FIBRAÇÕES, AÇÕES DE GRUPO E TEOREMAS DO TIPO DE BORSUK-ULAM

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Maria Gorete da Silva Carreira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 29 de agosto de 1986.

Janey Antonio Daccach

Prof.Dr. Janey Antonio Daccach

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Ao Antonio

À minha mãe

Ao meu pai
(in memorian)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Janey Antonio Daccach pela proposição e orientação deste trabalho.

Ao CNPq e à FAPESP, que, com seu apoio financeiro possibilitou a realização do mesmo.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é baseado na teoria de transfer em homologia e cohomologia desenvolvida por Daniel H. Gottlieb numa série de trabalhos em ordem crescente de generalização.

Dada uma fibração $E \xrightarrow{p} B$, se existir uma função contínua $f : B \to E$ tal que $p \circ f = I_B$ diversas propriedades da função induzida por p em homologia e cohomologia são obtidas. Teremos então dois homomorfismos p_* e f_* satisfazendo $p_* \circ f_* = I_{H(B)}$ e seu dual, em cohomologia.

Porém, a existência de uma função contínua é muito restrita. Como estamos procurando informações ao nível de homologia e cohomologia pesquisa-se somente a existência do homomorfismo $f_* : H_*(B) \to H_*(E)$ tal que $p_* \circ f_* = I_{H(B)}$ sem que contudo seja induzido por uma função contínua.

Uma série de resultados são obtidos como por exemplo: Se $F \xrightarrow[i]{} E \xrightarrow[p]{} B$ é uma fibração C^∞ e k um número de Stiefel-Whitney de F, então existe um transfer $\tau : H_*(B) \to H_*(E)$ tal que $p_* \circ \tau =$ = multiplicação por k.

Explorando a idéia de transfer, um outro trabalho de Gottlieb foi estudado onde os resultados versam sobre teoremas do tipo Borsuk-Ulam. Esta parte do trabalho foi enriquecida com o estudo de um teorema denominado Teorema Homológico de Borsuk de J.W. Walker [10].

CAPÍTULO 0

PRÉ-REQUISITOS

DEFINIÇÃO 1. Uma involução num espaço topológico X é uma função $f : X \to X$ tal que $f \circ f = id$.

NOTAÇÃO: (X,f)

EXEMPLO: A função antípoda $\alpha : S^n \to S^n$ definida por $\alpha(x) = -x$.

DEFINIÇÃO 2. Seja G um grupo topológico. Uma ação de G num espaço topológico X é uma aplicação contínua

$$\varphi : G \times X \to X \quad \text{tal que:}$$

(i) $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ e $x \in X$.

(ii) Se e é o elemento neutro de G temos $\varphi(e,x) = x$, $\forall x \in X$.

(iii) Dado $g \in G$, a função $\phi_g : X \to X$ definida por $\phi_g(x) = \varphi(g,x)$ é um homeomorfismo.

NOTAÇÃO: Denotaremos $\varphi(g,x)$ por gx, $\forall g \in G$ e $x \in X$.

DEFINIÇÃO 3. Uma ação $\varphi : G \times X \to X$ é dita *fiel* se $gx = x$, $\forall x \in X$ então $g = e$.

DEFINIÇÃO 4. Seja $\varphi : G \times X \to X$ uma ação. O conjunto $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ é chamado *subgrupo de isotropia de* x.

DEFINIÇÃO 5. Uma ação $\varphi : G \times X \to X$ é livre se $G_x = \{e\}$, $\forall x \in X$.

DEFINIÇÃO 6. Um grupo finito G atua basicamente livre em $\mathbb{R}^n$ se atua fielmente em $\mathbb{R}^n$ e livremente em $\mathbb{R}^n - 0$.

DEFINIÇÃO 7. Seja G um grupo atuando num espaço topológico X e num espaço topológico Y. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação, f é uma aplicação *equivariante* ou *G-aplicação* se $f(gx) = g(f(x))$, $\forall g \in G$.

HOMOLOGIA REDUZIDA

Seja X um espaço topológico.

Indicamos $(C(X),\partial) = \{(C_q(x),\partial_q)\}$, $q = 0,1,2,\ldots$ o complexo singular de X a coeficientes em um anel comutativo unitário R.

Consideremos o seguinte homomorfismo:

$\eta : C_o(X) \to R$ definido por

$\eta(\xi_o) = 1$ onde ξ_o é um 0-simplexo , e

$\eta(\sum_x a_x x) = \sum_x a_x \eta(x) = \sum_x a_x$ onde $\sum_x a_x$ é uma 0-cadeia.

Agora, para qualquer 1-simplexo ξ_1 em $C_1(X)$ temos:

$$\partial_1(\xi_1) = \xi_1(1) - \xi_1(0) \in C_o(X)$$

Daí $\eta(\xi_1(1) - \xi_1(0)) = 1 - 1 = 0$.

Vamos denotar η por $\tilde{\partial}_o$.

$C(X)$ com $\tilde{\partial}_o$ em lugar de ∂_o é ainda um complexo que vamos denotar por $\tilde{C}(X) = \{\tilde{C}_q(X)\}$ com $\tilde{C}_q(X) = C_q(X)$ se $q \neq 0$ e $\tilde{C}_o(X) = \text{Ker } \tilde{\partial}_o$.

Considerando a homologia de $\tilde{C}(X)$ temos:

$$\tilde{H}_q(X) = H_q(X) \quad \text{se} \quad q \neq 0$$

$$\tilde{H}_o(X) = \text{Ker } \tilde{\partial}_o / \text{Im } \partial_1$$

$\tilde{H}_q(X)$ é o q-ésimo *grupo de homologia reduzido de* X.

PROPOSIÇÃO 1. Se X possui k componentes conexas então $\tilde{H}_o(X)$ é igual a $k-1$ cópias do anel R, isto é, $\tilde{H}_o(X) = \underbrace{R + \ldots + R}_{k-1 \text{ vezes}}$.

GRAU DE UMA APLICAÇÃO $f : S^n \to S^n$

Seja $f : S^n \to S^n$ uma aplicação contínua e $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros.

Então $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, e, $H_n(S^n)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre com um gerador α.

Para o homomorfismo:

$f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ segue que

$f_*(\alpha) = m\alpha$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.

$\underline{m}$ é chamado o grau de f.

NOTAÇÃO: deg(f).

Sejam M e N variedades orientáveis fechadas n-dimensionais e $[M] \in H_n(M)$, $[N] \in H_n(N)$ as classes fundamentais de homologia.

Se $f: M \to N$ é uma aplicação contínua então:

$$f_{*,n}([M]) = k[N]$$

k é chamado o grau da aplicação f.

DEFINIÇÃO . Sejam M,N variedades diferenciáveis de mesma dimensão m, M fechada e $f: M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para todo valor regular $y \in N$, de f, sabemos que $f^{-1}(y) = \{x_1,\dots,x_k\}$ é finito. Diremos que um ponto $x_i \in f^{-1}(y)$ é positivo ou negativo, conforme o isomorfismo $f'(x_i): T_{x_i}M \to T_yN$ preserve ou inverta a orientação. O *grau diferenciável* de f no ponto y, indicado por $\deg_D f$, é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$.

EXEMPLO: Seja $\gamma : S^n \to S^n$ a reflexão $\gamma(x_0,x_1,\ldots,x_n)=(-x_0,x_1,\ldots,x_n)$, $n \geq 1$.

Então $\deg(\gamma) = -1$

(Vide [5], pag. 69).

O INDICE DOS PONTOS FIXOS

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in V : f(x) = x\}.$$

Vamos definir o índice dos pontos fixos de f quando o conjunto Fix(f) é compacto.

Observemos que se $i : V \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação de inclusão, então:

$$(i - f)^{-1}(0) = \mathrm{Fix}(f).$$

DEFINIÇÃO 8. Seja $f : V \to \mathbb{R}^n$ contínua e $K = \mathrm{Fix}(f)$ compacto. Seja D uma bola fechada em torno da origem contendo K, isto é,

$K \subset D$.

Consideremos a composta:

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \xrightarrow{J_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$$

$$\cong H_n(V, V - K) \xrightarrow{(i-f)_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0).$$

Como $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}$ temos que a composta acima é um endomorfismo de $\mathbb{Z}$ da forma:

$$x \to kx \quad ,$$

onde k é o único inteiro dado pela composta. Chamamos de índice dos pontos fixos de f a esse inteiro.

NOTAÇÃO. $I(\mathbb{R}^n, f, V)$ ou $I(f)$.

Seja M^n uma variedade compacta e $U \subset M$ um aberto. Seja $h : U \to M$ uma aplicação contínua. Consideremos Fix(h) compacto.

Existe $\alpha : U \to V \subset \mathbb{R}^N$ e $\beta : V \to M$ tal que $h = \beta \cdot \alpha$ e o índice de $\alpha\beta : \beta^{-1}(U) \to V \subset \mathbb{R}^N$ está definido e é independente da fatoração de h.

