SOBRE O SISTEMA NF_ω

CLAYDE REGINA MENDES DOS SANTOS

ORIENTADOR

PROFª DRª AYDA IGNEZ ARRUDA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeira do CNPQ e CAPES.

A Silvio

A meus pais

Ā minha avō.

AGRADEÇO

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e, especialmente à Profª Ayda Ignez Arruda, por me orientar durante o período de Mestrado e na redação desta Dissertação; aos professores Francisco Blasi e Ronaldo Passini pelos conceitos matemáticos e sociais que sempre transmitiram e ao CNPQ e CAPES pelo apoio financeiro.

PREFÁCIO

Neste trabalho iniciamos o desenvolvimento sistemático da teoria paraconsistente de conjuntos $\mathbf{NF}_\omega$, sendo que aqui será estudada a parte de $\mathbf{NF}_\omega$ correspondente aos capítulos IX e X de Rosser [19], bem como algumas propriedades básicas do conjunto de Russell. Cumpre observar que grande parte dos resultados incluídos neste trabalho, foram mencionados, sem demonstração, em Arruda [7] e [8].

O principal interesse no desenvolvimento de $\mathbf{NF}_\omega$ está em verificar quais resultados da Teoria Clássica de Conjuntos $\mathbf{NF}$ (cf. Rosser [19]), se mantêm quando a lógica subjacente usada for o sistema $\mathbf{C}^{=}_{\omega}$ (cf. da Costa [10]), uma lógica bastante mais fraca que a clássica, no que concerne à negação. Por outro lado, como a lógica subjacente é mais fraca que a clássica, o esquema da separação pode ser postulado numa forma "mais forte" que em $\mathbf{NF}$. Com isso garante-se a existência de conjuntos contraditórios, como $R = \hat{x}(x \notin x)$, que não podem existir na teoria clássica de conjuntos, pois sua existência gera paradoxos (como o de Russell), que trivializam a teoria. Todavia, quando a lógica subjacente for paraconsistente, o fato de se provar, por exemplo, que $R \in R \;\&\; R \notin R$, não leva, em geral a trivialização da respectiva teoria de conjuntos.

Assim sendo, o desenvolvimento sistemático de uma teoria paraconsistente de conjuntos como, por exemplo, $\mathbf{NF}_\omega$, é de grande interesse para a busca de teorias de conjuntos mais fortes que as usuais, ou seja, de teorias de conjuntos que se aproximem mais da teoria de conjuntos imaginada por Cantor. Por outro lado, o estudo sistemático de $\mathbf{NF}_\omega$ pode auxiliar no desenvolvimento de teorias de conjuntos, construídas a partir de lógicas não clássicas.

Em [10], N.C.A. da Costa construiu uma hierarquia de cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade, $\mathbf{C}^{=}_{n}$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, e esboçou a construção da respectiva hierarquia de teorias de conjuntos de tipo $\mathbf{NF}$, $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$. Mais tarde, A.I. Arruda provou que as duas versões básicas dos sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n < \omega$, propostas por da Costa eram triviais. Assim sendo, ela propôs novas axiomatizações desses sistemas. Este é o assunto abordado no primeiro capítulo.

No segundo capítulo, iniciamos o desenvolvimento sistemático do sistema NF_ω, axiomatizado como em Arruda [8]. Para dar uma idéia mais completa de NF_ω, seguimos passo a passo os capítulos IX e X de Rosser [19]. Neste capítulo, quando a demonstração de um teorema for idêntica à demonstração clássica, ela será omitida; por outro lado, chamaremos atenção para os resultados que, aparentemente, não podem ser adaptados de modo a serem válidos em NF_ω. Como se poderá perceber, tais resultados são poucos e, aparentemente, sem grande importância. Observemos, ainda, que neste capítulo não usaremos o esquema da separação de NF_ω em toda sua força; procuramos usá-lo numa forma "fraca" (a mesma de NF) justamente para que se torne mais evidente a "semelhança" entre NF_ω e NF; pois, num trabalho como este, que é uma introdução ao desenvolvimento sistemático de NF_ω, tal semelhança deve ser enfatizada.

No terceiro capítulo, tratamos das propriedades básicas do conjunto de Russell, $R = \hat{x}(x \notin x)$. Em [7], tais propriedades foram mencionadas, sem demonstração, para os sistemas NF_n, $1 \leq n < \omega$. Através de uma definição conveniente de "indivíduo de Quine" em NF_ω, mostramos que todas as propriedades de R mencionadas em [7] são válidas também em NF_ω.

É claro que deixamos de abordar muitos aspectos interessantes de NF_ω, tais como aqueles que podem ser obtidos usando-se no esquema da separação, em lugar de $F(x)$, fórmulas não estratificáveis, onde não ocorra o símbolo $\supset$, bem como o desenvolvimento da teoria de números cardinais e ordinais. Mesmo assim, acreditamos ter cumprido nosso principal objetivo: dar uma contribuição para o desenvolvimento sistemático de NF_ω.

ÍNDICE

CAPITULO I .

I. A AXIOMÁTICA DAS TEORIAS NF_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

I.1. INTRODUÇÃO

Na época atual, vários autores vem tentando construir teorias de conjuntos nas quais o esquema da separação possa ser formulado sem as restrições usuais para evitar paradoxos; isto é, teorias de conjuntos onde o esquema da separação possa ser formulado como $(Ey)(x)(x \in y) \equiv F(x))$, sendo que a única restrição imposta à fórmula $F(x)$ é a de que a variável y não ocorra livre em $F(x)$.

Obviamente, se quisermos construir tais teorias de conjuntos, não poderemos usar a lógica clássica como lógica subjacente, assim como também não podemos utilizar a lógica intuicionista pois, também neste caso derivam-se paradoxos como, por exemplo, o de Curry-Moh Shaw-Kwei e o de Russell, que trivializam as respectivas teorias de conjuntos.

Assim, tem-se tentado solucionar este problema tomando-se como lógicas subjacentes certas lógicas não clássicas, estritamente mais fracas que a lógica intuicionista. Recentemente, em trabalho ainda não publicado [9], A. I. Arruda e N. C. A. da Costa, usando certas lógicas relevantes fracas, as quais são, também, paraconsistentes, mostraram que é possível construir teorias de conjuntos não triviais, onde o esquema da separação pode ser formulado na sua forma geral: $(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$.

Entretanto, já em 1963 (cf. [10]), N. C. A. da Costa construiu certas teorias de conjuntos, denominadas NF_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, nas quais o esquema da separação, apesar de não poder ser postulado em sua forma geral, pode ser postulado numa forma "mais forte" que na teoria **NF** de Quine. Segundo A. I. Arruda [7], com essas teorias de conjuntos pode-se investigar os dois problemas seguintes, cujas soluções podem nos sugerir e esclarecer certas propriedades heterodoxas das teorias de conjuntos paraconsistentes.

Antes de propor os dois problemas, devemos dizer que uma teoria é *paraconsistente* quando de uma fórmula A e de sua negação $\neg A$ não for possível obter uma fórmula qualquer B.

PROBLEMA 1:- Admitindo-se a existência de alguns conjuntos, que não existem nas teorias de conjuntos usuais, estudar suas propriedades; como, por exemplo, estudar as propriedades do conjunto de Russel, $R_0 = \hat{x}(x \notin x)$.

PROBLEMA 2:- Investigar a conjectura de acordo com a qual, quando enfraquecemos a lógica subjacente, podemos obter teorias de conjuntos estritamente existencialmente mais fortes que os usuais.

DEFINIÇÃO 1:- Sejam $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ duas teorias de conjuntos não triviais, com a mesma linguagem. Dizemos que $\mathbf{T}'$ é *estritamente existencialmente mais forte* que $\mathbf{T}$ se, para todo abstrator $\hat{x}F(x)$, $\vdash \exists\hat{x}F(x)$ em $\mathbf{T}$ implica que $\vdash \exists\hat{x}F(x)$ em $\mathbf{T}'$ e existe pelo menos um abstrator $\hat{x}G(x)$ tal que $\vdash \exists\hat{x}G(x)$ em $\mathbf{T}'$ mas $\exists\hat{x}G(x)$ não é teorema em $\mathbf{T}$.

Intuitivamente, dizer que $\mathbf{T}'$ é *estritamente existencialmente mais forte* que $\mathbf{T}$ significa dizer que todos os conjuntos que existem em $\mathbf{T}$ também existem em $\mathbf{T}'$, mas há pelo menos um conjunto em $\mathbf{T}'$ que não existe em $\mathbf{T}$.

O objetivo principal deste trabalho é o de sistematizar parte dos resultados já obtidos sobre os sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, especialmente aqueles sobre $\mathbf{NF}_\omega$, mencionados por A. I. Arruda em [8]. Para efetuar esta sistematização, iniciaremos com a descrição das lógicas subjacentes aos sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$; a seguir, mencionaremos algumas formulações do esquema de separação, que se mostram inadequadas, pois, com as mesmas, A.I. Arruda provou que os respectivos sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, são triviais e, finalmente, enunciaremos as axiomáticas dos sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, que serão usadas neste trabalho.

No que segue, denotaremos o cálculo proposicional clássico axiomatizado como em Kleene [18], por $\mathbf{C}_0$, o cálculo de predicados de primeira ordem sem igualdade, por $\mathbf{C}_0^*$, o cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade, por $\mathbf{C}_0^=$ e $\mathbf{D}_0$ denotará o cálculo de descrições clássico.

I.2. AS LÓGICAS SUBJACENTES AOS SISTEMAS $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

As teorias de conjuntos $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, são teorias de conjuntos construídas de modo similar ao $\mathbf{NF}$ de Quine (ver Rosser [19]), porém, tendo como ló gicas subjacentes os cálculos de descrições $\mathbf{D}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Os cálculos de descrições $\mathbf{D}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, são construídos de maneira similar ao cálculo clássico de descrições $\mathbf{D}_o$ (ver Rosser [19], capítulo VIII), a partir dos cálculos de primeira ordem com igualdade $\mathbf{C}_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$. Os cálculos $\mathbf{C}_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$, são construídos a partir dos cálculos de predicados de primeira ordem sem igualdade de, $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, e estes são construídos a partir dos cálculos proposicionais $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

I.2.1. OS CÁLCULOS $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Nesta secção, daremos a axiomática dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, mencionando apenas alguns dos teoremas fundamentais. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar [1] e [10].

A linguagem dos cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, é composta de:

a) um número enumerável de variáveis proposicionais.

b) conectivos:

$\supset$: implica

& : e

v : ou

$\neg$: não

c) parênteses

Utilizaremos, também, as definições usuais de fórmula e teorema; bem como as convenções para eliminação de parênteses de Kleene [18].

POSTULADOS DOS CÁLCULOS $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Para enunciar esses postulados, precisamos esclarecer algumas notações neles usadas. Temos, então, as seguintes definições:

DEFINIÇÃO 2: A^o é uma abreviação para a fórmula $\neg(A \& \neg A)$.

DEFINIÇÃO 3: a) $A^o = A^1$

b) A^n é uma abreviação para a fórmula $A^{oo\cdots o}$, isto é, A seguido n vezes pelo símbolo ^{o}.

DEFINIÇÃO 4: $A^{(n)}$ é uma abreviação para a fórmula $A^o \& A^{oo} \& \ldots \& A^n$

Chamamos de fórmula bem comportada a uma fórmula do tipo $A^{(n)}$ e é bom lembrar que para as fórmulas bem comportadas em C_n, $1 \leqslant n < \omega$, valem todas as tautologias do cálculo proposicional clássico.

Visto isso, podemos enunciar os postulados de C_ω, que são os seguintes:

1) $A \supset (B \supset A)$
2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3) $A \supset (B \supset A \& B)$
4) $A \& B \supset A$
5) $A \& B \supset B$
6) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
7) $A \supset A \vee B$
8) $B \supset A \vee B$
9) $A,\ A \supset B / B$
10) $\neg\neg A \supset A$
11) $A \vee \neg A$

Os postulados de C_1 são os de C_ω mais os seguintes:

12) $B^{o} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$
13) $A^{o} \& B^{o} \supset (A \supset B)^{o} \& (A \& B)^{o} \& (A \vee B)^{o}$

Como postulados do cálculo C_n, $2 \leqslant n < \omega$, temos os postulados de C_ω e mais os seguintes:

12) $B^{(n)} \supset (A \supset B\ ) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$
13 $A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \supset B)^{(n)} \& (A \& B)^{(n)} \& (A \vee B)^{(n)}$

DEFINIÇÃO 5: Em C_1, $\neg^* A$ é uma abreviação para a fórmula $\neg A \& A^{o}$. Em C_n, $2 \leqslant n < \omega$, $\neg^* A$ é uma abreviação para $\neg A \& A^{(n)}$.

Vale esclarecer que os cálculos C_n, $1 \leqslant n < \omega$, diferenciam-se do cálculo proposicional clássico em dois pontos fundamentais: neles, em geral, não são válidos o princípio de contradição e o de redução ao absurdo; ou seja:

a) $\neg(A \& \neg A)$ não é válido em geral
b) de duas fórmulas contraditórias, A e $\neg A$, nem sempre é possível deduzir uma fórmula arbitrária B.

Resulta disso que a fórmula que trivializa C_n, $1 \leqslant n < \omega$, é do tipo

$A \,\&\, \neg^* A$.

A seguir mencionaremos alguns dos principais teoremas dos sistemas C_n, $1 \leq n < \omega$. Um estudo completo dos sistemas C_n, $1 \leq n < \omega$, pode ser encontrado em E. H. Alves [1].

TEOREMA 1:- *Se* $A_1, \ldots, A_m$ *são os componentes atômicos das fórmulas de* $\Gamma \cup \{A\}$, *então uma condição necessária e suficiente, para que* $\Gamma \vdash A$ *em* C_0 *é que* $\Gamma, A_1^{(n)}, \ldots, A_m^{(n)} \vdash A$ *em* C_n, $1 \leq n < \omega$.

DEFINIÇÃO 6: Um sistema S é dito *trivial* se nele toda fórmula é teorema.

DEFINIÇÃO 7: Um sistema S é *finitamente trivializável* se existe uma fórmula (não um esquema) F, tal que o sistema obtido pela adição a S da fórmula F, como um novo postulado, é trivial.

TEOREMA 2:- *Todos os sistemas* C_n, $1 \leq n \leq \omega$, *são não triviais. Os sistemas* C_n, $1 \leq n < \omega$, *são finitamente trivializáveis, mas* C_ω *não o é.*

DEMONSTRAÇÃO:- Uma fórmula do tipo $A \,\&\, \neg A \,\&\, A^{(n)}$ trivializa C_n, $1 \leq n < \omega$, pois nesses sistemas vale $\vdash A \,\&\, \neg A \,\&\, A^{(n)} \supset B$. C_ω não é finitamente trivializável, pois nele prova-se que não existe nenhuma fórmula fixa F tal que $\vdash F \supset A$, onde A é uma fórmula qualquer.

TEOREMA 3:- *Todo sistema da hierarquia* $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots, C_\omega$ *é estritamente mais forte que os anteriores.*

DEMONSTRAÇÃO:- É fácil provar, por exemplo, que $B^{(n)} \,\&\, (A \supset B) \,\&\, (A \supset \neg B) \supset \neg A$ não é válido em C_{n-1}. Para provar que C_ω é estritamente mais fraco que C_n, $n < \omega$, basta observar que em C_ω não valem os axiomas 12 e 13 de C_n, $n < \omega$.

TEOREMA 4:- *Os sistemas* C_n, $1 \leq n \leq \omega$, *não são decidíveis por matrizes finitas.*

TEOREMA 5:- *Seja* A *uma fórmula de* C_0 *e* A^* *a fórmula obtida substituindo-se em* A, $\neg$ *por* $\neg^*$. *Se* $\vdash A$ *em* C_0, *então* $\vdash A^*$ *em* C_n, $1 \leq n < \omega$.

TEOREMA 6:- *Adicionando-se a* C_n, $1 \leq n < \omega$, *a fórmula* $A^{(n)}$ *como um novo postulado, obtemos o cálculo proposicional clássico* C_0.

DEMONSTRAÇÃO:- Em C_n, $1 \leqslant n < \omega$, temos $\vdash B^{(n)}$ & $(A \supset B)$ & $(A \supset \neg B) \supset \neg A$, ora se para toda fórmula A, $\vdash A^{(n)}$, *então* $\vdash B^{(n)}$, *logo* $\vdash (A \supset B)$ & $(A \supset \neg B) \supset \neg A$.

Existe uma semântica de tipo Henkin para C_n, $1 \leqslant n < \omega$ (cf. da Costa e Alves, [16] e [17]), obtida através da seguinte definição de valoração.

DEFINIÇÃO 8:- Seja F o conjunto das fórmulas de C_n, $1 \leqslant n < \omega$, uma *valoração* para C_n é uma função $\nu: F \longrightarrow \{0,1\}$ tal que:

1) Se $\nu(A) = 0$, então $\nu(\neg A) = 1$

2) Se $\nu(\neg\neg A) = 1$, então $\nu(A) = 1$

3) Se $\nu(B^{(n)}) = \nu(A \supset B) = \nu(A \supset \neg B) = 1$, então $\nu(A) = 0$

4) $\nu(A \supset B) = 1$ se, e somente se, ou $\nu(A) = 0$ ou $\nu(B) = 1$

5) $\nu(A \& B) = 1$ se, e somente se, $\nu(A) = \nu(B) = 1$

6) $\nu(A \vee B) = 1$ se, e somente se, ou $\nu(A) = 1$ ou $\nu(B) = 1$

7) Se $\nu(A^{(n)}) = \nu(B^{(n)}) = 1$, então $\nu((A \supset B)^{(n)}) = \nu((A \& B)^{(n)}) =$
$= \nu((A \vee B)^{(n)}) = 1$.

DEFINIÇÃO 9:- Uma valoração ν é um *modelo* de um conjunto de fórmulas Γ se, e somente se, $\nu(A) = 1$ para toda fórmula A em Γ. $\Gamma \models A$ significa que $\nu(A) = 1$ para toda valoração ν que é um modelo de Γ.

TEOREMA 7:- $\Gamma \vdash A$ *em* C_n *se, e somente se,* $\Gamma \models A$, $1 \leqslant n < \omega$.

A partir da definição de valoração é possível definir as *quasi-matrizes* (cf. Alves [1]), com as quais podemos provar o seguinte teorema:

TEOREMA 8:- C_n, $1 \leqslant n < \omega$, *é decidível*

I.2.2. OS CÁLCULOS C_n^*, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

O cálculo de predicados de primeira ordem C_1^* é obtido de C_1, apliando-se convenientemente a linguagem e adicionando-se aos axiomas de C_1 os seguintes postulados, com as restrições usuais (cf. Kleene [18]).

I) $A(t) \supset (Ex)A(x)$

II) $(x)A(x) \supset A(t)$

III) $A(x) \supset C \,/\, (Ex)(A(x) \supset C)$

IV) $C \supset A(x) \,/\, C \supset (x)A(x)$

V) *Se* A *e* B *são fórmulas congruentes, ou, se uma é obtida da outra, pela eliminação de quantificadores vácuos, então* $A \equiv B$ *é um axioma.*

VI) $(x)(A(x))^{o} \supset ((x)A(x))^{o}$

VII) $(x)(A(x))^{o} \supset ((Ex)A(x))^{o}$

Os postulados de C_n^*, $2 \leqslant n < \omega$, são os do respectivo C_n, mais I - V acima e, ainda,

VI) $(x)(A(x))^{(n)} \supset ((x)A(x))^{(n)}$

VII) $(x)(A(x))^{(n)} \supset ((Ex)A(x))^{(n)}$

Os postulados de C_ω^* são os de C_ω e mais os postulados do I - V acima.

I.2.3. OS CÁLCULOS $C_n^=$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$

Os postulados de $C_1^=$ são os de C_1^* e mais os seguintes:

$I^=$) $x = x$

$II^=$) $x = y \supset (A(x) \supset A(y))$

Os axiomas de $C_n^=$, $1 \leqslant n < \omega$, são os de C_n^* e mais $I^=$ e $II^=$; do mesmo modo, os postulados de $C_\omega^=$ são os de C_ω^* e mais $I^=$ e $II^=$.

I.2.4. OS CÁLCULOS D_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

O cálculo de descrições D_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, (cf. [10]), é obtido de $C_n^=$, introduzindo-se o símbolo ι (descritor) e os postulados D1 - D5, abaixo.

Se $F(x)$ é uma fórmula, então "o objeto x tal que $F(x)$" é denotado por $\iota x F(x)$.

DEFINIÇÃO 10:- $(E_1 x)A \equiv (Ey)(x)(x = y \equiv A)$

D1: $(x)F(x) \supset F(\iota y Q(y))$

D2: $(x)(P(x) \equiv Q(x)) \supset \iota x P(x) = \iota x Q(x)$

D3: $\iota x F(x) = \iota y F(y)$

D4: $P(\iota y Q(y)) \supset (Ex)P(x)$

D5: $(E_1 x)P(x) \supset ((x)((\iota x P(x) = x) \equiv P(x)))$.

TEOREMA 9:- *Sejam* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *os componentes atômicos das fórmulas de* $\Gamma \cup \{A\}$. *Então,* $\Gamma \vdash A$ *em* $\mathbf{D}_o$ *se, e somente se,* $A_1^{(n)}, \ldots, A_m^{(n)}$, $\Gamma \vdash A$ *em* $\mathbf{D}_n$, $1 \leqslant n < \omega$.

TEOREMA 10:- *Seja* F *uma fórmula de* $\mathbf{D}_o$ *e* F^* *a fórmula obtida de* F *substituindo-se* $\neg$ *por* $\neg^*$. *Então,* $\vdash F$ *em* $\mathbf{D}_o$ *se, e somente se,* $\vdash F^*$ *em* $\mathbf{D}_n$ $1 \leqslant n < \omega$.

TEOREMA 11:- $\mathbf{D}_n$ *é uma extensão conservativa de* $\mathbf{C}_n^{=}$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

TEOREMA 12:- $\mathbf{C}_n^*$, $\mathbf{C}_n^{=}$, $\mathbf{D}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, *não são triviais.* $\mathbf{C}_n^*$, $\mathbf{C}_n^{=}$, $\mathbf{D}_n$, $1 \leqslant n < \omega$, *são finitamente trivializáveis e* $\mathbf{C}_\omega^*$, $\mathbf{C}_\omega^{=}$, $\mathbf{D}_\omega$ *não são finitamente trivializáveis.*

I.3. O ESQUEMA DA SEPARAÇÃO EM $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

Os sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, são construídos a partir dos $\mathbf{D}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, tomando-se como axiomas específicos o axioma da extensionalidade

$$(x,y)((z)(z \in x \equiv z \in y) \supset x = y)$$

e, ainda, o esquema da separação.

Todavia, não se pode postular o esquema da separação na forma geral:

$$(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$$

pois,assim, poderíamos deduzir, por exemplo, os paradoxos de Curry-Moh Shaw-Kwei e o de Russell.

PARADOXO DE CURRY-MOH SHAW-KWEI

Tomando-se $F(x)$ como sendo $x \in x \supset B$, onde B é uma fórmula qualquer, teríamos

$$(x)(x \in C \equiv x \in x \supset B)$$

$$C \in C \equiv C \in C \supset B$$

mas, como é válida em $\mathbf{C}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, a lei $A \supset (A \supset B) \equiv A \supset B$, obteríamos $C \in C$ e, portanto, B. Dessa forma, qualquer fórmula B seria teorema e, então, os $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, seriam triviais.

PARADOXO DE RUSSELL.

Este paradoxo, aparentemente, não pode ser obtido, por prova direta, em NF_ω, mas, pode nos demais NF_n, $n < \omega$. De fato, tomemos $F(x)$ como sendo $\neg^*(x \in x)$.

Assim, temos:

$$(x)(x \in R \equiv \neg^*(x \in x)), \text{ donde}$$

$$R \in R \equiv \neg^*(R \in R).$$

Dessa fórmula obtemos $R \in R$ & $\neg^*(R \in R)$, uma fórmula da qual podemos obter qualquer fórmula B.

Logo, os NF_n, $1 \leqslant n < \omega$, com o esquema da separação em sua forma geral, são triviais.

Como não se pode postular o esquema da separação em sua forma geral, foram propostos por N.C. da Costa duas versões (ver [13] e [15])

DEFINIÇÃO 11:- a) Uma fórmula F *não contém o símbolo* $\supset$ se nenhuma subfórmula de F é do tipo $A \supset B$.

b) Uma fórmula F *não contém o símbolo* $\neg^*$ se não for do tipo B_1 & B_2 & ... & B_n, onde existe B_i e B_j tais que B_i é $\neg A$ e B_j é A°.

(I) $(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x)$ *, onde* x *e* y *são variáveis distintas,* y *não figura livre em* $F(x)$*,* $F(x)$ *é estratificável ou, se não o for,* $F(x)$ *não contém os símbolos* $\supset$ *e* $\neg^*$.

DEFINIÇÃO 12:- O símbolo $\neg$ *ocorre essencialmente* na fórmula F se:

a) F é da forma $\neg A$, ou

b) F é da forma $A \supset B$, $A \vee B$, A & B e o símbolo $\neg$ ocorre essencialmente em A e B .

c) F é da forma $(x)A$ ou $(Ex)A$ e o símbolo $\neg$ ocorre essencialmente em A .

(II) $(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$, *onde* x *e* y *são variáveis distintas,* y *não ocorre livre em* $F(x)$, $F(x)$ *é estratificável ou, se não o for,* $F(x)$ *não contém o símbolo* $\neg^*$, *mas, o símbolo* $\neg$ *ocorre essencialmente em* $F(x)$.

Em [8] , A. I. Arruda mostrou que essas duas versões levam à trivialização de NF_n, $1 \leqslant n < \omega$.

Chamaremos de INF_n, $IINF_n$, às versões de NF_n, $1 \leqslant n < \omega$, obtidas com as respectivas formulações do esquema da separação.

Isto posto, como está demonstrado em [8] , provaremos que INF_1 e $IINF_1$, são triviais e, para NF_n, $1 \leqslant n < \omega$, os resultados são análogos.

TEOREMA 13:- INF_1 *é trivial.*

DEMONSTRAÇÃO:- Em NF_1, existem os conjuntos $A = \hat{x}(x \in x)$ e $R = \hat{x}(x \notin x)$. Consequentemente, como $x \in R \mathbin{\&} \neg^*(x \in A)$ é uma fórmula estratificável, então, existe em INF_1 o conjunto $B = R - A$. Assim,

$$(x)(x \in B \equiv x \notin x \mathbin{\&} \neg^*(x \in x)); \text{ donde}$$

$$B \in B \equiv B \notin B \mathbin{\&} \neg^*(B \in B)$$

Suponhamos $B \in B$, então

$$B \in B \vdash B \notin B \mathbin{\&} \neg^*(B \in B)$$

$$\vdash \neg^*(B \in B)$$

Por outro lado, supondo $\neg^*(B \in B)$, obtemos:

$$\neg^*(B \in B) \vdash B \notin B \mathbin{\&} \neg^*(B \in B)$$

$$\vdash B \in B$$

Logo, temos:

$$B \in B \vee \neg^*(B \in B) \vdash B \in B \mathbin{\&} \neg^*(B \in B).$$

Como $B \in B \vee \neg^*(B \in B)$ é um teorema em INF_1, então

$$\vdash B \in B \mathbin{\&} \neg^*(B \in B)$$

Entretanto, $\vdash A \mathbin{\&} \neg^*A \supset B$ em INF_1. Logo, INF_1 é trivial.

TEOREMA 14:- **IINF**$_1$ *é trivial.*

DEMONSTRAÇÃO:- A fórmula $\neg\neg(x \notin x)$ & $\neg(x \in x$ & $x \notin x)$ não é estratificável, mas esta fórmula não contém o símbolo $\neg^*$ e o símbolo $\neg$ ocorre essencialmente nela. Assim, existe em **IINF**$_1$ um conjunto A determinado por essa fórmula. Consequentemente, tendo em vista que $\vdash \neg\neg\neg A$ & $A^o \equiv \neg A$ & A^o, obtemos:

$$A \in A \equiv \neg\neg(A \notin A) \;\&\; \neg(A \in A \;\&\; A \notin A)$$

$$A \in A \equiv \neg(A \in A) \;\&\; (A \in A)^o$$

$$A \in A \equiv \neg^*(A \in A)$$

e, daí, obtemos $\vdash A \in A$ & $\neg^*(A \in A)$. Logo **IINF**$_1$ é trivial.

Outra demonstração do Teorema 14 é obtida da seguinte forma: pela formulação **II** do esquema da separação a fórmula $x \notin x$ & $\neg((x \in x$ & $x \notin x)$ & & $(x \in x$ & $x \notin x))$ determina um conjunto B em **IINF**$_1$. Daí, como em D_1, $\vdash (A$ & $\neg A)^o$, obtemos

$$B \in B \equiv B \notin B \;\&\; \neg((B \in B \;\&\; B \notin B) \;\&\; (B \in B \;\&\; B \notin B))$$

$$B \in B \equiv B \notin B \;\&\; \neg(B \in B \;\&\; B \notin B)$$

$$B \in B \equiv B \notin B \;\&\; (B \in B)^o$$

Então, de forma análoga à demonstração anterior, concluímos que **IINF**$_1$ é trivial.

Uma terceira demonstração do Teorema 14 é obtida da seguinte forma:

$$(z)\neg((x \in z \;\&\; x \notin z) \;\&\; (z \in x \;\&\; z \notin x)) \;\&\; x \notin x$$

determina um conjunto D em **IINF**$_1$. Então, temos:

$$D \in D \vdash \neg((D \in D \;\&\; D \notin D) \;\&\; (D \in D \;\&\; D \notin D)) \;\&\; D \notin D$$

Logo, como $\vdash (A$ & $\neg A)^o$ em D_1, então:

$$D \in D \vdash \neg(D \in D \;\&\; D \notin D) \;\&\; D \notin D$$

$$D \in D \vdash D \notin D \;\&\; (D \in D)^o$$

Donde obtemos:

(1) $D \in D \vdash D \in D \ \& \ \neg^*(D \in D)$

(2) $\neg^*(D \in D) \vdash \neg^*((z)\neg((D \in z \ \& \ D \notin z) \ \& \ (z \in D \ \& \ z \notin D)) \ \& \ D \notin D)$

$\vdash \neg^*((z)\neg((D \in z \ \& \ D \notin z) \ \& \ (z \in D \ \& \ z \notin D)) \vee$

$\vee \ \neg^*(D \notin D)$

Como, $\vdash \neg^*(D \notin D) \supset D \in D$, obtemos de (1):

(3) $\neg^*(D \notin D) \vdash D \in D \ \& \ D \notin D \ \& \ (D \in D)^{\circ}$

Por outro lado, de $\neg^*((z)\neg((D \in z \ \& \ D \notin z) \ \& \ (z \in D \ \& \ z \notin D))$, obtemos $(Ez)\neg^*\neg((D \in z \ \& \ D \notin z) \ \& \ (z \in D \ \& \ z \notin D))$, donde obtemos:

(4) $\neg\neg((D \in K \ \& \ D \notin K) \ \& \ (K \in D \ \& \ K \notin D)$

Como já sabemos que $\vdash (A \ \& \ \neg A)^{\circ}$, $\vdash A^{\circ} \supset (\neg A)^{\circ}$ e $\vdash A^{\circ} \ \& \ B^{\circ} \supset (A \ \& \ B)^{\circ}$, temos:

(5) $(\neg((D \in K \ \& \ D \notin K) \ \& \ (K \in D \ \& \ K \notin D)))^{\circ}$

De (4), obtemos $\vdash K \in D$ e, então:

$(z)\neg((K \in z \ \& \ K \notin z) \ \& \ (z \in K \ \& \ z \notin K))$

Logo,

(6) $\neg((K \in D \ \& \ K \notin D) \ \& \ (D \in K \ \& \ D \notin K))$.

Mas, esta fórmula é do tipo $\neg(A \ \& \ B)$ com A° e B°, então: $\neg(A \ \& \ B) \equiv$ $\equiv \neg(B \ \& \ A)$.

De (6), obtemos:

(7) $\neg((D \in K \ \& \ D \notin K) \ \& \ (K \in D \ \& \ K \notin D))$

De (4), (5) e (7) obtemos uma contradição que trivializa $\mathbf{IINF_1}$. Assim,

(8) $\neg^*(z)\neg((D \in z \ \& \ D \notin z) \ \& \ (z \in D \ \& \ z \notin D) \vdash D \in D \ \& \ \neg^*(D \in D)$

Todavia, de (2), (3) e (8) obtemos:

(9) $\neg^*(D \in D) \vdash D \in D \ \& \ \neg^*(D \in D)$

Então, de (1) e (9) obtemos:

(10) $(D \in D) \vee \neg^*(D \in D) \vdash D \in D \mathbin{\&} \neg^*(D \in D)$ donde, $\vdash D \in D \mathbin{\&} \neg^*(D \in D)$. Logo, $\mathbf{IINF_1}$ é trivial. ∎

Ainda, em [8] , A. I. Arruda propõe mais duas versões de $\mathbf{NF_n}$, $1 \leqslant n < \omega$, que correspondem às versões $\mathbf{I'NF_1}$ e $\mathbf{II'NF_1}$, as quais são obtidas de $\mathbf{INF_1}$ e $\mathbf{IINF_1}$, respectivamente, introduzindo-se

$$\exists \hat{x} \bar{Q} \supset ((P(x) \equiv Q(x)) \supset (\neg P(x) \equiv \neg Q(x))$$

como um novo axioma.

É claro que $\mathbf{I'NF_1}$ e $\mathbf{II'NF_1}$ são triviais, uma vez que são apenas extensões de $\mathbf{INF_1}$ e $\mathbf{IINF_1}$.

Em vista desses resultados, A. I. Arruda propõe uma nova versão do esquema da separação $\mathbf{NF_n}$, $1 \leqslant n < \omega$, que é a seguinte:

$(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$, onde x e y são variáveis distintas, y não ocorre livre em $F(x)$, $F(x)$ é estratificável ou, se não o for, todos os componentes atômicos de $F(x)$ são precedidos de uma ou mais ocorrências do símbolo $\neg$.

Todavia, como essa versão não é adequada para se estudar o Problema 2, ela propõe as seguintes versões do esquema da separação para cada $\mathbf{NF_n}$, $1 \leqslant n < \omega$ (ver [7]).

ESQUEMA DA SEPARAÇÃO PARA $\mathbf{NF_1}$: *$(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$, onde x e y são variáveis distintas, y não ocorre livre em $F(x)$, $F(x)$ é estratificável ou, se não o for, $F(x)$ é do tipo $x \notin x$.*

ESQUEMA DA SEPARAÇÃO PARA $\mathbf{NF_n}$, $2 \leqslant n < \omega$: *$(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$, onde x e y são variáveis distintas, y não ocorre livre em $F(x)$, $F(x)$ é estratificável ou, se não o for, $F(x)$ é uma das seguintes fórmulas: $x \notin x$, $(x \notin x \mathbin{\&} (x \in x)^{(m)}$, $1 \leqslant m < n$.*

Aparentemente, para $\mathbf{NF_\omega}$, pode-se manter a formulação do esquema da separação proposta por N. C. A. da Costa:

ESQUEMA DA SEPARAÇÃO PARA $\mathbf{NF_\omega}$: *$(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$, onde x e y são variáveis distintas, y não ocorre livre em $F(x)$, $F(x)$ é estratificável ou, se não o for, o símbolo $\supset$ não ocorre em $F(x)$.*

I.4. AXIOMÁTICA DOS SISTEMAS NF_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

A seguir daremos a axiomática de NF_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$, proposta por A. I. Arruda (ver [7]) e esta será a axiomática usada nos capítulos seguintes. Também é oportuno mencionar que as convenções sobre notações usadas daqui em diante serão essencialmente as de Rosser [19].

Para construirmos a hierarquia dos NF_n, $1 \leqslant n < \omega$, utilizamos os axiomas do cálculo de descrições D_n, $1 \leqslant n < \omega$, correspondente e acrescentamos como axiomas específicos o axioma da extensionalidade, o da separação (como mencionado na secção I.3) e um axioma para indivíduos de Quine.

DEFINIÇÃO 13:- x é um *indivíduo de Quine* se $x = \{x\}$.

O postulado para indivíduos de Quine em NF_n, $1 \leqslant n < \omega$ é o seguinte:

$$(Ex,y)(x \neq y \;\&\; x = \{x\} \;\&\; y = \{y\}) \;\&\; (x)(x = \{x\} \supset (x \in x)^{(n)})$$

A partir daqui, denotaremos por **IQ** a classe dos indivíduos de Quine no sistema NF_n em consideração.

O sistema NF_ω é construído a partir do cálculo de descrições D_ω e, além disso, tem como axiomas específicos o axioma da extensionalidade, o da separação (formulados na secção I.3) e o seguinte axioma para o complemento:

$$(x)(x \in \alpha \vee x \in \bar{\alpha}).$$

I.5. OS SISTEMAS NF_n, $1 \leqslant n < \omega$.

Nesta secção trataremos de alguns resultados referentes aos sistemas NF_n, $1 \leqslant n < \omega$.

Neste sistema define-se:

conjunto universal: $V = \hat{x}(x = x)$

conjunto vazio : $\Lambda = \hat{x}(x \neq x \;\&\; (x = x)^{(n)})$

complemento de α : $\bar{\alpha} = \hat{x}(x \notin \alpha \;\&\; (x \in \alpha)^{(n)})$

O teorema fundamental de NF_n, $1 \leqslant n < \omega$, é o seguinte (cf. da Costa [15]):

TEOREMA 15:- *Se* $\vdash F$ *em* NF, *então* $\vdash F^*$ *em* NF_n, $1 \leqslant n < \omega$, *onde* F^* *é a fórmula obtida de* F *substituindo-se* $\neg$ *por* $\neg^*$.

DEMONSTRAÇÃO:- A demonstração é imediata a partir do Teorema 10.

Isto posto, todos os teoremas de **NF**, substituindo-se $\neg$ por $\neg^*$, transformar-se-ão em teoremas de $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n < \omega$. Assim sendo, demonstraremos apenas alguns teoremas que não podem ser obtidos pelo Teorema 15.

