 2.5-D Acoustic Wave Equation for Constant Density Media. *Geophysics*, **56**, 2114–2117.

Liner, C. L. & Stockwell, J. W. (1993), Some Analytic Aspects of the 2.5-Dimensional Wave Equation. *63rd Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 201–204.

Mitchell, A. R. & Griffiths, D. F. (1980), The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. John Wiley.

Oldham, K. B. & Spanier, J. (1974), The Fractional Calculus. Academic Press, New York.

Schleicher, J., Tygel, M. & Hubral, P. (1993), 3-D True-Amplitude Finite-Offset Migration. *Geophysics*, **58**, 1112–1126.

Stockwell, J. W. (1995), 2.5-D Wave Equations and High-Frequency Asymptotics. *Geophysics*, **60**, 556–562.

Williamson, P. R. & Pratt, R. G. (1995), A Critical Review of Acoustic Wave Modelling Procedures in 2.5 Dimensions. *Geophysics*, **60**, 591–595.

A

Função de Green 3D

A função de Green 3D é uma solução para a equação

$$\left[\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz}\right] G_3(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t), \tag{A.1}$$

com as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} G_3(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ \partial_t G_3(\mathbf{x}, 0) &= 0. \end{cases} \tag{A.2}$$

Para achar a expressão da função de Green 3D, definimos o par de Transformadas de Fourier de $u(\mathbf{x}, t)$ no tempo e no espaço como sendo

$$\hat{u}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}\, e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} u(\mathbf{x}, t) \tag{A.3a}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \hat{u}(\mathbf{k}, \omega), \tag{A.3b}$$

onde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$. Aplicando a Transformada de Fourier na equação (A.1), chega-se à seguinte equação para $\hat{G}_3(\mathbf{k}, \omega)$

$$\hat{G}_3(\mathbf{k}, \omega)(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}) = 1, \tag{A.4}$$

isto é

$$\hat{G}_3(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c_0^2}{c_0^2 k^2 - w^2}, \tag{A.5}$$

onde $k^2 = \|\mathbf{k}\|^2$. Tomando a Transformada de Fourier Inversa na expressão acima obtém-se

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{c_0^2}{(2\pi)^4} \int_{\mathcal{C}} dw \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}\, \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}}{c_0^2 k^2 - w^2}, \tag{A.6}$$

onde $\mathcal{C}$ é um contorno de $-\infty$ a $+\infty$ passando logo acima dos pólos $w = \pm c_0 k$.

A escolha dos contornos é feita baseada no Princípio da Causalidade. Para $t < 0$, o contorno escolhido é fechado por cima, assim, como o integrando é uma função analítica nesta região, conclui-se que $G_3(\mathbf{x}, t) = 0$ para $t < 0$.

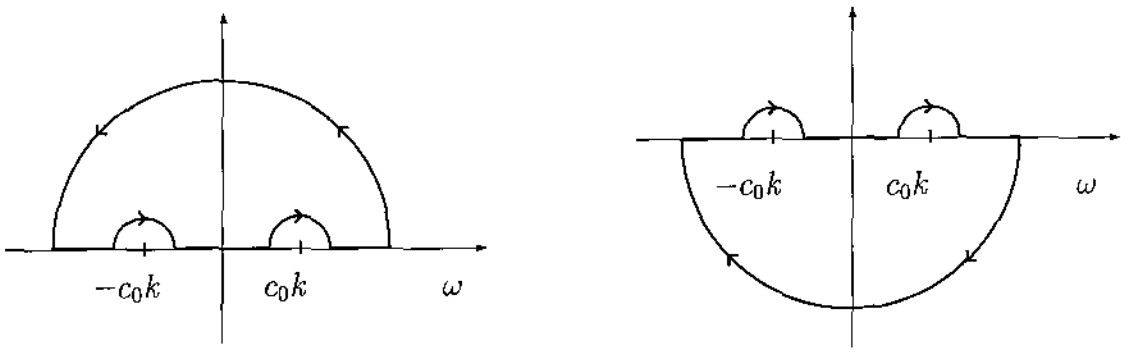

Figura A.1: Contornos apropriados para a integração na freqüência.