DEMONSTRAÇÃO. [4], pag. 44.

DEFINIÇÃO 9. $I(M,h,V) = I(h) = I(\mathbb{R}^n, \alpha\beta, \beta^{-1}(U))$.

Dizemos que a terna (M,h,U) é admissível.

PROPOSIÇÃO 2.

(i) Se (M,h,U) é admissível e $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ com U_i aberto para todo i e $U_i \cap U_j \cap \mathrm{Fix}(h) = \phi$ se $i \neq j$, então $I(h) = \sum_{i=1}^{r} I(h|_{U_i})$.

(ii) Se (M,h_t,U) é admissível e $h_t : U \to M$ é uma homotopia com $0 \leq t \leq 1$ e $\bigcup_t \mathrm{Fix}(h_t)$ é compacto, então:

$$I(h_o) = I(h_1)$$

DEMONSTRAÇÃO. [4], pag. 46.

DEFINIÇÃO 10. Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Vamos supor que $H_i(X,Q) = 0$ para i suficientemente grande e que para cada i, $H_i(X,Q)$ é de dimensão finita como espaço vetorial sobre Q: corpo dos números racionais.

Para cada i temos o homomorfismo induzido:

$$f_{*_i} : H_i(X,Q) \to H_i(X,Q).$$

Chama-se o número de Lefschetz de f à expressão:

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot tr(f_{*_i})$$

onde $tr(f_{*_i})$ é o traço do homomorfismo f_{*_i}.

OBSERVAÇÃO. Se $f = id : X \to X$ temos que $\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i tr(id_{*_i}) =$ $= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \dim H_i(X,Q) = \chi(X)$ que é a *característica de Euler de* X.

TEOREMA 1. (Hopf): Se M é uma variedade compacta e $f : M \to M$ uma aplicação contínua, então

$$\Lambda(f) = I(f)$$

DEMONSTRAÇÃO. [3].

TEOREMA 2. Se X é um complexo CW finito, $f : X \to X$ contínua, então existe $h : X \to X$, $h \sim f$ tal que Fix h é um conjunto finito e se $x \in$ Fix h, $\text{Ind}(x) = \pm 1$.

DEMONSTRAÇÃO. [1].

DEFINIÇÃO 11. Dados elementos $x \in H^n(X)$ e $\xi \in H_n(X)$, X espaço topológico, definimos o *índice de Kronecker* $\langle x, \xi \rangle$ como se segue: escolhemos um cociclo representativo $z \in \mathbb{Z}^n(X)$ para x e um ciclo representativo $\tau \in Z_n(X)$ para ξ. Definimos $<x,\xi> =$ $= <z,\tau> \in R$, o anel dos coeficientes.

NÚMEROS DE STIEFEL-WHITNEY

Dada uma variedade M, diferenciável, fechada para o fibrado tangente τ_M de M existem classes de cohomologia

$$W_i(\tau_M) \in H^i(B(\tau_M), \mathbb{Z}_2) \ ,$$

$i=0,1,2,\ldots$ que são as classes de Stiefel-Whitney de τ_M.

Para maiores detalhes ver [6].

Vamos definir os números de Stiefel-Whitney de M, onde M é uma variedade n-dimensional.

Usando coeficientes módulo 2, existe uma única classe de homologia fundamental $\mu_M \in H_n(M, \mathbb{Z}_2)$.

Daí, para qualquer classe de cohomologia $v \in H^n(M, \mathbb{Z}_2)$, o índice de Kronecker $<v,\mu_M> \in \mathbb{Z}_2$ é definido.

Sejam $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ inteiros não negativos com $\gamma_1 + 2\gamma_2+\ldots+$ $+ n\gamma_n = n$.

Então para o fibrado tangente τ_M de M podemos formar o monômio

$$W_1(\tau_M)^{\gamma_1},\ldots,W_n(\tau_M)^{\gamma_n} \quad \text{em} \quad H^n(B(\tau_M), \mathbb{Z}_2).$$

DEFINIÇÃO 12. $< W_1(\tau_M)^{\gamma_1} \dots W_n(\tau_M)^{\gamma_n}, \mu_M > \in \mathbb{Z}_2$ é chamado o número de Stiefel-Whitney de M associado ao monômio $W_1^{\gamma_1} \dots W_n^{\gamma_n}$.

TEOREMA 3. Se B é uma variedade diferenciável compacta (n+1)-dimensional com bordo M então os números de Stiefel-Whitney de M são todos nulos.

DEMONSTRAÇÃO. [6].

TEOREMA 4. Se todos os números de Stiefel-Whitney de M sao nulos então M é o bordo de alguma variedade diferenciável compacta.

DEMONSTRAÇÃO. [7].

DEFINIÇÃO 13. Sejam $E \xrightarrow{p} B$ e $f : X \to G$ aplicações contínuas onde X é qualquer espaço topológico. Se para qualquer homotopia $H : X \times I \to B$ começando com $p \circ f$ existe $\tilde{H} : X \times I \to E$ começando com f tal que $p \circ \tilde{H} = H$, dizemos que p é uma fibração.

PROPOSIÇÃO 3. Seja G um grupo finito ordem ímpar. Então G não é bordo.

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $\chi(G) = 1$.

Mas o número de Stiefel-Witney $< W_n(\tau_G), \mu >$ é congruente a $X(G)$ módulo 2. ([6] , pag. 130)

$$\therefore \ < W_n(\tau_G) , \mu > \ \neq 0.$$

Logo, pelo teorema 3, G não pode ser bordo.

CAPÍTULO I

TEOREMAS DO TIPO DE BORSUK-ULAM

I.1. O TEOREMA HOMOLÓGICO DE BORSUK

I.1.1. CLASSE SEMI-ESFÉRICA DE HOMOLOGIA DE S^n

Seja $\alpha : S^n \to S^n$ a função antípoda definida por $\alpha(x) = -x$.

Vamos construir um n-ciclo h_n tal que $[h_n]$ gera $H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$.

Seja σ_o um ponto de S^n e $\alpha(\sigma_o)$ o antípoda de σ_o.

Consideremos um círculo máximo σ_1 ligando σ_o a $\alpha(\sigma_o)$.

Seja $\alpha(\sigma_1)$ o semi-círculo antípoda a σ_1.

Então $h_1 = \sigma_1 \cup \alpha(\sigma_1)$ é um círculo máximo em S^n.

Seja agora σ_2 uma semi-esfera $S^2/2$ cujo bordo é $-h_1$.

Consideremos $\alpha(\sigma_2)$.

$h_2 = \sigma_2 \cup \alpha(\sigma_2)$ é uma esfera máxima $S^2 \subset S^n$.

Continuando, consideremos uma semi-esfera máxima σ_3 cujo bordo é S^2.

$h_3 = \sigma_3 \cup \alpha(\sigma_3)$ é uma esfera máxima $S^3 \subset S^n$.

E assim por diante temos $h_n = \sigma_n \cup \alpha(\sigma_n)$.

Vamos provar que h_n é um ciclo.

$$\partial(h_n) = \partial(\sigma_n + \alpha(\sigma_n)) =$$

$$= \partial(\sigma_n) + \partial(\alpha(\sigma_n)) =$$

$$= \partial(\sigma_n) + \alpha(\partial(\sigma_n)) =$$

$$= \sigma_{n-1} + \alpha(\sigma_{n-1}) + \alpha(\sigma_{n-1} + (\sigma_{n-1})) =$$

$$= \sigma_{n-1} + \alpha(\sigma_{n-1}) + \alpha(\sigma_{n-1}) + \sigma_{n-1} =$$

$$= 0 \qquad (\text{mod } \mathbb{Z}_2)$$

I.I.2. DEFINIÇÃO. Sejam X, Y espaços topológicos. X com uma involução f e Y com uma involução g. Uma função $h : X \to Y$ é chamada *equivariante* se $h(f(x)) = g(h(x))$.

I.I.3. TEOREMA HOMOLÓGICO DE BORSUK (Teor. de Walker). Seja (X,μ) e (S^m,α) espaços topológicos dotados de involuções. Seja $f : X \to S^m$ uma função contínua e equivariante.

Então existe um inteiro $j \leq m$ e uma classe não nula $[x_j] \in \tilde{H}_j(X,\mathbb{Z}_2)$ tal que $\mu([x_j]) = [x_j]$.

Se $j = m$ temos $f_*([x_m]) =$ gerador de $H_m(S^m,\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

DEMONSTRAÇÃO. O caso $m = 0$ é claro.

Suponhamos $m > 0$.

Se $g : X \to Y$ é uma aplicação contínua entre espaços topológicos, indicamos com $g_\#$ a aplicação de cadeia $C(g) : C(X) \to C(Y)$ e por g_* o homomorfismo induzido nos grupos de homologia $\tilde{H}(g) : \tilde{H}_*(X) \longrightarrow \tilde{H}_*(Y)$.

