GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE WEDDERBURN

ALTAIR DE FÁTIMA FURIGO POLETTINI

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE WEDDERBURN

ALTAIR DE FÁTIMA FURIGO POLETTINI

ORIENTADOR

Prof. Dr. HU SHENG

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com auxílio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Março de 1982

A meus pais

e ao Valter

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Hu Sheng, pela proposta do presente trabalho, pela atenção, disponibilidade e segura orientação na elaboração do mesmo.

A meus colegas e professores, por seus estímulos e ensinamentos.

Ao CNPq e à FAPESP, que, com o apoio financeiro, possibilitaram a realização deste trabalho.

GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE WEDDERBURN

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

§1. O Teorema de Wedderburn 1

§2. Algumas definições e propriedades 16

§3. Anéis simples e anéis semi-simples 21

CAPÍTULO II - GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE WEDDERBURN

§1. O Teorema de Morita, Auslander e Goldman 30

§2. Generalizações do Teorema de Wedderburn 45

BIBLIOGRAFIA 48

INTRODUÇÃO

A partir da noção de um módulo à esquerda (direita) M definido sobre um anel qualquer R, procuramos chegar a resultados análogos aos da Álgebra Linear. Indagando sobre $End_R M = R'$, o conjunto de todos os R-módulo homomorfismos à esquerda de M em M, concluimos que R' é um R-módulo à esquerda, (1.1.4), sob certas condições, no caso de R não ser comutativo. Também, R' é um anel, para todo R-módulo à esquerda M, (1.1.7). Ainda, verificando que M pode ser considerado como um R'-módulo à esquerda, podemos pensar em $R'' = End_{R'} M$ e, assim, R'' é também um anel. Queremos, então, mostrar quando R e R'' são isomorfos como anéis.

Da Álgebra Linear temos que uma transformação linear sobre um espaço vetorial F de dimensão finita n é, na verdade, uma matriz n x n sobre F, [H - p.284]. Neste trabalho, quando R é um anel de divisão, chamamos um módulo à esquerda (direita) sobre R de espaço vetorial à esquerda (direita) sobre R. Daí, se M é um R-módulo à esquerda livre de dimensão finita n sobre R, obtemos que um R-módulo homomorfismo à esquerda é, também, uma matriz n x n sobre R, (1.1.11).

Ao considerarmos um R-módulo à esquerda M simples, chegamos que $End_R M = R'$ é um anel de divisão, (1.1.13), e, então, podemos ter M espaço vetorial de dimensão finita sobre R'. Assim, com as hipóteses de um R-módulo à esquerda M simples e fiel e M de dimensão finita sobre R', obtemos um isomorfismo de anel entre R e R'', no Teorema de Wedderburn, (1.1.15). O objetivo principal deste trabalho é apresentar generalizações deste resultado. Para isto vemos algumas propriedades importantes e fazemos um estudo sobre anéis simples e semi-simples, chegando ao resultado que afirma que R é um anel semi-simples à esquerda se e somente se R é artiniano à esquerda e $J(R)=(0)$, (1.3.10).

O primeiro fato que generaliza o Teorema de Wedderburn surge quando consideramos como hipótese apenas um anel R simples e artiniano, concluindo a existência de um anel de divisão D e um D-espaço vetorial de dimensão finita M, de maneira que R e $End_D\ M$ sejam isomorfos, (2.2.1). Depois, retirando a hipótese de R ser artiniano e considerando M, um ideal à esquerda não nulo de R, chegamos a uma segunda generalização, com a conclusão de que R e $End_D\ M$ são isomorfos, onde $D = End_R\ M$, (2.2.2). Este importante resultado é deviso a M. A. Rieffel.

Este trabalho acha-se dividido em dois capítulos. O capítulo I é composto de três parágrafos e o capítulo II, de dois parágrafos. No primeiro parágrafo do capítulo I apresentamos o Teorema de Wedderburn e, nos dois parágrafos seguintes preparamos o necessário para as generalizações do Teorema de Wedderburn. São apresentadas, então, algumas definições e propriedades no segundo parágrafo e, no terceiro parágrafo, fazemos um estudo sobre anéis simples e semi-simples, onde encontramos uma caracterização do anel semi-simples, já citada acima. As generalizações do Teorema de Wedderburn aparecem no segundo parágrafo do capítulo II e o primeiro parágrafo deste capítulo é todo ele dedicado ao Teorema de Morita, Auslander e Goldman, (2.1.12), pré-requisito para a primeira generalização apresentada. Este teorema traz resultados bastante fortes, pois conclui que um dado R-módulo à esquerda P é um S^o-módulo à direita projetivo finitamente gerado, onde $S = End_R\ P$, e que R e $T = End_{S^o}\ P$ são isomorfos como anéis. A segunda generalização é o teorema devido a M. A. Rieffel, mas a demonstração dada é original deste trabalho.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Neste capítulo, no primeiro parágrafo, partimos da noção de R-módulo à esquerda e generalizamos o conceito de espaço vetorial da Álgebra Linear, com o objetivo de apresentar o Teorema de Wedderburn, (1.1.15). Indagando sobre $End_R M=R'$, o conjunto de todos os R-módulo-homomorfismos à esquerda de M em M, chegamos à conclusão de que R' é um R-módulo à esquerda, sob certas condições, (1.1.4). Também, R' é um anel, para todo R-módulo M, (1.1.7). Verificando que M pode ser considerado como um R'-módulo à esquerda, definimos $R''=End_{R'}M$ e, assim, R'' também é um anel. O Teorema de Wedderburn nos diz quando R' e R'' são isomorfos como anéis. Nos dois parágrafos seguintes apresentamos resultados que terão influência no desenvolvimento do capítulo II, onde vemos generalizações do Teorema de Wedderburn. No segundo parágrafo são dadas algumas definições e propriedades, e no terceiro parágrafo fazemos um estudo sobre anéis simples e semi-simples, chegando a uma caracterização de anéis semi-simples, (1.3.10).

§1. O TEOREMA DE WEDDERBURN

O objetivo deste parágrafo é apresentar o Teorema de Wedderburn.

Damos início com a definição de anel.

<u>Definição</u>: Um conjunto não vazio R é chamado <u>anel</u> se existem duas operações + e . definidas em R tal que (R,+) é um grupo abeliano, (R,.) é um semi-grupo com identidade e as seguintes propriedades são válidas: $a.(b+c)=a.b+a.c$ e $(b+c).a=b.a+c.a$, para todos $a,b,c \in R$. Denotamos um anel por (R,+,.).

Se temos $a.b=b.a$ para todos $a,b \in R$, dizemos que R é um <u>anel comutativo</u>.

Consideramos neste trabalho sempre anéis com elemento identidade 1 e tal que $1\neq 0$.

Colocamos a seguir a noção de homomorfismo de anel.

<u>Definição</u>: Sejam R e S dois anéis. A aplicação $f : R \to S$ é um <u>homomorfismo de anel</u> se:

(1) $f(a + b)=f(a) + f(b)$ e

(2) $f(ab)=f(a).f(b)$ para todos $a,b \in R$.

Apresentamos agora a definição de ideal à esquerda (direita).

<u>Definição</u>: Seja R um anel. Um subconjunto não vazio I de R é

denominado um <u>ideal à esquerda</u> (direita) de R se valem:

(1) se $a,b \in I$, então $a-b \in I$

(2) se $r \in R$ e $a \in I$, então $ra \in I$ ($ar \in I$)

Um ideal é chamado <u>ideal bilateral</u> (ou um ideal) se ele é ideal à esquerda e à direita.

O próximo lema fornece-nos um exemplo importante de um ideal bilateral.

<u>Lema</u> 1.1.1: Se I é um ideal à esquerda de R, então $IR=\{\sum_{i=1}^{n} a_i r_i \mid a_i \in I, r_i \in R, \text{ para todo } i\}$ é um ideal bilateral de R.

<u>Demonstração</u>: Basta verificar que $r(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i) \in IR$ e $(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i)r \in IR$, onde $a_i \in I$ e $r, r_i \in R$.

Temos:

$r(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i)=\sum_{i=1}^{n} (ra_i)r_i \in IR$, pois $ra_i \in I$ e

$(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i)r=\sum_{i=1}^{n} a_i(r_i r) \in IR$, pois $r_i r \in R$

<u>Definição</u>: Se $f : R \to S$ é um homomorfismo de anel, o núcleo de $f=\mathrm{Ker} f$ é o conjunto dos elementos a de R tal que $f(a)=0$.

Temos o seguinte lema:

<u>Lema</u> 1.1.2: Se $f : R \to S$ é um homomorfismo de anel, então Kerf é um ideal bilateral de R.

<u>Demonstração</u>: Encontra-se em [H - p.113].

Apresentamos agora a definição do anel oposto de um anel R, que é um anel com os mesmos elementos do anel R, com a adição definida da mesma maneira que em R e tendo uma multiplicação que troca a ordem dos elementos.

Definição: Seja $(R,+,.)$ um anel. Em $R^o=\{x^o \mid x^o=x \in R\}$ definimos:

(1) A adição definida em R^o é a mesma definida em R, isto é:

$x^o + y^o = (x + y)^o$ para todos $x,y \in R$

(2) A multiplicação é dada por:

$x^o.y^o = (yx)^o$ para todos $x,y \in R$

Verifica-se facilmente que R^o é um anel com as operações acima. R^o é chamado anel oposto de R.

Observemos que quando R é comutativo, não há diferença entre R e R^o.

Como $x^{oo}.y^{oo} = (y^o.x^o)^o = (xy)^{oo}$ em R^{oo}, temos que R e R^{oo} são isomorfos, pois podemos definir a aplicação $f : R \to R^{oo}$ por $f(x)=x^{oo}$, para todo $x \in R$. Daqui para frente identificaremos R^{oo} com R, isto é, consideraremos $R^{oo} = R$.

A definição de módulo que apresentamos a seguir é uma generalização da de espaço vetorial, pois ao invés de restringirmos os escalares a um corpo, permitimos que sejam elementos de um anel qualquer.

Definição: Seja R um anel qualquer. Um conjunto não vazio M é dito um R-módulo à esquerda se $(M,+)$ é um grupo abeliano, com uma aplicação definida por $R \times M \to M$ para todos $r \in R$ e $m \in M$,

$$(r,m) \to rm$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $r(a+b) = ra+rb$

(2) $(r+s)a = ra+sa$

(3) $r(sa) = (rs)a$

(4) $1a = a$ para todos $a,b \in M$ e $r,s \in R$.

Analogamente podemos definir um <u>R-módulo à direita</u>, segundo $M \times R \to M$ para todos $m \in M$ e $r \in R$.

$$(m,r) \to mr$$

Por conveniência usaremos as seguintes notações:

<u>Notações</u> : Sejam R e S anéis.

$_RM$: M é um R-módulo à esquerda

R-mod : R-módulo à esquerda

M_R : M é um R-módulo à direita

mod-R : R-módulo à direita

$_{R-S}M$: considerando $_RM$ e $_SM$ e $r(sm)=s(rm)$, $r \in R, s \in S, m \in M$.

M_{R-S} : considerando M_R e M_S e $(mr)s=(ms)r$, $r \in R, s \in S, m \in M$.

$_RM_S$: considerando $_RM$ e M_S e tal que seja válida a seguinte propriedade: $r(ms) = (rm)s$, para todos $r \in R$, $m \in M$ e $s \in S$. Chamamos $_RM_S$ um <u>R-S-bimódulo</u>.

Observemos que o anel oposto é importante para o desenvolvimento do trabalho, pois se M é um R-mod, então M é um mod-R^o e se M é um mod-R, então M é um R^o-mod. Estes fatos são válidos, pois temos: $r.m=m.r^o$ e $m.r=r^o.m$, para todos $r \in R$ e $m \in M$.