Para $t > 0$, o contorno é fechado por baixo. Avaliando somente a integral em ω, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_C dw \frac{e^{-i\omega t}}{k^2c_0^2 - w^2} &= -2\pi i \operatorname{Res}\left\{\frac{e^{-i\omega t}}{c_0k - w};\ \omega = -c_0k\right\} - 2\pi i \operatorname{Res}\left\{\frac{e^{-i\omega t}}{c_0k + w};\ \omega = c_0k\right\} \\ &= -\pi i\left(\frac{e^{ic_0kt} - e^{-ic_0kt}}{c_0k}\right). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Substituindo o resultado acima em (A.6), temos

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{-ic_0}{2(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}\frac{e^{ic_0kt} - e^{-ic_0kt}}{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{A.8}$$

Considerando a direção do vetor $\mathbf{x}$ como sendo o eixo polar, introduzindo-se na expressão acima coordenadas esféricas, obtendo

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{-ic_0}{2(2\pi)^3}\int_0^{\infty} k\, dk \int_{S_1} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, e^{ikR\cos\theta}(e^{ic_0kt} - e^{-ic_0kt}), \tag{A.9}$$

onde $R = \|\mathbf{x}\|$ e S_1 é a esfera de raio um centrada na origem. Continuando a avaliação da integral, cabe observar que integral em k é divergente. No entanto, prossegue-se com as contas, interpretando esta integral como uma distribuição agindo sobre a integral da parte angular. Como não há dependência de φ no integrando,

$$\begin{aligned} G_3(\mathbf{x}, t) &= \frac{-c_0}{8\pi^2 R}\int_0^{\infty} dk\,(e^{ic_0kt} - e^{-ic_0kt})\int_0^{\pi} d\theta (ikR\sin\theta) e^{ikR\cos\theta} \\ &= \frac{-c_0}{8\pi^2 R}\int_0^{\infty} dk\,(e^{ic_0kt} - e^{-ic_0kt})(e^{ikR} - e^{-ikR}). \end{aligned} \tag{A.10}$$

Após alguma manipulação algébrica, chega-se a

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{c_0}{8\pi^2 R}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(c_0t - R)} + \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(c_0t + R)}\right]. \tag{A.11}$$

Lembrando que a representação integral da Delta de Dirac é dada por (veja, por exemplo, Bleistein (1984), Capítulo 2):

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}, \tag{A.12}$$

conclui-se que

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{c_0}{4\pi R}[\delta(c_0 t - R) + \delta(c_0 t + R)]. \tag{A.13}$$

Como o argumento da segunda Delta é sempre positivo, chega-se à expressão da Função de Green 3D,

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(t - R/c_0)}{4\pi R}, \tag{A.14}$$

onde é usada a seguinte propriedade: $\delta(at) = \delta(t)/|a|$.

Usando a expressão acima, pode-se calcular facilmente a Transformada de Fourier no tempo da Função de Green 3D

$$\hat{g}_3(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{\delta(t - R/c_0)}{4\pi R} e^{-i\omega t} = \frac{e^{-i\omega R/c_0}}{4\pi R}. \tag{A.15}$$

B

Função de Green 2D

A função de Green 2D é uma solução da equação

$$\left[\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] G_2(\mathbf{x}, t) \;=\; \delta(\mathbf{x})\delta(t), \tag{B.1}$$

onde $\mathbf{x} = (x, z)$, com as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} G_2(\mathbf{x}, 0) & = \; 0, \\ \partial_t G_2(\mathbf{x}, 0) & = \; 0. \end{cases} \tag{B.2}$$

A equação da onda bidimensional com fonte pontual pode ser interpretada como sendo a equação tridimensional cuja fonte é a linha $(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$. Pelo princípio da superposição, o efeito causado pela fonte em linha $(0, y, 0)$, registrado em $(x, 0, z)$, é a soma dos efeitos causados por fontes infinitesimais, quase pontuais, localizadas sobre esta mesma linha, registrados em $(x, 0, z)$. Veja Figura B.1.

Assim, para obter a expressão da função de Green 2D, integra-se a função de Green 3D, dada por (A.14), ao longo de toda linha $(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$. Isto é, acumula-se o efeito de todas estas fontes infinitesimais:

$$\begin{aligned} G_2(x, z, t) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} dy\, G_3(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \frac{\delta(t - R/c_0)}{4\pi R} \\ &=\; 2\int_0^{\infty} dy\, \frac{\delta(t - R/c_0)}{4\pi R}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e foi usado o fato de $G_3(\mathbf{x}, t)$ ser uma função par com relação à variável y. Fazendo a mudança de variável $u = R/c_0$, obtém-se

$$G_2(x, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{r/c_0}^{\infty} du \frac{\delta(t - u)}{\sqrt{u^2 - r^2/c_0^2}}, \tag{B.4}$$