Vamos definir as seguintes aplicações de cadeia:

$$\vartheta_X : C(X) \to C(X)$$

$$\vartheta_X = id_\# + \mu_\# \qquad\qquad \text{e}$$

$$\vartheta_{S^m} : C(S^m) \to C(S^m)$$

$$\vartheta_{S^m} = id_\# + \alpha_\#.$$

Temos que:

(a) $\vartheta_X^2 = \vartheta_{S^m}^2 = 0$ pois:

$$\vartheta_X^2(x) = \vartheta_X(\vartheta_X(x)) = \vartheta_X(id_\#(x) + \mu_\#(x)) =$$

$$= id_\#(id_\#(x) + \mu_\#(x)) + \mu_\#(id_\#(x) + \mu_\#(x)) =$$

$$= id_\#(x) + \mu_\#(x) + \mu_\#(x) + \mu_\#(\mu_\#(x)) =$$

$$= id_{\#}(x) + \mu_{\#}(x) + \mu_{\#}(x) + id_{\#}(x) = 0 \pmod 2$$

(b) $\vartheta_{S^m} \circ f_{\#} = f_{\#} \circ \vartheta_X$ pois

$$\vartheta_{S^m} \circ f_{\#}(x) = \vartheta_{S^m}(f_{\#}(x)) = id_{\#}(f_{\#}(x)) +$$

$$+ \alpha_{\#}(f_{\#}(x)) = f_{\#}(x) + \alpha_{\#} \circ f_{\#}(x) =$$

$$= f_{\#}(x) + f_{\#} \circ \mu_{\#}(x) = f_{\#}(x) + f_{\#}(\mu_{\#}(x)) =$$

$$= f_{\#}(id_{\#}(x) + \mu_{\#}(x)) = f_{\#}(\vartheta_X(x)) =$$

$$= f_{\#} \circ \vartheta_X(x).$$

Suponhamos que $\forall j < m$ e $\forall [x_j] \in \tilde{H}_j(X,\mathbb{Z}_2)$, $\mu_*([x_j]) = [x_j] \Rightarrow [x_j] = 0$.

(Caso contrário $[x_j]$ satisfaz a primeira parte do teorema).

(c) Se y_j é um j-ciclo tal que $\vartheta_X(y_j) = 0$, então $\partial y_j = 0$ e $id_{\#}\, y_j + \mu_{\#} y_j = 0 \Rightarrow \mu_{\#} y_j = id_{\#} y_j \Rightarrow \mu_*([y_j]) = ([y_j]) \Rightarrow$ $\xrightarrow{\text{p.hip.}}$ $[y_j] = 0$, isto é, y_j é também um bordo.

Consideremos em S^m a j-cadeia σ_j correspondente à semi-esfera como em I.1.1. σ_j satisfaz as seguintes condições:

(i) σ_o é um 0-simplexo

(ii) $\partial h_j = \sigma_{j-1} + \alpha_{\#}(\sigma_{j-1}) = \vartheta_{S^m}\sigma_{j-1}$ para $1 \leq j \leq m$.

(iii) $\sigma_m + \alpha_{\#}(\sigma_m) = \vartheta\sigma_m$ gera $H_m(S^m, \mathbb{Z}_2)$.

Vamos construir agora, para $0 \leq j \leq m$, a j-cadeia singular c_j de X tal que sejam verificadas as seguintes condições:

(i) c_o é um 0-simplexo

(ii) $\partial c_j = \vartheta_X c_{j-1}$, $1 \leq j \leq m$.

Em X escolhemos um ponto e indicamos por c_o a correspondente 0-cadeia.

Temos que $\vartheta_X c_o$ é um ciclo pois:

$$\tilde{\partial}(\vartheta_X c_o) = \tilde{\partial}_o(c_o + \mu_{\#}c_o) = 1 + 1 = 0 \pmod 2.$$

Como $\vartheta_X(\vartheta_X(c_o)) = 0$ por (a) e levando em conta (c) segue que $\vartheta_X c_o$ é um bordo.

Então existe uma 1-cadeia c_1 para a qual $\partial c_1 = \vartheta_X c_o$.

Suponhamos agora que $\partial c_j = \vartheta_X c_{j-1}$ para qualquer $j < m$.

Então:

$$\partial\vartheta_X c_j = \vartheta_X \partial c_j = \vartheta_X \vartheta_X c_{j-1} = 0 .$$

Isto é, $\vartheta_X c_j$ é um ciclo e como $\vartheta_X \vartheta_X c_j = 0$ temos que $\vartheta_X c_j$ é também um bordo, por (c).

Portanto, existe uma (j+1)-cadeia c_{j+1} para a qual

$$\partial c_{j+1} = \vartheta_X c_j \ .$$

Assim, construimos por indução a sucessão $c_o, c_1, \ldots, c_m$.

Vamos construir agora, por indução, a j-cadeia e_j de S^m tal que:

$$k_j = \sigma_j + f_\# c_j + \vartheta_{S^m} e_j$$

seja um ciclo para $0 \leq j \leq m$.

Colocamos $e_o = 0$ e temos

$$\tilde{\partial} k_o = \tilde{\partial}(\sigma_o + f_\# c_o) = \tilde{\partial}(\sigma_o) + \tilde{\partial}(f_\# c_o) =$$

$$= 1 + 1 = 0 \text{ (mod 2)}.$$

Como $\tilde{H}_o(S^m, \mathbb{Z}_2) = 0$ temos que k_o é também um bordo. Logo existe uma 1-cadeia, e_1, para a qual $\partial e_1 = k_o$.

Aplicando ϑ_{S^m} temos:

$$\vartheta_{S^m}\partial e_1 = \partial\vartheta_{S^m} e_1 = \vartheta_{S^m}(\sigma_o + f_\# c_o + \vartheta_{S^m} e_o) =$$

$$= \vartheta_{S^m}\sigma_o + \vartheta_{S^m} f_\# c_o + \vartheta_{S^m}\vartheta_{S^m} e_o =$$

$$= \partial\sigma_1 + \vartheta_{S^m} f_\# c_o + 0 =$$

$$= \partial\sigma_1 + f_\#\vartheta_X c_o \quad \text{por (b)} \quad =$$

$$= \partial\sigma_1 + f_\#\partial c_1 =$$

$$= \partial\sigma_1 + \partial f_\# c_1 \implies \partial(\vartheta_{S^m} e_1) -$$

$$- \partial\sigma_1 - \partial f_\# c_1 = 0 \implies$$

$$\implies \partial(\sigma_1 + f_\# c_1 + \vartheta_{S^m} e_1) = \partial(k_1) = 0$$

$\therefore$ k_1 é um ciclo.

Suponhamos que e_j, para $1 \leq j < m$, seja uma j - cadeia para a qual k_j seja um ciclo.

Como $\tilde{H}_j(S^m, \mathbb{Z}_2) = 0$ para $j < m$, temos que k_j é também um bordo, isto é, existe uma $(j+1)$ cadeia, e_{j+1}, para a qual $\partial e_{j+1} = k_j$.

Temos:

$$\partial\vartheta_{S^m} e_{j+1} = \vartheta_{S^m}\partial e_{j+1} = \vartheta\sigma_j + \vartheta f_{\#}c_j =$$

$$\partial\sigma_{j+1} + f_{\#}\vartheta_X c_j = \partial\sigma_{j+1} + f_{\#}\partial c_{j+1} \implies$$

$$\implies \partial(\sigma_{j+1} + f_{\#}c_{j+1} + \vartheta e_{j+1}) = 0 \quad \text{e}$$

daí k_{j+1} é um ciclo, como desejado.

Ora, k_m é um ciclo de S^m que é um múltiplo da classe fundamental $\vartheta_{S^m}\sigma_m$ de S^m :

$$k_m = \lambda\cdot\vartheta_{S^m}\sigma_m \,, \qquad \lambda \in \mathbb{Z}_2 \,.$$

Então $\vartheta_{S^m}k_m = \lambda\,\vartheta_{S^m}\vartheta_{S^m}\sigma_m = 0$ e

daí $[\vartheta_{S^m}\sigma_m] = [f_{\#}\vartheta_X c_m] \implies$

$$\implies [\vartheta_{S^m}\sigma_m] = f_*[\vartheta_X c_m]$$

Temos que $\vartheta_X c_m$ é um ciclo pois

$$\partial\vartheta_X c_m = \vartheta_X\partial c_m = \vartheta_X\vartheta_X c_{m-1} = 0 \,.$$

Então colocamos $[x_m] = [\vartheta_X c_m]$ e concluímos que $[x_m] \neq 0$ pois $f_*([x_m])$ gera $\tilde{H}_m(S^m, \mathbb{Z}_2)$.

Enfim:

$$\vartheta_X(\vartheta_X c_m) = 0 \Longrightarrow \vartheta_X c_m + \mu_\# \vartheta_X c_m = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu_\# \vartheta_X c_m = \vartheta c_m \Longrightarrow \mu_*[\vartheta_X c_m] =$$

$$= [\vartheta_X c_m] \Longrightarrow \mu_*[x_m] = [x_m].$$

c.q.d.