A seguir generalizamos a noção de transformação linear quando do estudo de espaços vetoriais.

<u>Definição</u>: Dados ${}_RM$ e ${}_RN$, um <u>R-módulo homomorfismo à esquerda</u> é uma aplicação $f: M \to N$ tal que:

(1) $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$

(2) $r.f(m) = f(r.m)$ para todos $m,m_1,m_2 \in M$ e $r \in R$.

<u>Definição</u>: Dados M_R e N_R, um <u>R-módulo homomorfismo à direita</u> é uma aplicação $f: M \to N$ tal que:

(1) $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$

(2) $f(m.r) = f(m).r$ para todos $m,m_1,m_2 \in M$ e $r \in R$.

<u>Definição</u>: Quando temos ${}_RM_S$ e ${}_RN_S$, $f: M \to N$ é um <u>R-S-bimódulo homomorfismo</u> se f é um R-módulo homomorfismo à esquerda e um S-módulo homomorfismo à direita e, ainda, $r.f(ms)=f(rm).s$ para todos $r \in R$, $m \in M$ e $s \in S$.

Como o conjunto de todas as transformações lineares entre dois espaços vetoriais é um espaço vetorial [H - p.174], então questionamos agora se, dados ${}_RM$ e ${}_RN$, $Hom_R(M,N)$ é um R-módulo à esquerda também ou não, onde $Hom_R(M,N)$ é o conjunto de todos os R-módulo homomorfismos à esquerda $f: M \to N$.

Um fato é que $Hom_R(M,N)$ é um grupo abeliano com relação à adição definida por $(f+g)(m) = f(m)+g(m)$ para todos $m \in M$ e $f,g \in Hom_R(M,N)$.

Observemos que, caso R seja comutativo, definindo $(r.f)(m)=f(r.m)$ para todo $f \in Hom_R(M,N)$, $r \in R$, $m \in M$, então $Hom_R(M,N)$ é um R-módulo à esquerda. Para ver isto é suficiente verificar a seguinte propriedade: $[(rs).f](m) = f(rs.m) = f(s.r.m) = (s.f)(r.m) = [r.(s.f)](m)$, onde $r,s \in R$ e $m \in M$. Caso R seja não comutativo, definindo $(r.f)(m)=f(r.m)$, chegamos a $[(rs).f](m) = [s.(r.f)](m)$, o que mostra que, assim, $Hom_R(M,N)$ não é, necessariamente, um R-módulo à esquerda. Mas vejamos alguns resultados na proposição a seguir.

<u>Proposição</u> 1.1.3: Se R e S são anéis quaisquer, temos:

(1) Dados ${}_RM$ e ${}_{S-R}N$, então $Hom_R(M,N)$ é um S-mod pela definição de $(s.f)(m)=s.(f(m))$

(2) Dados M_R e N_{S-R}, então $Hom_R(M,N)$ é um mod-S pela definição de $(f.s)(m)=f(m).s$

(3) Dados ${}_{S-R}M$ e ${}_RN$, então $Hom_R(M,N)$ é um mod-S pela definição de $(f.s)(m)=f(sm)$

(4) Dados M_{S-R} e N_R, então $Hom_R(M,N)$ é um S-mod pela definição de $(s.f)(m)=f(ms)$

(5) Dados ${}_RM$ e ${}_RN_S$, então $Hom_R(M,N)$ é um mod-S pela definição de $(f.s)(m)=f(m).s$

(6) Dados ${}_RM_S$ e ${}_RN$, então $Hom_R(M,N)$ é um S-mod pela definição de $(s.f)(m)=f(ms)$

Demonstração: Verificamos as quatro propriedades da definição de módulo em cada um dos casos. Sejam, então, $s, s_1, s_2 \in S$, $m \in M$ e $f, f_1, f_2 \in Hom_R(M,N)$.

(1) $[s.(f_1+f_2)](m)=s.[(f_1+f_2)(m)]=s.[f_1(m)+f_2(m)]=(s.f_1+s.f_2)(m)$

$[(s_1+s_2).f](m)=(s_1+s_2).f(m)=s_1.f(m)+s_2.f(m)=(s_1.f+s_2.f)(m)$

$[(s_1s_2).f](m)=(s_1s_2).f(m)=s_1.(s_2.f(m))=s_1.[(s_2.f)(m)]$

$=[s_1.(s_2.f)](m)$

$(1.f)(m)=1.f(m)=f(m)$

(2) $[(f_1+f_2).s](m)=[(f_1+f_2)(m)].s=[f_1(m)+f_2(m)].s$

$=f_1(m).s+f_2(m).s=[f_1.s+f_2.s](m)$

$[f.(s_1+s_2)](m)=f(m).(s_1+s_2)=f(m).s_1+f(m).s_2=[f.s_1+f.s_2](m)$

$[f.(s_1s_2)](m)=f(m).(s_1s_2)=[f(m).s_1].s_2=[(f.s_1)(m)].s_2$

$=[(f.s_1)s_2](m)$

$(f.1)(m)=f(m).1=f(m)$

(3) $[(f_1+f_2).s](m)=(f_1+f_2)(sm)=f_1(sm)+f_2(sm)=(f_1.s+f_2.s)(m)$

$[f.(s_1+s_2)](m)=f((s_1+s_2)m)=f(s_1m+s_2m)=f(s_1m)+f(s_2m)$

$=(f.s_1+f.s_2)(m)$

$[f.(s_1s_2)](m)=f((s_1s_2)m)=f(s_1(s_2m))=(f_1.s_1)(s_2m)$

$=[(f.s_1)s_2](m)$

$(f.1)(m)=f(1.m)=f(m)$

(4) $[s.(f_1+f_2)](m)=(f_1+f_2)(ms)=f_1(ms)+f_2(ms)=(s.f_1+s.f_2)(m)$

$[(s_1+s_2).f](m)=f(m(s_1+s_2))=f(ms_1+ms_2)=f(ms_1)+f(ms_2)$

$=(s_1.f+s_2.f)(m)$

$[(s_1s_2).f](m)=f(m(s_1s_2))=f((ms_1)s_2)=(s_2.f)(ms_1)$

$=[s_1(s_2.f)](m)$

$(1.f)(m)=f(m.1)=f(m)$

(5) Demonstra-se da mesma maneira que (2).

(6) Demonstra-se da mesma maneira que (4).

A seguir apresentamos um corolário que responde ao nosso questionamento anterior a respeito de $Hom_R(M,N)$.

Corolário 1.1.4: Temos os seguintes resultados:

(1) Dados ${}_RM_R$ e ${}_RN$, então $Hom_R(M,N)$ é um R-mod.

(2) Dados ${}_RM$ e ${}_RN_R$, então $Hom_R(M,N)$ é um mod-R.

Demonstração:

(1) Como temos ${}_RN$, podemos considerar ${}_RM_R$ e, então, por (6) de (1.1.3), temos o resultado.

(2) Como temos ${}_RM$, podemos considerar ${}_RN_R$ e, então, por (5) de (1.1.3), temos o resultado.

Temos também o seguinte corolário:

Corolário 1.1.5: Dados ${}_RM_R$e ${}_RN_R$, então $Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$ é um mod-R^o e $Hom_R(M,N)$ é igual a $Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$ como R-mod.

Demonstração: Por (1.1.3)-(5), $Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$ é um mod-R^o e e $(f^o.r^o)(m)=f^o(m).r^o$, para todos $f^o \in Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$, $r^o \in R^o$, $m \in M$. Como um mod-R^o é um R-mod, temos que $Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$ é um R-mod, e $r.f^o=f^o.r^o$, para todos $r \in R$, $f^o \in Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$.

Para qualquer $f \in Hom_R(M,N)$, temos $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$ e $f(m.r^o)=f(rm)=r.f(m)=f(m).r^o$, o que implica que $f \in Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$. Por outro lado, $f^o \in Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$ e, então, temos $f^o(m_1+m_2)=f^o(m_1)+f^o(m_2)$ e $f^o(rm)=f^o(mr^o)=f^o(m).r^o = r.f^o(m)$. Daí temos $f^o \in Hom_R(M,N)$.

Assim, $Hom_R(M,N)=Hom_{R^o}(M_{R^o},N_{R^o})$ como conjuntos. Mas, como $(f^o.r^o)(m)=f^o(m).r^o=r.f^o(m)$ e $(f^o.r^o)(m)=(r.f^o)(m)$, então $r.f^o(m)=(r.f^o)(m)$. Portanto, eles são iguais como R-mod.

Vejamos o seguinte lema:

Lema 1.1.6: Dado $_RM$, então $Hom_R(R,M) \cong M$ como R-mod.

Demonstração: Encontra-se em [L - p.123].

Uma generalização do anel das transformações lineares sobre um espaço vetorial é o fato de que $End_R\, M = Hom_R(M,M)$ é um anel, para todo R-mod M. Temos isto a seguir.

Proposição 1.1.7: Dado $_RM$, $(End_R\, M,+,o)$ é um anel com as operações + e o definidas por: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ e $(f \text{ o } g)(x)=f(g(x))$, para todos $x \in M$ e $f,g \in End_R\, M$.

Demonstração: Encontra-se em [H - p.262].

Seja $End_R\, M=R'$. Temos agora que se M é um R-mod, então M também é um R'-mod.

Lema 1.1.8: Dado ${}_RM$, consideremos $End_R\ M=R'$. Então M também é um R'-mod, por $f.m = f(m)$ onde $f \in R'$ e $m \in M$.

Demonstração: Sejam $f, f_1, f_2 \in R'$ e $m, m_1, m_2 \in M$. Temos:

$(f_1+f_2).m=(f_1+f_2)(m)=f_1(m)+f_2(m)=f_1.m+f_2.m$

$f.(m_1+m_2)=f(m_1+m_2)=f(m_1)+f(m_2)=f.m_1+f.m_2$

$(f_1 \circ f_2).m=(f_1 \circ f_2)(m)=f_1(f_2(m))=f_1(f_2.m)=f_1.(f_2.m)$

$I_{R'}.m=I_{R'}(m)=m$

Portanto, M é um R'-mod.

Uma consequência de (1.1.6) e (1.1.7) é:

Corolário 1.1.9: Dado ${}_RM$, seja $R'=End_R\ M$. Então $R''=End_{R'}\ M$ é um anel.

Observemos que para $f \in R''$, $g \in R'$, $m \in M$, temos:

$f(g(m))=f(g.m)$	pois M é um R'-mod
$=g.f(m)$	pois $f \in R''$
$=g(f(m))$	pois M é um R'-mod e $f(m) \in M$

Fazemos, mais adiante, um estudo de quando R e R'' são isomorfos. Para isto, torna-se necessário pensar um pouco mais sobre $End_R\ M$. Sabemos da Álgebra Linear que a álgebra das transformações lineares sobre um espaço vetorial F de dimensão finita n e a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre F são isomorfas, sendo F um corpo [H - p.284]. Colocamos a seguir algumas definições e generalização deste fato.

Definição: Uma matriz m x n sobre um anel R é uma família de elementos de R da forma $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, onde $a_{ij} \in R$, $i=1,\ldots m$, $j=1,\ldots n$ e $(a_{ij})=(b_{ij})$ se e somente se $a_{ij}=b_{ij}$, para todos i e j.

Definição: $M_n(R)=\{(a_{ij}) \mid (a_{ij})$ é uma matriz n x n sobre $R\}$.

Lema 1.1.10: $(M_n(R),+,.)$ é um anel com as operações:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij}) \quad e \quad (a_{ij}).(b_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$$

Demonstração: Encontra-se em [H - p.284].

Definição: Seja M um R-mod. Uma base de $_RM$ é um subconjunto não vazio de M formado de elementos linearmente independentes que geram $_RM$. $_RM$ é chamado um módulo livre se ele admite uma base ou $_RM=0$.