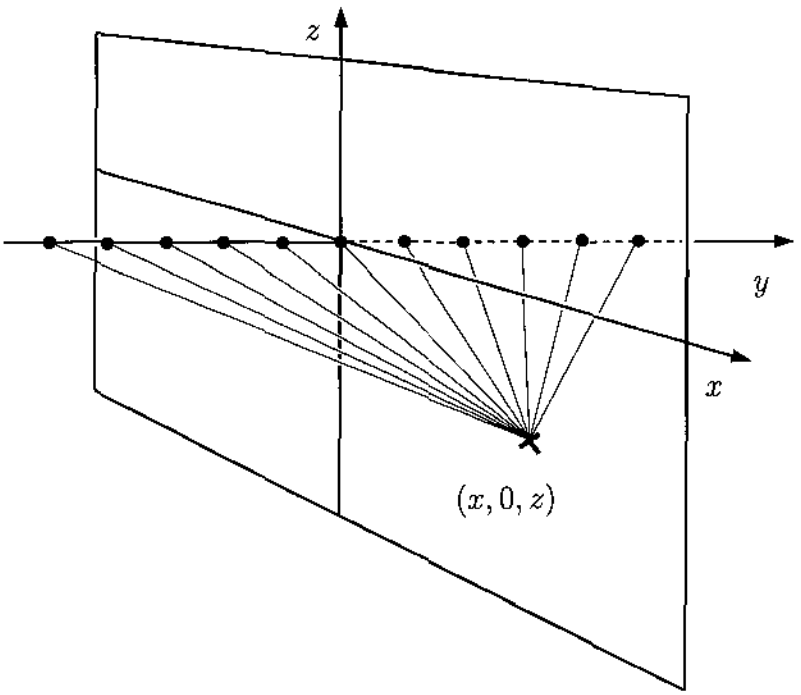

Figura B.1: A fonte em linha pode ser encarada como uma seqüência infinita de fontes pontuais (infinitesimais) sobre esta linha.

onde $r = \sqrt{x^2 + z^2}$. Se $t < r/c_0$, a função $G_2(x, z, t)$ é nula. Por outro lado, se $t \geq r/c_0$, chega-se a

$$G_2(x, z, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - r^2/c_0^2}}. \tag{B.5}$$

Portanto, a função de Green 2D para a equação da onda 2D é

$$G_2(x, z, t) = \frac{H(t - r/c_0)}{2\pi\sqrt{t^2 - (r/c_0)^2}}, \tag{B.6}$$

onde H é a função de Heaviside definida em (2.12).

Usando a expressão (B.3) pode-se calcular a Transformada de Fourier no tempo da função de Green 2D

$$\begin{aligned} \hat{g}_2(x, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \frac{\delta(t - R/c_0)}{4\pi R} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \frac{e^{-i\omega R/c_0}}{4\pi R}, \end{aligned} \tag{B.7}$$

onde foi usado a troca da ordem de integração. A integral resultante pode ser avaliada em termos assintóticos, isto é, pode-se achar uma aproximação desta integral quando ω tende para infinito (ou ω muito grande). Para se chegar a tal aproximação, um método que pode ser utilizado é o

método da Fase Estacionária (Bleistein, 1984), a saber:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(y)\, e^{i\omega\phi(y)} \sim \left[\frac{2\pi}{|\omega\phi''(y_*)|}\right]^{1/2} f(y_*)\ \exp\left[i\omega\phi(y_*) + i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}(\omega\phi''(y_*))\right], \tag{B.8}$$

para $|\omega| \gg 1$, onde y_* é um ponto estacionário isolado de $\phi(x)$, isto é, $\phi'(y_*) = 0$ e $\phi''(y_*) \neq 0$. Aplicando este resultado na expressão integral de $\hat{g}_2(x, z, \omega)$ dada por (B.7), obtém-se

$$\hat{g}_2(x, z, w) \sim \frac{\exp[-i(\omega r/c_0 + \pi/4\,\mathrm{sign}\omega)]}{2\sqrt{2\pi\,|\omega| r/c_0}}, \qquad |\omega| \gg 1, \tag{B.9}$$

onde o ponto estacionário usado é $y_* = 0$.