I.1.4. COROLÁRIO (Teorema Clássico de Borsuk).

Considere (S^n, α_1) e (S^m, α_2). Se existir $f : S^n \to S^m$ uma função contínua e equivariante, então $m \geq n$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos $m < n$.

Pelo Teorema Homológico de Borsuk, existe um inteiro $j \leq m < n$ e uma classe não nula $[x_j] \in \tilde{H}_j(S^n, \mathbb{Z}_2)$ tal que $\alpha_{1_*}([x_j]) = [x_j]$ o que é um absurdo pois $\tilde{H}_j(S^n, \mathbb{Z}_2) = 0$ para $j < n$.

$$\therefore\ m \geq n.$$

I.1.5. COROLÁRIO. Se $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, então existe um par de pontos antípodas $(x,-x)$ tal que $f(x) = f(-x)$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que para qualquer par $(x,-x)$, $x \in S^n$, tenhamos $f(x) \neq f(-x)$.

Definimos $g : S^n \to S^{n-1}$ por $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$.

É claro que g é contínua e equivariante.

Logo, por I.1.4, $n-1 \geq n$ (absurdo).

$$\therefore \exists (x,-x) \mid f(x) = f(-x).$$

I.2. Seja M uma variedade compacta e G um grupo finito atuando livremente em M. Ainda, seja $f : M \to M$ uma G-aplicação.

O nosso objetivo inicial é mostrar que $O(G)$ divide $\Lambda(f)$.

Como G atua livremente em M e f é uma G-aplicação, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ M/_G \arrow[r, "\overline{f}"'] & M/_G \end{tikzcd}$$

As aplicações verticais são fibrações e $\overline{f}$ é induzida por f. Além disso $M/_G$ é CW-complexo finito.

Sabemos que se X é um complexo CW, $\overline{f} : X \to X$ contínua então $\exists h : X \to X$, $h \simeq \overline{f}$ tal que fix h é um conjunto finito.

Logo, como $M/_G$ é um CW complexo e $\overline{f} : M/_G \to M/_G$, $\exists h : M/_G \to M/_G$, $h \simeq \overline{f}$ tal que Fix h é um conjunto finito.

Partindo dessas considerações vamos demonstrar alguns lemas.

I.2.1. LEMA. $h : M/_G \to M/_G$ se levanta a uma $\tilde{h} : M \to M$ equivariante tal que $\tilde{h} \sim f$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja H uma homotopia entre $\overline{f}$ e h.

$$H(\overline{x},0) = f \quad e \quad H(\overline{x},1) = h .$$

O diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "\pi"] & M/_G \arrow[r, "\overline{f}"] & M/_G \end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad \overline{f} \circ \pi = \pi \circ f$$

Como π é uma fibração para qualquer homotopia $H' : M \times I \to M/_G$ começando com $\pi \circ f$, existe uma homotopia $\tilde{H} : M \times I \to M$

começando em f tal que $\pi \circ \tilde{H} = H'$

$$\begin{array}{ccc} M \times I & \xrightarrow{\tilde{H}} & M \\ {\scriptstyle (\pi,id)}\big\downarrow & \searrow^{H'} & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M/_G \times I & \xrightarrow{H} & M/_G \end{array}$$

Tomamos $H' = H \circ (\pi, id)$

$$H \circ (\pi, id)(x,0) = H(\pi(x),0) = \bar{f}(\pi(x)) =$$

$$= \bar{f} \circ \pi(x) = \pi \circ f.$$

Como $\tilde{H} : M \times I \to M$ começa em f temos $\tilde{H}(x,0) = f$.

Colocamos $\tilde{h}(x) = \tilde{H}(x,1)$

$\therefore$ h se levanta a uma $\tilde{h}$ tal que $h \sim f$ e $\tilde{h}$ é equivariante por [11] pag. 97.

I.2.2. LEMA. Se $\bar{x}$ é fixo por h e $\{x, x_1, \ldots, x_{|G|-1}\}$ é a órbita de x então $\{x, x_1, \ldots, x_{|G|-1}\}$ é invariante por $\tilde{h}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x_i \in orb(x)$. Então $\exists g \in G$ tal que $x_i = gx$.

Daí $\tilde{h}(x_i) = \tilde{h}(gx)$

Agora $\pi \circ \tilde{h}(x_i) = \pi(\tilde{h}(x_i)) = \pi(\tilde{h}(gx)) = h(\pi(gx)) =$
$= h(\bar{x}) = \bar{x}$.

$$\therefore \quad \tilde{h}(x_i) \text{ está na órbita de } x.$$

Logo $\tilde{h}$ restrita à órbita leva a órbita sobre si mesma.

OBSERVAÇÃO. Como $\tilde{h} \sim f$ concluímos que $\operatorname{Ind} \tilde{h} = \operatorname{Ind} f$.

I.2.3. LEMA. $\tilde{h}$ restrita a órbita de x ou deixa todos os pontos fixos ou não deixa pontos fixos, isto é, $\tilde{h}|_{orb(x)} = id$ ou $\tilde{h}|_{orb(x)}(x_i) \neq x_i$ para todo i.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\tilde{h}(x) \neq x$, $\forall x_i \in orb(x)$ temos que mostrar que $\tilde{h}(x_i) \neq x_i$.

Como $\tilde{h}(x) \neq x$, $\exists g \in G$ tal que $\tilde{h}(x) = gx$, $g \neq e$.

Temos que $\exists g_1 \in G$ tal que $x_i = g_1 x$

$$\tilde{h}(x_i) = \tilde{h}(g_1 x) = g_1 \tilde{h}(x) \neq g_1 x = x_i .$$

$$\therefore \quad \tilde{h}(x_i) \neq x_i$$

c.q.d.

Suponhamos que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ sejam os pontos fixos de h de forma que as órbitas correspondentes em M sejam fixadas por $\tilde{h}$.

Tomemos uma órbita $\overline{x}_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{|G|}\}$.

Temos que $x_i^{i_1} = g x_i^{i_2}$ e g é um homeomorfismo.

Tanto $x_i^{i_1}$ como $x_i^{i_2}$ são fixos por $\tilde{h}$.

$$\therefore \quad \operatorname{Ind} \tilde{h}(x_i^{i_1}) = \operatorname{Ind} \tilde{h}(x_i^{i_2}) \ . \ [1]$$

Chamemos k_i o índice de cada ponto da órbita de $\overline{x}_i$.

A parte do índice fornecida por $\overline{x}_i$ é $|G| \cdot k_i$.

Agora $\operatorname{Ind} \tilde{h} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ind} \tilde{h}_{\overline{x}_i} =$

$$= |G| k_1 + \ldots + |G| k_n =$$

$$= |G| (k_1 + \ldots + k_n) \ .$$

Logo $o(G) \,|\, \operatorname{Ind} \tilde{h}$.

Mas $\operatorname{Ind} \tilde{h} = \operatorname{Ind} f = \Lambda(f)$

Portanto temos demonstrado que:

I.2.4. TEOREMA. $o(G)$ divide $\Lambda(f)$.

I.2.5. COROLÁRIO. $o(G)$ divide $\chi(M)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $id : M \to M$ a aplicação identidade.

id é uma G-aplicação pois $id(gx) = g \cdot x = g\, id(x)$.

Além disso $\Lambda(id) = \chi(M)$.

$\therefore$ $o(G)$ divide $\chi(M)$

I.2.6. COROLÁRIO. Se $f : M \to M$ é uma G-aplicação onde G atua livremente e é finito então f não pode ser homotópica a aplicação constante.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos $f \simeq$ cte.

Então $\Lambda(f) = \Lambda(\text{cte}) = 1$.

Logo $o(G)$ não pode dividir $\Lambda(f)$ o que é um absurdo.

I.3. TEOREMAS DE BORSUK-ULAM

Uma variedade M é dominada por um complexo finito K se existem aplicações $f : M \to K$ e $g : K \to M$ tal que $g \circ f$ é homotópica à identidade de M.

No trabalho [8], Gottlieb extendeu o resultado do Teorema I.2.4 para variedades quaisquer dominadas por um complexo finito.

Então, se M é uma variedade nestas condições, G um grupo finito atuando fielmente e livremente em M e $f : M \to M$ uma aplicação equivariante, temos que $o(G)$ divide $\Lambda(f)$.

EXEMPLO. $\mathbb{R}^n - 0$ é uma variedade dominada por um complexo finito pois

$\mathbb{R}^n - 0 \sim S^{n-1}$ e S^{n-1} é um complexo com duas células: uma de dimensão zero e uma de dimensão $n-1$.

I.3.1. DEFINIÇÃO. Uma transformação linear comuta com a ação de G se comuta com todo elemento $g \in G$.

I.3.2. OBSERVAÇÃO. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear com $\det T \neq 0$. Então:

$$\deg T = \frac{\det T}{|\det T|}.$$

De fato:

Podemos considerar $T : \mathbb{R}^n - 0 \to \mathbb{R}^n - 0$ pois T é um isomorfismo.