DEFINIÇÃO 14:- Em **NF**, define-se

conjunto vazio: $\phi = \hat{x}(x \neq x)$

complemento : $\widetilde{\alpha} = \hat{x}(x \notin \alpha)$

TEOREMA 16:- a) $\vdash \Lambda \subseteq \phi$

b) $\vdash \bar{\alpha} \subseteq \widetilde{\alpha}$

c) $\vdash \widetilde{\widetilde{\alpha}} \subseteq \alpha$

d) $\vdash \alpha \subseteq \phi \cup \alpha$

e) $\vdash \phi \cap \alpha \subseteq \phi$

DEMONSTRAÇÃO (em $\mathbf{NF}_1$):

a) $(x)(x \neq x \;\&\; (x = x)^{\circ}) \vdash (x)(x \neq x)$

$\vdash (x)(x \in \Lambda \supset x \in \phi)$

$\vdash \Lambda \subseteq \phi$

b) $(x)(x \notin \alpha \;\&\; (x \in \alpha)^{\circ}) \vdash (x)(x \notin \alpha)$

$\vdash (x)(x \in \bar{\alpha} \subseteq x \in \widetilde{\alpha})$

$\vdash \bar{\alpha} \subseteq \widetilde{\alpha}$

c) como $\widetilde{\widetilde{\alpha}} =_{df} \neg(x \in \widetilde{\alpha})$, então

$\neg(x \in \widetilde{\alpha}),\ x \in \alpha \vdash x \in \alpha$

Por outro lado, tomando-se como hipótese $\neg(x \in \widetilde{\alpha})$, $x \in \widetilde{\alpha} \;\&\; (x \in \widetilde{\alpha})^{\circ}$, temos uma fórmula do tipo $A \;\&\; \neg A \;\&\; A^{\circ}$, que trivializa o sistema; então, obtemos $x \in \alpha$.

Logo,

$\neg(x \in \widetilde{\alpha}),\ x \in \alpha \vee (x \in \widetilde{\alpha} \;\&\; (x \in \widetilde{\alpha}))^{\circ} \vdash x \in \alpha$

$\neg(x \in \widetilde{\alpha}),\ x \in \alpha \vee \neg^*(x \in \alpha) \vdash x \in \alpha$

donde, $\neg(x \in \widetilde{\alpha}) \vdash x \in \alpha$

então, $\vdash (x)(\neg(x \in \widetilde{\alpha}) \supset x \in \alpha)$

$\vdash \widetilde{\widetilde{\alpha}} \subseteq \alpha$.

d) $(x)(x \in \alpha) \vdash (x)(x \in \alpha \vee x \in \phi)$

$\vdash (x)(x \in \alpha \supset x \in \alpha \cup \phi)$

$\vdash \alpha \subseteq \alpha \cup \phi.$

e) $(x)(x \in \phi \ \& \ x \in \alpha) \vdash (x)(x \in \phi)$

$\vdash (x)(x \in \phi \cap \alpha \supset x \in \phi)$

$\vdash \phi \cap \alpha \subseteq \phi$

Finalmente, analisemos rapidamente os Problemas 1 e 2 (pág.2) nos sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n < \omega$.

O Problema 1 será analisado no capítulo III, onde resumiremos algumas das propriedades do conjunto de Russell em $\mathbf{NF}_\omega$. Como se poderá ver facilmente, tais propriedades são válidas também em $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n < \omega$.

Quanto ao Problema 2, a conjectura de que enfraquecendo-se a lógica subjacente pode-se construir teorias de conjuntos estritamente existencialmente mais forte que os usuais não é válida para os sistemas $\mathbf{NF}_n$, $1 \leqslant n < \omega$. Isto foi provado por A. I. Arruda (em [8]). Nesse trabalho ela provou que existe um abstrator $\hat{x}G(x)$ tal que $\vdash \exists \hat{x}G(x)$ em $\mathbf{NF}_n$, mas não em $\mathbf{NF}_{n+1}$ e, também, que existe um abstrator $\hat{x}F(x)$ tal que $\vdash \exists \hat{x}F(x)$ em $\mathbf{NF}_{n+1}$, mas não em $\mathbf{NF}_n$.

CAPÍTULO II .

NF_ω

I. A RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

I.1. INTRODUÇÃO

Antes de iniciarmos o desenvolvimento de NF_ω, é conveniente esclarecermos que serão utilizadas, neste capítulo, essencialmente as notações de Rosser [19]. Todavia, usaremos $A,B,C,\ldots,P,Q,F$ como variáveis metalinguísticas para fórmulas e substituiremos pontos por parênteses, seguindo as normas de eliminação de parênteses de Kleene [18].

Convém mencionar, aqui, alguns teoremas de C^*_ω, que serão fundamentais para algumas demonstrações em NF_ω.

Sendo C uma fórmula, onde a variável x não ocorre livre, prova-se, em NF_ω, os seguintes esquemas:

1) $(x)C \equiv C$

2) $(Ex)C \equiv C$

3) $(x)(y)A(x,y) \equiv (y)(x)A(x,y)$

4) $(Ex)(Ey)A(x,y) \equiv (Ey)(Ex)A(x,y)$

5) $(x)A(x) \supset (Ex)A(x)$

6) $(Ex)(y)A(x,y) \supset (y)(Ex)A(x,y)$

7) $(x)(A(x) \,\&\, B(x)) \equiv (x)A(x) \,\&\, (x)B(x)$

8) $(Ex)(A(x) \vee B(x)) \equiv (Ex)A(x) \vee (Ex)B(x)$

9) $(x)(C \,\&\, B(x)) \equiv C \,\&\, (x)B(x)$

10) $(Ex)(C \vee B(x)) \equiv C \vee (Ex)B(x)$

11) $(Ex)(C \,\&\, B(x)) \equiv C \,\&\, (Ex)B(x)$

12) $(x)(C \vee B(x)) \equiv C \vee (x)B(x)$

13) $(Ex)(A(x) \,\&\, B(x)) \supset (Ex)A(x) \,\&\, (Ex)B(x)$

14) $(x)A(x) \vee (x)B(x) \supset (x)(A(x) \vee B(x))$

15) $(x)(C \supset B(x)) \equiv C \supset (x)B(x)$

16) $(x)(A(x) \supset C) \equiv (Ex)A(x) \supset C$

17) $(Ex)(C \supset B(x)) \supset (C \supset (Ex)B(x))$

18) $(Ex)(A(x) \supset C) \supset ((x)A(x) \supset C)$

19) $(Ex)(A(x) \supset B(x)) \supset ((x)A(x) \supset (Ex)B(x))$

Usando a noção de *k-transformadas* (cf. Kleene [18]), prova-se que as conversas de 17 - 19 não são válidas em $\mathbf{C}^*_\omega$.

Voltemos, agora, ao sistema $\mathbf{NF}_\omega$.

Como nesse sistema a negação é muito fraca, A. I. Arruda propôs as seguintes definições:

conjunto universal: $\mathbf{V} =_{df} \hat{x}(Ey)(x \in y)$

conjunto vazio : $\mathbf{\Lambda} =_{df} \hat{x}(y)(x \in y)$

complementar de α : $\overline{\alpha} =_{df} \hat{x}(Ez)(x \in z \ \& \ z \cap \alpha = \mathbf{\Lambda} \ \& \ z \cup \alpha = \mathbf{V})$

α *diferente de* β : $\alpha \neq \beta =_{df} (Ez)(z \in \alpha \ \& \ z \in \overline{\beta}) \vee (Ez)(z \in \beta \ \& \ z \in \overline{\alpha})$

Define-se, ainda,

subconjunto : $A \subseteq B =_{df} (x)(x \in A \supset x \in B)$

subconjunto próprio: $A \subset B =_{df} A \subseteq B \ \& \ A \neq B$ (observe-se que o símbolo $\neq$ usado nesta definição é o de $\mathbf{NF}_\omega$, que é definido sem utilizar negação).

Para justificar as definições de $\mathbf{V}, \mathbf{\Lambda}$ e $\overline{\ }$, A.I. Arruda provou que em **NF** elas são equivalentes às definições usuais de conjunto universal, conjunto vazio e complementar de um conjunto e, ainda, que $(Ex)(x \in \alpha \ \& \ x \in \overline{\beta}) \vee (Ex)(x \in \overline{\alpha} \ \& \ x \in \beta) \equiv \neg(\alpha = \beta)$. É claro que $\mathbf{V}, \mathbf{\Lambda}$ e $\overline{\alpha}$ existem também em **NF**, pois são classes definidas por fórmulas estratificáveis.

Em **NF**, define-se: $U =_{df} \hat{x}(x = x)$

$$\phi =_{df} \hat{x}(x \neq x)$$

$$C\alpha =_{df} \hat{x}(x \notin \alpha)$$

$$\alpha \neq \beta =_{df} \neg(\alpha = \beta)$$

TEOREMA I.1.1: *Em* **NF** *prova-se que* $U = \mathbf{V}$

DEMONSTRAÇÃO:

$t \in U \vdash (E\alpha)(t \in \alpha)$

$\vdash t \in \mathbf{V}$

logo, $\vdash (t)(t \in U \supset t \in \mathbf{V})$ e, então, $\vdash U \subseteq \mathbf{V}$

$t \in \mathbf{V} \vdash t = t$

$\vdash t \in U$

logo, $\vdash (t)(t \in \mathbf{V} \supset t \in U)$ e, então, $\vdash \mathbf{V} \subseteq U$

TEOREMA I.1.2: *Em* NF *prova-se que* $\phi = \Lambda$

DEMONSTRAÇÃO:

$t \in \Lambda \vdash (\alpha)(t \in \alpha)$

$\vdash t \in \phi$

logo, $\vdash (t)(t \in \Lambda \supset t \in \phi)$ e, então, $\vdash \Lambda \subseteq \phi$

$t \in \phi \vdash t \neq t \; \& \; t = t$ (que é uma contradição em NF)

$\vdash t \in \Lambda$

logo, $\vdash (t)(t \in \phi \supset t \in \Lambda)$ e, então, $\vdash \phi \subseteq \Lambda$

TEOREMA I.1.3: *Em* NF *prova-se que* $C\alpha = \overline{\alpha}$

DEMONSTRAÇÃO:

$t \in C\alpha \vdash t \in C\alpha \; \& \; C\alpha \cap \alpha = \Lambda \; \& \; C\alpha \cup \alpha = \mathbf{V}$

$\vdash (Ez)(t \in z \; \& \; z \cap \alpha = \Lambda \; \& \; t \cup \alpha = \mathbf{V})$

$\vdash t \in \overline{\alpha}$

logo, $\vdash t \in C\alpha \supset t \in \overline{\alpha}$, e, então, $\vdash C\alpha \subseteq \overline{\alpha}$

Por outro lado,

$t \in \alpha \; , t \in \overline{\alpha} \vdash t \in \overline{\alpha}$

Mas, temos também que:

$t \notin \alpha \, , t \in \overline{\alpha} \vdash t \in C\alpha$

logo, $t \in \overline{\alpha} \vdash t \in C\alpha$

donde, $\vdash \overline{\alpha} \subseteq C\alpha$

TEOREMA I.1.4: *Em* **NF** *prova-se que* $(Ex)(x \in \alpha \,\&\, x \in \overline{\beta}) \vee (Ex)(x \in \overline{\alpha} \,\&\, x \in \beta) \equiv$ $\equiv \neg(\alpha = \beta)$.

DEMONSTRAÇÃO:

$$(\rightarrow)\; x \in \alpha \,\&\, x \in \overline{\beta} \;\vdash x \in \alpha \,\&\, x \in C\beta$$
$$\vdash x \in \alpha \,\&\, \neg(x \in \beta)$$
$$\vdash \neg(\alpha = \beta)$$

$$x \in \overline{\alpha} \,\&\, x \in \beta \;\vdash x \in C\alpha \,\&\, x \in \beta$$
$$\vdash \neg(x \in \alpha) \,\&\, x \in \beta$$
$$\vdash \neg(\alpha = \beta)$$

$$(x \in \alpha \,\&\, x \in \overline{\beta}) \vee (x \in \overline{\alpha} \,\&\, x \in \beta) \vdash \neg(\alpha = \beta)$$
$$(Ex)(x \in \alpha \,\&\, x \in \overline{\beta}) \vee (Ex)(x \in \overline{\alpha} \,\&\, x \in \beta) \vdash \neg(\alpha = \beta)$$

$$(\leftarrow)\; \neg(\alpha = \beta) \;\vdash (Ex)(x \in \alpha \,\&\, x \in C\beta) \vee (Ex)(x \in C\alpha \,\&\, x \in \beta)$$
$$\vdash (Ex)(x \in \alpha \,\&\, x \in \overline{\beta}) \vee (Ex)(x \in \overline{\alpha} \,\&\, x \in \beta)$$
$$\vdash \alpha \neq \beta\ .$$

Porém, em $\mathbf{NF}_\omega$, valem apenas os seguintes teoremas, evidenciando que nesse sistema ϕ e $C\alpha$ não funcionam como conjunto vazio e complemento de α , respectivamente.

TEOREMA I.1.5: *Em* $\mathbf{NF}_\omega$, *prova-se que* $U = \mathbf{V}$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $\vdash t \in U \equiv t = t$ e $t = t$ é um axioma, então $\vdash t \in U$, donde $\vdash (t)(t \in \mathbf{V} \supset t \in U)$, ou seja, $\vdash \mathbf{V} \subseteq U$.

Reciprocamente, como $\vdash t \in U \supset (E\alpha)(t \in \alpha)$ então, $\vdash (t)(t \in U \supset t \in \mathbf{V})$, ou seja, $\vdash U \subseteq \mathbf{V}$.

TEOREMA I.1.6: *Em* $\mathbf{NF}_\omega$, *prova-se que* $\mathbf{\Lambda} \subseteq \phi$

DEMONSTRACÃO: Como $\vdash t \in \mathbf{\Lambda} \equiv (y)(t \in y)$, então $\vdash t \in \mathbf{\Lambda} \supset (y)(t \in y)$, logo, $\vdash t \in \mathbf{\Lambda} \supset t \in \phi$, ou seja, $\vdash \mathbf{\Lambda} \subseteq \phi$.

TEOREMA I.1.7: *Em* $\mathbf{NF}_\omega$, *prova-se que* $(\alpha)(\overline{\alpha} \subseteq C\alpha)$.

DEMONSTRAÇÃO: Utilizaremos nesta prova dois resultados que serão demonstrados posteriormente:

$$\vdash (\alpha)(\alpha \cap \overline{\alpha} = \mathbf{\Lambda}) \quad \text{e}$$
$$\vdash (x)(x \in \mathbf{\Lambda}) \supset (x,y)(x \in y)$$

Em $\mathbf{NF}_\omega$ existem $\bar{\alpha}$ e $C\alpha$.

Se $t \in \bar{\alpha}$, então $(Ez)(t \in z \; \& \; z \cap \alpha = \Lambda \; \& \; z \cup \alpha = V)$

Então:

a) $\neg(t \in \alpha),\ t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \Lambda \;\&\; z \cup \alpha = V \vdash t \in C\alpha$

b) $t \in \alpha,\ t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \Lambda \;\&\; z \cup \alpha = V \;\; \vdash t \in z \cap \alpha$

$$\vdash t \in \Lambda$$
$$\vdash (x)(t \in x)$$
$$\vdash t \in C\alpha$$

logo,

$t \in \alpha \vee t \in \bar{\alpha},\ t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \Lambda \;\&\; z \cup \alpha = V \vdash t \in C\alpha$

como $t \in \alpha \vee t \in \bar{\alpha}$ é um axioma de $\mathbf{NF}_\omega$, então temos:

$t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \Lambda \;\&\; z \cup \alpha = V \vdash t \in C\alpha$

donde, $(Ez)(t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \Lambda \;\&\; z \cup \alpha = V) \vdash t \in C\alpha$

logo, $\vdash \bar{\alpha} \subseteq C\alpha$.

I.2. AXIOMAS ESPECÍFICOS DE $\mathbf{NF}_\omega$.

Como já mencionamos anteriormente, os axiomas específicos de $\mathbf{NF}_\omega$ são:

EXTENSIONALIDADE: $(x,y,z)((x \in y \equiv x \in z) \supset y = z)$

SEPARAÇÃO: $(Ey)(x)(x \in y \equiv F(x))$, onde x e y são variáveis distintas, y não ocorre livre em $F(x)$, $F(x)$ é estratificável ou, se não o for, o símbolo $\supset$ não ocorre em $F(x)$.

AXIOMA DO COMPLEMENTO: $(x)(x \in \alpha \vee x \in \bar{\alpha})$

Para provar certas propriedades de $\hat{x}(x \notin x)$ em $\mathbf{NF}_\omega$, teremos necessidade de um axioma para indivíduos de Quine, o qual só será introduzido no capítulo III.

No que se segue, desenvolveremos o sistema $\mathbf{NF}_\omega$, adaptando os capítulos IX (aqui,parte I,"A RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA")e X (aqui,parte II,"RELAÇÕES E FUNÇÕES")do livro de Rosser [19] .Não abordaremos aqui a parte específica de $\mathbf{NF}_\omega$.

Com exceção de alguns poucos teoremas, que serão mencionados no decorrer do capítulo, provaremos que todos os demais podem ser adaptados para $\mathbf{NF}_\omega$. Nos teoremas onde aparecem V, Λ e $\bar{\alpha}$ o enunciado permanecerá o mesmo, porém a demonstração será feita utilizando-se as definições desses conjuntos em $\mathbf{NF}_\omega$. Todos os teoremas, em cujas demonstrações não se faz uso das propriedades da negação, permanecerão inalterados em $\mathbf{NF}_\omega$.

Existem, ainda, teoremas como, por exemplo, $\vdash (\alpha)((x) \neg(x \in \alpha) \equiv \alpha = \Lambda)$, cuja adaptação para $\mathbf{NF}_\omega$ consiste, apenas em substituir a fórmula $\neg(x \in \alpha)$ por $x \in \bar{\alpha}$, o que não altera o significado do teorema. Da mesma forma, quando aparecer a expressão $\neg(\alpha \subseteq \beta)$, ela será substituída por $\alpha \cap \bar{\beta} \neq \Lambda$.

Além disso, quando a demonstração de um teorema for idêntica à dada em $\mathbf{NF}$, ela não será mencionada.

TEOREMA I.2.1: *Todos os teoremas da Secção 2 do capítulo IX de Rosser* [19] *são teoremas ou axiomas em* $\mathbf{NF}_\omega$.

I.3. FORMALISMO PARA CLASSES.

Como em Rosser [19], define-se $\hat{x}P$ por $\iota\alpha(x)(x \in \alpha \equiv P)$.

Isto posto, define-se fórmula estratificável como é usual (adaptando-se a definição de Rosser [19], pág. 219-220, pois na lógica subjacente a $\mathbf{NF}_\omega$ tem-se mais símbolos primitivos do que em Rosser [19]).

TEOREMA I.3.1: *Todos os teoremas e corolários da Secção 3 do capítulo IX de Rosser* [19] *são demonstráveis em* $\mathbf{NF}_\omega$.

I.4. O CÁLCULO DE CLASSES.

Nesta secção provaremos os teoremas correspondentes aos teoremas da secção 4 do capítulo IX de Rosser [19]. Como já mencionamos, em alguns casos teremos que adaptar o enunciado, porém não alteraremos o significado do teorema original.

Certos resultados óbvios em $\mathbf{NF}$, mas que não são óbvios em $\mathbf{NF}_\omega$, aparecerão nos Lemas I.4.2 e I.4.3. Por outro lado, para facilitar algumas demonstrações em $\mathbf{NF}_\omega$, anteciparemos certos resultados que são corolários ou partes de teoremas de Rosser [19]. Esses resultados aparecerão nos Lemas I.4.1. e I.4.4.

Quanto à numeração, procuraremos manter uma correspondência entre a de Rosser [19] e a nossa; por exemplo, ao Teorema IX.4.21 de Rosser [19] corresponderá o Teorema I.4.21 deste trabalho. Além disso, poderá ocorrer um "salto" na numeração dos nossos teoremas, o que será consequência de alguma antecipação, para facilitar demonstrações posteriores; por exemplo, não aparece o Teorema I.4.10, uma vez que ele foi antecipado para o Lema I.4.4, ítens I e III.

TEOREMA I.4.1

I. $\vdash \exists\, \hat{x}(x = x)$

II. $\vdash \exists\, \hat{x}(x \neq x)$

III. $\vdash (\alpha,\beta)(\exists \hat{x}(x \in \alpha \;\&\; x \in \beta))$

IV. $\vdash (\alpha,\beta)(\exists \hat{x}(x \in \alpha \vee x \in \beta))$

V. $\vdash (\alpha)(\exists \hat{x} \neg (x \in \alpha))$

VI. $\vdash \exists\, \hat{x}((Ey)(x \in y))$

VII. $\vdash \exists\, \hat{x}((y)(x \in y))$

VIII. $\vdash \exists\, \hat{y}((Ez)(y \in z \;\&\; x \cup z = \mathbf{V} \;\&\; x \cap z = \mathbf{\Lambda}))$

IX. $\vdash \exists\, \hat{x}(x \in \alpha \;\&\; x \in \overline{\beta})$

DEMONSTRAÇÃO: Como todas as fórmulas em consideração são estratificáveis, então, existem as classes correspondentes.

TEOREMA I.4.2:

I. $\vdash (x)(x \in U \equiv x = x)$

II. $\vdash (x)(x \in \phi \equiv x \neq x)$

III. $\vdash (\alpha,\beta,x)(x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha \;\&\; x \in \beta)$

IV. $\vdash (\alpha,\beta,x)(x \in \alpha \cup \beta \equiv x \in \alpha \vee x \in \beta)$

V. $\vdash (\alpha,x)(x \in C\alpha \equiv \neg(x \in \alpha))$

VI. $\vdash (x)(x \in \mathbf{V} \equiv (Ey)(x \in y))$

VII. $\vdash (x)(x \in \mathbf{\Lambda} \equiv (y)(x \in y))$

VIII. $\vdash (x)(x \in \overline{\alpha} \equiv (Ez)(x \in z \;\&\; z \cap \alpha = \mathbf{\Lambda} \;\&\; z \cup \alpha = \mathbf{V}))$

DEMONSTRAÇÃO: Basta usar o Teorema I.4.1 e o seguinte corolário da secção 3 do capítulo IX de Rosser [19]: $\vdash \exists\, \hat{x} P \supset (x)(x \in \hat{x}P \equiv P)$

Para demonstrar o Lema I.4.2, precisamos antecipar alguns resultados da secção 6 do capítulo IX de Rosser [19].

DEFINIÇÃO: *Conjunto Unitário de* A. $\{A\} =_{df} \hat{x}(x \in A)$ onde x é uma variável que não ocorre em A.

Utilizaremos $\{A,B\}$ como uma abreviação para $\{A\} \cup \{B\}$ e, analogamente, $\{A_1,\ldots,A_n\}$ será abreviação de $\{A_1\} \cup \ldots \cup \{A_n\}$.

Além disso, $\{A\}$ é estratificável se, e somente se, A é estratificável e, nesse caso, o tipo de $\{A\}$ será uma unidade superior ao tipo de A. Do mesmo modo, $\{A_1,\ldots,A_n\}$ é estratificável se, e somente se, $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ é estratificável e, para sua estratificação é necessário que $A_1,\ldots,A_n$ tenham o mesmo tipo e o tipo de $\{A_1,\ldots,A_n\}$ será uma unidade superior ao de cada uma das classes.

LEMA I.4.1: I. $\vdash (x)\, \exists\{x\}$

II. $\vdash (y)(y \in \{x\} \equiv y = x)$

OBSERVAÇÃO: o ítem I desse lema é o ítem I do Teorema IX.6.1 e o ítem II é o ítem I do Teorema IX.6.2 de Rosser [19].

O lema que provaremos a seguir é de grande utilidade em $\mathbf{NF}_\omega$, pois por meio dele, poderemos provar em $\mathbf{NF}_\omega$ alguns teoremas cuja prova em **NF** é usualmente feita por meio de redução ao absurdo.

LEMA I.4.2: I. $\vdash x \in \Lambda \supset (y)(y \in \Lambda)$

II. $\vdash x \in \Lambda \supset (y,z)(y \in z)$

III. $\vdash x \in \Lambda \supset (y,z)(y = z)$

IV. $\vdash x \in \Lambda \supset (y,z)(y \notin z)$

V. $\vdash x \in \Lambda \supset (y,z)(y \neq z)$

DEMONSTRAÇÃO:

$$
\begin{aligned}
\text{I. } x \in \Lambda \quad & \vdash (z)(x \in z) \\
& \vdash x \in \{y\} \\
& \vdash x = y \\
& \vdash y \in \Lambda
\end{aligned}
$$

donde, $\vdash x \in \Lambda \supset (y)(y \in \Lambda)$

II. $x \in \Lambda \vdash (y)(y \in \Lambda)$ (pelo ítem I)

mas, $y \in \Lambda \vdash (z)(y \in z)$

logo, $x \in \Lambda \vdash y \in z$

ou seja, $\vdash x \in \Lambda \supset (y,z)(y \in z)$

III. $x \in \Lambda \vdash (y,z)(y \in z)$ (pelo ítem II)

$\vdash y \in \{z\}$

$\vdash y = z$

IV. $x \in \Lambda \vdash (y,z)(y \in z)$ (pelo ítem II)

$\vdash y \in Cz$

$\vdash y \notin z$

V. $x \in \Lambda \vdash t \in y \ \& \ t \in \bar{z}$ (pelo ítem II)

$\vdash (Et)(t \in y \ \& \ t \in \bar{z}) \vee (Et)(t \in \bar{y} \ \& \ t \in z)$

$\vdash y \neq z$

logo, $\vdash x \in \Lambda \supset (y,z)(y \neq z)$

TEOREMA I.4.3: *Sejam* $x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *variáveis distintas. Seja* A *a classe construída a partir dos* α's *usando* $\cap$ *e* $\cup$ *. Seja* P *a fórmula resultante da substituição em* A *de* α_i *por* $x \in \alpha_i$*, de* $\cap$ *por* & *e de* $\cup$ *por* v *. Então*

$$\vdash (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x)(x \in A \equiv P)$$

OBSERVAÇÃO: Em sua forma original, este teorema envolve, também, complementar e, em P teríamos, ainda, a substituição de $\bar{\ }$ por $\neg$ em A ; mas, em $\mathbf{NF}_\omega$ o complementar não é definido com negação, o que, aparentemente, invalida esta parte do teorema.

LEMA I.4.3: I. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha = \beta \vee \alpha \neq \beta)$

II. $\vdash (\alpha = \beta \ \& \ \alpha \neq \beta) \supset (Ex)(x \in \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $x \in \alpha, x \in \beta \vdash x \in \alpha \equiv x \in \beta$

$\vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$

$x \in \alpha, x \in \bar{\beta} \vdash \alpha \neq \beta$

$\vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$

logo, $x \in \alpha \vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$ (1)

$x \in \overline{\alpha},\ x \in \beta \vdash \alpha \neq \beta$

$\vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$

$x \in \overline{\alpha},\ x \in \overline{\beta} \vdash x \in \overline{\alpha} \equiv x \in \overline{\beta}$

mas, $x \in \overline{\alpha} \equiv x \in \overline{\beta},\ x \in \alpha,\ x \in \beta \vdash x \in \beta$

$x \in \overline{\alpha} \equiv x \in \overline{\beta},\ x \in \alpha,\ x \in \overline{\beta} \vdash x \in \overline{\alpha}$

$\vdash x \in \alpha \cap \overline{\alpha}$

$\vdash x \in \Lambda$

$\vdash x \in \beta$

logo, $x \in \overline{\alpha} \equiv x \in \overline{\beta} \vdash x \in \alpha \supset x \in \beta$

analogamente,

$x \in \overline{\alpha} \equiv x \in \overline{\beta} \vdash x \in \beta \supset x \in \alpha$

donde, $x \in \overline{\alpha} \equiv x \in \overline{\beta} \vdash x \in \alpha \equiv x \in \beta$

assim, obtemos:

$x \in \overline{\alpha},\ x \in \overline{\beta} \vdash x \in \alpha \equiv x \in \beta$

$\vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$

donde, $x \in \overline{\alpha} \vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$ (2)

de (1) e (2) obtemos:

$x \in \alpha \vee x \in \overline{\alpha} \vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$

donde, $\vdash (x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$

$\vdash (x)(x \in \alpha \equiv x \in \beta \vee \alpha \neq \beta)$

$\vdash (x)(x \in \alpha \equiv x \in \beta) \vee \alpha \neq \beta$

logo, $\vdash \alpha = \beta \vee \alpha \neq \beta$

$\vdash (\alpha,\beta)(\alpha = \beta \vee \alpha \neq \beta)$.

II. $\alpha = \beta \ \&\ \alpha \neq \beta \vdash \beta \neq \beta$

$\vdash (Ex)(x \in \beta \ \&\ x \in \overline{\beta})$

$\vdash (Ex)(x \in \beta \cap \overline{\beta})$

$\vdash (Ex)(x \in \Lambda)$

Para demonstrarmos o Teorema I.4.4 anteciparemos em forma de lema, alguns resultados posteriores de Rosser [19]. As partes I e III do lema correspondem ao Teorema IX.4.10 de Rosser [19].

LEMA I.4.4: I. $\vdash (x)(x \in \mathbf{V})$

II. $\vdash (\alpha)(\alpha \subseteq \mathbf{V})$

III. $\vdash (x)(\neg(x \in \Lambda))$

IV. $\vdash (\alpha)(\Lambda \subseteq \alpha)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $\vdash x \in \{x\}$
$\vdash (E\alpha)(x \in \alpha)$
$\vdash x \in \mathbf{V}$
$\vdash (x)(x \in \mathbf{V})$

II. $t \in \alpha \vdash (E\alpha)(t \in \alpha)$
$\vdash t \in \mathbf{V}$
donde, $\vdash t \in \alpha \supset t \in \mathbf{V}$, e, então, $\vdash (\alpha)(\alpha \subseteq \mathbf{V})$

III. $x \in \Lambda \vdash (t)(x \in t)$
$\vdash x \in C\Lambda$
$\vdash \neg(x \in \Lambda)$
$\neg(x \in \Lambda) \vdash \neg(x \in \Lambda)$
logo, $\vdash \neg(x \in \Lambda)$, donde, $\vdash (x)(\neg(x \in \Lambda))$

IV. $t \in \Lambda \vdash (\alpha)(t \in \alpha)$
$\vdash t \in \alpha$
logo, $\vdash t \in \Lambda \supset t \in \alpha$, e, então, $\vdash (\alpha)(\Lambda \subseteq \alpha)$

LEMA I.4.5: I. $\vdash (\beta)(\mathbf{V} \subseteq \beta \equiv \beta = \mathbf{V})$

II. $\vdash (\alpha)(\alpha \subseteq \Lambda \equiv \Lambda = \alpha)$

III. $\vdash (\alpha)(\alpha \subseteq \alpha)$

IV. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap \beta \subseteq \beta)$

V. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \alpha \cup \beta)$

OBSERVAÇÃO: este teorema corresponde aos corolários do Teorema IX.4.13 de Rosser [19].

Com o próximo teorema prova-se que em $\mathbf{NF}_{\omega}$ são válidas todas as propri edades usuais da álgebra de classes, portanto, todos os axiomas de uma Álgebra de Boole são válidos em $\mathbf{NF}_{\omega}$.

Na formulação do teorema que segue usaremos a mesma numeração de Rosser [19]; porém, as demonstrações não seguirão essa ordem, pois, antes de tudo, devemos provar as partes XXIV e XXV, que facilitarão a demonstração de outros ítens.

TEOREMA I.4.4:

I. $\vdash (\alpha)(\alpha = \bar{\bar{\alpha}})$

II. $\vdash (\alpha)(\alpha = \alpha \cap \alpha)$

III. $\vdash (\alpha)(\alpha = \alpha \cup \alpha)$

IV. $\vdash (\alpha,\beta)\ (\alpha = \alpha \cap (\alpha \cup \beta))$

V. $\vdash (\alpha,\beta)\ (\alpha = \alpha \cup (\alpha \cap \beta))$

VI. $\vdash (\alpha,\beta)\ (\alpha = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \bar{\beta}))$

VII. $\vdash (\alpha,\beta)\ (\alpha = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \bar{\beta}))$

VIII. $\vdash (\alpha,\beta)\ (\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha)$

IX. $\vdash (\alpha,\beta)\ (\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha)$

X. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cap (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cap \gamma)$

XI. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma)$

XII. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cap (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma))$

XIII. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma))$

XIV. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = \overline{\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}})$

XV. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap \beta = \overline{\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}})$

XVI. $\vdash (\alpha,\beta)(\overline{\alpha \cup \beta} = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta})$

XVII. $\vdash (\alpha,3)(\overline{\alpha \cap \beta} = \bar{\alpha} \cup \bar{\beta})$

XVIII. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap \beta = (\alpha \cup \bar{\beta}) \cap \beta)$

XIX. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = (\alpha \cap \bar{\beta}) \cup \beta)$

XX. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \bar{\beta}) \cup (\bar{\alpha} \cap \beta))$

XXI. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap \beta = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \bar{\beta}) \cap (\bar{\alpha} \cup \beta))$

XXII. $\vdash (\alpha,\beta)(\overline{\alpha \cap \bar{\beta}} = (\alpha \cap \bar{\beta}) \cup (\bar{\alpha} \cap \beta) \cup (\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}))$

XXIII. $\vdash (\alpha,\beta)(\overline{\alpha \cup \beta} = (\alpha \cup \bar{\beta}) \cap (\bar{\alpha} \cup \beta) \cap (\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}))$

XXIV. $\vdash (\alpha)(\alpha \cap \bar{\alpha} = \mathbf{\Lambda})$

XXV. $\vdash (\alpha)(\alpha \cup \bar{\alpha} = \mathbf{V})$

XXVI. $\vdash \mathbf{\Lambda} = \bar{\mathbf{V}}$

XXVII. $\vdash \mathbf{V} = \bar{\mathbf{\Lambda}}$

XXVIII. $\vdash (\alpha)(\alpha \cap \mathbf{V} = \alpha)$

XXIX. $\vdash (\alpha)(\alpha \cup \mathbf{V} = \mathbf{V})$

XXX. $\vdash (\alpha)(\alpha \cap \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda})$

XXXI. $\vdash (\alpha)(\alpha \cup \mathbf{\Lambda} = \alpha)$

XXXII. $\vdash (\alpha)(\alpha \cap \bar{\alpha} = \overline{\alpha \cup \bar{\alpha}})$

XXXIII. $\vdash (\alpha)(\alpha \cup \bar{\alpha} = \overline{\alpha \cap \bar{\alpha}})$

XXXIV. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap (\beta \cup \bar{\beta}) = \alpha)$

XXXV. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup (\beta \cup \bar{\beta}) = \beta \cup \bar{\beta})$

XXXVI. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap (\beta \cap \bar{\beta}) = \beta \cap \bar{\beta})$

XXXVII. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup (\beta \cap \bar{\beta}) = \alpha)$.

DEMONSTRAÇÃO: As demonstrações de II a XII são as usuais.

XXIV. $\vdash (\alpha)(\alpha \cap \bar{\alpha} = \mathbf{\Lambda})$

$$t \in \alpha \cap \bar{\alpha} \equiv t \in \alpha \;\&\; (Ez)(t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \mathbf{\Lambda} \;\&\; z \cup \alpha = \mathbf{V})$$

$$t \in \alpha \;\&\; t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \mathbf{\Lambda} \;\&\; z \cup \alpha = \mathbf{V} \vdash t \in z \cap \alpha$$

$$\vdash t \in \mathbf{\Lambda}$$

logo, $t \in \alpha \;\&\; (Ez)(t \in z \;\&\; z \cap \alpha = \mathbf{\Lambda} \;\&\; z \cup \alpha = \mathbf{V}) \vdash t \in \mathbf{\Lambda}$

donde, $\vdash \alpha \cap \bar{\alpha} \subseteq \mathbf{\Lambda}$

mas, como $\vdash \mathbf{\Lambda} \subseteq \alpha \cap \bar{\alpha}$, então, $\vdash \alpha \cap \bar{\alpha} = \mathbf{\Lambda}$

XXV. $\vdash (\alpha)(\alpha \cup \overline{\overline{\alpha}} = \mathbf{V})$

como $\vdash (\alpha)\ (t \in \alpha \vee t \in \overline{\alpha})$, então $\vdash \mathbf{V} \subseteq \alpha \cup \overline{\alpha}$

mas, $\vdash \alpha \cup \overline{\alpha} \subseteq \mathbf{V}$, logo, $\vdash \alpha \cup \overline{\alpha} = \mathbf{V}$

XXVI. $\vdash \mathbf{\Lambda} = \overline{\overline{\mathbf{V}}}$

$t \in \overline{\mathbf{V}} \vdash (Ez)(t \in z\ \&\ z \cap \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\ \&\ z \cup \mathbf{V} = \mathbf{V})$

$\vdash t \in z \cap \mathbf{V}$ (pois $t \in z\ \&\ (t)(t \in \mathbf{V})$)

$\vdash t \in \mathbf{\Lambda}$ (pois $z \cap \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$)

logo, $\vdash \overline{\mathbf{V}} \subseteq \mathbf{\Lambda}$

mas, pelo item IV do Lema I.4.4, $\vdash \Lambda \subseteq \overline{\mathbf{V}}$, logo, $\vdash \Lambda = \overline{\mathbf{V}}$.

XXVII. $\vdash \mathbf{V} = \overline{\mathbf{\Lambda}}$

$t \in \mathbf{V} \vdash t \in \mathbf{V}\ \&\ \mathbf{V} \cap \Lambda = \Lambda\ \&\ \mathbf{V} \cup \Lambda = \mathbf{V}$

$\vdash (Ez)(t \in z\ \&\ z \cap \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\ \&\ z \cup \Lambda = \mathbf{V})$

$\vdash t \in \overline{\mathbf{\Lambda}}$

logo, $\vdash \mathbf{V} \subseteq \overline{\mathbf{\Lambda}}$

e, pela parte II do Lema I.4.4, $\vdash \overline{\Lambda} \subseteq \mathbf{V}$, logo, $\vdash \mathbf{V} = \overline{\Lambda}$.

