Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Algumas Contribuições ao Estudo da Existência de Soluções de Equações de movimento de Fluidos em Domínios com Fronteiras Móveis

Tese de Doutorado em Matemática
por

Eduardo Alex Hernández Morales

Campinas, SP, Brasil
Novembro de 1998

Algumas Contribuições ao estudo da Existência de Soluções de Equações de movimento de Fluidos em Domínios com Fronteiras Móveis

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado, devidamente corrigida e defendida, pelo Sr. Eduardo Hernández e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de novembro de 1998.

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

José Luiz Boldrini (orientador)

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 23 novembro de 1998

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

José Luiz Boldrini

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof (a). Dr (a). SEBASTIÁN ANTONIO LORCA PIZARRO

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Gustavo Perla Menzala

Prof (a). Dr (a). GUSTAVO ALBERTO PERLA MENZALA

Jorge Ferreira

Prof (a). Dr (a). JORGE FERREIRA

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Luiz Boldrini, pela sua competente orientação é inesgotável disposição.

A Universidade Estadual de Campinas por ter me possibilitado fazer este curso de doutorado.

A Capes pela sua ajuda financeira.

Aos meus Colegas pelo relacionamento afetuoso.

Aos distintos professores que participaram da minha formação.

À minha família pela espera.

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais Luz e Mário, a minha irmã Iris a Vicky e a você também.

Sumário

Notações

$u=u(x,t)$ *Função vetorial,* $u=(u_i)_{i=1}^{n}$

$\frac{\partial u}{\partial t}=u'=u_t$ *Derivada parcial do vetor u com respeito a t*

$\nabla u=\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}$ *Matriz gradiente de u*

$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i}$ *j-ésima componente do Vetor Laplaciano de u*

$(u\cdot\nabla)u$ *Vetor cuja i-ésima componente é* $\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

τ *Função matricial de* $n\times n$.

$\nabla\cdot\tau$ *Função vetorial (divergente de* τ *) com i-ésima componente* $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tau_{i,j}}{\partial x_j}$

$(u\cdot\nabla)\tau$ *Matriz de* $n\times n$ *com componente (i,j)* $\sum_{k=1}^{n}u_k\frac{\partial\tau_{i,j}}{\partial x_k}$.

Espaços de funções com divergente nulo.

$$H(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):div(u)=0,\ \ u\cdot\eta=0\right\}$$

$$V(\Omega)\left\{u\in H_0^1(\Omega):div(u)=0\right\}$$

$$D(A)=H^2(\Omega)\cap V(\Omega)$$

Espaços de funções

$$C^k([0,T])=\left\{f;f:[0,T]\to IR,\ \ k\ \ veces\ \ continuamente\ \ diferenciavel\right\}$$

$\mathcal{D}[0,T] =$ *funções de* $C^{\infty}([0,T])$ *com suporte compacto em* $[0,T]$

$W^{k,p}(\Omega)$ *Espaço de Sobolev*

$H^{p}(\Omega) = W^{2,p}(\Omega)$

$L^{p}(\Omega)$ *Espaço de funções p-integráveis*

$L^{\infty}(\Omega)$ *Espaço de funções essencialmente limitadas*

$C^{k}([0,T];B) = \left\{ f : [0,T] \to X,\ \ k \ \ vezes \ \ continuamente \ \ diferenciavel \right\}$

$L^{p}([0,T];X) = \left\{ f : [0,T] \to X,\ \ p - integráveis \right\}$

Produtos Escalares y de dualidade

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ *Produto de dualidade entre um espaço de Banach e o seu dual*

$(\cdot,\cdot)$ *Produto escalar real*

Normas

$|\cdot|_{k,p}$ *Norma em* $W^{k,p}(\Omega)$

$|\cdot|_{t,k}$ *Norma em* $H^{k}(\Omega(t))$

INTRODUÇÃO

A motivação original deste trabalho é a de estudar a existência de soluções de um sistema de equações diferenciais parciais que modelam o comportamento de fluidos visco-elásticos do tipo Oldroyd em certas classes de domínios tridimensionais com fronteira móvel (tais domínios são freqüentemente chamados de domínios não cilíndricos). Entretanto, conforme detalharemos posteriormente, devido às não linearidades envolvidas no problema, fomos levados ao estudo prévio da existência de soluções regulares de modelos mais simples de escoamento de fluidos em domínios de fronteira móvel: o problema de Stokes e o problema de Navier Stokes. Assim, neste trabalho apresentaremos novos resultados de existência de soluções para estes três problemas. Tais resultados, como era de se esperar, se tornam menos completos à medida que a complexidade do problema considerado aumenta.

A seguir descrevemos as equações que compõem o sistema de Oldroyd em variáveis adimencionais:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u\right)-(1-\alpha)\Delta u+\nabla p=\nabla\cdot\tau+f, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot u=0, \tag{2}$$

$$We\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}+(\tau\cdot\nabla)u+g_a(\tau,\nabla u)\right)+\tau=2\alpha D[u]. \tag{3}$$

Nestas equações, as incógnitas são: $u(x,t)\in IR^3$, que é a velocidade do fluido no ponto x do domínio espacial no instante t; $p(x,t)\in R$, que é a pressão hidrostática, e $\tau(x,t)\in M(3)$ (aqui $M(3)$ é o espaço das matrizes reais de ordem 3), a qual é uma variável interna que descreve o estado microscópico do fluido. Nestas equações, temos ainda o número de Reynolds $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho UL}{\eta}$, o número de Weissenberg $We=\dfrac{\lambda U}{L}$ e o chamado parâmetro de retardação $\alpha = 1 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ (aqui λ_1 e λ_2 são constantes dependendo do tipo de fluido). As constantes U, L são respectivamente valores típicos da velocidade do fluxo e longitude do domínio em uma determinada situação física. Na terceira equação acima, temos ainda que a é uma constante tal que $-1 \le a \le 1$, e $g_a(\tau, \nabla u) = \tau W[u] - W[u]\tau - a(D[u]\tau + \tau D[u])$, onde $D[u] = \dfrac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ e $W[u] = \dfrac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T)$. As constantes Re, We, α e a, bem como a força externa f, são dados do problema.

Uma breve explicação sobre a origem de tais equações será fornecida na primeira seção do Capítulo 1 desta tese; uma descrição mais detalhada pode ser encontrada, por exemplo, em Guillopé & Saut [20]. Para uma estudo sobre fluidos não Newtonianos em geral, consulte-se por exemplo o livro de Böhme [5], enquanto que, para fluidos visco-elásticos, em geral uma boa referência é Renardy, Nohel, Hrusa [39].

Neste trabalho consideraremos as equações anteriores em um domínio de fronteira móvel (domínio não cilíndrico) denotado por

$$\Omega_T = \bigcup_{t \in [0,T]} \Omega(t) \times \{t\} \subset IR^n \times IR$$

onde $0 < T < +\infty$ e $\Omega(t)$ é um aberto regular de IR^n para cada $t \in [0,T]$. Um tipo particular de domínios não cilíndricos, são aqueles difeomorfos a um domínio cilíndrico $\Omega \times [0,T]$ por uma certa função φ. Uma introdução mais formal respeito deste tipo de domínios será feita na Seção 1 do Capítulo 2.

Uma vez dadas u_1, u_0 e τ_0 (funções adequadas), às equações acima acrescentaremos as seguintes condições de contorno e inicial:

$$u = u_1 \quad \text{em} \bigcup_{t \in [0,T]} \partial\Omega(t) \times \{t\}, \tag{4}$$

$$u(0) = u_0\,, \qquad \tau(0) = \tau_0 \quad \text{em } \Omega(0). \tag{5}$$

Estaremos interessados em obter resultados de existência de soluções para o problema composto pelas equações anteriores, juntamente com as condições iniciais e de contorno.

Neste trabalho nos restringiremos a tratar o caso especial em que $u_1 \equiv 0$ porque não há diferença essencial na argumentação técnica caso em que isto não ocorra (pelo menos com hipóteses adequadas sobre u_1), havendo apenas uma complicação nas notações.

Teremos duas dificuldades fundamentais no análise do problema anterior. A primeira delas é a dificuldade intrínseca do problema devido à existência de não linearidades de acoplamento entre as equações (elas jogam o seu papel mesmo em domínios de fronteira fixa). Isto precisará de estimativas em normas de Sobolev mais altas do que aquelas usualmente usadas para a solução do problema de evolução de Navier Stokes. Mais precisamente, será necessário ter uma estimativa em $L^2\left(0,T : H_0^1(\Omega(t))\right)$ para u_t. A obtenção de uma estimativa deste tipo precisará, em algum sentido, da derivação da equação (1) com respeito do tempo. Porém, como a fronteira muda com o tempo, a condição $u_t\big|_{\partial\Omega} = 0$, verdadeira e de fácil obtenção no caso de fronteira fixa, não é fácil de deduzir nos casos de fronteira móvel, mais ainda, podemos nos perguntar se esta condição tem sentido. Assim, a segunda dificuldade técnica vem do fato de que no nosso caso a fronteira está se movendo, o que introduz também a necessidade de controlar com cuidado termos que envolvem integrais sobre a fronteira e que eventualmente aparecem na obtenção de estimativas *a priori*.

Antes de relatar os resultados obtidos neste trabalho, é necessário comentar sobre os resultados já conhecidos envolvendo situações mais simples. Isto é, nas situações em que apenas uma das duas dificuldades técnicas mencionadas acima está presente.

Por exemplo, quando consideradas em domínios com fronteira fixa (domínios cilíndricos), as equações de Oldroyd têm sido relativamente bem estudadas. Em Guillopé & Saut [20], por exemplo, são provadas a existência e a unicidade de soluções fortes locais no tempo (em espaços Hilbertianos, isto é espaços baseados em $L^2(\Omega)$). Também é provada a existência global quando o parâmetro α, os dados iniciais e o campo de forças externas são suficientemente pequenos, bem como um resultado de existência de soluções periódicas no tempo quando o campo de forças externas é periódico. As provas destes resultados de existência local é feita pela utilização do Teorema de Ponto Fixo de Schauder, precedida do estudo de problemas linearizados adequados associados ao sistema acima. O resultado sobre existência de soluções globais é obtido a partir de estimativas uniformes no tempo, enquanto que o resultado sobre soluções periódicas utiliza tais estimativas, juntamente com uma técnica utilizada por Serrin [44] e Valli [51].

Na tese de doutorado de Ortega [34] (" *Contribuição ao Estudo Teórico de Algumas E.D.P. No Lineares Relacionadas com Fluidos no Newtonianos* "), são apresentados resultados de existência de soluções fortes para as equações acima no caso não Hilbertiano, isto é, em espaços baseados em L^p, $p \neq 2$, (veja também Fernández-Cara, Guillén, Ortega [11]). Tais resultados são de existência local ou então de existência global para dados pequenos, porém com a existência global entendida em intervalos necessariamente finitos, uma vez que os resultados requerem que o parâmetro α seja pequeno de forma dependente do tamanho do intervalo de tempo considerado. Reiteramos, porém, que todos estes resultados são obtidos para domínios de fronteira fixa (cilíndricos).

Para entender as dificuldades que surgirão na análise das equações em domínios com fronteira móvel, é necessário ressaltar que, devido aos tipos de não linearidades embutidas nas equações, mesmo considerando o caso de domínios com fronteira fixa, em todos os trabalhos anteriores foi estritamente necessário obter estimativas *a priori* das soluções em normas relativamente altas (em termos de espaços de Sobolev).

Passemos agora a comentar sobre resultados associados a problemas em dominios de fronteira móvel, mas no caso em que as equações consideradas são mais simples que as anteriores. Mais especificamente, comentaremos sobre resultados associados às equações de Navier-Stokes consideradas em domínios de fronteira móvel. Neste caso, a primeira das dificuldades técnicas mencionadas acima não está presente e é importante ressaltar onde se encontram as dificuldades técnicas inerentes a este tipo de problema. Observamos que em geral a análise da existência de soluções requer um bom conhecimento prévio do correspondente problema linearizado (neste caso, o chamado problema de Stokes). Em domínios de fronteira fixa, esta é realmente a situação; entretanto, em domínios de fronteira móvel, o problema de Stokes é mais difícil e com resultados bem menos desenvolvidos (pelo menos para domínios variando de forma relativamente geral), o que traz dificuldades técnicas bastante sérias para a análise.

Entre os artigos que analisam este problema, no de Lions [29] (veja também o livro [30]) encontra-se um resultado sobre a existência de soluções fracas para domínios não cilíndricos não decrescentes. Posteriormente, Fujita & Sauer [15] (veja também Fujita, Sauer [14]) provam um resultado de existência de soluções fracas sem impor uma condição de crescimento dos domínios como aquela em Lions [30]. A prova destes resultados são feitas por meio do uso de um sistema de equações semelhante às equações de Navier-Stokes em um domínio cilíndrico, mas penalizadas na região entre o cilindro e ó domínio móvel. A teoria de subdiferenciais foi utilizada por Ôtani & Yamada [35] para analisar questões de existência e unicidade de soluções (inclusive soluções fortes) para as equações de Navier-Stokes em domínios não cilíndricos. Em Miyakawa & Teramoto [32] há também um resultado de existência de soluções fracas, o qual foi obtido transformando o problema original em um novo problema, mas agora em um domínio cilíndrico, através do uso de um difeomorfismo adequado. Nos casos em que o domínio espacial se move de forma especial, de forma radial ou suas variantes, por exemplo, este tipo de técnica (isto é, a de transformar um domínio não cilíndrico em um domínio cilíndrico através de uma mudança de coordenadas adequadas) tem sido utilizada por muitos autores, tanto para analisar as equações de Navier-Stokes, quanto para variantes delas. Exemplos de artigos nesta direção são: Conca, Rojas-Medar [9], Rojas-Medar, Beltrán-Barrios [41], Límaco-Ferrel [28], Milla Miranda, Límaco-Ferrel [31] e Bock [3]. Por sua vez, Salvi [42] tem usado o método da regularização elíptica para analisar problemas em domínios de fronteira móvel. Em outro artigo, Salvi [43] prova um resultado de regularidade para soluções do problema em domínios não cilíndricos usando uma técnica variacional.

A seguir passaremos a descrever brevemente a organização e os novos resultados obtidos neste trabalho.

O Capítulo 1 tem por objetivo geral fixar as notações e as hipóteses usadas no trabalho, bem como recordar resultados que serão posteriormente utilizados.

O Capítulo 2 está dividido essencialmente em três partes . Na primeira , fazendo uso do teorema da função implícita , caracterizaremos um tipo especial de difeomorfismos φ, que parametrizaram os domínios onde em geral serão obtidos os resultados de existência de soluções tanto, para a equação de Navier-Stokes, como para o sistema diferencial de Oldroyd. Na segunda seção apresentamos un resultado de existência de soluções regulares, Teorema 2.11, para o problema de Stokes em domínios não cilíndricos que serão parametrizados por funções apropriadamente escolhidas na primeira seção. Também no Teorema 2.11, obteremos estimativas *a priori* apropriadas para as soluções do problema de Stokes, que serão fundamentais na terceira seção onde no Teorema 2.18 estabeleceremos a existência de soluções regulares para problema de Navier-Stokes. Finalmente na seção 4 faremos alguns comentários respeito das grandes dificuldades que existem em tentar usar outras técnicas para estabelecer um resultado de regularidade apropriado para as soluções do problema de Stokes em domínios não cilíndricos.

No Capítulo 3, após de provar um resultado de existência de soluções para uma versão linearizada, da equação de Transporte (3), veja Proposição (3.2), apresentamos um resultado, o principal deste capítulo, de existência local de soluções fortes para o modelo diferencial de Oldroyd num tipo especial de domínios não cilíndricos, caracterizados na seção 1 do capítulo 2, veja página 56. O resultado citado, Teorema 3.5, será obtido usando o clássico Teorema de Ponto Fixo de Schauder. A unicidade de soluções para o sistema de Oldroyd será o conteúdo do Teorema 3.6.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES E RESULTADOS

O objetivo deste capítulo será o de situar matematicamente o problema a ser analisado neste trabalho, bem como o de introduzir as notações e hipóteses que serão empregadas ao longo dele. Recordaremos também alguns resultados já conhecidos na literatura e que nos auxiliarão na análise do problema em capítulos subsequentes. Faremos também um pequeno resumo, mais técnico do que aquele feito na introdução, dos resultados obtidos.

1.1. A Derivação das Equações de Escoamento de Fluidos Viscosos e Incompressíveis do tipo Oldroyd e a Colocação do Problema.

Para auxiliar o leitor a entender a origem das equações que governam o comportamento de fluidos viscosos e incompressíveis do tipo Oldroyd, faremos nesta seção uma breve recordação de alguns resultados da Mecânica dos Meios Contínuos.

As equações em derivadas parciais que descrevem o comportamento de um fluido contido no interior de um recipiente correspondendo a um aberto Ω de IR^n são obtidas utilizando as chamadas leis de balanço de massa e de momento linear. Tais equações são as seguintes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0\,, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \nabla \cdot \Sigma + \rho f\,. \tag{1.2}$$

Aqui ρ é a densidade do fluido, u é a velocidade, Σ é o tensor de esforços oblíquos e f o campo de forças externas. Quando o escoamento é tal que podemos assumir que o volume ocupado por um elemento de fluido permanece constante ao longo do tempo, o fluido é chamado incompressivel, e então devemos considerar uma nova condição (condição de incompressibilidade) dada por:

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1.3}$$

Por outro lado, para completar o sistema de equações (1.1)–(1.3), existem equações suplementares que relacionam Σ com o resto das variáveis do sistema, as quais são chamadas de leis constitutivas. Tais relações são características do material do qual é constituido o fluido e do tipo de escoamento considerado. Quando o fluido considerado é viscoso é incompressível, uma lei constitutiva freqüentemente usada é a seguinte (lei de viscosidade de Newton):

$$\Sigma = -p\mathrm{Id} + \sigma, \text{ com } \quad \sigma = 2\mu D[u]. \tag{1.4}$$

Nesta expressão, p é a pressão hidrostática no fluido (que é uma função escalar a ser determinada); Id é o tensor identidade; $\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade e

$$D[u] = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \tag{1.5}$$

é o chamado tensor de deformações. Como σ é uma função explicita de u, podemos substituir em (1.2) e obter a equação

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f \tag{1.6}$$

O sistema composto pelas equações (1.1)–(1.6) acima é completado com condições iniciais e de contorno adequadas e é então chamado de sistema de Navier-Stokes para fluidos com densidade variável (fluidos não homogêneos). No caso especial em que o fluido é considerado homogêneo, então ρ é uma constante e a equação (1.1) é automaticamente satisfeita, restando as equações dadas em (1.2)–(1.6) para serem resolvidas. Estas são as chamadas equações de Navier-Stokes clássicas. Em relação a este tipo de equações existe uma extensa bibliografia (veja, por exemplo, Temam [49], Heywood [23]).

É conhecido que em várias situações físicas importantes os fluidos envolvidos satisfazem a relação constitutiva (1.4) (e então são chamados fluidos Newtonianos) e podem ser modelados pelas equações de Navier-Stokes clássicas. Entretanto, existem muitos fluidos, naturais ou artificiais, que não satisfazem a lei constitutiva (1.4), e assim são chamados não-Newtonianos. Estes, devido à imensa variedade de comportamentos diferentes, não admitem uma lei constitutiva universal e, dependendo da sua lei constitutiva, são classificados em classes, que recebem diferentes denominações, tais como a classe dos fluidos quase-Newtonianos, daqueles do tipo Oldroyd ou Bingham, etc (veja, por exemplo, Böhme [5] para um estudo sobre fluidos não Newtonianos).

Uma experiência muito interessante ilustra a diferença de comportamento entre fluidos Newtonianos e não-Newtonianos submetidos às mesmas condições: consideremos um fluido colocado num recipiente cilíndrico vertical (sem ocupar toda a capacidade do recipiente), aberto na parte superior, que é submetida à pressão atmosférica. Se uma barra cilíndrica rígida é colocada no centro de simetria do vaso é posta a girar, a superfície do fluido não permanece plana. De fato, para fluidos Newtonianos, a parte da superfície livre próxima à barra desce relativamente à suas borda. Entretanto, para alguns fluidos não Newtonianos, como por exemplo para fluidos de tipo Oldroyd, o comportamento da superfície livre é exatamente o oposto, isto é, a superfície do fluido sobe no centro e desce quando próxima das paredes do recipiente. O resultado deste experimento é chamado Efeito Weissenberg e informações mais detalhada sobre ele podem ser obtidas em [5].

Algumas das características do tipo especial de fluido não-Newtoniano (fluidos do tipo Oldroyd) que consideraremos neste trabalho serão descritas a seguir.

Estamos interessados em fluidos que têm um comportamento intermediário entre aquele observado em materiais elásticos e a que têm os fluidos Newtonianos viscosos, isto é, na classe de fluidos chamados visco-elásticos. Eles têm a interessante propriedade de apresentar "memória", isto é, o estado das partículas do fluido em cada instante de tempo t depende de toda a historia anterior da dinâmica do fluido, e não apenas da situação do fluido naquele instante (veja, por exemplo, Renardy, Nohel, Hrusa [39] para um estudo geral de fluidos viscoelásticos).

Um modelo particular para este tipo de comportamento em um fluido é dado pelo modelo diferencial de Oldroyd (veja [34], [38], [39]), cuja lei constitutiva ainda é dada por:

$$\Sigma = -pI_d + \sigma \ , \tag{1.7}$$

mas agora com σ satisfazendo a equação.

$$\sigma + \lambda_1 \frac{D_a\sigma}{Dt} = 2\eta\left(D[u] + \lambda_2 \frac{D_a D[u]}{Dt} \right) \tag{1.8}$$

Aqui, o parâmetro λ_1 corresponde ao chamado tempo de relaxação, λ_2 é o chamado tempo de retardação satisfazendo $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ e $\eta > 0$ é a viscosidade do fluido. Observemos que, se tivéssemos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, o fluido seria puramente viscoso, enquanto que, se $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, o fluido seria puramente elástico. Neste trabalho consideraremos sempre que $\lambda_2 > 0$.

Em (1.8) também aparece a chamada *derivada objetiva com respeito ao tempo*, que, no caso de fluidos incompressíveis, pode ser escrita como:

$$\frac{D_a\sigma}{Dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + u \cdot \nabla\tau + g_a(\sigma, \nabla u), \tag{1.9}$$

onde a é um parâmetro tal que $-1 \leq a \leq 1$, e

$$g_a(\sigma, \nabla u) = \sigma W[u] - W[u]\sigma - a(D[u]\sigma + \sigma D[u]), \tag{1.10}$$

com $D[u]$ como em (1.5) e

$$W[u] = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T). \tag{1.11}$$

Uma vez substituída a lei constitutiva (1.7) em (1.2), as equações que governam o movimento, no caso de fluidos incompressíveis e homogêneos (densidade constante), se rescrevem como

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) + \nabla p = \nabla \cdot \sigma + \rho f, \tag{1.12}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{1.13}$$

com σ satisfazendo (1.8).

Por outro lado, observando que a expressão σ dada em (1.7) pode ser rescrita como

$$\sigma = \tau_{New} + \tau,$$

onde tomamos

$$\tau_{New} = 2\eta \frac{\lambda_1}{\lambda_2} D[u]$$

e substituindo em (1.8) vemos que τ satisfaz a equação

$$\tau + \lambda_1 \frac{D_a \tau}{Dt} = 2\eta\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)D[u]$$

Nas expressões anteriores τ_{New} é chamada a parte Newtoniana e τ é chamada a parte puramente elástica do tensor σ. Por exemplo, no caso em que o fluido é constituído de uma mistura de solventes e polímeros, τ_{New} corresponderia à contribuição newtoniana do solvente ao tensor, em quanto que τ representaria a contribuição elástica do polímero.

Podemos agora mediante un procedimento usual, adimencionalizar as variáveis e obter finalmente uma forma padrão das equações que descrevem o comportamento dos fluidos viscosos e incompressíveis do tipo Oldroyd:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) - (1-\alpha)\Delta u + \nabla p = \nabla \cdot \tau + f \tag{1.14}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1.15}$$

$$We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\tau + g_a(\tau, \nabla u)\right) + \tau = 2\alpha D[u] \tag{1.16}$$

Aqui, $\mathrm{Re} = \frac{\rho UL}{\eta}$ é o chamado *número de Reynolds*; $We = \frac{\lambda U}{L}$ é o chamado *número de Weissenberg* e $\alpha = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ é o chamado *parâmetro de retardamento*. As constantes U, L são respectivamente os valores típicos de uma determinada situação física para a velocidade do fluxo e a longitude do domínio. Uma explicação mais detalhada sobre o exposto acima pode ser encontrada, por exemplo, em Guillopé & Saut [18].

Como foi dito na introdução deste trabalho consideraremos as equações descritas acima em um dominio de fronteira móvel (domínio não cilíndrico): dado T>0 seja

$$\Omega_T = \bigcup_{t\in[0,T]} \Omega(t) \times \{t\},$$

onde, para cada $t \in [0,T]$, $\Omega(t)$ é um aberto regular e limitado de IR^n. Recordamos também, que usamos a notação Γ_T para a fronteira lateral de Ω_T, isto é, para o conjunto

$$\Gamma_T = \bigcup_{t\in[0,T]} \partial\Omega(t) \times \{t\},$$

Acrescentamos então às equações anteriores condições de contorno e inicial adequadas para obter o seguinte problema, cujo estudo matemático será o principal objetivo deste trabalho: achar solução de

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u\right) - (1-\alpha)\Delta u + \nabla p = \nabla\cdot\tau + f \qquad \text{em } \Omega_T, \tag{1.17}$$

$$\nabla\cdot u = 0 \qquad \text{em } \Omega_T, \tag{1.18}$$

$$We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\tau + g_a(\tau,\nabla u)\right) + \tau = 2\alpha D[u] \qquad \text{em } \Omega_T, \tag{1.19}$$

$$u = 0 \qquad \text{em } \Gamma_T, \tag{1.20}$$

$$u(0) = u_0, \quad \tau(0) = \tau_0 \qquad \text{em } \Omega(0) \tag{1.21}$$

Ressaltamos que neste problema são considerados dados u_0, τ_0 e f, bem como as constantes Re, We, α e a, enquanto que as incógnitas são u, p e τ. Nosso trabalho será o de achar condições adequadas que garantam a existência de soluções para o sistema (1.17)-(1.21).

Para isto, teremos que situar melhor o problema do ponto de vista matemático, o que requer que recordemos certas definições e notações. Isto será feito na próxima seção.

1.2. Resultados Auxiliares e Hipóteses Técnicas

Quando se considera um problema de evolução em domínio de fronteira móvel (como é o caso deste trabalho), conforme o tempo muda, as variáveis envolvidas são definidas em domínios diferentes. Por isso, nas notações, é conveniente ter o cuidado de distinguir os espaços funcionais e operadores envolvidos a cada instante, através de referência explicita ao tempo ou ao domínio envolvido naquele instante. Para fixar a notação, isto será feito a seguir. Entretanto, para não dificultar a visualização, em vários argumentos nos próximos capítulos e sempre que não houver perigo de confusão, não explicitaremos tal dependência, assumindo que o leitor estará de sobreaviso.