Seja $T \in GL(\mathbb{R}, n)$ = conjunto das matrizes $n \times n$ não singulares com entradas em $\mathbb{R}$.

Sabemos que $GL(\mathbb{R}, n)$ tem duas componentes conexas por caminho:

$$GL(\mathbb{R},n)^+ : \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \det T > 0\}$$

$$GL(\mathbb{R},n)^- : \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \det T < 0\}.$$

Se $\det T > 0$, $T \in GL^+(\mathbb{R},n)$ que é conexo por caminhos.

Logo $\exists \lambda : I \to GL^{+}(\mathbb{R},n)$ tal que $\lambda(0) = Id$ (matriz identidade) e $\lambda(1) = T$.

Consideremos a homotopia:

$$\tilde{\lambda} : \mathbb{R}^n - 0 \times I \to \mathbb{R}^n - 0$$

$$\tilde{\lambda}(x,t) = \lambda(t) \cdot x$$

$\therefore$ $\tilde{\lambda}$ é uma homotopia entre Id e T.

Logo $\deg T = \deg Id = 1 = \dfrac{\det T}{|\det T|}$.

Suponhamos agora $\det T < 0$ e consideramos

$$r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow (-x_1,\ldots,x_n) \quad \text{(reflexão)} .$$

Sabemos que $\deg r = -1$.

Da mesma forma que antes, $T \in GL(\mathbb{R},n)^{-}$ que é conexo por caminhos.

Logo $\exists \lambda : I \to GL(\mathbb{R},n)^{-}$ tal que $\lambda(0) = r$ e $\lambda(1) = T$.

e $\tilde{\lambda} : \mathbb{R}^n - 0 \times I \to \mathbb{R}^n - 0$ é

$$(x,t) \longrightarrow \lambda(t) \cdot x$$

uma homotopia entre r e T.

$$\therefore \deg T = \deg r = -1 = \frac{\det T}{|\det T|}$$

I.3.2. TEOREMA. Se G atua basicamente livre em $\mathbb{R}^n$ e se T é uma transformação linear que comuta com a ação de G, então $\det T \geq 0$ ou $o(G) = 1$ ou 2.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos $\det T \neq 0$ e $o(G) > 2$.

Temos que mostrar que $\det T > 0$.

Se $\det T \neq 0$, então T é um isomorfismo e podemos considerar $T : \mathbb{R}^n - 0 \to \mathbb{R}^n - 0$.

Temos que $\Lambda(T) = 1 + (-1)^{n-1} \deg T$ e $\deg T = \dfrac{\det T}{|\det T|}$

Ainda:

$$\chi(\mathbb{R}^n - 0) = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar .} \end{cases}$$

Logo n deve ser par pois $o(G)$ divide $\chi(\mathbb{R}^n - 0)$ e $o(G) > 2$.

Portanto $\Lambda(T) = 1 - \dfrac{\det T}{|\det T|}$ e daí $\Lambda(T) = 0$ ou $\Lambda(T) = 2$.

Mas $\Lambda(T)$ não pode ser dois pois $o(G)\,|\,\Lambda(T)$ e $o(G) > 2$.

Logo $\Lambda(T) = 0 \implies 1 - \dfrac{\det T}{|\det T|} = 0 \implies$

$$\implies \det T = |\det T| > 0 .$$

I.3.3. TEOREMA. Seja G um grupo finito atuando basicamente livre em um espaço vetorial V e seja W um subespaço próprio invariante. Então, qualquer G-aplicação $f : V - 0 \to W$ deve conter 0 na sua imagem.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que 0 não está na imagem de f.

A composição:

$V - 0 \xrightarrow{f} W - 0 \xrightarrow{i} V - 0$ é uma G-aplicação pois:

$$i \circ f(gx) = i(f(gx)) = f(g\,x) =$$

$$= gf(x) = g \circ i(f(x)) = g \circ i \circ f(x).$$

Temos que:

$V - 0$ é homotopicamente equivalente a S^{n-1} onde $n = \dim V$.

$W - 0$ é homotopicamente equivalente a S^{m-1} com $m < n$, $m = \dim W$.

$$\begin{tikzcd} V - 0 \arrow[rr, "i \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & V - 0 \\ & W - 0 \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

$(i \circ f)_{*,n-1} : H_{n-1}(V - 0) \longrightarrow H_{n-1}(V - 0)$ e $\deg(i \circ f) = k$ e $(i \circ f)_{*,n-1}(\alpha) = k\cdot\alpha$.

Mas $f_{*,n-1} : H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{m-1}) =$

$$\Longrightarrow f_{*,n-1} : \mathbb{Z} \to 0 \Longrightarrow f_{*,n-1}(\alpha) = 0 .$$

$$\therefore (i \circ f)_{*,n-1}(\alpha) = i_{*,n-1} \circ f_{*,n-1}(\alpha) =$$

$$= i_{*,n-1}(f_{*,n-1}(\alpha)) = 0 = \deg(i \circ f) .$$

$\therefore$ $i \circ f$ é homotópica a aplicação constante o que é uma contradição pelo corolário I.2.6.

$$\therefore \exists x \in V - 0 \mid f(x) = 0$$

1.3.4. TEOREMA. Seja ξ uma k-ésima raiz primitiva da unidade. Seja $f : C^{n+1} - 0 \to C^n$ qualquer aplicação contínua. Então existe

$x \in C^{n+1} - 0$ tal que $\sum_{i=0}^{k-1} \xi^{-i} f(\xi^i x) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $Z_k = \{1, \xi, \ldots, \xi^{k-1}\}$.

Z_k atua basicamente livre em $C^{n-1} - 0$ através da ação

$$Z_k \times C^{n+1} - 0 \longrightarrow C^{n+1} - 0$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x.$$

Além disso C^n pode ser considerado um subespaço invariante de C^{n+1}.

Seja:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \xi^{-i} f(\xi^i x)$$

F é uma Z_k-aplicação.

De fato:

Seja $\alpha \in Z_k$. Então $\exists j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq k$ tal que $\alpha = \xi^j$.

Logo:

$$F(\alpha x) = F(\xi^j x) = \sum_{i=1}^{k} \xi^{-i} f(\xi^{i+j} x)$$

substituindo $i+j$ por ℓ temos $i = \ell - j$.

Então,

$$F(\alpha x) = \sum_{\ell=j+1}^{k+j} \xi^{j-\ell} f(\xi^\ell x) =$$

$$= \xi^j \sum_{\ell=j+1}^{k} \xi^{-\ell} f(\xi^\ell x) + \xi^j \sum_{\ell=k+1}^{k+j} \xi^{-\ell} f(\xi^\ell x) =$$

$$= \xi^j \left[\sum_{\ell=j+1}^{k} \xi^{-\ell} f(\xi^\ell x) + \sum_{\ell=1}^{j} \xi^{-\ell} f(\xi^\ell x) \right] =$$

$$= \xi^j \left[\sum_{\ell=1}^{k} \xi^{-\ell} f(\xi^\ell x) \right] =$$

$$= \alpha F(x) .$$

$\therefore\ F : C^{n+1} - 0 \to C^n$ é uma Z_k-aplicação.

Logo pelo Teorema anterior $\exists x \in C^{n+1} - 0$ tal que $F(x) = 0$.

1.3.5. TEOREMA. Seja $f : S^{2n+1} \to C^n$ contínua. Então $\exists x \in S^{2n+1}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{k} \xi^{-i} f(\xi^i x) = 0 .$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g : C^{n+1} - 0 \to C^n$ contínua e S^{2n+1} a esfera unitária em C^{n+1}, tal que $g = f \circ \frac{1}{\| \ \|}$ onde $\frac{1}{\| \ \|} : C^{n+1} - 0 \longrightarrow S^{2n+1}$ é definida por $\frac{1}{\| \ \|}(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

$$\begin{tikzcd} C^{n+1} - 0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\frac{1}{\| \ \|}"'] & & C^n \\ & S^{2n+1} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Existe $x \in C^{n+1} - 0 \mid \Sigma\, \bar{\xi}^i g(\xi^i x) = 0$. Mas $g(x) = f \circ \dfrac{1}{\| \ \|}$

$$\therefore \quad \Sigma\, \bar{\xi}^i g(\xi^i x) = \Sigma\, \bar{\xi}^i \left(f \circ \frac{1}{\| \ \|}\right)(\xi^i x) =$$

$$= \Sigma\, \bar{\xi}^i\, f\left(\frac{\xi^i x}{\|x\|}\right) = 0$$

Como $\dfrac{x}{\|x\|} \in S^{2n+1}$ temos provado o teorema.

1.3.6. COROLÁRIO. Dado k e $f : S^{2n+1} \to C^n$, existe uma k-órbita cuja imagem está em k-2-dimensional hiperplano complexo.

DEMONSTRAÇÃO. Escolhemos x de modo que $\sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(\xi^i x) = 0$

Seja $x_i = f(\xi^i x)$.