Definição: Um anel R é dito anel de divisão se para todo $0 \neq r \in R$, existe $s \in R$ tal que $sr=rs=1$, ou seja, todo elemento não nulo de R é inversível.

Definição: Se R é um anel de divisão, um $_RE$ (um E_R) é chamado espaço vetorial à esquerda sobre R (espaço vetorial à direita sobre R). A dimensão de $_RE$ sobre R é o número de elementos da base de $_RE$.

Observações: Temos:

(1) Todo ${}_RM\neq 0$ sobre um anel de divisão R tem uma base e quaisquer duas bases de ${}_RM$ são isomorfas. [LA - p.85,p.86ep.438]

(2) Um espaço vetorial ${}_RE$ é um R-mod livre.

Temos, então,

Teorema 1.1.11: Seja ${}_RM$ um módulo livre de dimensão n sobre um anel R. Então $End_R M$ e $M_n(R)$ são isomorfos como anéis (ou , mais geralmente, como álgebras sobre R).

Demonstração: Encontra-se em [LA - p.327].

Lembremos que $R''=End_{R'}M$, onde $R'=End_R M$ e M é um R-mod. Vemos no lema seguinte que há uma correspondência entre elementos de R e R", e essa correspondência é um homomorfismo de anel.

Lema 1.1.12: Temos:

(1) Para cada $r \in R$ definimos $L_r(m)=rm$, para todo $m \in M$. Então $L_r \in R''$.

(2) $L: R \to R''$ definida por $L(r)=L_r$, para todo $r \in R$, é um homomorfismo de anel.

Demonstração: Sejam $r,s \in R$ e $m \in M$.

(1) Verifiquemos somente a propriedade $L_r(f.m)=f.L_r(m)$, para todo $f \in R'$:

$L_r(f.m)=L_r(f(m))=r.f(m)=f(rm)=f.(rm)=f.L_r(m)$

(2) $L(r+s)(m)=L_{r+s}(m)=(r+s)m=rm+sm=L_r(m)+L_s(m)=(L_r+L_s)(m)$
$=[L(r)+L(s)](m)$ e

$$L(rs)(m)=L_{rs}(m)=(rs)(m)=r(sm)=r.L_s(m)=L_r(L_s(m))=L_r \circ L_s(m)$$
$$=[L(r) \circ L(s)](m)$$

Vemos que L é injetora se e somente se $rM=0$ implicar $r=0$.

Um R-mod M chama-se <u>fiel</u> se para qualquer $r \in R$, se $rM=0$ então $r=0$. Assim, ${}_RM$ ser fiel e L ser injetora são dois fatos equivalentes.

Vejamos o exemplo:

<u>Exemplo</u>: Sejam $R=K \oplus K$, um anel como soma direta de um corpo K, e $M=K \oplus 0$, um R-mod. Consideremos $r=(0,1) \in R$. Então:

$L_r((x,0))=(0,1).(x,0)=(0,0)$, para todo $x \in K$.

Temos $r \in \mathrm{Ker}L$, mas $r\neq 0$, o que mostra que L não é injetora e ${}_RM$ não é fiel.

Notemos que L é sobrejetora se dado $f \in R''$, existe $r \in R$ tal que $L_r=f$. Como $L_r \in R''$, o fato de L ser sobrejetora depende da "densidade" de L(R) em R''. Queremos chegar no Teorema da Densidade.

<u>Definição</u>: Um R-mod $M\neq 0$ é dito <u>simples</u> se M não tem R-submódulos diferentes de 0 e M.

<u>Proposição</u> 1.1.13: (Lema de Schur)

Sejam ${}_RM$ e ${}_RN$ simples. Todo homomorfismo não nulo de M em N é um isomorfismo. Além disso, $\mathrm{End}_R M$ é um anel de divisão.

<u>Demonstração</u>: Encontra-se em |LA - p.440|.

Observação: Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 sobre um corpo K. Por (1.1.11) temos que $\mathrm{End}_K\ V \cong M_2(K)$. Observemos que $M_2(K)$ não é anel de divisão, mas V também não é K-simples, pois tem subespaços de dimensão um.

Definição: Um R-mod é chamado semi-simples se ele é uma soma direta de R-mod simples.

Enunciamos a seguir o importante Teorema da Densidade.

Teorema 1.1.14: Consideremos ${}_RM$ semi-simples. Sejam $R'=\mathrm{End}_R\ M$, $R''=\mathrm{End}_{R'}\ M$, $f \in R''$ e $m_1,\ldots m_n \in M$. Então existe $r \in R$ tal que $f(m_i)=rm_i$, para todo $i=1,\ldots n$.

Demonstração: Encontra-se em [LA - p.444].

Uma das consequências do Teorema da Densidade é o Teorema de Wedderburn, que apresentamos agora e que é o principal objetivo deste parágrafo.

Teorema 1.1.15: (Teorema de Wedderburn)

Seja ${}_RM$ simples e fiel. Sejam também $R'=\mathrm{End}_R\ M$ e $R''=\mathrm{End}_{R'}\ M$. Se M é de dimensão finita sobre R', então $R \cong R''$.

Demonstração: Seja $m_1,\ldots,m_n$ uma base de M sobre R'. Dado $f \in R''$, por (1.1.14), existe $r \in R$ tal que $f(m_i)=rm_i=L_r(m_i)$, para todo $i=1,\ldots,n$. Então o homomorfismo $L: R \to R''$, (1.1.12), é sobrejetor. Como M é fiel, temos também L injetor. Portanto, L é um isomorfismo.

Observação: Há outra demonstração de (1.1.15) em [L - p.65].

§2. ALGUMAS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Neste parágrafo colocamos definições e propriedades que serão utilizadas mais adiante.

Sobre espaços vetoriais lembramos que o produto tensorial de dois espaços vetoriais é um espaço vetorial, [HA - p.42]. Temos a seguir a generalização deste fato.

Proposição 1.2.1: Sejam R,S anéis. Temos:

(1) Dados M_R e ${}_RN$, então $M \otimes_R N$ é um grupo abeliano com relação à adição.

(2) Dados M_R e ${}_RN$ e se temos também ${}_SM$, então $M \otimes_R N$ é um S-mod pela definição de $s(\Sigma m_i \otimes n_i) = \Sigma(sm_i) \otimes n_i$, para todos $m_i \in M$, $n_i \in N$ e $s \in S$.

(3) Dados M_{R-S} e ${}_RN$, então $M \otimes_R N$ é um mod-S pela definição de $(\Sigma m_i \otimes n_i)s = \Sigma(m_i s) \otimes n_i$, para todos $m_i \in M$, $n_i \in N$ e $s \in S$.

Demonstração: Encontra-se em [L - p.117] e [L - p.120].

O próximo lema traz algumas propriedades básicas a resto de produto tensorial.

Lema 1.2.2: Seja R um anel. Temos:

(1) Dados ${}_RM$ e N_R, então $R \otimes_R M \simeq M$ e $N \otimes_R R \simeq N$.

(2) Dados M_R, N_R e ${}_RP$, então $(M \oplus N) \otimes_R P \simeq (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$.

(3) Dados M_R e ${}_RN$, então $M \otimes_R N \simeq N \otimes_{R^o} M$.

(4) Dado ${}_RM$, então $M^n \simeq R^n \otimes_R M$, onde M^n e R^n são somas diretas

de n cópias de M e R respectivamente.

Demonstração: Encontra-se em:

(1) [L - p.123] (2) [L - p.124]

(3) [L - p.121] (4) É consequência de (1) e (2).

A seguinte proposição dá algumas maneiras para a construção de bimódulos.

Proposição 1.2.3: Sejam R, S, T anéis e ${}_R A_S$, ${}_T B_S$, ${}_T C_R$ bimódulos. Então:

(1) $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ é um T-R-bimódulo por $(t.f)(a)=t(f(a))$ e $(f.r)(a)=f(ra)$, onde $r \in R$, $t \in T$, $a \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_S(A,B)$.

(2) $\mathrm{Hom}_T(B,C)$ é um S-R-bimódulo por $(s.g)(b)=g(bs)$ e $(g.r)(b)=g(b).r$, onde $r \in R$, $s \in S$, $b \in B$, $g \in \mathrm{Hom}_T(B,C)$.

(3) $C \otimes_R A$ é um T-S-bimódulo por $(\Sigma c_i \otimes a_i).s = \Sigma c_i \otimes (a_i s)$ e $t.(\Sigma c_i \otimes a_i) = \Sigma (tc_i) \otimes a_i$, onde $s \in S$, $t \in T$, $c_i \in C$ e $a_i \in A$.

Demonstração: Encontra-se em [L - p.120].

Lema 1.2.4: Sejam A_k e B R-mod, K um conjunto não vazio, $k \in K$.

Então:

(1) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{k \in K} A_k, B) \cong \prod_{k \in K} \mathrm{Hom}(A_k, B)$

(2) $\mathrm{Hom}(B, \prod_{k \in K} A_k) \cong \prod_{k \in K} \mathrm{Hom}(B, A_k)$

Demonstração: Encontra-se em [L - p.124].

Corolário 1.2.5: Dado ${}_R M$, então $\mathrm{Hom}(R^n, M) \cong M^n$.

Demonstração: Por (1.2.4)-(1) temos $Hom(R^n,M) \simeq [Hom(R,M)]^n$ e também temos $Hom(R,M) \simeq M$ por (1.1.6). Logo, $Hom(R^n,M) \simeq M^n$.

Sejam A_i e B_i R-mod e $\theta_i: A_i \to B_i$ R-mod homomorfismos, para i=1,...,n. Definimos:

$$\theta = \bigoplus_{i=1}^{n} \theta_i : \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} B_i \text{ por } \theta(a_1,\dots,a_n)=(\theta_1(a_1),\dots,\theta_n(a_n))$$

com $a_i \in A_i$.

Temos a seguir o lema:

Lema 1.2.6: θ é um R-mod homomorfismo.

Demonstração: A demonstração é imediata.

Lema 1.2.7: θ é um isomorfismo se e somente se θ_i são isomorfismos para todo i.

Demonstração: É suficiente provar para n=2, e o caso geral segue por indução. Sejam, então, $\theta_i: A_i \to B_i$, i=1,2 isomorfismos. Consideremos $(b_1,b_2) \in B_1 \oplus B_2$, com $b_i \in B_i$, i=1,2. Como θ_i é sobrejetora, existem $a_i \in A_i$, i=1,2, tais que $\theta(a_i)=b_i$. Assim, $\theta(a_1,a_2)=(b_1,b_2)$ e, portanto θ é sobrejetora. Também, se $\theta(a_1,a_2)=(0,0)$, temos $\theta_1(a_1)=0$ e $\theta_2(a_2)=0$. Logo $a_1=0$ e $a_2=0$, pois θ_i são injetoras. Então θ é isomorfismo.

Por outro lado, seja θ isomorfismo. Se $b_i \in B_i$, i=1,2, então $(b_1,0),(0,b_2) \in B_1 \oplus B_2$ e, como θ é sobrejetora, existem $(a_1,x),(y,a_2) \in A_1 \oplus A_2$ tais que $\theta_1(a_1)=b_1$ e $\theta_2(a_2)=b_2$ e temos θ_i sobrejetoras. Se $\theta_i(a_i)=0$, i=1,2, então $\theta(a_1,0) = \theta(0,a_2)=(0,0)$ e, como θ é injetora, temos $a_i=0$, i=1,2. Então θ_i

são injetoras e ϑ_i são isomorfismos.

Um ideal minimal de um anel R é um ideal não nulo que não contém nenhum outro ideal não nulo de R. Tal ideal sempre existe no anel artiniano, que definimos agora.

Definição: Um anel R é dito artiniano à esquerda (direita) se toda cadeia descendente de ideais à esquerda (direita) é estacionária, isto é, se $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$, então existe $N > 0$ tal que $I_N = I_{N+1} = \ldots$.