Seja Ω um aberto regular de IR^n (fixo no que resta deste trabalho). Como é usual para $1 \le p < \infty$ denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço de funções p-integráveis em Ω. Usaremos a notação $L^\infty(\Omega)$ para o espaço das funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω. Os espaços anteriores são munidos das normas usuais.

Necessitamos também dos espaços usuais de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, onde k,p são números inteiros positivos. No caso especial $p=2$ empregamos a notação $H^1(\Omega)$. Usaremos a notação $H_0^1(\Omega)$ para o espaço $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ munido da norma induzida por $H^1(\Omega)$. Lembramos que para $i \ge 1$, assumindo uma regularidade apropriada para $\partial\Omega$, existe um operador linear continuo $\gamma_0 : H^i(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, o operador traço, tal que $\gamma_0(f) = f|_{\partial\Omega}$ para toda $f \in C^2(\overline{\Omega})$; mais ainda e possivel provar que $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$. Uma referencia clássica para espaços de Sobolev é Adams [1].

A teoria conhecida para as equações de Navier Stokes é bastante ampla e variada. Para descrever alguns destes resultados, que serão usados repetidas vezes neste trabalho, necessitamos introduzir antes as equações de Stokes, que correspondem a uma certa linearização das equações de Navier Stokes:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p = f \quad em \quad \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 \quad em \quad \Omega \\ u = 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.22}$$

Uma forma matematicamente adequada de estudar tais equações é a de trabalhar em espaços funcionais nos quais a condição de incompressibilidade na equação (1.22), isto é $\nabla \cdot u = 0$, esteja embutida. A condição de contorno requerida também será incluída nestes espaços e para isso, necessitaremos que quando $u \in L^2(\Omega)$ seja tal que $\nabla \cdot u \in L^2(\Omega)$, então, a expressão $u \cdot \eta|_{\partial\Omega}$, onde η é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$, deve estar definida satisfatoriamente. De fato, é provado em Temam [50] veja pag 9, a existência de um operador lineal continuo

$$\begin{aligned} \gamma_\eta : E(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Omega) \\ u \to "u \cdot \eta|_{\partial\Omega}" \end{aligned}$$

onde $E(\Omega) = \left\{ \ f \in L^2(\Omega) : \nabla \cdot f \in L^2(\Omega) \ \right\}$ e $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$ é o espaço dual de $\gamma_o(H^1(\Omega))$, tal que $\gamma_\eta(u) = u \cdot \eta|_{\partial\Omega}$ para todo $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Então com as notações anteriores, introduzimos os seguintes espaços:

$$H(\Omega) = \{ \ v \in L^2(\Omega) \ ; \nabla \cdot v = 0, \ \gamma_\eta(v) = 0 \ \},$$

$$V(\Omega)=\{\ v\in H_0^1(\Omega)\ ;\nabla\cdot v=0\ \}$$

munidos das normas induzidas por $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente. Pode ser provado que $H(\Omega)$ e $V(\Omega)$ são exatamente os completamentos do espaço vetorial

$$\mathbf{V}=\left\{\ f\in C_0^\infty(\Omega): \nabla\cdot f=0\ \right\}$$

nos espaços $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, respectivamente. Usaremos a notação $P(\Omega)$ para o projector ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $H(\Omega)$. O operador $P(\Omega)$ e conhecido como o operador ortogonal de Helmholtz.

Definição 1.1. O operador de Stokes $A(\Omega)$ em $H(\Omega)$ é definido pela expressão

$$A(\Omega): H^2(\Omega)\cap V(\Omega)\to H(\Omega)$$
$$f\to A(\Omega)(f)=-P(\Omega)\Delta f$$

A seguinte proposição, que fornece um resultado altamente não trivial devido a DeRham, tem um significado fundamental na teoria das equações de Navier Stokes.

Proposição 1.1. Seja Ω um aberto de IR^n e $f=\{f_1,f_2,,,f_n\}\in\mathcal{D}'(\Omega)$. Então

$$f=grad(p),\quad p\in D'(\Omega)$$

se, e somente, se $\langle f,v\rangle=0\quad\forall v\in\mathbf{V}$.

Como dissemos acima, a Proposição 1.1 é de primeira importância na interpretação da equação de Navier Stokes. De fato, aplicando o operador de Stokes na equação (1.22), esta pode ser rescrita na forma

$$\begin{aligned} &Au = f, \\ &u \in D(A), \end{aligned} \tag{1.23}$$

pois ∇p é ortogonal a o espaço $H(\Omega)$. Assim a equação (1.23) tem uma formulação variacional óbvia, que motiva a seguinte definição

Definição 1.2. Uma função $u \in V(\Omega)$ será uma solução fraca da equação (1.23) se

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in V(\Omega). \tag{1.24}$$

Observe que se u é uma solução fraca da equação (1.23), então no sentido das distribuições, temos

$$\langle -\Delta u - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V(\Omega)$$

e, pela Proposição 1.1, existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u + \nabla p = f$$

o que estabelece uma equivalência entre as formulações (1.22) e (1.23).

De maneira similar ao que acontece com o problema de Poisson, com condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann, as soluções do problema de Stokes não homogêneo, são mais regulares que a força externa. Nos próximos resultados notamos por

$W^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\partial\Omega)$ a o espaço $W^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\partial\Omega)=\gamma_0\left(W^{m+2,\alpha}(\Omega)\right)$ munido da norma $|\psi|_{W^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\partial\Omega)}=\inf_{\gamma_0(v)=\psi}|v|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)}$.

Teorema 1.2. Seja Ω um aberto limitado de IR^n de classe C^r com $r=máx\left\{\ m+2,2\ \right\}$, $m>0$ inteiro. Suponha que $u\in W^{2,\alpha}(\Omega)$, $p\in W^{1,\alpha}(\Omega)$, $1<\alpha<\infty$ são soluções do problema generalizado de Stokes

$$\begin{aligned} -\Delta u+\nabla p&=f \quad em\ \ \Omega\\ \nabla\cdot u&=g \quad em\ \ \Omega\\ u&=\phi \quad em\ \ \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.25}$$

Se $f\in W^{m,\alpha}(\Omega)$, $g\in W^{m+1,\alpha}$ e $\phi\in W^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\partial\Omega)$ então

$$u\in W^{m+2,\alpha}(\Omega) \qquad p\in W^{m+1,\alpha}(\Omega) \tag{1.26}$$

e existe uma constante $c_0(\theta,\alpha,m,\Omega)>0$ tal que

$$|u|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)}+|p|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)}\le c_0\left\{\ |f|_{W^{m,\alpha}(\Omega)}+|g|_{W^{m+1,\alpha}}+|\phi|_{W^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\partial\Omega)}+d_\alpha|u|_{L^\alpha(\Omega)}\ \right\} \tag{1.27}$$

onde $d_\alpha=0$ para $\alpha\ge 2$, $d_\alpha=1$ para $1<\alpha<2$.

No caso especial n=2 o n=3 temos o seguinte resultado;

Proposição 1.3. Seja Ω um aberto de R^n, n=2 o n=3, de classe C^r com $r = máx\left\{ m+2,2 \right\}$, $m \geq -1$ inteiro e sejam $f \in W^{m,\alpha}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$ e $\phi \in W^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\partial\Omega)$ verificando a condição de compatibilidade

$$\int_{\Omega} g dx = \int_{\partial\Omega} \phi \cdot \eta d\Gamma$$

Então existem únicas funções u, p (p é única salvo constante) soluções do Problema (1.25). Mais ainda u, p cumprem (1.26)-(1.27) com $d_\alpha = 0$ para $1 < \alpha < \infty$.

O Teorema 1.2 segue de Agmon, Douglas e Nirenberg [2], enquanto que a Proposição 1.3, pelo menos para o caso n=3, foi provada totalmente por Catabriga em [5]

Definição 1.3. Diremos que uma solução fraca $u \in V[\Omega]$, da equação (1.23) é uma solução forte, se $u \in H^2(\Omega) \cap V(\Omega)$.

Observe que se u é uma solução forte da equação (1.23), então a equação (1.22) se verifica q.t.p em Ω.

Vários resultados de existência de soluções para o problema de Navier Stokes podem ser obtidos com a combinação dos resultados anteriores sobre as equações de Stokes e o clássico teorema de ponto fixo de Schauder, que por facilidade de referenciar incluímos a seguir;

Teorema 1.4. (Ponto Fixo de Schauder): Seja X um espaço de Banach, $C \subset X$ limitado, convexo e fechado, $F : C \to C$ uma função compacta. Então F tem um ponto fixo em C.

Como foi comentado na introdução deste trabalho, os resultados de existência, tanto para equação de Navier Stokes, como para o modelo diferencial de Oldroyd serão obtidos numa certa classe de domínios não cilíndricos, que denotamos $\Omega_T(\varphi)$. Aqui φ será un difeomorfismo apropriadamente escolhido na primeira parte do Capítulo 2, usando essencialmente o Teorema da Função Implícita em espaços de Banach, que enunciamos a seguir.

Teorema 1.5. (Função Implícita): Sejam X , Y e Z espaços de Banach, U , V abertos em X , Y respectivamente. Suponha que $F: U \times V \to Z$ é continuamente diferenciavel (de classe C^k , $k \geq 1$), que $(x_0, y_0) \in U \times V$, que $F((x_0, y_0)) = 0$, e que a derivada parcial $F_x(x_0, y_0) \in L(X,Y)$ tem inversa continua.

Então existe uma vizinhança $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ de (x_0, y_0) e uma função $\xi : V_1 \to U_1$ continuamente diferenciavel (de classe C^k , $k \geq 1$), com $\xi(y_0) = x_0$, tal que para $(x,y) \in U_1 \times V_1$, $F(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = \xi(y)$. Portanto, para todo $y \in V_1$, temos que $F(\xi(y), y) = 0$.

1.3. Resultados conhecidos sobre Problemas Associados

Para facilitar ao leitor a comparação com os resultados a serem apresentados neste trabalho, nesta seção comentaremos, de forma um pouco mais técnica do que na Introdução, alguns resultados conhecidos envolvendo as soluções dos problemas associados àqueles deste trabalho .

Primeiramente lembramos a questão da existência de soluções para o problema de evolução do sistema de Oldroyd no caso de dominios com fronteira fixa (domínios cilíndricos) a que tem sido relativamente bem estudada. Em Guilloupé & Saut [20], por exemplo, são provadas a existência e a unicidade de soluções fortes locais no tempo, bem como a existência global quando o parâmetro α, os dados iniciais e o campo de forças externos são suficientemente pequenos. Naquele artigo é também provado, usando uma técnica de Serrin [44], veja Valli [51] por exemplo, um resultado de existência de soluções periódicas no tempo quando o campo de forças externos é periódico. Em termos técnicos, os resultados encontrados em Guilloupe & Saut [20] que são mais relevantes para nosso trabalho são dados nos seguintes teoremas:

Teorema 1.6. Suponhamos que $\partial\Omega \in C^3$, $f \in L^2_{loc}(R_+; H^1(\Omega))$, $f_t \in L^2_{loc}(R^+; H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in D(A(\Omega))$, $\tau_0 \in H^2(\Omega)$. Então existe T>0, $u \in L^2_{loc}(0,T; H^3(\Omega)) \cap C([0,T]; D(A(\Omega)))$, com $u_t \in L^2_{loc}(0,T; V(\Omega)) \cap C([0,T]; H(\Omega))$, $p \in L^2_{loc}(0,T; H^2(\Omega))$ (onde p e a pressão associada), e $\tau \in C([0,T]; H^1(\Omega))$ tal que (u,p,τ) é solução do problema (1.17)-(1.21) em $[0,T] \times \Omega$.

Teorema 1.7. Seja $\partial\Omega \in C^4$. Existe $0 < \alpha_0 < 1$, dependendo do Ω tal que se $0 < \alpha < \alpha_0$, e se $u_0 \in D(A(\Omega))$, $\tau_0 \in H^2(\Omega)$, $f \in L^\infty(R_+; H^1(\Omega))$, $f_t \in L^\infty(R^+; H^{-1}(\Omega))$, são pequenos em sus respectivos espaços, então existe uma única solução (u,τ) do problema (1.17)-(1.21) definida para todo tempo $t > 0$ e verificando que $u \in C_b(R^+; H^3)$, $\tau \in C_b(R^+; H^1)$.

A prova do Teorema 1.6 é baseada no uso do Teorema de Ponto Fixo de Schauder, com o auxilio do estudo prévio de problemas linearizados naturais associados à equação de Navier Stokes e à equação de Transporte (1.16). O Teorema 1.7 se obtém a partir de estimativas uniformes no tempo.

Na tese de doutorado de Ortega [34], são apresentados resultados, no caso não Hilbertiano e sempre para domínios cilíndricos, de existência local e global para dados pequenos, mas sempre em intervalos finitos, de soluções fortes para problema (1.17)-(1.21).

Como nos trabalhos acima, a análise do Problema (1.17)-(1.21) em domínios não cilíndricos necessitará do estudo anterior do correspondente problema linearizado da equação de Navier Stokes, isto é, do estudo do chamado problema de Stokes. Entretanto, tal problema é mais difícil e menos desenvolvido do correspondente em domínios fixos. A seguir descrevemos brevemente alguns resultados conhecidos acerca deste problema que são relevantes para o nosso caso.

Em Fujita & Sauer [15] é apresentado um resultado de existência de solução fraca; a prova é feita por meio do uso de um sistema penalizado. Em Miyakawa & Teramoto [32] é apresentado um resultado de existência de soluções fracas, que é obtido transformando o problema original em um novo problema diferencial cilíndrico, usando um difeomorfismo adequado. Um outro trabalho que merece ser destacado é Salvi [44]. Neste artigo Salvi, usando uma generalização do Lema de Krein Milman e um método variacional, apresenta um resultado de regularidade para as soluções do problema de Navier Stokes. Lamentavelmente não será possivel usar tais técnicas no nosso caso, devido fundamentalmente ao fato de precisarmos uma alta regularidade espacial da velocidade devido às não linearidades de acoplamento do sistema. Durante o desenvolvimento deste trabalho e especificamente no Capítulo 2 faremos comentários mais precisos a respeito das dificuldades que aparecem ao tentar empregar as idéias de Fujita [15], Inoue & Wakimoto [25] e Salvi [43] no problema (1.17)-(1.21).

1.4. Novos Resultados

Nesta seção descreveremos de forma resumida, porém mais técnica, os novos resultados obtidos neste trabalho. Nesta tese apresentamos um par de resultados de existência de soluções para o problema de evolução de Navier Stokes e do modelo diferencial de Oldroyd em domínios não cilíndricos. Tais resultados serão obtidos num tipo especial de domínios não cilíndricos. Sua caracterização será por difeomorfismos (sobre sua imagem) de forma $\varphi : \Omega\times[0,T]\rightarrow IR^{n+1}$ e tais que $\varphi(\Omega\times[0,T])=\Omega(t)\times\{t\}$. Para facilitar a leitura, denotaremos os domínios não cilíndricos na forma $\Omega_T(\varphi)=\varphi(\Omega\times[0,T])$ e associados a tais φ consideraremos os espaços funcionais seguintes:

$$
W_T(\varphi)=\left\{ \begin{array}{l} (u,p): u\in L^2\left(0,T;H^3(\Omega(t))\right)\cap L^\infty\left(0,T;D(A(\Omega(t)))\right), u(0)=0 \\ u_t\in L^2\left(0,T;H^2(\Omega(t))\cap V(\Omega(t))\right)\cap L^\infty\left(0,T;V(\Omega(t))\right), u_t(0)=0\,, \\ p\in L^2\left(0,T;H^2(\Omega(t))\right),\ p_t\in L^2\left(0,T;H^1(\Omega(t))\right), \nabla p(0)=0,\ \int\limits_{\Omega(t)} p\,dx=\int\limits_{\Omega(t)} p_s\,dx=0 \\ u_{tt}\in L^2\left(0,T;H(\Omega(t))\right) \end{array} \right\}
$$

$$
C_T=\left\{\varphi\in C^3(\Omega\times[0,T]) : \varphi \quad é \quad difeomorfismo\right\},
$$

$$
X_T(\varphi)=\left\{ \ f\in L^2\left(0,T:H^1(\Omega(t))\right): f_t\in L^2\left(0,T:L^2(\Omega(t))\right),\ \ f(0)=0 \ \right\}
$$

munidos das normas naturais, isto é,

$$
\left|(u,p)\right|_{W_T}^2=|u|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega(t))\cap L^\infty(0,T;D(A(\Omega(t)))))}+|u_t|^2_{L^\infty(0,T;V(\Omega(t)))\cap L^2(0,T;D(A(\Omega(t))))}+|p|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega(t)))}+|p_t|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))}
$$

$$
|\psi|_{C_T}=\sup\left\{\left|\frac{\partial^j\psi}{\partial y_i}(y)\right| : y\in\Omega\times[0,T],\ \ i=1\ldots4, j=0\ldots3\right\}
$$

e

$$
|f|^2_{X_T(\varphi)}=\int_0^T |f|^2_{H^1(\Omega(s))}ds+\int_0^T |f_s|^2_{L^2(\Omega(s))}ds\,.
$$

No Capítulo 2 provaremos um resultado de existência e regularidade para as soluções do problema de Navier Stokes em domínios não cilíndricos apropriados. Com as notações introduzidas anteriormente enunciamos os seguintes Teoremas:

Teorema 2.18. Seja T>0. Existe uma vizinhança W da Identidade em C_T tal que se $\varphi \in W$ cumpre que

$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x),, ,\varphi_n(t,x), t)$$

e

$$Det\left(\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(t,x)}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}\right) = \gamma(t) \quad em \quad \Omega(t) \quad \forall \quad t \in [0,T],$$

então para todo $f \in X_T(\varphi)$ existe $0 < T_1 < T$ e $(u,p) \in W_{T_1}(\varphi)$, solução do problema de Navier-Stokes

$$u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla q = f \quad em \quad \Omega_T(\varphi),$$

$$div(u) = 0 \quad em \quad \Omega_T(\varphi),$$

$$u = 0 \quad em \quad \Gamma,$$

$$u(0) = 0 \quad em \quad \Omega(0).$$

A prova do Teorema 2.18 será baseada no uso do Teorema de Ponto Fixo de Schauder e, portanto, será importante obter antes resultados de existência de soluções regulares, mais as respectivas estimativas *a priori*, do problema de Stokes. Tais estimativas também serão fundamentais no estudo do sistema de Oldroyd no Capítulo 3 e são parte do conteúdo próximo teorema de existência de soluções para o problema de Stokes:

Teorema 2.11 Seja T>0. Existe uma vizinhança W da Identidade em C_T tal que se $\varphi \in W$ cumpre que

$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x),, ,\varphi_n(t,x), t)$$

e

$$Det\left(\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(t,x)}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}\right)=\gamma(t) \quad em \quad \Omega(t) \quad \forall \quad t\in[0,T],$$

então para todo $f\in X_T(\varphi)$ existe uma única solução $(u,p)\in W_T(\varphi)$ do problema de Stokes

$$\begin{aligned}
&w_t-\Delta w+\nabla p=f && em \quad \Omega_T(\varphi)\\
&div(w)=0 && em \quad \Omega_T(\varphi)\\
&w=0 && em \quad \Gamma\\
&w(0)=0 && em \quad \Omega(0).
\end{aligned}$$

Mais ainda existe $C(\varphi)>0$ independente de $f\in X_T(\varphi)$ tal que,

$$|(u,p)|_{W_T(\varphi)}\le C(\varphi)|f|_{X_T(\varphi)}.$$

No Capítulo 3, se apresentam dois resultados principais. O primeiro, Teorema 3.5 é um resultado de existência local de soluções para o modelo diferencial de Oldroyd em domínios não cilíndricos como os introduzidos no inicio desta seção. O Teorema 3.5 é o principal resultado deste capítulo. Sua prova requer os resultados de regularidade obtidos no Capítulo 2 para a equação de Stokes, bem como resultados de compacidade apropriados em espaços do tipo $L^2(0,T:H^1(\Omega))$, (veja a Proposição 2.16 do Capítulo 2). Será necessário também o uso conveniente do Teorema de Ponto Fixo de Schauder e o estudo de uma versão linearizada da equação de transporte (1.19), o que é feito na primeira seção do Capítulo 3 (Proposição 3.2). Em detalhe, os enunciados destes resultados são os seguintes:

Proposição 2.16. O conjunto

$$A(\Omega_T,1,0,R)=\left\{\ f\in L^2(0,T:L^2(\Omega(t))) : f\in L^2(0,T:H^1(\Omega(t))),\ f_t\in L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))\right.$$
$$\left.|f|^2_{L^2(0,T:H^1(\Omega(t)))}+|f_t|^2_{L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))}\le R\ \right\}$$

e relativamente compacto em $L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))$.

Proposição 3.2. Seja T>0 e $\varphi\in C_T$. Então para todo $\tau_0\in H^2(\Omega(0))$ e toda função $\overline{u}\in L^1(0,T;H^3(\Omega(t))\cap D(A(\Omega(t))))$, o problema

$$We\left(\frac{\hat{c}}{\partial t}\tau+(\overline{u}\cdot\nabla)\tau+g_a(\tau:\nabla\overline{u})\right)+\tau=2\alpha D[\overline{u}] \qquad em\ \Omega_T(\varphi)$$
$$\tau(0)=\tau_0 \qquad em\ \Omega(0)$$

tem uma solução $\tau\in L^\infty(0,T:H^2(\Omega(t)))$, com $\tau'\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega(t)))$. Mais ainda existem constantes positivas C_0,c_0 independentes de $t\in[0,T]$ tais que

$$\|\tau\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega(t)))}\le\left\{c_0\|\tau_0\|_{2,\Omega(0)}+\frac{4\alpha}{C_0We}\right\}\exp\left(C_0c_0\|u\|_{L^1(0,T;H^3(\Omega(t)))}\right)$$

$$\|\tau_t\|_{L^\infty(0,T:H^1(\Omega(t)))}\le\left\{c_0\|\tau_0\|_2+\frac{4\alpha}{C_0We}\right\}\exp\left(C_0c_0\|u\|_{L^1(0,T:H^3(\Omega(t)))}\right)\left(c_0\|\overline{u}\|_{L^\infty(0,T:D(A(t)))}+\frac{4\alpha}{C_0We}\right).$$

Teorema 3.5. Seja T>0. Existe uma vizinhança W da Identidade em C_T tal que se $\varphi \in W$ cumpre que

$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x),, \varphi_n(t,x), t)$$

$$Det\left(\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(t,x)}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}\right) = \gamma(t) \quad em \quad \Omega(t) \quad \forall \quad t \in [0,T],$$

e

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\varphi^{-1}(x,t))\eta(x,t) \leq 0 \cdot \text{ em } \partial\Omega(t).$$

e se $f \in L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))$ com $f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))$ e $f(0)=0$, $\tau_0 \in H^2(\Omega(0))$ com $\nabla \cdot \tau_0 = 0$, onde $\varphi(t,\Omega) = \Omega(t) \times \{t\}$ para todo $t \in [0,T]$, então existem $T \geq \overline{T} > 0$ e funções $u \in L^2(0,\overline{T};H^3(\Omega(t))) \cap L^\infty(0,\overline{T};D(A(t)))$, $\tau \in L^\infty(0,\overline{T};H^2(\Omega(t)))$, $p \in L^2(0,\overline{T};H^2(\Omega(t)))$ cumprindo que $u_t \in L^2(0,\overline{T};H^1(\Omega(t))) \cap L^\infty(0,\overline{T};V(\Omega(t)))$, $\tau' \in L^\infty(0,\overline{T};H^1(\Omega(t)))$ e $p_t \in L^2(0,\overline{T};H^1(\Omega(t)))$ tais que (u,p,τ) é solução do problema diferencial Oldroyd (3.1)-(3.5) em $\Omega_{\overline{T}}(\varphi)$ com condições iniciais $u(0)=0$ e $\tau(0)=\tau_0$.

O Capítulo 3 será finalmente completado com a Proposição 3.6 onde se estabelece a unicidade das soluções do sistema diferencial de Oldroyd.

Teorema 3.6. Suponha que $\varphi \in W$, onde W é o aberto garantido no Teorema 3.5. Então o modelo diferencial de Oldroyd (1.17)-(1.21) tem uma única solução (u,τ) na classe de funções $L^2(0,\overline{T};H^3(\Omega(t)) \cap D(A(t))) \times L^2(0,\overline{T};H^1(\Omega(t)))$. A pressão p e única salvo constante no espaço $L^2(0,T;H^2(\Omega(t)))$.

CAPÍTULO 2

As Equações de Stokes e de Navier-Stokes em Domínios Não Cilíndricos

Estudamos neste capítulo a existência de soluções suficientemente regulares, para a equação de Stokes e de Navier Stokes em domínios não cilíndricos.

As principais notações, assim como os resultados mais relevantes, foram apresentados no Capítulo 1 e, em geral salvo mudanças obvias, serão suficientes para o desenvolvimento deste e dos outros capítulos.

Na primeira parte deste Capítulo, Seção 1, fazendo uso principalmente do Teorema da função implícita em espaços de Banach, determinaremos uma certa família E, de difeomorfismos, com domínios em $\Omega \times [0,T]$, (em geral constituída por perturbações da identidade) que parametrizarão os domínios não cilíndricos $\Omega_T(\varphi)$ (veja a Definição 2.1), onde serão obtidos os resultados de existência de soluções para o problema de evolução de Stokes, e como conseqüência, o de existência de soluções para a equação de evolução de Navier Stokes.

Na Seção 2 apresentamos um resultado de existência de soluções para o problema de evolução de Stokes em domínios do tipo $\Omega_T(\varphi)$, para $\varphi \in \mathrm{E}$, veja Teorema 2.11. Mais ainda, neste resultado se estabelecem estimativas *a priori* apropriadas, para as soluções do problema de Stokes em domínios do tipo $\Omega_T(\varphi)$ a serem fundamentais na obtenção, não só, da existência de soluções para o problema de Navier Stokes (a ser feita na seção 3) como também, da existência de soluções do modelo diferencial de Oldroyd no Capítulo 3.

Na Seção 3 é apresentado um resultado de existência de soluções regulares para o problema de evolução de Navier Stokes, veja Teorema 2.18. A prova do teorema será feita usando o Teorema de Ponto Fixo de Schauder, pelo que é fundamental o estudo feito na Seção 2 com respeito à existência, unicidade e estimativas *a priori* do problema de evolução de Stokes.

A Seção 4 tem por objetivo explicitar as grandes dificuldades técnicas geradas a o tentar estabelecer um resultado de regularidade para as soluções do problema de Navier Stokes em domínios não cilíndricos, mediante técnicas como as usadas por Fujita-Sauer em [15], Miyakawa & Teramoto em [32] e Salvi [43].

2.1. Argumentos preparatorios

Nesta primeira seção estudaremos a linearização do problema de Navier Stokes, conhecida como o problema de Stokes, em domínios não cilíndricos. Reiteramos a importância deste resultado na tarefa de obter um resultado de existência para a equação de Navier Stokes usando técnicas de ponto fixo.

Fixamos para o resto deste capitulo, um aberto $\Omega \subset IR^n$, $n \in \{2,3\}$, limitado e de classe C^3, isto é um domínio onde $\partial\Omega$ e localmente uma superficie de classe C^3.