I. $\vdash (\alpha)(\alpha = \overline{\overline{\alpha}})$

$t \in \alpha \vdash t \in \alpha\ \&\ \alpha \cap \overline{\alpha} = \mathbf{\Lambda}\ \&\ \alpha \cup \overline{\alpha} = \mathbf{V}$

$\vdash (Ez)(t \in z\ \&\ z \cap \overline{\alpha} = \mathbf{\Lambda}\ \&\ z \cup \overline{\alpha} = \mathbf{V})$

$\vdash t \in \overline{\overline{\alpha}}$

donde, $\vdash \alpha \subseteq \overline{\overline{\alpha}}$

Por outro lado,

$t \in \overline{\overline{\alpha}},\ t \in \alpha \vdash t \in \alpha$

$t \in \overline{\overline{\alpha}},\ t \in \overline{\alpha} \vdash t \in \overline{\alpha} \cap \overline{\overline{\alpha}}$

$\vdash t \in \mathbf{\Lambda}$

$\vdash (x)(t \in x)$

$\vdash t \in \alpha$

logo, $t \in \overline{\overline{\alpha}},\ t \in \alpha \vee t \in \overline{\alpha} \vdash t \in \alpha$

como $t \in \alpha \vee t \in \overline{\alpha}$ decorre do axioma

$(x)(x \in \alpha \vee x \in \overline{\alpha})$, então, obtemos $\vdash \overline{\overline{\alpha}} \subseteq \alpha$

Então, $\vdash \alpha = \overline{\overline{\alpha}}$.

XVI. $\vdash (\alpha,\beta)(\overline{\alpha \cup \beta} = \overline{\alpha} \cap \overline{\beta})$.

($\rightarrow$) $t \in \overline{\alpha \cup \beta},\ t \in \overline{\alpha} \vdash t \in \overline{\alpha}$

$t \in \overline{\alpha \cup \beta},\ t \in \alpha \vdash t \in \alpha \vee t \in \beta$

$\vdash t \in \alpha \cup \beta \ \&\ t \in \overline{\alpha \cup \beta}$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash t \in \overline{\alpha}$

logo, $t \in \overline{\alpha \cup \beta} \vdash t \in \overline{\alpha}$

analogamente, $t \in \overline{\alpha \cup \beta} \vdash t \in \overline{\beta}$

donde, $t \in \overline{\alpha \cup \beta} \vdash t \in \overline{\alpha} \cap \overline{\beta}$

logo, $\vdash \overline{\alpha \cup \beta} \subseteq \overline{\alpha} \cap \overline{\beta}$

($\leftarrow$) Por outro lado

$t \in \overline{\alpha},\ t \in \overline{\beta},\ t \in \overline{\alpha \cup \beta} \vdash t \in \overline{\alpha \cup \beta}$

$t \in \overline{\alpha},\ t \in \overline{\beta},\ t \in \alpha \cup \beta \vdash t \in \alpha \cup \beta \ \&\ t \in \overline{\alpha}$

$\vdash t \in \overline{\alpha} \cap (\alpha \cup \beta)$

$\vdash t \in (\overline{\alpha} \cap \alpha) \cup (\overline{\alpha} \cap \beta)$

$\vdash t \in \Lambda \cup (\overline{\alpha} \cap \beta)$

$\vdash t \in \overline{\alpha} \cap \beta$

$\vdash t \in \overline{\alpha} \ \&\ t \in \beta$

$\vdash t \in \beta \ \&\ t \in \overline{\beta}$

$\vdash t \in \beta \cap \overline{\beta}$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash t \in \overline{\alpha \cup \beta}$

logo, $t \in \overline{\alpha} \ \&\ t \in \overline{\beta} \vdash t \in \overline{\alpha \cup \beta}$

donde, $t \in \overline{\alpha} \cap \overline{\beta} \vdash t \in \overline{\alpha \cup \beta}$

então, $\vdash \overline{\alpha} \cap \overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha \cup \beta}$

XVII. $\vdash (\alpha,\beta)(\overline{\alpha \cap \beta} = \overline{\alpha} \cup \overline{\beta})$

($\rightarrow$) $t \in \overline{\alpha \cap \beta},\ t \in \alpha,\ t \in \overline{\beta} \vdash t \in \overline{\alpha} \vee t \in \overline{\beta}$

$\vdash t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$

$t \in \overline{\alpha \cap \beta},\ t \in \alpha,\ t \in \beta \vdash t \in (\alpha \cap \beta) \cap (\overline{\alpha \cap \beta})$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$

logo, $t \in \overline{\alpha \cap \beta},\ t \in \alpha \vdash t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$

e, $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$, $t \in \overline{\alpha}$ $\vdash$ $t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$

donde, $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$ $\vdash$ $t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$

então, $\vdash$ $\overline{\alpha \cap \beta} \subseteq \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$

($\longleftarrow$) Por outro lado,

$t \in \overline{\alpha}$, $t \in \alpha \cap \beta$ $\vdash$ $t \in \alpha \cap \overline{\alpha}$

$\vdash$ $t \in \Lambda$

$\vdash$ $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$

$t \in \overline{\beta}$, $t \in \alpha \cap \beta$ $\vdash$ $t \in \beta \cap \overline{\beta}$

$\vdash$ $t \in \Lambda$

$\vdash$ $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$

$t \in \overline{\alpha} \vee t \in \overline{\beta}$, $t \in \alpha \cap \beta$ $\vdash$ $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$

$t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$, $t \in \alpha \cap \beta$ $\vdash$ $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$

$t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$, $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$ $\vdash$ $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$

logo, $t \in \overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$ $\vdash$ $t \in \overline{\alpha \cap \beta}$

donde, $\vdash$ $\overline{\alpha} \cup \overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha \cap \beta}$

XIV. $\vdash (\alpha, \beta)(\alpha \cup \beta = \overline{\overline{\alpha} \cap \overline{\beta}})$.

Pelo ītem XVI, temos $\overline{\alpha} \cap \overline{\beta} = \overline{\alpha \cup \beta}$, donde $\overline{\overline{\alpha} \cap \overline{\beta}} = \overline{\overline{\alpha \cup \beta}}$. Então, pelo ītem I, $\alpha \cup \beta = \overline{\overline{\alpha} \cap \overline{\beta}}$.

XV. $\vdash (\alpha, \beta)(\alpha \cap \beta = \overline{\overline{\alpha} \cup \overline{\beta}})$

Pelo ītem XVII, temos $\overline{\alpha} \cup \overline{\beta} = \overline{\alpha \cap \beta}$, donde, $\overline{\overline{\alpha} \cup \overline{\beta}} = \overline{\overline{\alpha \cap \beta}}$. Então, pelo ītem I, $\alpha \cap \beta = \overline{\overline{\alpha} \cup \overline{\beta}}$.

XVIII. $\vdash (\alpha, \beta)(\alpha \cap \beta = (\alpha \cup \overline{\beta}) \cap \beta)$

$(\alpha \cup \overline{\beta}) \cap \beta = (\alpha \cap \beta) \cup (\overline{\beta} \cap \beta)$ (pelo ītem XII)

$= (\alpha \cap \beta) \cup \Lambda$ (pelo ītem XXIV)

$= \alpha \cap \beta$ (pelo ītem XXX)

XIX. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = (\alpha \cap \overline{\beta}) \cup \beta)$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \cap \overline{\beta}) \cup \beta &= (\alpha \cup \beta) \cap (\overline{\beta} \cup \beta) && \text{(pelo ítem XIII)}\\
&= (\alpha \cup \beta) \cap \mathbf{V} && \text{(pelo ítem XXV)}\\
&= \alpha \cup \beta && \text{(pelo ítem XXVIII)}
\end{aligned}
$$

XX. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \overline{\beta}) \cup (\overline{\alpha} \cap \beta))$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \overline{\beta}) \cup (\overline{\alpha} \cap \beta) &= [\alpha \cap (\beta \cup \overline{\beta})] \cup (\overline{\alpha} \cap \beta)\\
&= [\alpha \cap \mathbf{V}] \cup (\overline{\alpha} \cap \beta)\\
&= \alpha \cup (\overline{\alpha} \cap \beta)\\
&= (\alpha \cup \overline{\alpha}) \cap (\alpha \cup \beta)\\
&= \mathbf{V} \cap (\alpha \cup \beta)\\
&= \alpha \cup \beta
\end{aligned}
$$

LEMA I.4.6: $\vdash \alpha \neq \Lambda \supset (Ex)(x \in \alpha)$

DEMONSTRAÇÃO:

$$
\begin{aligned}
x \in \alpha \ \&\ x \in \overline{\Lambda} &\vdash x \in \alpha \cap \mathbf{V}\\
&\vdash x \in \alpha\\
&\vdash (Ex)(x \in \alpha)
\end{aligned}
$$

logo, (1) $\vdash (Ex)(x \in \alpha \ \&\ x \in \overline{\Lambda}) \supset (Ex)(x \in \alpha)$

$\vdash x \in \overline{\alpha} \ \&\ x \in \Lambda \supset (Ex)(x \in \alpha)$

logo, (2) $\vdash (Ex)(x \in \overline{\alpha} \ \&\ x \in \Lambda) \supset (Ex)(x \in \alpha)$

de(1) e (2), obtemos $\alpha \neq \Lambda \supset (Ex)(x \in \alpha)$

DEFINIÇÃO: Seja A uma classe construída a partir de $\mathbf{V}$ e Λ e variáveis distintas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ usando $\cap, \cup$ e $^{-}$. Então, o *dual de* A, A^*, é obtido de A pelas seguintes substituições simultâneas:

1) cada ocorrência de α_i é substituída por $\overline{\alpha_i}$

2) cada ocorrência de $\overline{\alpha_i}$ é substituída por α_i

3) cada $\cap$ é substituída por $\cup$ e cada $\cup$ é substituída por $\cap$.

4) cada $\mathbf{V}$ é substituído por Λ e cada Λ é substituído por $\mathbf{V}$.

TEOREMA I.4.5: *Seja A uma classe construída a partir de* $\mathbf{V}$, $\mathbf{\Lambda}$ *e variáveis distintas* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *usando* $\cap, \cup$ *e* $\bar{\ }$. *Se* A^* *é o dual de* A, *então*

$$\vdash (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ A^* = \overline{A} \ .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja A' a classe obtida de A pela substituição de cada ocorrência de $\mathbf{\Lambda}$ por $\beta \cap \overline{\beta}$ e de cada ocorrência de $\mathbf{V}$ por $\beta \cup \overline{\beta}$; sendo β uma variável distinta de todos os α_i. Com isso, a prova é feita por indução sobre o número de ocorrências dos símbolos $\cap, \cup$ e $\bar{\ }$ em A'. É fácil provar que $A = A'$, usando os ítens XXIV e XXV do Teorema I.4.4. Por outro lado, usando-se os ítens I, XVI e XVII do mesmo teorema, prova-se que $\overline{A'} = (A')^*$, ou seja, que $\overline{A} = A^*$.

TEOREMA I.4.6: $\vdash (\alpha)(\alpha \neq \overline{\alpha})$

DEMONSTRAÇÃO: Pela definição de $\neq$ em $\mathbf{NF}_\omega$, devemos provar que

$\vdash (Ey)(y \in \alpha \ \& \ y \in \overline{\overline{\alpha}})\ \vee\ (Ey)(y \in \overline{\alpha} \ \& \ y \in \overline{\alpha})$

mas, já provamos que $\vdash (\alpha)(\alpha = \overline{\overline{\alpha}})$

e $\vdash (t)(t \in \alpha \vee t \in \overline{\alpha})$ é um axioma de $\mathbf{NF}_\omega$, então:

a) $t \in \alpha \ \vdash \ t \in \alpha \ \& \ t \in \overline{\overline{\alpha}}$

$\qquad\qquad \vdash \ (Ey)(y \in \alpha \ \& \ y \in \overline{\overline{\alpha}})\ \vee\ (Ey)(y \in \overline{\alpha} \ \& \ y \in \overline{\alpha})$

b) $t \in \overline{\alpha} \ \vdash \ t \in \overline{\alpha} \ \& \ t \in \overline{\alpha}$

$\qquad\qquad \vdash \ (Ey)(y \in \overline{\alpha} \ \& \ y \in \overline{\alpha})\ \vee\ (Ey)(y \in \alpha \ \& \ y \in \overline{\overline{\alpha}})$

logo, $\vdash \ (Ey)(y \in \alpha \ \& \ y \in \overline{\overline{\alpha}})\ \vee\ (Ey)(y \in \overline{\alpha} \ \& \ y \in \overline{\alpha})$

portanto, $\vdash (\alpha)(\alpha \neq \overline{\alpha})$

COROLÁRIO: $\vdash \ \mathbf{\Lambda} \neq \mathbf{V}$

DEMONSTRAÇÃO: basta substituir α por $\mathbf{\Lambda}$ no teorema e lembrar que $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{\Lambda}}$.

TEOREMA I.4.7: $\vdash \ (\alpha,\beta)(\overline{\alpha} = \overline{\beta} \supset \alpha = \beta)$

DEMONSTRAÇÃO: $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \ \vdash \ \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\beta}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \vdash \ \alpha = \beta$.

TEOREMA I.4.8: *Se* P *contém* *ocorrências livres de* α *então*
$\vdash \exists\, \{\bar{\alpha} \mid P\} \supset (\alpha)\ (\bar{\alpha} \in \{\bar{\alpha} \mid P\} \equiv P)$.

COROLÁRIO: *Se* P *é estratificável e contém ocorrências livres de* α, *então*

$\vdash (\alpha)(\bar{\alpha} \in \{\bar{\alpha} \mid P\} \equiv P)$.

DEFINIÇÃO: $\alpha - \beta =_{df} \alpha \cap \overline{\beta}$.

TEOREMA I.4.9: $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cup \beta = \gamma \ \&\ \alpha \cap \beta = \Lambda \supset \alpha = \gamma - \beta)$

DEMONSTRAÇÃO:

Devemos provar que $x \in \alpha \equiv x \in \gamma \cap \overline{\beta}$.

Denotemos por F a fórmula $\alpha \cup \beta = \gamma \ \&\ \alpha \cap \beta = \Lambda$.

1) $x \in \alpha,\ F \ \vdash x \in \alpha \cup \beta$
$\qquad\qquad \vdash x \in \gamma$

2) $x \in \alpha,\ x \in \beta,\ F \ \vdash x \in \alpha \cap \beta$
$\qquad\qquad \vdash x \in \Lambda$
$\qquad\qquad \vdash x \in \overline{\beta}$

3) $x \in \alpha,\ x \in \overline{\beta},\ F \ \vdash x \in \overline{\beta}$, logo,

4) $x \in \alpha,\ F \vdash x \in \overline{\beta}$

de (1) e (4) obtemos

5) $F \supset (\alpha \subseteq \gamma \cap \overline{\beta})$

mas, $F,\ x \in \gamma \cap \overline{\beta} \vdash x \in (\alpha \cup \beta) \cap \overline{\beta}$
$\qquad\qquad \vdash x \in \alpha$

donde obtemos:

6) $F \supset (\gamma \cap \overline{\beta} \subseteq \alpha)$

de (5) e (6) obtemos:

$\vdash F \supset (\alpha = \gamma \cap \overline{\beta})$, ou seja,
$\vdash F \supset \alpha = \gamma - \beta$

COROLÁRIO 1: $(\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = \mathbf{V} \ \&\ \alpha \cap \beta = \Lambda \supset \alpha = \overline{\beta})$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\gamma = \mathbf{V}$ no teorema.

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap \beta = \Lambda \supset \alpha = (\alpha \cup \beta) - \beta)$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\gamma = \alpha \cup \beta$ no teorema.

COROLÁRIO 3: $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cup \beta = \gamma \cup \beta \ \& \ \alpha \cap \beta = \Lambda \ \& \ \gamma \cap \beta = \Lambda \supset \alpha = \gamma)$

DEMONSTRAÇÃO: tendo em vista o Lema I.4.2, ítem II, a demonstração é a usual.

TEOREMA I.4.11: I. $\vdash (x)Q \supset (x)(x \in \mathbf{V} \equiv Q)$

II. $\exists \hat{x} Q \vdash (x)(x \in \overline{\hat{x}Q}) \supset (x)(x \in \Lambda \equiv Q)$

DEMONSTRAÇÃO: Tendo em vista o Lema I.4.4, ítem I, a demonstração do ítem I é como em **NF**. Provaremos apenas o ítem II.

Se $\exists\hat{x}Q$, então $\exists\overline{\hat{x}Q}$, logo:

$$(x)(x \in \overline{\hat{x}Q}) \vdash (x)(x \in \mathbf{V} \equiv x \in \overline{\hat{x}Q})$$

$$\vdash \mathbf{V} = \overline{\hat{x}Q}$$

$$\vdash \overline{\mathbf{V}} = \overline{\overline{\hat{x}Q}}$$

$$\vdash \Lambda = \hat{x}Q$$

$$\vdash (x)(x \in \Lambda \equiv Q)$$

OBSERVAÇÃO: Em Rosser [19]; o ítem II desse teorema é $(x)\neg Q \supset (x)(x \in \Lambda \equiv Q)$ o que, aparentemente, não pode ser provado em $\mathbf{NF}_\omega$, pois, como a negação é muito fraca, quase não se pode trabalhar com a negação de fórmulas não atômicas.

COROLÁRIO 1: $\vdash (x)Q \supset \exists\hat{x}Q$.

OBSERVAÇÃO: Em Rosser, esse corolário possui como parte II o seguinte: $(x)\neg Q \supset \exists\hat{x}Q$. Todavia, esse resultado, aparentemente, não pode ser demonstrado em $\mathbf{NF}_\omega$, pela mesma razão que aparentemente não podemos provar o ítem II do Teorema I.4.11 em sua forma original.

COROLÁRIO 2: $\vdash (x)Q \supset \mathbf{V} = \hat{x}Q$

OBSERVAÇÃO: Como o corolário 1, este corolário possui, em sua forma original, $\vdash (x)\neg Q \supset \Lambda = \hat{x}Q$ como o ítem II, que, aparentemente, não pode ser demonstrado em $\mathbf{NF}_\omega$ pelas mesmas razões apresentadas anteriormente.

TEOREMA I.4.12: I. $\vdash (\alpha)((x)(x \in \alpha) \equiv \alpha = \mathbf{V})$

II. $\vdash (\alpha)((x)(x \in \overline{\alpha}) \equiv \alpha = \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO:

II. $(\rightarrow)$ $(x)(x \in \overline{\alpha}),\ x \in \alpha \vdash x \in \alpha \cap \overline{\alpha}$
$\vdash x \in \Lambda$

consequentemente, obtemos

$\vdash (x)(x \in \overline{\alpha} \supset \alpha \subseteq \Lambda)$

mas, como $\Lambda \subseteq \alpha$, então

$\vdash (x)(x \in \overline{\alpha} \supset \alpha = \Lambda)$

$(\leftarrow)$ $\alpha = \Lambda \vdash x \in \overline{\alpha} \equiv x \in \overline{\Lambda}$
$\vdash x \in \overline{\alpha}$

logo, $\alpha = \Lambda \vdash x \in \overline{\alpha}$

donde, $\vdash \alpha = \Lambda \supset x \in \overline{\alpha}$

com isso, $\vdash (x)(x \in \overline{\alpha} \equiv \alpha = \Lambda)$

COROLÁRIO 1: I. $\vdash (\alpha)((Ex)(x \in \overline{\alpha}) \equiv \alpha \neq V)$
II. $\vdash (\alpha)((Ex)(x \in \alpha) \equiv \alpha \neq \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $(\rightarrow)$ $x \in \overline{\alpha} \vdash \alpha = \Lambda$ (pelo ítem II do teorema)
$x \in \overline{\alpha} \vdash \alpha \neq V$ (pois $V \neq \Lambda$ e $\alpha = V$)
logo, $\vdash x \in \overline{\alpha} \supset \alpha \neq V$

$(\leftarrow)$ $\alpha \neq V \vdash (Ez)(z \in \overline{\alpha}\ \&\ z \in V)\ v\ (Ez)(z \in \alpha\ \&\ z \in \overline{V})$

se $z \in \alpha\ \&\ z \in \overline{V} \vdash z \in \overline{V}$
$\vdash z \in \Lambda$
$\vdash (Ex)(x \in \overline{\alpha})$

se $z \in \overline{\alpha}\ \&\ z \in V \vdash z \in \overline{\alpha}$
$\vdash (Ex)(x \in \overline{\alpha})$

logo, $\vdash \alpha \neq V \supset (Ex)(x \in \overline{\alpha})$

II. $(\rightarrow)$ $x \in \alpha \vdash \alpha = V$ (pelo ítem I do teorema)
$x \in \alpha \vdash \alpha \neq \Lambda$ (pois $V \neq \Lambda$ e $\alpha = V$)

$(\leftarrow)$ $\alpha \neq \Lambda \vdash (Ez)(z \in \alpha\ \&\ z \in \overline{\Lambda})\ v\ (Ez)(z \in \overline{\alpha}\ \&\ z \in \Lambda)$

se $z \in \alpha$ & $z \in \overline{\Lambda}$ $\vdash z \in \alpha$
$\vdash (Ex)(x \in \alpha)$

se $z \in \overline{\alpha}$ & $z \in \Lambda$ $\vdash z \in \Lambda$
$\vdash z \in \alpha$
$\vdash (Ex)(x \in \alpha)$

logo, $\vdash \alpha \neq \Lambda \supset (Ex)(x \in \alpha)$

TEOREMA I.4.13: I. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv \alpha \cap \beta = \alpha)$

II. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv \alpha \cap \overline{\beta} = \Lambda)$

III. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv \alpha \cup \beta = \beta)$

IV. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv \overline{\alpha} \cup \beta = \mathbf{V})$.

DEMONSTRAÇÃO:

II. $(\rightarrow)$ a) $\Lambda \subseteq \alpha \cap \overline{\beta}$

b) $\alpha \subseteq \beta$, $x \in \alpha \cap \overline{\beta}$ $\vdash x \in \alpha$ & $x \in \overline{\beta}$
$\vdash x \in \alpha$
$\vdash x \in \beta$ & $x \in \overline{\beta}$
$\vdash x \in \Lambda$

logo, $\alpha \subseteq \beta \vdash (x)(x \in \alpha \cap \overline{\beta} \supset x \in \Lambda)$
então, de (a) e (b), $\vdash \alpha \subseteq \beta \supset \alpha \cap \overline{\beta} = \Lambda$
$(\leftarrow)$ $\alpha \cap \beta = \Lambda$, $x \in \alpha$, $x \in \beta$ $\vdash x \in \beta$
$\alpha \cap \beta = \Lambda$, $x \in \alpha$, $x \in \overline{\beta}$ $\vdash x \in \Lambda$
$\vdash x \in \beta$
logo, $\alpha \cap \beta = \Lambda \vdash x \in \alpha \supset x \in \beta$
donde, $\alpha \cap \beta = \Lambda \vdash (x)(x \in \alpha \supset x \in \beta)$
e, então, $\vdash \alpha \cap \beta = \Lambda \supset \alpha \subseteq \beta$

IV. Pelo ítem II, temos

$\alpha \subseteq \beta \equiv \alpha \cap \overline{\beta} = \Lambda$, logo

$\alpha \subseteq \beta \equiv \overline{\alpha \cap \overline{\beta}} = \overline{\Lambda}$, donde

$\alpha \subseteq \beta \equiv \overline{\alpha} \cup \beta = \mathbf{V}$.

OBSERVAÇÃO: os corolários 1 - 7 já foram demonstrados no Lema I.4.5.

TEOREMA I.4.14: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \;\&\; \beta \subseteq \alpha \equiv \alpha = \beta)$

TEOREMA I.4.15: $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subseteq \beta \;\&\; \beta \subseteq \gamma \supset \alpha \subseteq \gamma)$

TEOREMA I.4.16: I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subseteq \beta \supset \alpha \cap \gamma \subseteq \beta \cap \gamma)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subseteq \beta \supset \alpha \cup \gamma \subseteq \beta \cup \gamma)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha,\beta,\gamma,\delta)(\alpha \subseteq \beta \;\&\; \gamma \subseteq \delta \supset \alpha \cap \gamma \subseteq \beta \cap \delta)$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha,\beta,\gamma,\delta)(\alpha \subseteq \beta \;\&\; \gamma \subseteq \delta \supset \alpha \cup \gamma \subseteq \beta \cup \delta)$

TEOREMA I.4.17: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv \overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha})$

DEMONSTRAÇÃO:

($\longrightarrow$) Seja F a fórmula $x \in z \;\&\; z \cap \beta = \mathbf{\Lambda} \;\&\; z \cup \beta = \mathbf{V}$

Então, $\alpha \subseteq \beta,\ F\ ,\ x \in \alpha \quad \vdash x \in z \;\&\; x \in \beta$

$\vdash x \in z \cap \beta$

$\vdash x \in \mathbf{\Lambda}$ (pois $z \cap \beta = \mathbf{\Lambda}$)

(1) $\vdash x \in \overline{\alpha}$

(2) $\alpha \subseteq \beta\ ,\ F\ ,\ x \in \overline{\alpha} \vdash x \in \overline{\alpha}$

de (1) e (2) obtemos $\alpha \subseteq \beta \vdash F \supset x \in \overline{\alpha}$

donde, $\alpha \subseteq \beta \vdash (Ez)\ F \supset x \in \overline{\alpha}$

mas, $(Ez)F$ é $x \in \overline{\beta}$

logo, $\alpha \subseteq \beta \vdash (x)(x \in \overline{\beta} \supset x \in \overline{\alpha})$

consequentemente, $\alpha \subseteq \beta \supset \overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha}$.

($\longleftarrow$) Reciprocamente,

$\overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha}\ ,\ x \in \alpha,\ x \in \beta \vdash x \in \beta$

$\overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha}\ ,\ x \in \alpha,\ x \in \overline{\beta} \vdash x \in \overline{\beta}$

$\vdash x \in \overline{\alpha}$

$\vdash x \in \overline{\alpha} \;\&\; x \in \alpha$

$\vdash x \in \mathbf{\Lambda}$

$\vdash x \in \beta$

donde, $\overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha}\ ,\ x \in \alpha \vdash x \in \beta$

logo, $\overline{\beta} \subset \overline{\alpha} \vdash (x)(x \in \alpha \supset x \in \beta)$

consequentemente, $\overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha} \supset \alpha \subseteq \beta$.

TEOREMA I.4.18: I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subseteq \beta \cap \gamma \equiv \alpha \subseteq \beta \;\&\; \alpha \subseteq \gamma)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cup \beta \subseteq \gamma \equiv \alpha \subseteq \beta \;\&\; \beta \subseteq \gamma)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\beta,\gamma)(\mathbf{V} = \beta \cap \gamma \equiv \mathbf{V} = \beta \ \& \ \mathbf{V} = \gamma)$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\alpha = \mathbf{V}$ no ítem I do teorema.

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = \Lambda \equiv \alpha = \Lambda \ \& \ \beta = \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\gamma = \Lambda$ no ítem II do teorema.

O teorema IX.4.19. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \supset \neg(\beta \subseteq \alpha))$ aparentemente não pode ser provado em $\mathbf{NF}_\omega$, todavia, dizer que $\neg(\beta \subseteq \alpha)$, em $\mathbf{NF}$, é equivalente a dizer que $(Ex)(x \in \beta \ \& \ x \in \overline{\alpha})$, ou seja, que $\beta \cap \overline{\alpha} \neq \Lambda$. Então, em $\mathbf{NF}_\omega$, temos:

TEOREMA I.4.19: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \supset \beta \cap \overline{\alpha} \neq \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO: Se $\alpha \subset \beta$, então $\alpha \neq \beta$, ou seja, $(Ez)(z \in \alpha \ \& \ z \in \overline{\beta})$ v v $(Ez)(z \in \overline{\alpha} \ \& \ z \in \beta)$

$\alpha \subset \beta,\ z \in \alpha \ \& \ z \in \overline{\beta} \quad \vdash z \in \beta \cap \overline{\beta}$

$\vdash z \in \Lambda$

$\vdash z \in \overline{\alpha}$

$\vdash z \in \overline{\alpha} \cap \beta$

$\alpha \subset \beta,\ z \in \alpha \ \& \ z \in \overline{\beta} \quad \vdash (Ez)(z \in \overline{\alpha} \cap \beta \ \& \ z \in \overline{\Lambda})$

(1) $\alpha \subset \beta,\ (Ez)(z \in \alpha \ \& \ z \in \overline{\beta}) \quad \vdash \beta \cap \overline{\alpha} \neq \Lambda$

$\alpha \subset \beta,\ z \in \overline{\alpha} \ \& \ z \in \beta \quad \vdash (Ez)(z \in \beta \cap \overline{\alpha} \ \& \ z \in \overline{\Lambda})$

(2) $\alpha \subset \beta,\ (Ez)(z \in \overline{\alpha} \ \& \ z \in \overline{\beta}) \quad \vdash \beta \cap \overline{\alpha} \neq \Lambda$

logo, de (1) e (2) obtemos:

$\vdash \alpha \subset \beta \supset \beta \cap \overline{\alpha} \neq \Lambda$.

Pelas mesmas razões que o Teorema IX.4.19, aparentemente, o Teorema IX.4.20 também não pode ser provado em sua forma original que é $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \equiv \alpha \subseteq \beta \ \& \ \neg(\beta \subseteq \alpha))$. Porém prova-se:

TEOREMA I.4.20: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \equiv \alpha \subseteq \beta \ \& \ \alpha \neq \beta)$

DEMONSTRAÇÃO: Imediata, a partir da definição de subconjunto próprio em $\mathbf{NF}_\omega$.

TEOREMA I.4.21: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \equiv \alpha \subseteq \beta \ \& \ (Ex)(x \in \beta \ \& \ x \in \overline{\alpha}))$

DEMONSTRAÇÃO:

a) $\alpha \subset \beta \vdash \alpha \subseteq \beta \ \& \ \beta \cap \overline{\alpha} \neq \Lambda$ (pelos Teoremas I.4.19 e I.4.20)

$\vdash \alpha \subseteq \beta \ \& \ (Ex)(x \in \beta \ \& \ x \in \overline{\alpha})$

b) $\alpha \subseteq \beta$ & $(Ex)(x \in \beta$ & $x \in \overline{\alpha})$ $\vdash$ $\alpha \subseteq \beta$ & $\alpha \neq \beta$

$\vdash$ $\alpha \subset \beta$

TEOREMA I.4.22: I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma \supset \alpha \subset \gamma)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subseteq \beta$ & $\beta \subset \gamma \supset \alpha \subset \gamma)$

III. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subset \beta$ & $\beta \subset \gamma \supset \alpha \subset \gamma)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. Suponhamos que $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma$, então, obtemos $\alpha \neq \beta$, ou seja , $(Ex)(x \in \alpha$ & $x \in \overline{\beta})$ v $(Ex)(x \in \overline{\alpha}$ & $x \in \beta)$.

a) $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma$, $x \in \alpha$ & $x \in \overline{\beta}$ $\vdash$ $x \in \beta \cap \overline{\beta}$

$\vdash$ $x \in \Lambda$

$\vdash$ $(Ex)(x \in \alpha$ & $x \in \overline{\gamma})$

$\vdash$ $\alpha \neq \gamma$

(1) $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma$, $(Ex)(x \in \alpha$ & $x \in \overline{\beta})$ $\vdash$ $\alpha \neq \gamma$

b) $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma$, $x \in \overline{\alpha}$ & $x \in \beta$ $\vdash$ $x \in \overline{\alpha}$ & $x \in \gamma$

$\vdash$ $\alpha \neq \gamma$

(2) $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma$, $(Ex)(x \in \overline{\alpha}$ & $x \in \beta)$ $\vdash \alpha \neq \gamma$

de (1) e (2) obtemos

$\vdash$ $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma \supset \alpha \neq \gamma$

mas, como $\vdash$ $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma \supset \alpha \subseteq \gamma$

então, temos $\vdash$ $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma \supset \alpha \subseteq \gamma$ & $\alpha \neq \gamma$

logo, $\vdash$ $\alpha \subset \beta$ & $\beta \subseteq \gamma \supset \alpha \subset \gamma$.

As demonstrações de II e III são similares.

TEOREMA I.4.23: $\vdash$ $(\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \equiv \overline{\beta} \subset \overline{\alpha})$

DEMONSTRAÇÃO: devemos provar que:

a) $\alpha \subset \beta \supset \overline{\beta} \neq \overline{\alpha}$ e

b) $\overline{\beta} \subset \overline{\alpha} \supset \alpha \neq \beta$

a) $\alpha \subset \beta$ $\vdash$ $\alpha \cap \overline{\beta} \neq \Lambda$ (pelo Teorema I.4.19)

$\alpha \subset \beta$, $x \in \alpha \cap \overline{\beta}$ & $x \in \overline{\Lambda}$ $\vdash$ $x \in \beta \cap \overline{\beta}$

$\vdash$ $x \in \Lambda$

$\vdash$ $(Ex)(x \in \overline{\beta}$ & $x \in \overline{\overline{\alpha}})$

logo, $\alpha \subset \beta$, $(Ex)(x \in \alpha \cap \overline{\beta}$ & $x \in \overline{\Lambda})$ $\vdash$ $\overline{\beta} \neq \overline{\alpha}$.

Por outro lado,

$\alpha \subset \beta,\ x \in \overline{\alpha \cap \overline{\beta}}\ \&\ x \in \Lambda \vdash x \in \Lambda$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdash \overline{\beta} \neq \overline{\alpha}$ (pelo ítem V do Lema I.4.2)

$\alpha \subset \beta,\ (Ex)(x \in \overline{\alpha \cap \overline{\beta}}\ \&\ x \in \Lambda) \vdash \overline{\beta} \neq \overline{\alpha}$

logo, $\alpha \subset \beta \supset \overline{\beta} \neq \overline{\alpha}$.

b) pelo ítem (a), temos:

$\overline{\beta} \subset \overline{\alpha} \supset \overline{\overline{\beta}} \neq \overline{\overline{\alpha}}$

mas, como $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ e $\overline{\overline{\beta}} = \beta$, então

$\overline{\beta} \subset \overline{\alpha} \supset \beta \neq \alpha$

Por (a) e (b), temos $\vdash \alpha \subset \beta \equiv \overline{\beta} \neq \overline{\alpha}$, então, pelo Teorema I.4.17, $\vdash \alpha \subseteq \beta \equiv \overline{\beta} \subseteq \overline{\alpha}$, então, $\vdash \alpha \subset \beta \equiv \overline{\beta} \subset \overline{\alpha}$.

TEOREMA I.4.24: I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \subset \beta \cap \gamma \supset \alpha \subset \beta\ \&\ \alpha \subset \gamma)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cup \beta \subset \gamma \supset \alpha \subset \gamma\ \&\ \beta \subset \gamma)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. usa-se o ítem I do Teorema I.4.22

II. usa-se o ítem II do Teorema I.4.22.

Os próximos teoremas desta secção correspondem aos exercícios IX.4.7 a IX.4.10 e IX.4.12 de Rosser [19].

TEOREMA I.4.25:

I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cap (\beta - \gamma) = (\alpha \cap \beta) - (\alpha \cap \gamma))$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)((\alpha - \beta) \cup (\alpha - \gamma) = (\alpha - (\beta \cap \gamma))$

III. $\vdash (\alpha,\beta)((\alpha - \beta) \cup (\beta - \alpha) = (\alpha \cup \beta) - (\alpha \cap \beta))$

IV. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha - (\alpha - \beta) = \alpha \cap \beta)$

V. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)((\alpha \cup \gamma) \cap (\beta \cup \overline{\gamma}) = (\alpha \cap \overline{\gamma}) \cup (\beta \cap \gamma))$.

DEMONSTRAÇÃO:

I. Devemos provar que

$\alpha \cap (\beta \cap \overline{\gamma}) = (\alpha \cap \beta) \cap (\overline{\alpha \cap \gamma})$

mas,

$$(\alpha \cap \beta) \cap (\overline{\overline{\alpha} \cap \gamma}) = (\alpha \cap \beta) \cap (\overline{\alpha} \cup \overline{\gamma})$$
$$= ((\alpha \cap \beta) \cap \overline{\alpha}) \cup ((\alpha \cap \beta) \cap \overline{\gamma})$$
$$= (\alpha \cap \overline{\alpha} \cap \beta) \cup (\alpha \cap (\beta \cap \overline{\gamma}))$$
$$= \alpha \cap (\beta \cap \overline{\gamma}).$$

TEOREMA I.4.26:

I. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cup \beta = \alpha \cap \beta \equiv \alpha = \beta)$

II. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap \beta = \Lambda \equiv ((\alpha \cup \beta) - \alpha = \beta \equiv (\alpha \cup \beta) - \beta = \alpha))$

III. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv \alpha \cup (\beta - \alpha) = \beta))$

IV. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\beta \subseteq \alpha \ \& \ \alpha - \beta = \gamma \supset \alpha - \gamma = \beta)$

V. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cap \gamma = \Lambda \supset (\alpha \cup \gamma) - (\beta \cup \gamma) = \alpha - \beta)$

VI. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\gamma \subseteq \alpha \cup \beta \supset (E\Theta,\phi)(\Theta \subseteq \alpha \ \& \ \phi \subseteq \beta \ \& \ \gamma = \Theta \cup \phi))$.

TEOREMA I.4.27: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv \alpha \subset \beta \vee \alpha = \beta)$

DEMONSTRAÇÃO:

$(\leftarrow)$ $\alpha \subset \beta \vee \alpha = \beta \vdash \alpha \subseteq \beta$

logo, $\vdash \alpha \subset \beta \vee \alpha = \beta \supset \alpha \subseteq \beta$

$(\rightarrow)$ $\alpha \subseteq \beta, \alpha = \beta \ \vdash \alpha \subset \beta \vee \alpha = \beta$

$\alpha \subseteq \beta, \alpha \neq \beta \ \vdash \alpha \subset \beta$ (pela definição de $\alpha \subset \beta$)

$\vdash \alpha \subset \beta \vee \alpha = \beta$

logo, $\vdash \alpha \subseteq \beta \supset \alpha \subset \beta \vee \alpha = \beta$

DEFINIÇÃO: *Diferença simétrica de* α e β .

$$\alpha * \beta =_{df} (\alpha \cap \overline{\beta}) \cup (\beta \cap \overline{\alpha}).$$

TEOREMA I.4.28:

I. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha * \beta = \beta * \alpha)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)((\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma))$

III. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)((\alpha * \beta) \cap \gamma = (\alpha \cap \gamma) * (\beta \cap \gamma))$

IV. $\vdash (\alpha)(\alpha * \Lambda = \alpha)$

V. $\vdash (\alpha)(\alpha * \alpha = \Lambda)$

VI. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha * \gamma = \beta * \gamma \supset \alpha = \beta)$

VII. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha = \beta \equiv \alpha * \beta = \Lambda)$.