Lema 1.2.8: R é um anel artiniano à esquerda se e somente se qualquer conjunto não vazio de ideais à esquerda de R tem um elemento minimal.

Demonstração: Encontra-se em [A-M - p.74].

Definição: A sequência dos R-mod M', M, M" e R-mod homomorfismos f, g

(*) $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é dita exata se f é injetora, g é sobrejetora e f(M')=Kerg.

A sequência (*) é dita exata que se fatora se ela é exata e f(M') é um fator direto de M, isto é, $M = f(M') \oplus C$, onde C é algum R-submódulo de M.

Temos as seguintes condições equivalentes para uma sequência exata que se fatora.

Lema 1.2.9: Seja (*) $0 \to M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M'' \to 0$ uma sequência exata.

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) (*) é uma seqûência exata que se fatora

(2) Existe homomorfismo $g_1: M \to M'$ tal que $g_1 f_1 = Id_{M'}$

(3) Existe homomorfismo $g_2: M'' \to M$ tal que $f_2 g_2 = Id_{M''}$

Demonstração: Encontra-se em [MA - p.16].

Damos a seguir a definição de R-mod projetivo, que desempenha papel importante em nosso trabalho.

Definição: P é um R-mod projetivo se P é um fator direto de um módulo livre, isto é, existe um módulo livre R^n e um R-mod Q tal que $P \oplus Q = R^n$.

Notação: P: R-proj.

Proposição 1.2.10: P é um R-mod projetivo se e somente se existem um conjunto de elementos $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq P$ e um conjunto de homomorfismos $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq P^* = Hom_R(P,R)$ tais que para todo $x \in P$, temos $x = \sum f_i(x).x_i$, onde quase todo $f_i(x)=0$.

Chamamos $(x_i, f_i)_{i\in I}$ um sistema de coordenadas projetivo de P.

Demonstração: Encontra-se em [B - p.71].

Corolário 1.2.11: P é um R-mod projetivo finitamente gerado se e somente se existe um sistema de coordenadas projetivo finito de P, isto é, existe $(x_i, f_i)_{i\in I}$, com I um conjunto finito.

§3. ANÉIS SIMPLES E ANÉIS SEMI-SIMPLES

Neste parágrafo fazemos um estudo a respeito de anéis simples e anéis semi-simples, que tem importância na sequência do trabalho.

Sabemos que se D é um anel de divisão, então D naõ tem ideais bilaterais não triviais, nem ideais à esquerda ou à direita próprios não nulos. Definimos agora o chamado anel simples, que traz uma condição um pouco mais fraca do que o anel de divisão, isto é, não tem ideais bilaterais, mas pode ter ideais à esquerda ou à direita próprios não nulos.

<u>Definição</u>: Seja R um anel. Dizemos que R é um <u>anel simples</u> se os únicos ideais bilaterais de R são (0) e R.

Vemos que qualquer anel de divisão é simples. Apresentamos a seguir alguns exemplos:

<u>Exemplo 1</u>: Se D é um anel de divisão, então $M_n(D)$ é um anel simples. Sejam $e_{hk}=(a_{ij})$ tal que $a_{hk}=1$ e $a_{ij}=0$ se $i\neq h$ ou $j\neq k$ para $h,k=1,2,\ldots,n$. Então $\{e_{hk}\}_{h,k=1,\ldots,n}$ forma uma base de $M_n(D)$ sobre D, e temos $e_{ij}e_{hk}=e_{ik}\delta_{jh}$, onde $\delta_{jh}=1$ se $j=h$ e $\delta_{jh}=0$ se $j\neq h$. Seja $I\neq(0)$ um ideal bilateral de $M_n(D)$. Vamos mostrar que $I=R$. Seja $0\neq a \in I$. Representamos $a=\Sigma a_{ij}e_{ij}$, onde $a_{ij} \in D$. Como $a\neq 0$, existe pelo menos um $a_{hk}\neq 0$ para alguns h e k. Então $e_{hh}ae_{kk} = \Sigma a_{ij}(e_{hh}e_{ij}e_{kk}) = a_{hk}e_{hk} \in I$. Como $a_{hk}\neq 0$, então a_{hk} é inversível e, assim, $e_{hk} \in I$. Mas para $i=1,\ldots,n$ temos

$e_{ih}e_{hk}e_{ki} = e_{ii} \in I$. Logo $e_{11}+\ldots+e_{nn}$, a identidade de $M_n(D)$, pertence a I. Portanto I=R.

Exemplo 2: Consideremos V um espaço vetorial à esquerda de dimensão infinita sobre um anel de divisão D, $R=\mathrm{End}_D V$ o anel de todas as transformações lineares de V em V (1.1.7) e o conjunto $F=\{T \in R \mid T(V)$ é um subespaço de dimensão finita$\}$. F não é vazio, pois as projeções são transformações lineares cujas imagens são de dimensão finita. Vamos mostrar que R não é um anel simples. Afirmamos que F é um ideal bilateral próprio de R. Claramente, a identidade $I_V \notin F$. Logo $F \subsetneq R$. Se $T_1, T_2 \in F$, como $T_1 - T_2 \in R$ e $\dim_D(T_1-T_2)(V) \leq \dim_D T_1(V) + \dim_D T_2(V)$, então $T_1-T_2 \in F$. Sejam agora $S \in R$ e $T \in F$. Como T(V) é de dimensão finita, então $S \circ T(V) = S(T(V))$ também é de dimensão finita e, daí temos $S \circ T \in F$. Vemos que $T \circ S \in F$, pois $T(S(V)) \subset T(V)$. Portanto F é um ideal bilateral próprio de R, donde R não é um anel simples.

Observação: Os únicos subideais bilaterais de F são (0) e F. Realmente, F é um anel simples sem identidade. [K - p.93].

Definimos a seguir o Radical Jacobson que torna-se necessário para o prosseguimento.

Definição: O Radical Jacobson J(R) é a intersecção de todos os ideais à esquerda maximais de R.

Colocamos, então, algumas propriedades de J(R):

Lema 1.3.1: Sejam $x \in J(R)$ e $r \in R$. Temos:

(1) $R(1+rx) = R$

(2) $R(1+xr) = R$

Demonstração:

(1) Suponhamos $R(1+rx) \neq R$. Como $R(1+rx)$ é um ideal à esquerda, existe um ideal à esquerda maximal L tal que $R(1+rx) \subset L$ e, portanto, $1+rx \in L$. Como $x \in J(R)$ e $J(R)$ é um ideal à esquerda, então $rx \in J(R) \subset L$. Daí $1 \in L$, o que é uma contradição. Assim, $R(1+rx) = R$.

(2) Por (1) temos que existe $u \in R$ tal que $u(1+rx)=1$, ou seja, $u=1-urx$. Temos:

$$\begin{aligned}(1-xur)(1+xr) &= 1 - xur + xr - xurxr \\ &= 1 - xur + x(1-urx)r \\ &= 1 - xur + xur \\ &= 1\end{aligned}$$

Então concluimos que $R(1+xr) = R$.

Lema 1.3.2: $J(R)$ é um ideal bilateral próprio de R.

Demonstração: Temos $1 \notin J(R)$, o que mostra que $J(R) \subsetneq R$. Para demonstrarmos o resultado, é suficiente verificar que dados $r \in R$ e $x \in J(R)$, temos $xr \in J(R)$. Se $xr \notin J(R)$, então existe um ideal à esquerda maximal L de R tal que $xr \notin L$. Isto implica que $Rxr + L = R$, ou seja, existem $s \in R$ e $h \in L$ tal que $sxr + h = 1$. Seja $y=-sx$. Logo temos $y \in J(R)$ e $R = R(1+yr)$ (1.3.1-(2)). Então $h=1+yr \in L$, de onde concluimos que $R = R(1+yr) = Rh \subset L$, o que é uma contradição. Logo $J(R)$ é um ideal bilateral de R.

Lema 1.3.3: Seja I um ideal à esquerda de R tal que $I^n=0$ para algum n inteiro positivo. Então $I \subset J(R)$.

Demonstração: Vamos provar que $I \subset M$ para todo ideal à esquerda maximal de R. Seja $x \in I$. Suponhamos $x \in I-M$ para algum ideal maximal à esquerda M. Logo temos $Rx+M = R$, isto é, existem $r \in R$ e $m \in M$ tal que $rx+m=1$. Seja $y=-rx \in Rx \subset I$. Assim $y^n=0$, pois $I^n=0$. Temos: $(1 - y + y^2 + \ldots + (-1)^{n-1}y^{n-1})(1+y)=1-y^n=1$. Logo, $1+y$ é uma unidade, o que implica que $R(1+y) = R$. Como $1+y=m$, $R = Rm \subset M$ e temos uma contradição. Portanto $x \in M$.

Um ideal minimal de um anel R sempre é um R-mod simples. Temos:

Definição: Seja R um anel. Um ideal à esquerda não nulo I de R é dito simples à esquerda se os únicos subideais à esquerda de I são (0) e I.

Exemplo: Seja $R = K \oplus K$, onde K é um corpo. Então $I = \{(a,0) \mid a \in K\} \subsetneq R$ é um ideal simples à esquerda de R.

O resultado a seguir dá uma condição para que um ideal simples seja R-mod projetivo.

Teorema 1.3.4: Seja I um ideal à esquerda simples de R. Então I é um fator direto de R se e somente se $I^2 \neq 0$.

Demonstração: Suponhamos I um fator direto de R, isto é, $R=I\oplus P$ com P um R-mod à esquerda. Seja $\pi: R \to I$ a projeção tal que $\pi(i+p)=i$, onde $i \in I$ e $p \in P$. Então

$0 \neq \pi(1) = \pi(\pi(1)) = \pi(\pi(1).1) = \pi(1)\pi(1) = (\pi(1))^2$, que é um elemento de I^2. Daí temos $I^2 \neq 0$. Por outro lado, suponhamos $I^2 \neq 0$ e, então, existe $x \in I$ tal que $Ix \neq 0$. Como Ix é um ideal à esquerda de I e I é simples, temos $Ix=I$. Assim, existe $y \in I$ tal que $yx=x$. Como $y^2x = y(yx) = yx$, temos $(y^2-y)x=0$. Se $y^2 \neq y$, então $0 \neq R(y^2-y) \subset I$, o que implica que $R(y^2-y)=I$, pois I é simples. Então, $0=R(y^2-y)x=Ix$, o que é uma contradição. Logo $y^2=y$. Como $yx=x$ e $Ix \neq 0$, temos $y \neq 0$. Assim, $0 \neq Ry \subset I$ e, então, $I = Ry$. Consideremos agora a sequência exata $0 \to I \underset{\phi}{\overset{i}{\rightleftarrows}} R \to R/I \to 0$, onde i é a aplicação inclusão, e definimos um R-mod homomorfismo $\phi: R \to I$ por $\phi(r)=ry$, para todo $r \in R$. Então, para qualquer $a \in I=Ry$, existe $r \in R$ tal que $a=ry$. Logo,

$\phi \circ i(a)=\phi \circ i(ry)=\phi(ry)=(ry)y=ry=a$, para todo $a \in I$, de onde $\phi \circ i=Id_I$, a aplicação identidade em I, o que significa que a sequência é exata que se fatora, ou seja, $R \simeq I \oplus R/I$ (1.2.9) . Portanto I é um fator direto de R.

Definição: Um anel R é chamado semi-simples à esquerda (direita) se R é uma soma de ideais simples à esquerda (direita).

Observação: Se $R = \sum_{j \in J} I_j$, onde I_j são ideais à esquerda simples, como $1 \in R$ e $1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, com $x_j \in I_j$, então $R = \sum_{j=1}^{n} I_j$. Por isso, um anel semi-simples à esquerda é uma soma finita de ideais simples à esquerda.

Queremos agora chegar que, na definição de anel semi-simples, a soma de ideais simples é uma soma direta.