Comecemos lembrando que o Problema de Stokes corresponde a resolver as equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \nabla p = f \qquad \text{em } \Omega_T \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad \text{em } \Omega_T, \tag{2.2}$$

Como antes $u(x,t)$ é a velocidade, $p = p(x,t)$ é a pressão hidrostática, f é a força externa, $\mu>0$ é a viscosidade, Ω_T é um domínio não cilíndrico que pode ser descrito na forma

$$\Omega_T = \bigcup_{t\in[0,T]} \Omega(t) \times \{t\},$$

onde cada $\Omega(t)$ é um aberto limitado, suficientemente regular de IR^n e T>0 é um número finito. Usaremos a notação Γ_T para nos referirmos ao conjunto

$$\Gamma_T = \bigcup_{t\in[0,T]} \partial\Omega(t) \times \{t\}$$

O problema é completado com condições iniciais e de contorno, que nosso caso serão

$$u=0 \qquad em \ \Gamma_T \tag{2.3}$$

$$u(0)=u_0 \qquad em \ \Omega(0) \tag{2.4}$$

Definição 2.1. Seja $\varphi : \Omega \times [0,T] \to IR^{n+1}$ um difeomorfismo. Usaremos a notação $\Omega_T(\varphi)$ para denotar o domínio

$$\Omega_T(\varphi) = \bigcup_{t\in[0,T]} \varphi(t,\Omega).$$

Durante este capítulo, serão feitas maiores hipóteses técnicas respeito ao domínio $\Omega_T(\varphi)$, especialmente no que se refere à função φ.

Recordemos agora dois resultados apresentados em Inoue & Wakimoto [25]. Fixemos um difeomorfismo

$$\varphi : [0,T] \times \Omega \to IR^{n+1} \tag{2.5}$$

tal que

$$\varphi(\Omega \times \{t\}) = \Omega(t) \times \{t\}$$

é dizer
$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x), ,, \varphi_n(t,x), t) \tag{2.6}$$

e onde

$$Det\left(\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(t,x)}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}\right) = \gamma(t) \quad em \quad \Omega(t) \quad \forall \quad t \in [0,T], \tag{2.7}$$

isto é, a expressão em (2.7) é uma função exclusivamente do tempo.

No resto deste capítulo, usaremos a notação

$$(y,s) = \varphi^{-1}(x,t) = (\varphi_1^{-1}(x,t), \varphi_2^{-1}(x,t), ,, \varphi_n^{-1}(x,t), t)$$

e dada uma função vetorial $u : \Omega_T(\varphi) \to IR^n$, definimos a função $\widetilde{u} = (\widetilde{u}^1(y,s), \widetilde{u}^2(y,s), ,, \widetilde{u}^n(y,s))$ com domínio em $\Omega \times [0,T]$ e componentes dadas por

$$\widetilde{u}^j(y,s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x_k}(\varphi(y,s)) u_k(\varphi(y,s)) \tag{2.8}$$

Similarmente para uma função escalar $p : \Omega_T(\varphi) \to IR$ definimos a função

$$\widetilde{p}(y,s) = p(\varphi(y,s)) \tag{2.9}$$

Usando as transformações previamente estabelecidas podemos rescrever a equação (2.1) na forma (veja Inoue-Wakimoto [25] pág 306-308)

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial s} - L(y,s,\varphi)\,\widetilde{u} + M(y,s,\varphi)\,\widetilde{u} + \nabla_{\varphi}\widetilde{p} = \widetilde{f}$$

onde

$$(L\widetilde{u})^i = g^{j,k}\nabla_j\nabla_k\widetilde{u}_i,$$

$$(M\widetilde{u})^i = \left(\frac{\partial y_j}{\partial t}\right)\nabla_j\widetilde{u}_i + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial y_j}\right)\widetilde{u}_j,$$

$$\left(\nabla_{g(\varphi)}\widetilde{p}\right) = g^{i,j}\left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial y_j}\right),$$

com

$$g^{i,j} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right),\quad g^{i,j} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial y_j}\right),$$

$$\nabla_j\widetilde{u}_i = \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y_j} + \Gamma^i_{j,k}\widetilde{u}_k,$$

$$\nabla_k\nabla_j\widetilde{u}_i = \frac{\partial\left(\nabla_j\widetilde{u}\right)}{\partial y_k} + \Gamma^i_{k,l}\nabla_j\widetilde{u}_l - \Gamma^l_{k,j}\nabla_l\widetilde{u}_i,$$

$$2\Gamma^k_{i,j} = g^{k,l}\left(\frac{\partial g_{i,l}}{\partial y_j} + \frac{\partial g_{j,l}}{\partial y_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial y_l}\right).$$

Aqui utilizamos a notação de Einstein, isto é, aquele que significa que índices repetidos são somados.

A importância da transformação $u \to \widetilde{u}$, é que ela tem uma propriedade fundamental dada pela seguinte proposição (veja Inoue-Wakimoto [25], Proposição 2.4 página 306).

Proposição 2.1. A transformação $u \to \widetilde{u}$ preserva o divergente. e dizer

$$div_y(\widetilde{u}) = div_x(u) \quad em \quad \Omega_T(\varphi)$$

onde div_y e div_x denotam respectivamente os divergentes calculados nas variáveis x e y.

A Proposição 2.1 nos permitirá transformar o sistema de Stokes (homogênea no que se refere à equação do divergente) em um novo sistema no cilindro $\Omega\times[0,T]$ (mas ainda homogênea no que se refere à equação do divergente).A importância da propriedade estabelecida pela Proposição 2.1 é clara. De fato graças a esta, no será necessário definir novos espaços de funções agora associados com a função transformada. Em geral, usando uma outra transformação estos espaços de funções são definidos a traves de alguma expressão funcional do tipo $L_\varphi(u)$, onde $L_\varphi(u)$ se cumpre se, e somente, se $div(u)=0$. Assim à complexidade da nova equação poderia ser ate maior que a do problema original. O anterior foi nossa principal motivação para usar a transformação definida em (2.8) neste trabalho.

O próximo resultado nos permite relacionar as soluções do problema (2.1)-(2.4) com as soluções do novo problema. Sua a prova pode ser achada em Inoue-Wakimoto [25], Proposição 2.5 página 307.

Teorema 2.2. Seja *(u,p)* solução do problema (2.1)-(2.4). Então $(\widetilde{u},\widetilde{p})$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial s}-L(y,s,\varphi)\widetilde{u}+M(y,s,\varphi)\widetilde{u}+\nabla_\varphi\widetilde{p}=\widetilde{f} \qquad em \quad \Omega\times[0,T] \qquad (2.10)$$

$$div(\widetilde{u})=0 \qquad em \quad \Omega\times[0,T] \qquad (2.11)$$

$$\widetilde{u}=0 \qquad em \quad \partial\Omega \qquad (2.12)$$

$$\widetilde{u}(0)=\widetilde{u}_0 \qquad em \quad \Omega(0). \qquad (2.13)$$

Mais ainda, a recíproca também é verdadeira (isto é, aplicando a transformação inversa retomamos o problema original).

O Teorema 2.2 permite de fato transformar a equação de Stokes (2.1)-(2.4) na equação (2.10)-(2.13) definida no cilindro $\Omega\times[0,T]$.

Observamos que quando φ é a identidade, as equações anteriores se reduzem ao problema usual de Stokes em um domínio fixo, para o qual se conhece a existência de soluções regulares e estimativas a priori. Isto nos motiva a tentar aplicar o Teorema da Função Implícita para obter o mesmo tipo de informação para φ que sejam perturbações da identidade. Para isto, usando as notações anteriores, definimos a seguinte aplicação:

$$F : W_T \times C_T \times X_T \to X_T \times \{0\} \times V((\Omega))$$

$$F((v,q),\varphi,p,f) = \left(\frac{\partial v}{\partial s} + M(y,s,\varphi)v - L(y,s,\varphi)v + \nabla_{g(\varphi)} q - f, div(v), v(0) \right) \qquad (2.14)$$

onde

$$W_T = \left\{ (v,q) : v \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap V(\Omega)),\ \ v_t \in L^2(0,T : H(\Omega)) \right.$$

$$\left. \int_\Omega q dx = 0,\ q \in L^2(0,T : H^1(\Omega)),\ \ v(0) \in V(\Omega) \right\}, \qquad 2.15)$$

$$W_T(\varphi) = \left\{ (v,q) : v \in L^2(0,T : H^2(\Omega(t)) \cap V(\Omega(t))),\ \ v_t \in L^2(0,T : H(\Omega(t))) \right.$$

$$\left. p \in L^2(0,T : H^1(\Omega(t))),\ \ v(0) \in D(A(\Omega(0))) \right\},$$

$$C_T = \left\{ \psi : \Omega \times [0,T] \to IR^n : \psi \ \ e \ \ difeomorfismo \right\} \cap C^3(\Omega \times [0,T]),$$

munidos das normas

$$|(v,q)|^2_{W_T} = |v|^2_{L^2(0,T:D(A(\Omega)))} + |v_t|^2_{L^2(0,T:H(\Omega))} + |q|^2_{L^2(0,T:H^1(\Omega))} + |v(0)|^2_{V(\Omega)},$$

$$|(v,q)|^2_{W_T(\varphi)} = |v|^2_{L^2(0,T:D(A(\Omega(t))))} + |v_t|^2_{L^2(0,T:H(\Omega(t)))} + |q|^2_{L^2(0,T:H^1(\Omega(t)))} + |v(0)|^2_{V(\Omega(0))},$$

$$|\psi|_{c_T} = \sup\left\{ \ |D_i\psi(t,x)| : (t,x) \in \Omega \times [0,T], \ i = 1\ldots 4 \ \right\},$$

e os espaços

$$X_T = L^2(0,T : L^2(\Omega)) \tag{2.16}$$

$$X_T(\varphi) = L^2(0,T : L^2(\Omega(t)))$$

munidos das normas

$$|f|^2_{X_T} = \int_0^T |f|^2_{L(\Omega)} ds$$

$$|f|^2_{X_T(\varphi)} = \int_0^T |f|^2_{L(\Omega(s))} ds$$

respectivamente.

A função F, especificamente com respeito aos espaços W_T e X_T, deverá ser modificada convenientemente. O modelo atual para F tem por finalidade expor as idéias a serem usadas, assim como identificar as principais dificuldades técnicas que surgirão com o seu uso conjunto com o Teorema da Função Implícita.

Suponhamos por agora que a função F é suficientemente regular, de modo de permitir o raciocínio que segue. Como a função F é linear respeito da variável (u,p) teremos que

$$D_{(u,p)}F((0,0),I_d,0)(w,q) = (w_t - \Delta w + \nabla q, div(w), w(0)) \tag{2.17}$$

Observe que o operador $D_{(u,p)}((0,0),I_d,0)$ depende fortemente da equação de Stokes em $[0,T]\times\Omega$. De fato a teoria geral das equações de Stokes, estabelece que $D_{(u,p)}F((0,0),I_d0)$

é um isomorfismo, veja Proposição 3.1.2 em Temam [49], pag 267. Como $F((0,0),I_d,0)=0$, o Teorema da Função Implicita garante a existência de vizinhanças V_1 de $(0,0)\in W_T$, V_2 da identidade em C_T, V_3 de $0\in X_T$ e a de uma função $\xi : V_2\times V_3 \rightarrow V_1$, que tem a mesma regularidade da função F, tais que

$$F(\xi(\varphi,f),\varphi,f)=0 \quad \forall \quad (\varphi,f)\in V_2\times V_3 \tag{2.18}$$

Mais ainda $F((u,p),\varphi,f)=0$ com $(u,p)\in V_1$ e $(\varphi,f)\in V_2\times V_3$ se, e somente, se $(u,p)=\xi(\varphi,f)$.

A interpretação da equação $F(\xi(\varphi,f),\varphi,f)=0$, é clara: se $u:\Omega_T(\varphi)\rightarrow IR^n$ e $p:\Omega_T(\varphi)\rightarrow IR$ são funções tais que $(\widetilde{u},\widetilde{p})=\xi(\varphi,f)$, pelo Teorema (2.2), e supondo que φ satisfaz as condições (2.5)-(2.7), temos que (u,p) é a solução do problema de Stokes no domínio $\Omega_T(\varphi)$, para força externa $g\in X_T(\varphi)$ e condição inicial $v_0\in V(\Omega)$ tais que $\widetilde{g}=-f \;\; e \;\; \widetilde{v}_0=u(0)$.

O procedimento anterior seria adequado, se no nosso caso as não linearidades de acoplamento entre as equações do sistema diferencial de Oldroyd, não exigissem um maior controle da regularidade espacial para as soluções do problema de Stokes. Como veremos no Capítulo 3, especificamente devemos ter, pelo menos, que a velocidade $u\in L^2(0,T;H^3(\Omega(t)))$. Esta propriedade poderá ser obtida usando a Proposição 1.3, se por exemplo, tivemos mais regularidade na força externa f e em u_t. Deixando de lado na argumentação a seguir, a condição sobre a força externa, por razões técnicas, e talvez até de compatibilidade com respeito dos espaços funcionais usados no Capítulo 3, precisaremos ter que $u_t\in L^2(0,T;V(\Omega(t)))$. Obter a condição de fronteira e a regularidade requerida para u_t, num domínio onde a fronteira está mudando com o tempo, apresenta dificuldades técnicas difíceis de serem vencidas. As questões anteriores deverão ser refletidas na definição da função F, provocando modificações nos espaços W_T, $W_T(\varphi)$, X_T, $X_T(\varphi)$,,etc.

Pelo exposto anteriormente, o tipo de condição inicial, assim como a força externa, a serem consideradas no problema de Navier Stokes deverão ser especiais se queremos obter melhores regularidades e estimativas *a priori*. Para isto apresentaremos abaixo um resultado nesta direção, para domínios fixos, que nos será útil posteriormente.

Definição 2.2. Seja $\{w_i : n \in \mathrm{N}\}$, a base ortonormal do espaço $H(\Omega)$, composta pelas autofunções do operador de Stokes $A(\Omega)$ em $H^2(\Omega) \cap V(\Omega)$. Definimos o conjunto $D_3(A)$ pela expressão

$$D_3(A) = \overline{\langle \{w_i\}_{i\in\mathrm{N}} \rangle}^{H^3(\Omega)} \tag{2.19}$$

aqui $\langle \{w_i : i \in \mathrm{N}\} \rangle$ é o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{w_i : n \in \mathrm{N}\}$.

Observação 2.3. Resulta óbvio que se $u_0 \in D_3(A)$, existe uma seqüência $(u_{0,n})_{n\in\mathrm{N}}$ tal que para cada $n \in \mathrm{N}$, $u_{0,n} = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i w_i$ com $N_n > \mathrm{N}_{n-1}$ e onde $u_{0,n} \to u_0$ fortemente em $H^3(\Omega)$. Observe também que $A(u_{o,n}) \to A(u_0)$ fortemente em $H^1(\Omega)$ e que $A(u_{0,n}) \in H_0^1(\Omega)$.

Proposição 2.3. Sejam $u_0 \in D_3(\Omega)$, $f \in L^2(0,T : H^1(\Omega))$ com $f_t \in L^2(0,T : L^2(\Omega))$. Se $P(\Omega)f(0) \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma única solução (u,p) do Problema de Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla p = f \qquad em \quad [0,T[\times\Omega, \tag{2.20}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad em \quad [0,T[\times\Omega, \tag{2.21}$$

$$u = 0 \qquad em \quad \partial\Gamma_T, \tag{2.22}$$

$$u(0)=u_0 \qquad em\ \Omega, \tag{2.23}$$

cumprindo que

$$u_t(0)\in V(\Omega),\ \ p(0)\in H^1(\Omega), \tag{2.24}$$

$$u\in L^2([0,T]:H^3(\Omega))\cap L^\infty([0,T]:D(A(\Omega))), \tag{2.25}$$

$$u_t\in L^2([0,T]:D(A(\Omega)))\cap L^\infty([0,T]:V(\Omega)), \tag{2.26}$$

$$p\in L^2([0,T]:H^2(\Omega))\ \ p_t\in L^2([0,T]:H^1(\Omega)), \tag{2.27}$$

$$u_{tt}\in L^2(0,T;H(\Omega)), \tag{2.28}$$

Observação 2.4. A existência e unicidade de soluções para o problema de Stokes é conhecida, veja Temam [49], Teorema 3.11 e Lema 3.1.2 pag.260, pelo que a prova da unicidade será omitida na demonstração da Proposição 2.3.

Observação 2.5. Se $f(0)=\nabla q$ equivalentemente, se $f(0)$ e ortogonal a $H(\Omega)$ então $P(f(0))\in H_0^1(\Omega)$ pois de fato $P(f(0))=0$.

Prova: A prova será feita utilizando o clássico método de Galerkin. Seja $(u_{0,n})_{n\in N}$ uma seqüência como na Observação 2.4. Para cada $n\in N$ consideremos o seguinte problema aproximado: achar $u_n(t)=\sum_{i=1}^{N_n}\lambda_i(t)\omega_i$ tal que,

$$\begin{gathered}(u_{nt},w_i)+(\nabla u_n,\nabla w_i)=(f(t),w_i)\ \ \forall i\in\{1,2,..N_n\}\\ u_n(0)=u_{n,0}.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Este problema é equivalente a um problema de equações diferenciais ordinárias. Assim, a existência de soluções segue de um argumento usual, e mais ainda , as soluções estão definidas em todo o intervalo $[0,T]$, o que será conseqüência das estimativas a priori que se seguem. Como $f_t \in L^2(0,T : L^2(\Omega))$, então formalmente, podemos diferenciar a equação (2.29) respeito do tempo, obtendo assim

$$(u_{ntt}, w_i) + (\nabla u_{nt}, \nabla w_i) = (f_t, w_i) \quad \forall i \in \{1,2,..N_n\} \tag{2.30}$$

Multiplicando a última equação por λ'_i e somando em *i*, para $i \in \left\{ 1,2,...N_n \right\}$, obtemos

$$(u_{ntt}, u_{nt}) + (\nabla u_{nt}, \nabla u_{nt}) = (f_t, u_{nt}), \tag{2.31}$$

pelo que

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{nt}|^2 + |\nabla u_{nt}|^2 = (f_t, u_{nt}) \leq c_1 |f_t| |\nabla u_{nt}| \tag{2.32}$$

onde c_1 e uma constante positiva que depende do diâmetro de Ω (conseqüência da desigualdade de Poincare). Usando a desigualdade de Young e integrando (2.32) entre 0 e t para $t \in [0,T]$, obtemos a desigualdade;

$$|u_{nt}(t)|^2 + \int_0^t |\nabla u_{ns}|^2 ds \leq c_1{}^2 \int_0^t |f_s|^2 ds + |u_{nt}(0)|^2 \tag{2.33}$$

Segundo a última desigualdade, se a seqüência $u_{nt}(0)$ é limitada em $H(\Omega)$, então será possível deduzir que

$$\{u_{nt}\} \textit{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T : H(\Omega)) \tag{2.34}$$

e que

$$\{u_{nt}\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T:V(\Omega)). \qquad (2.35)$$

Vejamos que de fato a seqüência $(u_{nt}(0))_{n\in N}$ é limitada em $V(\Omega)$. Como $\{w_i : n \in \mathrm{N}\}$ é uma base ortonormal de autofunções do operador de Stokes para o espaço $H(\Omega)$, temos que $A(u_{nt})$ e $A(u_n)$ são funções em $D(A(\Omega))$ e, em particular são funções em $V(\Omega)$. Portanto multiplicando por $(A(u_{nt}), w_i)$ e somando em i, para $i \in \{1,2,..N_n\}$, temos que;

$$(u_{nt}, A(u_{nt})) + (\nabla u_n, \nabla A(u_{nt})) = (f, A(u_{nt})).$$

Isto implica que

$$|\nabla u_{nt}|^2 = -(A(u_n), A(u_{nt})) - (Pf, \Delta(u_{nt}))$$

Assim para $t = 0$, temos que $|\nabla u_{nt}(0)|^2 = -(A(u_n(0)), A(u_{nt}(0))) - (Pf(0), \Delta(u_{nt}(0)))$, ou seja

$$|\nabla u_{nt}(0)|^2 = -(A(u_n(0)), -P\Delta(u_{nt}(0))) - (Pf(0), \Delta(u_{nt}(0))),$$

e por tanto

$$|\nabla u_{nt}(0)|^2 = (A(u_n(0)), \Delta(u_{nt}(0))) - (Pf(0), \Delta(u_{nt}(0))).$$

Logo usando o fato que $A(u_{n,0}) \in H_0^1(\Omega)$, o que foi comentado na Observação 2.3, e que $P(f(0)) \in H_0^1(\Omega)$, podemos deduzir a seguinte desigualdade

$$|\nabla u_{nt}(0)|^2 \le |\nabla A(u_{0,n})| |\nabla u_{nt}(0)| + (\nabla P(f(0)), \nabla u_{nt}(0)) \qquad (2.36)$$

pelo que, assumindo (se for necessário) que $u_{nt} \neq 0$,

$$|\nabla u_{nt}(0)| \leq |\nabla A(u_{0,n})| + |\nabla P(f(0))| \tag{2.37}$$

Pela limitação da seqüência $(A(u_{0,n})_{n\in N})$ em $H_0^1(\Omega)$, podemos deduzir, a partir da desigualdade (2.37) a limitação da seqüência $(u_{nt}(0))_{n\in N}$ em $H_0^1(\Omega)$. Observemos que a limitação obtida para a seqüência $(u_{nt}(0))_{n\in N}$ é mais forte do que a que necessitamos no momento, mas tal limitação, nos termos acima, será usada proximamente.

Procedendo em forma análoga ao feito anteriormente, podemos estabelecer a partir da equação (2.31) que

$$(u_{ntt}, u_{ntt}) + (\nabla u_{nt}, \nabla u_{ntt}) = (f_t, u_{ntt}).$$

Portanto, temos

$$|u_{ntt}|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_{nt}|^2 \leq |f_t||u_{ntt}|,$$

e, usando a desigualdade de Young temos

$$|u_{ntt}|^2 + \frac{d}{dt}|\nabla u_{nt}|^2 \leq |f_t|^2. \tag{2.38}$$

Logo, integrando (2.38) entre 0 e t, com $t \in [0,T]$, obtemos;

$$\int_0^t |u_{nss}| ds^2 + |\nabla u_{nt}(t)|^2 \leq \int_0^t |f_s|^2 ds + |\nabla u_{nt}(0)|^2, \tag{2.39}$$

pelo que, usando a limitação da seqüência $|\nabla u_{nt}(0)|$, inferimos da última desigualdade que

$$\{u_{ntt}\} \textit{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T : H(\Omega)), \tag{2.40}$$

e que

$$\{u_{nt}\} \text{ é uniformemente limitada em } L^{\infty}(0,T:V(\Omega)). \qquad (2.41)$$

Chamamos a atenção do leitor de que estas últimas limitações serão motivo de comentários logo após o final desta prova.

As limitações obtidas anteriormente permitem, passando a subseqüências se for necessário, deduzir a existência de uma função $u:[0,T]\times\Omega \to R^n$ tal que

$$u_n \to u \text{ fracamente* em } L^{\infty}(0,T:V(\Omega)), \qquad (2.42)$$

$$u_{nt} \to u_t \text{ fracamente* em } L^{\infty}(0,T:V(\Omega)), \qquad (2.43)$$

$$u_{ntt} \to u_{tt} \text{ fracamente em } L^2(0,T:H(\Omega)), \qquad (2.44)$$

Seja $\gamma \in C^{\infty}[0,T]$. Pela equação (2.29) temos que

$$\int_0^T (u_{ns},w_i)\gamma + (\nabla u_n, \nabla w_i)\gamma ds = \int_0^T (f,w_i)\gamma ds. \qquad (2.45)$$

Similarmente, usando (2.30) temos que

$$\int_0^T (u_{nss},w_i)\gamma + (\nabla u_{ns}, \nabla w_i)\gamma ds = \int_0^T (f_s,w_i)\gamma ds. \qquad (2.46)$$

Fazendo uso agora das convergências (2.42)-(2.44) e tomando limite em (2.45)-(2.46) se conseguem as identidades seguintes:

$$\int_0^T (u_s, w_i)\gamma + (\nabla u, \nabla w_i)\gamma ds = \int_0^T (f, w_i)\gamma ds$$

e

$$\int_0^T (u_{ss}, w_i)\gamma + (\nabla u_s, \nabla w_i)\gamma ds = \int_0^T (f_s, w_i)\gamma ds.$$

Como $D_3(\Omega) = \overline{\langle \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle}$ e denso em $V(\Omega)$, na norma de $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\int_0^T (u_s, w)\gamma + (\nabla u, \nabla w)\gamma ds = \int_0^T (f, w)\gamma ds \tag{2.47}$$

$$\int_0^T (u_{ss}, w)\gamma + (\nabla u_s, \nabla w)\gamma ds = \int_0^T (f_s, w)\gamma ds \tag{2.48}$$

para todo $w \in V(\Omega)$. Pela arbitrariedade de $\gamma \in C^\infty([0,T])$, podemos afirmar que pelo menos no sentido das distribuções,

$$\langle u_s - \Delta u - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V(\Omega) \tag{2.49}$$

e

$$\langle u_{ss} - \Delta u_s - f_s, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V(\Omega). \tag{2.50}$$

A Proposição 1.1 e à Proposição 1.3. permitem deduzir que de fato as funções u e u_s são funções em $L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap V(\Omega))$, bem como a existência de funções p,q em $L^2(0,T : H^1(\Omega))$ tais que

$$u_s - \Delta u + \nabla p = f \qquad em \quad \Omega \times [0,T], \tag{2.51}$$

$$u_{ss} - \Delta u_s + \nabla q = f_s \quad em \quad \Omega \times [0,T]. \tag{2.52}$$

Como $u_t \in L^\infty(0,T;V(\Omega))$, o que é conseqüência de (2.43), temos que $u_t \in L^\infty(0,T:V(\Omega)) \cap L^2(0,T:D(A(\Omega)))$, o que estabelece (2.26). Usando agora que $f+u_t \in L^2(0,T:H^1(\Omega))$, e o Teorema 1.2 (de regularidade), deduzimos de (2.51) e (2.34) que $u \in L^2(0,T:H^3((\Omega))) \cap L^\infty(0,T:D(A(\Omega)))$ o que prova (2.25). Observe ademais que $u_{tt} \in L^2(0,T;H(\Omega))$, veja (2.40), o que mostra (2.28). Uma argumentação análoga prova que $p \in L^2(0,T:H^2(\Omega))$ e que $q \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Vejamos agora que $q = p_t$. Integrando a equação (2.52) entre 0 e t, para $t \in [0,T]$, temos que

$$u_t(t) - \Delta\int_0^t u_s ds + \nabla\int_0^t q ds = f(t) - f(0) - u_t(0). \tag{2.53}$$

Assim para $v \in V(\Omega)$

$$(u_t(t) - \Delta u(t) + \nabla\int_0^t q ds - f(t), v) = (f(0) - \Delta u_0 - u_t(0), v),$$

$$(u_t(t) - \Delta u(t) - f(t), v) = (f(0) - \Delta u_0 - u_t(0), v) = 0, \tag{2.54}$$

pois u é a solução da equação (2.51). Pela Proposição 1.1 e a equação (2.53) vemos que existe $p_0 \in W^1(\Omega)$, tal que

$$f(0) - \Delta u_0 - u_t(0) = \nabla p_0, \tag{2.55}$$

e

$$u_t - \Delta u(t) + \nabla\int_o^t q ds - \nabla p_0 = f(t). \tag{2.56}$$

Disto podemos concluir que $q = p_t$, pois p_0 é uma função constante com respeito ao tempo. É claro agora que $p \in L^2(0,T : H^2(\Omega))$ e que $p_t \in L^2(0,T : H^1(\Omega))$ provando assim (2.27).