C

Dedução da Equação de Liner

Como foi dito antes, deseja-se computar

$$L(x,z,t) = \left[\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] G_3(x,0,z,t), \tag{C.1}$$

onde $G_3(x,y,z,t)$ é a função de Green 3D (deduzida no Apêndice A), cuja expressão é dada por

$$G_3(x,y,z,t) = \frac{\delta(t - R/c_0)}{4\pi R}. \tag{C.2}$$

onde $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Além disso, sabe-se que $G_3(x,y,z,t)$ satisfaz a seguinte equação

$$\left[\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz}\right] G_3(x,y,z,t) \;=\; 0. \tag{C.3}$$

para $\mathbf{x} \neq 0$ e $t \neq 0$. Reescrevendo a equação acima, obtém-se

$$\left[\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] G_3(x,y,z,t) \;=\; \partial_{yy} G_3(x,y,z,t). \tag{C.4}$$

Especializando (C.4) em $y = 0$, chega-se a

$$\left[\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{zz}\right] G_3(x,0,z,t) \;=\; \partial_{yy} G_3(x,y,z,t)\Big|_{y=0}. \tag{C.5}$$

Finalmente, comparando as equações (C.1) e (C.5), conclui-se que

$$L(x,z,t) = \partial_{yy} G_3(x,y,z,t)\Big|_{y=0}. \tag{C.6}$$

Resta computar a derivada $\partial_{yy} G_3(x,y,z,t)$ para, em seguida, aplicar em $y = 0$. A derivada de primeira ordem de G_3 com relação a y é dada por

$$\begin{aligned}\partial_y G_3 &= \frac{\delta'(t-R/c_0)}{4\pi R}\partial_y\delta(t-R/c_0) - \frac{\delta(t-R/c_0)}{4\pi R^2}\partial_y R \\ &= -\partial_t G_3\frac{y}{Rc_0} - G_3\frac{y}{R^2},\end{aligned} \tag{C.7}$$

onde o apóstrofe ($'$) indica derivada da função com relação ao argumento. Derivando novamente com relação a y, vem

$$\begin{aligned}\partial_{yy}G_3 &= -\frac{y}{R^2}\left[\frac{R}{c_0}\partial_t\left(-\partial_t G_3\frac{y}{Rc_0} - G_3\frac{y}{R^2}\right) - \partial_t G_3\frac{y}{Rc_0} - G_3\frac{y}{R^2}\right] \\ &\quad - \partial_t G_3\left(\frac{1}{Rc_0} + \frac{y^2}{R^2c_0}\right) - G_3\left(\frac{1}{R^2} + \frac{2y^2}{R^4}\right).\end{aligned} \tag{C.8}$$

Tomando $y = 0$ no resultado acima, chega-se a

$$\begin{aligned}\partial_{yy}G_3(x,y,z,t)\Big|_{y=0} &= -\frac{1}{rc_0}\partial_t G_3(x,0,z,t) - \frac{1}{r^2}G_3(x,0,z,t) \\ &= -\left[\frac{1}{rc_0}\partial_t + \frac{1}{r^2}\right]G_3(x,0,z,t),\end{aligned} \tag{C.9}$$

onde $r = \sqrt{x^2+z^2}$. Finalmente, conclui-se que

$$L(x,z,t) = -\left[\frac{1}{rc_0}\partial_t + \frac{1}{r^2}\right]G_{2.5}(x,z,t). \tag{C.10}$$

D

Semi-Derivada no Domínio da Freqüência

Pode-se reescrever a definição do operador semi-derivada dada em (6.5) como sendo

$$D^{1/2}g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{H(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}} g(\tau), \tag{D.1}$$

onde H é a função de Heaviside definida em (2.12). Identificando esta última integral como uma convolução em t, observa-se que

$$D^{1/2}g(t) = \frac{d}{dt}\Big[g(t) * \mu(t)\Big], \tag{D.2}$$

onde $\mu(t)$ é definido por

$$\mu(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}}. \tag{D.3}$$

Portanto, quando a Transformada de Fourier é aplicada na expressão da Semi-Derivada, obtém-se

$$\mathcal{F}[D^{1/2}g(t)] \;=\; \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\Big[g(t) * \mu(t)\Big]\right\} \;=\; i\omega\, \mathcal{F}\Big[g(t) * \mu(t)\Big] \;=\; i\omega\, \hat{g}(\omega)\, \hat{\mu}(\omega), \tag{D.4}$$

onde é usada a propriedade de que a Transformada de Fourier da convolução de duas funções é o produto das transformadas das funções. Computando a Transformada de Fourier de $\mu(t)$:

$$\mathcal{F}\Big[\mu(t)\Big] = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}} e^{-i\omega t} = \int_{0}^{\infty} dt\, \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\pi t}}, \tag{D.5}$$

e introduzindo uma nova variável de integração $y = \sqrt{i\omega t}$, obtém-se

$$\mathcal{F}\Big[\mu(t)\Big] \;=\; \frac{2}{\sqrt{i\pi\omega}}\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy \;=\; \frac{1}{\sqrt{i\omega}}. \tag{D.6}$$