<u>Lema</u> 1.3.5: Sejam I, J, K ideais à esquerda de um anel R tal que $J \subset I$. Se $R = J \oplus K$, então $I = J \oplus (K \cap I)$.

<u>Demonstração</u>: Como $J \subset I$ e $K \cap I \subset I$, temos $J \oplus (K \cap I) \subset I$. Agora, seja $x \in I \subset R = J \oplus K$. Então, $x=j+k$, com $j \in J$ e $k \in K$. Se $k=0$, então $x=j \in J \subset J \oplus (K \cap I)$. Daí $I \subset J \oplus (K \cap I)$. Se $k \neq 0$, temos $k=x-j \in I + J$, e, logo,

$k \in (I+J) \cap K = I \cap K + J \cap K = I \cap K$, pois $J \cap K=(0)$ quando $R = J \oplus K$. Assim, $x=j+k \in J \oplus (I \cap K)$. Logo $I \subset J \oplus (K \cap I)$. Então temos $I = J \oplus (K \cap I)$.

<u>Teorema</u> 1.3.6: Sejam $R = \sum_{j=1}^{n} I_j$, onde I_j são ideais à esquerda simples, e J um ideal à esquerda qualquer de R. Então:

(1) $J \oplus \sum_{j \in K} I_j = R$, onde $K \subset \{1,2,\ldots,n\}$

(2) $\sum_{j \in K} I_j = \bigoplus_{j \in K} I_j$, onde $K \subset \{1,2,\ldots,n\}$

(3) $J = \bigoplus_{j \in \bar{K}} I_j$, onde $\bar{K} = \{1,2,\ldots,n\} - K$

<u>Demonstração</u>: Se $J=R$, não há nada a provar. Se $J \subsetneq R$, então existe $1 \leq j_o \leq n$ tal que $I_{j_o} \not\subset J$. Como I_{j_o} é simples, temos $I_{j_o} \cap J=(0)$. Daí, $I_{j_o} + J = I_{j_o} \oplus J$. Seja

$S = \{L \subset \{1,2,\ldots,n\} \mid J \cap \sum_{j \in L} I_j=(0)$ e $\sum_{j \in L} I_j = \bigoplus_{j \in L} I_j\}$. Como $\{j_o\} \in S$, $S \neq \emptyset$. Então, pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal K se S. Afirmamos que $J \oplus \sum_{j \in K} I_j = R$. Se $J \oplus \sum_{j \in K} I_j \subsetneq R$, então existe $h \in \{1,2,\ldots,n\} - K$ tal que $I_h \not\subset J \oplus \sum_{h \in K} I_j$. Como I_h é simples, temos $(J \oplus \sum_{j \in K} I_j) \cap I_h = (0)$, isto é,

$J \cap \sum_{j \in K \cup \{h\}} I_j = (0)$ e $\sum_{j \in K \cup \{h\}} I_j = \bigoplus_{j \in K \cup \{h\}} I_j$. Então $K \cup \{h\} \in S$.

Mas $K \subsetneqq K \cup \{h\}$. Temos , então, uma contradição. Daí temos as demonstrações de (1) e (2).

Como $J \oplus \sum_{j \in K} I_j = R$ e $\sum_{j \in \bar{K}} I_j \cap \sum_{j \in K} I_j = (0)$, onde $\bar{K} = \{1, \ldots, n\} - K$.

Então $\sum_{j \in \bar{K}} I_j \subset J$. Por (1.3.5) temos

$J = \sum_{j \in \bar{K}} I_j \oplus ((\sum_{j \in K} I_j) \cap J) = \sum_{j \in \bar{K}} I_j = \bigoplus_{j \in \bar{K}} I_j$, o que completa a demonstração do Teorema.

Temos, então, importantes consequências:

<u>Corolário</u> 1.3.7: Um anel R semi-simples à esquerda é uma soma direta finita de ideais à esquerda simples.

<u>Corolário</u> 1.3.8: Todo ideal à esquerda de um anel semi-simples à esquerda é R-mod projetivo.

<u>Corolário</u> 1.3.9: Se R é semi-simples à esquerda e A é um ideal maximal à esquerda de R, então $R = A \oplus I$, onde I é um ideal simples à esquerda.

<u>Demonstração</u>: Como $A \neq R$ e $R = \bigoplus_{j=1}^{n} I_j$, então existe I_j tal que $I_j \not\subset A$. Logo, $I_j \cap A = (0)$, pois I_j é simples e $A + I_j = R$, já que A é maximal. Portanto $A \oplus I_j = R$.

Com os resultados anteriores, chegamos, agora, a uma caracterização do anel semi-simples, encontrada em [BA].

<u>Teorema</u> 1.3.10: R é um anel semi-simples à esquerda se e somente se R é artiniano à esquerda e $J(R)=(0)$.

Demonstração: Seja R semi-simples à esquerda. Então $R = \bigoplus_{j=1}^{n} I_j$, onde I_j são ideais à esquerda simples. (1.3.7). Se $J_1 \supsetneq J_2 \supsetneq \ldots$ é uma cadeia de ideais à esquerda em R, então, pelo Teorema (1.3.6-(3)), temos: $J_1 = \bigoplus_{j \in K_1} I_j$, $J_2 = \bigoplus_{j \in K_2} I_j$, ... , com $K_i \subset \{1,2,\ldots,n\}$. Como $J_1 \supsetneq J_2 \supsetneq \ldots$, temos, de imediato $K_1 \supsetneq K_2 \supsetneq \ldots$. Como K_1 é um conjunto finito, a cadeia deve ser estacionária, isto é, R é artiniano. Vamos provar agora que $J(R)=(0)$. Seja, então, A um ideal maximal à esquerda qualquer de R. Por (1.3.9), existe um ideal simples à esquerda I de R tal que $A \oplus I = R$. Como $R = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$, R só possui um número finito de ideais maximais à esquerda $A_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} I_j$, para $i=1,\ldots,n$ e, logo, $J(R) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = (0)$.

Por outro lado, vamos supor R artiniano à esquerda e $J(R)=(0)$ e provar que R é semi-simples à esquerda. Seja S o conjunto dos ideais I à esquerda de R, $I\neq 0$, tal que I não possa ser escrito como uma soma finita de ideais à esquerda simples de R. É suficiente provar que $S = \emptyset$, pois R é um ideal à esquerda de R e $R \notin S$. Se tivermos $S \neq \emptyset$, então existe um elemento minimal A de S, pois R é artiniano. (1.2.8). Seja T o conjunto dos ideais à esquerda $I \neq 0$ de R tal que $I \subset A$. Notemos que $A \in T$. Logo $T \neq \emptyset$. Novamente, como R é artiniano, temos I um elemento minimal de T. Vemos que I é um ideal à esquerda simples e $I^2 \neq 0$, pois se $I^2=0$, $I \subset J(R)=(0)$, (1.3.3), mas $I \neq 0$. Como $I^2 \neq 0$, por (1.3.4), $R = I \oplus X$, onde $X \simeq R/_I$ como R-mod.

Seja $\pi: R \to I$ a projeção natural e consideremos a sequência de R-mod exata: $0 \to I \underset{f}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A \to A/_I \to 0$, onde i é a aplicação inclusão. Definimos um R-mod homomorfismo $f: A \to I$ por $f(a) = \pi(a)$, para todo $a \in A$, sendo f a restrição de π sobre $A:\pi|A$. Logo, $f \circ i(x)=f(x)=\pi(x)=x$, para todo $x \in I$. Então f é uma retração , e a sequência se fatora. (1.2.9). Temos $A \simeq I \oplus A/_I$ e, portanto, podemos escrever $A = I \oplus A'$, com A' um ideal à esquerda de R, como um submódulo de A tal que $A' \simeq A/_I$. Notemos que $A' \neq (0)$, pois $A \neq I$, isto porque, se $A=I$ e I é simples, então $A \notin S$, mas $A \in S$. Também, $A' \subsetneq A$, pois $I \neq (0)$. Como A é elemento minimal de S, então $A' \notin S$. Logo, A' é uma soma direta finita de ideais à esquerda simples de R. Então $A = I \oplus A'$ também o é e isto implica que $A \notin S$, o que é uma contradição. Assim, temos $S = \emptyset$ e provamos que R é semi-simples à esquerda.

CAPÍTULO II

GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE WEDDERBURN

No Teorema de Wedderburn, (1.1.15), tínhamos como hipóteses M, um R-módulo simples e fiel, e M de dimensão finita sobre $R'=\mathrm{End}_R M$, que é um anel de divisão pelo Lema de Schur, (1.1.13). Quando R é um anel de divisão, então qualquer espaço vetorial sobre R de dimensão um é simples e fiel. Os resultados principais deste capítulo e deste trabalho apresentam-se, no segundo parágrafo, como generalizações do Teorema de Wedderburn. Primeiramente, consideramos como hipótese, apenas um anel R simples e artiniano, concluindo a existência de um anel de divisão D e um D-espaço vetorial de dimensão finita M tal que R e $\mathrm{End}_D M$ sejam isomorfos. Para demonstrar este resultado precisamos do Teorema de Morita, Auslander e Goldman, [A-G] e [M], que é apresentado, antes, no primeiro parágrafo. Observamos que a demonstração dada aqui é totalmente diferente da clássica, a qual pode ser encontrada, por exemplo, em [L - p.65]. O próximo passo, que é realmente uma surpresa, é o fato de que se temos R um anel simples e M, um ideal à esquerda não nulo de R, então R e $\mathrm{End}_D M$ são isomorfos, onde $D=\mathrm{End}_R M$. Este importante resultado é devido a M. A. Rieffel, [R], mas a demonstração apresentada é original deste trabalho.

§1. O TEOREMA DE MORITA, AUSLANDER E GOLDMAN

Vamos apresentar uma sequência de resultados, necessários para chegarmos ao Teorema de Morita, Auslander e Goldman, que é o objetivo deste parágrafo.

Queremos, na verdade, construir o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \otimes_{S^o} P^* \arrow[r, "1 \otimes \psi"] \arrow[d, "\tau"] & P \otimes_{S^o} \mathrm{Hom}_{S^o}(P, S^o) \arrow[d, "\mu'"] \\ R \arrow[r, "i"] & \mathrm{End}_{S^o} P \end{tikzcd}$$

onde P é um R-mod, $P^*=\mathrm{Hom}_R(P,R)$ e $S=\mathrm{End}_R\ P$.

O primeiro passo dessa construção é o isomorfismo dado por $\mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_R Q \simeq \mathrm{Hom}_R(M,Q)$, quando ${}_R M$ é projetivo finitamente gerado e Q é um R-mod.

Consideremos ${}_R M_R$ e ${}_R Q$. Seja $M^*=\mathrm{Hom}_R(M,R)$. Sabemos que M^* é um R-R-bimódulo por (1.2.3-(1)). Então $M^* \otimes_R Q$ é um R-mod por (1.2.1-(2)). Também, $\mathrm{Hom}_R(M,Q)$ é um R-mod por (1.1.4-(1)). Definimos a aplicação:

$\Theta_M: M^* \otimes_R Q \to \mathrm{Hom}_R(M,Q)$, por $\Theta_M(f \otimes x)(m)=f(m).x$, onde $f \in M^*$, $x \in Q$ e $m \in M$.

Temos o seguinte lema:

<u>Lema</u> 2.1.1: Θ_M é um R-mod homomorfismo.