Pelo feito até agora, a demonstração da proposição estará completa se provamos que $u_t(0) \in V(\Omega)$ e que $p(0) \in H^1(\Omega)$. Da equação (2.55) e a Proposição 1.3 é claro que $p(0) \in H^1(\Omega)$ quando $u_t(0) \in V(\Omega)$, pelo que só provaremos esta última propriedade. Como a seqüência $(u_{nt}(0))_{n\in N}$ é limitada em $V(\Omega)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $v \in V(\Omega)$ tal que

$$u_{nt}(0) \to v \quad \textit{fraco em} \quad V(\Omega). \tag{2.57}$$

Por outro lado, usando a equação (2.30), vemos que para $\gamma \in C^\infty([0,T])$ com $\gamma(T) = 0$,

$$\int_0^T (u_{nss}, w_i)\gamma ds = \int_0^T -(u_{ns}, w_i)\gamma_t ds - (u_{nt}(0), w_i)\gamma(0).$$

Assim,

$$\int_0^T -(u_{ns}, w_i)\gamma_s ds = \int_0^T -(\nabla u_{ns}, \nabla w_i)\gamma + (f_s, w_i)\gamma ds + (u_{nt}(0), w_i)\gamma(0), \tag{2.58}$$

Usando as convergências (2.42)-(2.43), (2.57) e passando no limite em (2.58) deduzimos que

$$\int_0^T -(u_s, w_i)\gamma_s ds = \int_0^T -(\nabla u_s, \nabla w_i)\gamma + (f_s, w_i)\gamma ds + (v, w_i)\gamma(0)$$

para todo $i \in N$ e toda $\gamma \in C^{\infty}[0,T]$ com $\gamma(T)=0$. Um argumento de densidade permite provar agora que

$$\int_0^T -(u_s, w)\gamma_s ds = \int_0^T -(\nabla u_s, \nabla w)\gamma + (f_s, w)\gamma ds + (v, w)\gamma(0)$$

para toda $w \in V(\Omega)$. Como $u_s \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap V(\Omega))$, pois $u_{tt} \in L^2(0,T:H(\Omega))$ e $f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, podemos rescrever a última equação na forma

$$\int_0^T -(u_s, w)\gamma_s ds = \int_0^T (\Delta u_s, w)\gamma + (f_s, w)\gamma ds + (v, w)\gamma(0) \tag{2.59}$$

A equação (2.59) em particular é válida para $\gamma \in \mathcal{D}((0,T))$, assim pelo menos no sentido das distribuçoes (veja Temam [49], Lema 3.3.1 pag 258) temos que

$$\frac{d}{dt}(u_t, w) = (\Delta u_t + f_t, w) \tag{2.60}$$

para todo $w \in V(\Omega)$. Multiplicando a última equação por $\gamma \in C^{\infty}([0,T])$, com $\gamma(T)=0$, é integrando por partes obtemos que $\forall w \in V(\Omega)$

$$\int_0^T -(u_s, w)\gamma_s ds = \int_0^T (\Delta u_s, w)\gamma + (f_s, w)\gamma ds + (u_t(0), w)\gamma(0). \tag{2.61}$$

Finalmente a comparação das equações (2.59) e (2.61), e sempre lembrando que w *e* γ são funções arbitrárias em seus respectivos espaços, nos permite concluir que $u_t(0) = v \in V(\Omega)$. A prova da proposição está então completa. ■

Observação 2.6. Da literatura associada ao problema de Navier Stokes, é sabido conhecido que propriedades do tipo $u_t \in L^\infty(0,T:V(\Omega))$ (obtida na prova da Proposição (2.3), veja (2.41)) apresentam problemas de compatibilidade com respeito às condições iniciais. Em relação a isto, apresentamos a seguir alguns argumentos semelhantes aos expostos no trabalho clássico de Heywood [23], que esclarecerão o porque, no nosso caso, tais dificuldades não estão presentes.

No que segue, assumiremos que f é uma função suficientemente regular, de modo de garantir os seguintes argumentos técnicos.

Seja (u,p) solução das equações (2.1)-(2.4) com $u_0 \in D(A(\Omega))$. Vejamos inicialmente que a solução do problema de Neumann

$$
\begin{aligned}
\Delta p_0 &= div(f(0)) && em \ \ \Omega \\
\nabla p_0 \cdot \eta &= (\Delta u_0 + f(0))\cdot \eta && em \ \ \partial\Omega
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

onde η é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$, determina a pressão inicial para a equação (2.1). O Teorema 1.2, em Temam [49] pág 9, afirma que a função

$$E(\Omega) = \left\{ \ u \in L^2(\Omega) : div(u) \in L^2(\Omega) \ \right\} \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$\mathrm{T} : u \to "u \cdot \eta",$$

onde $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é o espaço dual de $\gamma_0(H^1(\Omega))$, está bem definida, mais ainda, é continua e realmente

$$\mathrm{T}(u) = u \cdot \eta \qquad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Agora, como $\Delta u_0 \in E(\Omega)$, pois no sentido generalizado $div(\Delta u_0) = 0$, temos que

$$(\Delta u_0 + f(0))\cdot \eta \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \tag{2.63}$$

Observe também que $div(f(0)) \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ e que

$$\int_\Omega div(f(0))dx = \int_{\partial\Omega} (\Delta u_0 + f(0))\cdot \eta dS. \tag{2.64}$$

As identidades (2.63) e (2.64) permitem, sob condições de regularidade apropriadas tanto para a função f como para $\partial\Omega$, assegurar a existência de uma única solução $p_0 \in H^1(\Omega)/IR$ do problema de Neumann

$$\begin{aligned} \Delta p_0 &= div(f(0)) && em\ \ \Omega, \\ \nabla p_0 \cdot \eta &= (\Delta u_0 + f(0))\cdot \eta && em\ \ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Por outro lado, argumentos usuais da teoria, veja por exemplo Heywood [23] permitem assumir que

$$u(t) \rightarrow u_0 \quad forte \quad em \quad H^2(\Omega). \tag{2.65}$$

Usando os mesmos argumentos anteriores, vemos que para $t > 0$ a pressão $p(\cdot,t)$, é a solução generalizada em $H^1(\Omega)/IR$ do problema de Neumann

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &= div(f(t)) && em\ \ \Omega, \\ \nabla p(t)\cdot \eta &= (\Delta u(t) + f(t))\cdot \eta && em\ \ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Da convergência em (2.65), temos claramente que

$$\left(\Delta u(t)+f(t)\right)\cdot\eta\big|_{\partial\Omega}\rightarrow\left(\Delta u_0+f(0)\right)\cdot\eta \quad \textit{forte em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

de onde é possível concluir que

$$p(t)\rightarrow p_0 \quad \textit{forte em} \quad H^1(\Omega). \tag{2.66}$$

Segundo as convergências (2.65)-(2.66) vemos que

$$u_t(t)=-\nabla p(t)+\Delta u(t)+f(t)\rightarrow-\nabla p_0+\Delta u_0+f(0),$$

pelo menos em $L^2(\Omega)$.

Mesmo quando u_0 e $f(0)$ são funções de suporte compacto em Ω, não e possível concluir que $u_t\big|_{\partial\Omega(t)}=0$, sugerindo que em geral $u_t(0)\big|_{\partial\Omega}\neq 0$, e logo que $u_t(0)\notin V(\Omega)$, e então que $|u_t(t)|_{V(\Omega)}\rightarrow\infty$ se $t\rightarrow 0$. O anterior aparentemente contradiz (2.41), mas de fato não existe tal contradição. Para entender isto, observemos que a diferença substantiva com o argumento que acabamos de descrever , é que no nosso casso podemos determinar *a priori* que $u_t(0)\in V(\Omega)$, o que é conseqüência das especiais condições de regularidade e de bordo da condição inicial u_0.

Corolário 2.4. Se $u_0(0)=0$ e $f(0)=0$ então a solução (u,p) do problema (2.1)-(2.4), é tal que $u_t(0)=0$ e $p(0)$ é constante em $\Omega(0)$.

Prova: A prova está essencialmente feita, só é preciso provar que $u_t(0)=0$. De fato a propriedade para $p(0)$ é conseqüência direta da equação,

$$u_t(0)-\Delta u_0+f(0)=\nabla p(0)$$

estabelecida em 2.55. Usando (2.37) na prova da Proposição 2.3 com $u_{0,n} = 0$, temos que $u_{nt}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como de fato $u_t(0)$ é o limite fraco da seqüência $(u_{nt}(0))_{n \in \mathbb{N}}$, o que e conseqüência de (2.57) e (2.61), podemos concluir que $u_t(0) = 0$. A prova do corolário é completa.

Nosso objetivo imediato é redefinir a função F, para isto, e no que segue deste trabalho consideramos a seguinte definição:

Definição 2.7. Com as notações até aqui introduzidas definimos os seguintes espaços

$$
\begin{aligned}
W_T = \Big\{ & (u,p) : u \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;D(A(\Omega))), u(0) = 0 \\
& u_t \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;V(\Omega)), u_t(0) = 0 \\
& p \in L(0,T;H^2(\Omega)),\ p_t \in L(0,T;H^1(\Omega)), \nabla p(0) = 0,\ \int_\Omega p\,dx = \int_\Omega p_s\,dx = 0 \\
& u_{tt} \in L^2(0,T;H(\Omega)) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$C_T = C^3(\Omega \times [0,T]),$$

$$X_T = \left\{ f \in L^2(0,T:H^1(\Omega)) : f_t \in L^2(0,T:L^2(\Omega)),\ f(0) = 0 \right\}$$

munidos das normas naturais, isto é,

$$|(u,p)|^2_{W_T} = |u|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;D(A(\Omega)))} + |u_t|^2_{L^\infty(0,T;V(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(A(\Omega)))} + |p|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + |p_t|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$

e

$$|\psi|_{C_T} = \sup\left\{ \left| \frac{\partial^j \psi}{\partial y_i}(y) \right| : y \in \Omega \times [0,T],\ i = 1 \ldots 4, j = 0 \ldots 3. \right\}$$

$$|f|_{X_T}^2 = \int_0^T |f|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \int_0^T |f_s|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

respectivamente. Se $\varphi \in C_T$ consideramos os espaços

$$X_T(\varphi) = \left\{ \; f \in L^2\big(0,T : H^1(\Omega(t))\big);\ f_t \in L^2\big(0,T : L^2(\Omega(t))\big),\ \ f(0) = 0 \; \right\}$$

$$\begin{aligned} W_T(\varphi) = \Big\{ \ (u,p) : u \in L^2\big(0,T; H^3(\Omega(t))\big) \cap L^\infty\big(0,T; D(A(\Omega(t)))\big), u(0) = 0 \\ u_t \in L^2\big(0,T; H^2(\Omega(t)) \cap V(\Omega(t))\big) \cap L^\infty\big(0,T; V(\Omega(t))\big), u_t(0) = 0 \\ p \in L\big(0,T; H^2(\Omega(t))\big),\ \ p_t \in L\big(0,T; H^1(\Omega(t))\big), \nabla p(0) = 0,\ \int_{\Omega(s)} p\,dx = \int_{\Omega(s)} p_s\,dx = 0, \\ u_{tt} \in L^2\big(0,T; H(\Omega(t))\big) \ \Big\}, \end{aligned}$$

onde damos por entendido que $\varphi(t)(\Omega) = \Omega(t)$. Os espaços $X_T(\varphi)$ e $W_T(\varphi)$ são munidos das normas naturais, isto é,

$$|f|_{X_T(\varphi)}^2 = \int_0^T |f|_{H^1(\Omega(s))}^2 ds + \int_0^T |f_s|_{L^2(\Omega(s))}^2 ds$$

e

$$|(u,p)|_{W_T}^2 = |u|_{L^2(0,T;H^3(\Omega(t)) \cap L^\infty(0,T;D(A(\Omega(t))))}^2 + |u_t|_{L^\infty(0,T;V(\Omega(t))) \cap L^2(0,T;D(A(\Omega(t))))}^2 + |p|_{L^2(0,T;H^2(\Omega(t)))}^2 + |p_t|_{L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))}^2$$

Definição 2.8. Com as notações até aqui introduzidas, definimos a seguinte função :

$$F : W_T \times C_T \times X_T \to X_T \times \{0\}$$

$$F((v,q),\varphi,p,f) = \left(\frac{\partial v}{\partial s} + M(y,s,\varphi)v - L(y,s,\varphi)v + \nabla_{g'\varphi} q - f, div(v), 0 \right)$$

Dando continuidade as idéias expostas no inicio desta seção, nosso próximo objetivo será provar que a função F, no ponto $(0, I_d, 0) \in W_T \times C_T \times X_T$, satisfaz as hipóteses do Teorema da Função Implícita.

Lema 2.4. Os espaços $W_T(\Omega)$, $W_T(\varphi)$, $X_T(\Omega)$ e $X_T(\varphi)$, são espaços de Banach.

Prova: Só provamos que $X_T(\varphi)$ é um Banach, as outras demonstrações são totalmente análogas. Seja $(f_n)_{n \in N}$ uma seqüência de Cauchy em X_T. Claramente existe uma função $f \in L^2(0, T : H^1(\Omega))$ com $f_s \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$f_n \to f \qquad \textit{fortemente em} \quad L^2(0, T : H^1(\Omega)) \tag{2.67}$$

$$f_{ns} \to f_s \qquad \textit{fortemente em} \quad L^2(0, T : L^2(\Omega)) \tag{2.68}$$

pelo que $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ mais ainda

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f_s ds \tag{2.69}$$

Assim só resta provar que $f(0) = 0$. Pela definição do espaço X_T temos que para cada $n \in N$

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_{ns} ds \tag{2.70}$$

logo usando (2.69) e (2.70) vemos que

$$\int_0^T |f_n(0) - f(0)|^2 dt \leq \int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^s |f_n(\vartheta) - f(\vartheta)|^2 d\vartheta ds$$

então

$$T\|f(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|^2_{L(\Omega)^2} dt + \int_0^T \int_0^s \|f_n(\vartheta) - f(\vartheta)\|^2 d\vartheta ds$$

de onde podemos concluir, usando (2.67) e (2.68), que $f(0) \equiv 0$. Isto completa a prova. ■

No próximo lema se estabelece a diferenciabilidade da função F. A prova do lema consistirá apenas de argumentos que permitem esclarecer que a função F realmente satisfaz as propriedades requeridas, deixando de lado os cálculos que só fazem mais extensa a demonstração.

Lema 2.5. A função F e uma função de classe C^1.

Prova: Com as notações usadas na definição de F consideremos a seguinte representação;

$$F = \sum_{i=1}^{4} F_i$$

onde

$$F_1((u,p),\varphi,f) = u_t, \qquad F_2((u,p),\varphi,f) = M(\varphi)u, \qquad F_3((u,p),\varphi,f) = -L(\varphi)u,$$

$$F_4((u,p),\varphi,f) = \nabla_\varphi p, \quad F_5((u,p),\varphi,f) = -G(\varphi)f$$

E claro que a função F_1 é uma transformação linear continua nos espaços considerados, pelo que F_1 é uma função de classe C^1.

As funções F_4 e F_5 podem ser consideradas como funcionais bilineares continuas, pelo que novamente a propriedade respeito destas funções é conhecida .

A diferenciabilidade das funções F_2 e F_3 merece um pouco mais de atenção. Nas expressões que definem as funções L e M aparecem termos do tipo $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \frac{\partial (\varphi)_i^{-1}}{\partial y_j}$. Assim a diferencibilidade de F_4 e F_5 é obtida observando que a função $\varphi \to \varphi^{-1}$ é de classe C^{∞} e que L e M podem ser consideradas como a multiplicação de funções de classe C^1. Isto completa a prova. ■

Lema 2.6. O operador linear $D_{(u,p)}F((0,0),I_d,0)$, tem inverso continuo.

Prova: Como a função F é linear respeito da variável (u,p), temos que para $(w,q) \in W(T)$

$$D_{(u,p)}F((0,0),I_d,0)(w,q) = \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \nabla q, 0, 0\right) \tag{2.71}$$

Da equação (2.71) vemos que a invertibilidade do operador $D_{(u,p)}F((0,0),I_d,0)$ é conseqüência da Proposição 2.3 e do Corolário 2.4, onde se estabelecem a existência e unicidade de soluções para a equação de Stokes em $[0,T] \times \Omega$.

A continuidade do operador $D_{(u,p)}^{-1}F(0,I_d,0)$ será estabelecida se provarmos que existe uma relação em normas adequadas entre as soluções do problema de Stokes

$$\begin{aligned}
&u_t - \Delta u + \nabla q = f && em \;\; \Omega \times [0,T] \\
&div(u) = 0 && em \;\; \Omega \times [0,T] \\
&u = 0 && em \;\; \partial\Omega \times [0,T] \\
&u(0) = 0 && em \;\; \Omega
\end{aligned} \tag{2.72}$$

e as da força externa f. Para isto fixemos $f \in X_T$. Segundo a prova da Proposição 2.3, temos que

$$|u_{nt}(t)|^2 + \int_0^t |\nabla u_{ns}|^2 ds \leq c_1^2 \int_0^t |f_s(s)|^2 ds + |u_{nt}(0)|^2 \qquad veja\ (2.33) \tag{2.73}$$

$$\int_0^t |u_{nss}|^2 ds + |\nabla u_{nt}(t)|^2 \leq \int_0^t |f_s(s)|^2 ds + |\nabla u_{nt}(0)|^2 \qquad veja\ (2.39) \tag{2.74}$$

Usando o fato que $u_{nt}(0) = 0,\ \forall n \in \mathrm{N}$, para isto fazemos $u_{n,0} = 0$ em (2.37) na prova da Proposição 2.3, e a semicontinuidade inferior das normas em (2.73) e (2.74), com respeito da convergência fraca e fraca *, podemos deduzir das ultimas desigualdades que

$$|u_t|^2_{L^\infty(0,T)} + \int_0^T |\nabla u_s|^2 ds \leq 2c_4 \int_0^T |f_s(s)|^2 ds \tag{2.75}$$

e

$$\int_0^T |u_{ss}|^2 ds + |\nabla u_t(t)|^2_{L^\infty(0,T)} \leq 2\int_0^T |f_s(s)|^2 ds. \tag{2.76}$$

Por outro lado, usando a Proposição 1.3, temos que existe $d_1 = d_1(\Omega)$ tal que

$$|u(t)|_2^2 + |p(t)|_1^2 \leq d_1 \left\{ |u_t(t)|^2 + |f(t)|^2 \right\} \tag{2.77}$$

$$|u_t(t)|_2^2 + |p_t(t)|_1^2 \leq d_1 \left\{ |u_{tt}(t)|^2 + |f_t(t)|^2 \right\} \tag{2.78}$$

$$|u(t)|_3^2 + |p(t)|_2^2 \leq d_1 \left\{ |u_t|_1^2 + |f(t)|_1^2 \right\} \tag{2.79}$$

Pelo que, combinando (2.75)-(2.79), temos que

$$|u|^2_{L^\infty(0,T;D(A(\Omega)))} + |p|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq 2d_1 \int_0^t |f_s|^2 ds + d_1 |f|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$$

$$|u|^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} + |p|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq 2d_1 \int_0^t |f_s|^2 ds - d_1 \int_0^t |f|^2_{1,\Omega} ds$$

$$|u_t|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + |p_t|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq (2d_1 + 1)\int_0^t |f_s|^2 ds$$

$$|u_{tt}|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + |u_t|^2_{L^\infty(0,T;J^1(\Omega))} \leq 2\int_0^t |f_s|^2 ds$$

Finalmente, das últimas desigualdades é possível deduzir a existência de $c(\Omega) > 0$ tal que

$$|(u,p)|_{W_T} \leq c(\Omega)|f|_{X_T} \tag{2.80}$$

A desigualdade (2.80) prova a continuidade do operador $D^{-1}_{u,p} F((0,0),I_d,0)$, isto completa a demonstração. ■

Corolário 2.7. Existem vizinhanças V_1 de $(0,0)$ em $W_T(\Omega)$, V_2 de I_d em C_T, V_3 de 0 em X_T, e uma função de classe C^1 $\xi : V_2 \times V_3 \to V_1$ tal que

$$F(\xi(\varphi,f),\varphi,f) = 0 \tag{2.81}$$

para todo $(\varphi,f) \in V_2 \times V_3$. Mais ainda $F((u,p),\varphi,f) = 0$, para $(u,p) \in V_1$, $\varphi \in V_2$ e $f \in V_3$ se, e somente, se $(u,p) = \xi(\varphi,f)$.

Prova: O resultado segue diretamente do Teorema da Função Implicita. De fato observe que:

a) $F((0,0),I_d,0)=0$ (Definição 2.7).

b) $D^{-1}_{(\psi,p)}F((0,0),I_d,0)$ é continua (Lema 2.6).

c) F é de classe C^1 (Lema 2.5). ∎

Observação 2.9. Segundo o Corolário 2.7, a função ξ é de classe C^1, pelo que, sem perda de generalidade, podemos assumir que existe M>0 tal que

$$|\xi(\varphi,h)-\xi(\psi,g)|_{W_T} \leq M\left\{ |\varphi-\psi|_{C_T} + |h-g|_{X_T} \right\} \tag{2.82}$$

para todo (φ,h), (ψ,g) *em* $V_2 \times V_3$.

No que resta deste capítulo assumiremos que a desigualdade (2.82) se cumpre.

2.2. O Problema de Stokes em domínios não cilíndricos.

Nesta seção apresentaremos um resultado de existência de soluções para o problema de Stokes em domínios do tipo $\Omega_T(\varphi)$ (veja Definição (2.1)), onde φ será uma função apropriadamente escolhida. O resultado também fornecerá estimativas *a priori* satisfatórias, que permitiram ainda neste capítulo estabelecer a existência de soluções suficientemente regulares, para o problema de Navier Stokes em Domínios do tipo $\Omega_T(\varphi)$. Evidentemente os resultados deste Capítulo serão fundamentais no Capítulo 3 onde trataremos o problema de existência de soluções para o sistema diferencial de Oldroyd.

Começamos fixando o tipo de domínio onde serão obtidos os resultados de existência de soluções tanto para o problema Stokes como para o problema de Navier-Stokes.

Hipóteses sobre $\Omega_T(\varphi)$

a) O domínio $\Omega_T(\varphi)$ pode ser descrito na forma

$$\Omega_T(\varphi) = \bigcup_{t\in[0,T]} \Omega(t) \times \{t\} \tag{2.83}$$

onde $\varphi(t)(\Omega) = \Omega(t)$.

b) $\varphi \in V_2$, onde V_2 é o aberto especificado no Corolário 2.7.

c) $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \Omega_T(\varphi)$ e un difeomorfismo tal que

$$\varphi(\Omega \times \{t\}) = \Omega(t) \times \{t\}, \quad \forall t \in [0,T]$$

equivalentemente

$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(y,t), \varphi_2(y,t), , , \varphi_n(y,t), t) \tag{2.84}$$

$$\det\left|\frac{\partial(\varphi^{-1}(t))_i(t,x)}{\partial y_j}\right| = \gamma(t) \quad em \quad \Omega(t), \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.85}$$

isto é, a função $\det\left|\frac{\partial(\varphi^{-1}(t))_i}{\partial y_j}\right|$ é constante em $\Omega(t)$ para cada $t \in [0,T]$.

Observação 2.10. Em relação com as hipóteses assumidas para o domínio $\Omega_T(\varphi)$, vemos que exemplos satisfazendo (2.85) são as dilatações, translações da unidade e perturbações do tipo

$$Id+\left(f_1(t,y,z),f_2(t,z),f_3(t),0\right).$$

Nos próximos lemas estabelecemos alguns resultados técnicos necessários para o que segue deste capitulo.

Em forma similar a como foram introduzidas as transformação $u \to \widetilde{u}$ e $p \to \widetilde{p}$ em (2.8) e (2.9), para uma função $v:[0,T]\times\Omega \to IR^n$ e $q:\Omega\times[0,T]\to IR^n$ definimos as funções $\hat{v}:\Omega_T(\varphi)\to IR^n$ e $\hat{q}:\Omega_T(\varphi)\to IR^n$ pela expressões

$$\hat{v}^i(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\left(\varphi^{-1}(x,t)\right)v^k\left(\varphi^{-1}(x,t)\right), \tag{2.86}$$

$$\hat{q}(x,t)=q\left(\varphi^{-1}(x,t)\right), \tag{2.87}$$

onde, como antes, usamos a notação $(y,t)=\left(\varphi_1^{-1}(x,t),\varphi_2^{-1}(x,t),,\varphi_n^{-1}(x,t),t\right)$.

Para facilitar a leitura do que resta do capítulo, consideramos uma definição mais formal das transformações introduzidas em (2.8)-(2.9) e (2.86)-(2.87).

Definição 2.11. Para funções $(u,p):\Omega_T(\varphi)\to IR^n\times IR$ e $(v,q):\Omega\times[0,T]\to IR^n\times IR$ definimos a funções $\mathrm{T}_\varphi((u,p)):\Omega\times[0,T]\to IR^n\times IR$ e $\mathrm{T}((v,q)):\Omega_T(\varphi)\to IR^n\times IR$ pelas expressões $\mathrm{T}_\varphi((u,p))=(\widetilde{u},\widetilde{p})$ e $\mathrm{T}((v,q))=(\hat{v},\hat{q})$ onde $(\widetilde{u},\widetilde{p})$ e $(\hat{v},\hat{q})$ são como em (2.8)-(2.9) e (2.86)-(2.87) respectivamente.

Lema 2.8. Sejam $(u,p):\Omega_T(\varphi)\to IR^n\times IR$ e $(v,q):\Omega\times[0,T]\to IR^n\times IR$ funções. Então $\mathrm{T}(\mathrm{T}_\varphi(u,p))=(u,p)$ e $\mathrm{T}_\varphi(\mathrm{T}(v,q))=(v,q)$.

Prova: Para provar a primeira identidade é claro que só é preciso mostrar que $\hat{\tilde{u}} = u$. Usando diretamente a definição das transformações " ~ " e " ^ " temos que para $(x,s) \in \Omega_T(\varphi)$ e $i \in \{1,,,n\}$

$$\hat{\tilde{u}}^i(x,s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\left(\tilde{u}^k\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\right),$$

$$\hat{\tilde{u}}^i(x,s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\left(\varphi^{-1}\right)_k}{\partial x_j}\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\right)\left(u^j\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\right)\right),$$

$$\hat{\tilde{u}}^i(x,s) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\frac{\partial\left(\varphi^{-1}\right)_k}{\partial x_j}\left((x,s)\right)\left(u^j\left((x,s)\right)\right),$$

$$\hat{\tilde{u}}^i(x,s) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\frac{\partial\left(\varphi^{-1}\right)_k}{\partial x_j}\left((x,s)\right)\right)\left(u^j\left((x,s)\right)\right),$$

$$\hat{\tilde{u}}^i(x,s) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}\left(u^j\left((x,s)\right)\right),$$

$$\hat{\tilde{u}}^i(x,s) = u^i\left((x,s)\right),$$

pois a expressão

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\frac{\partial\left(\varphi^{-1}\right)_k}{\partial x_j}\left((x,s)\right)$$

é o termo (i,j) da matriz $D\varphi\left(\varphi^{-1}(x,s)\right)\cdot D\varphi^{-1}\left((x,s)\right)$. O anterior prova a primeira identidade.