TEOREMA I.4.29:

I. $\vdash (\alpha,\beta)(\beta = (\alpha \cap \beta) \cup ((\alpha \cup \beta) - \alpha))$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha \cup \beta = \alpha \cup \gamma \mathbin{\&} \alpha \cap \beta = \alpha \cap \gamma \supset \beta = \gamma)$

I.5. UNIÃO E INTERSECÇÃO GENERALIZADAS.

Generalizaremos a intersecção $A \cap B$ para $A \cap B \cap C$ ... onde a intersecção é extendida a todos A, B, C ... que são membros da classe K. Analogamente, generalizaremos $A \cup B$ para $A \cup B \cup C$ ..., onde essa união será extendida a todos A, B, C ... que são membros da classe K.

DEFINIÇÃO:

Intersecção Generalizada: $\bigcap K =_{df} \hat{x}(\alpha)(\alpha \in K \supset x \in \alpha)$ onde x e α são variáveis distintas que não ocorrem em K.

União Generalizada: $\bigcup K =_{df} \hat{x}(E\alpha)(\alpha \in K \mathbin{\&} x \in \alpha)$ onde x e α são variáveis distintas que não ocorrem em K.

$\bigcap K$ e $\bigcup K$ são estratificáveis se, e somente se, K é estratificável e o tipo associado a $\bigcap K$ e $\bigcup K$ é uma unidade menor que o tipo de K.

TEOREMA I.5.1: I. $\vdash (\lambda)(\exists \bigcap \lambda)$

II. $\vdash (\lambda)(\exists \bigcup \lambda)$

TEOREMA I.5.2: I. $\vdash (\lambda,x)(x \in \bigcap \lambda \equiv (\alpha)(\alpha \in \lambda \supset x \in \alpha))$

II. $\vdash (\lambda,x)(x \in \bigcup \lambda \equiv (E\alpha)(\alpha \in \lambda \mathbin{\&} x \in \alpha))$

TEOREMA I.5.3: I. $\vdash (\lambda)(\Lambda \in \lambda \supset \bigcap \lambda = \Lambda)$

II. $\vdash (\lambda)(V \in \lambda \supset \bigcup \lambda = V)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $\Lambda \in \lambda, x \in \bigcap \lambda \vdash \Lambda \in \lambda \mathbin{\&} (\alpha)(\alpha \in \lambda \supset x \in \alpha)$

$\vdash \Lambda \in \lambda \mathbin{\&} (\Lambda \in \lambda \supset x \in \Lambda)$

$\vdash x \in \Lambda$

logo, $\Lambda \in \lambda \vdash \bigcap \lambda \subseteq \Lambda$

mas, $\Lambda \subseteq \bigcap \lambda$, logo, $\Lambda \in \lambda \vdash \bigcap \lambda = \Lambda$

donde, $\vdash \Lambda \in \lambda \supset \bigcap \lambda = \Lambda$

II. $V \in \lambda, x \in V \vdash V \in \lambda \mathbin{\&} x \in V$

$\vdash (E\alpha)(\alpha \in \lambda \mathbin{\&} x \in \alpha)$

$\vdash x \in \bigcup \lambda$

logo, $\mathbf{V} \in \lambda \vdash \mathbf{V} \subseteq \bigcup \lambda$

mas, $\mathbf{V} \in \lambda \vdash \bigcup \lambda \subseteq \mathbf{V}$

donde, $\mathbf{V} \in \lambda \vdash \mathbf{V} = \bigcup \lambda$

TEOREMA I.5.5: I. $(\lambda,\alpha)(\alpha \in \lambda \supset \bigcap \lambda \subseteq \alpha)$

II. $(\lambda,\alpha)(\alpha \in \lambda \supset \alpha \subseteq \bigcup \lambda)$

COROLÁRIO: $\vdash (\lambda)(\lambda \neq \Lambda \supset \bigcap \lambda \subseteq \bigcup \lambda)$

DEMONSTRAÇÃO: Se $\lambda \neq \Lambda$, então $(E\beta)(\beta \in \lambda)$. Logo, pela parte I do teorema, obtemos $\bigcap \lambda \subseteq \beta$ e pela parte II, $\beta \subseteq \bigcup \lambda$. Assim, $\bigcap \lambda \subseteq \bigcup \lambda$. Então, $\vdash \lambda \neq \Lambda \supset \bigcap \lambda \subseteq \bigcup \lambda$.

TEOREMA I.5.7:

I. $\vdash (\lambda,\mu)((\beta)(\beta \in \mu \supset (E\alpha)(\alpha \in \lambda \ \& \ \alpha \subseteq \beta)) \supset (\bigcap \lambda \subseteq \bigcap \mu))$

II. $\vdash (\lambda,\mu)((\alpha)(\alpha \in \lambda \supset (E\beta)(\beta \in \mu \ \& \ \alpha \subseteq \beta)) \supset (\bigcup \lambda \subseteq \bigcup \mu))$

TEOREMA I.5.8:

I. $\vdash (\lambda,\alpha)(\alpha \subseteq \bigcap \lambda \equiv (\beta)\ (\beta \in \lambda \supset \alpha \subseteq \beta))$

II. $\vdash (\lambda,\gamma)(\bigcup \lambda \subseteq \gamma \equiv (\beta)\ (\beta \in \lambda \supset \beta \subseteq \gamma))$

TEOREMA I.5.9:

I. $\vdash (\lambda,\alpha)(\alpha \subset \bigcap \lambda \supset (\beta)(\beta \in \lambda \supset \alpha \subset \beta))$

II. $\vdash (\lambda,\gamma)(\bigcup \lambda \subset \gamma \supset (\beta)\ (\beta \in \lambda \supset \beta \subset \gamma))$

DEMONSTRAÇÃO:

I. Se $\alpha \subset \bigcap \lambda$, então $\alpha \subseteq \bigcap \lambda$, daí, pela parte I do teorema anterior temos:

(1) $\alpha \subset \bigcap \lambda \supset (\beta)(\beta \in \lambda \supset \alpha \subseteq \beta)$

Precisamos, então, provar que

$\alpha \subset \bigcap \lambda\ , \beta \in \lambda \vdash \alpha \neq \beta$

De $\alpha \subset \bigcap \lambda$ <u>obtemos</u> $\alpha \neq \bigcap \lambda$, ou seja,

$(Ex)(x \in \alpha \ \& \ x \in \overline{\bigcap \lambda}) \vee (Ex)(x \in \overline{\alpha} \ \& \ x \in \bigcap \lambda)$

Então,

(2) $\alpha \subset \bigcap \lambda,\ \beta \in \lambda,\ x \in \alpha \ \&\ x \in \overline{\bigcap \lambda} \vdash x \in z \ \&\ z \cap (\bigcap \lambda) = \Lambda$

$\vdash x \in \bigcap \lambda$

$\vdash x \in z \cap (\bigcap \lambda)$

$\vdash x \in \Lambda$

$\vdash \alpha \neq \beta$

(3) $\alpha \subset \bigcap \lambda,\ \beta \in \lambda,\ x \in \overline{\alpha} \ \&\ x \in \bigcap \lambda \vdash (y)(y \in \lambda \supset x \in y)$

$\vdash \beta \in \lambda \supset x \in \beta$

$\vdash x \in \beta$

$\vdash x \in \overline{\alpha} \cap \beta$

$\vdash \alpha \neq \beta$

Logo, de (2) e (3) obtemos

$\alpha \subset \bigcap \lambda,\ \beta \in \lambda \ \vdash \alpha \neq \beta$

Consequentemente,

(4) $\vdash \alpha \subset \bigcap \lambda \supset (\beta)(\beta \in \lambda \supset \alpha \neq \beta)$

Finalmente, de (1) e (4) obtemos o resultado desejado.

II. Facilmente prova-se, usando-se a parte II do teorema anterior que

(1) $\bigcup \lambda \subset \gamma \supset (\beta)(\beta \in \lambda \supset \beta \subseteq \gamma)$

Precisamos, então, provar que

$\bigcup \lambda \subset \gamma,\ \beta \in \lambda \ \vdash \beta \neq \gamma.$

Por outro lado, suponhamos que

(1) $\bigcup \lambda \subset \gamma$ (2) $\beta \in \gamma$ e (3) $\beta = \gamma$.

De (2), pelo Teorema I.5.5, obtemos $\beta \subseteq \bigcup \lambda$ e, por (3), $\gamma \subseteq \bigcup \lambda$. Mas, de (1), obtemos $\bigcup \lambda \subseteq \gamma$. Assim temos

$$\bigcup \lambda = \gamma$$

Mas, de (1) obtemos

$$\bigcup \lambda \neq \gamma$$

Logo, temos $\bigcup \lambda = \gamma \ \&\ \bigcup \lambda \neq \gamma$; donde, pelo Lema I.4.3, parte II, temos

$$(\mathrm{E}x)(x \in \Lambda)$$

Finalmente, pelo Lema I.4.2, parte V, obtemos $\beta \neq \gamma$. Logo,

(4) $\bigcup \lambda \subset \gamma, \beta \in \lambda\ , \beta = \gamma \vdash \beta \neq \gamma$

Donde, de (1) e (4) obtemos

$\vdash \bigcup \lambda \subset \gamma \ \& \ \beta \in \lambda \supset \beta \neq \gamma$

TEOREMA I.5.10:

I. $\vdash (\lambda) \exists \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\}$

II. $\vdash (\lambda,\beta) (\overline{\beta} \in \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \equiv \beta \in \lambda\})$

III. $\vdash (\lambda,\beta) (\beta \in \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \equiv (E\alpha)(\alpha \in \lambda \ \& \ \beta = \overline{\alpha}))$

DEMONSTRAÇÃO:

I. A classe $\{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\}$ é definida como $\{x \mid (E\beta)((x)(x \in \beta \equiv x \in \overline{\alpha} \ \& \ \alpha \in \lambda))\}$, mas a fórmula que define esta classe é estratificável; desse modo, existe a classe $\{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\}$.

II. $\overline{\beta} \in \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \equiv \overline{\beta} = \overline{\alpha} \ \& \ \alpha \in \lambda$

$\equiv \beta = \overline{\alpha} \ \& \ \alpha \in \lambda$

$\equiv \beta \in \lambda$

III. $\beta \in \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \equiv \beta = \overline{\alpha} \ \& \ \alpha \in \lambda$

$\equiv (E\alpha)(\alpha \in \lambda \ \& \ \beta = \overline{\alpha})$

TEOREMA I.5.11:

I. $\vdash (\lambda)(\bigcap \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} = \overline{\bigcup \lambda})$

II. $\vdash (\lambda)(\bigcup \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \subseteq \overline{\bigcap \lambda})$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $(\rightarrow)$ Observando-se que em $\mathbf{NF}_\omega$ prova-se que $(Ex)(A(x) \supset B) \equiv (x)(A(x) \supset B)$ (ver pag. 18) quando x não ocorre livre em B , prova-se, como em Rosser ([19] , pág. 243) que

(1) $x \in \bigcap \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \equiv (\alpha)(\alpha \in \lambda \supset x \in \overline{\alpha})$

mas, de (1), supondo-se que

$x \in \bigcap \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\}$, obtemos

(2) $(\alpha)(\alpha \in \lambda \supset x \in \overline{\alpha})$

Supondo-se que $x \in \bigcup \lambda$, teremos

(3) $(E\beta)(\beta \in \lambda \ \& \ x \in \beta)$, donde

(4) $\gamma \in \lambda \ \& \ x \in \gamma$

mas, de (2) obtemos:

(5) $\gamma \in \lambda \supset x \in \overline{\gamma}$

e, de (4) e (5) teremos:

(6) $x \in \overline{\gamma}$

e, de (3) temos:

(7) $x \in \gamma$.

Logo, obtemos $\vdash x \in \gamma \cap \overline{\gamma}$, ou seja, $\vdash x \in \Lambda$ e, consequentemente, $x \in \overline{\bigcup \lambda}$

Por outro lado, supondo-se que $x \in \overline{\bigcup \lambda}$, obviamente obtemos $x \in \overline{\bigcup \lambda}$.
Assim sendo, teremos

(8) $\vdash x \in \bigcap \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \supset x \in \overline{\bigcup \lambda}$

ou seja, $\vdash \bigcap \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \subseteq \overline{\bigcup \lambda}$

($\longleftarrow$) Reciprocamente,

$x \in \overline{\bigcup \lambda} \quad \vdash x \in z \ \& \ z \cap (\bigcup \lambda) = \Lambda$

$x \in \overline{\bigcup \lambda}, \alpha \in \lambda, x \in \alpha \vdash x \in \bigcup \lambda$

$\vdash x \in z$

$\vdash x \in z \cap (\bigcup \lambda)$

$\vdash x \in \Lambda$

$\vdash x \in \overline{\alpha}$

$x \in \overline{\bigcup \lambda}, \alpha \in \lambda, x \in \overline{\alpha} \vdash x \in \overline{\alpha}$

Então, $x \in \overline{\bigcup \lambda}, \alpha \in \lambda \vdash x \in \overline{\alpha}$

logo, $\vdash x \in \overline{\bigcup \lambda} \supset (\alpha \in \lambda \supset x \in \overline{\alpha})$

como α não ocorre livre em $x \in \overline{\bigcup \lambda}$,

$\vdash x \in \overline{\bigcup \lambda} \supset (\alpha)(\alpha \in \lambda \supset x \in \overline{\alpha})$

e, como no ítem anterior,

$\vdash x \in \overline{\bigcup \lambda} \supset (\beta)(\beta \in \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \supset x \in \beta)$

então,

$\vdash x \in \overline{\bigcup \lambda} \supset x \in \bigcap \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\}$

donde, $\vdash \overline{\bigcup \lambda} \subseteq \bigcap \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\}$

II. Como em Rosser ([19] , pág. 243), prova-se:

(1) $x \in \bigcup \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \supset (E\alpha)(\alpha \in \lambda \;\&\; x \in \bar{\alpha})$

$$
\begin{array}{ll}
\alpha \in \lambda \;\&\; x \in \bar{\alpha},\; x \in \bigcap \lambda & \vdash \alpha \in \lambda \supset x \in \alpha \\
 & \vdash x \in \alpha \\
 & \vdash x \in \alpha \cap \bar{\alpha} \\
 & \vdash x \in \Lambda \\
 & \vdash x \in \overline{\bigcap \lambda} \\
\alpha \in \lambda \;\&\; x \in \bar{\alpha},\; x \in \overline{\bigcap \lambda} & \vdash x \in \overline{\bigcap \lambda}
\end{array}
$$

logo, $\vdash \alpha \in \lambda \;\&\; x \in \bar{\alpha} \supset x \in \overline{\bigcap \lambda}$

e, como α não ocorre livre em $x \in \overline{\bigcap \lambda}$,

temos

$\vdash (E\alpha)(\alpha \in \lambda \;\&\; x \in \bar{\alpha}) \supset x \in \overline{\bigcap \lambda}$

então, por (1), $\vdash \bigcup \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} \subseteq \overline{\bigcap \lambda}$

OBSERVAÇÃO: 1) Em Rosser, o ítem II do Teorema IX.5.11, aqui I.5.11, é enunciado como $\vdash (\lambda)(\bigcup \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\} = \overline{\bigcap \lambda})$, mas, aparentemente, em $\mathbf{NF}_\omega$ não podemos provar que $\vdash (\lambda)(\overline{\bigcap \lambda} \subseteq \bigcup \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \lambda\})$.

2) O ítem I do Teorema I.5.11 é a generalização da lei $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} = \overline{\alpha \cup \beta}$. Se, de fato, não pudermos provar em $\mathbf{NF}_\omega$ a conversa do ítem II do Teorema I.5.11, então, a lei $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta} = \overline{\alpha \cap \beta}$ não pode ser generalizada.

A seguir passaremos a definir Clos (A,P), isto é, o fecho de uma classe A em relação à propriedade P , e a demonstrar os principais teoremas sobre Clos (A,P). Estes teoremas são de fundamental importância para o desenvolvimento da aritmética em **NF** , logo, também, em $\mathbf{NF}_\omega$. A definição que segue , como em Rosser [19] , é devida essencialmente a Frege.

DEFINIÇÃO: Sejam $x_1, \ldots, x_n, z$ variáveis que ocorrem livres em P , porém que não ocorrem livres em A , e β uma variável que não ocorre nem em A e nem em P . Então,

$\mathrm{Clos}(A,P) =_{df} \bigcap \hat{\beta}\, (A \subseteq \beta \ \&\ (x_1,\ldots,x_n, z)(x_1,\ldots,x_n \in \beta \supset z \in \beta))$.

Em outras palavras, Clos(A,P), se existir, será a menor classe β fechada em relação à P; isto é, se $x_1,\ldots,x_n \in \beta\ \&\ P(x_1,\ldots,x_n, z)$ então $z \in \beta$.

Para verificar se Clos(A,P) é estratificável, o melhor processo é o de escrever por extenso a definição e, então, verificar se é, ou não, estratificável. Todavia, se existir Clos(A,P), isto é, se a fórmula que a define for estratificável, então o tipo de Clos(A,P) terá que ser o mesmo tipo de A.

Nos cinco teoremas que se seguem usaremos $H(A,\beta,P)$ para denotar a fórmula $A \subseteq \beta\ \&\ (x_1,\ldots,x_n, z)(x_1,\ldots,x_n \in \beta\ \&\ P \supset z \in \beta)$ onde as variáveis $x_1,\ldots,x_n$, z e β estão sujeitas às restrições explicitadas na definição de Clos(A,P).

Substituindo-se λ por $\hat{\beta} H(A,\beta,P)$ no Teorema I.5.1, obtemos $\vdash \exists\ \mathrm{Clos}(A,P)$.

Esse resultado não é de grande utilidade na demonstração dos teoremas sobre Clos(A,P), pois para essas demonstrações precisamos que $\exists\ \hat{\beta} H(A,\beta,P)$. Isso é fácil de ser provado, pois $\hat{\beta} H(A,\beta,P)$ é estratificável quando Clos(A,P) o for.

TEOREMA I.5.12: $\vdash (\alpha)(\exists \hat{\beta} H(A,\beta,P) \supset (x)(x \in \mathrm{Clos}(\alpha,P) \equiv (\beta)(H(\alpha,\beta,P) \supset x \in \beta)))$

DEMONSTRAÇÃO: exatamente como a do Teorema IX.5.12 de Rosser, pág. 246.

Este teorema nos fornece uma condição necessária e suficiente para que $x \in \mathrm{Clos}(\alpha,P)$.

TEOREMA I.5.13: $\vdash (\alpha)(\exists \hat{\beta} H(\alpha,\beta,P) \supset \alpha \subseteq \mathrm{Clos}(\alpha,P))$

DEMONSTRAÇÃO: como a do Teorema IX.5.13 de Rosser, pág. 246.

TEOREMA I.5.14: $\vdash (\alpha)(\exists \hat{\beta} H(\alpha,\beta,P) \supset (x_1,\ldots,x_n, z)(x_1,\ldots,x_n \in \mathrm{Clos}(\alpha,P)\ \&$
$\&\ P \supset z \in \mathrm{Clos}(\alpha,P)))$.

DEMONSTRAÇÃO: como a do Teorema IX.5.14 de Rosser, pág. 246.

Este teorema nos garante que Clos(α,P) é fechada com relação a P.

TEOREMA I.5.15: $\vdash (\alpha)(\exists \hat{\beta} H(\alpha,\beta,P) \supset (\beta)(\alpha \subseteq \beta\ \&\ (x_1,\ldots,x_n, z)(x_1,\ldots,x_n \in$
$\in \beta\ \&\ x_1,\ldots,x_n \in \mathrm{Clos}(\alpha,P)\ \&\ P \supset z \in \beta) \supset \mathrm{Clos}(\alpha,P) \subseteq \beta))$

DEMONSTRAÇÃO: como a do Teorema IX.5.15 de Rosser, pág. 247.

Este teorema nos garante que $Clos(\alpha,P)$ é a menor classe que contém α e que é fechada para P.

Pode-se, intuitivamente, explicar o processo de geração de $Clos(\alpha,P)$ da seguinte forma, começando com a classe α, façamos o seguinte:

1) acrescentamos a α todos os z tais que $x_1,\ldots,x_n \in \alpha$ e $P(x_1,\ldots,x_n,z)$. Denotemos por β_1 a classe assim obtida.

2) acrescentamos a β_1 todos os z tais que $x_1,\ldots,x_n \in \beta_1$ e $P(x_1,\ldots,x_n,z)$. Denotemos por β_2 a classe assim obtida.

Continuando o processo, obtemos:

$Clos(\alpha,P) = \alpha \cup \beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots$

Finalmente, é fácil perceber que $\alpha \cup \beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots$ é exatamente a intersecção das classes β, que contém α e que são fechadas em relação a P.

O teorema seguinte nos diz que $z \in Clos(\alpha,P)$ porque ou z pertence a α ou z pertence a algum dos β_i gerados conforme descrição anterior.

TEOREMA I.5.16: $\vdash (\alpha)(\exists\bar{\beta}H(\alpha,\beta,P)\ \&\ (\exists\bar{z})(z \in \alpha \vee (Ex_1,\ldots,x_n)(x_1,\ldots,x_n \in$ $\in Clos(\alpha,P)\ \&\ P \supset (z)(z \in Clos(\alpha,P) \equiv z \in \alpha \vee (Ex_1,\ldots,x_n)(x_1,\ldots,x_n \in$ $\in Clos(\alpha,P)\ \&\ P)))$.

DEMONSTRAÇÃO: como a do Teorema IX.5.16 de Rosser, pág. 248.

O teorema seguinte corresponde ao exercício IX.5.11, pág. 248, de Rosser [19].

TEOREMA I.5.17:
I. $\vdash \bigcap \Lambda = \mathbf{V}$
II. $\vdash \bigcup \Lambda = \Lambda$
III. $\vdash \bigcap \mathbf{V} = \Lambda$
IV. $\vdash \bigcup \mathbf{V} = \mathbf{V}$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $(\rightarrow)$ pelo Lema I.4.4, parte II, prova-se que $(\alpha)(\alpha \subseteq \mathbf{V})$; logo,

$\vdash \bigcap \Lambda \subseteq \mathbf{V}$ (1)

$(\leftarrow)$ por outro lado, pelo Lema I.4.2, ítem II, obtemos $\vdash (\alpha)(\alpha \in \Lambda \supset x \in \alpha)$, ou seja, $\vdash (x)(x \in \bigcap \Lambda)$, consequentemente, $\mathbf{V} \subseteq \bigcap \Lambda$ (2)

de (1) e (2) $\vdash \mathbf{V} = \bigcap \Lambda$

II. $(\rightarrow)$ $\alpha \in \Lambda$ & $t \in \alpha$ $\vdash$ $\alpha \in \Lambda$

$\vdash$ $(\beta)(\alpha \in \beta)$ (Lema I.4.2, ítem II)

$\vdash$ $\alpha \in \{t\}$

$\vdash$ $\alpha = t$

$\vdash$ $t \in \Lambda$

logo, $\vdash$ $\alpha \in \Lambda$ & $t \in \alpha \supset t \in \Lambda$

$\vdash$ $(E\alpha)(\alpha \in \Lambda$ & $t \in \alpha) \supset t \in \Lambda$

$\vdash$ $(t)((E\alpha)(\alpha \in \Lambda$ & $t \in \alpha) \supset t \in \Lambda)$

$\vdash$ $\bigcup \Lambda \subseteq \Lambda$ (1)

$(\leftarrow)$ por outro lado, pelo Lema, I.4.4, ítem IV, temos que $(\alpha)(\Lambda \subseteq \alpha)$, logo,

$\vdash$ $\Lambda \subseteq \bigcup \Lambda$ (2)

de (1) e (2) obtemos $\vdash$ $\Lambda = \bigcup \Lambda$.

III. $(\rightarrow)$ Como $\Lambda \in V$, pelo Teorema I.5.5 obtemos $\vdash$ $\bigcap V \subseteq \Lambda$.

$(\leftarrow)$ como $\vdash$ $t \in \Lambda \supset (\alpha)(\alpha \in V \supset t \in \alpha)$

então, $\vdash$ $\Lambda \subseteq \bigcap V$

logo, $\vdash$ $\Lambda = \bigcap V$

IV. $(\rightarrow)$ $\vdash$ $\bigcup V \subseteq V$ pelo Lema I.4.4, ítem II.

$(\leftarrow)$ $t \in V$ $\vdash$ $t \in \bigcup V$ (pelo Teorema I.5.5, ítem II)

logo, $\vdash$ $t \in V \supset t \in \bigcup V$

$\vdash$ $(t)(t \in V \supset t \in \bigcup V)$

$\vdash$ $V \subseteq \bigcup V$

logo, $\vdash$ $V = \bigcup V$

1.6. CLASSES UNITÁRIAS E SUBCLASSES.

Como já mencionamos anteriormente, definimos *classe unitária de* A como $\{A\} =_{df} \hat{x}(x = A)$ e $\{A_1\} \cup \ldots \cup \{A_n\}$ é a *classe cujos elementos são* $A_1, \ldots, A_n$ e ela será denotada por $\{A_1, \ldots, A_n\}$

TEOREMA I.6.1: I. $\vdash$ $(x)(\exists\{x\})$

II. $\vdash$ $(x_1, \ldots, x_n)(\exists\{x_1, \ldots, x_n\})$

TEOREMA I.6.2: I. $\vdash (x,y)(y \in \{x\} \equiv y = x)$

II. $\vdash (x,y,z)(z \in \{x,y\} \equiv z = x \vee z = y)$

III. $\vdash (x_1,\ldots,x_n)(y \in \{x_1,\ldots,x_n\} \equiv y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (x)(x \in \{x\})$

COROLÁRIO 2: $\vdash (x,y)(x,y \in \{x,y\})$

COROLÁRIO 3: $\vdash (x_1,\ldots,x_n)(x_1,\ldots,x_n \in \{x_1,\ldots,x_n\})$

TEOREMA I.6.3: $\vdash (x,y)(\{x\} = \{y\} \supset x = y)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (x,y)(\{x\} = \{y\} \equiv x = y)$

COROLÁRIO 2: $\vdash \exists \{\{x\} \mid P\} \supset (x)(\{x\} \in \{\{x\} \mid P\} \equiv P)$

TEOREMA I.6.4: $\vdash (x,y)(x = y \equiv (\alpha)(x \in \alpha \supset y \in \alpha))$

COROLÁRIO: $\vdash (x,y)(x = y \equiv (\alpha)(x \in \alpha \equiv y \in \alpha))$

TEOREMA I.6.5: $\vdash (\alpha,x)(x \in \alpha \equiv \{x\} \subseteq \alpha)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha,x)(x \in \alpha \equiv \{x\} \cap \alpha = \{x\})$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha,x)(x \in \alpha \equiv \{x\} \cup \alpha = \alpha)$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\alpha,x)(x \in \alpha \equiv (\alpha \cap \overline{\{x\}}) \cup \{x\} = \alpha)$

DEMONSTRAÇÃO:

$(\alpha \cap \overline{\{x\}}) \cup \{x\} = (\alpha \cup \{x\}) \cap (\{x\} \cup \overline{\{x\}}) = \alpha \cap \mathbf{V} = \alpha$

logo, $x \in \alpha \vdash (\alpha \cap \overline{\{x\}}) \cup \{x\} = \alpha$

Por outro lado, se $(\alpha \cap \overline{\{x\}}) \cup \{x\} = \alpha$, então $\alpha \cup \{x\} \subseteq \alpha$, e como $x \in \alpha \cup \{x\}$, então $x \in \alpha$.

Logo, $(\alpha \cap \overline{\{x\}}) \cup \{x\} = \alpha \vdash x \in \alpha$.

Assim sendo, $x \in \alpha \equiv (\alpha \cap \overline{\{x\}}) \cup \{x\} = \alpha$.

TEOREMA I.6.6: $\vdash (\alpha,x)(x \in \overline{\alpha} \equiv \alpha \subseteq \overline{\{x\}})$

DEMONSTRAÇÃO: $x \in \overline{\alpha} \equiv \{x\} \subseteq \overline{\alpha}$

$\equiv \overline{\overline{\alpha}} \subseteq \overline{\{x\}}$ (pelo Teorema I.4.17)

$\equiv \alpha \subseteq \overline{\{x\}}$ (pois $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$)

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha,x)(x \in \overline{\alpha} \equiv \{x\} \cap \alpha = \Lambda)$.

DEMONSTRAÇÃO: $x \in \overline{\alpha} \equiv \{x\} \subseteq \overline{\alpha}$

$\equiv \overline{\overline{\alpha}} \subseteq \overline{\{x\}}$ (pelo Teorema I.4.17)

$\equiv \alpha \subseteq \overline{\{x\}}$

$\equiv \alpha \cap \overline{\overline{\{x\}}} = \Lambda$ (pelo Teorema I.4.13, ítem II).

$\equiv \alpha \cap \{x\} = \Lambda$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha,x)(x \in \alpha \equiv \{x\} \cap \alpha \neq \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO: $x \in \alpha \equiv \{x\} \subseteq \alpha$

$\equiv \{x\} \cap \alpha = \{x\}$

como $\{x\} \neq \Lambda$, então, $\{x\} \cap \alpha \neq \Lambda$.

TEOREMA I.6.7: $\vdash (\alpha,x)(\{x\} \cap \alpha = \Lambda \vee \{x\} \cap \alpha = \{x\})$

DEMONSTRAÇÃO:

Se $x \in \alpha \vdash \{x\} \subseteq \alpha$

$\vdash \{x\} \cap \alpha = \{x\}$

$\vdash \{x\} \cap \alpha = \Lambda \vee \{x\} \cap \alpha = \{x\}$

Se $x \in \overline{\alpha} \vdash \{x\} \subseteq \overline{\alpha}$

$\vdash \{x\} \cap \alpha = \Lambda$

$\vdash \{x\} \cap \alpha = \Lambda \vee \{x\} \cap \alpha = \{x\}$

logo, como $\vdash x \in \alpha \vee x \in \overline{\alpha}$, então

$\vdash \{x\} \cap \alpha = \Lambda \vee \{x\} \cap \alpha = \{x\}$.

COROLÁRIO: $\vdash (\alpha,x)(\alpha \subseteq \{x\} \supset \alpha = \Lambda \vee \alpha = \{x\})$

TEOREMA I.6.8: $\vdash (x,y)(x \neq y \equiv \{x\} \cap \{y\} = \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO:

($\rightarrow$) a) $t \in x \;\&\; t \in \overline{y}$, $t \in \{x\} \;\&\; t \in \{y\} \vdash t = x \;\&\; t = y$

$\vdash x = y$

$\vdash t \in y \;\&\; t \in \overline{y}$

$\vdash t \in y \cap \overline{y}$

$\vdash t \in \Lambda$

assim,

$t \in x \;\&\; t \in \overline{y} \vdash t \in \{x\} \;\&\; t \in \{y\} \supset t \in \Lambda$

$\vdash (t)(t \in \{x\} \cap \{y\} \supset t \in \Lambda)$

logo, $(Et)(t \in x \;\&\; t \in \overline{y}) \vdash \{x\} \cap \{y\} \subseteq \Lambda$

b) $t \in \bar{x}$ & $t \in y$, $t \in \{x\} \cap \{y\} \vdash t \in \bar{x}$ & $t \in x$

$\vdash t \in \Lambda$

logo, $t \in \bar{x}$ & $t \in y \vdash t \in \{x\} \cap \{y\} \supset t \in \Lambda$

$\vdash (t)(t \in \{x\} \cap \{y\} \supset t \in \Lambda)$

donde, $(Et)(t \in \bar{x}$ & $t \in y) \vdash \{x\} \cap \{y\} \subseteq \Lambda$

de (a) e (b) obtemos

$(Et)(t \in x$ & $t \in \bar{y})$ v $(Et)(t \in \bar{x}$ & $t \in y) \vdash \{x\} \cap \{y\} \subseteq \Lambda$

ou seja, $x \neq y \vdash \{x\} \cap \{y\} \subseteq \Lambda$

mas, $\Lambda \subseteq \{x\} \cap \{y\}$

então, $x \neq y \vdash \{x\} \cap \{y\} = \Lambda$

($\leftarrow$) por outro lado,

$\{x\} \cap \{y\} = \Lambda$, $x \neq y \vdash x \neq y$

$\{x\} \cap \{y\} = \Lambda$, $x = y \vdash \{x\} \cap \{y\} = \Lambda$

$\vdash \{x\} = \Lambda$

$\vdash x \in \Lambda$

$\vdash x \neq y$ (pelo Lema I.4.2, ítem V)

logo $\{x\} \cap \{y\} = \Lambda \vdash x \neq y$

TEOREMA I.6.9:

I. $\vdash (\alpha)(\bigcap \{\alpha\} = \alpha)$

II. $\vdash (\alpha,\beta)(\bigcap \{\alpha,\beta\} = \alpha \cap \beta)$

III. $\vdash (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = (\bigcap \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} = \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_n)$

IV. $\vdash (\lambda,\alpha)(\bigcap (\{\alpha\} \cup \lambda) = \alpha \cap (\bigcap \lambda))$

V. $\vdash (\alpha)(\bigcup \{\alpha\} = \alpha)$

VI. $\vdash (\alpha,\beta)(\bigcup \{\alpha,\beta\} = \alpha \cup \beta)$

VII. $\vdash (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)(\bigcup \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} = \alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_n)$

VIII. $\vdash (\lambda,\alpha)(\bigcup (\{\alpha\} \cup \lambda) = \alpha \cup (\bigcup \lambda))$.

DEFINIÇÃO: Seja A uma classe, denotamos por USC(A) a *classe das subclasses unitárias de* A e definimos

$$\mathrm{USC}(A) =_{df} \{\{x\} \mid x \in A\}$$

onde x é uma variável que não ocorre em A.

Definimos, também

$USC^2(A)$ como $USC(USC(A))$

$USC^3(A)$ como $USC(USC^2(A))$ etc.

Além disso, definimos os números cardinais 0 e 1 como:

$0 =_{df} \{\Lambda\}$ e $1 =_{df} USC(\Lambda)$

$USC(A)$ é estratificável se, e somente se, A é estratificável, o mesmo ocorrendo para $USC^2(A)$, $USC^3(A)$, etc. Para estratificação, $USC(A)$ deve ter um tipo a mais do que A, $USC^2(A)$ deve ter dois tipos a mais, etc. 0 e 1 são estratificáveis e a eles pode ser associado qualquer tipo.

TEOREMA I.6.10: I. $\vdash (\alpha)(\exists(USC(\alpha)))$

II. $\vdash (\alpha,x)(\{x\} \in USC(\alpha) \equiv x \in \alpha)$

III. $\vdash (\alpha,x)(x \in USC(\alpha) \equiv (Ey)(y \in \alpha \ \& \ x = \{y\})$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha)(\exists USC^2(\alpha))$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha,x)(\{\{x\}\} \in USC^2(\alpha) \equiv x \in \alpha)$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\alpha,x)(x \in USC^2(\alpha) \equiv (Ey)(y \in \alpha \ \& \ x = \{\{y\}\}))$

COROLÁRIO 4: $\vdash (x)(\{x\} \in 1)$

COROLÁRIO 5: $\vdash (x)(x \in 1 \equiv (Ey)(x = \{y\}))$

TEOREMA I.6.11: $\vdash (\alpha)(\bigcup(USC(\alpha)) = \alpha)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha,\beta)(USC(\alpha) = USC(\beta) \equiv \alpha = \beta)$

COROLÁRIO 2: $\vdash \exists\{USC(\alpha) \mid P\} \supset (\alpha)(USC(\alpha) \in \{USC(\alpha) \mid P\} \equiv P)$

TEOREMA I.6.12:

I. $\vdash (\alpha,\beta)(USC(\alpha \cap \beta) = USC(\alpha) \cap USC(\beta))$

II. $\vdash (\alpha,\beta)(USC(\alpha \cup \beta) = USC(\alpha) \cup USC(\beta))$

III. $\vdash (\alpha,\beta)(USC(\alpha - \beta) = USC(\alpha) - USC(\beta))$

IV. $\vdash USC(\Lambda) = \Lambda$

V. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv USC(\alpha) \subseteq USC(\beta))$

VI. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \equiv USC(\alpha) \subset USC(\beta))$.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos, em primeiro lugar, o ítem IV, uma vez que ele nos será necessário posteriormente.

IV. $\vdash \mathrm{USC}(\Lambda) = \Lambda$

como $\Lambda \subseteq \mathrm{USC}(\Lambda)$, basta provar que $\mathrm{USC}(\Lambda) \subseteq \Lambda$.

$$
\begin{array}{lll}
x \in \mathrm{USC}(\Lambda) & \vdash & (Ey)(y \in \Lambda \ \& \ x = \{y\}) \\
 & \vdash & z \in \Lambda \ \& \ x = \{z\} \\
 & \vdash & z = x \\
 & \vdash & x \in \Lambda \\
\text{então,} & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\Lambda) \supset x \in \Lambda \\
 & \vdash & (x)(x \in \mathrm{USC}(\Lambda) \supset x \in \Lambda) \\
\text{logo,} & \vdash & \mathrm{USC}(\Lambda) \subseteq \Lambda .
\end{array}
$$

III. $\vdash (\alpha,\beta)(\mathrm{USC}(\alpha - \beta) = \mathrm{USC}(\alpha) - \mathrm{USC}(\beta))$.

Devemos mostrar que
$\mathrm{USC}(\alpha \cap \overline{\beta}) = \mathrm{USC}(\alpha) \cap \overline{\mathrm{USC}(\beta)}$

($\longrightarrow$) $x \in \mathrm{USC}(\alpha \cap \overline{\beta}) \equiv x \in \mathrm{USC}(\alpha) \ \& \ x \in \mathrm{USC}(\overline{\beta})$ (pelo ítem I)

$$
\begin{array}{lll}
x \in \mathrm{USC}(\alpha \cap \overline{\beta}),\ \ x \in \overline{\mathrm{USC}(\beta)} & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\alpha) \ \& \ x \in \overline{\mathrm{USC}(\beta)} \\
 & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\alpha) \cap \overline{\mathrm{USC}(\beta)} \\
x \in \mathrm{USC}(\alpha \cap \overline{\beta}),\ \ x \in \mathrm{USC}(\beta) & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\beta) \ \& \ x \in \mathrm{USC}(\overline{\beta}) \\
 & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\beta) \cap \mathrm{USC}(\overline{\beta}) \\
 & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\beta \cap \overline{\beta}) \\
 & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\Lambda) \\
 & \vdash & x \in \Lambda \ \ \text{(pelo ítem IV)} \\
 & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\alpha) \cap \overline{\mathrm{USC}(\beta)}
\end{array}
$$

e, então,

$$\vdash \mathrm{USC}(\alpha \cap \overline{\beta}) \subseteq \mathrm{USC}(\alpha) \cap \overline{\mathrm{USC}(\beta)} \qquad (1)$$

($\longleftarrow$) Por outro lado,

$$
\begin{array}{lll}
x \in \mathrm{USC}(\alpha) \ \& \ x \in \overline{\mathrm{USC}(\beta)},\ x \in \mathrm{USC}(\beta) & \vdash & x \in \mathrm{USC}(\beta) \cap \overline{\mathrm{USC}(\beta)} \\
 & \vdash & x \in \Lambda
\end{array}
$$

daí,

$x \in USC(\alpha)$ & $x \in \overline{USC(\beta)} \vdash x \in USC(\beta) \supset x \in \Lambda$

$\vdash USC(\beta) \subseteq \Lambda$

$\vdash USC(\beta) = \Lambda$ (Lema I.4.5, ítem II)

$\vdash USC(\beta) = USC(\Lambda)$ (pelo ítem IV)

$\vdash \beta = \Lambda$ (pelo corolário 1 do Teo. 1.6.11)

logo, $\vdash \overline{\beta} = V$

então, $\vdash \alpha \cap \overline{\beta} = \alpha$

como $\alpha \cap \overline{\beta} = \alpha$, então $USC(\alpha \cap \overline{\beta}) = USC(\alpha)$

mas. $x \in USC(\alpha)$ & $x \in \overline{USC(\beta)} \vdash x \in USC(\alpha)$

$\vdash x \in USC(\alpha \cap \overline{\beta})$

logo,

$\vdash x \in USC(\alpha) \cap \overline{USC(\beta)} \supset x \in USC(\alpha \cap \overline{\beta})$

$\vdash (x)(x \in USC(\alpha) \cap \overline{USC(\beta)} \supset x \in USC(\alpha \cap \overline{\beta}))$

então, $\vdash USC(\alpha) \cap \overline{USC(\beta)} \subseteq USC(\alpha \cap \overline{\beta})$ (2)

de (1) e (2) obtemos o teorema.