Demonstração: O fato é provado usando-se a propriedade universal de produto tensorial, [L - p.118], se pudermos verificar que a aplicação $F: M^* \times Q \to Hom_R(M,Q)$, dada por $F(f,x)(m) = f(m).x$, com $f \in M^*$, $x \in Q$ e $m \in M$, é bilinear sobre R. Vejamos: sejam $f, f_1, f_2 \in M^*$, $x, x_1, x_2 \in Q$ e $m \in M$. Temos:

$$F(f_1+f_2,x)(m) = (f_1+f_2)(m).x = f_1(m).x + f_2(m).x$$
$$= [F(f_1,x) + F(f_2,x)].m \qquad \text{e}$$
$$F(f,x_1+x_2)(m) = f(m).(x_1+x_2) = f(m).x_1 + f(m).x_2$$
$$= [F(f,x_1) + F(f,x_2)](m)$$

Também, seja $r \in R$. Então:

$$F(fr,x)(m) = (fr)(m).x$$
$$= (f(m).r).x \qquad \text{pois } M^* \text{ é um R-mod à direita (1.1.3-(5))}$$
$$= f(m).(rx) \qquad \text{pois } {}_RQ$$
$$= F(f,rx)(m)$$

Portanto, F é bilinear sobre R, e o lema está demonstrado.

O próximo teorema diz em quais condições Θ_M é um isomorfismo.

Teorema 2.1.2: Se ${}_RM_R$ é um R-mod projetivo finitamente gerado, então Θ_M é um isomorfismo.

Demonstração: Como M é projetivo finitamente gerado, $M \oplus N = R^n$, onde N é um R-mod e n é um inteiro positivo. Temos uma sequência de isomorfismos:

$Q^n \simeq Hom_R(R^n,Q) \simeq Hom_R(M \oplus N,Q) \simeq Hom_R(M,Q) \oplus Hom_R(N,Q)$, por (1.2.5), (1.2.4), e

$Q^n \simeq R^n \otimes_R Q \simeq \mathrm{Hom}_R(R^n,R) \otimes_R Q \simeq \mathrm{Hom}_R(M \oplus N,R) \otimes_R Q$

$\simeq [\mathrm{Hom}_R(M,R) \oplus \mathrm{Hom}_R(N,R)] \otimes_R Q \simeq (M^* \otimes_R Q) + (N^* \otimes_R Q)$, por (1.2.2) , (1.2.5).

Logo, $\theta_M \oplus \theta_N$: $(M^* \otimes_R Q) \oplus (N^* \otimes_R Q) \to \mathrm{Hom}_R(M,Q) \oplus \mathrm{Hom}_R(N,Q)$ é um isomorfismo. Então, por (1.2.7), θ_M é um isomorfismo.

Recordemos, agora, alguns resultados necessários à continuidade. Dado ${}_RP_R$, sejam $S=\mathrm{End}_R\, P$ e $P^*=\mathrm{Hom}_R(P,R)$. Então temos:

(1) S é um anel. (1.1.7).

(2) P^* é um R-R-bimódulo, (1.2.3-(1)), tal que $(f.r)(x)=f(x).r$, $(r.f)(x)=r.(f(x))$ e $(r_1f)r_2=r_1(fr_2)$, para todos $f \in P^*$, $r, r_1, r_2 \in R$ e $x \in P$.

(3) P é um S-mod, por $g.x=g(x)$, para todos $g \in S$ e $x \in P$, por (1.1.8).

(4) P é um mod-S^o, por $x.g^o=g.x=g(x)$, para todos $g \in S$ e $x \in P$.

(5) P é um R-S^o-bimódulo, pois $r.(x.g^o)=r(g(x))=g(rx)=(rx).g^o$.

(6) P^* é um mod-S, (1.1.3-(5)), por $f.g(x)=f(g(x))$, para todos $f \in P^*$, $g \in S$ e $x \in P$.

(7) P^* é um S^o-mod, por $g^o.f=f.g$, para todos $f \in P^*$ e $g \in S$.

(8) P^* é um S^o-R-bimódulo, (1.2.3-(2)), por $(g^o.f)(x)=f(x.g^o)$, $(f.r)(x)=f(x).r$ e $g^o.(f.r)=(g^o.f).r$, para todos $g^o \in S^o$, $f \in P^*$, $x \in P$ e $r \in R$.

(9) $P^* \otimes_R P$ é um S^o-S^o-bimódulo, (1.2.3-(3)),por

$(\Sigma f_i \otimes x_i).g^o = \Sigma f_i \otimes (x_i.g^o)$ e

$g^o(\Sigma f_i \otimes x_i) = \Sigma (g^o.f_i) \otimes x_i$, para todos $f_i \in P^*$, $x_i \in P$ e $g^o \in S^o$.

Como S^o também é um S^o-S^o-bimódulo, podemos definir uma aplicação entre $P^* \otimes_R P$ e S^o.

Lema 2.1.3: A aplicação $\mu: P^* \otimes_R P \to S^o$, dada por $[\mu(f \otimes x)]^o(y) = f(y).x$, onde $f \in P^*$, $y, x \in P$, é um S^o-S^o-bimódulo homomorfismo.

Demonstração: Notemos que $\mu(f \otimes x) \in S^o$. Então $[\mu(f \otimes x)]^o \in S^{oo}=S$. A verificação de que μ é bem definida e é um R-mod homomorfismo é análoga ao caso $\theta_P: P^* \otimes_R P \to S$.(2.1.1)

Agora, sejam $g^o \in S^o$, $y \in P$ e $t=\Sigma f_i \otimes x_i \in P^* \otimes_R P$, onde $f_i \in P^*$, $x_i \in P$. Temos:

$[\mu(g^o.t)]^o(y) = [\mu(g^o.(\Sigma f_i \otimes x_i))]^o(y)$

$= [\mu(\Sigma(g^o.f_i) \otimes x_i)]^o(y)$ por (9) acima

$= \Sigma\{[\mu((g^o.f_i) \otimes x_i)]^o(y)\}$ pois μ é homomorfismo

$= \Sigma\ (g^o.f_i)(y).x_i$ definição de μ

$= \Sigma\ f_i[g(y)].x_i$ por (7) e (6) acima

$= \Sigma[\mu(f_i \otimes x_i)]^o(g(y))$ definição de μ

$= \Sigma[\mu(f_i \otimes x_i)]^o.(g.y)$ por (3) acima

$= (\Sigma\ [\mu(f_i \otimes x_i)]^o.g)(y)$ por (1) e (3) acima

$= ([\Sigma\ \mu(f_i \otimes x_i)]^o.g)(y)$ S^o é um anel e $(\Sigma s_i)^o=\Sigma(s_i{}^o)$

$= [g^o.(\Sigma\ \mu(f_i \otimes x_i))]^o(y)$ pois $(s_1s_2)^o=s_2{}^o.s_1{}^o$, $s_i \in S$

$= [g^o.\mu(t)]^o(y)$

Logo, $\mu(g^o.t) = g^o.\mu(t)$

Também, temos:

$[\mu(t.g^o)]^o(y) = [\mu((\Sigma f_i \otimes x_i).g^o)]^o(y)$

$= [\mu(\Sigma f_i \otimes g(x_i))]^o(y)$ por (9) acima

$= \Sigma[\mu(f_i \times g(x_i))]^o(y)$ μ é homomorfismo

$= \Sigma f_i(y).g(x_i)$ definição de μ

$= \Sigma\, g[f_i(y).x_i]$ pois $f_i(y) \in R$ e $g \in End_R P$

$= g(\Sigma f_i(y).x_i)$ g é homomorfismo

$= g.\Sigma[\mu(f_i \otimes x_i)]^o(y)$ por (4) e definição de μ

$= g.[\mu(\Sigma f_i \otimes x_i)]^o(y)$ μ é homomorfismo e $(\Sigma s_i)^o = \Sigma s_i^o$

$= g.[\mu(t)]^o(y)$

$= [\mu(t).g^o]^o(y)$ $(s_1 s_2)^o = s_2^o s_1^o$

Logo, $\mu(t.g^o) = \mu(t).g^o$ e, então, μ é um S^o-S^o-bimódulo homomorfismo.

A respeito de μ temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.4: μ é isomorfismo se e somente se P é R-proj finitamente gerado.

Demonstração: Suponhamos P R-proj finitamente gerado. Então, temos $\mu = \Theta_P$ em (2.1.2). Logo μ é um isomorfismo.

Agora, se μ é um isomorfismo, então existe $t = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i \in P^* \otimes_R P$, com $f_i \in P^*$ e $x_i \in P$, tal que $\mu(t) = 1_{S^o} = 1_S^o$. Logo, para todo $z \in P$, temos:

$$z = z.1_S^o = (1_S^o)^o.z = [\mu(\Sigma f_i \otimes x_i)]^o(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z).x_i$$

Portanto, $\{f_i\}$, $\{x_i\}$ formam um sistema de coordenadas projetivo finito de P, isto é, P é projetivo finitamente gerado. (1.2.11)

Sabemos que $P \otimes_{S^o} P^*$ é um R-R-bimódulo, (1.2.3-(3)), por $(\Sigma x_i \otimes f_i)r = \Sigma x_i \otimes (f_i.r)$ e $r(\Sigma x_i \otimes f_i) = \Sigma (rx_i) \otimes f_i$, onde $x_i \in P$, $f_i \in P^*$, $r \in R$. Como R também é um R-R-bimódulo, vamos definir, agora, uma aplicação entre $P \otimes_{S^o} P^*$ e R.

<u>Proposição</u> 2.1.5: A aplicação $\tau: P \otimes_{S^o} P^* \to R$, dada por $\tau(x \otimes f) = f(x)$, onde $f \in P^*$, $x \in P$, é um R-R-bimódulo homomorfismo.

<u>Demonstração</u>: τ é bem definida e é um S^o-mod homomorfismo, novamente, pela propriedade universal de produto tensorial, se pudermos verificar que a aplicação $\phi: P \times_{S^o} P^* \to R$, definida por $\phi(x,f) = f(x)$, para todos $f \in P^*$, $x \in P$, é bilinear sobre S^o.

Para x, x_1, $x_2 \in P$, f, f_1, $f_2 \in P^*$, temos:

$\phi(x_1+x_2,f) = f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \phi(x_1,f) + \phi(x_2,f)$ e

$\phi(x,f_1+f_2) = (f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \phi(x,f_1) + \phi(x,f_2)$.

Também, seja $g^o \in S^o$. Então:

$\phi(x.g^o,f) = \phi(g(x),f) = f(g(x)) = f.g(x) = g^o.f(x) = \phi(x,g^o.f)$.

Assim, ϕ é bilinear sobre S^o. Vamos verificar que τ é um R-R-bimódulo homomorfismo:

$$\begin{aligned}\tau(r.(\Sigma x_i \otimes f_i)) &= \tau(\Sigma(rx_i) \otimes f_i) = \Sigma\tau(rx_i \otimes f_i) = \Sigma f_i(rx_i)\\ &= r\Sigma f_i(x_i) = r\Sigma\, \tau(x_i,f_i) = r\tau(\Sigma x_i \otimes f_i) \quad \text{e}\end{aligned}$$

$$\tau((\Sigma x_i \otimes f_i).r) = \tau(\Sigma x_i \otimes (f_i.r)) = \Sigma\tau(x_i \otimes (f_i.r))$$
$$= \Sigma f_i.r(x_i) = \Sigma f_i(x_i).r = (\Sigma f_i(x_i)).r = (\tau(\Sigma x_i \otimes f_i)).r$$

Definição: Chamamos τ aplicação traço. Denotamos Imτ por $\tau_R(P)$ e dizemos que $\tau_R(P)$ é um ideal traço de R.

De fato:

Lema 2.1.6: $\tau_R(P)$ é um ideal bilateral de R.