A outra identidade se prova de maneira totalmente análoga. A prova da proposição está completa. ■

Lema 2.9. Existe $C_1(\varphi) > 0$ (respectivamente $C_1'(\varphi) > 0$), tal que para todo $f \in X_T(\varphi)$ (respectivamente $f \in X_T$)

$$\left|\tilde{f}\right|_{X_T} \leq C_1(\varphi)|f|_{X_T(\varphi)} \quad \text{(respectivamente } |\hat{g}|_{X_T(\varphi)} \leq C_1'(\varphi)|g|_{X_T} \text{)} \tag{2.88}$$

Prova: Seja $f \in X_T(\varphi)$. Sem perda de generalidade podemos, assumir que existe c_1>0 tal que

$$\det\left|\frac{\partial(\varphi^{-1}(t))_i}{\partial y_j}\right| = \gamma(t) > c_1 \quad em \quad \Omega(t), \forall t \in [0,T] \tag{2.89}$$

Usando a mudança de variável $(x,s) = \varphi(y,s)$, se deduz a existência de uma constante $d_1 = d_1(\varphi, c_1) > 0$ independente de f tal que

$$\left|\tilde{f}\right|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq d_1(\varphi)|f|_{L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))} \tag{2.90}$$

Por outro lado, da demonstração do Teorema 2.5 (veja Inoue & Wakimoto Teorema 2.5) e com as notações introduzidas na página 30 desta tese, se deduz a seguinte identidade:

$$\tilde{f}_s = \frac{\partial(\tilde{f})}{\partial s} - M(\varphi, s, D_y)\tilde{f}\,. \tag{2.91}$$

Nesta última expressão, temos

$$M(\varphi,s,D_y)h=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial t}\frac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial y_j}+\sum_{j,k}\left\{\frac{\partial y_j}{\partial t}\Gamma^i_{j,k}\widetilde{u}^k+\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2 x_k y_i}{\partial s\partial y^j}\widetilde{u}^j\right\} \tag{2.92}$$

onde damos por entendido o significado das variáveis x_i e y_j. Assim, usando (2.90)-(2.92) para estimar o termo $\left|(\widetilde{f})_s\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$, temos que

$$\begin{aligned}\left|(\widetilde{f})_s\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}&\le d_2(\varphi)\left|\widetilde{f}_s\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))}+d_3(\varphi)\left\{\left|f\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))}+\left|f\right|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))}\right\}\\&\le d_1d_2(\varphi)\left|f_s\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))}+d_3(\varphi)\left\{\left|f\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))}+\left|f\right|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))}\right\}\\&\le d_4(\varphi)\left\{\left|f_s\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))}+\left|f\right|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))}\right\}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left|(\widetilde{f})_s\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\le d_4(\varphi)\left|f\right|^2_{X_T} \tag{2.93}$$

A desigualdade (2.88) é agora conseqüência direta das desigualdades (2.90) e (2.93).■

A prova do próximo lema é análoga à demonstração do Lema 2.9, pelo que a omitiremos.

Lema 2.10. Existe $C_2(\varphi)>0$ (respec $C_2^{'}>0$), tal que

$$\left|T_\varphi((u,p))\right|_{W_T}\le C_2(\varphi)\left|(u,p)\right|_{W_T(\varphi)}\quad(\text{ respec }\left|T((v,q))\right|_{W_T(\varphi)}\le C_2^{'}(\varphi)\left|(v,q)\right|_{W_T}\ )$$

para todo $(u,p)\in W_T(\varphi)$ (resp $(v,q)\in W_T$).

A próxima proposição tem uma importância fundamental neste trabalho. De fato esta garantirá a existência de soluções suficientemente regulares e estimativas a priori convenientes para o problema de Stokes em $\Omega_T(\varphi)$, propriedades básicas no estudo da existência de soluções do problema de evolução de Navier Stokes, mais ainda, permitirá no Capítulo 3, obter um resultado de existência de soluções para o problema diferencial de Oldroyd em $\Omega_T(\varphi)$.

Com as notações introduzidas na Definição 2.7 estabelecemos o seguinte teorema

Teorema 2.11. Seja T>0. Existe uma vizinhança W da identidade em

$$C_T = \left\{ \varphi \in C^3([0,T]\times\Omega) : \varphi \quad é \quad difeomosfismo \right\}$$

tal que se $\varphi \in W$ cumpre que

$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x),,,\varphi_n(t,x),t)$$

e

$$Det\left(\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(t,x)}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}\right) = \gamma(t) \quad em \quad \Omega(t) \quad \forall \quad t \in [0,T],$$

então para todo $f \in X_T(\varphi)$ existe uma única solução $(u,p) \in W_T(\varphi)$ do problema de Stokes

$$\begin{aligned}
&w_t - \Delta w + \nabla p = f && em \quad \Omega_T(\varphi), \\
&div(w) = 0 && em \quad \Omega_T(\varphi), \\
&w = 0 && em \quad \Gamma, \\
&w(0) = 0 && em \quad \Omega(0).
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Mais ainda, existe $C(\varphi) > 0$ independente de $f \in X_T(\varphi)$ tal que,

$$|(u,p)|_{W_T(\varphi)} \leq C(\varphi)|f|_{X_T(\varphi)} \tag{2.95}$$

Prova: Seja $\varphi \in V_2$, onde V_2 é a vizinhança de Id em C_T garantida no Corolário 2.7, cumprindo as hipóteses em (2.83)-(2.85). Fixemos λ>0 tal que $\lambda\widetilde{f} \in V_2$, aqui V_2 é a vizinhança de $0 \in X_T$ especificada no Corolário 2.7 e $\widetilde{f}$ é como em (2.8). Logo pelo mesmo corolário temos que

$$F\left(\xi\left(\varphi,-\lambda\widetilde{f}\right),\varphi,-\lambda\widetilde{f}\right)=0. \tag{2.96}$$

Usando a linearidade da função F com respeito à variável $(u,p) \in W_T(\varphi)$, podemos rescrever a última equação na forma

$$F\left(\frac{\xi(\varphi,-\lambda f)}{\lambda},\varphi,-\widetilde{f}\right)=0 \tag{2.97}$$

Pelo Teorema 2.2, (ou seja o Teorema 2.5 de Inoue & Wakimoto [25]), e o Lema 2.8 deduzimos que $T\left(\frac{\xi(\varphi,-\lambda f)}{\lambda}\right)$ é a solução da equação de Stokes (2.94) no domínio $\Omega_T(\varphi)$.

Provemos agora a desigualdade (2.95). Como conseqüência da unicidade das soluções para o problema de Stokes, a que será provada no Lema 2.14, podemos assumir que $\xi(\varphi,0)=0$. Assim usando a desigualdade (2.82) e o Lema 2.9 temos que

$$\left|\xi\left(\varphi,\lambda\widetilde{f}\right)-\xi(\varphi,0)\right|_{W_T} \leq M\left\{\left|\lambda\widetilde{f}\right|_{X_T}\right\} \leq M\lambda C_1(\varphi)\left\{|f|_{X_T(\varphi)}\right\}. \tag{2.98}$$

Portanto,

$$\left|\xi\left(\varphi,-\lambda\widetilde{f}\right)\right|_{W_T} \leq M\lambda C_1(\varphi)|f|_{X_T(\varphi)}. \tag{2.99}$$

Finalmente, usando os Lemas 2.9 e 2.10, temos que

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{T}\left(\xi\left(\varphi,\lambda\overline{f}\right)\right)\right|_{W_T(\varphi)} &\leq C_2'(\varphi)\left|\xi\left(\varphi,\lambda\overline{f}\right)\right|_{W_T} \\ &\leq MC_2'(\varphi)\lambda C_1(\varphi)\left\{|f|_{X_T(\varphi)}\right\}.\end{aligned}$$

Concluímos que existe $C(\varphi)>0$, independente da força externa $f\in X_T(\varphi)$, tal que

$$|(u,p)|_{W_T(\varphi)} = \left|\frac{\mathrm{T}\left(\xi\left(\varphi,\lambda\widetilde{f}\right)\right)}{\lambda}\right|_{W_T(\varphi)} \leq C(\varphi)\left\{|f|_{X_T(\varphi)}\right\}.$$

O anterior completa a prova do Teorema. ■

Finalizamos esta seção provando a unicidade das soluções do problema o que também completa a prova do Teorema 2.11. Para continuar precisamos do seguinte lema técnico

Lema 2.12. Sejam V,H,V' três espaços de Hilbert, cada espaço contido no seguinte, sendo V' o dual de V. Se $w\in L^2(0,T:V)$ e $w_t\in L^2(0,T:V')$ então $u\in C([0,T];H)$ e, no sentido das distribuções, é valida a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt}|w|^2 = 2(w_t,w) \tag{2.100}$$

A prova do Lema 2.12 pode ser achada em Temam [49], Capitulo 3, página 260.

No próximo lema $\varphi \in V_2$, onde V_2 é a vizinhança garantida no corolario 2.7 cumprindo as condições (2.83)-(2.85).

Lema 2.13. Suponha que φ cumpre (2.83)-(2.85). Se $w \in L^2(0,T:H^1(\Omega(t)))$ é tal que $w_t \in L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))$ então

$$(w_t, w) = \frac{j_1(t)}{2}\frac{d}{dt}\left[j_1^{-1}(t)|w|^2_{\Omega(t)}\right] + \sum_{i,j}\tfrac{1}{2}\int_{\Omega(t)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_i^2\right)\frac{\partial y_j}{\partial t}\left(\varphi^{-1}(t,x)\right)dx \tag{2.101}$$

onde $\gamma_1(t) = \det\left[\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right]_{(i,j)}$.

Prova: Usando diretamente a definição do produto interno $(\cdot,\cdot)_{\Omega(t)}$ e notando por $\gamma_1(t)$ ao determinante da matriz jacobiana de $\varphi(t)$ vemos que

$$(w_t, w)_{\Omega(t)} = \sum_i \int_{\Omega(t)} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} w_i(t,x)dx$$

$$= \sum_i \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial t}(\varphi(t,y))w_i(\varphi(t,y))j_1(t)dy$$

$$= \sum_i j_1(t)\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(w_i(\varphi(t,y))\right)w_i(\varphi(t,y))dy$$

$$- \sum_i j_1(t)\int_{\Omega}\sum_j\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)(\varphi(t,y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t,y)w_i(\varphi(t,y))dy.$$

Usando agora o Lema 2.12 rescrevemos a última desigualdade na forma

$$(w_t, w)_{\Omega(t)} = \frac{j_1(t)}{2}\frac{d}{dt}|w(\varphi(t))|_\Omega^2 - j_1(t)\sum_{i,j}\int_\Omega \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)(\varphi(t,y))w_i(\varphi(t,y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t,y)dy$$

$$= \frac{j_1(t)}{2}\frac{d}{dt}\left\{ j_1^{-1}(t)\int_\Omega |w(\varphi(t))|_\Omega^2 j_1(t)dy \right\} - \sum_{i,j}\int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\varphi((t,y))w_i(\varphi(t,y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}((t,y))j_1(t)dy$$

$$= \frac{j_1(t)}{2}\frac{d}{dt}\left[j_1^{-1}(t)|w(t)|_{\Omega(t)}^2 \right] - \sum_{i,j}\int_{\Omega(t)} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(t,x)w_i(t,x)\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(\varphi^{-1}(t,x))dx$$

equivalentemente

$$(w_t, w)_{\Omega(t)} = \frac{j_1(t)}{2}\frac{d}{dt}\left[j_1^{-1}(t)|w(t)|_{\Omega(t)}^2 \right] - \sum_{i,j}\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_i^2(t,x)\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(\varphi^{-1}(t,x))dx,$$

o que completa a demonstração. ■

Lema 2.14. As soluções do problema de Stokes no domínio $\Omega_T(\varphi)$ são únicas.

Prova: Seja w uma solução do problema Stokes homogêneo em $\Omega_T(\varphi)$

$$\begin{aligned}
&w_t - \Delta w + \nabla p = 0 && em \quad \Omega_T(\varphi) \\
&w = 0 && em \quad \Gamma_T(\varphi) \qquad\qquad (2.102)\\
&w = 0 && em \quad \Omega(0) \\
&w(0) = 0 && em \quad \Omega(0)
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (2.102), no sentido do produto interno de $L^2(\Omega(t))$, por $w(t)$ e usando o Lema 2.13 vemos que existem constantes $c_i > 0$ tais que

$$(w_t, w) + (\nabla w, \nabla w) = 0$$

$$\gamma(t)\frac{d}{dt}\left[\gamma_1^{-1}(t)|w(t)|^2_{\Omega(t)}\right]+\|w(t)\|^2_{\Omega(t)}=\sum_{i,j}\int_{\Omega(t)}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\left(\varphi^{-1}(t,x)\right)dx$$

$$\leq c_1(\varphi)c_2(n)\|w\||w|.$$

Usando a desigualdade de Young, a limitação e à positividade da função $\gamma(t)$ de maneira apropriada, podemos assumir a existência de $c_3=c_3(n,\varphi)$ independente de $t\in[0,T]$ tal que

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1^{-1}(t)|w(t)|^2_{\Omega(t)}\right]\leq c_3\gamma_1^{-1}(t)|w|^2_{\Omega(t)}.$$

A conclusão do lema é agora uma conseqüência direta da desigualdade de Gronwall-Bellman. ■

2.3. O problema de Navier-Stokes em domínios não cilíndricos

Na seção anterior foi estabelecido um resultado de existência e unicidade de soluções para o problema de Stokes em domínios do tipo $\Omega_T(\varphi)$. Este resultado será fundamental nesta seção, onde usando o Teorema de Ponto Fixo de Schauder provamos a existência de soluções suficientemente regulares para o problema de Navier Stokes em $\Omega_T(\varphi)$.

Pelo anterior, começamos esta seção estudando a compacidade de um tipo especial de conjuntos em espaços do tipo $L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))$. Observamos que tanto os enunciados como as provas dos resultados estão baseados, no clássico resultado de compacidade de Aubin-Lions, veja Temam [49] pag 271, que enunciamos a seguir.

Sejam X_0, X_1, X_2 três espaços de Banach tais que

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2$$

onde as inclusões são continuas, os espaços são reflexivos e a primeira das inclusões é compacta, $0 < T < \infty$ e α_1, α_2 dois números finitos tais que $\alpha_i > 1,\ i = 1,2$.

Teorema 2.15. Se G é um conjunto limitado de $L^{\alpha_0}(0,T : X_0)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} G = \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} : g \in G \right\}$$

é limitado em $L^{\alpha_1}(0,T : X_2)$, então G e um conjunto relativamente compacto em $L^{\alpha_0}(0,T : X_1)$.

No que resta da seção notaremos por D_T um domínio no cilíndrico do tipo

$$D_T = \bigcup_{t \in [0,T]} \Omega(t) \times \{t\}$$

e por Γ_T ao conjunto

$$\Gamma_T = \bigcup_{t \in [0,T]} \partial\Omega(t)$$

onde cada $\Omega(t)$ é um aberto limitado e regular de IR^n. Assumiremos também que Γ_T é uma variedade suficientemente regular, tanto como para garantir os argumentos técnicos a serem usados. Mais ainda, e em verdade dentro do contexto anterior, assumiremos a seguinte hipótese técnica: Para $1 \le m \le 3$ se cumpre que

H₁ $\quad se \ \dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{m}{n}\geq 0 \quad |u|_{L^q(\Omega(t))}\leq c_p|u|_{W^{m,p}(\Omega(t))} \quad \forall u\in W^{m,p}(\Omega(t)) \ e \ \forall t\in[0,T]$

H₂ $\quad se \ \dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{m}{n}< 0 \quad |u|_{C^0(\Omega(t))}\leq c_p|u|_{W^{m,p}(\Omega(t))} \quad \forall u\in W^{m,p}(\Omega(t)) \ e \ \forall t\in[0,T]$

Observação 2.13. Os domínios do tipo $\Omega_T(\varphi)$, veja a Definição 2.1, satisfazem a hipótese **H₁**. De fato, a propriedade é evidente no caso cilíndrico, isto é, quando $\Omega(t)=\Omega \ \ \forall t\in[0,T]$, usando o fato que a função $u\to u\circ\varphi^{-1}$ estabelece um isomorfismo entre espaços do tipo $W^{m,p}(\Omega(t))$ e $W^{m,p}(\Omega)$, a afirmação é provada facilmente.

Tendo em consideração as hipóteses do Teorema 2.15 e usando a notação $H^0(\Omega(t))=L^2(\Omega(t))$, introduzimos o seguinte conjunto

$$A(\Omega_T,1,0,R)=\left\{ f\in L^2(0,T:L^2(\Omega(t))): f\in L^2(0,T:H^1(\Omega(t))),\ f_t\in L^2(0,T:H^0(\Omega(t))) \right.$$
$$\left. |f|^2_{L^2(0,T:H^1(\Omega(t)))}+|f_t|^2_{L^2(0,T:L^1(\Omega(t)))}\leq R \right\} \qquad (2.102)$$

A definição do conjunto $A(\Omega_T,1,0,R)$ pode ser mais geral, por exemplo, considerar conjuntos do tipo $A(\Omega_T,\alpha_1,\alpha_2)$, mas para nossos objetivos será suficiente. Por outro lado, versões mais gerais da próxima proposição podem ser obtidas com relativa facilidade.

Proposição 2.16. O conjunto $A(\Omega_T,1,0,R)$ e relativamente compacto em $L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))$.

Prova: Como o espaço $L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))$ é primeiro contável, a compacidade do conjunto $A(\Omega_T,1,0)$ será provada se mostramos que é seqüencialmente compacto. Seja $(f_n)_{n\in N}$ uma seqüência de funções em $A(\Omega_T, 1, 0, R)$. Conseqüência da regularidade do conjunto Γ_T, para cada $n \in \mathrm{N}$ podemos escolher uma família de cilindros interiores

$$A_n = \{\Omega_i \times [t_i, t_{i+1}] : i \in \{1,,, N_n\}\}$$

com as seguintes propriedades

$$a) \quad \bigcup_{i=1}^{N_n} [t_i, t_{i-1}] = [0, T], \quad t_i < t_{i-1} \quad \forall i \in \{1,,, \mathrm{N}_n\} \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

$$b) \quad \Omega(t) \supseteq \Omega_i \quad \forall t \in [t_i, t_{i-1}] \quad \forall i \in \{1,,, \mathrm{N}_n\} \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

$$c) \quad m(\Omega(t) \setminus \Omega_i) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathrm{N} \quad \forall t_i < t_{i+1} \quad e \quad \forall i \in \{1,,, \mathrm{N}_n\} \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

Definamos o espaço métrico

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{N_n} L^2(0, T : L^2(\Omega_i))$$

munido da norma

$$|f|_{B_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_i}^{t_{i-1}} |f|_{L(\Omega_i)}$$

e o conjunto

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{N_n} [t_i, t_{i+1}] \times L^2(\Omega_i)$$

Vamos provar que a seqüência $(f_n)_{n\in N}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço $L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))$, e pelo tanto convergente a uma função $f \in L^2(0,T:L^2(\Omega(t)))$. Para isto, consideramos as restrições da seqüência $(f_n)_{n\in N}$ nos conjuntos C_i. Pelo Teorema 2.15 a seqüência $(f_n)_{n\in N}\big|_{C_1}$, tem uma subseqüência convergente no sentido do espaço B_1, a uma função $f^1 \in B_1$ (observe que a inclusão $H^1(\Omega_i) \to L^2(\Omega_i)$ é compacta). Sem perda de generalidade podemos assumir que ,

$$|f_k - f_l|_{B_1} < 1 \quad \forall k,l \in N.$$

Reiterando a aplicação do Teorema 2.15, se deduz a existência de uma subseqüência $(f_n^2)_{n\in N}$ de $(f_n^1)_{n\in N}$ e à de uma função $f^2 \in B_2$ tal que

$$f_n^2 \to f^2 \quad \textit{fortemente em } B_2.$$

Como antes podemos assumir que

$$|f_k^2 - f_l^2|_{B_2} < \frac{1}{2} \quad \forall k,l \in N.$$

E claro dos argumentos anteriores que para cada $m \in N$ existe uma subseqüência $(f_n^m)_{n\in N}$ de $(f_n^{m-1})_{n\in N}$ e uma função $f^m \in B_m$ tal que

$$f_n^m \to f^m \quad \textit{fortemente em } B_m,$$

com

$$\left|f_k^m - f_l^m\right|_{B_m} < \frac{1}{m} \quad \forall k,l \geq m$$

Um processo usual de diagonalização permite mostrar a existência de uma subseqüência, que notaremos $\left(f_n^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, que possui a seguinte propriedade:

$$\left|f_n^n - f_k^k\right|_{B_n} < \frac{1}{n} \quad \forall \quad k > n \tag{2.103}$$

Afirmamos que a seqüência $\left(f_n^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma seqüência de Cauchy em $L^2\left(0,T : L^2(\Omega(t))\right)$ e pelo tanto é convergente a uma função $f \in L^2\left(0,T : L^2(\Omega(t))\right)$. De fato para $l > k > n$,

$$\int_0^T \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^2(\Omega(t))}^2 dt = \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^2(\Omega(t))}^2 dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^2(\Omega(t)\setminus\Omega_i)}^2 dt + \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}} \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^2(\Omega_i)}^2 dt$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^2(\Omega(t)\setminus\Omega_i)}^2 dt + \frac{1}{n}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^q(\Omega(t)\setminus\Omega_i)}^2 m(\Omega(t)\setminus\Omega_i)^{\frac{q-2}{q}} dt + \frac{1}{n}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q-2}{q}} \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^q(\Omega(t)\setminus\Omega_i)}^2 dt + \frac{1}{n}$$

$$\leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q-2}{q}} \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|f_k^k - f_l^l\right|_{L^q(\Omega(t))}^2 ds + \frac{1}{n}$$

$$\leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q-2}{q}} \sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} c_q^2 \left|f_k^k - f_l^l\right|_{H^1(\Omega(t))}^2 ds + \frac{1}{n}$$

$$\leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q-2}{q}} c(1,q,n)R^2 + \frac{1}{n}$$

Nesta seqüência de desigualdades usamos a hipóteses H_1 com $p = 2$, $m = 1$, e onde $\frac{q-2}{q}$ é o conjugado do número $\frac{q}{2}$. Resumindo as desigualdades anteriores temos

$$\int_0^T \left| f_k^k - f_l^l \right|_{L^2(\Omega(t))}^2 ds \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{q-2}{q}} c(1,q,n) R^2 + \frac{1}{n}, \quad \forall l > k > n$$

o que prova, finalmente, que a seqüência $\left(f_n^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e consequentemente é uma subseqüência convergente da seqüência $\left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço $L^2\left(0,T; L^2(\Omega(t))\right)$. A prova da proposição esta concluída. ■

A prova do próximo corolário é simples, pelo que a omitiremos. Observamos que este resultado será usado, salvo modificações óbvias, no Capítulo 3 onde se estabelece a existência de soluções para o sistema diferencial de Oldroyd.

Corolário 2.17. O conjunto

$$A(\Omega_T 3,1,R) = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2\left(0,T : L^2(\Omega(t))\right) : f \in L^2\left(0,T : H^3(\Omega(t))\right), \ f_t \in L^2\left(0,T : H^1(\Omega(t))\right) \\ \hfill \left| f \right|_{L^2(0,T:H^3(\Omega(t)))}^2 + \left| f_t \right|_{L^2(0,T:H^1(\Omega(t)))}^2 \leq R \end{array} \right\}$$

é relativamente compacto em $L^2\left(0,T; H^1(\Omega(t))\right)$.

No que segue desta seção usaremos as notações introduzidas na definição (2.7) e indicaremos por c_i diversas constantes positivas que não dependem de $t \in [0,T]$. Podemos agora enunciar o seguinte resultado, o principal deste capítulo:

Teorema 2.18. Seja T>0. Existe uma vizinhança W da identidade em

$$C_T = \left\{ \varphi \in C^3([0,T]\times\Omega) : \varphi \quad é \quad difeomorfismo \right\}$$

tal que se $\varphi \in W$ cumpre que

$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x),,, \varphi_n(t,x), t)$$

e

$$Det\left(\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(t,x)}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}\right) = \gamma(t) \quad em \quad \Omega(t) \quad \forall \quad t \in [0,T],$$

então para todo $f \in X_T(\varphi)$ existe $0 < T_1 < T$ e $(u,p) \in W_{T_1}(\varphi)$, solução do problema de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \quad & em \quad \Omega_{T_1}(\varphi) \\ div(u) = 0 \quad & em \quad \Omega_{T_1}(\varphi) \\ u = 0 \quad & em \quad \Gamma \\ u(0) = 0 \quad & em \quad \Omega(0) \end{aligned} \tag{2.104}$$

Prova: Escolhamos $\varphi \in V_2$, aqui V_2 é a vizinhança especificada no Corolário 2.7 cumprindo as propriedades (2.83)-(2.85). Para $R > 0$ introduzimos o seguinte o conjunto

$$W_{1,T}(\varphi, R) = \left\{ \quad u \in L^2(0,T : H^3(\Omega(t))) : |u|^2_{W_{1,T}} \leq R \quad \right\}$$

onde

$$|u|^2_{W_{1,T}(\varphi)} = |u|^2_{L^2(0,T:H^3(\Omega(t)))\cap L^\infty(0,T:D(A(t)))} + |u_t|^2_{L^2(0,T:D(A(t)))\cap L^\infty(0,T:V(\Omega(t)))} + |u_{tt}|^2_{L^2(0,T:H(\Omega(t)))}$$

Definamos a função

$$\begin{aligned} \mathrm{G}: W_{1,T}(\varphi,R) \subset L^2\left(0,T:H_0^1(\Omega(t))\right) &\to L^2\left(0,T:H_0^1(\Omega(t))\right) \\ \overline{u} \to \mathrm{G}(\overline{u}) &= u \end{aligned}$$

onde u é a única solução do problema de Stokes,

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + \nabla p = f - (\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u} && em \quad \Omega_T(\varphi) \\ &div(u) = 0 && em \quad \Omega_T(\varphi) \\ &u = 0 && em \quad \Gamma_T(\varphi) \\ &u(0) = 0 && em \quad \Omega(0) \end{aligned} \tag{2.105}$$

A existência e unicidade das soluções para a equação de Stokes (2.105) foi estabelecida na Teorema 2.11 e no Lema 2.14 pois $(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u} \in X_T(\varphi)$ para todo $\overline{u} \in W_T(\varphi)$.

O Teorema estará provado se mostramos que G tem ponto fixo. Para isto mostraremos que G cumpre as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Schauder, o que será feito por etapas

i) Vejamos primeiramente que existe $0 < T_1 < T$ tal que $\mathrm{G}\left(W_{1,T_1}(\varphi,R)\right) \subset W_{1,T_1}(\varphi,R)$.