VI. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \equiv USC(\alpha) \subset USC(\beta))$

Pelo ítem V, $\alpha \subseteq \beta \equiv USC(\alpha) \subseteq USC(\beta)$,

então devemos provar que

$\alpha \neq \beta \equiv USC(\alpha) \neq USC(\beta)$.

$(\rightarrow)$ $\alpha \neq \beta$, $USC(\alpha) = USC(\beta) \vdash \alpha = \beta$ (pelo corolário 1, do Teo. I.6.11)

$\vdash \alpha \cap \overline{\beta} \neq \Lambda \vee \overline{\alpha} \cap \beta \neq \Lambda$ (de $\alpha \neq \beta$)

$\vdash t \in \alpha \cap \overline{\beta} \vee t \in \overline{\alpha} \cap \beta$

$\vdash t \in \alpha \cap \overline{\alpha} \vee t \in \overline{\beta} \cap \beta$ (de $\alpha = \beta$)

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash USC(\alpha) \neq USC(\beta)$ (pelo Lema I.4.2, ítem V)

$\alpha \neq \beta$, $USC(\alpha) \neq USC(\beta) \vdash USC(\alpha) \neq USC(\beta)$.

logo,

$\alpha \neq \beta \vdash USC(\alpha) \neq USC(\beta)$.

$(\leftarrow)$ $USC(\alpha) \neq USC(\beta),\ \alpha \neq \beta \vdash \alpha \neq \beta$

$USC(\alpha) \neq USC(\beta),\ \alpha = \beta \vdash USC(\alpha) = USC(\beta)$

$\vdash USC(\alpha) \cap \overline{USC(\beta)} \neq \Lambda \vee \overline{USC(\alpha)} \cap USC(\beta) \neq \Lambda$

$\vdash t \in USC(\alpha) \cap \overline{USC(\beta)} \vee t \in \overline{USC(\alpha)} \cap USC(\beta)$

$\vdash t \in USC(\alpha) \cap \overline{USC(\alpha)} \vee t \in \overline{USC(\beta)} \cap USC(\beta)$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash \alpha \neq \beta$ (pelo Lema I.4.2, ĩtem V).

logo,

$USC(\alpha) \neq USC(\beta) \vdash \alpha \neq \beta$.

COROLÁRIO 1: $\vdash (\beta)(USC(\overline{\beta}) = 1 - USC(\beta))$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\alpha = \mathbf{V}$ no ĩtem III do teorema.

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha)(USC(\alpha) \subseteq 1)$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\beta = \mathbf{V}$ no ĩtem V do teorema.

TEOREMA I.6.13: I. $\vdash (\alpha)(\exists\hat{x}(\{x\} \in \alpha))$

II. $\vdash (\alpha,x)(x \in \hat{x}(\{x\} \in \alpha) \equiv \{x\} \in \alpha)$

TEOREMA I.6.14: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq USC(\beta) \supset \hat{x}(\{x\} \in \alpha) \subseteq \beta\ \&\ \alpha = USC(\hat{x}(\{x\} \in \alpha)))$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha)(\alpha \subseteq I \supset \alpha = USC(\hat{x}(\{x\} \in \alpha)))$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\beta = \mathbf{V}$ no teorema.

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq USC(\beta) \equiv (E\gamma)(\gamma \subseteq \beta\ \&\ \alpha = USC(\gamma)))$.

TEOREMA I.6.15: $\vdash (\alpha)(\Lambda \in \overline{USC(\alpha)})$.

DEMONSTRAÇÃO:

$\Lambda \in \overline{USC(\alpha)} \vdash \Lambda \in \overline{USC(\alpha)}$

$\Lambda \in USC(\alpha) \vdash (Ez)(z \in \alpha\ \&\ \Lambda \in \{z\})$

$\vdash \Lambda \in \{z\}$

$\vdash z \in \Lambda$

$\vdash (x,y)(x \in y)$

$\vdash \Lambda \in \overline{USC(\alpha)}$

logo, $\vdash \Lambda \in \overline{USC(\alpha)}$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha)(USC(\alpha) \neq 0)$

DEMONSTRAÇÃO: $0 = \{\Lambda\}$, mas $\Lambda \in \overline{USC(\alpha)}$ e $\Lambda \in \{\Lambda\}$; logo, $(Ey)(y \in \overline{USC(\alpha)}$ & & $y \in 0)$, donde obtemos $USC(\alpha) \neq 0$.

COROLÁRIO 2: $\vdash 1 \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $\alpha = \mathbf{V}$ no corolário 1.

TEOREMA I.6.16: $\vdash (x)(USC(\{x\}) = \{\{x\}\})$

DEFINIÇÃO: Seja A uma classe. Denotamos por $SC(A)$ a *classe de todas as subclasses de* A e definimos $SC(A)$ da seguinte forma:

$$SC(A) =_{df} \hat{\beta}(\beta \subseteq A)$$

onde β é uma variável que não ocorre em A.

Também definimos:

$SC^2(A)$ por $SC(SC(A))$
$SC^3(A)$ por $SC(SC^2(A))$, etc.

$SC(A)$ é estratificável se, e somente se, A é estratificável; o mesmo ocorrendo para $SC^2(A)$, $SC^3(A)$, etc. Além disso, se A é estratificável, então o seu tipo será uma unidade menor que o tipo de $SC(A)$, duas unidades menores que o de $SC^2(A)$, etc.

Geralmente, se $B \in SC(A)$, dizemos que "B é uma subclasse de A".

TEOREMA I.6.17: I. $\vdash (\alpha)(\exists SC(\alpha))$
II. $\vdash (\alpha,\beta)(\beta \in SC(\alpha) \equiv \beta \subseteq \alpha)$

TEOREMA I.6.18: I. $\vdash (\alpha)(\alpha \in SC(\alpha))$
II. $\vdash (\alpha)(\Lambda \in SC(\alpha))$
III. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \cap \beta \in SC(\alpha))$
IV. $\vdash (\alpha,x)(x \in \alpha \equiv \{x\} \in SC(\alpha))$

DEMONSTRAÇÃO:

II. consequência do ítem II do Teorema I.6.17 e do fato de que $(\alpha)(\Lambda \subseteq \alpha)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha)(USC(\alpha) \subseteq SC(\alpha))$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha)(USC(\alpha) \subset SC(\alpha))$

DEMONSTRAÇÃO: basta provar que $USC(\alpha) \neq SC(\alpha)$.

Pelo Teorema I.6.15, temos $\vdash \Lambda \in \overline{USC(\alpha)}$ e, pelo ítem II do teorema I.6.18,
$\vdash \Lambda \in SC(\alpha)$. Daí,
$\vdash \Lambda \in \overline{USC(\alpha)}$ & $\Lambda \in SC(\alpha)$
logo, $(Et)(t \in SC(\alpha)$ & $t \in \overline{USC(\alpha)})$
donde, $\vdash USC(\alpha) \neq SC(\alpha)$.

TEOREMA I.6.19: I. $\vdash SC(\Lambda) = 0$
II. $\vdash SC(V) = V$

TEOREMA I.6.20: $\vdash (\alpha)(\bigcup(SC(\alpha)) = \alpha)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha,\beta)(SC(\alpha) = SC(\beta) \equiv \alpha = \beta)$

COROLÁRIO 2: $\vdash \exists\{SC(\alpha) \mid P\} \supset (\alpha)(SC(\alpha) \in \{SC(\alpha) \mid P\} \equiv P)$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \neq \beta \equiv SC(\alpha) \neq SC(\beta))$

DEMONSTRAÇÃO:

$(\rightarrow)$ $\alpha \neq \beta,\ SC(\alpha) = SC(\beta) \vdash \alpha = \beta$

$\vdash \alpha \cap \overline{\beta} \neq \Lambda \vee \overline{\alpha} \cap \beta \neq \Lambda$ (de $\alpha \neq \beta$)

$\vdash t \in \alpha \cap \overline{\beta} \vee t \in \overline{\alpha} \cap \beta$

$\vdash t \in \alpha \cap \overline{\alpha} \vee t \in \overline{\beta} \cap \beta$ (de $\alpha = \beta$)

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash SC(\alpha) \neq SC(\beta)$

$\alpha \neq \beta,\ SC(\alpha) \neq SC(\beta) \vdash SC(\alpha) \neq SC(\beta)$

logo,

$\alpha \neq \beta \vdash SC(\alpha) \neq SC(\beta)$

$(\leftarrow)$ $SC(\alpha) \neq SC(\beta),\ \alpha \neq \beta \vdash \alpha \neq \beta$

$SC(\alpha) \neq SC(\beta),\ \alpha = \beta) \vdash SC(\alpha) \cap \overline{SC(\beta)} \neq \Lambda \vee \overline{SC(\alpha)} \cap SC(\beta) \neq \Lambda$

$\vdash t \in SC(\alpha) \cap \overline{SC(\beta)} \vee t \in \overline{SC(\alpha)} \cap SC(\beta)$

$\vdash t \in SC(\alpha) \cap \overline{SC(\alpha)} \vee t \in \overline{SC(\beta)} \cap SC(\beta)$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash \alpha \neq \beta$

logo,

$SC(\alpha) \neq SC(\beta) \vdash \alpha \neq \beta$.

Os teoremas seguintes correspondem aos exercícios IX.6.3 a IX.6.7 de Rosser [19].

TEOREMA I.6.21: $\vdash (\lambda)(\lambda \subseteq SC(\bigcup \lambda))$

TEOREMA I.6.22: $\vdash (\alpha)(\bigcap (SC(\alpha)) = \Lambda)$

TEOREMA I.6.23: I. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subseteq \beta \equiv SC(\alpha) \subseteq SC(\beta))$

II. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \subset \beta \equiv SC(\alpha) \subset SC(\beta))$

TEOREMA I.6.24:

I. $\vdash (\lambda,\mu)(SC(\lambda \cap \mu) = SC(\lambda) \cap SC(\mu))$

II. $\vdash (\lambda,\mu)(SC(\lambda \cup \mu) = \{\alpha \cup \beta \mid \alpha \in SC(\lambda) \ \& \ \beta \in SC(\mu)\})$

TEOREMA I.6.25:

I. $\vdash (\lambda)(\lambda \neq \Lambda \supset USC(\bigcap \lambda) = \bigcap \{USC(\alpha) \mid \alpha \in \lambda\})$

II. $\vdash (\lambda)(USC(\bigcup \lambda) = \bigcup \{USC(\alpha) \mid \alpha \in \lambda\})$

I.7. VARIÁVEIS RESTRITAS AO DOMÍNIO Σ.

Seja Σ uma classe e x,y,z variáveis que denotam os elementos de Σ.

Como é muito comum trabalharmos com variáveis restritas, precisamos desenvolver uma técnica para manuseá-las.

Uma parte importante dessa técnica é o uso da *quantificação restrita*.

Se x é restrito a Σ, então definimos:

$(x)P =_{df} (x)(x \in \Sigma \supset P)$

$(Ex)P =_{df} (Ex)(x \in \Sigma \ \& \ P)$

Visto isso, podemos trabalhar com variáveis restritas da mesma forma que trabalhamos com variáveis quaisquer.

TEOREMA I.7.1: $\vdash (x)(x \in \alpha \equiv x \in \alpha \cap \Sigma)$

TEOREMA I.7.2: $\vdash (x)((x \in \alpha \equiv x \in \beta) \equiv (\alpha \cap \Sigma = \beta \cap \Sigma))$

DEFINIÇÃO: $(\alpha)P =_{df} (\alpha)(\alpha \subseteq \Sigma \supset P)$

$(E\alpha)P =_{df} (E\alpha)(\alpha \subseteq \Sigma \ \& \ P)$

TEOREMA I.7.3: $\vdash (\alpha,\beta)((x)(x \in \alpha \equiv x \in \beta) \equiv \alpha = \beta)$

OBSERVAÇÃO: Este teorema representa a Forma Geral do Axioma da Extensionalidade para variável restrita e ele é equivalente a:

$\vdash (\Theta,\varphi)((\varphi \subseteq \Sigma \ \& \ \Theta \subseteq \Sigma \supset (x)(x \in \alpha \equiv x \in \beta)) \equiv \alpha = \beta)$

DEFINIÇÃO: Já definimos $\hat{x}P$ como $\iota\alpha(x)(x \in \alpha \equiv P)$. Quando x for variável restrita, temos: $\hat{x}P =_{df} \hat{u}(u \in \Sigma \ \& \ P)$

TEOREMA I.7.4: $\vdash (\Sigma,\phi)(\phi \subseteq \Sigma \ \& \ (u)(u \in \Sigma \supset (u \in \phi \equiv F(u))) \equiv (u)(u \in \phi \equiv$
$\equiv u \in \Sigma \ \& \ F(u)))$.

TEOREMA I.7.5: $\vdash$ *Se* α *é uma variável que não ocorre em* $F(x)$, *então*
$\vdash (E\alpha)(x)(x \in \alpha \equiv F(x)) \equiv \exists \hat{u}(u \in \Sigma \ \& \ F(u))$

TEOREMA I.7.6: $\vdash \exists \hat{u}(u \in \Sigma \ \& \ F(u)) \supset \hat{x}F(x) = \hat{u}(u \in \Sigma \ \& \ F(u))$

COROLÁRIO: *Se* α *é uma variável que não ocorre em* $F(x)$, *então*
$\vdash (E\alpha)(x)(x \in \alpha \equiv F(x)) \supset \hat{x}F(x) = \hat{u}(u \in \Sigma \ \& \ F(u))$

TEOREMA I.7.7: $\vdash (\Sigma)(\exists \hat{u}P \supset \exists \hat{u}(u \in \Sigma \ \& \ P))$

TEOREMA I.7.8: *Se* P *é estratificável e* x *e* α *são variáveis distintas e* α *não ocorre em* P, *então* $\vdash (E\alpha)(x)(x \in \alpha \equiv P)$

OBSERVAÇÃO: Este teorema é o Esquema da Separação para variáveis restritas.

TEOREMA I.7.9: $\vdash \exists \hat{x}P \supset \hat{x}P \subseteq \Sigma$

COROLÁRIO: $\vdash \exists \hat{x}P \supset \hat{x}P = \hat{x}P \cap \Sigma$

TEOREMA I.7.10: $\vdash \exists \hat{x}P \supset ((x)(x \in \hat{x}P \equiv P))$

TEOREMA I.7.11:
I. $\vdash (x)(x \in \Sigma \equiv x = x)$
II. $\vdash (x)(x \in \phi \equiv x \neq x)$
III. $\vdash (\alpha,\beta,x)(x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha \ \& \ x \in \beta)$
IV. $\vdash (\alpha,\beta,x)(x \in \alpha \cup \beta \equiv x \in \alpha \vee x \in \beta)$
V. $\vdash (\alpha,x)(x \in C\alpha \equiv \neg(x \in \alpha))$
VI. $\vdash (x)(x \in \mathbf{V} \equiv (Ey)(x \in y))$
VII. $\vdash (x)(x \in \mathbf{\Lambda} \equiv (y)(x \in y))$
VIII. $\vdash (x)(x \in \overline{\alpha} \equiv (Ez)(x \in z \ \& \ z \cap \alpha = \mathbf{\Lambda} \ \& \ z \cup \alpha = \mathbf{V})$

Este teorema é básico para extender os resultados da secção I.4 para variáveis restritas.

II - RELAÇÕES E FUNÇÕES

II.1. O AXIOMA DO INFINITO

Apesar de que em $\mathbf{NF}_\omega$, o esquema da separação permite a existência de um número maior de classes do que em **NF**, iremos desenvolver apenas a parte correspondente aos resultados de Rosser [19], os quais são obtidos usando o esquema da separação apenas quando $F(x)$ é estratificável. A parte específica de $\mathbf{NF}_\omega$, usando o esquema da separação quando $F(x)$ não é estratificável e não contém o símbolo $\supset$, não será abordada neste trabalho.

Devido ao esquema da separação, em $\mathbf{NF}_\omega$ podemos ter pares ordenados em que x e y tenham tipos diferentes. Consequentemente, também podemos ter relações em que os tipos x e y sejam diferentes, bem como relações definidas diretamente por fórmulas não estratificáveis onde não figura o símbolo $\supset$.

DEFINIÇÕES:

$A + B =_{df} \{\alpha \cup \beta \mid \alpha \in A \;\&\; \beta \in B \;\&\; \alpha \cap \beta = \Lambda\}$

$\mathrm{Nn} =_{df} \hat{x}((\beta)(0 \in \beta \;\&\; ((y)(y \in \beta \supset y + 1 \in \beta) \supset x \in \beta)))$

onde na definição de $A + B$, α e β são variáveis distintas, que não ocorrem em A ou B. $A + B$ é estratificável se, e somente se, $A = B$ é estratificável. A estratificação de $A + B$ exige que A e B tenham o mesmo tipo, o qual também será o tipo de $A + B$.

Nn é estratificável e, como não contém variáveis livres, pode lhe ser dado qualquer tipo.

É bom lembrar que Nn denota a *classe dos números naturais* e $A + B$ é a notação para *soma de dois inteiros não negativos* A e B.

TEOREMA II.1.1:

$\vdash (m,n,\alpha)(\alpha \in m + n \equiv (E\beta,\gamma)(\beta \in m \;\&\; \gamma \in n \;\&\; \beta \cap \gamma = \Lambda \;\&\; \beta \cup \gamma = \alpha))$

TEOREMA II.1.2: $\vdash (m)(0 \neq m + 1)$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos $0 = m + 1$. Então, pelo Teorema II.1.1 e $\vdash \Lambda \in 0$, obtemos:

$\beta \in m \;\&\; \gamma \in 1 \;\&\; \beta \cap \gamma = \Lambda \;\&\; \beta \cup \gamma = \Lambda$. De $\gamma \in 1$, pelo Corolário 5 do Teorema I.6.10, obtemos: $\gamma = \{y\}$.

Daí, $y \in \gamma$ e, então, $y \in \beta \cup \gamma$. Mas, $\beta \cup \gamma = \Lambda$;
logo, $y \in \Lambda$.
Logo, pelo Lema I.4.2, ítem V, temos
$(x,y)(x \neq y)$, donde, $0 \neq m + 1$.
Se supusermos $0 \neq m + 1$, obteremos $0 \neq m + 1$.
Assim, de $0 = m + 1 \vee 0 \neq m + 1$, obtemos
$0 \neq m + 1$. Ou seja, $\vdash (m)(0 \neq m + 1)$.

Recordando a definição de Clos(A,P), nela podemos fazer $A = \{0\}$ e $P \equiv x + 1 = z$. Então $H(A,\beta,P) =_{df} \{0\} \subseteq \beta \;\&\; (x,z)((x \in \beta \;\&\; x + 1 = z) \supset z \in \beta)$.

Como essa fórmula é estratificável, então $\vdash \exists \hat{\beta}\, H(A,\beta,P)$.

TEOREMA II.1.3: $\vdash$ Clos$(\{0\}, x + 1 = z) =$ Nn.

DEMONSTRAÇÃO: como em Rosser, usando o Teorema I.5.12.

TEOREMA II.1.4: $\vdash 0 \in \mathrm{Nn}$.

DEMONSTRAÇÃO: como em Rosser, usando o Teorema I.5.13.

TEOREMA II.1.5: $\vdash (n)(n \in \mathrm{Nn} \supset n + 1 \in \mathrm{Nn})$

DEMONSTRAÇÃO: basta usar o Teorema I.5.14.

TEOREMA II.1.16:
$\vdash (\beta)(0 \in \beta \;\&\; (y)(y \in \beta \;\&\; y \in \mathrm{Nn} \supset y + 1 \in \beta) \supset \mathrm{Nn} \subseteq \beta)$

DEMONSTRAÇÃO: basta usar o Teorema I.5.15.

TEOREMA II.1.7: $\vdash (n)(n \in \mathrm{Nn} \equiv n = 0 \vee (\mathrm{E}m)(m \in \mathrm{Nn} \;\&\; n = m + 1))$

DEMONSTRAÇÃO: como em Rosser, utilizando o Teorema I.5.16.

TEOREMA II.1.8: $\vdash (m)(m = m + 0)$

DEMONSTRAÇÃO:

$(\rightarrow)$ $\alpha \in m \vdash \alpha \in m \;\&\; \Lambda \in 0 \;\&\; \alpha \cap \Lambda = \Lambda \;\&\; \alpha \cup \Lambda = \alpha$
$\vdash (\mathrm{E}\beta,\gamma)(\beta \in m \;\&\; \gamma \in 0 \;\&\; \beta \cap \gamma = \Lambda \;\&\; \beta \cup \gamma = \alpha)$
$\vdash \alpha \in m + 0$
logo, $\vdash \alpha \in m \supset \alpha \in m + 0$
$\vdash (\alpha)(\alpha \in m \supset \alpha \in m + 0)$
$\vdash m \subseteq m + 0$

$(\leftarrow)\ \alpha \in m + 0 \quad \vdash \beta \in m \ \&\ \gamma \in 0 \ \&\ \beta \cap \gamma = \Lambda \ \&\ \beta \cup \gamma = \alpha$

$\vdash \gamma = \Lambda$

$\vdash \beta \cup \Lambda = \alpha$

$\vdash \beta = \alpha$

$\vdash \alpha \in m$

logo, $\vdash \alpha \in m + 0 \supset \alpha \in m$

donde, $\vdash m + 0 \subseteq m$

TEOREMA II.1.9: $\vdash (m,n)(m + n = n + m)$

TEOREMA II.1.10: $\vdash (m,n,p,\alpha)(\alpha \in (m + n) + p \equiv (E\beta,\gamma,\delta)(\beta \in m \ \&\ \gamma \in n \ \&\ \&\ \delta \in p \ \&\ \beta \cap \gamma = \Lambda \ \&\ \beta \cap \delta = \Lambda \ \&\ \gamma \cap \delta = \Lambda \ \&\ \beta \cup \gamma \cup \delta = \alpha))$

TEOREMA II.1.11: $\vdash (m,n,p,\alpha)(\alpha \in m + (n + p) \equiv (E\beta,\gamma,\delta)(\beta \in m \ \&\ \gamma \in n \ \&\ \&\ \delta \in p \ \&\ \beta \cap \gamma = \Lambda \ \&\ \beta \cap \delta = \Lambda \ \&\ \gamma \cap \delta = \Lambda \ \&\ \beta \cup \gamma \cup \delta = \alpha))$

COROLÁRIO: $\vdash (m,n,p)((m + n) + p = m + (n + p))$

TEOREMA II.1.12: $\vdash 1 \in \mathrm{Nn}$.

Provaremos, agora, o Princípio de Indução Matemática, que é:
Se $\vdash F(0)$ e $\vdash (n)(F(n) \ \&\ n \in \mathrm{Nn} \supset F(n + 1))$, então $\vdash (n)(n \in \mathrm{Nn} \supset F(n))$, o qual só pode ser provado se $F(x)$ é estratificável.

TEOREMA II.I.13: *Seja* P *uma fórmula estratificável. Então,* $\{Sub\ em\ P{:}\,n\ por\ 0\}$ $(n)(n \in \mathrm{Nn} \ \&\ P) \supset \{Sub\ em\ P{:}\ n\ por\ n + 1\} \vdash (n)(n \in \mathrm{Nn} \supset P)$.

DEMONSTRAÇÃO: como em Rosser [19], temos:

Se P é estratificável, então:

(1) $\vdash n \in \hat{n}\, P \equiv P$

(2) $\vdash 0 \in \hat{n}\, P \equiv \{Sub\ em\ P : n\ por\ 0\}$

(3) $\vdash n + 1 \in \hat{n}\, P \equiv \{Sub\ em\ P{:}\ n\ por\ n + 1\}$

Daí, pelo Teorema II.1.6, $0 \in \hat{n}\, P$, $(n)(n \in \mathrm{Nn} \ \&\ n \in \hat{n}\, P) \supset n + 1 \in \in \hat{n}\, P \vdash \mathrm{Nn} \subseteq \hat{n}\, P$.

Nosso teorema segue de (1), (2) e (3).

OBSERVAÇÃO: Usualmente, este teorema é escrito substituindo-se P por $F(n)$, $\{Sub\ em\ P{:}\ n\ por\ 0\}$ por $F(0)$ e $\{Sub\ em\ P{:}\ n\ por\ n + 1\}$ por $F(n + 1)$. Então, dizemos:

"*Se* $F(n)$ *é estratificável, então*
$F(0),\ (n)(n \in \mathrm{Nn}\ \&\ F(n)) \supset F(n+1) \vdash (n)(n \in \mathrm{Nn} \supset F(n))$"

TEOREMA II.1.14: $\vdash (m,n)(m,n \in \mathrm{Nn} \supset m + n \in \mathrm{Nn})$

TEOREMA II.1.15: $\vdash 1 + 1 = 2$

$\vdash 2 + 2 = 4$, etc.

DEMONSTRAÇÃO: Provemos que $\vdash 1 + 1 = 2$.

Sabemos que $1 = 1 + 0$. Daí, $1 + 1 = (1 + 0) + (1 + 0) = (1 + 1) + $ $+ (0 + 0) = 2 + 0 = 2$.

O Teorema seguinte é a adaptação para $\mathbf{NF}_\omega$ do Teorema X.1.16 de Rosser [19].

TEOREMA II.1.16: $\vdash (m,\alpha)(\alpha \in m + 1 \equiv (E\beta,x)(\beta \in m\ \&\ x \in \overline{\beta}\ \&\ \beta \cup \{x\} = \alpha))$

DEMONSTRAÇÃO:

$\alpha \in m + 1 \equiv (E\beta,\gamma)(\beta \in m\ \&\ \gamma \in 1\ \&\ \beta \cap \gamma = \Lambda\ \&\ \beta \cup \gamma = \alpha)$

Precisamos provar que:

$\beta \in m\ \&\ \{x\} \in 1\ \&\ \beta \cap \{x\} = \Lambda\ \&\ \beta \cup \{x\} = \alpha \equiv \beta \in m\ \&\ x \in \overline{\beta}\ \&\ \beta \cup \{x\} = \alpha$,
isto é, $F \equiv G$.

a) $\vdash F \supset G$ (Se provarmos que $F \supset x \in \overline{\beta}$, então a prova de $F \supset G$ torna-se imediata).

$$
\begin{array}{lll}
F,\ x \in \overline{\beta} & \vdash & x \in \overline{\beta} \\
F,\ x \in \beta & \vdash & x \in \beta \cap \{x\} \\
 & \vdash & x \in \Lambda \\
 & \vdash & x \in \overline{\beta} \\
\text{logo, } F & \vdash & x \in \overline{\beta}
\end{array}
$$

b) $\vdash G \supset F$ (Se provarmos que $G \supset \beta \cap \{x\} = \Lambda$, então a prova de $G \supset F$ torna-se imediata).

$$
\begin{array}{lll}
G & \vdash & x \in \overline{\beta} \\
G,\ t \in \beta \cap \{x\} & \vdash & t \in \beta\ \&\ t = x \\
 & \vdash & x \in \beta \\
 & \vdash & x \in \beta \cap \overline{\beta} \\
 & \vdash & x \in \Lambda \\
 & \vdash & t \in \Lambda
\end{array}
$$

logo, $G \vdash t \in \beta \cap \{x\} \supset t \in \Lambda$

$G \vdash (t)(t \in \beta \cap \{x\} \supset t \in \Lambda)$

$G \vdash \beta \cap \{x\} \subseteq \Lambda$

como, $\Lambda \subseteq \beta \cap \{x\}$, então, $G \vdash \beta \cap \{x\} = \Lambda$.

Assim sendo, $\vdash F \equiv G$ e, deste resultado obtemos:

$(E\beta,\gamma)(\beta \in m \;\&\; \gamma \in 1 \;\&\; \beta \cap \gamma = \Lambda \;\&\; \beta \cup \gamma = \alpha) \equiv$
$\equiv (E\beta,\gamma)(\beta \in m \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha)$

Como o antecedente desta equivalência é $\alpha \in m + 1$, obtemos o teorema.

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha)(\alpha \in 2 \equiv (Ex,y)(x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha))$

DEMONSTRAÇÃO: $\alpha \in 2 \equiv \alpha \in 1 + 1 \equiv (Ex,\beta)(\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha)$

($\longrightarrow$) Provemos, então, que

$(Ex,y)(x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha) \equiv (Ex,\beta)(\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha)$

$\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha \vdash \beta = \{y\} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha$
$\vdash \{x\} \cup \{y\} = \alpha$
$\vdash \{x,y\} = \alpha$

$\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha\, ,\; x \neq y \vdash x \neq y$

$\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha\, ,\; x = y \vdash \beta = \{y\}$
$\vdash y \in \beta$
$\vdash x \in \beta$
$\vdash x \in \beta \cap \overline{\beta}$
$\vdash x \in \Lambda$
$\vdash x \neq y$

logo, $\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha \vdash x \neq y$

assim, $\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha \vdash x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha$
$\vdash (Ex,y)(x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha)$

donde,

$(Ex,\beta)(\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha) \supset (Ex,y)(x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha)$

($\longleftarrow$) Provaremos, agora, que:

$x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha \vdash (Ex,\beta)(\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha)$

$x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha \vdash \{y\} \cup \{x\} = \alpha$
$\vdash \{y\} \in 1$

$x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha \;,\; x \in \overline{\{y\}} \;\vdash\; x \in \overline{\{y\}}$

$x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha \;,\; x \in \{y\} \;\vdash\; x = y$

$\vdash\; x \neq x$ (pois $x \neq y$)

$\vdash\; t \in x \cap \overline{x}$

$\vdash\; t \in \Lambda$

$\vdash\; x \in \overline{\{y\}}$

logo, $x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha \;\vdash\; x \in \overline{\{y\}}$

donde obtemos

$x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha \;\vdash\; \{y\} \cup \{x\} = \alpha \;\&\; \{y\} \in 1 \;\&\; x \in \overline{\{y\}}$

e, então,

$x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha \;\vdash\; (E\beta,x)(\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha)$

donde,

$(Ex,y)(x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha) \supset (E\beta,x)(\beta \in 1 \;\&\; x \in \overline{\beta} \;\&\; \beta \cup \{x\} = \alpha)$

consequentemente,

$\alpha \in 2 \equiv (Ex,y)(x \neq y \;\&\; \{x,y\} = \alpha)$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha)(\alpha \in 3 \equiv (Ex,y,z)(x \neq y \;\&\; x \neq z \;\&\; y \neq z \;\&\; \{x,y,z\} = \alpha)$

DEMONSTRAÇÃO: análoga à do corolário 1.

Como em Rosser [19], introduziremos agora um novo axioma que é equivalente ao axioma do infinito:

AXIOMA: $(m,n)(m,n \in \mathrm{Nn} \;\&\; m + 1 = n + 1 \supset m = n)$

Assim, os cinco axiomas de Peano para inteiros não-negativos são expressos pelos Teoremas II.1.4, II.1.5, II.1.2, II.1.13 e axioma do infinito.

Os próximos teoremas correspondem aos exercícios X.1.1 a X.1.4 de Rosser [19], mas, é interessante colocá-los aqui para mostrar que em $\mathbf{NF}_{\omega}$ pode-se provar propriedades usuais da aritmética.

TEOREMA II.1.17: $\vdash (m,n)(m + n = 0 \equiv m = 0 \;\&\; n = 0)$

DEMONSTRAÇÃO:

Pelo Teorema II.1.7, prova-se que para todo número natural n, $n = 0 \vee n = p + 1$, onde $p \in \mathrm{Nn}$.

$n = 0,\; m + n = 0 \;\vdash\; m = 0 \;\&\; n = 0$

$n = p + 1,\; m + n = 0 \;\vdash\; m + (p + 1) = 0$

$\vdash (m + p) + 1 = 0$

mas, $\vdash (m + p) + 1 \neq 0$ (pelo Teorema II.1.2)

donde, $\vdash x \in \Lambda$ (pelo Lema I.4.3, ítem II)

$\vdash m = 0$

$\vdash n = 0$

$\vdash m = 0 \; \& \; n = 0$

logo, $\vdash m + n = 0 \supset m = 0 \; \& \; n = 0$

A recíproca é imediata.

TEOREMA II.1.18: $\vdash (m,n,p)(m,n,p \in \mathrm{Nn} \; \& \; m + p = n + p \supset m = n)$

TEOREMA II.1.19: $\vdash (m)(m \in \mathrm{Nn} \supset m \neq m + 1)$

DEMONSTRAÇÃO: por indução sobre m.

a) $0 \neq 0 + 1$ (pelo Teorema II.1.2)

daí, $F(0) \equiv 0 \neq 0 + 1$.

b) Mostremos que $F(n) \supset F(n + 1)$

$n \neq n + 1, \; n + 1 \neq (n + 1) + 1 \vdash n + 1 \neq (n + 1) + 1$

$n \neq n + 1, \; n + 1 = (n + 1) + 1 \vdash n = n + 1$ (pelo axioma do infinito)

$\vdash n \neq n$

$\vdash t \in n \cap \overline{n}$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash n + 1 \neq (n + 1) + 1$.

daí, $n \neq n + 1 \vdash n + 1 \neq (n + 1) + 1$

fazendo $F(n) \equiv n \neq n + 1$ e $F(n + 1) \equiv n + 1 \neq (n + 1) + 1$,

então $F(n) \supset F(n + 1)$

assim obtemos:

se $\vdash F(0)$, então $\vdash (n)(n \in \mathrm{Nn} \; \& \; F(n)) \supset F(n + 1)$

donde, pelo princípio de indução,

$\vdash (m)(m \in \mathrm{Nn} \supset m \neq m + 1)$

DEFINIÇÃO: $m \leqslant n =_{\mathrm{df}} (\mathrm{E}p)(p \in \mathrm{Nn} \; \& \; n = m + p)$

$m < n =_{\mathrm{df}} m \leqslant n \; \& \; m \neq n$

$m \geqslant n =_{\mathrm{df}} n \leqslant m$

$m > n =_{\mathrm{df}} n < m$

TEOREMA II.1.20:

a) $\vdash (m)(m \leqslant m)$

b) $\vdash (m,n)(m \leqslant n \equiv m < n \vee m = n)$

c) $\vdash (m)(m \in \text{Nn} \equiv 0 \leqslant m)$

d) $\vdash (m)(m \in \text{Nn} \equiv m = 0 \vee m \geqslant 1)$

e) $\vdash (m,n)(m,n \in \text{Nn} \;\&\; m \leqslant n \;\&\; n \leqslant m \supset m = n)$

g) $\vdash (m,n)(m < n \supset (\text{E}p)(p \in \text{Nn} \;\&\; n = m + p + 1))$

h) $\vdash (m,n)(m,n \in \text{Nn} \supset (m < n \equiv (\text{E}p)(p \in \text{Nn} \;\&\; n = m + p + 1)))$

i) $\vdash (m,n,p)(m \leqslant n \;\&\; n \leqslant p \supset m \leqslant p)$

j) $\vdash (m,n,p)(m,n,p \in \text{Nn} \supset (m < n \;\&\; n \leqslant p \supset m < p))$

k) $\vdash (m,n,p)(m,n,p \in \text{Nn} \supset (m \leqslant n \;\&\; n < p \supset m < p))$

l) $\vdash (m,n,p)(m \leqslant n \supset m + p \leqslant n + p)$

m) $\vdash (m,n,p)(m,n,p \in \text{Nn} \supset (m < n \supset m + p < n + p))$

n) $\vdash (m_1,m_2,n_1,n_2)(m_1 \leqslant n_1 \;\&\; m_2 \leqslant n_2 \supset m_1 + m_2 \leqslant n_1 + n_2)$

o) $\vdash (m,n,p)(m,n,p \in \text{Nn} \supset (m + p \leqslant n + p \supset m \leqslant n))$

p) $\vdash (m,n,p)(m,n,p \in \text{Nn} \supset (m + p < n + p \supset m < n))$

q) $\vdash (m,n)(m,n \in \text{Nn} \supset (m < n \equiv m + 1 \leqslant n))$

r) $\vdash (m,n)(m,n \in \text{Nn} \supset (m < n + 1 \equiv m \leqslant n))$

s) $\vdash (m,n)(m,n \in \text{Nn} \supset (m < n \vee m = n \vee m > n))$

DEMONSTRAÇÃO:

b)$(\rightarrow)$ $m \leqslant n\,,\, m = n \vdash m < n \vee m = n$

$m \leqslant n\,,\, m \neq n \vdash m < n$

$\vdash m < n \vee m = n$

logo, $\vdash m \leqslant n \supset m < n \vee m = n$

$(\leftarrow)$ $m < n \vdash m < n$

$m = n \vdash 0 \in \text{Nn} \;\&\; m = n + 0$

$\vdash (\text{E}p)(p \in \text{Nn} \;\&\; m = n + p)$

$\vdash m \leqslant n$

logo, $\vdash m < n \vee m = n \supset m \leqslant n$

Em sua formulação original, o exercício X.1.4, aqui Teorema II.1.18 , possui os ítens f,t,u, enunciados da seguinte forma:

f) $\vdash (m,n)(m,n \in \mathrm{Nn}\ \&\ m < n \supset \neg(n \leqslant m))$

t) $\vdash (m,n)(m,n \in \mathrm{Nn} \supset (m < n \equiv \neg(n \leqslant m))$

u) $\vdash (m,n)(m,n \in \mathrm{Nn} \supset (m \leqslant n \equiv \neg(n < m))$

os quais, aparentemente, não podem ser adaptados para $\mathbf{NF}_\omega$ por conterem negação de fórmulas não atômicas.