Demonstração: Sejam $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ ε $\tau_R(P)$, com f_1, f_2 ε P^*, x_1, x_2 ε P. Como $f_1(x_1)-f_2(x_2)=\tau(x_1 \otimes f_1)-\tau(x_2 \otimes f_2)=$ $=\tau(x_1 \otimes f_1-x_2 \otimes f_2)$, temos $x_1 \otimes f_1-x_2 \otimes f_2$ ε $P \otimes_{SO} P^*$. Então, $f_1(x)-f_2(x)$ ε $\tau_R(P)$. Também, sejam r ε R e t ε $\tau_R(P)$. Então existe $u=\Sigma x_i \otimes f_i$ ε $P \otimes P^*$ tal que $\tau(u)=t$. Assim, $r.t = r.\tau(u) = \tau(ru)$ e $t.r = \tau(u).r = \tau(u.r)$. Portanto, r.t e t.r ε $\tau_R(P)$. Logo, $\tau_R(P)$ é um ideal bilateral.

Observação: Se P=0, então $\tau_R(P)=(0)$, o ideal nulo, pois f(0)=0 para todo f ε P^*.

Se P é R-proj, temos o seguinte resultado sobre $\tau_R(P)$.

Proposição 2.1.7: Seja P um R-mod projetivo. Consideremos $A=\tau_R(P)$. Então temos:

(1) $A^2=A$

(2) AP=P

Demonstração:

(1) Temos $A^2 \subsetneq A$ sempre. Vamos provar que $A \subsetneq A^2$. Seja r ε A. Então existem y_j ε P e g_j ε P^* tais que $r = \tau(\Sigma y_j \otimes g_j) = \Sigma g_j(y_J)$. Se $\{f_i\}$, $\{x_i\}$ é um sistema de coordenadas projetivo de P, então $y_j = \Sigma f_i(y_j)x_i$, onde

$f_i(y_j)=0$ para quase todo i. Logo,

$$r = \sum_j g_j(\sum_i f_i(y_j)x_i)$$

$$= \sum_j \sum_i g_j\left[f_i(y_j)x_i\right] \qquad \text{pois } f_i(y_j) \in R \text{ e } g_j \text{ é homomorfismo}$$

$$= \sum_j \sum_i f_i(y_j)g_j(x_i)$$

Assim, temos $r \in A^2$, pois $f_i(y_j)=\tau(y_j \otimes f_i) \in A$ e $g_j(x_i)=\tau(x_i \otimes g_j) \in A$. Então $A \subseteq A^2$ e temos $A^2=A$.

(2) Como A é um ideal de R e P é um R-mod, temos $AP \subseteq P$. Vamos mostrar que $P \subseteq AP$. Seja, então, $x \in P$. Temos: $x = \sum [f_i(x)]x_i = \sum[\tau(x \otimes f_i)]x_i$. Portanto, $x \in AP$, pois $\tau(x \otimes f_i) \in A$ e $x_i \in P$. Logo, $P \subseteq AP$ e temos $AP=P$.

Dados ${}_RP_R$ e $S=\text{End}_R P$, colocamos, agora, por conveniência, alguns fatos:

(1) S é um R-mod, (1.1.4), por $(r.f)(x)=r.f(x)$, para todos $r \in R$, $f \in S$ e $x \in P$.

(2) S^o é um R-mod, por $(r.g^o)(x)=r.g^o(x)$, para todos $r \in R$, $g^o \in S^o$ e $x \in P$. (Análogo de (1))

(3) S^o é um R-S^o-bimódulo, pois $[(r.g^o) \circ h^o](x)=(rg^o)(h^o(x)) = r.g^o(h^o(x))=r.[(g^o \circ h^o)(x)]=r[(h \circ g)^o(x)]=[r.(h \circ g)^o](x) = [r.(g^o \circ h^o)](x)$, para todos $r \in R$, g^o, $h^o \in S^o$ e $x \in P$.

(4) P é um S-mod, (1.1.8). Logo, P é um mod-S^o, por $x.g^o=g(x)$, para todos $g^o \in S^o$ e $x \in P$.

(5) P é um R-S^o-bimódulo, pois $(r.x).g^o=g(rx)=r.g(x)=r.(x.g^o)$, para todos $r \in R$, $x \in P$ e $g^o \in S^o$.

(6) $T=\mathrm{End}_{S^O} P = \mathrm{Hom}_{S^O}(P,P)$ é um R-R-bimódulo, (1.2.3-(1)) e temos $(r.f)(x)=r(f(x))$ e $(f.r)(x)=f(rx)$, para todos $r \in R$, $f \in \mathrm{End}_{S^O} P$ e $x \in P$.

(7) $\mathrm{End}_{S^O} P = \mathrm{End}_S P$, como S-mod. (1.1.5).

(8) $\mathrm{Hom}_{S^O}(P,S^O)$ é um R-R-bimódulo, (1.2.3-(1)), e temos as mesmas operações que em (6).

(9) $\mathrm{Hom}_{S^O}(P,S^O)$ é um S^O-R-bimódulo, (1.2.3-(1)), e temos $(g^O \circ f)(x)=g^O \circ (f(x))$ e $(f.r)(x)=f(rx)$, para todos $g^O \in S^O$, $f \in \mathrm{Hom}_{S^O}(P,S^O)$, $x \in P$ e $r \in R$.

(10) $P \otimes_{S^O} \mathrm{Hom}_{S^O}(P,S^O)$ é um R-R-bimódulo, (1.2.3-(3)), e temos $(\Sigma\, x_i \otimes f_i).r = \Sigma\, x_i \otimes (f_i.r)$ e $r(\Sigma x_i \otimes f_i) = \Sigma(rx_i) \otimes f_i$, para todos $x_i \in P$, $f_i \in \mathrm{Hom}_{S^O}(P,S^O)$ e $r \in R$.

Definimos mais uma aplicação:

Lema 2.1.8: A aplicação μ': $P \otimes_{S^O} \mathrm{Hom}_{S^O}(P,S^O) \to \mathrm{End}_{S^O} P = T$, definida por $[\mu'(x \otimes f)](y) = x.f(y)$, onde $x, y \in P$ e $f \in \mathrm{Hom}_{S^O}(P,S^O)$, é um R-R-bimódulo homomorfismo.

Demonstração: Como μ' é uma aplicação análoga de μ: $P^* \otimes_R P \to S^O$, a demonstração também o é. Então μ' é um R-R-bimódulo homomorfismo.

Lembremos que $P^* = \mathrm{Hom}_R(P,R)$ é um S^O-R-bimódulo, e que a aplicação μ: $P^* \otimes_R P \to S^O$, dada por $[\mu(f \otimes x)]^O(y)=f(y).x$, é um S^O-S^O-bimódulo homomorfismo, (2.1.3).

Definimos outra aplicação:

Lema 2.1.9: A aplicação $\psi: P^* \to Hom_{S^o}(P, S^o)$ definida por $\psi(g)(z) = \mu(g \otimes z)$, onde $g \in P^*$ e $z \in P$, é um S^o-R-bimódulo homomorfismo.

Demonstração: De imediato, temos ψ uma aplicação bem definida, pois μ é bem definida. Agora,

$$\psi(g_1+g_2)(z)=\mu((g_1+g_2) \otimes z)=\mu(g_1 \otimes z)+\mu(g_2 \otimes z)=[\psi(g_1)+\psi(g_2)](z)$$

para todos g_1, $g_2 \in P^*$ e $z \in P$. Também,

$$\begin{aligned}
\psi(h^o.g)(z) &= \mu((h^o.g) \otimes z) & \\
&= \mu(h^o.(g \otimes z)) & \text{pois } P^* \otimes_R P \text{ é um } S^o\text{-}S^o\text{-bimódulo} \\
&= h^o.\mu(g \otimes z) & \text{pois } \mu \text{ é um } S^o\text{-}S^o\text{-bimódulo hom.} \\
&= h^o.[\psi(g)(z)] & \text{definição de } \psi \\
&= [h^o.\psi(g)](z) & \text{por (9) acima}
\end{aligned}$$

para todos $h^o \in S^o$, $g \in P^*$ e $z \in P$, e

$$\begin{aligned}
\psi(g.r)(z) &= \mu((g.r) \otimes z) & \\
&= \mu(g \otimes (rz)) & \mu \text{ é um R-mod homomorfismo (2.1.3)} \\
&= \psi(g)(rz) & \text{definição de } \psi \\
&= (\psi(g).r)(z) & \text{por (9) acima}
\end{aligned}$$

Assim, ψ é um S^o-R-bimódulo homomorfismo.

Sabemos que $End_{S^o} P = T$ é um anel, (1.1.7), e temos ${}_R T_R$. Definimos uma aplicação entre R e T.

Lema 2.1.10: A aplicação $i: R \to End_{S^o} P = T$, definida por $i(r)(x)=rx$, para todos $r \in R$, $x \in P$, é um R-R-bimódulo homomorfismo. Também, i é um homomorfismo de anel, com $i(1_R)=1_T$.

Demonstração: Verifiquemos, primeiramente, que $i(r) \in T$. Então para todos $r \in R$, x, x_1, $x_2 \in P$ e $g^o \in S^o$ temos

$i(r)(x_1+x_2) = r(x_1+x_2) = rx_1+rx_2 = i(r)(x_1) + i(r)(x_2)$ e

$$\begin{aligned} i(r)(x.g^o) &= r(x.g^o) \\ &= (r.x).g^o \qquad \text{pois P é um R-}S^o\text{-bimódulo} \\ &= [i(r)(x)].g^o \end{aligned}$$

Então, para qualquer r, i(r) é um mod-S^o homomorfismo, isto é, $i(r) \in T$. Vamos provar, agora, que i é um homomorfismo de anel:

$i(r_1+r_2)(x) = (r_1+r_2)x = r_1x+r_2x = [i(r_1) + i(r_2)](x)$ e

$$\begin{aligned} i(r_1r_2)(x) &= (r_1r_2)x = r_1(r_2x) = i(r_1)[r_2x] = i(r_1)[i(r_2)(x)] \\ &= i(r_1) \circ i(r_2)(x) \end{aligned}$$

para todos $r_1, r_2 \in R$ e $x \in P$. Temos também,

$$\begin{aligned} i(r_1r)(x) &= (r_1.r)(x) = r_1(rx) = r_1[i(r)(x)] \\ &= [r_1 i(r)](x) \qquad \text{pois T é um R-R-bimódulo} \end{aligned}$$

Então, $i(r_1.r)=r_1i(r)$ para todo $r_1 \in R$. Analogamente, temos $i(r.r_1)=i(r).r_1$, para todo $r_1 \in R$. Logo, i é um R-R-bimódulo homomorfismo. Para finalizar, seja $f \in T$. Então temos:

$$\begin{aligned} [i(1_R) \circ f](x) &= i(1_R)(f(x)) = 1_R.f(x) = f(x) = f(1_R.x) \\ &= f(i(1_R)(x)) = [f \circ i(1_R)](x) \quad \text{, para todo } x \in P. \end{aligned}$$

Então temos $i(1_R)=1_T$.

A partir das aplicações definidas anteriormente, chegamos ao seguinte resultado:

Proposição 2.1.11: Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_{S^o} P^* & \xrightarrow{1 \otimes \psi} & P \otimes_{S^o} \mathrm{Hom}_{S^o}(P,S^o) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \mu' \\ R & \xrightarrow{i} & \mathrm{End}_{S^o} P = T \end{array}$$

onde $\tau(x \otimes f)=f(x)$, $\psi(f)(x)=\mu(f \otimes x)$, $[\mu(f \otimes x)]^{o}(y)=f(y).x$, $[\mu'(x \otimes g)](y)=x.g(y)$ e $i(r)(x)=rx$, para todos $x, y \in P$, $f \in P^{*}$, $g \in Hom_{S^o}(P,S^{o})$, $r \in R$. Então, o diagrama comuta.