Observe que, pela Teorema 2.11, existe $c_1(\varphi) > 0$ tal que

$$|u|^2_{W_{1,T}(\varphi)} \le c_1(\varphi)\left|f + (\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}\right|^2_{X_T(\varphi)}$$

Portanto, temos

$$|u|^2_{W_{1,T}(\varphi)} \leq 2c_1(\varphi)|f|^2_{X_T(\varphi)} + 2c_1(\varphi)|(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2_{X_T(\varphi)} \tag{2.106}$$

Estudemos o último termo da direita na desigualdade (2.106). Usando diretamente a definição da norma do espaço $X_T(\varphi)$ e as inclusões de Sobolev temos que

$$\begin{aligned}
|(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2_{X_T(\varphi)} &= \int_0^T |(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2_{1,s}\,ds + \int_0^T |((\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u})_s|^2\,ds \\
&\leq \int_0^T \left\{ |(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2 + |\nabla((\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u})|^2 \right\} ds + 2\int_0^T \left\{ |((\overline{u}_s\cdot\nabla)\overline{u})|^2 + |((\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}_s)|^2 \right\} ds \\
&\leq \int_0^T \left\{ |\overline{u}|^2_{L^\infty(\Omega(s))}|\nabla\overline{u}|^2_{L^2(\Omega(s))} + c_2\left\{ |\nabla\overline{u}|^4_{L^4(\Omega(s))} + |\overline{u}|^2_{L^\infty(\Omega(s))}|\overline{u}|^2_{2,s} \right\}\right\} ds \\
&\leq +2\int_0^T |\overline{u}_s|^2_{L^4(\Omega(s))}|\nabla\overline{u}|^2_{L^4(\Omega(s))} + |\overline{u}|^2_{L^\infty(\Omega(s))}|\nabla\overline{u}_s|^2\,ds \\
&\leq \int_0^T c_3|\overline{u}|^4_{2,s}\,ds + \int_0^T c_4|\overline{u}_s|^2_{1,s}|\overline{u}|^2_{2,s} + c_5|\overline{u}|^2_{2,s}|\nabla\overline{u}_s|^2_{1,s}\,ds \\
&\leq c_6T\Big\{ |\overline{u}|^4_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega(t)))} + |\overline{u}_s|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega(t)))}|\overline{u}|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega(t)))} \\
&\qquad\qquad + |u|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega(t)))}|\nabla\overline{u}_s|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega(t)))} \Big\} \\
&\leq c_7TR^2 .
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$|(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2_{X(T,\varphi)} \leq c_7R^2T . \tag{2.107}$$

Voltando com a desigualdade (2.106) teremos que

$$|u|^2_{W_1(T,\varphi)} \leq 2c_1(\varphi)|f| + 2c_4 R^2 T.$$

Como a força externa é fixa, podemos escolher $T_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $|u|^2_{W_{1,T_1}(\varphi)} \leq R$ o que prova a afirmação (i).

(ii) Fazendo uso do Corolário 2.17 facilmente se estabelece que o conjunto $W_{1,T_1}(\varphi, R)$ e relativamente compacto no espaço $L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))$.

(iii) Passamos agora a mostrar que G é uma função continua.

Para isto, sejam $(\overline{u}_n)_{\in N}$ uma seqüência em $W_{1,T_1}(\varphi,R)$ e $\overline{u} \in W_{1,T_1}(\varphi,R)$ tais que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ fortemente em $L^2(0,T:H^1_0(\Omega(t)))$. Combinando as afirmações (i)-(ii) e a Proposição 2.16, podemos assumir, passando a subseqüências se for necessário, a existência de uma função $v \in L^2(0,T_1:H^1_0(\Omega(t))) \cap W_{1,T_1}(\varphi,R)$ tal que

$$\mathrm{G}(\overline{u}_n) = u_n \to v \quad \textit{fortemente em} \quad L^2(0,T:H^1_0(\Omega(t))), \tag{2.108}$$

$$u_n \to v \quad \textit{fracamente em} \quad L^2(0,T:H^2(\Omega(t))), \tag{2.109}$$

$$u_{nt} \to v_t \quad \textit{fortemente em} \quad L^2(0,T:H(\Omega(t))). \tag{2.110}$$

Na última desigualdade hemos usado a Proposição 2.16 na seqüência $(u_{nt})_{n\in N}$. Seja $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_T(\varphi))$ tal que $div(\Psi) = 0$ em $\Omega_T(\varphi)$. Pela definição da função G temos que

$$\int_0^T (u_{ns},\psi)ds - \int_0^T (\nabla u_n, \nabla\psi)ds = \int_0^T (f + (\overline{u}_n\cdot\nabla)\overline{u}_n, \psi)ds. \tag{2.111}$$

Logo, fazendo $n \to \infty$ na equação anterior, teremos que

$$\int_0^T (v_s, \psi) ds - \int_0^T (\nabla v, \nabla \psi) ds = \int_0^T (f + (\overline{u} \cdot \nabla)\overline{u}, \psi) ds$$

Equivalentemente, temos

$$\int_0^T (v_s, \psi) ds - \int_0^T (\Delta v, \psi) ds = \int_0^T (f + (\overline{u} \cdot \nabla)\overline{u}, \psi) ds.$$

Como ψ é uma função arbitraria de divergente nulo, podemos concluir que

$$P(t)(v_t - \Delta v - f + (\overline{u} \cdot \nabla)\overline{u}) = 0 \qquad em \;\; \Omega_T(\varphi) \tag{2.112}$$

Segundo (2.112) a função v será a solução do problema de Stokes (2.105), se provamos que $v(0) = 0$ em $\Omega(0)$. Para isto, fixemos um aberto regular $\Lambda \subset \Omega(0)$ e $\delta_\Lambda > 0$ tal que $\Lambda \times [0, \delta_\Lambda] \subset \Omega_T(\varphi)$. Resulta claro que as convergências (2.108) e (2.110) ainda são validas no domínio cilíndrico $\Lambda \times [0, \delta_\Lambda]$. Assim, de (2.108) podemos inferir que salvo num subconjunto de medida nula de $[0, \delta_\Lambda]$

$$v_n(t) \to v(t) \quad \text{fortemente em } L^2(\Lambda).$$

Usando agora a representação

$$u_n(t) - v(t) = \int_0^t (u_{n_s} - v_s) ds + u_n(0) - v(0),$$

podemos deduzir que $v_n(0) \to v(0)$ fortemente no sentido de $L^2(\Lambda)$, de onde concluímos que $u = 0$ em Λ. Pela arbitrariedade do conjunto Λ temos que $v(0) = 0$ em $\Omega(0)$.

Dos argumentos anteriores podemos concluir que a função v é a solução do problema de Stokes (2.105), pelo que $G(\bar{u}) = v = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} G(\bar{u}_n)$ (o limite no sentido de $L^2(0,T : H_0^1(\Omega(t)))$), o que prova a continuidade da função G em relação com o espaço $L^2(0,T : H_0^1(\Omega(t)))$.

(iv) Finalmente do desenvolvimento anterior temos que a função G cumpre as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Schauder, o que permite estabelecer a existência de soluções para o problema de evolução de Navier Stokes. Isto completa a prova do Teorema. ■

2.4. Comentários Suplementares

Não podemos encerrar este capítulo sem antes comentar a respeito da possibilidade de utilizar outras técnicas para obter um resultado de existência de soluções regulares para o problema de evolução de Stokes em domínios não cilíndricos. Cremos ser importante fazer tais comentários pois, entre outras coisas, isto nos permitirá destacar onde estão as verdadeiras dificuldades técnicas do problema considerado. Destacaremos três técnicas especificas, usadas respectivamente nos trabalhos de Fujita & Sauer [15], Miyakawa & Teramoto [31], e Salvi [43] observando que nestes trabalhos é o problema de evolução de Navier Stokes que é realmente estudado. Entretanto, as dificuldades técnicas envolvidas em problemas de fronteira móvel já aparecem no problema de Stokes. Assim no que segue, por facilidade de exposição, nos referimos apenas a esta situação linearizada.

a) Comentários sobre a técnica empregada em Fujita & Sauer [13].

Em Fujita & Sauer [13], os autores apresentam um resultado de existência de soluções fracas, fracas num sentido especificado no artigo, usando o método da penalização. Descrevemos brevemente as idéias empregadas pêlos autores.

Notemos por Ω_T um domínio no cilíndrico, com fronteira regular Γ_T, e por Ω um aberto limitado de IR^n tal que $\Omega_T \subset\subset \Omega \times [0,T]$. Sejam $u_0 \in V(\Omega(0))$ e $f : \Omega \times [0,T] \to IR^n$ suficientemente regular. Se $\{w_i : i \in N\}$ é uma base ortonormal de $H(\Omega)$, constituída pelas autofunções do operador de Stokes $A(\Omega)$, para cada $n \in N$ consideramos os sistemas de equações seguintes:

$$\left(u_t^n, w_i\right)_\Omega + \left(\nabla u_n, \nabla w_i\right)_\Omega + n\chi_{E(t)}\left(u_n, w_i\right)_\Omega = \left(f, w_i\right)_\Omega \qquad 1 \le i \le n \tag{2.113}$$
$$u^n(0) = u_{n,0}$$

onde $u_{n,0} \to \widetilde{u}_0$ forte em $V(\Omega)$. Na expressão anterior $\widetilde{u}_0 \in V(\Omega)$ é uma extensão de u_0 e $\chi_{E(t)}$ é a função característica do conjunto $E(t) = \Omega \setminus \Omega(t)$. A existência e unicidade de soluções para o sistema (2.107) é fácil de ser provada. Mais ainda, um procedimento usual permite estabelecer as limitações e convergências seguintes:

$$n^{\frac{1}{2}} u^n \text{ é limitada em } L^2\left(0,T : L^2(\Omega)\right), \tag{2.114}$$

$$u^n \text{ é limitada em } L^2\left(0,T : V(\Omega)\right), \tag{2.115}$$

$$u^n \to 0 \quad \textit{forte em} \quad L^2(E). \tag{2.116}$$

onde na última expressão $E = \bigcup_{t \in [0,T]} E(t)$. Por (2.115) vemos que existe $u \in L(0,T : V(\Omega))$ tal que $u^n \to u$ fracamente em $L^2(0,T : V(\Omega))$. Nas condições anteriores Fujita & Sauer provam, usando principalmente a regularidade da fronteira lateral do dominio Ω_T e a convergência (2.116), que $u \in L^2(0,T : V(\Omega(t)))$ e que também

$$\int_0^T (u,\psi_t)_{\Omega(t)} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla\psi)_{\Omega(t)} = \int_0^T (f,\psi_t)_{\Omega(t)} dt + (u(0),\psi(0)) \qquad (2.117)$$

$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ com $div(\psi)=0$ em Ω_T. A função u, por cumprir (2.117) é a solução fraca, no sentido de Fujita & Sauer do problema de Evolução de Stokes. É claro também que uma solução forte do problema de Stokes é de fato uma solução fraca no sentido da identidade (2.117).

Obter alguma propriedade de regularidade espacial suplementar para a solução u, pelo método descrito, passa necessariamente pela obtenção de estimativas em normas de Sobolev mais altas para a função u_t. Aqui está a grande dificuldade deste método, pois estimativas *a priori* para u_t, requerem ter um apropriado controle sobre expressões do tipo $n\chi_{E(t)}(u^n, u_t^n)$ ou $\frac{\partial}{\partial t}(n\chi_{E(t)}(u_t^n, w_i))$, o que evidentemente é uma dificuldade importante, pela penalização presente na primeira expressão e pela "forte" discontinuidade que apresenta a função $n\chi_{E(t)}$ na segunda. Observe que se melhoramos a regularidade tanto da condição inicial como a da força externa e, mais ainda, se no lugar das funções $n\chi_{E(t)}$ usamos funções mais regulares, as dificuldades permanecem, pois são deficiências intrinsecas da técnica usada.

b) Comentários sobre a técnica empregada em Miyakawa & Teramoto [30].

Neste trabalho os autores também apresentam um resultado de existência de soluções fracas para o problema de Navier Stokes. A idéia básica do trabalho é a de transformar o problema de Navier Stokes num novo problema cilíndrico. Um elemento básico, e de fato chave neste trabalho, é o de usar uma transformação apropriada que tenha como principal propriedade a de preservar o divergente nulo das funções. O anterior permite, por exemplo, continuar trabalhando com espaços de funções conhecidos (essencialmente $H(\Omega)$ e $V(\Omega)$ não acrescentando, pelo menos neste sentido as dificuldades técnicas do novo problema cilindrico a ser estudado

Em relação com o nosso trabalho, a maior dificuldade é conseqüência da grande complexidade da equação obtida ao derivar respeito do tempo a equação de Stokes transformada.

c) Comentários sobre a técnica empregada em Salvi [44]

A técnica usada por Salvi [44] a nosso ver pode ser a mais apropriada para provar a existência de soluções suficientemente regulares do problema de Navier Stokes, pelo menos num tipo particular de domínios não cilíndricos. Naquele trabalho, o autor, usando uma generalização do Lema de Lax Milgran e o Método de Variações, prova a existência de soluções fortes para o problema de Navier-Stokes. Resumimos a seguir brevemente os principais argumentos usados pelo autor.

Definamos inicialmente os espaços

$$F = \{\varphi : \varphi \in L^2(0,T : H^2(\Omega(t)) \cap V(t)), \text{com a norma natural}, \|\cdot\|_F \}$$

e

$$\Phi = \{\varphi : \varphi \in F, \partial_t \varphi \in F \quad \text{e} \quad \varphi(T) = 0\},$$

munido da norma $\|\varphi\| = \|\varphi\|_F + \|\varphi(0)\|_{\Omega(0)}$.

Salvi introduz o seguinte problema:

Achar $v \in F$ tal que para todo $\varphi \in \Phi$

$$\int_0^T \{-(v, A\partial_t \varphi)_{\Omega(t)} + (Av, A\varphi)_{\Omega(t)} + k(v, A\varphi)_{\Omega(t)}\} dt = \int_0^T e^{-kt}(f, A\varphi)_{\Omega(t)} dt + (v_0, A\varphi(0))_{\Omega(0)}$$

(2.118)

Na expressão anterior k, é uma constante positiva, a ser escolhida. Usando a notação

$$E(v,\varphi)=\int_0^T -\left(v,\partial_t A\varphi\right)_{\Omega(t)}+\left(Av,A\varphi\right)_{\Omega(t)}+k\left(v,A\partial\varphi\right)_{\Omega(t)}dt \tag{2.119}$$

$$L(\varphi)=\int_0^T e^{-kt}\left(P(t)f,A\varphi\right)_{\Omega(t)}dt+\left(v_0,A\varphi(0)\right)_{\Omega(0)} \tag{2.120}$$

o autor prova a coercividade do operador $E(\cdot)$ no espaço Φ, isto é, ele prova a existência de $c > 0$ tal que

$$E(\varphi,\varphi)\geq c\|\varphi\|^2 \quad \forall\varphi\in\Phi$$

Assim, usando uma versão mais geral do clássico Lema de Lax Milgran, veja Treves [50] pag 208, estabelece a existência de $v\in F$ tal que (2.118) é satisfeita para todo $\varphi\in\Phi$. Usando a possibilidade de representar funções em $L^2(0,T:H(\Omega(t)))$ por meio do operador $A(\varphi)$, presente na definição dos operadores E e Φ, mais alguns argumentos de densidade Salvi, conclui que

$$\int_0^T\left\{-\left(v,h_t\right)_{\Omega(t)}+\left(Av,h\right)_{\Omega(t)}+k\left(v,h\right)_{\Omega(t)}\right\}dt=\int_0^T e^{-kt}\left(f,h\right)_{\Omega(t)}dt$$

para todo $h\in L^2(0,T:H(\Omega(t)))$, de onde e possível deduzir que

$$P(t)\left(v_t-\Delta v+kv-e^{-kt}-f\right)=0 \quad q.t.p \quad em \quad \Omega_T$$

Usando a identidade anterior y logo de mostrar que $u = e^{kt} v \in L^2(\Omega_T)$, Salvi prova que a função $u = e^{kt} v$ é a solução forte do problema de Evolução de Stokes, com velocidade inicial $u_0 \in D(A(0))$ e força externa f.

Uma idéia bastante razoável para adaptar os argumentos de Salvi ao nosso caso é a de modificar os espaços funcionais e os operadores por ele introduzidos, procurando melhorar a regularidade da velocidade u. Assim, podemos pensar, por exemplo, nos espaços e operadores seguintes:

$$F = \{\varphi : \varphi \in L^2\left(0,T : H^3(\Omega(t)) \cap V(t)\right) \cap L^\infty\left(0,T : D(A(t))\right), \text{com a norma natural}, \|\cdot\|_F\}$$

$$\Phi = \{\varphi : \varphi \in F, \partial_t \varphi \in F \quad \text{e} \quad \varphi(T) = 0\}$$

$$E(v,\varphi) = \int_0^T -\left(v, \partial_t A\varphi\right)_{1,\Omega(t)} + \left(Av, A\varphi\right)_{1,\Omega(t)} + k\left(v, A\partial_t\varphi\right)_{1,\Omega(t)} - k\left(\nabla v \cdot \eta,, A\partial_t\varphi\right)_{\partial\Omega(t)} + \left(\nabla v \cdot \eta, A\partial_t\varphi\right)_{\partial\Omega}$$

$$L(\varphi) = \int_0^T e^{-kt}\left(P(t)f, A\varphi\right)_{1,\Omega(t)} dt + \left(v_0, A\varphi(0)\right)_{1,\Omega(0)}$$

Os diferentes argumentos técnicos usados por Salvi, podem ser estabelecidos novamente, provando a existência de $v \in L^2\left(0,T : H^3(\Omega(t))\right)$ tal que

$$\int_0^T \left\{-\left(v, A\partial_t\varphi\right)_{1,\Omega(t)} + \left(Av, A\varphi\right)_{1,\Omega(t)} + k\left(v, A\varphi\right)_{1,\Omega(t)} + \left(\nabla v \cdot \eta, \partial_t A\varphi\right)_{\Gamma(t)} - k\left(\nabla v \cdot \eta, A\varphi\right)_{\Gamma(t)}\right\} dt$$
$$= \int_0^T e^{-kt}\left(P\left((\overline{u} \cdot \nabla)\overline{u} + f\right), A\varphi\right)_{1,\Omega(t)} dt + \left(v_0, A\varphi(0)\right)_{1,\Omega(0)} \qquad (2.121)$$

Porém, uma pergunta básica e que até agora não temos podido responder positiva ou negativamente é a seguinte: Que relação há entre função v e a solução do problema de Stokes em Ω_T, com velocidade inicial $u_0 \in D(A(0))$ e força externa f? Em outras palavras, é a solução de (2.121) é realmente solução do problema original de Stokes ?

CAPÍTULO 3

Existência de Soluções para Fluidos Viscoelásticos do Tipo Oldroyd em Domínios Não Cilíndricos.

Neste capitulo apresentaremos um resultado de existência local de soluções para as equações que governam a dinâmica de fluidos viscoelasticos do tipo Oldroyd em domínios de fronteira móvel (domínios não cilíndricos).

Lembramos que os principais antecedentes do problema, isto é, a formulação da equação, bem como resultados de existência e unicidade de soluções locais e soluções globais, no caso em que o parâmetro α é pequeno e o domínio é de fronteira fixa, foram descritos na Seção 1 do Capítulo 1.

3.1 O Planejamento do Problema e as Equações Linearizadas.

Estamos interessados na existência de soluções fortes para o sistema de equações diferenciais parciais que governam a dinâmica de um fluido viscoelastico de tipo Oldroyd:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(1-\alpha)\Delta u+\nabla p=f+(u\cdot\nabla)u+\nabla\cdot\tau \qquad \text{em } \Omega_T(\varphi) \tag{3.1}$$

$$div(u)=0 \qquad \text{em } \Omega_T(\varphi) \tag{3.2}$$

$$u=0 \qquad \text{em } \Gamma_T(\varphi) \tag{3.3}$$

$$We\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}+(u\cdot\nabla)\tau+g_a(\tau:\nabla u)\right)+\tau=2\alpha D[u] \qquad \text{em } \Omega_T(\varphi) \tag{3.4}$$

$$u(0)=u_0 \quad e \quad \tau(0)=\tau_0 \qquad \text{em } \Omega(0) \tag{3.5}$$

Como sempre, assumiremos que estas equações valem num domínio não cilíndrico do tipo $\Omega_T(\varphi)$ satisfazendo as Hipóteses (2.83)-(2.85) apresentadas na Seção 2 do Capítulo 2.

Para provar a existência de soluções para o sistema (3.1)-(3.5), usaremos o clássico Teorema de Ponto Fixo de Schauder, pelo que consideraremos previamente dois problemas linearizados associados às equações anteriores.

O primeiro destes problemas é aquele já estudado no Capitulo 2., Especificamente, na Teorema 2.11 apresentamos um resultado de existência de soluções para o problema de Stokes em domínios do tipo $\Omega_T(\varphi)$. Lembremos que naquele resultado também foram obtidas estimativas *a priori* que serão utilizadas no presente capítulo para o estudo do modelo de Oldroyd.

A próxima seção tem como objetivo estudar o segundo problema auxiliar, o qual corresponderá a uma versão linearizada da equação de transporte (3.4).

Durante todo este capítulo usaremos a notação c_i para indicar diferentes constantes positivas independentes do tempo.

3.2 A Equação de Transporte

Estabelecemos a seguir um resultado de existência de soluções, para uma versão linearizada da equação de transporte (3.4). No próximo resultado e mantendo as notações ate agora introduzidas neste trabalho, $\Omega_T(\varphi)$ será um Domínio não cilíndrico da forma

$$\Omega_T(\varphi) = \bigcup_{t\in[0,T]} \Omega(t) \quad \text{onde} \quad \varphi(t,\Omega) = \Omega(t)\times\{t\}$$

onde φ é um difeomorfismo de classe C^3.

A prova da próxima proposição precisa do seguinte lema técnico:

Lema 3.1. Sejam X, B e Y espaços de Banach. Suponha que $X \subset B \subset Y$, onde a primeira inclusão é compacta e a segunda é continua. Então a inclusão do espaço $L^{\infty}(0,T;X) \cap \left\{\phi;\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^{q}(0,T;Y)\right\}$ para $q>1$, no espaço $C([0,T];B)$ é compacta.

A prova do Lema 3.1 pode ser achada em Simon [45], Corolário 4 página 85.

Proposição 3.2 Sejam $\tau_0 \in H^2(\Omega(0))$ e $\bar{u} \in L^1(0,T;H^3(\Omega(t)) \cap D(A(\Omega(t))))$. Então o problema

$$We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\bar{u}\cdot\nabla)\tau + g_a(\tau:\nabla\bar{u})\right) + \tau = 2\alpha D[\bar{u}] \qquad em\ \Omega_T(\varphi) \tag{3.6}$$

$$\tau(0) = \tau_0 \qquad em\ \Omega(0) \tag{3.7}$$

tem uma solução $\tau \in L^{\infty}(0,T:H^2(\Omega(t)))$, com $\tau' \in L^{\infty}(0,T;H^1(\Omega(t)))$. Mais ainda, existem constantes positivas C_0, c_0, independentes de $t \in [0,T]$ tais que

$$|\tau|_{L^{\infty}(0,T:H^2(\Omega(t)))} \le C_0\left(c_0|\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)\exp\left(C_0 c_0 |\tau|_{L^1(0,T:H^3(\Omega(t)))}\right), \tag{3.8}$$

e

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|_{L^{\infty}(0,T:H^1(\Omega(t)))} \le C_0\left(c_0|\bar{u}|_{L^{\infty}(0,T:H^2(\Omega(t)))}\right)\left(c_0|\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)\exp\left(C_0 c_0 |\bar{u}|_{L^1(0,T:H^3(\Omega(t)))}\right) \tag{3.9}$$

Prova: Sejam Λ um aberto regular de IR^n e $\delta > 0$ tais que

$$V_\delta(\Omega(t)) \subset \Lambda \quad \forall t \in [0,T]$$

onde $V_\delta(\Lambda)$ é a vizinhança de raio $\delta > 0$ do aberto $\Omega(t)$. Segundo o Lema 3.3 existe um extensão $E: L^2(0,T:H^i(\Omega(t))) \to L^2(0,T:H^i(\Lambda))$ e $c_0 = c_0(\varphi,\Omega) > 0$ tal que

$$E(w)(t)\big|_{\Omega(t)} = E(t)(w)(t)\big|_{\Omega(t)} = w(t), \tag{3.10}$$

satisfazendo

$$|E(w)(t)|_{H^i(\Lambda)} \leq |E(t)(w)(t)|_{H^i(\Lambda)} \leq c_0(\varphi,\Omega)|(w)(t)|_{H^i(\Omega(t))}, \tag{3.11}$$

para todo $w \in L^2(0,T : H^i(\Omega(t)))$, $i \in \{1,2,3\}$ e todo $t \in [0,T]$.