II.2. PARES ORDENADOS.

Para trabalharmos com pares e, em geral, com n-uplas ordenadas precisamos das seguintes definições:

$\phi(A) =_{\mathrm{df}} \hat{y}(\mathrm{E}x)(x \in A\ \&\ (x \in \mathrm{Nn}\ \&\ y = x + 1 \vee x \in \overline{\mathrm{Nn}}\ \&\ y = x))$

$\Theta_1(A) =_{\mathrm{df}} \{\phi(A) | x \in A\}$

$\Theta_2(A) =_{\mathrm{df}} \{\{0\} \cup \phi(x) \mid x \in A\}$

$\langle A,B\rangle =_{\mathrm{df}} \Theta_1(A) \cup \Theta_2(B)$

$Q_1(A) =_{\mathrm{df}} \hat{x}(\phi(x) \in A)$

$Q_2(A) =_{\mathrm{df}} \hat{x}(\{0\} \cup \phi(x) \in A)$.

Em todas, x e y são variáveis distintas que não ocorrem em A.

$\phi(A)$, $\Theta_1(A)$, $\Theta_2(A)$, $Q_1(A)$, $Q_2(A)$ são estratificáveis se, e somente se, A for estratificável e, nesse caso, levam o mesmo tipo que A.

$\langle A,B\rangle$ é estratificável se, e somente se, $A = B$ é estratificável e, nesse caso, $\langle A,B\rangle$ deve ter o mesmo tipo de A e de B.

Chamamos $\langle A,B\rangle$ de *par ordenado de* A *e* B. Além disso, $Q_1(A)$ e $Q_2(A)$ são as inversas do par ordenado, no sentido que

$$Q_1(\langle A,B\rangle) = A \quad \text{e} \quad Q_2(\langle A,B\rangle) = B.$$

TEOREMA II.2.1.

I. $\vdash (y,z)(y \in \phi(z) \equiv (\mathrm{E}x)(x \in z\ \&\ (x \in \mathrm{Nn}\ \&\ y = x + 1 \vee x \vee \overline{\mathrm{Nn}}\ \&\ y = x)))$

II. $\vdash (\alpha,x)(x \in \Theta_1(\alpha) \equiv (\mathrm{E}y)(y \in \alpha\ \&\ x = \phi(y)))$

III. $\vdash (\alpha,x)(x \in \Theta_2(\alpha) \equiv (Ey)(y \in \alpha \;\&\; x = \{0\} \cup \phi(y)))$

IV. $\vdash (x,y,z)(z \in \langle x,y \rangle \equiv z \in \Theta_1(x) \vee z \in \Theta_2(y))$

V. $\vdash (\alpha,x)(x \in \Omega_1(\alpha) \equiv \phi(x) \in \alpha)$

VI. $\vdash (\alpha,x)(x \in \Omega_2(\alpha) \equiv \{0\} \cup \phi(x) \in \alpha)$

TEOREMA II.2.2. $\vdash (x,y)(\phi(x) = \phi(y) \equiv x = y)$

DEMONSTRAÇÃO: basta provar que

$$\vdash (x,y)(\phi(x) = \phi(y) \supset x = y).$$

Suponhamos $z \in x$, $\phi(x) = \phi(y)$ e $z \in \mathrm{Nn}$. Então,

$z \in x \;\&\; (z \in \mathrm{Nn} \;\&\; z + 1 = z + 1 \vee z \in \overline{\mathrm{Nn}} \;\&\; z + 1 = z)$

Logo,

$(Ex)(z \in x \;\&\; (z \in \mathrm{Nn} \;\&\; z+1 = x+1 \vee z \in \overline{\mathrm{Nn}} \;\&\; z + 1 = x))$

isto é, $z + 1 \in \phi(x)$; logo, $z + 1 \in \phi(y)$

então,

$w \in y \;\&\; (w \in \mathrm{Nn} \;\&\; z + 1 = w + 1 \vee w \in \overline{\mathrm{Nn}} \;\&\; z + 1 = w)$

mas,

$w \in z,\ w \in \mathrm{Nn} \;\&\; z + 1 = w + 1 \vdash w = z \;\&\; w \in y$

$\vdash z \in y$

$w \in z,\ w \in \overline{\mathrm{Nn}} \;\&\; z + 1 = w \vdash z + 1 \in \overline{\mathrm{Nn}}$

$\vdash z + 1 \in \mathrm{Nn}$ (pois, por hipótese, $z \in \mathrm{Nn}$)

$\vdash z + 1 \in \mathrm{Nn} \cap \overline{\mathrm{Nn}}$

$\vdash z + 1 \in \Lambda$

$\vdash z \in y$

logo, $z \in \mathrm{Nn},\ \phi(x) = \phi(y) \vdash z \in x \supset z \in y$

de maneira análoga, prova-se que

$z \in \mathrm{Nn},\ \phi(x) = \phi(y) \vdash z \in y \supset z \in x$

logo,

(1) $z \in \mathrm{Nn},\ \phi(x) = \phi(y) \vdash z \in x \equiv z \in y$

Suponhamos, agora, que:

$z \in \mathrm{Nn},\ \phi(x) = \phi(y),\ z \in x \vdash z \in \mathrm{Nn} \;\&\; z = z$

$\vdash z \in x \;\&\; (z \in \mathrm{Nn} \;\&\; z = z + 1 \vee z \in \overline{\mathrm{Nn}} \;\&\; z = z)$

$\vdash (Et)(t \in x \;\&\; (t \in Nn \;\&\; z = t+1 \vee t \in \overline{Nn} \;\&\; z = t))$

$\vdash z \in \phi(x)$

$\vdash z \in \phi(y)$

$\vdash w \in y \;\&\; (w \in Nn \;\&\; z = w + 1 \vee w \in \overline{Nn} \;\&\; z = w)$

mas,

$w \in y \;\&\; w \in Nn \;\&\; z = w + 1 \vdash w \in Nn$

$\vdash w + 1 \in Nn$

$\vdash z \in Nn \;\&\; z \in \overline{Nn}$

$\vdash z \in Nn \cap \overline{Nn}$

$\vdash z \in \Lambda$

$\vdash z \in y$

$w \in y \;\&\; w \in \overline{Nn} \;\&\; z = w \vdash z \in y$

logo,

$z \in \overline{Nn},\ \phi(x) = \phi(y) \vdash z \in x \supset z \in y$

de modo análogo, prova-se que

$z \in \overline{Nn},\ \phi(x) = \phi(y) \vdash z \in y \supset z \in x$

logo,

(2) $z \in \overline{Nn}\ ,\ \phi(x) = \phi(y) \vdash z \in x \equiv z \in y$

De (1) e (2) obtemos

$\vdash \phi(x) = \phi(y) \supset (z \in x \equiv z \in y)$

logo,

$\vdash \phi(x) = \phi(y) \supset (z)(z \in x \equiv z \in y)$

donde, $\vdash \phi(x) = \phi(y) \supset x = y$

COROLÁRIO: $\vdash (\alpha, x)(\phi(x) \in \Theta_1(\alpha) \equiv x \in \alpha)$

TEOREMA II.2.3: $\vdash (x)(0 \in \overline{\phi(x))}$

DEMONSTRAÇÃO:

(1) $0 \in \overline{\phi(x)} \vdash 0 \in \overline{\phi(x)}$

$0 \in \phi(x) \vdash w \in x \;\&\; (w \in Nn \;\&\; 0 = w + 1 \vee w \in \overline{Nn} \;\&\; 0 = w)$

a) $w \in x \;\&\; w \in Nn \;\&\; 0 = w + 1 \vdash \{\Lambda\} = w + 1$

$\vdash \Lambda \in \omega + 1$

$\vdash \beta \in \omega \ \& \ \gamma \in 1 \ \& \ \beta \cap \gamma = \Lambda \ \& \ \beta \cup \gamma = \Lambda$

$\vdash \gamma \in 1$

$\vdash \gamma = \{y\}$

$\vdash y \in \gamma$

$\vdash y \in \beta \cup \gamma$

$\vdash y \in \Lambda$

$\vdash 0 \in \overline{\phi(x)}$

b) $\omega \in x \ \& \ \omega \in \overline{\mathrm{Nn}} \ \& \ 0 = \omega \vdash 0 \in \overline{\mathrm{Nn}} \ \& \ 0 \in \mathrm{Nn}$

$\vdash 0 \in \mathrm{Nn} \cap \overline{\mathrm{Nn}}$

$\vdash 0 \in \Lambda$

$\vdash 0 \in \overline{\phi(x)}$

logo,

(2) $0 \in \phi(x) \vdash 0 \in \overline{\phi(x)}$

Finalmente, de (1) e (2) obtemos o teorema.

TEOREMA II.2.4: $\vdash (x,y)(\{0\} \cup \phi(x) = \{0\} \cup \phi(y) \equiv x = y)$

DEMONSTRAÇÃO:

$\{0\} \cup \phi(x) = \{0\} \cup \phi(y),\ z \in \phi(x) \vdash z \in \{0\} \cup \phi(x)$

$\vdash z \in \{0\} \cup \phi(y)$

$\vdash z \in \{0\} \vee z \in \phi(y)$

a) $z \in \phi(y) \vdash z \in \phi(y)$

b) $z \in \{0\} \vdash z = 0$

$\vdash 0 \in \phi(x) \ \& \ 0 \in \overline{\phi(x)}$ (pelo Teorema II.2.3)

$\vdash 0 \in \phi(x) \cap \overline{\phi(x)}$

$\vdash 0 \in \Lambda$

$\vdash z \in \phi(y)$

Temos então:

$\{0\} \cup \phi(x) = \{0\} \cup \phi(y),\ z \in \phi(x) \vdash z \in \phi(y)$

$\{0\} \cup \phi(x) = \{0\} \cup \phi(y) \vdash z \in \phi(x) \supset z \in \phi(y)$

$\vdash \phi(x) \subseteq \phi(y)$

Analogamente, prova-se que:

$\{0\} \cup \phi(x) = \{0\} \cup \phi(y) \vdash \phi(y) \subseteq \phi(x)$

e,daí, $\{0\} \cup \phi(x) = \{0\} \cup \phi(y) \vdash \phi(x) = \phi(y)$

daí, pelo Teorema II.2.2,

$\{0\} \cup \phi(x) = \{0\} \cup \phi(y) \vdash x = y$

A recíproca é imediata.

COROLÁRIO: $\vdash (\alpha,x)(\{0\} \cup \phi(x) \in \Theta_2(\alpha) \equiv x \in \alpha)$

TEOREMA II.2.5: $\vdash (\alpha,\beta)(\Theta_1(\alpha) = \Theta_1(\beta) \equiv \alpha = \beta)$

TEOREMA II.2.6: $\vdash (\alpha,\beta)(\Theta_2(\alpha) = \Theta_2(\beta) \equiv \alpha = \beta)$

TEOREMA II.2.7: $\vdash (x,y)(Q_1(\langle x,y \rangle) = x)$

DEMONSTRAÇÃO:

$$t \in Q_1(\langle x,y \rangle) \equiv t \in \hat{x}(\phi(x) \in \langle x,y \rangle)$$
$$\vdash \phi(t) \in \langle x,y \rangle$$
$$\vdash \phi(t) \in \Theta_1(x) \cup \Theta_2(y)$$
$$\vdash \phi(t) \in \Theta_1(x) \vee \phi(t) \in \Theta_2(y)$$

a) $\phi(t) \in \Theta_1(x) \vdash t \in x$ (pelo corolário do Teo. II.2.2)

$$\phi(t) \in \Theta_2(y) \vdash \phi(t) = \{0\} \cup \phi(z)$$
$$\vdash 0 \in \phi(t) \;\&\; 0 \in \overline{\phi(t)}$$
$$\vdash 0 \in \Lambda$$
$$\vdash t \in x$$

logo, $\vdash Q_1(\langle x,y \rangle) \subseteq x$ (1)

b) Por outro lado,

$$t \in x \vdash \phi(t) \in \Theta_1(x)$$
$$\vdash \phi(t) \in \Theta_1(x) \vee \phi(t) \in \Theta_2(y)$$
$$\vdash \phi(t) \in \Theta_1(x) \cup \Theta_2(y)$$
$$\vdash t \in Q_1(\langle x,y \rangle)$$

logo, $\vdash x \subseteq Q_1(\langle x,y \rangle)$ (2)

De (1) e (2) obtemos $\vdash x = Q_1(\langle x,y \rangle)$

TEOREMA II.2.8: $\vdash (x,y)(Q_2(\langle x,y \rangle) = y)$

TEOREMA II.2.9: $\vdash (x,y,u,v)(\langle x,y \rangle = \langle u,v \rangle \equiv x = u \;\&\; y = v)$

DEMONSTRAÇÃO:

$\langle x,y \rangle = \langle u,v \rangle \vdash Q_1(\langle x,y \rangle) = Q_1(\langle u,v \rangle)$

$\vdash x = u$ (pelo Teorema II.2.7)

$\vdash Q_2(\langle x,y \rangle) = Q_2(\langle u,v \rangle)$

$\vdash y = v$ (pelo Teorema II.2.8)

e, pelas propriedades da igualdade:

$x = u \;\&\; y = v \vdash \langle x,y \rangle = \langle u,v \rangle$

DEFINIÇÃO: *Triplas ordenadas*

$$\langle A,B,C \rangle =_{df} \langle\langle A,B \rangle, C \rangle \;.$$

Também podemos definir *quádruplas*, *quíntuplas*, etc, como:

$$\langle A,B,C,D \rangle =_{df} \langle\langle A,B,C \rangle, D \rangle$$

$$\langle A,B,C,D,E \rangle =_{df} \langle\langle A,B,C,D \rangle, E \rangle \;, \text{ etc.}$$

Com isso, temos os seguintes teoremas, que são generalizações dos anteriores.

TEOREMA II.2.10:

I. $\vdash (x,y,z)(Q_1(\langle x,y,z \rangle) = \langle x,y \rangle)$

II. $\vdash (x,y,z)(Q_1(Q_1(\langle x,y,z \rangle)) = x)$

III. $\vdash (x,y,z)(Q_2(Q_1(\langle x,y,z \rangle)) = y)$

IV. $\vdash (x,y,z)(Q_2(\langle x,y,z \rangle) = z)$.

TEOREMA II.2.11: $\vdash (x,y,z,u,v,w)(\langle x,y,z \rangle = \langle u,v,w \rangle \equiv x = u \;\&\; y = v \;\&\; z = w)$

DEFINIÇÃO: *Produto Cartesiano de* A *e* B.

$$A \times B =_{df} \{\langle x,y \rangle \mid x \in A \;\&\; y \in B\}$$

onde x e y são variáveis distintas, que não ocorrem em A ou B.

$A \times B$ é estratificável se, e somente se, $A = B$ é estratificável e, nesse caso $A \times B$ tem o mesmo tipo que A e B.

TEOREMA II.2.12: $\vdash (\alpha,\beta,z)(z \in \alpha \times \beta \equiv (Ex,y)(x \in \alpha \;\&\; y \in \beta \;\&\; z = \langle x,y \rangle))$

COROLÁRIO 1: $\vdash (z)(z \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \equiv (Ex,y)(z = \langle x,y \rangle))$

COROLÁRIO 2: $\vdash \mathbf{V} \times \mathbf{V} \neq \Lambda$

DEMONSTRAÇÃO: $\vdash (x,y)(\langle x,y \rangle \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \;\&\; \langle x,y \rangle \in \mathbf{V})$

$\vdash (x,y)(\langle x,y \rangle \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \;\&\; \langle x,y \rangle \in \overline{\Lambda})$

$\vdash (Ez)(z \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \;\&\; z \in \overline{\Lambda})$

$\vdash \mathbf{V} \times \mathbf{V} \neq \Lambda$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\alpha)(\Lambda \times \alpha = \alpha \times \Lambda = \Lambda)$

TEOREMA II.2.13: $\vdash (\alpha,\beta,x,y)(\langle x,y \rangle \in \alpha \times \beta \equiv x \in \alpha \;\&\; y \in \beta)$

O teorema seguinte corresponde à adaptação para $\mathbf{NF}_\omega$ do exercício X.2.6, ítem b, de Rosser [19].

TEOREMA II.2.14: $\vdash (\alpha,x)(x \in \overline{\alpha} \equiv \langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0})$

DEMONSTRAÇÃO:

($\rightarrow$) $x \in \overline{\alpha}\,,\ \langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0} \ \vdash \ \langle x,\Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0}$

$x \in \overline{\alpha}\,,\ \langle x, \Lambda \rangle \in \alpha \times 0 \ \vdash \ x \in \alpha \;\&\; x \in \overline{\alpha}$

$\vdash \ x \in \Lambda$

$\vdash \ \langle x,\Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0}$

logo, $x \in \overline{\alpha} \vdash \langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0}$

($\leftarrow$) por outro lado

$\langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0}\,,\ x \in \overline{\alpha} \ \vdash \ x \in \overline{\alpha}$

$\langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0}\,,\ x \in \alpha \ \vdash \ x \in \alpha \;\&\; \Lambda \in 0$

$\vdash \langle x, \Lambda \rangle \in \alpha \times 0 \;\&\; \langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0}$

$\vdash \langle x, \Lambda \rangle \in \Lambda$

$\vdash \ x \in \overline{\alpha}$

logo, $\langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0} \vdash x \in \overline{\alpha}$

Assim, $\langle x, \Lambda \rangle \in \overline{\alpha \times 0} \equiv x \in \overline{\alpha}$

II.3. O CÁLCULO DE RELAÇÕES.

Recordemos que:

$\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ é a classe de todos os pares ordenados.

$\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ denotam subclasses de $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, logo denotam classes de pares ordenados, isto é, relações.

Por esta razão, $SC(\mathbf{V} \times \mathbf{V})$ é a classe de todas as relações e, geralmente, abreviamos $SC(\mathbf{V} \times \mathbf{V})$ por Rel.

Para "x está relacionado com y através da relação **R**" usamos a notação $x\ \mathbf{R}\ y$, isto equivale dizer que $\langle x,y \rangle \in \mathbf{R}$.

A notação $x\ R\ y$ é usada para qualquer R e sempre significará $\langle x,y \rangle \in R$.

Se x e y são variáveis que não ocorrem no termo R, então, $x\ R\ y$ será estratificável se, e somente se, R é estratificável e x e y tem o mesmo tipo, o qual deve ser uma unidade menor que o tipo de R.

Definimos

$$\hat{x}\hat{y}P =_{\text{df}} \{ \langle x,y \rangle \mid P \ \&\ x = x \ \&\ y = y\}$$

e, se P é estratificável, com x e y tendo o mesmo tipo, então $\langle x,y \rangle = \langle x,y \rangle \ \&\ P$ $\&\ x = x \ \&\ y = y$ será estratificável. Daí, pelo corolário do Teorema I.3.1 , existe $\hat{x}\hat{y}P$. Para a estratificação, o tipo $\hat{x}\hat{y}P$ será uma unidade maior que o tipo comum de x e y . Assim, os tipos estão corretos para que $x(\hat{x}\hat{y})P)y \equiv P$ seja estratificável.

Como já mencionamos anteriormente, em $\mathbf{NF}_\omega$ existem relações que não existem em **NF**, por exemplo, as relações determinadas por fórmulas não estratificáveis onde não figura o símbolo $\supset$. Assim, pode-se derivar em $\mathbf{NF}_\omega$ o paradoxo de Russell para relações e, aparentemente, tal paradoxo não causa problemas em $\mathbf{NF}_\omega$. Todavia, não abordaremos aqui a parte específica de $\mathbf{NF}_\omega$.

No que se segue, até o final deste capítulo, praticamente só enunciaremos teoremas das secções correspondentes de Rosser [19] , capítulo X, pois, na quase totalidade, as demonstrações desses teoremas em $\mathbf{NF}_\omega$ são análogas às de **NF**.

TEOREMA II.3.1: $\vdash (\mathbf{R})(z)(z \in \mathbf{R} \equiv (Ex,y)(x\ \mathbf{R}\ y \ \&\ z = \langle x,y \rangle))$

TEOREMA II.3.2: *Se z é uma variável que não ocorre em P, então*
$\vdash (\mathbf{R})((z)(z \in \mathbf{R} \equiv (Ex,y)\ P \ \&\ z = \langle x,y \rangle) \equiv (x,y)(x\ \mathbf{R}\ y \ \equiv P))$

TEOREMA II.3.3: $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})(\mathbf{R} = \mathbf{S} \equiv (x,y)(x\ \mathbf{R}\ y \equiv x\ \mathbf{S}\ y))$

TEOREMA II.3.4: *Se $\mathbf{R}$ é uma variável que não ocorre em P, então*
$\vdash (E\mathbf{R})(x,y)((x\ \mathbf{R}\ y \equiv P) \supset \exists\, \hat{x}\hat{y}P)$

TEOREMA II.3.5: *Se P é estratificável com todas ocorrências livres de x e y do mesmo tipo, então* $\vdash \exists\, \hat{x}\hat{y}P$.

TEOREMA II.3.6: *Se z não ocorre em P, então*

$\vdash \exists\hat{x}\hat{y}P \supset (z)(z \in \hat{x}\hat{y}P \equiv (Ex,y)(P \;\&\; z = \langle x,y \rangle))$

COROLÁRIO: $\vdash \exists\hat{x}\hat{y}P \supset \hat{x}\hat{y}P \in \mathrm{Rel}$.

TEOREMA II.3.7: $\vdash \exists\hat{x}\hat{y}P \supset (x,y)(x(\hat{x}\hat{y}P)y \equiv P)$

COROLÁRIO 1: *Se* $\mathbf{R}$ *é uma variável que não ocorre em* P, *então*
$\vdash \exists\hat{x}\hat{y}P \equiv (E\mathbf{R})(x,y)(x\;\mathbf{R}\;y \equiv P)$

COLORÁRIO 2: $\vdash (\mathbf{R})(x,y)(x\;\mathbf{R}\;y \equiv P \supset \mathbf{R} = \hat{x}\hat{y}P)$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} = \hat{x}\hat{y}(x\;\mathbf{R}\;y))$

TEOREMA II.3.8: $\vdash (x,y)((P \equiv Q) \supset \hat{x}\hat{y}P = \hat{x}\hat{y}Q)$

TEOREMA II.3.9: *Se* $F(u,v)$ *é o resultado da troca em* $F(x,y)$ *de todas as ocorrências livres de* x *e* y, *respectivamente, por ocorrências de* u *e* v, *e* $F(x,y)$ *é o resultado da troca em* $F(u,v)$ *de todas as ocorrências livres de* u *e* v, *respectivamente, por ocorrências de* x *e* y, *então* $\vdash \hat{x}\hat{y}F(x,y) = \hat{u}\hat{v}F(u,v)$.

TEOREMA II.3.10: *Se* $\mathbf{z}$ *é uma variável que não ocorre em* $F(x,y)$, *então*
$\vdash \exists\hat{x}\hat{y}F(x,y) \supset \hat{x}\hat{y}F(x,y) = \hat{\mathbf{z}}F(Q_1(\mathbf{z}),\; Q_2(\mathbf{z}))$

COROLÁRIO: $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \times \beta = \hat{\mathbf{z}}(Q_1(\mathbf{z}) \in \alpha \;\&\; Q_2(\mathbf{z}) \in \beta))$

Desde que as relações são classes $\mathbf{R} \cap \mathbf{S}$ e $\mathbf{R} \cup \mathbf{S}$ tem um significado perfeitamente explícito e, por convenção, $\overline{\mathbf{R}}$ denotará a *Relação complementar de* $\mathbf{R}$. Esses termos serão todos utilizados em ocasiões convenientes; por exemplo, devemos lembrar que teoremas da secção I deste capítulo, como Teoremas I.4.4 e I.4.5, entre outros, se mantêm para relações, como se mantinham para classes, se colocarmos $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ em lugar de $\mathbf{V}$.

Como exemplo disso, daremos algumas adaptações:

TEOREMA I.4.10: I. $\vdash (x,y)(x(\mathbf{V} \times \mathbf{V})y)$
II. $\vdash (x,y)(\langle x,y \rangle \in \overline{\Lambda})$

TEOREMA I.4.11: $\vdash (x,y)P \supset ((x,y)(x(\mathbf{V} \times \mathbf{V})y) \equiv P)$.

COROLÁRIO 1: $\vdash (x,y)P \supset \exists\hat{x}\hat{y}P$

COROLÁRIO 2: $\vdash (x,y)P \supset \mathbf{V} \times \mathbf{V} = \hat{x}\hat{y}P$

TEOREMA I.4.12: I. $\vdash (\mathbf{R})(x,y)(x\;\mathbf{R}\;y \equiv \mathbf{R} = \mathbf{V} \times \mathbf{V})$
II. $\vdash (\mathbf{R})(x,y)(\langle x,y \rangle \in \overline{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R} = \Lambda)$

COROLÁRIO: I. $\vdash (\mathbf{R})(\mathrm{E}x,y)(\langle x,y\rangle \in -\mathbf{R} \equiv \mathbf{R} \neq \mathbf{V}\times\mathbf{V})$

II. $\vdash (\mathbf{R})(\mathrm{E}x,y)(x\ \mathbf{R}\ y \equiv \mathbf{R} \neq \Lambda)$

Também provamos que, se α,β,γ são relações, então valem os seguintes teoremas.

TEOREMA II.3.11: I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)((\alpha \cap \beta)\times\gamma = (\alpha\times\gamma)\cap(\beta\times\gamma))$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\gamma\times(\alpha\cap\beta) = (\gamma\times\alpha)\cap(\gamma\times\beta))$

III. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)((\alpha\cup\beta)\times\gamma = (\alpha\times\gamma)\cup(\beta\times\gamma))$

IV. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\gamma\times(\alpha\cup\beta) = (\gamma\times\alpha)\cup(\gamma\times\beta))$

TEOREMA II.3.12: I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha\subseteq\beta \supset \alpha\times\gamma\subseteq\beta\times\gamma)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\alpha\subseteq\beta \supset \gamma\times\alpha\subseteq\gamma\times\beta)$

COROLÁRIO: $\vdash (\alpha,\beta,\gamma,\delta)(\alpha\subseteq\beta\ \&\ \gamma\subseteq\delta \supset \alpha\times\gamma\subseteq\beta\times\delta)$

TEOREMA II.3.13: $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})((x,y)(x\ \mathbf{R}\ y \supset x\ \mathbf{S}\ y) \equiv \mathbf{R}\subseteq\mathbf{S})$

Como generalizamos teoremas da secção I deste capítulo, podemos generalizar também algumas definições, como a do conjunto das subclasses unitárias.

Assim, os elementos de USC($\mathbf{R}$) são as classes unitárias de pares ordenados $\langle x,y\rangle$ que são elementos de $\mathbf{R}$. Em geral, USC($\mathbf{R}$) não é uma relação. Para gerar uma relação correspondente a $\mathbf{R}$, mas de tipo uma unidade superior ao de $\mathbf{R}$, tomamos a classe dos pares ordenados das classes unitárias $\{x\}$ e $\{y\}$, tais que $\langle x,y\rangle$ pertence a $\mathbf{R}$.

DEFINIÇÃO: $\mathrm{RUSC}(A) =_{\mathrm{df}} \{\langle\{x\},\{y\}\rangle \mid xAy\}$

onde x e y são variáveis distintas que não ocorrem em A.

Também definimos:

$\mathrm{RUSC}^2(A) = \mathrm{RUSC}(\mathrm{RUSC}(A))$

$\mathrm{RUSC}^3(A) = \mathrm{RUSC}(\mathrm{RUSC}^2(A))$, etc.

RUSC(A) é estratificável se, e somente se, A é estratificável e, se isso ocorrer, o seu tipo é uma unidade maior que o tipo de A.

TEOREMA II.3.14: $\vdash (R)(\mathrm{RUSC}(R) \in \mathrm{Rel})$

TEOREMA II.3.15: $\vdash (R,x,y)(x(\mathrm{RUSC}(R))y \equiv (\mathrm{E}u,v)(uRv\ \&\ x=\{u\}\ \&\ y=\{v\}))$

COROLÁRIO: $\vdash (R)(\mathrm{RUSC}(R) = \widehat{x}\widehat{y}(\mathrm{E}u,v)(uRv\ \&\ x=\{u\}\ \&\ y=\{v\}))$

TEOREMA II.3.16: $\vdash (R,x,y)(\{x\}(\mathrm{RUSC}(R))\{y\} \equiv xRy)$

COROLÁRIO: $\vdash (R,x,y)(\{\{x\}\}(\mathrm{RUSC}^2(R))\{\{y\}\} \equiv xRy)$

TEOREMA II.3.17: $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})(\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) = \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}) \equiv \mathbf{R} = \mathbf{S})$

TEOREMA II.3.18: I. $\vdash (R,S)(\mathrm{RUSC}(R \cap S) = \mathrm{RUSC}(R) \cap \mathrm{RUSC}(S))$

II. $\vdash (R,S)(\mathrm{RUSC}(R \cup S) = \mathrm{RUSC}(R) \cup \mathrm{RUSC}(S))$

III. $\vdash (R,S)(\mathrm{RUSC}(R - S) = \mathrm{RUSC}(R) - \mathrm{RUSC}(S))$

IV. $\vdash \mathrm{RUSC}(\Lambda) = \Lambda$

V. $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S} \equiv \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}))$

VI. $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})(\mathbf{R} \subset \mathbf{S} \equiv \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \subset \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}))$

DEMONSTRAÇÃO:

III. $\vdash (R,S)(\mathrm{RUSC}(R - S) = \mathrm{RUSC}(R) - \mathrm{RUSC}(S))$

($\rightarrow$) Por definição, $R - S = R \cap \overline{S}$, então, $\mathrm{RUSC}(R - S) = \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S})$. Com isso,

$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S}) \vdash \langle x,y \rangle \in R \cap \overline{S}$

$\vdash \langle x,y \rangle \in R \ \& \ \langle x,y \rangle \in \overline{S}$

$\vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R)$

$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S}),\ \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \overline{\mathrm{RUSC}(S)} \vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$

$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S}),\ \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(S) \vdash \langle x,y \rangle \in S \ \& \ \langle x,y \rangle \in \overline{S}$

$\vdash \langle x,y \rangle \in \Lambda$

$\vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$

logo,

$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S}) \vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$.

assim,

$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S}) \vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R) \ \& \ \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$

$\vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R) \cap \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$

donde,

$\vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S}) \supset \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R) \cap \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$

e, então,

$\vdash \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S}) \subseteq \mathrm{RUSC}(R) \cap \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$

($\leftarrow$) $\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R) \cap \overline{\mathrm{RUSC}(S)} \vdash \langle x,y \rangle \in R$

Supondo-se que $\langle x,y \rangle \in \overline{S}$, então $\langle x,y \rangle \in R \cap \overline{S}$
logo, $\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S})$
Por outro lado, supondo-se que $\langle x,y \rangle \in S$,
então $\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(S)$. Portanto,
$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(S) \cap \overline{\mathrm{RUSC}(S)}$, logo
$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \Lambda$ e, pelo Lema I.4.2, ítem II.
$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(R \cap \overline{S})$.

IV. $\vdash \mathrm{RUSC}(\Lambda) = \Lambda$.

Sabemos que $\Lambda \subseteq \mathrm{RUSC}(\Lambda)$. Falta provar que $\mathrm{RUSC}(\Lambda) \subseteq \Lambda$.

$\langle \{x\},\{y\} \rangle \in \mathrm{RUSC}(\Lambda) \vdash \langle x,y \rangle \in \Lambda$
logo, pelo Lema I.4.2, ítem II, $\vdash \langle \{x\},\{y\} \rangle \in \Lambda$.

Portanto, $\mathrm{RUSC}(\Lambda) \subseteq \Lambda$

VI. $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})(\mathbf{R} \subset \mathbf{S} \equiv \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \subset \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}))$.

($\rightarrow$) Devemos provar que se $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$ & $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$, então
$\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$ & $\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$.
É óbvio que $\mathbf{R} \subset \mathbf{S} \supset \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$
$\mathbf{R} \neq \mathbf{S}, \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}) \vdash \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$
$\mathbf{R} \neq \mathbf{S}, \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) = \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}) \vdash \mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ & $\mathbf{R} = \mathbf{S}$ (pelo Teorema II.3.17).
$\vdash t \in \mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{R}}$
$\vdash t \in \Lambda$
$\vdash t \in \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \cap \overline{\mathrm{RUSC}(\mathbf{S})}$
$\vdash \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$
assim, $\mathbf{R} \neq \mathbf{S} \vdash \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$

($\leftarrow$) Provemos a recíproca. É óbvio que
$\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \subset \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}) \supset \mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$
$\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}), \mathbf{R} \neq \mathbf{S} \vdash \mathbf{R} \neq \mathbf{S}$
$\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}), \mathbf{R} = \mathbf{S} \vdash \mathbf{R} = \mathbf{S}$
$\vdash \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) = \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$ & $\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})$
$\vdash w \in \mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{S}}$
$\vdash \mathbf{R} \neq \mathbf{S}$
logo, $\mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \neq \mathrm{RUSC}(\mathbf{S}) \vdash \mathbf{R} \neq \mathbf{S}$

TEOREMA II.3.19: $\vdash (\alpha,\beta)(\mathrm{RUSC}(\alpha \times \beta) = \mathrm{USC}(\alpha) \times \mathrm{USC}(\beta))$

COROLÁRIO 1: $\vdash \mathrm{RUSC}(\mathbf{V} \times \mathbf{V}) = 1 \times 1$

DEMONSTRAÇÃO: basta substituir α e β por $\mathbf{V}$ no Teorema II.3.19.

COROLÁRIO 2: $\vdash (x,y)(\{x\}(1 \times 1)\{y\})$

DEMONSTRAÇÃO: basta fazer $R = \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ no Teorema II.3.16.

TEOREMA II.3.20:

I. $\vdash (R,x,y)(x(\hat{x}\hat{y}(\{x\}R\{y\}))y \equiv \{x\}R\{y\})$

II. $\vdash (R,S)(R \subseteq \mathrm{RUSC}(S) \supset \hat{x}\hat{y}(\{x\}R\{y\}) \subseteq S \;\&\; R = \mathrm{RUSC}(\hat{x}\hat{y}(\{x\}R\{y\})))$.

COROLÁRIO 1: $\vdash (R)(R \subseteq 1 \times 1 \supset R = \mathrm{RUSC}(\hat{x}\hat{y}(\{x\}R\{y\})))$

COROLÁRIO 2: $\vdash (R,\mathbf{R})(R \subseteq \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \equiv (E\mathbf{S})(\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R} \;\&\; R = \mathrm{RUSC}(\mathbf{S})))$

II.4. PROPRIEDADES ESPECIAIS DAS RELAÇÕES.

Se $\mathbf{R}$ é uma função e $x \; \mathbf{R} \; y$, então x é chamado *argumento* e y o *valor correspondente*.

DEFINIÇÃO:

$\mathrm{Arg}(A) =_{df} \hat{x}(Ey)(xAy)$ (*domínio de A*)

$\mathrm{Val}(A) =_{df} \hat{y}(Ex)(xAy)$ (*contradomínio de A*)

$\mathrm{AV}(A) = \mathrm{Arg}(A) \cup \mathrm{Val}(A)$

onde x e y são variáveis distintas que não ocorrem em A.

$\mathrm{Arg}(A)$ e $\mathrm{Val}(A)$ são estratificáveis se, e somente se, A o for e, nesse caso, eles tem o mesmo tipo de A. O mesmo se aplica para $\mathrm{AV}(A)$.

TEOREMA II.4.1: I. $\vdash (R,x)(x \in \mathrm{Arg}(R) \equiv (Ey)xRy)$

II. $\vdash (R,y)(y \in \mathrm{Val}(R) \equiv (Ex)xRy)$

III. $\vdash (R,x)(x \in \mathrm{AV}(R) \equiv (Ey)(xRy \vee yRx))$

TEOREMA II.4.2: I. $\vdash (R,S)(R \subseteq S \supset \mathrm{Arg}(R) \subseteq \mathrm{Arg}(S))$

II. $\vdash (R,S)(R \subseteq S \supset \mathrm{Val}(R) \subseteq \mathrm{Val}(S))$

III. $\vdash (R,S)(R \subseteq S \supset \mathrm{AV}(R) \subseteq \mathrm{AV}(S))$

TEOREMA II.4.3: I. $\vdash (\mathbf{R})(\mathrm{Arg}(\mathbf{R}) = \Lambda \equiv \mathbf{R} = \Lambda)$

II. $\vdash (\mathbf{R})(\mathrm{Val}(\mathbf{R}) = \Lambda \equiv \mathbf{R} = \Lambda)$

III. $\vdash (\mathbf{R})(\mathrm{AV}(\mathbf{R}) = \Lambda \equiv \mathbf{R} = \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $(\rightarrow)$ $\mathrm{Arg}(\mathbf{R}) = \Lambda$, $\langle x,y \rangle \in \mathbf{R}$ $\vdash x \in \mathrm{Arg}(\mathbf{R})$

$\vdash x \in \Lambda$

$\vdash \langle x,y \rangle \in \Lambda$

logo, $\mathrm{Arg}(\mathbf{R}) = \Lambda \vdash \mathbf{R} \subseteq \Lambda \;\&\; \Lambda \subseteq \mathbf{R}$

donde, $\mathrm{Arg}(\mathbf{R}) = \Lambda \vdash \mathbf{R} = \Lambda$

$(\leftarrow)$ Reciprocamente,

$\mathbf{R} = \Lambda$, $x \in \mathrm{Arg}(\mathbf{R}) \vdash (\mathrm{E}y)(\langle x,y \rangle \in \mathrm{Arg}(\mathbf{R}))$

$\vdash \langle u,v \rangle \in \mathrm{Arg}(\Lambda)$

$\vdash u \in \Lambda$

$\vdash x \in \Lambda$

logo, $\mathbf{R} = \Lambda \vdash \mathrm{Arg}(\mathbf{R}) = \Lambda$

As demonstrações de (II) e (III) são similares.