Consideremos o conjunto de k-1 vetores $\{(x_1 - x_k), \ldots, (x_{k-1} - x_k)\}$.

Temos que:

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i (x_i - x_k) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i x_i - x_k \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i = 0 .$$

Logo os vetores são L.D. e estão num subespaço de dimensão $k-2$.

Daí, a translação por x_k desse subespaço é um hiperplano de dimensão $k-2$ que contém os vetores $x_1,\dots,x_k$.

1.3.7. COROLÁRIO. Uma aplicação $f: S^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ leva alguma 4-órbita em um ou dois pontos, de modo que dois pares de pontos antípodas são cada um levado em um ponto.

DEMONSTRAÇÃO. Seja ξ uma raiz $4^{\underline{a}}$ primitiva da unicidade e $x = \{x, ix, -x, -ix\}$ a órbita do ponto x.

Seja $x_j = f(\xi^j x)$.

Então:

$$-ix_1 - x_2 + ix_3 + x_4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1 = x_3 \quad e \quad x_2 = x_4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(-x) \quad e \quad f(ix) = f(-ix).$$

CAPÍTULO II

O HOMOMORFISMO TRANSFER

II.1. DEFINIÇÃO. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre dois espaços. Um transfer para f com traço k, $k \in \mathbb{Z}$, é um homomorfismo:

$$\tau : H_*(Y) \to H_*(X) \quad \text{tal que}$$

$f_* \circ \tau$ = multiplicação por k.

Para cohomologia requeremos:

$$\tau \circ f^* = k \; .$$

Tal transfer será chamado *transfer parcial*.

II.2. De agora em diante consideraremos $f : M \to N$ diferenciável onde M e N são variedades diferenciáveis fechadas de dimensão m e n respectivamente.

Vamos supor M e N orientadas exceto quando usamos homologia ou cohomologia com coeficientes $\mathbb{Z}_2$.

Denotaremos por $[M] \in H_m(M)$ a classe fundamental de M e $[\bar{M}]$ a classe fundamental dual em $H^m(M)$.

II.3. PROPOSIÇÃO. Suponhamos que exista $\alpha \in H_n(M)$ tal que $f_*(\alpha) = k[N]$. Então f_* possui um transfer de traço k (f^* possui um transfer de traço k).

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\beta \in H_*(N)$. Pela dualidade de Poincaré $\exists x \in H^*(N)$ tal que $\beta = x \cap [N]$.

Vamos definir

$$\tau : H_*(N) \to H_*(M) \quad \text{por}$$

$$\tau = (\cap\alpha) \circ f^* \circ (\cap[N])^{-1} .$$

Temos que mostrar que $f_* \circ \tau = \text{mult. por } k$:

$$\begin{aligned} f_* \circ \tau(\beta) &= f_*\tau(x \cap [N]) = \\ &= f_*(\cap\alpha \circ f^* \circ (\cap [N])^{-1})(x \cap [N]) = \\ &= f_*(\cap\alpha(f^*(x)) = \\ &= f_*(f^*(x) \cap \alpha) = \\ &= x \cap f_*(\alpha) = x \cap K[N] = \\ &= k(x \cap [N]) = \\ &= k\beta . \end{aligned}$$

Para cohomologia definimos:

$$\bar{\tau} : H^*(M) \to H^*(N) \quad \text{por}$$

$\bar{\tau} = (\cap [N])^{-1} \circ f_* \circ (\cap\alpha)$.

Seja $x \in H^*(N)$.

Então temos:

$$\bar{\tau} f^*(x) = (\cap [N])^{-1} \circ f_* \circ (\cap\alpha)(f^*(x)) =$$

$$= (\cap [N])^{-1} \circ f_*(f^*(x) \cap\alpha) =$$

$$= (\cap [N])^{-1}(x \cap (f_*(\alpha)) =$$

$$= (\cap [N])^{-1}(x \cap k[N]) =$$

$$= k(\cap [N])^{-1}(x \cap [N]) =$$

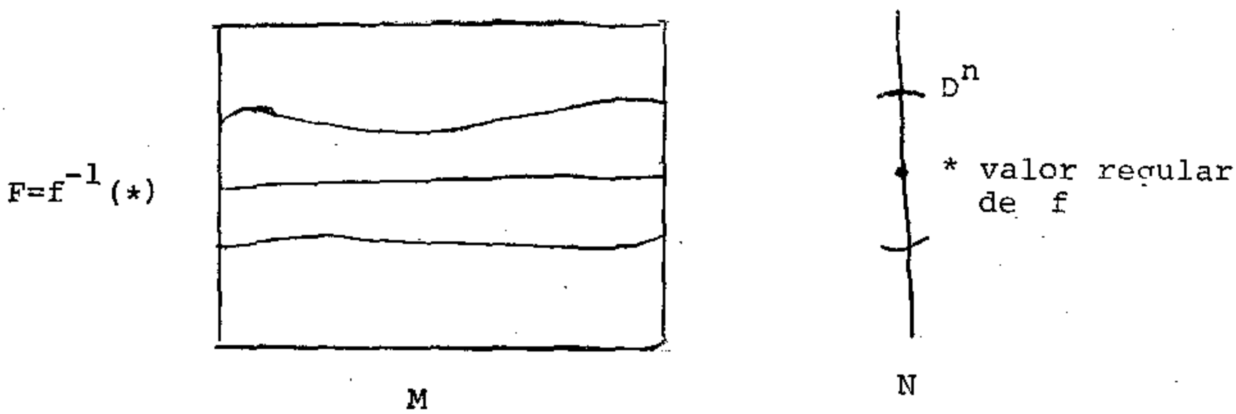
$$= k\, x .$$

II.4. Seja $y \in N$ um valor regular de f .

Pelo teorema de Sard, o conjunto dos valores regulares de $f : M \to N$ é denso em N. Seja $F = f^{-1}(y)$. Então F é uma variedade fechada. Seja $i : F \to M$ a inclusão.

II.5. PROPOSIÇÃO. $f^*([\bar{N}]) \cap [M] = i_*([F])$.

DEMONSTRAÇÃO.



$$\nu_M F = D^n \times F \quad , \quad \partial \nu_M F = S^{n-1} \times F \; .$$

Seja V a classe de orientação de D^n.

Seja $U = V \times [F]$ a classe de orientação de $\nu_M F$.

$U \in H_m(\nu_M F \; , \; \partial \nu_M F \; ; \mathbf{Z})$.

Observemos que:

$$(\nu_M F \; , \partial \nu_M F) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{tipo de} \\ \text{homotopia}}}{\cong} (D^n, \; D^n - *) \times F$$

Como V é a classe de orientação de D^n, V pertence a $H_n(D^n \; , D^n - *)$.

Observemos que

$f : \nu_M F \to D^n$ se comporta como projeção no primeiro fator.

Denotando por $\bar{V}$ a classe dual, temos

$$
\begin{aligned}
f^*(\bar{V}) \cap U &= (\bar{V} \times 1) \cap (V \times [F]) = \\
&= (\bar{V} \cap V) \times (1 \cap [F]) = \\
&= 1 \times (1 \cap [F]) = 1 \times F .
\end{aligned}
$$

Analisemos o diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\bar{V} & (D^n, D^n - *) \arrow[rr, "\text{excisão}", "i_1 \approx"'] & & (N, N - *) \\
U & (D^n, D^n - *) \times F \arrow[u] \arrow[d, "i \approx", "\text{excisão}"'] & & (N, \phi)\ [\bar{N}] \arrow[u, "k = \text{função natural}"'] \arrow[d, equal] \\
 & (M, M - F) & & N \\
 & (M, \phi) \arrow[u, "j = \text{função natural}"'] \arrow[d, equal] & & \\
 & M \arrow[uurr, "f"] & &
\end{tikzcd}
$$

Pela propriedade das classes de orientação

$$k^* \, i_1^{*-1}(\overline{V}) = [\overline{N}]$$

e

$$j_*^{-1} \, i_*(U) = [M]$$

$$\therefore \; i_*(U) = j_* \, [M] \, .$$

Como o diagrama comuta temos:

$$f^*[\overline{N}] = j^* \, i^{*-1} f^*(\overline{V}) \, .$$

Então:

$$\begin{aligned} i_*([F]) &= i_*(1 \times [F]) = i_*(f^*(\overline{V}) \cap U) = \\ &= i^{*-1} f^*(\overline{V}) \cap i_*(U) = \\ &= i^{*-1} f^*(\overline{V}) \cap j_*[M] = \\ &= j^* i^{*-1} f^*(\overline{V}) \cap [M] = \\ &= f^*[\overline{N}] \cap [M] \, . \end{aligned}$$

II.6. LEMA. Suponhamos que exista $x \in H^{m-n}(M)$ tal que $i^*(x) = k[\overline{F}]$. Então existem transfers em homologia e cohomologia com traço k.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que existe $\alpha \in H_n(M)$ tal que

$f_*(\alpha) = k[N]$. Daí pela proposição II.3 teremos o resultado desejado.