Fixemos $\overline{\tau}_0 \in H^2(\Lambda)$ tal que $\overline{\tau}_0\big|_{\Omega(0)} = \tau_0$. Sem perda de generalidade, assumiremos que

$$|\overline{\tau}_0|_{H^2(\Lambda)} \leq c_0|\tau_0|_{H^2(\Omega(0))}. \tag{3.12}$$

Sejam agora $(v_n)_{n\in N}$ e $(\overline{\tau}_{0,n})_{n\in N}$ seqüências em $C^1([0,T];C^3(\overline{\Lambda}))$ e $C^3(\overline{\Lambda})$ respectivamente, tais que

$$\overline{v}_n \to E(\overline{u}) \qquad \text{fortemente em} \quad L^2(0,T : H^3(\Lambda)\cap H_0^1(\Lambda)) \tag{3.13}$$

$$\overline{\tau}_{0,n} \to \overline{\tau}_0 \qquad \text{fortemente em} \quad H^2(\Lambda) \tag{3.14}$$

Usando o método das características, (veja Observação 3.1 a seguir), concluímos que existe uma seqüência de funções $(\tau_n)_{n\in N}$ em $C^1([0,T];C^3(\overline{\Lambda}))$ tais que para cada $n \in N$, τ_n é a única solução do problema diferencial:

$$We\left(\frac{\partial \tau_n}{\partial t} + (v_n \cdot \nabla)\tau_n + g_a(\tau_n : \nabla v_n)\right) + \tau_n = 2\alpha D[v_n] \quad \text{em } \Lambda\times[0,T], \tag{3.15}$$

$$\tau_n(0) = \overline{\tau}_{0,n} \qquad \text{em } \Lambda.$$

Aplicando á esta última equação o operador ∇^i (i-ésimo iterado do operador gradiente ∇) para $i = 1,2,3$, e multiplicando o resultado no sentido de L^2 por $\nabla^i\tau_n$ temos que

$$We\left(\left(\nabla^i \frac{\partial \tau_n}{\partial t}, \nabla^i \tau_n\right) + \left(\nabla^i((v_n\cdot\nabla)\tau_n), \nabla^i\tau_n\right) + \left(\nabla^i g_a(\tau_n,\nabla v_n), \nabla^i \tau_n\right)\right)$$
$$+\left(\nabla^i\tau_n,\nabla^i\tau_n\right) = 2\alpha\left(\nabla^i D(v_n), \nabla^i\tau_n\right).$$

Somando agora em i, para $i\in\{1,2,3\}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}We\frac{d}{dt}|\tau_n|_2^2+|\tau_n|_2^2 = -We\{ &\left((v_n\cdot\nabla)\tau_n,\tau_n\right)-\left(\nabla^1((v_n\cdot\nabla)\tau_n),\nabla^1\tau_n\right)-\\ &\left(\nabla^2((v_n\cdot\nabla)\tau_n),\nabla^2\tau_n\right)-\left(g_a(\tau_n,\nabla v_n),\tau_n\right)-\left(\nabla^1 g_a(\tau_n,\nabla v_n),\nabla^1\tau_n\right) \qquad (3.16)\\ &-\left(\nabla^2 g_a(\tau_n,\nabla v_n),\nabla^2\tau_n\right)\}+2\alpha\left(D(v_n),\tau_n\right)+2\alpha\left(\nabla^1 D(v_n),\nabla^1\tau_n\right)\\ &+2\alpha\left(\nabla^2 D(v_n),\nabla^2\tau_n\right).\end{aligned}$$

Usando integração por partes e lembrando que $H^3(\Lambda)\subset C^1(\Lambda)$, com imersão continua, temos que existe $c_1=c_1(\varphi,\Lambda)>0$, independente de $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}\left|\left(\nabla^2((v_n\cdot\nabla)\tau_n),\nabla^2\tau_n\right)\right| &\le c_1'|\nabla v_n|_{L^\infty(\Lambda)}\left|\nabla^2(\tau_n)\right|^2,\\ \left|\left(\nabla^2((v_n\cdot\nabla)\tau_n),\nabla^2\tau_n\right)\right| &\le c_1|v_n|_3|\tau_n|_2^2.\end{aligned} \qquad (3.17)$$

Voltando para a equação (3.16) e usando basicamente as imersões de Sobolev, se deduz a existência de constantes $c_i=c_i(\Lambda,\varphi)>0$, i=2,3,,,, tais que

$$\frac{1}{2}We\frac{d}{dt}|\tau_n|_2^2+|\tau_n|_2^2\le c_2|v_n|_{2,\Lambda}|\tau_n|_2^2+c_3|v_n|_{2,\Lambda}|\tau_n|_2^2+c_4|v_n|_3|\tau_n|_2^2+c_5|v_n||\tau_n|_2^2+c_6|v_n|_{2,\Lambda}|\tau_n|_{2,\Lambda}^2$$
$$+c_7|v_n|_{3,\Lambda}|\tau_n|_{2,\Lambda}^2+2\alpha|v_n|_{3,\Lambda}|\tau_n|_{2,\Lambda}. \qquad (3.18)$$

Assim, desta última desigualdade, podemos afirmar que existe uma constante positiva $C_0=C_0(\varphi,\Lambda)$>0 tal que

$$\frac{d}{dt}|\tau_n|_{2,\Lambda}^2+\frac{2}{We}|\tau_n|_{2,\Lambda}^2\le C_0|v_n|_{3,\Lambda}|\tau_n|_{2,\Lambda}^2+\frac{4\alpha}{We}|v_n|_{3,\Lambda}|\tau_n|_{2,\Lambda}. \qquad (3.19)$$

Logo

$$\frac{d}{dt}|\tau_n|_{2,\Lambda}^2 + \frac{2}{We}|\tau_n|_{2,\Lambda}^2 \leq C_0|v_n|_{3,\Lambda}\left(|\tau_n|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)|\tau_n|_{2,\Lambda}$$

pelo que

$$2|\tau_n|_{2,\Lambda}\frac{d}{dt}|\tau_n|_{2,\Lambda} \leq C_0|v_n|_{3,\Lambda}\left(|\tau_n|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)|\tau_n|_{2,\Lambda}$$

e então

$$\frac{d}{dt}\left(|\tau_n|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right) \leq C_0|v_n|_{3,\Lambda}\left(|\tau_n|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right). \tag{3.20}$$

Integrando a última desigualdade entre 0 e t, para $t \in [0,T]$ e usando a desigualdade de Gronwall-Bellman, temos que

$$\left(|\tau_n(t)|_2 + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right) \leq \left(|\bar{\tau}_{0,n}|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right) + C_0\int_0^t |v_n|_{3,\Lambda}\left(|\tau_n|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)ds,$$

$$\left(|\tau_n(t)|_2 + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right) \leq \left(|\bar{\tau}_{0,n}|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)\exp\left(C_0\int_0^T |v_n|_{3,\Lambda}\, ds\right). \tag{3.21}$$

Podemos então concluir que $\tau_n \in L^\infty(0,T : H^2(\Omega(t)))$ e que

$$|\tau_n|_{L^\infty(0,T:H^2(\Lambda))} \leq \left(|\bar{\tau}_{0,n}|_{2,\Lambda} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)\exp\left(C_0\int_0^T |v_n|_{3,\Lambda}\, ds\right) \tag{3.22}$$

para todo $n \in \mathrm{N}$.

Em relação com τ_{nt}, vemos diretamente da equação 3.15 que

$$\tau_{nt} = \frac{1}{We}\left(2\alpha D(v_n) - \tau_n\right) - \left((v_n \cdot \nabla)\tau_n - g_a(\tau_n, \nabla v_n)\right).$$

Logo, usando outra vez as inclusões de Sobolev, temos que existe $C_1 > 0$ independente de de $t \in [0,T]$ tal que

$$\left|\tau_{nt}(t)\right|_{1,\Lambda} \leq \left\{\frac{1}{We}\left(2\alpha\left|v_n\right|_{2,\Lambda} + \left|\tau_n\right|_{1,\Lambda}\right) + C_1\left|v_n\right|_{2,\Lambda}\left|\tau_n\right|_{2,\Lambda}\right\}.$$

Assumindo que $C_0 > C_1$, onde C_0 é a constante na desigualdade (3.22) e voltando com as desigualdades anteriores, temos que

$$\begin{aligned}\left|\tau_{nt}(t)\right|_{1,\Lambda} &\leq \left\{\frac{1}{We}\left(2\alpha\left|v_n\right|_{2,\Lambda} + \left|\tau_n\right|_{1,\Lambda}\right) + C_0\left|v_n\right|\left|\tau_n\right|_2\right\} \\ &\leq C_0\left(\left|v_n\right|_{L^\infty(0,T:H^2(\Omega(t)))} + \frac{1}{C_0 We}\right)\left(\left|\tau_n\right|_2 + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right),\end{aligned}$$

pelo que, usando (3.22), concluímos que

$$\left|\tau_{nt}\right|_{L^\infty(0,T:H^1(\Lambda))} \leq C_0\left(\left|v_n\right|_{L^\infty(0,T:H^2(\Lambda))} + \frac{1}{C_0 We_v}\right)\left(\left|\bar{\tau}_{0,n}\right|_{2,\Gamma} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)\exp\left(C_0\left|v_n\right|_{L^1(0,T:H^3(\Lambda))}\right) \tag{3.23}$$

Das limitações (3.22) e (3.23) e o Lema 3.1 podemos supor, passando por subseqüências se for necessário, que existe $\tau \in L^\infty(0,T:H^2(\Lambda))$ com $\tau_t \in L^\infty(0,T:H^1(\Lambda))$ tal que

$$\tau_n \to \tau \quad fraco\ * \quad em \quad L^\infty(0,T:H^2(\Lambda)) \tag{3.24}$$

$$\tau_{nt} \to \tau_t \quad fraco\ * \quad em \quad L^\infty(0,T:H^1(\Lambda)) \tag{3.25}$$

$$\tau_n \to \tau \quad forte \quad em \quad C([0,T]:H^1(\Lambda)) \tag{3.26}$$

As convergências estabelecidas em (3.24)-(3.26) e (3.13)-(3.14) são suficientes para passar ao limite em (3.15), pelo menos no sentido das distribuções, e assim provar que τ é solução de

$$We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}+(E(\overline{u})\cdot\nabla)\tau+g_a(\tau,\nabla E(\overline{u}))\right)+\tau=2\alpha D[E(\overline{u})] \quad em \quad [0,T]\times\Lambda.$$

$$\tau(0)=\overline{\tau}_0$$

Em particular, temos

$$We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}+(\overline{u}\cdot\nabla)\tau+g_a(\tau,\nabla\overline{u})\right)+\tau=2\alpha D[\overline{u}] \quad em \quad \Omega_T(\varphi)$$

$$\tau(0)=\tau_0 \qquad em\ \Omega(0)$$

pelo que a função τ é a solução problema diferencial (3.6)-(3.7).

Provamos agora as desigualdades (3.8) e (3.9). Usando a semicontinuidade inferior das normas em (3.22) respeito das convergências fraca e fraca $*$ se deduz que

$$|\tau|_{L^\infty(0,T;H^2(\Lambda))}\leq C_0\left(|\overline{\tau}_0|_{2,\Lambda}+\frac{4\alpha}{C_0We}\right)\exp\left(C_0|E(\overline{u})|_{L^1(0,T;H^3(\Lambda))}\right).$$

Das propriedades da função extensão E, obtemos então que

$$|\tau|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega(t)))}\leq C_0\left(c_0|\tau_0|_{2,\Omega(0)}+\frac{4\alpha}{C_0We}\right)\exp\left(C_0c_0|\tau|_{L^1(0,T;H^3(\Omega(t)))}\right)$$

A última desigualdade prova (3.8).

Finalmente, usando os mesmos argumentos que para o caso de função τ temos que

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega(t)))} \leq C_0\left(c_1|\overline{u}|_{L^1(0,T;D(A(\Omega(t))))}\right)\left(c_0|\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We}\right)\exp\left(C_0 c_0|\overline{u}|_{L^1(0,T;H^3(\Omega(t)))}\right)$$

o que prova a desigualdade (3.9). A demonstração da Proposição está assim completa. ■

Observação: 3.1. A seguir faremos alguns comentários a respeito do Método das Características, usado em parte da prova da Proposição 3.2, especificamente onde se prova a existência e unicidade de soluções para o sistema (3.15).

Fixemos $\overline{u} \in C^1(0,T;C^3(\Lambda))$ tal que $\overline{u}|_{\partial\Lambda} = 0$, aqui Λ é um aberto regular e limitado de IR^n, e consideremos a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s,x) = \overline{u}(t,U(t,s,x)) \tag{3.27}$$
$$U(s,s,x) = x$$

onde $(s,x) \in [0,T] \times \Lambda$. A existência e unicidade de soluções para o sistema (3.27) é conhecida. Mais ainda as soluções estão definidas globalmente no intervalo $[0,T]$. De fato se $x \in \partial\Lambda$ a função constante $U(t,s,x) = x$ é a solução de (3.27). Por outro lado, se $(s,x) \in [0,T] \times \Lambda$ e $t \in [0,T]$ são tais que $U(t,s,x) \in \partial\Lambda$, pela unicidade das soluções (usamos aqui convenientemente a função constante $V(\xi) = U(t,s,x)$) novamente podemos concluir que a solução está definida em todo o intervalo $[0,T]$. O raciocinio anterior prova que as soluções são definidas globalmente no intervalo $[0,T]$.

Suponha agora que $\tau : [0,T] \times \Lambda \to IR^n$ é solução do problema diferencial

$$We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\overline{u} \cdot \nabla)\tau + g_a(\tau,\overline{u})\right) + \tau = 2\alpha D[\overline{u}] \quad em\ [0,T] \times \Lambda \tag{3.28}$$
$$\tau(0) = \tau_0 \qquad em\ \Lambda$$

Rescrevendo a equação anterior na forma

$$\tau_t(t,U(t,s,x))+(\overline{u}\cdot\nabla)\tau(t,U(t,s,x))=f(\overline{u},\tau)(t,U(t,s,x))$$

e, usando as propriedades do fluxo U, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tau(t,U(t,s,x)))=f(\overline{u},\tau)(t,U(t,s,x))$$

Integrando a última equação entre 0 e t, para $t\in[0,T]$, e fazendo $t=s$ obtemos a seguinte identidade

$$\tau(t,x)=\tau_0(U(0,t,x))+\int_0^T f(\overline{u},\tau)(\xi,U(\xi,t,x))d\xi$$

Segundo o anterior, a existência de soluções para a equação (3.27), será garantida se provamos a existência de um ponto fixo para o operador

$$\Psi(\tau)(t,x)=\tau_0(U(0,t,x))+\int_0^T f(\overline{u},\tau)(\xi,U(\xi,t,x))d\xi \tag{3.29}$$

num espaço funcional apropriado, que no nosso caso é $C^1(0,T;C^3(\Lambda))$. Em relação a esclarecer as idéias anteriores e assumindo que é possível, vejamos que acontece se derivamos respeito da variável espacial a equação (3.29), formalmente teremos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Psi(\tau)(t,x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_0(U(0,t,x))+\int_0^T\frac{\partial}{\partial x_i}f(\overline{u},\tau)(\xi,U(\xi,t,x))d\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Psi(\tau)(t,x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_0(U(0,t,x))+\sum_{j=1}^{n}\int_0^T\frac{\partial f(\overline{u},\tau)}{\partial x_j}(\xi,U(\xi,t,x))\frac{\partial U_j(\xi,t,x)}{\partial x_i}d\xi$$

de onde podemos deduzir que

$$|\Psi(\tau)|_{C^1(\Lambda)} \leq c_1 |U(0,t)|_{C^1(\Lambda)} |\tau_0|_{C^1(\Lambda)} + c_2 \int_0^t |f(u,\tau)|_{C^1(\Lambda)} |U(\xi,t)|_{C^1(\Lambda)} .$$

Un procedimento totalmente análogo, estabelece desigualdades similares para as derivadas de ordem superior. E claro agora que um procedimento como o de contração permitirá provar a existência e unicidade de soluções.

A argumentação anterior foi possível assumindo uma apropriada regularidade do fluxo U em relação às variáveis t,s,x.. Com respeito a esta questão de regularidade existe uma extensa bibliografia, veja por exemplo, Portryagin [38] Capítulo 4, que nos permite assumir que pelo menos $U \in C^1([0,T]\times[0,T]: C^3(\Lambda))$, o que é suficiente para nossos objetivos.

Para provar a Proposição 3.2 foi necessário também utilizar o seguinte lema técnico.

Lema 3.3. Suponha que Γ_T é uma superficie de classe C^l. Então existe um operador continuo $E_\Omega^l : L^2(0,T : H^i(\Omega(t))) \to L^2(0,T : H^i(R^n))$ e $C>0$ tal que

$$E_\Omega^l(w)(t)|_{\Omega(t)} = w(t) \quad \forall w \in C^\infty(\Omega_T(\varphi)) \tag{3.30}$$

$$|E_\Omega^l(w)(t)|_{H^i(IR^n)} \leq C|(w)(t)|_{H^i(\Omega(t))} \quad \forall \;\; 1 \leq i \leq l. \tag{3.31}$$

para todo $1 \leq i \leq l$.

Observamos que faremos a demonstração de forma resumida. Na teoria geral dos espaços de Sobolev, questões associadas à extensão de funções são usais e assim ressaltamos que o verdadeiro sentido do Lema 3.3 é pôr em evidencia que a propriedade de integrabilidade é preservada pelo tipo de técnica a ser usada.

Prova: A prova do Lema será desenvolvida por etapas.

(i) Vejamos inicialmente que para $\Omega = IR_+^n = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in IR^n : x_3 > 0 \right\}$ existe um operador linear continuo $E_\Omega^l : L^2(0,T;H^l(IR_+^n)) \to L^2(0,T;H^l(IR^n))$ tal que $E_\Omega^1(w)\big|_{IR_+^n} = w \quad \forall w \in L^2(0,T;H^l(IR_+^n))$.

Para provar nossa primeira afirmação fixemos $u \in C^1(0,T;C^l(IR_+^n))$. Se $x = (x', x_n) \in IR^n$ com $x_n \geq 0$ definimos

$$E_\Omega^l(u)(t,(x,-x_n)) = \sum_{j=1}^{4} a_j u(t,(x,jx_n)). \tag{3.32}$$

Na expressão anterior os coeficientes a_i são escolhidos satisfazendo as equações

$$(-1)^k = \sum_{j=1}^{4} j^k a_j \quad k = 0,1...3, \quad j = 1,...4.$$

A existência dos coeficientes a_i é conseqüência de termos que $\det(\left[j^k\right]_{j,k}) \neq 0$. Uma manipulação algébrica prova que $E_\Omega^{l\,(i)}(u) \in C^1(0,T;C^l(IR^n))$ e que $E_\Omega^l(u)(t)\big|_{\Omega(t)} = u(t)$; mais ainda, facilmente se prova que existe $C>0$ independente de $t \in [0,T]$ tal que

$$\left|E_\Omega^l u(t)\right|_{H^i(R^n)} \leq C\left|u(t)\right|_{H^i(IR_+^n)}.$$

para todo $1 \leq i \leq l$. Nas conclusões anteriores é fundamental a escolha dos coeficientes a_i. Por outro lado ressaltamos que (3.32) preserva as propriedades de integração da função estendida.

A densidade de $C^1(0,T;C^l(IR_+^n))$ em $L^2(0,T:H^l(R_+^n))$ permite provar nossa primeira afirmação.

(ii) A propriedade é verdadeira se $\Omega(t) = \Omega(0) \;\; \forall \;\; t \in [0,T]$.

A prova é obtida usando partições da unidade. De fato a regularidade de $\partial\Omega$ permite escolher uma cobertura $\{\Omega_j\}_{j=0}^{N_\Omega}$ de Ω tal que $\Omega_0 \subset \Omega$ e onde para cada $1 \leq j \leq N_\Omega$ existe um difeomorfismo $\psi_j : \Omega_j \to IR_-^n$ com $\psi_j(\Omega_j \cap \Omega) = \{(x',0) : x' \in IR^{n-1}\}$. Se $\{\xi_j\}_{j=0}^{N_\Omega}$ é uma partição da unidade subordinada à partição $\{\Omega_j\}_{j=0}^{N_\Omega}$, toda função $u \in L^2(0,T;H^i(\Omega))$ pode-se escrever na forma $u = \sum_{j=1}^{N_\Omega} u\xi_j$. A extensão pode ser obtida usando a primeira parte, em cada função $u\xi_j$, $1 \leq j \leq N_\Omega$. Novamente observamos que a técnica anterior preserva a integravilidade da função u, e dizer $E_\Omega^l(u) \in L^2(0,T;H^i(IR^n))$.

(iii) Finalmente vemos o caso onde $\Omega_T(\varphi) = \varphi(\Omega \times [0,T])$, aqui φ e uma função cumprindo pelo menos as condições (2.83) e (2.84).

Seja $u \in L^2(0,T;H^i(\Omega(t)))$. Resulta evidente que a função $u \circ \varphi \in L^2(0,T;H^i(\Omega))$, pelo que usando (ii) $E_\Omega^l(u \circ \varphi) \in L^2(0,T;H^i(IR^n))$. Se $\Psi : IR^n \to IR^n$ é uma extensão da função φ^{-1}, claramente temos que a função $E_\Omega^l(u \circ \varphi) \circ \Psi \in L^2(0,T;H^i(IR^n))$ é uma extensão para a função u, e de fato permite definir operador contínuo que cumpre as condições (3.33)-(3.34). A prova está completa. ■

Completamos esta seção provando a unicidade das soluções da equação de transporte (3.6)-(3.7), o que será fundamental na próxima seção, onde usando técnica de ponto fixo, provaremos a existência de soluções para o modelo diferencial de Oldroyd.

Proposição 3.4. Suponha que se cumprem as condições da Proposição 3.2. Se φ é tal que $\sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\varphi^{-1}(x,t,))\eta_i(x,t,) \leq 0$ em $\partial\Omega(t)$ então a equação de Transporte (3.6)-(3.7) tem uma única solução na classe de funções $L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))$.

Prova: Se τ_1 e τ_2 são soluções do problema diferencial (3.6)-(3.7) e $\tau = \tau_1 - \tau_2$ então

$$\left(\tau_t + (\bar{u}\cdot\nabla)\tau + g_a(\tau,\bar{u})\right) + \tau = 0 \qquad em \;\; \Omega_T(\varphi) \tag{3.33}$$

$$\tau(0) = 0 \qquad em \;\; \Omega(0).$$

Multiplicando escalarmente no sentido de $L^2(\Omega(t))$a equação (3.33) por $\frac{\tau}{We}$, temos pelo Lema 2.13 que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tau|^2 + \frac{1}{We}|\tau|^2 = -\frac{1}{We}\left((\bar{u}\cdot\nabla)\tau,\tau\right) - \frac{1}{We}\left(g_a(\tau,\nabla\bar{u}),\tau\right) + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega(t)} \tau_{i,j}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\varphi^{-1}(t,z)\right)\cdot\eta dS.$$

Usando agora que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\varphi^{-1}(t,z)\right)\cdot\eta \leq 0$, e a identidade

$$\left((\bar{u}\cdot\nabla)\tau,\tau\right) = 0$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tau|^2 + |\tau|^2 &\leq \frac{1}{We}\left(g_a(\tau,u),\tau\right) \\
&\leq \frac{1}{We}|\nabla\bar{u}|_{L^\infty(\Omega(t))}|\tau|^2 \\
&\leq c_1|\bar{u}|_{3,\Omega(t)}|\tau|^2
\end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante positiva independente de $t \in [0,T]$. Da última desigualdade em particular temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tau|^2 \leq c_1|\bar{u}|_{3,\Omega(t)}|\tau|^2.$$

Como $\bar{u} \in L^1(0,T;H^3(\Omega(t)))$, a desigualdade de Gronwall-Bellman permite concluir que $\tau = 0$ $q.t.p$ em $\Omega_T(\varphi)$. A prova do Lema e agora completa. ■

3.2 Existência de Soluções Fortes Locais no Tempo

O objetivo de esta seção é enunciar e provar um teorema de existência local de soluções fortes para o sistema diferencial de Oldroyd em domínios de fronteira móvel de certa classe.

Na demonstração do teorema de existência será usado o clássico Teorema de Ponto Fixo de Schauder, combinado com os resultados da seção anterior sobre os problemas linearizados associados com o sistema. Observamos que serão importantes na argumentação os resultados de compacidade apresentados na Seção 2 do Capítulo 2.

Teorema 3.5. (Existência local de soluções). Seja T>0. Existe uma vizinhança W da identidade em

$$C_T = \left\{ \varphi \in C^3([0,T]\times\Omega) : \varphi \quad é \quad difeomorfismo \right\}$$

tal que se $\varphi \in W$ cumpre que

$$\varphi(y,t) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x), , \varphi_n(t,x), t)$$

$$Det\left(\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})_i(t,x)}{\partial x_j}\right]_{(i,j)}\right) = \gamma(t) \quad em \quad \Omega(t) \quad \forall \quad t\in[0,T],$$

e

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\varphi^{-1}(x,t))\eta(x,t) \le 0 \cdot \text{ em } \partial\Omega(t),$$

então se $f \in L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))$ com $f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))$ e $f(0)=0$, $\tau_0 \in H^2(\Omega(0))$ com $\nabla\cdot\tau_0 = 0$, onde $\varphi(t,\Omega) = \Omega(t)\times\{t\}$ para todo $t\in[0,T]$, existe $0<\overline{T}\le T$ e funções $u \in L^2(0,\overline{T};H^3(\Omega(t)))\cap L^\infty(0,\overline{T};D(A(t)))$, $\tau \in L^\infty(0,\overline{T};H^2(\Omega(t)))$, $p \in L^2(0,\overline{T};H^2(\Omega(t)))$ cumprindo que $u_t \in L^2(0,\overline{T};H^1(\Omega(t)))\cap L^\infty(0,\overline{T};V(\Omega(t)))$, $\tau' \in L^\infty(0,\overline{T};H^1(\Omega(t)))$ e $p_t \in L^2(0,\overline{T};H^1(\Omega(t)))$ tais que (u,p,τ) é solução do problema diferencial Oldroyd (3.1)-(3.5) em $\Omega_{\overline{T}}(\varphi)$ com condições iniciais $u(0)=0$ e $\tau(0)=\tau_0$.

Prova: A prova será feita em várias etapas preparatórias para a aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Schauder.

Inicialmente vamos definir um conjunto convexo adequado no espaço de funções onde a solução será obtida. Para isto, fixemos $\varphi \in V_2$, aqui V_2 é a vizinhança garantida pelo Corolário 2.7, cumprindo (2.85)-(2.87) e tal que $\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\left(\varphi^{-1}(x,t)\right)\eta(x,t) \leq 0 \cdot$ em $\partial\Omega(t)$. Para números $T > 0, \beta_i > 0$, i=1,2,3, definimos o conjunto

$$A_T(\beta_i) = \{(u,\tau) : |\tau|_{L^\infty(0,T:H^2(\Omega(t)))} \leq \beta_2, \qquad |\tau_t|_{L^\infty(0,T:H^1(\Omega(t)))} \leq \beta_3$$

$$|u|^2_{L^\infty(0,T:D(A(t)))\cap L^2(0,T:H^3(\Omega(t)))} + |u_t|^2_{L^\infty(0,T:V(\Omega(t)))\cap L^2(0,T:H^2(\Omega(t)))} + |u_{tt}|^2_{L^\infty(0,T:H(\Omega(t)))} \leq \beta_1$$

$$u(0) = 0, \quad \tau(0) = \tau_0 \quad \}$$

onde damos por entendido que $\Omega(t) = \varphi(t,\Omega)$ para todo $t \in [0,T]$.

Resulta óbvio da definição do conjunto $A_T(\beta_i)$ que a função $(0,\tau_0) \in A_T(\beta_i)$, para $\beta_2 > |\tau_0|_2$. Assim nestas condições, $A_T(\beta_i) \neq \emptyset$, o que assumiremos no que se segue.

Sendo $X = L^2(0,T:V(\Omega(t))) \times L^2(0,T:H^1(\Omega(t)))$ definamos a função

$$\mathrm{G}: A_T(\beta_i) \subset X \to X$$

$$(\bar{u},\bar{\tau}) \to \mathrm{G}((\bar{u},\bar{\tau})) = (u,\tau),$$

onde u,τ são respectivamente as únicas soluções dos problemas

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla p = f + (\overline{u} \cdot \nabla)\overline{u} + \nabla \cdot \overline{\tau} && em \quad \Omega_T(\varphi) \\
&div(u) = 0 && em \quad \Omega_T(\varphi) \\
&u = 0 && em \quad \Gamma_T(\varphi) \\
&u(0) = 0 && em \quad \Omega(0)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\overline{u} \cdot \nabla)\tau + g_a(\tau : \nabla \overline{u})\right) + \tau = 2\alpha D[\overline{u}] && em \quad \Omega_T(\varphi) \\
&\tau(0) = \tau_0 && em \quad \Omega(0).
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

A existência das soluções para os sistemas (3.34)-(3.35) é garantida pela Proposição 3.1 e pelo Teorema 2.11, respectivamente. Por outro lado a unicidade das soluções foi provada nos Lemas 2.14 e 3.4.

Nosso próximo objetivo e provar que a função G satisfaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Schauder e assim garantir a existência de soluções fortes para o modelo diferencial de Oldroyd. Isto será feito por etapas.

(i) Vejamos inicialmente que existe $0 < \overline{T} < T$ tal que $\mathrm{G}(A_{\overline{T}}(\beta_i)) \subset A_{\overline{T}}(\beta_i)$.