TEOREMA II.4.4: I. $\vdash (\alpha,\beta)(\beta \neq \Lambda \supset \mathrm{Arg}(\alpha \times \beta) = \alpha)$

II. $\vdash (\alpha,\beta)(\alpha \neq \Lambda \supset \mathrm{Val}(\alpha \times \beta) = \beta)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $\beta \neq \Lambda$, $x \in \mathrm{Arg}(\alpha \times \beta) \vdash (\mathrm{E}y)(\langle x,y \rangle \in \alpha \times \beta)$

$\vdash x \in \alpha \;\&\; y \in \beta$

$\vdash x \in \alpha$

donde, $\beta \neq \Lambda \vdash \mathrm{Arg}(\alpha \times \beta) \subseteq \alpha$

Por outro lado,

$\beta \neq \Lambda$, $x \in \alpha \vdash (\mathrm{E}y)(y \in \beta)$

$\vdash v \in \beta \;\&\; x \in \alpha$

$\vdash \langle x,v \rangle \in \alpha \times \beta$

$\vdash (\mathrm{E}y)(\langle x,y \rangle \in \alpha \times \beta)$

$\vdash x \in \mathrm{Arg}(\alpha \times \beta)$

daí, $\beta \neq \Lambda \vdash \alpha \subseteq \mathrm{Arg}(\alpha \times \beta)$

COROLÁRIO: I. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\gamma \neq \Lambda \;\&\; \alpha \times \gamma = \beta \times \gamma \supset \alpha = \beta)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\gamma \neq \Lambda \;\&\; \gamma \times \alpha = \gamma \times \beta \supset \alpha = \beta)$

III. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\gamma \neq \Lambda \;\&\; \alpha \times \gamma \subseteq \beta \times \gamma \supset \alpha \subseteq \beta)$

IV. $\vdash (\alpha,\beta,\gamma)(\gamma \neq \Lambda \;\&\; \gamma \times \alpha \subseteq \gamma \times \beta \supset \alpha \subseteq \beta)$

Definiremos, agora, relações com argumentos e valores restritos.

DEFINIÇÃO: $A \upharpoonleft C = (A \times \mathbf{V}) \cap C$

$C \upharpoonright B = (\mathbf{V} \times B) \cap C$

$A \upharpoonleft C \upharpoonright B = (A \times B) \cap C$

$A \upharpoonleft C$ é estratificável se, e somente se, $A = C$ é estratificável e, se isso ocorre, $A \upharpoonleft C$ tem o mesmo tipo de A e C. Analogamente, para $C \upharpoonright B$ e $A \upharpoonleft C \upharpoonright B$.

TEOREMA II.4.5:

I. $\vdash (\alpha,R,x,y)(x(\alpha \upharpoonleft R)y \equiv x \in \alpha \;\&\; xRy)$

II. $\vdash (\beta,R,x,y)(x(R \upharpoonright \beta)y \equiv xRy \;\&\; y \in \beta)$

III. $\vdash (\alpha,\beta,R,x,y)(x(\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta)y \equiv x \in \alpha \;\&\; xRy \;\&\; y \in \beta)$

TEOREMA II.4.6:

I. $\vdash (\alpha,R)(\alpha \upharpoonleft R \subseteq R)$

II. $\vdash (\beta,R)(R \upharpoonright \beta \subseteq R)$

III. $\vdash (\alpha,\beta,R)(\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \subseteq R)$

TEOREMA II.4.7:

I. $\vdash (\alpha,R)(\alpha \upharpoonleft R \in \mathrm{Rel})$

II. $\vdash (\beta,R)(R \upharpoonright \beta \in \mathrm{Rel})$

III. $\vdash (\alpha,\beta,R)(\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \mathrm{Rel})$

TEOREMA II.4.8:

I. $\vdash (\alpha,\beta,R)((\alpha \upharpoonleft R) \upharpoonright \beta = \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta)$

II. $\vdash (\alpha,\beta,R)(\alpha \upharpoonleft (R \upharpoonright \beta) = \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta)$

TEOREMA II.4.9:

I. $\vdash (\alpha,R)(\mathrm{Arg}(\alpha \upharpoonleft R) = \alpha \cap \mathrm{Arg}(R))$

II. $\vdash (\beta,R)(\mathrm{Val}(R \upharpoonright \beta) = \beta \cap \mathrm{Val}(R))$

TEOREMA II.4.10:

I. $\vdash (\alpha,\mathbf{R})(\mathrm{Arg}(\mathbf{R}) \subseteq \alpha \equiv \mathbf{R} = \alpha \upharpoonleft \mathbf{R})$

II. $\vdash (\beta,\mathbf{R})(\mathrm{Val}(\mathbf{R}) \subseteq \beta \equiv \mathbf{R} = \mathbf{R} \upharpoonright \beta)$

COROLÁRIO:

I. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} = \mathrm{Arg}(\mathbf{R}) \upharpoonleft \mathbf{R})$

II. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} = \mathbf{R} \upharpoonright \mathrm{Val}(\mathbf{R}))$

III. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} = \mathrm{Arg}(\mathbf{R}) \upharpoonleft \mathbf{R} \upharpoonright \mathrm{Val}(\mathbf{R}))$

TEOREMA II.4.11:

I. $\vdash (\alpha,\beta,R)((\alpha \cap \beta) \upharpoonleft R = (\alpha \upharpoonleft R) \cap (\beta \upharpoonleft R))$

II. $\vdash (\alpha,\beta,R)(R \upharpoonright (\alpha \cap \beta) = (R \upharpoonright \alpha) \cap (R \upharpoonright \beta))$

III. $\vdash (\alpha,\beta,R)((\alpha \cup \beta) \upharpoonleft R = (\alpha \upharpoonleft R) \cup (\beta \upharpoonleft R))$

IV. $\vdash (\alpha,\beta,R)(R \upharpoonright (\alpha \cup \beta) = (R \upharpoonright \alpha) \cup (R \upharpoonright \beta))$

V. $\vdash (\alpha,\beta,R)((\alpha \cap \beta) \upharpoonleft R = \alpha \upharpoonleft (\beta \upharpoonleft R))$

VI. $\vdash (\alpha,\beta,R)(R \upharpoonright (\alpha \cap \beta) = (R \upharpoonright \alpha) \upharpoonright \beta)$

TEOREMA II.4.12:

I. $\vdash (\alpha,R,S)(R \subseteq S \supset \alpha \upharpoonleft R \subseteq \alpha \upharpoonleft S)$

II. $\vdash (\beta,R,S)(R \subseteq S \supset R \upharpoonright \beta \subseteq S \upharpoonright \beta)$

III. $\vdash (\alpha,\beta,R,S)(R \subseteq S \supset \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \subseteq \alpha \upharpoonleft S \upharpoonright \beta)$

IV. $\vdash (\alpha,\beta,R)(\alpha \subseteq \beta \supset \alpha \upharpoonleft R \subseteq \beta \upharpoonleft R)$

V. $\vdash (\alpha,\beta,R)(\alpha \subseteq \beta \supset R \upharpoonright \alpha \subseteq R \upharpoonright \beta)$

Definimos a *conversa* de uma relação $\mathbf{R}$ como a relação que ocorre entre x e y quando $y\mathbf{R}x$. A conversa de $\mathbf{R}$ será denotada por Cnv($\mathbf{R}$) ou $\breve{\mathbf{R}}$.

DEFINIÇÃO: $\mathrm{Cnv}(A) =_{\mathrm{df}} \hat{x}\hat{y}(yAx)$

ou $\breve{A} =_{\mathrm{df}} \hat{x}\hat{y}(yAx)$

onde x e y são variáveis distintas que não ocorrem em A.

$\mathrm{Cnv}(A)$ é estratificável se, e somente se, A o for, e, nesse caso $\mathrm{Cnv}(A)$ terá o mesmo tipo de A.

TEOREMA II.4.13: I. $\vdash (R,x,y)(x\breve{R}y \equiv yRx)$

II. $\vdash (R)(\breve{R} \in \mathrm{Rel})$

COROLÁRIO 1: $\vdash (R,x,y)(x(\mathrm{Cnv}(\breve{R}))y \equiv xRy)$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\mathbf{R})(\mathrm{Cnv}(\breve{\mathbf{R}}) = \mathbf{R})$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})(\breve{\mathbf{R}} = \breve{\mathbf{S}} \equiv \mathbf{R} = \mathbf{S})$

COROLÁRIO 4: $\vdash (\alpha,\beta)(\mathrm{Cnv}(\alpha \times \beta) = \beta \times \alpha)$

COROLÁRIO 5: $\vdash (\mathbf{R},\mathbf{S})(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S} \equiv \breve{\mathbf{R}} \subseteq \breve{\mathbf{S}})$

TEOREMA II.4.14: $\vdash (R,S)(\mathrm{Cnv}(R \cap S) = \mathrm{Cnv}(R) \cap \mathrm{Cnv}(S))$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha,R)(\mathrm{Cnv}(\alpha \upharpoonleft R) = \breve{R} \upharpoonright \alpha)$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\beta,R)(\mathrm{Cnv}(R \upharpoonright \beta) = \beta \upharpoonleft \breve{R})$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\alpha,\beta,R)(\mathrm{Cnv}(\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta) = \beta \upharpoonleft \breve{R} \upharpoonright \alpha)$

TEOREMA II.4.15: $\vdash (R,S)(\mathrm{Cnv}(R \cup S) = \mathrm{Cnv}(R) \cup \mathrm{Cnv}(S))$

TEOREMA II.4.16: I. $\vdash (R)(\mathrm{Arg}(\breve{R}) = \mathrm{Val}(R))$

II. $\vdash (R)(\mathrm{Val}(\breve{R}) = \mathrm{Arg}(R))$

O *Produto Relativo* R/S *de* R *e* S é a relação que ocorre entre x e z, quando há um y tal que xRy & ySz .

DEFINIÇÃO: $A \mid B =_{\mathrm{df}} \hat{x}\hat{z}(\mathrm{E}y)(xAy \ \& \ yBz)$

onde x, y e z são variáveis distintas que não ocorrem em A ou B .

$A \mid B$ é estratificável se, e somente se, $A = B$ o for e, nesse caso, terá o mesmo tipo de A e B.

TEOREMA II.4.17: I. $\vdash (R,S,x,z)(x(R/S)z \equiv (\mathrm{E}y)(xRy \ \& \ ySz))$

II. $\vdash (R,S)(R/S \in \mathrm{Rel})$

COROLÁRIO: $\vdash (R,S)(\mathrm{Cnv}(R/S) = \breve{S}/\breve{R})$

TEOREMA II.4.18: $\vdash (R,S,T)(R/(S/T) = (R/S)/T)$

TEOREMA II.4.19: I. $\vdash (R,S)(\mathrm{Arg}(R/S) = \mathrm{Arg}(R \upharpoonright (\mathrm{Arg}(S))))$

II. $\vdash (R,S)(\mathrm{Val}(R/S) = \mathrm{Val}(\mathrm{Val}(R) \upharpoonleft S))$

COROLÁRIO: I. $\vdash (R,S)(\mathrm{Arg}(R/S) \subseteq \mathrm{Arg}(R))$

II. $\vdash (R,S)(\mathrm{Val}(R/S) \subseteq \mathrm{Val}(S))$

III. $\vdash (R,S)(\mathrm{Val}(R) \subseteq \mathrm{Arg}(S) \supset \mathrm{Arg}(R/S) = \mathrm{Arg}(R))$

IV. $\vdash (R,S)(\mathrm{Arg}(S) \subseteq \mathrm{Val}(R) \supset \mathrm{Val}(R/S) = \mathrm{Val}(S))$

TEOREMA II.4.20: I. $\vdash (\alpha,R,S)((\alpha \upharpoonleft R)/S = \alpha \upharpoonleft (R/S))$

II. $\vdash (\beta,R,S)(R/(S \upharpoonright \beta) = (R/S) \upharpoonright \beta)$

COROLÁRIO: $\vdash (\alpha,\beta,R,S)((\alpha \upharpoonleft R)/(S \upharpoonright \beta) = \alpha \upharpoonleft (R/S) \upharpoonright \beta)$

TEOREMA II.4.21: $\vdash (\alpha,R,S)((R \upharpoonright \alpha)/S = R/(\alpha \upharpoonleft S))$

O conceito de $\mathrm{Val}(\alpha \upharpoonleft R)$ é muito importante, pois, em termos de "gráficos" de R, ele pode ser encarado como a projeção sobre o eixo dos y dos pontos cujas coordenadas x estão em α.

DEFINIÇÃO: $A''B =_{\mathrm{df}} \mathrm{Val}(B \upharpoonleft A)$

As condições para estratificação de $A''B$ são as mesmas de Val$(B \upharpoonleft A)$, ou seja, que $A = B$ seja estratificável e, nesse caso, $A''B$ tem o mesmo tipo de A e B.

TEOREMA II.4.22: $\vdash (\alpha,R,y)(y \in R''\alpha \equiv (Ex)(xRy \;\&\; y \in \alpha))$

COROLÁRIO: $\vdash (R,x,y)(y \in R''\{x\} \equiv xRy)$

TEOREMA II.4.23: $\vdash (\beta,R)(\breve{R}''\beta = \mathrm{Arg}(R \upharpoonright \beta))$

COROLÁRIO: $(\beta,R,x)(x \in \breve{R}''\beta \equiv (Ey)(xRy \;\&\; y \in \beta))$

TEOREMA II.4.24: I. $\vdash (\alpha,R)(R''\alpha \subseteq \mathrm{Val}(R))$

II. $\vdash (\beta,R)(\breve{R}''\beta \subseteq \mathrm{Arg}(R))$

TEOREMA II.4.25: $\vdash (\alpha,\beta,R)(\alpha \subseteq \beta \supset R''\alpha \subseteq R''\beta)$

TEOREMA II.4.26: I. $\vdash (R)(\mathrm{Val}(R) = R''\mathrm{Arg}(R))$

II. $\vdash (R)(\mathrm{Arg}(R) = \breve{R}''\mathrm{Val}(R))$

TEOREMA II.4.27: I. $\vdash (\alpha,R)(R''\alpha = R''(\alpha \cap \mathrm{Arg}(R)))$

II. $\vdash (\beta,R)(\breve{R}''\beta = \breve{R}''(\beta \cap \mathrm{Val}(R)))$

COROLÁRIO: I. $\vdash (R)(R''\mathbf{V} = \mathrm{Val}(R))$

II. $\vdash (R)(\breve{R}''\mathbf{V} = \mathrm{Arg}(R))$

TEOREMA II.4.28: $\vdash (\alpha,R,S)((R/S)''\alpha = S''R''\alpha)$

TEOREMA II.4.29: I. $\vdash (R)(\mathrm{Arg}(\mathrm{RUSC}(R)) = \mathrm{USC}(\mathrm{Arg}(R)))$

II. $\vdash (R)(\mathrm{Val}(\mathrm{RUSC}(R)) = \mathrm{USC}(\mathrm{Val}(R)))$

III. $\vdash (R)(\mathrm{AV}(\mathrm{RUSC}(R)) = \mathrm{USC}(\mathrm{AV}(R)))$

TEOREMA II.4.30: I. $\vdash (\alpha,R)(\mathrm{RUSC}(\alpha \upharpoonleft R) = \mathrm{USC}(\alpha) \upharpoonleft \mathrm{RUSC}(R))$

II. $\vdash (\beta,R)(\mathrm{RUSC}(R \upharpoonright \beta) = \mathrm{RUSC}(R) \upharpoonright \mathrm{USC}(\beta))$

COROLÁRIO: $\vdash (\beta,R)((\mathrm{RUSC}(R))''\mathrm{USC}(\beta) = \mathrm{USC}(R''\beta))$

TEOREMA II.4.31: $\vdash (R)(\mathrm{RUSC}(\breve{R}) = \mathrm{Cnv}(\mathrm{RUSC}(R)))$

TEOREMA II.4.32: $\vdash (R,S)(\mathrm{RUSC}(R/S) = \mathrm{RUSC}(R)/\mathrm{RUSC}(S))$

Os teoremas seguintes, até II.4.37, envolvem clausura e eles valem em $\mathbf{NF}_\omega$, pois as propriedades sobre fecho (clausura) se mantêm nesse sistema.

Assim, podemos formar a clausura de uma classe α em relação a uma relação R. Com a notação proposta agora, a clausura de α em relação a R será denotada por $\mathrm{Clos}(\alpha, x\,R\,z)$, o que denotará

$$\bigcap \hat{\beta}(\alpha \subseteq \beta \ \& \ ((x,z)(x \in \beta \ \& \ xRz) \supset z \in \beta))$$

e daí,

$$\vdash (\beta, R)((x,z)(z \in \beta \ \& \ xRz) \supset z \in \beta \equiv R\,''\beta \subseteq \beta)$$

donde,

$$\vdash (\alpha, R)(\mathrm{Clos}(\alpha, xRz) = \bigcap \hat{\beta}(\alpha \subseteq \beta \ \& \ R\,''\beta \subseteq \beta))$$

Assim, os Teoremas I.5.12 a I.5.16 reduzem-se a:

TEOREMA II.4.33: $\vdash (\alpha, R, y)(y \in \mathrm{Clos}(\alpha, xRz) \equiv (\beta)(\alpha \subseteq \beta \ \& \ R\,''\beta \subseteq \beta \supset y \in \beta))$

TEOREMA II.4.34: $\vdash (\alpha, R)(\alpha \subseteq \mathrm{Clos}(\alpha, xRz))$

TEOREMA II.4.35: $\vdash (\alpha, R)(R\,''\mathrm{Clos}(\alpha, xRz) \subseteq \mathrm{Clos}(\alpha, xRz))$

TEOREMA II.4.36:
$\vdash (\alpha, \beta, R)(\alpha \subseteq \beta \ \& \ R\,''(\beta \cap \mathrm{Clos}(\alpha, xRz)) \subseteq \beta \supset \mathrm{Clos}(\alpha, xRz) \subseteq \beta)$

TEOREMA II.4.37: $\vdash (\alpha, R)(\mathrm{Clos}(\alpha, xRz) = \alpha \cup R\,''\mathrm{Clos}(\alpha, xRz))$

Certos resultados importantes sobre relações, que se encontram em Rosser, como exercícios, continuam válidos em $\mathbf{NF}_\omega$, como, por exemplo, os exercícios X.4.1, X.4.2, X.4.5, X.4.6 e X.4.8 das páginas 303 - 304 de Rosser [19].

Provemos o ítem I do exercício X.4.1:

$$\vdash (\alpha, \beta, \gamma)(\gamma \neq \Lambda \supset \alpha \subset \beta \equiv \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma)$$

DEMONSTRAÇÃO: Devemos mostrar que $\alpha \neq \beta \equiv \alpha \times \gamma \neq \beta \times \gamma$

$\gamma \neq \Lambda$, $\alpha \subset \beta$, $\alpha \times \gamma \neq \beta \times \gamma \ \vdash \alpha \times \gamma \neq \beta \times \gamma$

$\gamma \neq \Lambda$, $\alpha \subset \beta$, $\alpha \times \gamma = \beta \times \gamma \ \vdash \alpha = \beta$

$\vdash \alpha \neq \beta$

$\vdash x \in \Lambda$

$\vdash \alpha \times \gamma \neq \beta \times \gamma$

logo, $\gamma \neq \Lambda$, $\alpha \subset \beta \vdash \alpha \times \gamma \neq \beta \times \gamma$

e, $\gamma \neq \Lambda$, $\alpha \subset \beta \vdash \alpha \neq \beta$

mas, $\gamma \neq \Lambda$, $\alpha \subset \beta \vdash \alpha \times \gamma \subseteq \beta \times \gamma$

assim, $\gamma \neq \Lambda \vdash \alpha \subset \beta \supset \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma$

Por outro lado,

$\gamma \neq \Lambda,\quad \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma \quad \vdash \alpha \subset \beta$

$\gamma \neq \Lambda,\quad \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma \quad \vdash \alpha \subseteq \beta$

$\gamma \neq \Lambda,\quad \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma\ ,\ \alpha \neq \beta \vdash \alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned}\gamma \neq \Lambda,\quad \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma\ ,\ \alpha = \beta &\vdash \alpha \times \gamma = \beta \times \gamma\\ &\vdash \alpha \times \gamma \neq \beta \times \gamma\\ &\vdash x \in \Lambda\\ &\vdash \alpha \neq \beta\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\gamma \neq \Lambda,\ \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma \quad &\vdash \alpha \subseteq \beta\ \&\ \alpha \neq \beta\\ &\vdash \alpha \subset \beta\end{aligned}$$

donde,

$\gamma \neq \Lambda \vdash \quad \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma \supset \alpha \subset \beta$

II.5. FUNÇÕES

Uma relação $\mathbf{R}$ é uma função se, e somente se,

$$(x,y,z)(x\ \mathbf{R}\ y\ \&\ x\ \mathbf{R}\ z \supset y = z)$$

DEFINIÇÃO: Funct $=_{df} \hat{\mathbf{R}}(x,y,z)(x\ \mathbf{R}\ y\ \&\ x\ \mathbf{R}\ z \supset x = z)$

Assim, Funct é a *classe de todas as funções* e, para dizer que R é uma função, escreve-se $R \in$ Funct.

Funct é estratificável e pode ter qualquer tipo, pois não contém variáveis livres.

Se $\mathbf{R}$ é uma função e $x \in$ Arg($\mathbf{R}$), então existe um único y tal que $x\mathbf{R}\,y$. Geralmente, escrevemos $y = \mathbf{R}(x)$ e definimos

$$A(B) =_{df} \imath y(BAy)$$

onde y não ocorre em A ou B.

$A(B)$ é estratificável se, e somente se, $B \in A$ é estratificável e, nesse caso, tem o mesmo tipo de B, que será uma unidade menor que o tipo de A.

TEOREMA II.5.1: $\vdash (R)(R \in \text{Funct} \equiv R \in \text{Rel} \ \& \ (x,y,z)(xRy \ \& \ xRz \supset y = z))$

COROLÁRIO 1: $\vdash \text{Funct} \subseteq \text{Rel}$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Funct} \equiv (x,y,z)(x \ \mathbf{R} \ y \ \& \ x \ \mathbf{R} \ z \supset y = z))$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\mathbf{R})(\breve{\mathbf{R}} \in \text{Funct} \equiv (x,y,z)(x \ \mathbf{R} \ z \ \& \ y \ \mathbf{R} \ z \supset x = y))$

TEOREMA II.5.2: $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Funct} \equiv (x)(x \in \text{Arg}(\mathbf{R}) \equiv (E_1 y) \ x \ \mathbf{R} \ y))$

COROLÁRIO: $\vdash (\mathbf{R})(\breve{\mathbf{R}} \in \text{Funct} \equiv (y)(y \in \text{Val}(\mathbf{R}) \equiv (E_1 x) \ x \ \mathbf{R} \ y))$

TEOREMA II.5.3: $\vdash (R,x)(R \in \text{Funct} \ \& \ x \in \text{Arg}(R) \supset (y)(y = R(x) \equiv xRy))$

COROLÁRIO 1: $\vdash (R,x)(R \in \text{Funct} \ \& \ x \in \text{Arg}(R) \supset xR(R(x)))$

COROLÁRIO 2: $\vdash (R,y)(\breve{R} \in \text{Funct} \ \& \ y \in \text{Val}(R) \supset (x)(x = \breve{R}(y) \equiv xRy))$

COROLÁRIO 3: $\vdash (R,y)(\breve{R} \in \text{Funct} \ \& \ y \in \text{Val}(R) \supset (\breve{R}(y))Ry)$

COROLÁRIO 4: $\vdash (R,x)(R \in \text{Funct} \ \& \ x \in \text{Arg}(R) \supset R(x) \in \text{Val}(R))$

COROLÁRIO 5: $\vdash (R,x)(\breve{R} \in \text{Funct} \ \& \ y \in \text{Val}(R) \supset \breve{R}(y) \in \text{Arg}(R))$

TEOREMA II.5.4: $\vdash (R,y)(y \in \text{Val}(R) \supset y(\breve{R}/R)y)$

COROLÁRIO: $\vdash (R)(\text{Arg}(\breve{R}/R) = \text{Val}(\breve{R}/R) = \text{Val}(R))$

TEOREMA II.5.5: $\vdash (R,y,z)(R \in \text{Funct} \ \& \ y(\breve{R}/R)z \supset y = z)$

COROLÁRIO 1: $\vdash (R)(R \in \text{Funct} \supset (y,z)(y(\breve{R}/R)z) \equiv y = z \ \& \ y \in \text{Val}(R)))$

COROLÁRIO 2: $\vdash (R)(R \in \text{Funct} \supset \breve{R}/R \in \text{Funct})$

COROLÁRIO 3: $\vdash (R,y)(R \in \text{Funct} \ \& \ y \in \text{Val}(R) \supset y = (\breve{R}/R)y)$

TEOREMA II.5.6: $\vdash (R,\alpha,\beta)(R \in \text{Funct} \ \& \ \beta \subseteq R''\alpha \supset \beta = R''((\breve{R}''\beta) \cap \alpha))$

COROLÁRIO: $\vdash (R)(R \in \text{Funct} \supset (\alpha,\beta)(\beta \subseteq R''\alpha \equiv (E\gamma)(\gamma \subseteq \alpha \ \& \ \beta = R''\gamma)))$

TEOREMA II.5.7: $\vdash (R,S)(R \in \text{Funct} \ \& \ S \subseteq R \supset S \in \text{Funct})$

COROLÁRIO: $\vdash (R,\alpha,\beta)(R \in \text{Funct} \supset \alpha \upharpoonleft R, \ R \upharpoonright \beta, \ \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Funct})$

TEOREMA II.5.8: $\vdash (R,S)(R \in \text{Funct} \ \& \ S \subseteq R \supset S = \text{Arg}(S) \upharpoonleft R)$

TEOREMA II.5.9: $\vdash (R,S)(R,S \in \text{Funct} \supset R/S \in \text{Funct})$

DEFINIÇÃO: *Relação Identidade*

$$I =_{df} \hat{x}\hat{y}(x = y).$$

I é estratificável e pode-lhe ser dado qualquer tipo, uma vez que não possui variáveis livres.

TEOREMA II.5.10: I. $\vdash (x,y)(x\,I\,y \equiv x = y)$

II. $\vdash I \in \mathrm{Funct}$

III. $\vdash I = \breve{I}$

IV. $\vdash \mathrm{Arg}(I) = \mathrm{Val}(I) = \mathbf{V}$

V. $\vdash (x)(I(x) = x)$

TEOREMA II.5.11: $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} = \mathbf{R}\,/\,I = I\,/\,\mathbf{R})$

TEOREMA II.5.12: $\vdash (\alpha)(\alpha \dashv I = I \upharpoonright \alpha = \alpha \dashv I \vdash \alpha)$

COROLÁRIO: $\vdash (R)(R \in \mathrm{Funct} \supset \breve{R}/R = \mathrm{Val}(R) \dashv I = I \upharpoonright \mathrm{Val}(R) =$
$= \mathrm{Val}(R) \dashv I \upharpoonright \mathrm{Val}(R))$

TEOREMA II.5.13: $\vdash (R)(R \in \mathrm{Funct} \supset (S,x,y)(x(R/S)y \equiv$
$\equiv x \in \mathrm{Arg}(R)\ \&\ (R(x))S\,y))$

COROLÁRIO: $\vdash (R,x)(R \in \mathrm{Funct}\ \&\ x \in \mathrm{Arg}(R) \supset (S,y)(x(R/S)y \equiv (R(x))S\,y))$

TEOREMA II.5.14: $\vdash (R,x)(R \in \mathrm{Funct}\ \&\ x \in \mathrm{Arg}(R) \supset (S)(R/S)(x) = S(R(x)))$

TEOREMA II.5.15: $\vdash (\alpha,R,x)(R \in \mathrm{Funct}\ \&\ x \in \alpha \cap \mathrm{Arg}(R) \supset R(x) \in R\,''\alpha)$

TEOREMA II.5.16: $\vdash (R,S)(R,S \in \mathrm{Funct}\ \&\ \mathrm{Arg}(R) = \mathrm{Arg}(S)\ \&\ (x)(x \in \mathrm{Arg}(R) \supset$
$\supset R(x) = S(x)) \supset R = S)$

TEOREMA II.5.17: $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \mathrm{Funct} \equiv \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \in \mathrm{Funct})$

TEOREMA II.5.18: $\vdash (R,x)(R \in \mathrm{Funct}\ \&\ x \in \mathrm{Arg}(R) \supset (\mathrm{RUSC}(R))(\{x\}) = \{R(x)\})$

DEFINIÇÃO: *Relação* 1 - 1

$1 - 1 =_{df} \hat{R}(R,\breve{R} \in \mathrm{Funct})$

1 - 1 é estratificável e pode-lhe ser dado qualquer tipo, pois não contém variáveis livres.

TEOREMA II.5.19: $\vdash (R)(R \in 1 - 1 \equiv R,\breve{R} \in \mathrm{Funct})$

COROLÁRIO 1: $\vdash 1 - 1 \subseteq \mathrm{Funct}$

COROLÁRIO 2: $\vdash (R)(R \in \mathrm{Funct} \supset \breve{R}/R \in 1 - 1)$

COROLÁRIO 3: $\vdash (R)(R \in 1 - 1 \supset \breve{R}/R,\ R/\breve{R} \in 1 - 1)$

COROLÁRIO 4: $\vdash (R,S)(R \in 1 - 1\ \&\ S \subseteq R \supset S \in 1 - 1)$

COROLÁRIO 5: $\vdash (\alpha, \beta, R)(R \in 1-1 \supset \alpha \upharpoonleft R,\ R \upharpoonright \beta,\ \alpha \dashv R \vdash \beta \in 1-1)$

COROLÁRIO 6: $\vdash (R, S)(R, S \in 1-1 \supset R/S \in 1-1)$

COROLÁRIO 7: $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in 1-1 \equiv \breve{\mathbf{R}} \in 1-1)$

COROLÁRIO 8: $\vdash I \in 1-1$

COROLÁRIO 9: $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in 1-1 \equiv \mathrm{RUSC}(\mathbf{R}) \in 1-1)$

TEOREMA II.5.20: I. $\vdash (R, x)(R \in 1-1\ \&\ x \in \mathrm{Arg}(R) \supset \breve{R}(R(x)) = x)$

II. $\vdash (R, y)(R \in 1-1\ \&\ y \in \mathrm{Val}(R) \supset R(\breve{R}(y)) = y)$

TEOREMA II.5.21: $\vdash (R, S)(R, S \in \mathrm{Funct}\ \&\ \mathrm{Arg}(R) \cap \mathrm{Arg}(S) = \Lambda \supset R \cup S \in \mathrm{Funct})$

DEMONSTRAÇÃO:

$R, S \in \mathrm{Funct},\ \mathrm{Arg}(R) \cap \mathrm{Arg}(S) = \Lambda,\quad x(R \cup S)y\ \&$
$\&\ x(R \cup S)z \vdash (xRy\ \&\ xRz) \vee (xRy\ \&\ xSz) \vee (xSy\ \&\ xRz) \vee (xSy\ \&\ xSz)$

a) $xRy\ \&\ xRz \vdash y = z$

b) $xRy\ \&\ xSy \vdash x \in \mathrm{Arg}(R)\ \&\ x \in \mathrm{Arg}(S)$
$\vdash x \in \Lambda$
$\vdash y = z$

c) $xSy\ \&\ xRz \vdash x \in \mathrm{Arg}(R)\ \&\ x \in \mathrm{Arg}(S)$
$\vdash x \in \Lambda$
$\vdash y = z$

d) $xSy\ \&\ xSz \vdash y = z$

logo, $R \cup S \in \mathrm{Funct}$

COROLÁRIO 1: $\vdash (R, S)(\breve{R}, \breve{S} \in \mathrm{Funct}\ \&\ \mathrm{Val}(R) \cap \mathrm{Val}(S) = \Lambda \supset \mathrm{Cnv}(R \cup S \in \mathrm{Funct})$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema II.4.16, $\mathrm{Val}(R) = \mathrm{Arg}(\breve{R})$. Logo, basta fazer essa substituição no Teorema II.5.21.

COROLÁRIO 2: $\vdash (R, S)(R, S \in 1-1\ \&\ \mathrm{Arg}(R) \cap \mathrm{Arg}(S) =$
$= \Lambda\ \&\ \mathrm{Val}(R) \cap \mathrm{Val}(S) = \Lambda \supset R \cup S \in 1-1)$

TEOREMA II.5.22: $\vdash (\alpha, R)(R \in \mathrm{Funct} \supset (\breve{R}/R)\text{"}\alpha = \alpha \cap \mathrm{Val}(R))$

COROLÁRIO 1: $\vdash (\alpha, R)(R \in \mathrm{Funct} \supset R\text{"}(\breve{R}\text{"}\alpha) = \alpha \cap \mathrm{Val}(R))$

COROLÁRIO 2: $\vdash (\alpha, \beta, R)(R \in \mathrm{Funct}\ \&\ \breve{R}\text{"}\alpha = \breve{R}\text{"}\beta \supset \alpha \cap \mathrm{Val}(R) = \beta \cap \mathrm{Val}(R))$

COROLÁRIO 3: $\vdash (\alpha,\beta,R)(R \in 1-1 \ \&\ R''\alpha = R''\beta \supset \alpha \cap \mathrm{Arg}(R) = \beta \cap \mathrm{Arg}(R))$

DEFINIÇÃO: Seja A um termo, que não contém outras variáveis livres além de x. Então A é uma *função do valor de* x.

Utilizamos a seguinte notação:

$$\lambda x(A) =_{\mathrm{df}} \hat{x}\hat{y}(y = A)$$

onde y não ocorre em A.

$\lambda x(A)$ é estratificável se, e somente se, $x = A$ é estratificável e, nesse caso, o seu tipo é uma unidade maior que o de x (ou de A)

TEOREMA II.5.23: *Se* $x = A$ *é estratificável, então:*

I. $\vdash (x,y)(x(\lambda x(A))y \equiv y = A)$

II. $\vdash \lambda x(A) \in \mathrm{Funct}$

III. $\vdash (x)(x(\lambda x(A))A)$

IV. $\vdash \mathrm{Arg}(\lambda x(A)) = \mathrm{V}$

V. $\vdash (x)((\lambda x(A))(x) = A)$

VI. $\vdash (w)((\lambda x(A))(w) = \{Sub\ em\ A : x\ por\ w\})$

desde que essa substituição não cause confusão de variável.

DEMONSTRAÇÃO:

IV. $\vdash (x)(x \in \mathrm{V})$

$\vdash (x)(x \in \mathrm{Arg}(\lambda x(A)))$

$\vdash \mathrm{V} \subseteq \mathrm{Arg}(\lambda x(A))$ (pelo ítem III)

mas, $\mathrm{Arg}(\lambda x(A)) \subseteq \mathrm{V}$

logo, $\mathrm{V} = \mathrm{Arg}(\lambda x(A))$

TEOREMA II.5.24: *Se* x *é a variável que ocorre livre em* A *e* α *não ocorre em* A *e* $x = A$ *é estratificável, então*

$$\vdash (\alpha)((\lambda x(A))''\alpha = \{A / x \in \alpha\})$$

TEOREMA II.5.25: $\vdash (R)(R \in \mathrm{Funct} \supset \mathrm{Arg}(R) \upharpoonleft (\lambda x(R(x))) = R)$

TEOREMA II.5.26: $\vdash (\alpha,\beta,R)(\beta = \mathrm{Clos}(\alpha, xRz) \ \&\ R \in \mathrm{Funct} \supset (x)(x \in \beta \cap$
$\cap \mathrm{Arg}(R) \supset R(x) \in \beta))$

TEOREMA II.5.27: *Se* $x = A$ é estratificável e z não ocorre livre em A, então $\vdash (\alpha,\beta)(\beta = \mathrm{Clos}(\alpha, x(\lambda x(A))z) \supset (x)(x \in \beta \supset A \in \beta))$

DEFINIÇÃO: $\lambda xy(A) =_{\mathrm{df}} \{\langle x,y,z\rangle / z = A \ \&\ x = x \ \&\ y = y\}$

Visto isso, temos o seguinte teorema.

TEOREMA II.5.28: *Se* $x = y = A$ *é estratificável, então:*

I. $\vdash (x,y,z)(\langle x,y,z\rangle(\lambda xy(A))z \equiv z = A)$

II. $\vdash (x,y,u,v)(\langle x,y\rangle(\lambda xy(A))u \;\&\; \langle x,y\rangle(\lambda xy(A))v \supset u = v)$

III. $\vdash \lambda xy(A) \in$ Funct

IV. $\vdash (x,y)(\langle x,y\rangle(\lambda xy(A))A)$

V. $\vdash \mathrm{Arg}(\lambda xy(A)) = \mathbf{V} \times \mathbf{V}$

VI. $\vdash (x,y)((\lambda xy(A))(x,y) = A)$

VII. $\vdash (u,v)((\lambda xy(A))(u,v) = \{$*Sub em* $A{:}x$ *por* u, y *por* $v\})$ *desde que essa substituição não cause confusão de variável.*

Certos resultados importantes desta secção encontram-se mencionados em Rosser [19] como exercícios, como por exemplo, exercícios X.5.8 e X.5.12, da página 329.

Provemos o exercício X.5.12:

a) $\vdash \Lambda \in$ Funct

Devemos provar que:

$\langle x,y\rangle \in \Lambda \;\&\; \langle x,z\rangle \in \Lambda \vdash y = z$

mas, $\langle x,y\rangle \in \Lambda \;\&\; \langle x,z\rangle \in \Lambda \vdash \langle x,y\rangle \in \Lambda$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash y = z$

logo, $\vdash \Lambda \in$ Funct

b) $\vdash \Lambda \in 1 - 1$

Precisamos provar que $\breve{\Lambda} \in$ Funct

$\langle x,y\rangle \in \breve{\Lambda} \;\&\; \langle x,z\rangle \in \breve{\Lambda} \vdash \langle y,x\rangle \in \Lambda \;\&\; \langle z,x\rangle \in \Lambda$

$\vdash t \in \Lambda$

$\vdash y = z$

logo, $\vdash \breve{\Lambda} \in$ Funct

donde, $\vdash \Lambda \in 1 - 1$

II.6. CONJUNTOS ORDENADOS

Seja α um conjunto. Ele é *ordenado* se existir uma relação de ordem R, tal que para x e y, elementos distintos de α, ocorre xRy, mas não ocorre yRx.