Substituindo a expressão acima em (D.4), chega-se a

$$\mathcal{F}\left[D^{1/2}g(t)\right] = \sqrt{i\omega}\ \hat{g}(\omega). \tag{D.7}$$

Se a raiz quadrada de um número complexo $z = x + iy$ é definida como sendo

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\exp\left[i\theta/2\right], \tag{D.8}$$

onde $\rho = |z|$ e $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$, pode-se reescrever a expressão acima, chegando-se a

$$\mathcal{F}\left[D^{1/2}g(t)\right] = \sqrt{|w|}\ \exp\left[i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\omega)\right]\hat{g}(\omega), \tag{D.9}$$

que é a expressão da Semi-Derivada no domínio da freqüência.

Vale observar que existe uma conexão entre a função $\mu(t)$ e a função de Green 2D dada pela fórmula (B.6). Computando a equação (B.6) para $t \approx r/c_0$, chega-se a

$$G_2(x,z,t) \approx \frac{H(t-r/c_0)}{2\pi\sqrt{2r/c_0}\sqrt{t-r/c_0}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\, r/c_0}}\ \mu(t-r/c_0), \tag{D.10}$$

onde μ é definida pela equação (D.3). Ou em termos da freqüência

$$\begin{aligned}\hat{g}_2(x,z,\omega) &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi r/c-0}}\mathcal{F}\left[\mu(t-r/c_0)\right] \\ &= \frac{e^{-i\omega r/c_0}}{2\sqrt{2\pi\, r/c_0}}\frac{e^{-i\pi/4\operatorname{sign}\omega}}{\sqrt{|\omega|}},\end{aligned} \tag{D.11}$$

onde foi usada a propriedade de mudança de fase na Transformada de Fourier.

Pode-se observar que as equações (B.6) e (D.11) são iguais. Além disso, pela equação acima chega-se a

$$\hat{g}_3(x,0,z,\omega) \approx \hat{g}_2(x,z,\omega)\sqrt{\frac{|w|}{2\pi r c_0}}e^{i\pi/4\operatorname{sign}\omega} \tag{D.12}$$

ou, no domínio do tempo,

$$G_3(x,0,z,t) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi r c_0}}\ D^{1/2}G_2(x,z,t) \tag{D.13}$$

que é um caso particular da Correção da Amplitude 2D.

E

Equação de Liner na Freqüência

Para obter a Equação de Liner na freqüência, deve-se aplicar a Transformada de Fourier no tempo. Para facilitar as contas, multiplica-se a Equação de Liner (equação (3.10)) por $c(\mathbf{x})^2 t^2$, obtendo-se

$$\left[c(\mathbf{x})^2\, t^2\, (\partial_{xx} + \partial_{zz}) - t^2\, \partial_{tt} - t\, \partial_t - 1\,\right] u(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{E.1}$$

As duas expressões que se seguem são as definições do par de transformadas de Fourier no tempo

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{F}[u(\mathbf{x}, t)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} u(\mathbf{x}, t), \tag{E.2}$$

e

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1}[u(\mathbf{x}, \omega)] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \hat{u}(\mathbf{x}, \omega). \tag{E.3}$$

Derivando as expressões acima k vezes, chega-se a

$$\begin{aligned} \partial_\omega^k \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, (-it)^k e^{-i\omega t} u(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathcal{F}[(-it)^k u(\mathbf{x}, t)] \qquad \text{(E.4a)} \\ \partial_t^k u(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, (i\omega)^k e^{i\omega t} \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[(i\omega)^k u(\mathbf{x}, \omega)], \qquad \text{(E.4b)} \end{aligned}$$

onde assume-se que estas operações sejam válidas para $u(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{u}(\mathbf{x}, \omega)$.

Especializando as equações (E.4a) e (E.4b) para $k = 1$, vem

$$\begin{aligned} \partial_\omega \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) &= \mathcal{F}[(-it) u(\mathbf{x}, t)] \qquad \text{(E.5a)} \\ \partial_t u(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{F}^{-1}[(i\omega) \hat{u}(\mathbf{x}, \omega)]. \qquad \text{(E.5b)} \end{aligned}$$

Utilizando em sequência as fórmulas acima, pode-se calcular

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[t\partial_t u(\mathbf{x},t)] &= i\partial_\omega \mathcal{F}[\partial_t u(\mathbf{x},t)] \\ &= -\partial_\omega[w\hat{u}(\mathbf{x},\omega)]. \end{aligned} \tag{E.6}$$