Demonstração:

Seja $\Sigma x_i \otimes f_i \in P \otimes_{S^o} P^{*}$, com $x_i \in P$, $f_i \in P^{*}$. Temos:

$$\begin{aligned}[\mu' \circ (1 \otimes \psi)(\Sigma x_i \otimes f_i)](y) &= \mu'(\Sigma x_i \otimes \psi(f_i))(y) \\ &= \Sigma x_i.\psi(f_i)(y) \\ &= \Sigma x_i.\mu(f_i \otimes y) \\ &= \Sigma [\mu(f_i \otimes y)]^{o}(x_i) \\ &= \Sigma f_i(x_i).y \\ &= [\Sigma f_i(x_i)](y) \quad \text{, para todo } y \in P.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$[i.\tau(\Sigma x_i \otimes f_i)](y) = i(\Sigma f_i(x_i))(y) = [\Sigma f_i(x_i)].(y)$, para todo $y \in P$.

Logo, $\mu' \circ (1 \otimes \psi) = i \circ \tau$, e o diagrama comuta.

Apresentamos, a seguir, o teorema devido a Morita, Auslander e Goldman.

Teorema 2.1.12: (Morita, Auslander, Goldman)

Consideremos ${}_R P_R$. Seja $\tau_R(P)=R$. Chamemos $S=End_R\ P$ e $T=End_{S^o}\ P$. Então:

(1) P é um S^{o}-módulo à direita projetivo finitamente gerado.

(2) O homomorfismo de anel canônico $i: R \to T$ é um isomorfismo.

Demonstração:

(1) Como $\tau_R(P)=R$, então existe $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i \in P \otimes_{S^o} P^*$ tal que $\tau(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i)=1_R$. Logo, $i \circ \tau(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i)=i(1_R)=1_T$. Mas, $i \circ \tau(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i) = \mu' \circ (1 \otimes \psi)(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i)$, por (2.1.11).

Então, para qualquer $y \in P$, temos:

$y = 1_T(y) = \mu'(1 \otimes \psi)(\Sigma\, x_i \otimes f_i)(y) = \Sigma\, x_i.[\psi(f_i)(y)]$.

Notemos que $\psi(f_i) \in Hom_{S^o}(P,S^o)$ e $x_i \in P$. Portanto, $\{\psi(f_i),x_i\}_{i=1}^{n}$ é um sistema de coordenadas projetivo de P sobre S^o, isto é, P é um S^o-módulo à direita projetivo finitamente gerado. (1.2.11).

(2) Temos P_{S^o}. Também temos $_TP$ (P um T-mod) com a operação : $f.x=f(x)$, para todo $f \in T$ e $x \in P$. (1.1.8). Então, $P \otimes_{S^o} Hom_{S^o}(P,S^o)$ é um T-mod e $P \otimes_{S^o} P^*$ é um T-mod também, por (1.2.1-(2)). Para $t \in T$ temos:

$$\begin{aligned}
1 \otimes \psi(t.(\Sigma\, x_i \otimes f_i)) &= 1 \otimes \psi(\Sigma\, t(x_i) \otimes f_i) \\
&= \Sigma\, t(x_i) \otimes \psi(f_i) \\
&= t.(\Sigma\, x_i \otimes \psi(f_i)) \\
&= t.1 \otimes \psi(\Sigma\, x_i \otimes f_i)
\end{aligned}$$

Assim, $1 \otimes \psi$ é um T-módulo homomorfismo.

Para $y \in P$ e $t \in T$ temos:

$$\mu'(t.(\Sigma\, x_i \otimes f_i))(y) = \mu'(\Sigma\, t(x_i) \otimes f_i)(y)$$
$$= \Sigma\, t(x_i) f_i(y)$$
$$= t(\Sigma\, x_i f_i(y)) \qquad \text{pois } f_i(y) \in S^o \text{ e } P_{S^o}$$
$$= t.\mu'(\Sigma\, x_i \otimes f_i)(y)$$

Então μ' é um T-módulo homomorfismo.

Agora, seja $t \in T$. Então:

$$t = t.1_T$$
$$= t.\mu' \circ (1 \otimes \psi)(\Sigma\, x_i \otimes f_i) \qquad \text{pois } 1\otimes\psi \text{ e } \mu' \text{ são T-mod homomorfismos}$$
$$= \mu' \circ (1 \otimes \psi)(t.(\Sigma\, x_i \otimes f_i))$$
$$= \mu' \circ (1 \otimes \psi)(\Sigma\, t(x_i) \otimes f_i)$$

Logo, temos $\mu' \circ (1 \otimes \psi)$ sobrejetora, e, como $\mu' \circ (1 \otimes \psi) = i \circ \tau$, então i é sobrejetora.

Para terminar a demonstração, falta mostrar que i é injetora, ou seja, que $Ker(i)=(0)$. Vejamos:

Temos $I=Ker(i)=\{r \in R \mid rx=0 \text{ para todo } x \in P\}$. Logo $I=Ann_R(P)$, o anulador de P em R. Então $IP=(0)$. Como $R=\tau_R(P)$, temos

$$I = IR = I\tau_R(P) = I(Im\tau)$$
$$= I\tau(P \otimes_{S^o} P^*)$$
$$= \tau(IP \otimes_{S^o} P^*) \qquad \text{pois } \tau \text{ é um R-R-bim. homo. (2.1.5)}$$
$$= (0)$$

Assim, temos R e T isomorfos como anéis.

§2. GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE WEDDERBURN

Apresentamos, neste parágrafo, os dois resultados principais deste trabalho.

Temos, a seguir, uma generalização do Teorema de Wedderburn, (1.1.15), que também é devido a Wedderburn, mas a demonstração dada aqui é diferente da clássica.

Teorema 2.2.1: (Wedderburn)

Seja R um anel simples e artiniano à esquerda. Então existe um anel de divisão D e um D-espaço vetorial de dimensão finita M tal que R e $End_D M$ sejam isomorfos como anéis.

Demonstração: Como o Radical Jacobson J(R) de R é um ideal bilateral próprio, (1.3.2), e R é simples, então J(R)=(0). Como R é artiniano à esquerda, por (1.3.10), R é um anel semi-simples à esquerda. Consideremos o conjunto de todos os ideais à esquerda de R. Então, existe um ideal à esquerda simples M de R, pois R é artiniano. Logo, $_R M$ é projetivo, por (1.3.8), e, por (2.1.7), temos $M=\tau_R(M).M$, o que implica que $\tau_R(M) \neq (0)$, pois $M \neq (0)$. Como $\tau_R(M)\neq(0)$ é um ideal bilateral de R, (2.1.6), e R é simples, então $\tau_R(M)=R$. Seja $S=End_R M$. Pelo Lema de Schur , (1.1.13), S é um anel de divisão. Seja, então, $D=S^o$. É claro que D é também um anel de divisão. Agora, aplicamos o Teorema de Morita, Auslander, Goldman, (2.1.12), e temos que M é um D-módulo à direita projetivo finitamente gerado, ou seja, M é um D-espaço vetorial de dimensão finita e R e $End_D M$ são isomorfos como anéis.

O próximo teorema, devido a M. A. Rieffel, [R], é ainda uma generalização do Teorema 2.2.1. A demonstração apresentada aqui é original deste trabalho.

Teorema 2.2.2: (Rieffel)

Seja R um anel simples. Seja M um ideal à esquerda não nulo de R, e consideremos $End_R M = R'$. Então R e $End_{R'} M$ são isomorfos como anéis.

Demonstração: Definimos uma aplicação $L: R \to End_{R'} M = R''$ por $L(r) = L_r$, para todo $r \in R$, onde $L_r(x) = rx$, para todo $x \in M$. Observemos que $L_r \in R''$ e que L é um homomorfismo de anel. (1.1.12). Vamos verificar que L é um isomorfismo de anel.

Para verificar que L é injetora, basta mostrar que $Ker(L) = (0)$. Sabemos que Ker(L) é um ideal bilateral de R, (1.1.2), e, como R é simples, $Ker(L) = R$ ou $Ker(L) = (0)$. Se tivermos $Ker(L) = R$, então $1 \in Ker(L)$. Assim, $L_1(x) = x = 0$, para todo $x \in M$, o que contradiz o fato de M ser não nulo. Logo, $Ker(L) = (0)$, e temos L injetora.

Provamos que L é sobrejetora, mostrando que $L(R) = R''$. Para isto, verificamos que $1_{R''} \in L(R)$ e que L(R) é um ideal à esquerda de R''. Temos $L_1 = 1_{R''}$, pois, para quaisquer $f \in R''$ e $x \in M$, temos $(L_1 \circ f)(x) = L_1(f(x)) = 1.f(x) = f(x) = f(1.x) = f(L_1(x)) = (f \circ L_1)(x)$. Logo, $1_{R''} \in L(R)$. Para mostrar que L(R) é um ideal à esquerda de R'', é suficiente provar que dados $f \in R''$ e $L_r \in L(R)$, então $f \circ L_r \in L(R)$. Seja, então, $x \in M$. Temos:

$$f \circ L_r(x) = f(L_r(x))$$

$= f(rx)$

$= f(\Sigma\ m_i r_i x)$ — MR é um ideal bilateral de R, (1.1.1). Como $MR \neq (0)$, pois $M \neq (0)$, e R é simples, então $MR=R$. Logo $r=\Sigma m_i r_i$, com $m_i \in M$ e $r_i \in R$.

$= \Sigma\ f(m_i r_i x)$ — pois f é homomorfismo e $m_i r_i x = (m_i r_i)x \in M$, pois $m_i r_i \in MR=R$ e M é um R-mod.

$= \Sigma\ f \circ F_{r_i x}(m_i)$ — onde $F_{rx}(m)=mrx$, para todo $m \in M$. $F_{rx} \in R'$, pois:
$F_{rx}(m_1+m_2)=(m_1+m_2)rx=m_1rx+m_2rx$
$=F_{rx}(m_1)+F_{rx}(m_2)$ e
$F_{rx}(am)=(am)rx=a(mrx)=aF_{rx}(m)$,
onde $m, m_1, m_2 \in M$ e $a \in R$.

$= \Sigma f(F_{r_i x}.m_i)$ — M é um R'-mod.

$= \Sigma\ F_{r_i x}.f(m_i)$ — f é um R'-mod homomorfismo.

$= \Sigma\ F_{r_i x}(f(m_i))$ — M é um R'-mod e $f(m_i) \in M$.

$= \Sigma\ f(m_i)r_i x$ — definição de $F_{r_i x}$.

$= [\Sigma\ f(m_i)r_i]x$

$= L_{\Sigma f(m_i)r_i}(x)$ — onde $\Sigma f(m_i)r_i \in MR=R$.

Assim, $f \circ L_r \in L(R)$. Portanto, $L(R)=R''$ e L é sobrejetora.

Então temos R e $End_{R'}M$ isomorfos como anéis.

BIBLIOGRAFIA

[A-M] ATIYAH -MACDONALD : Introduction to Commutative Algebra. Addison Wesley, 1969.

[A-G] AUSLANDER - GOLDMAN : Maximal Orders. TAMS. vol.97(1960), 1 - 24.

[BA] BARSHAY,J. :Topics in Ring Theory. W.A.Benjamin,New York, 1969.

[B] BOURBAKI,N. : Algēbre; CHAP.II (Algēbre Linēaire). Hermann, Paris,1947.

[HA] HALMOS,P.H.: Finite - Dimensional Vector Spaces. D.V. Nostrand, New Jersey, 1958.

[H] HERSTEIN,I. : Tópicos de Ālgebra.Editora Polīgono S.A.(Blaisdell). Saõ Paulo, 1970.

[K] KAPLANSKY, I. : Fields and Rings. Chicago Press,Chicago,1969.

[LA] LANG,S. : Algebra. Addison-Wesley, 1965.

[L] LAMBEK, J. : Lectures on Rings and Modules. Blaisdell,Mass. 1966.

[MA] MACLANE, S. :Homology. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[M] MORITA,K. : Duality for Modules. Science Report of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec.A, vol. 6, 150,(1958).

[R] RIEFFEL, M. A. :A General Wedderburn Theorem. NASP. vol.54, (1965), 1513.