Fixemos $(\overline{u}, \overline{\tau}) \in A_T(\beta_i)$ e seja $(u, \tau) = \mathrm{G}(\overline{u}, \overline{\tau})$. Como u é solução do problema de Stokes 3.34, pelo Teorema 2.11 e lembrando que $|(v,q)|^2_{W_T(\varphi)} = |v|^2_{W_{1,T}(\varphi)} + |q|^2_{W_{2,T(\varphi)}}$ onde

$$
|v|^2_{W_{1,T}(\varphi)} = |u|^2_{L^\infty(0,T;D(A(t)))\cap L^2(0,T;H^3(\Omega(t)))} + |u_t|^2_{L^\infty(0,T;V(\Omega(t)))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega(t)))} + |u_{tt}|^2_{L^2(0,T;H(\Omega(t)))},
$$

temos que existe $C > 0$ independente de $t \in [0,T]$ tal que:

$$
|u|^2_{W_{1,T}(\varphi)} \le C\left|f + \nabla \cdot \overline{\tau} + (\overline{u} \cdot \nabla)\overline{u}\right|^2_{X_T(\varphi)}
$$

$$\le 4C\left(|f|^2_{X_T(\varphi)} + |\nabla\cdot\overline{\tau}|^2_{X_T(\varphi)} + |(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2_{X_T(\varphi)} \right)$$

$$\le 4C\left(|f|^2_{X_T(\varphi)} + \int_0^T |\nabla\cdot\tau|^2_{1,t}\,dt + \int_0^T |\nabla\cdot\tau_t|^2\,dt + \int_0^T |(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2_{1,t}\,dt + \int_0^T |((\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u})_t|^2\,dt \right)$$

$$\le 4C\left(|f|^2_{X_T(\varphi)} + \int_0^T |\nabla\cdot\overline{\tau}|^2 + |\nabla(\nabla\cdot\overline{\tau})|^2\,dt + \int_0^T |\nabla\cdot\tau_t|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega(t)))}\,dt \right) +$$

$$4C\left(\int_0^T |(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}|^2 + |\nabla((\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u})|^2\,dt + \int_0^T |\overline{u}_t\cdot\nabla\overline{u}|^2 + |(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}_t|^2\,dt \right).$$

Usando agora as clássicas imersões de Sobolev e continuando com a última desigualdade deduzimos a existência de constantes positivas c_i , independentes de $t\in[0,T]$ tais que

$$|u|^2_{W_{1,T}(\varphi)} \le 4C\left(|f|^2_{X_T(\varphi)} + c_1T(\beta_2^2+\beta_3^2)\right) + 4Cc_2\left(\int_0^T |\overline{u}|^2_{L^\infty(\Omega(t))}|\nabla\overline{u}|^2 + |\nabla\overline{u}|^4 + |\overline{u}|^2_{L^\infty(\Omega(t))}|\overline{u}|^2_2\,dt \right)$$

$$+ 4Cc_3\left(\int_0^T |\overline{u}_t|^2_{L^4(\Omega(t))}|\nabla\overline{u}|^2_{L^4(\Omega(t))} + |u|^2_{L^\infty(\Omega(t))}|\nabla u_t|^2_{L^\infty(0,T)}\,dt \right)$$

$$\le 4C\left(|f|^2_{X_T[\varphi]} + c_1T(\beta_2^2+\beta_3^2) \right) + 4Cc_2c_4\int_0^T |\overline{u}|^4_2 + |\overline{u}|^4_2 + |\overline{u}|^4_2\,dt$$

$$\le +4Cc_3c_5\int_0^T |\overline{u}_t|^2_{L^\infty(0,T;V(t))}|\overline{u}|^2_{L^\infty(0,T;D(A(\Omega(t))))} + |\overline{u}|^2_{L^\infty(0,T;D(A(\Omega(t))))}|\nabla u_t|^2_{L^\infty(0,T)}\,dt$$

$$\le 4C\left(|f|^2_{X_T[\varphi]} + c_1T(\beta_2^2+\beta_3^2) \right) + c_6T\beta_1^2$$

Segundo o anterior, podemos afirmar que existe $c_7 = c_7(\varphi,\Omega)>0$ tal que

$$|u|^2_{W_{1,T}(\varphi)} \le c_7\left(|f|^2_X + \beta_2^2T + \beta_3^2T + \beta_1^2T \right) \tag{3.36}$$

Por outro lado, para as estimativas de τ e τ_t usamos diretamente as desigualdades (3.22) e (3.23) da Proposição 3.2. Assim temos

$$|\tau|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega(t)))} \leq \left(c_0|\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We} \right) \exp\left(C_0 c_0 |\overline{u}|_{L^1(0,T;H^3(\Omega(t)))} \right)$$

e

$$|\tau_t|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega(t)))} \leq C_0 \left(c_0 |\overline{u}|_{L^\infty(0,T;D(A(\Omega(t))))} + \frac{1}{C_0 We} \right) \left(c_0 |\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We} \right) \exp\left(C_0 |\overline{u}|_{L^1(0,T;H^3(\Omega(t)))} \right)$$

pelo que

$$|\tau|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega(t)))} \leq \left(c_0|\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We} \right) \exp\left(C_0 c_0 T^{\frac{1}{2}} \beta_1^{\frac{1}{2}} \right) \tag{3.37}$$

$$|\tau_t|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega(t)))} \leq C_0 \left(c_0 |\overline{u}|_{L^\infty(0,T;D(A(\Omega(t))))} + \frac{1}{C_0 We} \right) \left(c_0 |\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We} \right) \exp\left(C_0 c_0 T^{\frac{1}{2}} \beta_1^{\frac{1}{2}} \right) \tag{3.38}$$

Escolhendo agora

$$\beta_1 > 2c_7 |f|^2_{X_T(\varphi)}$$

$$\beta_2 > max\left\{ |\tau_0|_2,\ \left(c_0|\tau_0|_{2,\Omega(0)} + \frac{4\alpha}{C_0 We} \right) \exp\left(C_0 c_0 T^{\frac{1}{2}} \beta_1^{\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

e

$$\beta_3 > C_0 \left(c_0 \beta_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{C_0 We} \right) \left(C_0 |\tau_0| + \frac{4\alpha}{C_0 We} \right) \exp\left(C_0 T^{\frac{1}{2}} \beta_1^{\frac{1}{2}} \right)$$

vemos de (3.36)-(3.38) que para $0 < \overline{T} < T$ suficientemente pequeno $F\left(A_{\overline{T}}(\beta_i)\right) \subset A_{\overline{T}}(\beta_i)$, o que finalmente prova a afirmação (i).

(ii) Se deduz facilmente da **Proposição** 2.15 que o conjunto $A_{\overline{T}}(\beta_i)$ é relativamente compacto em *X*.

(iii) Vejamos agora que G é uma função continua.

Seja $(\bar{u}_n, \bar{\tau}_n)_{n\in N}$ uma seqüência em $A_{\bar{T}}(\beta_i)$ e $(\bar{u}, \bar{\tau}) \in A_{\bar{T}}(\beta_i)$ tais que $(\bar{u}_n, \bar{\tau}_n) \to (\bar{u}, \bar{\tau})$ fortemente em X.

Por (i), sabemos que $G(\bar{u}_n, \bar{\tau}_n) = (u_n, \tau_n) \in A_{\bar{T}}(\beta_i)$ $\forall n \in N$. Logo pela definição do conjunto $A_T(\beta_i)$, podemos escolher uma subseqüência de $(u_n, \tau_n)_{n\in N}$, que para facilitar a leitura seguiremos notando da mesma forma, e $(v, \sigma) \in A_{\bar{T}}(\beta_i)$ tal que

$$(\bar{u}_n, \bar{\tau}_n) \to (\bar{u}, \bar{\tau}) \quad forte \quad em \quad X \tag{3.39}$$

$$u_n \to v \quad fraco \quad em \quad L^2(0, T : H^3(\Omega(t))) \tag{3.40}$$

$$u_{nt} \to v_t \quad fraco \quad em \quad L^2(0, T : H^2(\Omega(t))) \tag{3.41}$$

$$\tau_n \to \sigma \quad fraco* \quad em \quad L^\infty(0, T : H^2(\Omega(t))) \tag{3.42}$$

$$\tau_{nt} \to \sigma_t \quad fraco* \quad em \quad L^\infty(0, T : H^1(\Omega(t))) \tag{3.43}$$

mais ainda, por (ii) podemos assumir, alem das outras convergências que,

$$(u_n, \tau_n) \to (v, \sigma) \quad forte \quad em \quad X \tag{3.44}$$

As convergências (3.42)-(3.43) e (3.44) são suficientes para passar ao limite na equação

$$We\left(\frac{\partial \tau_n}{\partial t} + (\bar{u}_n \cdot \nabla)\tau_n + g_a(\tau_n, \bar{u}_n)\right) + \tau_n = 2\alpha D[\bar{u}_n]$$
$$\tau_n(0) = \tau_0$$

e estabelecer que

$$We\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}+(\tau\cdot\nabla)\overline{u}-g_a(\overline{u},\tau)\right)+\tau=2\alpha D[\overline{u}] \tag{3.45}$$

$$\tau(0)=\tau_0 .$$

Fixemos $\Psi\in\mathcal{D}[\Omega_T(\varphi)]$ tal que $div(\Psi)=0$ em $\Omega_T(\varphi)$. Então como para cada $n\in\mathrm{N}$, u_n é a solução da equação

$$\begin{array}{ll} -\Delta u_n+\nabla p_n=-(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}+f+\nabla\cdot\overline{\tau}_n & em\ \ \Omega_T(\varphi)\\ div(u)=0 & em\ \ \Omega_T(\varphi)\\ u_n(0)=0 & em\ \ \Omega(0)\end{array}$$

pela escolha de Ψ temos que

$$\int_0^T\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}-\Delta u_n,\Psi\right)ds=\int_0^T\left((\overline{u}_n\cdot\nabla)\overline{u}_n+f+\nabla\cdot\overline{\tau}_n,\Psi\right)ds$$

o

$$\int_0^T\left(\frac{\partial u_n}{\partial t},\Psi\right)ds+\int_0^T(\nabla u_n,\nabla\Psi)ds=\int_0^T\left((\overline{u}_n\cdot\nabla)\overline{u}_n+f+\nabla\cdot\overline{\tau}_n,\Psi\right)ds\ .$$

Logo, tomando ó limite e usando as convergências (3.31)-(3.33),(3.41) e (3.44) podemos deduzir que

$$\int_0^T\left(\frac{\partial v}{\partial t},\Psi\right)_{\Omega(t)}dt+\int_0^T(\nabla v,\nabla\Psi)_{\Omega(t)}dt=\int_0^T\left((\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}+f+\nabla\cdot\overline{\sigma},\Psi\right)_{\Omega(t)}$$

e, como $v\in L^2(0,T:D(A(t)))$, podemos rescrevê-la na forma

$$\int_0^T\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v,\Psi\right)_{\Omega(t)}dt=\int_0^T\left((\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}+f+\nabla\cdot\overline{\tau},\Psi\right)_{\Omega(t)}dt\ .$$

Desta última equação, e como conseqüência da arbitrariedade da função Ψ, podemos inferir que

$$P(t)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v\right)=P(t)\left(-(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}+f+\nabla\cdot\overline{\sigma}\right)\quad q.t.p\quad em\quad \Omega_T(\varphi)$$

As Proposições 1.1 e 1.3 garantem a existência de $p\in L^2(0,T:H^2(\Omega(t)))$ tal que

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v+\nabla p=f-(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}+\nabla\cdot\tau.$$

$$v(0)=0$$

Finalmente, as equações (3.45) e (3.46) provam que

$$\mathrm{G}(\overline{u},\overline{\tau})=(v,\sigma)=\lim_{n\to\infty}(u_n,\tau_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{G}(\overline{u}_n,\overline{\tau}_n),$$

onde o limite é no sentido da norma do espaço X, o que estabelece a continuidade da função G.

As afirmações provadas anteriormente mostram que a função G satisfaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Schauder. Portanto existe uma função $(u,\tau)\in A_T(\beta_i)$ solução do problema de Oldroyd. Finalmente as afirmações respeito da pressão p são conseqüência da unicidade de soluções do problema de Stokes, Proposição 2.11. A prova do teorema está completa. ■

O uso do Teorema de Ponto Fixo de Schauders na prova do Teorema 3.4 precisou da unicidade da soluções dos Problemas de evolução de Stokes e da equação de Transporte (3.6) (3.7) o que faz que $\Omega_T(\varphi)$ seja um domínio especial. Vejamos a través de um exemplo muito simples, um domínio não cilíndrico que cumpre as hipóteses (2.83)-(2.85) e a do Lemas 3.4, suficientes para garantir a unicidade das soluções dos problemas mencionados.

Fixemos $\Omega = B_r(y)$ onde r *é* un número positivo, $y \in IR^n$, $\theta \in IR$ e $T>0$. Para cada $t \in [0, T]$ definimos a função $\varphi(t): B_r(y) \to IR^n$ pela expressão

$$\varphi(t)(x) = y + (1 + t\theta)(x - y)$$

Facilmente se prova que a função φ cumpre as seguintes propriedades:

a) $\varphi(t, B_r(y)) = B_{(1+t\theta)r}(y)$

b) $\det\left[\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right] = (1 + t\theta)^n > 0$ para θ suficientemente pequeno.

c) $\|\varphi - I\|_{C^3([0,T]\times B_r(y))} \to 0$ se $\theta \to 0$

d) $\displaystyle\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\left(t, \varphi^{-1}(t, z)\right) \cdot \eta_i(t, z) = \theta(1 + t\theta)^{-1}(x - y) \cdot (x - y) < 0$ se $\theta<0$ com $1+t\theta>0$.

De a)-d) temos que para θ pequeno o domínio $\Omega_T(\varphi)$ cumpre as hipóteses dos Lemas 2.14 e 3.4 garantido a unicidade de soluções para o problema de Stokes e para a equação de Transporte (3.6)-(3.7).

Um outro exemplo que permite garantir a existencia de soluções é aquele onde $\varphi(t, x) = (\varphi_1(x_2, x_3, t), \varphi_2(x_3, t), \varphi_3(t), t)$ é tal que $\displaystyle\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\left(\varphi^{-1}(x, t)\right) \cdot \eta_i(x, t) \leq 0$

O próximo resultado estabelece a unicidade das soluções do sistema diferencial de Oldroyd (3.1)-(3.5). A prova do resultado será baseada na obtenção de apropriadas estimativas de energia para u e τ no espaço $L^2(\Omega(t))$. Tecnicamente, a demonstração não é muito diferente da apresentada, para o caso cilíndrico, por Guilloupe & Saut em [20], Teorema 2.5 pag 858. De fato a diferencia básica está no tratamento dos termos de fronteira que aparecem, no caso não cilíndrico, no termo (τ, τ_t) como mostra a comparação dos Lemas 2.12 e 2.13. Por outro lado como no nosso caso a existência de soluções foi estabelecida para um tipo especial de domínios não cilíndricos onde o termo de fronteira mencionado é negativo e, por tanto, a dificuldade desaparece. Segundo o anterior a prova da próxima proposição será resumida.

Teorema.3.6. Suponha que se cumprem as hipóteses do Teorema 3.5. Então o problema (3.1)-(3.5) tem uma única solução (u,τ) na classe de funções $L^2(0,T;H^3(\Omega(t)))\cap L^\infty(0,T;D(A(\Omega(t))))\times L^2(0,T;H^1(\Omega(t)))$. A pressão p e única salvo constante no espaço $L^2(0,T;H^2(\Omega(t)))$.

Prova: Suponha que (u^1,τ^1,p^1) é (u^2,τ^2,p^2) são soluções do problema (3.1)-(3.5). Fazendo $u=u^1-u^2$, $\tau=\tau_1-\tau_2$, e aplicando o operador $P(t)$ na equação (3.1) temos que

$$\mathrm{Re}\{\partial_t u+P(t)(u^1\cdot\nabla)u+P(t)(u\cdot\nabla)u^2\}+(1-\alpha)A(t)u=P(t)(\nabla\cdot\tau) \tag{3.38}$$

$$We\{\partial_t\tau+(u^1\cdot\nabla\tau)+(u^2\cdot\nabla\tau)+g_a(\tau^1,\nabla u)+g_a(\tau^2,\nabla u^2)\}+\tau=2\alpha D[u] \tag{3.39}$$

$$\tau(0)=0,\ u(0)=0$$

Tomando produto escalar em (338) e (3.39) por $\left(u,\dfrac{\tau}{2\alpha}\right)$, usando que $u|_{\partial\Omega(t)}=0$, as identidades

$$((u\cdot\nabla)u,u)_{L^2(\Omega(t))}=0$$
$$((u\cdot\nabla)\tau,\tau)_{L^2(\Omega(t))}=0$$
$$(D[u],\tau)=-(\nabla\cdot\tau,u)$$

bem como a desigualdade de Young, podemos deduzir que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}|u|^2_{\Omega(t)}+\frac{We}{2\alpha}|\tau|^2_{\Omega(t)}\right]+(1-\alpha)\left(1-\frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)}\left(\mathrm{Re}+\frac{We}{2}\right)\right)\|u\|^2_{\Omega(t)}+\frac{1}{2\alpha}|\tau|^2_{\Omega(t)}\le$$

$$\le\phi_\varepsilon(t)\left[\mathrm{Re}|u|^2_{\Omega(t)}+\frac{We}{2\alpha}|\tau|^2_{\Omega(t)}\right]-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega(t)}\tau^2_{i,j}\frac{\partial}{\partial t}\varphi\cdot\eta dS+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega(t)}\tau_{i,j}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(t)}u_i\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi dx$$

onde $\phi_\varepsilon(t) = \left(C_0 \|u\|_3^2 + \frac{C_0^2}{\varepsilon} |\tau^1|_2^2 \right)$, e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Como por hipótese $\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} (\varphi^{-1}(x,t)) \cdot \eta_i(x,t) \le 0$, podemos assumir da ultima desigualdade a existência de $C_1(\varphi) > 0$, independente de $t \in [0,T]$ tal que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}|u|_{\Omega(t)}^2 + \frac{We}{2\alpha}|\tau|_{\Omega(t)}^2 \right] \le \phi_\varepsilon(t)\left[\mathrm{Re}|u|_{\Omega(t)}^2 + \frac{We}{2\alpha}|\tau|_{\Omega(t)}^2 \right] + C_1(\varphi)\left[|u|_{\Omega(t)}^2 + |\tau|_{\Omega(t)}^2 \right].$$

Escolhemos agora $C_2(\varphi) > 0$ de modo que seja valida a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}|u|_{\Omega(t)}^2 + \frac{We}{2\alpha}|\tau|_{\Omega(t)}^2 \right] \le (\phi_\varepsilon(t) + C_2(\varphi))\left[\mathrm{Re}|u|_{\Omega(t)}^2 + \frac{We}{2\alpha}|\tau|_{\Omega(t)}^2 \right].$$

Como $\phi_\varepsilon \in L^1(0,T)$, a desigualdade de Gronwall-Bellman, permite provar que $u = 0$, $\tau = 0$ em $\Omega_T(\varphi)$. A propriedade respeito da pressão é clara. A prova da proposição está completa. ∎

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975

[2] S. Agmon, A Douglas. L. Nirenberg, *Stimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfacing General Boundary Conditions*. Communications on Pure and Applied Matheematics,Vol.XVII, 35-92 (1964).

[3] David N. Bock, *On the Navier-Stokes Equations in Non-cylindrical Domains*. Journal of Differential Equations 45, p. 151-162 (1977)

[4] M. Böhm, *On a Non homogeneous Bingham Fluid*, J. Differ. Equations 60, p.259-284, 1985

[5] G. Böhme, *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, North - Holland, Amsterdam, 1987

[6] H. Brézis, *Analyze Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson*, Paris, 1983

[7] L. Cattabriga *Su un Problema al Contorno Relativo al Sistema di Equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat.Univ. Padova 31, (1961), 308-340.

[8] A. J. Chorin & J.E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[9] C. Conca, M.A. Rojas-Medar, *The initial value problem for the Boussinesq equations in a time dependent domain*, Publicaciones Técnicas (Informe Interno MA-93-B-402), Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, 1993.

[10] R. DiPerna & P. L. Lions, *Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spaces,* Invent. Math. 98, p. 551-547, 1989

[11] E. Fernández- Cara, F. Guillén, R.R. Ortega, *Existence et unicité de solution forte locale en temps pour des fluides non Newtoniens de type Oldroyd* (Version L^s - L^r), C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 441-416, 1994.

[12] A. Friedman, *Partial Differential Equations,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[13] H. Fujita and H. Morimoto, *On fractional powers of the Stokes operator,* Proc. Japan, Acad, 46 (1970), p. 1141-1143

[14] H. Fujita and N. Sauer, *Construction of weak solutions of the Navier-Stokes Equations in a non cylindrical domain,* Bull. Amer. Math. Soc. 75, pp. 465-468, 1969.

[15] H. Fujita and N. Sauer, *On the existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect, Ia 17, pp. 402-420, 1970.

[16] D. Fujiwara & H. Morimoto, *On L_r - Theorem of the Helmholtz Decomposition of Vector Fields,* J. Fac. Sci. Univ. Tokio, Sec. I, 24, p. 685-700, 1977

[17] Y. Giga, *Analyticity of the Semigroup Generated by the Stokes Operator in L_r Spaces,* Math. Z. 178, p. 297-329, 1981

[18] Y. Giga, *Domains of Fractional Powers of the Stokes Operator in L_r Spaces,* Arch. Rational Mech. Anal. 89, p. 251-265, 1985.

[19] Y. Giga & H. Sohr, *Abstract L^p Estimates for the Cauchy Problem with Applications to the Navier- Stokes Equations in Exterior Domains,* J. Funct. Anal. 102,p. 72-94, 1991.

[20] C. Guillopé & J. C. Saut, *Existence Results for the Flow of Viscoelastic Fluids with a Differential Constitutive Law*, Nonlinear Analysis, T M & A, Vol. 15, No. 9, p 849-869, 1990.

[21] C. Guillopé & J. C. Saut, *Existence and Stability of Steady Flow of Weakly Viscoelastic Fluids*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 119A, p.137-158

[22] J. Heywood, *Open Problems in the Theory of the Navier-Stokes Equations for Viscous Incompressible Flow*, Lecture Notes in Math. No. 1431, p. 1-22, Springer-Verlag,Berlin, 1988.

[23] J. Heywood, and R. Rannacher. *Finite Element Approximation of the Non-stationary Navier-Stokes Problem I. Regularity of Solutions and Second-Order Error Estimates for Spatial Discretizations*. Siam J. Numer. Anal. Vol. 19.April. 1982.

[24] E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr. 4, p. 213-231, 1950/1951.

[25] A. Inoue and M. Wakimoto, *On the Existence of Solutions of the Navier-Stokes Equations in a Time Dependent Domain*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. 24 (1977), p. 303-319

[26] J. U. Kim, *Weak Solutions of an Initial Boundary Value Problem for an Incompressible Viscous Fluid with Nonnegative Density*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 18. No. 1, p. 89-96, 1987.

[27] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York, 1969.

28] J. Límaco-Ferrel, *Existência de Soluções fracas para a equação de fluidos viscosos ncompressíveis não homogêneos em domínios não cilíndricos*, Tese de Doutorado, Jniversidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.

[29] J.L. Lions, *Une remarque sur les problèmes d'evolution non linéaires dans des domains non cylindriques*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 9, pp. 11-18, 1964.

[30] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires*, Dunon, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[31] M. Milla Miranda, J. Límaco-Ferrel, *The Navier-Stokes equations in non-cylindrical domains*, Atas do 41 Seminário Brasileiro de Análise, 1995.

[32] T. Miyakawa and Y. Teramoto, *Existence and Periodicity of weak Solutions of the Navier-Stokes Equations in a Time Dependent Domain*, Hiroshima Math., J. 12 (1982), p. 513-528

[33] H. Morimoto, *On Existence of Periodic Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations in Regions with Periodically Moving Boundary*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. 18 (1971), p. 499-524

[34] R. R. Ortega Jr., *Contribución al Estudio Teórico de Algunas E.D.P. no Lineales Relacionadas con Fluidos no Newtonianos*, Tese de Doutorado, Universidad de Sevilla, Espanha, 1995.

[35] M. Ôtani, Y. Yamada, *On the Navier-Stokes Equations in Non-Cylindrical Domains: an Approach by Sub Differential Operator Theory*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA 25, pp. 185-204, 1978.

[36] N. Phan Thien & R. I. Tanner, *A New Constitutive Equation Derived from Network Theory*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2, p. 353-365, 1977.

[37] L Pontriagyn, *Ordinary Differential Equations* . Addison-Wesley 1962

[38] M. Renardy, *Existence of Slow Flows of Viscoelastic Fluids with Differential Constitutive Equations,* Z. Angew. Math. Mech. 65, pp. 449-451, 1985.

[39] M. Renardy, J. Nohel, W. Hrusa, *Mathematical Problems in Viscoelasticity,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 35, Longman Scientific and Technical, 1987.

[40] M. Renardy, *Inflow Boundary Conditions for Steady Flows of Viscoelastic Fluids with Differential Constitutive Laws,* Rocky Mountain Journal of Math., Vol. 18, No. 2, pp. 445-453, 1988.

[41] M.A. Rojas-Medar, R. Beltrán-Barrios, *The initial value problem for the equations of magnetohydrodynamic type in non cylindrical domains,* Revista de Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, 8 (1), pp. 229-251, 1995.

[42] R. Salvi, *On the Existence of Weak Solutions of a Non-Linear Mixed Problem for the Navier-Stokes Equations in a Time Dependent Domain,* J. Fac. Unic. Tokyo Sect. Ia, Math. 32, pp.213-221, 1985.

[43] R. Salvi, *On the Navier-Stokes Equations in Non-Cylindrical Domains: On the Existence and Regularity,* Math. Z. 199, pp. 153-170, 1988.

[44] J. Serrin, *A Note on the Existence of Periodic Solutions of the Navier-Stokes Equations,* Arch. National Mech. Anal. 3 (1959), p.120-122

[45] J. Simon, *Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$,* Ann. Mat. Pura Appl. (IV), Vol. CXLVI, p. 65-96, 1987.

[46] J. Simon, *Sobolev, Besov and Nikolskii Fractional Spaces: Imbedding and Comparisons for Vector Valued Spaces on an Interval,* Ann. Mat. Pura Appl. (IV), Vol. LCVII, p. 117-148, 1990.

[47] J. Simon, *Non-homogeneous Viscous Incompressible Fluids: Existence of Velocity, density and Pressure,* SIAM J. Math. Anal., Vol. 21, No. 5, p. 1093-1117. 1990

[48] V. A. Solonnikov, *Estimates for Solutions of Non-stationary Navier-Stokes Equations,* J. Soviet Math. 8, p. 467-529, 1977.

[49] R. Témam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis,* North Holland, Amsterdam, 1977.

[50] F. Treves, *Basic Linear Partial Differential Equations,* Academic Press, 1975.

[51] A. Valli, *Navier-Stokes Equations for Compressible Fluids: Global Estimates and Periodic Solutions, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics,* Vol. 45 (1986), part 2, p.467-476

[52] K. Yosida, *Functional Analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1978.