Por outro lado, especializando (E.4a) e (E.4b) para $k = 2$, vem

$$\partial_{\omega\omega}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = \mathcal{F}[-t^2 u(\mathbf{x},t)] \tag{E.7a}$$

$$\partial_{tt}u(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}[-\omega^2\hat{u}(\mathbf{x},\omega)]. \tag{E.7b}$$

Manipulando as expressões acima, pode-se calcular

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[t^2\partial_{tt}u(\mathbf{x},t)] &= -\partial_{\omega\omega}\mathcal{F}[\partial_{tt}u(\mathbf{x},t)] \\ &= \partial_{\omega\omega}[\omega^2\hat{u}(\mathbf{x},\omega)]. \end{aligned} \tag{E.8}$$

Tomando a Transformada de Fourier no tempo de (E.1) e usando as expressões (E.6)–(E.8), chega-se a

$$-c(\mathbf{x})^2\partial_{\omega\omega}[\partial_{xx}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) + \partial_{zz}\hat{u}(\mathbf{x},\omega)] - \partial_{\omega\omega}[\omega^2\hat{u}(\mathbf{x},\omega)] + \partial_w[\omega\hat{u}(\mathbf{x},\omega)] - \hat{u}(\mathbf{x},\omega) = 0. \tag{E.9}$$

Por fim, usando a regra do produto e reagrupando os termos, chega-se à Equação de Liner na freqüência

$$\left[c(\mathbf{x})^2\left(\partial_{xx} + \partial_{zz} + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\right)\partial_{\omega\omega} + 3\omega\,\partial_w + 2\right]\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = 0. \tag{E.10}$$

F

Aproximação Assintótica

Para inserir a solução tentativa

$$\hat{u}(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x})e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})} \tag{F.1}$$

na Equação de Helmholtz, deve-se computar as derivadas de segunda ordem no tempo da solução acima. Em sequência são computadas as derivadas de primeira e segunda ordem desta solução

$$\partial_x \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \partial_x A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})} - i\omega\, \partial_x \tau(\mathbf{x})\, A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}, \tag{F.2a}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) &= \partial_x \Big[\partial_x A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}\Big] + \partial_x \Big[-i\omega\, \partial_x \tau(\mathbf{x})\, A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}\Big] \\
&= \omega^0 \Big[\partial_{xx} A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}\Big] \\
&+ \omega^1 \Big[-2i\, \partial_x \tau(\mathbf{x})\, \partial_x A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})} - i\, \partial_{xx} \tau(\mathbf{x})\, A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}\Big] \\
&+ \omega^2 \Big[-(\partial_x \tau(\mathbf{x}))^2\, A(\mathbf{x})\, e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}\Big].
\end{aligned} \tag{F.2b}$$

Expressões semelhantes são obtidas para as derivadas parciais com relação a y e z, bastando trocar x nas expressões acima por y ou z. Assim, somando e agrupando todos os termos e usando notação vetorial, chega-se à seguinte equação polinomial de segundo grau

$$\begin{aligned}
0 &= \Big[\Delta A(\mathbf{x})\Big]\, \omega^0 \\
&+ \Big[-2i\nabla\tau A(\mathbf{x}) \cdot \nabla\tau(\mathbf{x}) - iA(\mathbf{x})\Delta\tau(\mathbf{x})\Big]\, \omega^1 \\
&+ \left[\frac{A(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})^2} - A(\mathbf{x})\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2\right]\, \omega^2.
\end{aligned} \tag{F.3}$$

Para que a equação acima seja satisfeita, os coeficientes de cada potência de ω devem se anular independentemente. Assim, três equações diferenciais parciais são obtidas

$$\omega^0: \quad \Delta A(\mathbf{x}) = 0, \tag{F.4a}$$

$$\omega^1: \quad 2\,\nabla A(\mathbf{x}) \cdot \nabla\tau(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x})\,\Delta\tau(\mathbf{x}) = 0, \tag{F.4b}$$

$$\omega^2: \quad \|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}. \tag{F.4c}$$

A Equação de Liner na freqüência é (Apêndice E)

$$c(\mathbf{x})^2 \left[\partial_{xx} + \partial_{zz} + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\right] \partial_{\omega\omega}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) + 3\omega\partial_\omega\hat{u}(\mathbf{x},\omega) + 2\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = 0. \tag{F.5}$$

Ao inserir (F.1) na equação acima, deve-se computar derivadas parciais de até quarta ordem. A fórmulas que se seguem são as expressões destas derivadas.