Seja $\alpha = (-1)^{n(m-n)}\ x \cap [N]$.

Então

$$k = k\langle[\overline{F}], [F]\rangle = \langle k[\overline{F}], [F]\rangle =$$

$$= \langle i^*(x), [F]\rangle = \langle x, i_*[F]\rangle =$$

$$\overset{\text{prop. } 2}{=} \langle x, f^*[\overline{N}] \cap [M]\rangle =$$

$$= \langle x \cup f^*[\overline{N}], [M]\rangle =$$

$$= (-1)^{n(m-n)} \langle f^*[\overline{N}] \cup x, [M]\rangle =$$

$$= (-1)^{n(m-n)} \langle f^*[\overline{N}], x \cap [M]\rangle =$$

$$= \langle f^*[\overline{N}], \alpha\rangle =$$

$$= \langle [N], f_*(\alpha)\rangle \quad .$$

Temos $x \in H^{m-n}(M)$

$$D : H^i(M) \to M_{m-i}(M)$$

$$D(x) \in H_n(M) \quad , \quad D(x) = x \cap [M]$$

$$f_*(\alpha) \in H_n(N) \implies f_*(\alpha) = \lambda[N]$$

$$\implies k = \lambda \implies f_*(\alpha) = k[N] \ .$$

II.7. LEMA. Se $k \in \mathbb{Z}_2$ é um número de Stiefel-Whitney de F, então existe algum $x \in H^{m-n}(M)$ tal que $i^*(x) = k[F]$.

DEMONSTRAÇÃO. $F = f^{-1}(*)$.

Seja $F \xrightarrow{i} M$ a inclusão.

Seja τF o fibrado tangente de F e $\nu_M(F)$ o fibrado normal de F em M.

Temos que:

$$\tau F \oplus \nu_M(F) = i^* \tau(M) \ .$$

Seja $w = 1 + w_1 + w_2 + \dots + w_k$ a classe total de Whitney.

Temos

$$w(\tau F \oplus \nu_M(F)) = i^* w(\tau(M))$$

$$w(F) \cdot w(\nu_M(F)) = i^* w(M)$$

Mas $w(\nu_M(F)) = 1$ pois:

$$\nu_N(*) = D^n \simeq * \times D^n$$

$$\nu_M(F) = f^*\nu_N(*)$$

O pull back de um um fibrado trivial é trivial

$$\therefore \ \nu_M(F) \text{ é trivial}$$

$$\therefore \ w(F) = i^*w(M)$$

Ou seja:

$$w_1(F) = i^*w_1(M)$$

$$w_2(F) = i^*w_2(M)$$

$$\vdots$$

Logo

$$k = \langle w_{i_1}(F) w_{i_2}(F) \ldots w_{i_r}(F), [F] \rangle =$$

$$= \langle i^*w_{i_1}(M) \; i^*w_{i_2}(M) \ldots i^*w_{i_r}(M), [F] \rangle =$$

$$= \langle i^*(w_{i_1}(M), w_{i_2}(M) \ldots w_{i_r}(M)), [F] \rangle =$$

$$= \langle i^*(x), [F] \rangle$$

$$\therefore \ i^*(x) = k\,[\overline{F}] \quad \text{onde}$$

$$x = w_{i_1}(M)\, w_{i_2}(M) \ldots W_{i_r}(M) .$$

II.8. TEOREMA. Seja $f : M \to N$. Existe um transfer para f com traço igual a qualquer número de Stiefel-Whitney de F.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema II.7 existe $x \in H^{m-n}(M)$ tal que $i^*(x) = k[\overline{F}]$, k = número de Stiefel-Whitney.

Mas pelo Lema II.6 isto implica que f possui transfers em homologia e cohomologia com traço k (coeficientes $\mathbb{Z}_2$).

II.9. TEOREMA. Se $F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ é um fibrado diferenciável tal que F não é um bordo, então

$$\pi^* : H^*(B,\mathbb{Z}_2) \to H^*(E,\mathbb{Z}_2)$$

é injetora.

DEMONSTRAÇÃO. Como F não é um bordo existe um número de Stiefel-Whitney $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \neq 0$.

Pelo Teorema 5, existe um transfer para π com traço k, isto é, existe $\overline{\tau} : H^*(E,\mathbb{Z}_2) \to H^*(B,\mathbb{Z}_2)$ tal que $\overline{\tau} \circ \pi^*$ = mult. por k.

Portanto $\overline{\tau} \circ \pi^*(x) = kx$.

Daí, π^* é injetivo.

Sabemos que existe uma ação livre e descontínua de $\mathbb{Z}_2$ em S^2 dado pela aplicação antípoda.

Porém o seguinte resultado é válido.

II.10. COROLÁRIO. Se G é um grupo finito de ordem ímpar então não existe uma ação livre e descontínua de G em S^2.

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $G \to S^2 \to S^2/_G$ é um fibrado diferenciável com fibra G e que $S^2/_G$ é uma variedade diferenciável de dim 2, diferente de S^2.

Logo $H^1(S^2/_G) \neq \{0\} = H^1(S^2)$.

Sabemos que G não pode ser um bordo pois $o(G)$ é ímpar (vide Capítulo 0).

Logo a aplicação

$$\pi^* : H^*(S^2/_G, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(S^2/\mathbb{Z}_2) \text{ é injetiva.}$$

Daí $\pi^1 : H^1(S^2/_G, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(S^2, \mathbb{Z}_2)$ é injetiva.

Isto é um absurdo pois $H^1(S^2, \mathbb{Z}_2) = 0$ e $H^1(S^2/_G, \mathbb{Z}_2) \neq 0$.

OBSERVAÇÃO. Usando o teorema 1.2.4 podemos concluir que se $o(G) > 2$, então G (finito), não atua livremente em S^2 pois $id : S^2 \longrightarrow S^2$ é equivariante e $\chi(S^2) = 2 = \Lambda(id)$.

II.11. LEMA. Sejam X, E, B variedades diferenciáveis, $p : E \longrightarrow B$ fibrado e $f : X \longrightarrow B$ diferenciável. Então a aplicação

$$f \times p : X \times E \to B \times B$$

$$(x,e) \to (f(x),p(e))$$

é transversal a $\Delta = \{(b,b) \mid b \in B\}$.

PROVA. Lembremos o seguinte resultado de álgebra linear:

"Se E é um espaço vetorial e A,B subespaços de E, então:

$$A + B = E \iff (A \times B) + D = E \times E \; .$$

onde D é a diagonal de $E \times E$ ".

Temos que provar que:

$$(f \times p)'(x,e) \;(\tau(X \times E)_{(x,e)}) + \tau\Delta_{(r,r)} =$$

$$= \tau(B \times B)_{(r,r)} \quad \text{onde} \quad r = f(x) = p(e) \; .$$

Sejam $\quad U = f'(x)\; \tau X_x$

$V = p'(e)\; \tau E_e$

$W = \tau B_r$.

Como p é submersão $p'(e)$ é sobrejetora $\Rightarrow p'(e)\, \tau E_e = \tau B_r$.

Além disso $f'(x)\,\tau X_x \subset \tau B_r$

$$\therefore \quad U + V = W \,.$$

Logo pelo resultado de álgebra linear temos que:

$$f'(x)\,\tau X_x \times p'(e)\,\tau E_e + D$$

$$= \tau B_r \times \tau B_r \,.$$

Mas D é diagonal de $\tau(B \times B)_{(r,r)}$.

Logo $D = \tau\Delta_{(r,r)}$

$$\therefore \quad (f \times p)'(x,e)\,(\tau(X \times E)_{(x,e)} + \tau\Delta_{(r,r)} = \tau(B \times B)_{(r,r)} \,.$$

II.12. LEMA. Sejam M^n, N^n variedades diferenciáveis fechadas e orientáveis e $f: M \to N$ diferenciável. Então o grau homológico de f coincide com o grau diferenciável de f.

DEMONSTRAÇÃO. Seja p um valor regular de f.

$f^{-1}(p)$ é um conjunto finito de pontos que vamos denotar por

$$\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$$

Temos:

$$f'(k_i) : \tau_{k_i} \to \tau_p \quad , \; i = 1,\ldots,r \; .$$

Se f conserva a orientação vamos ter $k_i = 1$.

Se f inverte a orientação temos $k_i = -1$.

Logo $\deg_D f = \sum_{i=1}^{r} k_i$.

Seja $D \subset N$ uma bola em torno de p. $f^{-1}(D) = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$ onde D_i é uma bola em torno de k_i.

Vamos considerar as seguintes funções:

(i) $\pi_1 : M \to \bigvee_{i=1}^{r} S_i^n$ onde $\bigvee_{i=1}^{r} S_i^n$ é a união de r esferas S^n com um ponto $\underline{\underline{x}}_o$ em comum, que leva cada bola D_i na esfera S_i^n e murcha o complementar de $\bigcup_{i=1}^{r} D_i$ em um único ponto x_o .