Derivadas com relação a ω:

$$\partial_\omega\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = -i\tau(\mathbf{x})A(\mathbf{x})e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})} \tag{F.6a}$$

$$\partial_{\omega\omega}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = -\tau(\mathbf{x})^2 A(\mathbf{x})e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})} \tag{F.6b}$$

Derivadas com relação a ω e a x (ou z):

$$\partial_x\partial_{\omega\omega}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = -2\tau(\mathbf{x})\,\partial_x\tau(\mathbf{x})\,\hat{u}(\mathbf{x},w) - \tau(\mathbf{x})^2\,\partial_x\hat{u}(\mathbf{x},\omega) \tag{F.7a}$$

$$\begin{aligned}\partial_{xx}\partial_{\omega\omega}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = &-2\,(\partial_x\tau(\mathbf{x}))^2\,\hat{u}(\mathbf{x},\omega) - 2\,\tau(\mathbf{x})\,\partial_{xx}\tau(\mathbf{x})\,\hat{u}(\mathbf{x},t)\\ &- 4\,\tau(\mathbf{x})\,\partial_x\tau(\mathbf{x})\,\partial_x\hat{u}(\mathbf{x},\omega) - \tau(\mathbf{x})^2\,\partial_{xx}\hat{u}(\mathbf{x},\omega)\end{aligned} \tag{F.7b}$$

Usando as expressões (F.2a) e (F.2b) na equação (F.7b), segue que

$$\begin{aligned}\partial_{xx}\partial_{\omega\omega}\hat{u}(\mathbf{x},\omega) = &-2\left[(\partial_x\tau(\mathbf{x}))^2 + \tau(\mathbf{x})\,\partial_{xx}\tau(\mathbf{x})\right] A(\mathbf{x})\,e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}\\ &-4\,\tau(\mathbf{x})\,\partial_x\tau(\mathbf{x})\left[\partial_x A(\mathbf{x}) - i\omega\,\partial_x\tau(\mathbf{x})\,A(\mathbf{x})\right] e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}\\ &-\tau(\mathbf{x})^2\Big[\ \omega^0\big(\partial_{xx}A(\mathbf{x})\big)\\ &\qquad + \omega^1\big(-2i\,\partial_x\tau(\mathbf{x})\,\partial_x A(\mathbf{x}) - i\,\partial_{xx}\tau(\mathbf{x})\,A(\mathbf{x})\big)\\ &\qquad + \omega^2\big(-(\partial_x\tau(\mathbf{x}))^2\,A(\mathbf{x})\big)\ \Big]e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})},\end{aligned} \tag{F.8}$$

lembrando que a expressão para a derivada $\partial_{zz}\partial_{\omega\omega}\hat{u}$ é semelhante à expressão acima, bastando trocar x por z.

Somando e regrupando todos os termos e usando notação vetorial, obtém-se a seguinte equação polinomial do segundo grau em ω:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \Big[\, 2\,A(\mathbf{x}) \;-\; 2\,c(\mathbf{x})^2\,A(\mathbf{x})\,\big(\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 \;-\; \tau(\mathbf{x})\,\Delta\tau(\mathbf{x})\big) \\ & \quad -\; 4\,c(\mathbf{x})^2\,\tau(\mathbf{x})\,\nabla\tau(\mathbf{x})\cdot\nabla A(\mathbf{x}) \;-\; c(\mathbf{x})^2\tau(\mathbf{x})^2\,\Delta A(\mathbf{x})\,\Big]\,\omega^0 \\ & +\; \Big[\, 4i\,c(\mathbf{x})^2\,\tau(\mathbf{x})\,\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2\,A(\mathbf{x}) \;+\; 2i\,c(\mathbf{x})^2\tau(\mathbf{x})^2\,\nabla A(\mathbf{x})\cdot\nabla\tau(\mathbf{x}) \\ & \quad +\; i\,c(\mathbf{x})^2\,\tau(\mathbf{x})^2 A(\mathbf{x})\,\Delta\tau(\mathbf{x}) \;-\; 3i\,\tau(\mathbf{x})\,A(\mathbf{x})\,\Big]\,\omega^1 \\ & +\; \Big[c(\mathbf{x})^2\,\tau(\mathbf{x})^2\,A(\mathbf{x})\,\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 \;-\; \tau(\mathbf{x})^2\,A(\mathbf{x})\,\Big]\,\omega^2. \end{aligned} \tag{F.9}$$