(ii) $\pi_2 : N \to S^n$ que leva D em S^n e o complementar de D em um único ponto em S^n .

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N \arrow[d, "\pi_2"] \\ \bigvee_{i=1}^{r} S_i^n \arrow[r, "\overline{f}"'] & S^n \end{tikzcd}$$

com $\overline{f}$ induzida por f.

Em homologia temos:

$$\begin{tikzcd} H_n(M) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi_{1*}"'] & H_n(N) \arrow[d, "\pi_{2*}"] \\ \bigoplus_{i=1}^{r} H_n(S_i^n) \arrow[r, "\overline{f}_*"'] & H_n(S^n) \end{tikzcd}$$

Sejam:

β gerador de $H_n(N)$

α gerador de $H_n(M)$

β' gerador de $H_n(S^n)$

α_i gerador de $H_n(S_i^n)$, $i = 1,\dots,r$

Então:

$$\pi_{2*}(\beta) = \beta'$$

$$\pi_{1*}(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$$

$$\bar{f}_*(\alpha_i) = \begin{cases} +\beta' & \text{se } k_i = 1 \\ -\beta' & \text{se } k_i = -1 \end{cases}$$

Como o diagrama é comutativo e π_{2*} é um isomorfismo temos:

$$f_* = \pi_{2*}^{-1} \circ \bar{f}_* \circ \pi_{1*} \quad .$$

Seja K_1 o número de k_i's positivos e

K_2 o número de k_i's negativos

$$f_*(\alpha) = \pi_{2*}^{-1} \, (\bar{f}_*(\alpha_1 + \ldots + \alpha_r)) =$$

$$= \pi_{2*}^{-1} \, ([K_1 - K_2] \, \beta') =$$

$$= (K_1 - K_2) \, \beta .$$

$\therefore$ Como $(K_1 - K_2) = \deg f$ temos que $\deg f =$ $= \deg_D f$.

II.13. TEOREMA. Seja $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ um fibrado diferenciável e $f : E \to E$ uma aplicação fibrada. Seja $g = f|_F : F \to F$ a restrição de f a uma fibra. Então existe transfer para f com traço Λg.

DEMONSTRAÇÃO. Temos $f : E \to E$ uma aplicação fibrada e $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ um fibrado diferenciável.

Seja $P = \{(e,e') \in E \times E \mid p(e) = p(e')\}$ o pull back de $p : E \to B$ e seja $\bar{p} : P \to E$ definida por $\bar{p}(e,e') = e$.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\bar{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

Consideremos as seguintes secções:

$$\Delta : E \to P \qquad \text{e} \qquad S : E \to P$$

$$e \to (e,e) \qquad\qquad e \to (e,f(e))\ .$$

Seja $g = f|_F : F \to F$.

Então pelo Teorema 2, Capítulo 0, existe $g' \sim g$ tal que $\mathrm{Fix}(g')$ é finito e se $x \in \mathrm{Fix}(g')$, $\mathrm{Ind}(x) = \pm 1$.

Pelo teorema da extensão da homotopia fibrada, se G é uma homotopia entre g e g', existe uma extensão de G, $\overline{G} : E \times I \to E$ que é uma homotopia fibrada iniciando com f, isto é, $\overline{G}(x,0) = f$.

Além disso $\overline{G}|_{p^{-1}(U)} = id \times g' : U \times F \to U \times F$ para alguma vizinhança U de B tal que $p(F) \in U$. $(p^{-1}(U) \simeq U \times F)$. (I)

Seja $f' = \overline{G}(x,1)$.

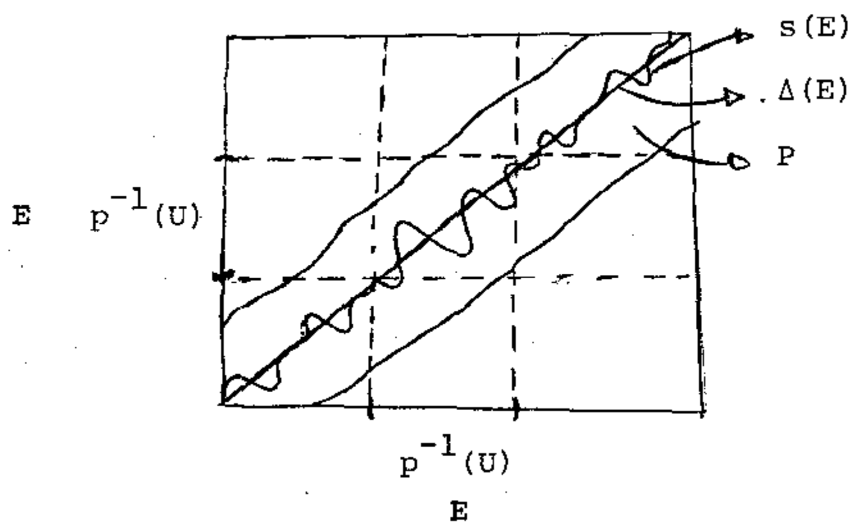
Temos $f' \sim f$ e $f'|_F = g'$.

A secção s é homotópica a secção $s' : E \to P$ definida por $s'(e) = (e,f'(e))$

$s'(e) = (e,f'(e)) = (id \times f')(e)$.

Logo, $s'(e) = (e,g'(e))$ para $e \in p^{-1}(U)$ por (I) e como g' tem um número finito de pontos fixos $s'(E)$ corta a diagonal $\Delta(E)$ em um número finito de pontos na vizinhança $p^{-1}(U) \subset E$.

Portanto $s'(E)$ é transversal a $\Delta(E)$ na vizinhança $p^{-1}(U) \subset E$.



O teorema da isotopia garante que podemos obter de s' por isotopia, s" tal que s"(E) seja transversal a $\Delta(E)$ em .

Seja $M = \Delta(E) \cap s''(E)$.

Então M é uma subvariedade de $\Delta(E) \simeq E$.

Lembremos que se $k^r \subset w^m$ e k' é obtido por isotopia de k temos

$$\text{codim}_k (k \cap k') = \text{codm}_w \, k'$$

Se $s = \dim k \cap k'$ temos $r - s = m - r$.

Suponhamos $\dim E = m$, $\dim B = n$ e $\dim F = r$.

Temos $m = n + r$.

Logo $\dim P = n + 2r$

$$M \subset s''(E) \subset P \quad \text{e} \quad \dim s''(E) = n + r$$

$$M \subset \Delta(E) \subset P \quad \text{e} \quad \dim \Delta(E) = n + r.$$

Seja $s = \dim M$

$$\therefore (n + r) - s = (n + 2r) - (n + r) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s = n$$

$$\therefore \dim M = \dim B .$$

Seja $i : M \hookrightarrow E$ a inclusão.

Temos que $i_*([M]) \in H_n(E)$.

Consideremos a composição:

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

$$q = p \circ i .$$

Seja $b \in B$ valor regular de q.

$\therefore q^{-1}(b)$ é o conjunto dos pontos fixos de g'.

Logo $\mathrm{Ind}(\mathrm{Fix}\ g') = \mathrm{Ind}(\mathrm{Fix}\ g) = \Lambda g =$ grau de q pelo lema 2.

Seja $\alpha = i_*([M])$

$$p_* \circ i_*([M]) = p_*(\alpha) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow q_*([M]) = p_*(\alpha) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \deg q\,[B] = p_*(\alpha) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Lambda g\,[B] = p_*(\alpha) .$$

Pela proposição II.3 existe um transfer para p com traço Λg.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BROWN, R.F.: The Lefschetz Fixed Point Theorem, Scott, Foresman and Co., Glenview-London (1971).

[2] CECCO, GIEUSEPPE di: Complementi di Geometria Superiore, Universitã Degli Studi di Lecce, Inst. di Mat.

[3] DOLD, A.: Lectures on Algebraic Topology, Springer, Heidelberg - New York (1972).

[4] GONÇALVES, DACIBERG e KIIHL, JOSÉ C.S.: Teoria do Índidice - IMPA - 1983.

[5] GREEMBERG, MARVIN J.: Lectures on Algebraic Topology, Benjamin, New York - 1967.

[6] MILNOR, JOHN W. E STASHEFF, JAMES D.: Characteristic Classes, Princeton, New Jersey, 1974.

[7] STONG, R.E.: Notes on Cobordesm Theory, Princeton Math. Notes, Princeton Univ. Press (1958).

[8] GOTTLIEB, DANIEL H.: The Lefschetz Number and Borsuk--Ulam Theorems, Pacific Journal of Mathematics, vol 102, Nº 1 (1982).

[9] GOTTLIEB, DANIEL H.: Partial Transfers Geometric applications of homotopy theory I (Proceedings of the Evanston Conference 1977), Lectures Notes in Math. Vol. 657, Springer-Verlag, pp. 255-266.

[10] WALKER, J.W.: A homology version of the Borsuk-Ulam theorem, Am. Math. Montly, 90 (1983), 466-468.

[11] BREDON, G.: Introduction to Compact Transformation Groups Academic Press, 1972.