Anulando os coeficientes do polinômio acima, chega-se a três equações diferenciais parciais

$$\omega^0: \quad A(\mathbf{x})\,\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 \;-\; \tau(\mathbf{x})\,\Delta A(\mathbf{x}) \;=\; 0, \tag{F.10a}$$

$$\omega^1: \quad 2\,\nabla A(\mathbf{x})\cdot\nabla\tau(\mathbf{x}) \;+\; A(\mathbf{x})\,\Delta\tau(\mathbf{x}) \;+\; \frac{A(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})^2\tau(\mathbf{x})} \;=\; 0, \tag{F.10b}$$

$$\omega^2: \quad \|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 \;=\; \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}. \tag{F.10c}$$

G

Correção da Amplitude da Equação de Liner

Pode-se achar uma relação entre as amplitudes $A_{2.5}$ e A_{L}, sem utilizar as suas expressõs explícitas ao longo de um raio. Em outras palavras, procura-se $\alpha(\sigma)$ tal que a relação

$$A_{2.5} = \alpha A_{\mathrm{L}} \tag{G.1}$$

seja válida ao longo de um raio parametrizado por σ. Pode-se considerar também que em $\sigma = \sigma_0$ a relação é dada por

$$A_{2.5} = \alpha_0 A_{\mathrm{L}}, \tag{G.2}$$

onde α_0 é uma constante. Sem perda de generalidade, pode-se considerar que $\alpha_0 = 1$, pois deseja-se comparar as amplitudes $A_{2.5}$ e A_{L} ao final de um raio.

Inserindo a expressão (G.12) na Equação de Transporte 2.5D (5.29), chega-se a

$$2A_{\mathrm{L}}\nabla\alpha \cdot \nabla\tau + 2\alpha\nabla A_{\mathrm{L}} \cdot \nabla\tau + \alpha A_{\mathrm{L}}\Delta\tau + \alpha\frac{A_{\mathrm{L}}}{\sigma} = 0. \tag{G.3}$$

Reagrupando os termos, obtém-se

$$2\nabla A_{\mathrm{L}} \cdot \nabla\tau + A_{\mathrm{L}}\Delta\tau + A_{\mathrm{L}}\left(2\frac{\nabla\alpha \cdot \nabla\tau}{\alpha} + \frac{1}{\sigma}\right) = 0. \tag{G.4}$$

Comparando a equação acima com a Equação de Transporte-Liner (5.36b), conclui-se que a quantidade α deve satisfazer a seguinte equação

$$2\frac{\nabla\alpha \cdot \nabla\tau}{\alpha} + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{c^2\tau}. \tag{G.5}$$

Multiplicando a equação acima por α^2 e usando a relação $\frac{d\alpha}{d\sigma} = \nabla\alpha \cdot \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} = \nabla\alpha \cdot \nabla\tau$, chega-se a

$$\frac{d}{d\sigma}(\alpha^2) = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{c^2}{\sigma}\right)\alpha^2. \tag{G.6}$$

Integrando, obtém-se

$$\log \alpha^2 = \int \frac{1}{c^2 \tau}\, d\sigma - \log(\sigma) \tag{G.7}$$

por outro lado, lembrando que $\dfrac{d\sigma}{d\tau} = c^2$ (equação (5.25c), chega-se a

$$\ln(\alpha^2) = \ln(\tau) - \ln(\sigma) + \log(K), \tag{G.8}$$

onde K é uma constante. Assim,

$$\alpha = \sqrt{\frac{K\tau}{\sigma}}\,. \tag{G.9}$$

Com foi dito anteriormente, a condição inicial para α é $\alpha(\sigma_0) = 1$. Por outro lado, tem-se que $\tau(\sigma_0) = \sigma_0/c_0^2$, implicando que $K = c_0^2$. Portanto, a quantidade α é dada pela fórmula

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_0^2 \tau}{\sigma}}\,. \tag{G.10}$$

Assim, a expressão que corrige a amplitude de Liner (A_{L}) para a amplitude 2.5D ($A_{2.5}$) ao longo do raio parametrizado por σ é

$$A_{2.5} = \sqrt{\frac{c_0^2 \tau}{\sigma}}\, A_{\mathrm{L}}. \tag{G.11}$$

Uma observação final: para o caso em que $\sigma = 0$, isto é, quando o raio que começa na fonte, basta trocar c_0 por c_s na expressão acima, isto é

$$A_{2.5} = \sqrt{\frac{c_s^2 \tau}{\sigma}}\, A_{\mathrm{L}}, \tag{G.12}$$

onde $c_s = c(\mathbf{x}_s)$ é velocidade na fonte.