No que segue, manteremos as abreviações usadas em Rosser [19].

DEFINIÇÃO: *Relação Reflexiva*

$$\text{Ref} =_{df} \hat{\mathbf{R}}(x)(x \in \text{AV}(\mathbf{R}) \supset x \,\mathbf{R}\, x)$$

Ref é estratificável e como não tem variáveis livres pode-lhe ser associado qualquer tipo.

TEOREMA II.6.1:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Ref} \equiv R \in \text{Rel} \;\&\; (x)(x \in \text{AV}(R) \supset xRx))$

II. $\vdash \text{Ref} \subseteq \text{Rel}$

III. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Ref} \equiv (x)(x \in \text{AV}(\mathbf{R}) \supset x\,\mathbf{R}\,x))$

IV. $\vdash (R)(R \in \text{Ref} \supset \text{Arg}(R) = \text{Val}(R) = \text{AV}(R))$

V. $\vdash (\beta, R)(R \in \text{Ref} \supset \beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Ref})$

VI. $\vdash (R)(R \in \text{Ref} \supset \breve{R} \in \text{Ref})$

VII. $\vdash (\beta, R)(R \in \text{Ref} \supset \text{Arg}(\beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta) = \text{Val}(\beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta) =$

$$= \text{AV}(\beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta) = \beta \cap \text{AV}(R))$$

DEFINIÇÃO: *Relação Transitiva*

$$\text{Trans} =_{df} \hat{\mathbf{R}}(x,y,z)(x\,\mathbf{R}\,y \;\&\; y\,\mathbf{R}\,z \supset x\,\mathbf{R}\,z)$$

Trans é estratificável e pode lhe ser associado qualquer tipo, uma vez que não contém variáveis livres.

TEOREMA II.6.2:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Trans} \equiv R \in \text{Rel} \;\&\; (x,y,z)(xRy \;\&\; yRz \supset xRz))$

II. $\vdash \text{Trans} \subseteq \text{Rel}$

III. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Trans} \equiv \mathbf{R}/\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R})$

IV. $\vdash (\alpha, \beta, R)(R \in \text{Trans} \supset \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Trans})$

V. $\vdash (R)(R \in \text{Trans} \supset \breve{R} \in \text{Trans})$

DEFINIÇÃO: Um conjunto ordenado é *quasi-ordenado* se a sua relação de ordem é reflexiva e transitiva.

Assim temos:

$$\text{Qord} =_{df} \text{Ref} \cap \text{Trans}$$

TEOREMA II.6.3:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Qord} \equiv R \in \text{Ref} \;\&\; R \in \text{Trans})$

II. $\vdash \text{Qord} \subseteq \text{Rel}$

III. $\vdash (\beta,R)(R \in \text{Qord} \supset \beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Qord})$

IV. $\vdash (R)(R \in \text{Qord} \supset \breve{R} \in \text{Qord})$

DEFINIÇÃO: *Relação Anti-simétrica*

$$\text{Antisym} =_{df} \hat{\mathrm{R}}(x,y)(x\,\mathrm{R}\,y \;\&\; y\,\mathrm{R}\,x \supset x = y)$$

Antisym é estratificável e, como não contém variáveis livres, pode lhe ser associado qualquer tipo.

Demonstraremos, agora, um lema que será necessário para as demonstra — ções seguintes.

LEMA II.1. $\vdash (x,y)(y\bar{I}x \equiv y \neq x)$

DEMONSTRAÇÃO:

a) $y\bar{I}x \,,\; y \neq x \vdash y \neq x$

$y\bar{I}x \,,\; y = x \vdash y\bar{I}x \;\&\; yIx$

$\vdash \langle y,x \rangle \in I \cap \bar{I}$

$\vdash \langle y,x \rangle \in \Lambda$

$\vdash y \neq x$

logo, $y\bar{I}x \vdash y \neq x$

b) $y \neq x \,,\; \langle y,x \rangle \in \bar{I} \vdash y\bar{I}x$

$y \neq x \,,\; \langle y,x \rangle \in I \vdash y = x$

$\vdash y = x \;\&\; y \neq x$

$\vdash z \in \Lambda$

$\vdash \langle y,x \rangle \in \bar{I}$

$\vdash y\bar{I}x$

logo, $y \neq x \vdash y\bar{I}x$

TEOREMA II.6.4.:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Antisym} \equiv R \in \text{Rel} \ \& \ (x,y)(xRy \ \& \ yRx \supset x = y))$

II. $\vdash \text{Antisym} \subseteq \text{Rel}$

III. $\vdash (\alpha,\beta,R)(R \in \text{Antisym} \supset \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Antisym})$

IV. $\vdash (R)(R \in \text{Antisym} \ \supset \breve{R} \in \text{Antisym})$

V. $\vdash (R,x,y)(R \in \text{Antisym} \ \& \ x(R - I)y \supset \langle y,x \rangle \in \overline{R})$

VI. $\vdash (R,x,y,z)(R \in \text{Antisym} \ \& \ xRy \ \& \ y(R - I)z \supset x \neq z)$

VII. $\vdash (R,x,y,z)(R \in \text{Antisym} \ \& \ x(R - I)y \ \& \ yRz \supset x \neq z)$

DEMONSTRAÇÃO:

V. $R \in \text{Antisym},\ x(R \cap \overline{I})y,\ y\overline{R}x \ \vdash \ \langle y,x \rangle \in \overline{R}$

$$
\begin{array}{lll}
R \in \text{Antisym},\ x(R \cap \overline{I})y,\ yRx & \vdash & xRy \ \& \ x\overline{I}y \\
 & \vdash & xRy \ \& \ yRx \\
 & \vdash & x = y \\
 & \vdash & xIy \ \& \ x\overline{I}y \\
 & \vdash & \langle x,y \rangle \in I \cap \overline{I} \\
 & \vdash & \langle x,y \rangle \in \Lambda \\
 & \vdash & \langle y,x \rangle \in \overline{R}
\end{array}
$$

3533

logo, $R \in \text{Antisym} \ \& \ x(R - I)y \ \vdash \ \langle y,x \rangle \in \overline{R}$

VI. $R \in \text{Antisym},\ xRy \ \& \ y(R \cap \overline{I})z,\ x \neq z \ \vdash \ x \neq z$

$$
\begin{array}{lll}
R \in \text{Antisym},\ xRy \ \& \ y(R \cap \overline{I})z,\ x = z & \vdash & xRy \ \& \ yRz \\
 & \vdash & x = y \\
 & \vdash & y = z \\
 & \vdash & yIz \\
 & \vdash & \langle y,z \rangle \in I \cap \overline{I} \\
 & \vdash & \langle y,z \rangle \in \Lambda \\
 & \vdash & x \neq z
\end{array}
$$

logo, $R \in \text{Antisym} \ \& \ xRy \ \& \ y(R - I)z \ \vdash \ x \neq z$

DEFINIÇÃO: *Relação de Ordem Parcial*

$\text{Pord} =_{df} \text{Ref} \cap \text{Trans} \cap \text{Antisym}$

TEOREMA II.6.5:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Pord} \equiv R \in \text{Ref} \;\&\; R \in \text{Trans} \;\&\; R \in \text{Antisym})$

II. $\vdash \text{Pord} = \text{Qord} \cap \text{Antisym}$

III. $\vdash \text{Pord} \subseteq \text{Rel}$

IV. $\vdash (\beta,R)(R \in \text{Pord} \supset \beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Pord})$

V. $\vdash (R)(R \in \text{Pord} \supset \breve{R} \in \text{Pord})$

VI. $\vdash (R,x,y,z)(R \in \text{Pord} \;\&\; xRy \;\&\; y(R - I)z \supset x(R - I)z)$

VII. $\vdash (R,x,y,z)(R \in \text{Pord} \;\&\; x(R - I)y \;\&\; yRz \supset x(R - I)z)$

VIII. $\vdash (R,x,y,z)(R \in \text{Pord} \;\&\; x(R - I)y \;\&\; y(R - I)z \supset x(R - I)z)$

DEMONSTRAÇÃO:

VI. $R \in \text{Pord},\ xRy,\ y(R \cap \overline{I})z \vdash xRy \;\&\; yRz \;\&\; R \in \text{Trans}$

$\vdash xRz$

$\vdash R \in \text{Antisym} \;\&\; xRy \;\&\; y(R \cap \overline{I})z$

$\vdash x \neq z$ (pelo Teorema II.6.4, ítem VI)

$\vdash x = z \;\&\; x \neq z$

$\vdash y \in \Lambda$ (pelo Lema I.4.3, ítem II).

$\vdash \langle x,z \rangle \in \overline{I}$

$\vdash \langle x,z \rangle \in R \cap \overline{I}$

$\vdash x(R - I)z$

logo, $R \in \text{Pord} \;\&\; xRy \;\&\; y(R - I)z \vdash x(R - I)z$

VII. Demonstração análoga à do ítem VI, usando o ítem VII do Teorema II.6.4.

VIII. Demonstração imediata, a partir dos ítens VI e VII.

DEFINIÇÃO:

1) *ínfimo*

$x \text{ least}_R\ \beta =_{df} x \in \beta \cap \text{AV}(R) \;\&\; (y)(y \in \beta \cap \text{AV}(R) \supset xRy)$

2) *mínimo*

$x \text{ min}_R\ \beta =_{df} x \in \beta \cap \text{AV}(R) \;\&\; (y)(y \in \beta \cap \text{AV}(R) \supset \langle y,x \rangle \in \overline{(R - I)})$

3) *Supremo:* x least$_{\breve{R}}$ β

4) *Máximo:* x min$_{\breve{R}}$ β

onde y é uma variável que não ocorre em x, R ou β. Para a estratificação de qualquer uma dessas quatro fórmulas, os tipos de R e β devem ser uma unidade maior que o tipo de x.

TEOREMA II.6.6:

I. $\vdash (\beta, R, x)(R \in$ Antisym & x least$_R$ $\beta \supset x$ min$_R$ $\beta)$

II. $\vdash (\beta, R, x)(R \in$ Antisym & x greatest$_R$ $\beta \supset x$ max$_R$ $\beta)$

DEMONSTRAÇÃO:

I. $R \in$ Antisym, x least$_R$ $\beta \vdash x \in \beta \cap$ AV(R)

$R \in$ Antisym, x least$_R$ β, $y\overline{(R \cap \overline{I})}x \vdash y\overline{(R \cap \overline{I})}x$

$R \in$ Antisym, x least$_R$ β, $y(R \cap \overline{I})x \vdash yRx$

$\vdash xRy$

$\vdash x = y$

$\vdash y = x$

$\vdash yIx$ & $y\overline{I}x$

$\vdash \langle y, x \rangle \in I \cap \overline{I}$

$\vdash \langle y, x \rangle \in \Lambda$

$\vdash y\overline{(R \cap \overline{I})}x$

logo,

$R \in$ Antisym & x least$_R$ $\beta \vdash (y)(y \in \beta \cap$ AV$(R)) \supset y\overline{(R \cap \overline{I})}x$

donde,

$R \in$ Antisym & x least$_R$ $\beta \vdash x$ min$_R$ β

II. Demonstração análoga à do ítem I utilizando $\breve{R}$ em lugar de R e o Teorema II.6.4, ítem IV, para $\breve{R} \in$ Antisym.

TEOREMA II.6.7:

I. $\vdash (\beta, R, x, y)(R \in$ Antisym & x least$_R$ β & y least$_R$ $\beta \supset x = y)$

II. $\vdash (\beta, R, x, y)(R \in$ Antisym & x greatest$_R$ β & y greatest$_R$ $\beta \supset x = y)$

TEOREMA II.6.8: $\vdash (\beta, \gamma, R, S, x)(R \in$ Ref & $S = \gamma \upharpoonleft R \upharpoonright \gamma \supset$

$\supset (x$ least$_R(\beta \cap \gamma) \equiv x$ least$_S$ $\beta))$

DEFINIÇÃO: *Relação Conexa.*

Connex $=_{df}$ $\hat{\mathbf{R}}(x,y)(x,y \in \mathrm{AV}(\mathbf{R}) \supset x\,\mathbf{R}\,y \vee y\,\mathbf{R}\,x)$

Connex é estratificável e como não possui variáveis livres pode-lhe ser associado qualquer tipo.

TEOREMA II.6.9:

I. $\vdash (R)(R \in \mathrm{Connex} \equiv R \in \mathrm{Rel}\ \&\ (x,y)(x,y \in \mathrm{AV}(R) \supset xRy \vee yRx))$

II. $\vdash \mathrm{Connex} \subseteq \mathrm{Rel}$

III. $\vdash (\beta,R)(R \in \mathrm{Connex} \supset \beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \mathrm{Connex})$

IV. $\vdash (R)(R \in \mathrm{Connex} \supset \breve{R} \in \mathrm{Connex})$

V. $\vdash \mathrm{Connex} \subseteq \mathrm{Ref}$

TEOREMA II.6.10:

I. $\vdash (\beta,R,x)(R \in \mathrm{Antisym} \cap \mathrm{Connex} \supset (x\ \mathrm{least}_R\ \beta \equiv x\ \mathrm{min}_R\ \beta))$

II. $\vdash (\beta,R,x)(R \in \mathrm{Antisym} \cap \mathrm{Connex} \supset (x\ \mathrm{greatest}_R\ \beta \equiv x\ \mathrm{max}_R\ \beta))$

DEMONSTRAÇÃO:

I. a) $x\ \mathrm{least}_R\ \beta \supset x\ \mathrm{min}_R\ \beta$ (pelo Teorema II.6.6, ítem I)

b) provemos que $x\ \mathrm{min}_R\ \beta \supset x\ \mathrm{least}_R\ \beta$

$R \in \mathrm{Antisym} \cap \mathrm{Connex},\ x\ \mathrm{min}_R\ \beta,\ y \in \beta \cap \mathrm{AV}(R) \vdash y(\overline{R \cap \overline{I}})x$

$\vdash y\overline{R}x \vee yIx$

$\vdash xRy \vee yRx$

$\vdash (y\overline{R}x \vee yIx)\ \&\ (xRy \vee yRx)$

$\vdash (y\overline{R}x\ \&\ xRy) \vee (y\overline{R}x\ \&\ yRx) \vee$
$\vee (yIx\ \&\ xRy) \vee (yIx\ \&\ yRx)$

1) $y\overline{R}x\ \&\ xRy \vdash xRy$

2) $y\overline{R}x\ \&\ yRx \vdash \langle y,x \rangle \in R \cap \overline{R}$

$\vdash \langle y,x \rangle \in \Lambda$

$\vdash \langle x,y \rangle \in R$

$\vdash xRy$

3) $yIx\ \&\ xRy \vdash xRy$

4) $yIx\ \&\ yRx \vdash x = y$

$\vdash xRy$

logo,

$R \in \text{Antisym} \cap \text{Connex},\ x\ \text{min}_R\ \beta \vdash y \in \beta \cap \text{AV}(R) \supset xRy$

$R \in \text{Antisym} \cap \text{Connex},\ x\ \text{min}_R\ \beta \vdash x \in \beta \cap \text{AV}(R)$

$R \in \text{Antisym} \cap \text{Connex} \quad \vdash x\ \text{min}_R\ \beta \supset x\ \text{least}_R\ \beta$

II. demonstração análoga à do ítem I, trocando R por $\breve{R}$.

DEFINIÇÃO: *Relação de Ordem Simples*

$\text{Sord} =_{df} \text{Ref} \cap \text{Trans} \cap \text{Antisym} \cap \text{Connex}$

TEOREMA II.6.11:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Sord} \equiv R \in \text{Ref}\ \&\ R \in \text{Trans}\ \&\ R \in \text{Antisym}\ \&\ R \in \text{Connex})$

II. $\vdash \text{Sord} = \text{Pord} \cap \text{Connex}$

III. $\vdash \text{Sord} \subseteq \text{Rel}$

IV. $\vdash (\beta, R)(R \in \text{Sord} \supset \beta \dashv R \vdash \beta \in \text{Sord})$

V. $\vdash (R)(R \in \text{Sord} \supset \breve{R} \in \text{Sord})$

Seja α um conjunto simplesmente ordenado. Então para todo elemento x de α, podemos definir o *segmento de α determinado por x*.

DEFINIÇÃO: $\text{seq}_x R =_{df} (\hat{y}(y(R - I)x)) \dashv R \vdash (\hat{y}(y(R - I)x))$

onde y é uma variável que não ocorre em R ou x.

Para estratificação, R e $\text{seg}_x R$ devem ter tipo uma unidade maior que o tipo de x.

TEOREMA II.6.12:

I. $\vdash (R,x,y,z)(y(\text{seq}_x R)z \equiv y(R - I)x\ \&\ yRz\ \&\ z(R - I)x)$

II. $\vdash (R,x,y,z)(R \in \text{Trans}\ \&\ R \in \text{Antisym} \supset (y(\text{seq}_x R)z \equiv yRz\ \&\ z(R - I)x))$

III. $\vdash (R,x)(R \in \text{Ref} \supset \text{AV}(\text{seq}_x R) = \hat{y}(y(R - I)x))$

DEMONSTRAÇÃO:

II. pelo ítem I temos:

$\vdash y(\text{seg}_x R)z \equiv z(R \cap \overline{I})x\ \&\ yRz\ \&\ z(R \cap \overline{I})x$

então, basta provar que

$(yRz\ \&\ z(R \cap \overline{I})x) \equiv (y(R \cap \overline{I})x\ \&\ yRz\ \&\ z(R \cap \overline{I})x)$

para tanto, devemos provar que

$yRz \ \& \ z(R \cap \overline{I})x \supset y(R \cap \overline{I})x$

nas condições do teorema temos:

$yRz \ \& \ z(R \cap \overline{I})x \vdash yRz \ \& \ zRx \ \& \ z\overline{I}x$

$\vdash yRx$ (pelo fato de R ser transitiva)

mas, se $xRz \ \& \ z(R \cap \overline{I})x$, temos

a) $y\overline{I}x \vdash yRx \ \& \ y\overline{I}x$

$\vdash y(R \cap \overline{I})x$

b) $yIx \vdash y = x$

$\vdash xRz \ \& \ zRx$

$\vdash x = z$ (pelo fato de R ser antisimétrica)

$\vdash x \neq z$ (de $z\overline{I}x$)

$\vdash x \neq x$

$\vdash y \in \Lambda$

$\vdash y\overline{I}x$

$\vdash y(R \cap \overline{I})x$

logo, $xRz \ \& \ z(R \cap \overline{I})x \vdash y(R \cap \overline{I})x$

TEOREMA II.6.13: $\vdash (R,x,y)(R \in \text{Trans} \ \& \ R \in \text{Antisym} \ \&$
$\& \ y(R - I)x \supset \text{seg}_y(\text{seg}_x R) = \text{seg}_y R)$

DEMONSTRAÇÃO: levando-se em conta o Lema II.1, a demonstração segue os passos de Rosser.

COROLÁRIO: $\vdash (R,S,x,y)(R \in \text{Pord} \ \& \ S = \text{seg}_x R \ \& \ y \in \text{Arg}(S) \supset \text{seg}_y S = \text{seg}_y(R)$

DEFINIÇÃO: *Relação de Boa Ordem*

$\text{Word} =_{df} \hat{R}(R \in \text{Sord} \ \& \ (\beta)(\beta \cap AV(R) \neq \Lambda \supset (Ey)(y \in \text{min}_R \ \beta)))$

Word é estratificável e como não possui variáveis livres pode-lhe ser associado qualquer tipo.

TEOREMA II.6.14:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Word} \equiv R \in \text{Sord} \ \& \ (\beta)(\beta \cap AV(R) \neq \Lambda \supset (Ey)(y \ \text{min}_R \ \beta)))$

II. $\vdash (R)(R \in \text{Word} \equiv R \in \text{Sord} \ \& \ (\beta)(\beta \cap AV(R) \neq \Lambda \supset (Ey)(y \ \text{least}_R \ \beta)))$

III. $\vdash (R)(R \in \text{Word} \equiv R \in \text{Sord} \;\&\; (\beta)(\beta \cap \text{AV}(R) \neq \Lambda \supset (E_1 y)(y \text{ least}_R\, \beta)))$

IV. $\vdash (\gamma, R)(R \in \text{Word} \supset \gamma \upharpoonleft R \upharpoonright \gamma \in \text{Word})$

V. $\vdash (R, x)(R \in \text{Word} \supset \text{seg}_x R \in \text{Word})$

DEFINIÇÃO: *Reticulado* $=_{df} \hat{R}(R \in \text{Pord} \;\&\; (y,z)(y,z \in \text{AV}(R) \supset (Ex)(yRx \;\&\; zRx \;\&$
$\& \; (w)(yRw \;\&\; zRw \;\&\; xRw)) \;\&\; (Ex)(xRy \;\&\; xRx \;\&\; (w)(wRy \;\&\; wRz \;\&\; wRx)))$

TEOREMA II.6.15:

I. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Ref} \equiv \text{RUSC}(\mathbf{R}) \in \text{Ref})$

II. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Trans} \equiv \text{RUSC}(\mathbf{R}) \in \text{Trans})$

III. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Antisym} \equiv \text{RUSC}(\mathbf{R}) \in \text{Antisym})$

IV. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Connex} \equiv \text{RUSC}(\mathbf{R}) \in \text{Connex})$

V. $\vdash (\mathbf{R})(\mathbf{R} \in \text{Word} \equiv \text{RUSC}(\mathbf{R}) \in \text{Word})$

VI. $\vdash (\beta, R, x)(x \text{ least}_R\, \beta \equiv \{x\} \text{ least}_{\text{RUSC}(R)}\, \text{USC}(\beta))$

VII. $\vdash (R, x)(\text{RUSC}(\text{seg}_x R) = \text{seg}_{\{x\}}\, \text{RUSC}(R))$

II.7. RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA.

DEFINIÇÃO: *Relação Simétrica*

$\text{Sym} =_{df} \hat{\mathbf{R}}(x,y)(x\,\mathbf{R}\,y \supset y\,\mathbf{R}\,x)$

Sym é estratificável e como não possui variáveis livres pode-lhe ser associado qualquer tipo.

TEOREMA II.7.1:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Sym} \equiv R \in \text{Rel} \;\&\; (x,y)(xRy \supset yRx))$

II. $\vdash \text{Sym} \subseteq \text{Rel}$

III. $\vdash (\beta, R)(R \in \text{Sym} \supset \beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Sym})$

IV. $\vdash (R)(R \in \text{Sym} \supset \breve{R} \in \text{Sym})$

DEFINIÇÃO: *Relação de Equivalência*

$\text{Equiv} =_{df} \text{Ref} \cap \text{Sym} \cap \text{Trans}$

TEOREMA II.7.2:

I. $\vdash (R)(R \in \text{Equiv} \equiv R \in \text{Ref} \;\&\; R \in \text{Sym} \;\&\; R \in \text{Trans})$

II. $\vdash (\beta,R)(R \in \text{Equiv} \supset \beta \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \in \text{Equiv})$

III. $\vdash (R)(R \in \text{Equiv} \supset \breve{R} \in \text{Equiv})$

IV. $\vdash (R,x,y)(R \in \text{Equiv} \;\&\; xRy \supset (z)(xRz \equiv yRz))$

DEFINIÇÃO: *Classes de Equivalência de R.*

$\text{EqC}(R) =_{df} \hat{\alpha}(\text{E}x)(x \in \text{AV}(R) \;\&\; \alpha = R''\{x\})$

onde α e x são variáveis que não ocorrem em R.

$\text{EqC}(R)$ é estratificável se, e somente se, R for estratificável e, nesse caso, terá tipo uma unidade maior que o de R.

TEOREMA II.7.3: $\vdash (\alpha,R)(\alpha \in \text{EqC}(R) \equiv (\text{E}x)(x \in \text{AV}(R) \;\&\; \alpha = R''\{x\}))$

TEOREMA II.7.4: $\vdash (R)(R \in \text{Equiv} \supset (x,y)(xRy \equiv x,y \in \text{AV}(R) \;\&\; R''\{x\} = R''\{y\}))$

TEOREMA II.7.5: $\vdash (\alpha,R)(R \in \text{Equiv} \;\&\; \alpha \in \text{EqC}(R) \supset (x)(x \in \alpha \equiv \alpha = R''\{x\}))$

TEOREMA II.7.6: $\vdash (\alpha,\beta,R)(R \in \text{Equiv} \;\&\; \alpha,\beta \in \text{EqC}(R) \;\&\; \alpha \cap \beta \neq \Lambda \supset \alpha = \beta)$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $R \in \text{Equiv}$ e $\alpha,\beta \in \text{EqC}(R)$ e $\alpha \cap \beta \neq \Lambda$. Como $\alpha \cap \beta \neq \Lambda$, então $(\text{E}x)(x \in \alpha \cap \beta)$; logo $x \in \alpha$ e $x \in \beta$.
Donde, pelo Teorema II.7.5, $\alpha = R''\{x\}$ e $\beta = R''\{x\}$. Segue-se disso que $\alpha = \beta$.

TEOREMA II.7.7: $\vdash (R,x)(R \in \text{Equiv} \;\&\; x \in \text{AV}(R) \supset (\text{E}_1\alpha)(x \in \alpha \;\&\; \alpha \in \text{EqC}(R)))$

TEOREMA II.7.8: $\vdash (\alpha,R)(R \in \text{Equiv} \;\&\; \alpha \in \text{EqC}(R) \supset \alpha \neq \Lambda)$

DEMONSTRAÇÃO:

$R \in \text{Equiv},\ \alpha \in \text{EqC}(R),\ \alpha \neq \Lambda \ \vdash \alpha \neq \Lambda$

$R \in \text{Equiv},\ \alpha \in \text{EqC}(R),\ \alpha = \Lambda \ \vdash R''\{x\} = \Lambda$

mas, $R \in \text{Ref} \vdash xRx$, logo, $x \in R''\{x\}$

donde, $\vdash x \in \Lambda$. Disso obtemos $\vdash \alpha \neq \Lambda$

Assim, $R \in \text{Equiv} \;\&\; \alpha \in \text{EqC}(R) \vdash \alpha \neq \Lambda$

CAPÍTULO III

RESULTADOS SOBRE O CONJUNTO DE RUSSELL

Pela formulação do esquema da separação em $\mathbf{NF}_\omega$, a fórmula $x \notin x$ determina uma classe, assim a chamada *classe de Russell*.

Seja $R = \hat{x}(x \notin x)$.

A seguir abordaremos alguns resultados sobre a classe de Russell em $\mathbf{NF}_\omega$. A maior parte destes resultados são mencionados, sem demonstração,em [7].

TEOREMA III.1: $\vdash \exists R$.

DEMONSTRAÇÃO: A fórmula que define essa classe não é estratificável e não contém o símbolo $\supset$. Logo, pelo esquema da separação, essa classe existe em $\mathbf{NF}_\omega$.

TEOREMA III.2: $\vdash R \in R \ \& \ R \notin R$

DEMONSTRAÇÃO: $R \in R \vdash R \in R \ \& \ R \notin R$

$R \notin R \vdash R \notin R \ \& \ R \in R$

logo, $\vdash R \in R \ \& \ R \notin R$

TEOREMA III.3: $\vdash (x)(x \subseteq R \supset x \in R)$.

DEMONSTRAÇÃO: $x \subseteq R,\ x \notin x \vdash x \in R$

$x \subseteq R,\ x \in x \vdash x \in R$

logo, $x \subseteq R \vdash x \in R$

donde, $\vdash (x)(x \subseteq R \supset x \in R)$.

TEOREMA III.4: $\vdash (x)(x \in R \supset \{x\} \in R)$

DEMONSTRAÇÃO: $x \in R,\ \{x\} \in \{x\} \vdash \{x\} = x$

$\vdash \{x\} \in R$

$x \in R,\ \{x\} \notin \{x\} \vdash \{x\} \in R$

logo, $x \in R \vdash \{x\} \in R$

donde, $\vdash x \in R \supset \{x\} \in R$

TEOREMA III.5: $\vdash (x,y)(x,y \in R \supset \{x,y\} \in R)$

DEMONSTRAÇÃO:

$x,y \in R,\ \{x,y\} \in \{x,y\} \vdash \{x,y\} = x \vee \{x,y\} = y$

$\vdash \{x,y\} \in R$

$x,y \in R,\ \{x,y\} \notin \{x,y\} \vdash \{x,y\} \in R$

logo, $x,y \in R \vdash \{x,y\} \in R$

donde, $\vdash x,y \in R \supset \{x,y\} \in R$.

TEOREMA III.6: $\vdash R \subseteq \bigcup R$

DEMONSTRAÇÃO: $x \in R \vdash R \in R \ \& \ x \in R$

$\vdash (E\alpha)(\alpha \in R \ \& \ x \in \alpha)$

$\vdash x \in \bigcup R$

logo, $\vdash (x)(x \in R \supset x \in \bigcup R)$

donde, $\vdash R \subseteq \bigcup R$

TEOREMA III.7: $\vdash \Lambda \in R$

DEMONSTRAÇÃO:

$\Lambda \in \Lambda \vdash \Lambda \in R$ (pelo Lema I.4.2, ítem II)

$\Lambda \notin \Lambda \vdash \Lambda \in R$ (pela definição de R)

logo, $\vdash \Lambda \in R$

TEOREMA III.8: $\vdash R \neq \Lambda$

DEMONSTRAÇÃO:

$R \neq \Lambda \vdash R \neq \Lambda$

$R = \Lambda \vdash \Lambda \in \Lambda$ (pelo Teorema III.7)

$\vdash \Lambda \neq R$ (pelo Lema I.4.2, ítem V).

logo, $\vdash R \neq \Lambda$

TEOREMA III.9: $\vdash \{R\} \in R$

DEMONSTRAÇÃO: Como $R \in R$, então $\{R\} \subseteq R$.

Logo, pelo Teorema III.3 $\{R\} \in R$.

DEFINIÇÃO: x é *indivíduo de Quine em* $\overline{R}$ se, e somente se, $x = \{x\} \ \& \ x \in \overline{R}$.

Utilizaremos, como na introdução, a notação **IQ** para a classe dos indivíduos de Quine em $\overline{R}$. Colocaremos apenas um postulado para indivíduos de Quine em $\overline{R}$, que é o seguinte:

A1: $(Ex,y)(x,y \in \mathbf{IQ} \ \& \ x \neq y)$

TEOREMA III.10: $\vdash \exists \mathbf{IQ}$

DEMONSTRAÇÃO: **IQ** denota $\hat{x}(x = \{x\} \ \& \ x \in \overline{R})$ e, apesar dessa fórmula não ser estratificável, ela não contém o símbolo $\supset$. Logo, existe essa classe.

De agora em diante, a e b denotarão indivíduos de Quine.

TEOREMA III.11: $\vdash (x,y)(x \neq y \supset \{x,y\} \in R)$.

DEMONSTRAÇÃO:

$x \neq y,\ \{x,y\} \notin \{x,y\} \vdash \{x,y\} \in R$

$x \neq y,\ \{x,y\} \in \{x,y\} \vdash \{x,y\} = x \vee \{x,y\} = y$

$\vdash x = y$

$\vdash x = y \ \&\ x \neq y$

$\vdash (\mathrm{E}x)(x \in \Lambda)$ (pelo Lema I.4.3, ítem II).

$\vdash \{x,y\} \in R$

logo, $\vdash x \neq y \supset \{x,y\} \in R$.

COROLÁRIO: $\vdash a \neq b \supset \{a,b\} \in R$

TEOREMA III.12: $\vdash x \in \mathbf{IQ} \supset x \in \overline{R}$

DEMONSTRAÇÃO: Imediata, a partir da definição de indivíduos de Quine em $\overline{R}$.

TEOREMA III.13: $\vdash \{a,b\} \in \overline{\mathrm{SC}(R)}$

DEMONSTRAÇÃO:

$\{a,b\} \in \overline{\mathrm{SC}(R)} \vdash \{a,b\} \in \overline{\mathrm{SC}(R)}$

$\{a,b\} \in \mathrm{SC}(R) \vdash \{a,b\} \subseteq R$

$\vdash \{a\} \subseteq R$

$\vdash a \in R \ \&\ a \in \overline{R}$

$\vdash a \in \Lambda$

$\vdash \{a,b\} \in \overline{\mathrm{SC}(R)}$

logo, $\vdash \{a,b\} \in \overline{\mathrm{SC}(R)}$

TEOREMA III.14: $\vdash R \neq \mathrm{SC}(R)$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam a e b dois indivíduos de Quine distintos, então, pelo corolário do Teorema III.11 e pelo Teorema III.3, temos:

$\{a,b\} \in R \ \&\ \{a,b\} \in \overline{\mathrm{SC}(R)}$

logo, $\vdash (\mathrm{E}y)(y \in R \ \&\ y \in \overline{\mathrm{SC}(R)})$

donde obtemos $\vdash R \neq \mathrm{SC}(R)$

TEOREMA III.15: $\vdash R \subset \bigcup R$

DEMONSTRAÇÃO:

a) $\vdash R \subseteq \bigcup R$ (pelo Teorema III.6)

b) $\vdash R \neq \bigcup R$

Pelo axioma A1, existem dois indivíduos de Quine a e b, tais que $a \neq b$. Então, usando o corolário do Teorema III.11, temos:

$\vdash \alpha \in \{a,b\}$ & $\{a,b\} \in R$

$\vdash (E\alpha)(\alpha \in R$ & $\alpha \in \alpha)$

$\vdash \alpha \in \bigcup R$ & $\alpha \in \overline{R}$

$\vdash R \neq \bigcup R$

LEMA III.1: $\vdash (x)(Ey)(x \neq y)$

DEMONSTRAÇÃO: $\vdash (x)(x \neq \overline{x})$, pois $x \neq \overline{\overline{x}} \vdash x \neq \overline{x}$.
Por outro lado, se $x = \overline{x}$, então $(Ey)(y \in \Lambda)$,
donde, $x \neq \overline{x}$. Assim sendo, $\vdash x \neq \overline{x}$.
Então, $\vdash (Ey)(x \neq y)$, donde, $\vdash (x)(Ey)(x \neq y)$

TEOREMA III.16: $\vdash (x)(x \in \bigcup R)$

DEMONSTRAÇÃO:

Pelo Lema III.1, $\vdash (Ey)(y \neq x)$, logo, $\vdash y \neq x$.

Pelo Teorema III.11:	$\vdash \{x,y\} \in R$
donde,	$\vdash \{x,y\} \in R$ & $x \in \{x,y\}$
logo,	$\vdash (E\alpha)(\alpha \in R$ & $x \in \alpha)$
portanto,	$\vdash x \in \bigcup R$
e,	$\vdash (x)(x \in \bigcup R)$

COROLÁRIO: $\vdash \bigcup R = \mathbf{V}$

DEMONSTRAÇÃO: como $(x)(x \in \bigcup R)$ e $(x)(x \in \mathbf{V})$, então $\bigcup R = \mathbf{V}$

TEOREMA III.17: $\vdash R \neq \mathbf{V}$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema III.14,
$\vdash R \neq \bigcup R$, mas, $\vdash \bigcup R = \mathbf{V}$, logo, $\vdash R \neq \mathbf{V}$

TEOREMA III.18: $\vdash (n)(\mathrm{SC}^n(R) \in R)$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema III.17, temos
$\vdash \mathrm{SC}^n(R) \subseteq R$, logo, pelo Teorema III.3,

$\vdash SC^n(R) \in R$, donde, $\vdash (n)(SC^n(R) \in R)$.

TEOREMA III.19: $\vdash (n)(SC^{n+1}(R) \subseteq SC^n(R))$

DEMONSTRAÇÃO: a demonstração será feita por indução, o que é possível pois a fórmula é estratificável. Pelo Teorema III.3, temos que $\alpha \subseteq R \supset \alpha \in R$ e, então, obtemos:

(1) $\vdash SC(R) \subseteq R$

Suponhamos, agora

(2) $SC^n(R) \subseteq SC^{n-1}(R)$

Então,

$$\begin{aligned} \alpha \in SC^{n+1}(R) &\vdash \alpha \subseteq SC^n(R) \\ &\vdash SC^n(R) \subseteq SC^{n-1}(R) \quad \text{(por (2))} \\ &\vdash \alpha \subseteq SC^{n-1}(R) \\ &\vdash \alpha \in SC^n(R) \end{aligned}$$

logo, $\vdash SC^{n+1}(R) \subseteq SC^n(R)$

Daí, temos:

(3) $\vdash (SC^n(R) \subseteq SC^{n-1}(R)) \supset (SC^{n+1}(R) \subseteq SC^n(R))$

De (1) e (3), pelo princípio de indução, decorre que

$$(n)(SC^{n+1}(R) \subseteq SC^n(R))$$

O Teorema III.19 nos fornece a seguinte relação entre as subclasses de R e o próprio R.

$$\ldots SC^{n+1}(R) \subseteq SC^n(R) \subseteq \ldots \subseteq SC^2(R) \subseteq SC(R) \subseteq R.$$

TEOREMA III.20: $\vdash R \in \overline{SC^2(R)}$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned} R \in SC^2(R) &\vdash R \subseteq SC(R) \;\&\; SC(R) \subseteq R \\ &\vdash R = SC(R) \;\&\; R \neq SC(R) \quad \text{(usando o Teorema III.14)} \\ &\vdash t \in \Lambda \quad \text{(pelo Lema I.4.3, ítem II)} \\ &\vdash R \in \overline{SC^2(R)} \quad \text{(pelo Lema I.4.2, ítem III).} \end{aligned}$$

$R \in \overline{SC^2(R)} \vdash R \in \overline{SC^2(R)}$

logo, $\vdash R \in \overline{SC^2(R)}$

TEOREMA III.21: $\vdash (n)(\mathrm{SC}^{n}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+2}(R)})$

DEMONSTRAÇÃO: Por indução.

Pelo Teorema III.20, temos:

(1) $R \in \overline{\mathrm{SC}^{2}(R)}$

Suponhamos agora que

(2) $\mathrm{SC}^{n-1}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+1}(R)}$

Então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SC}^{n}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+2}(R)} &\vdash \mathrm{SC}^{n}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+2}(R)} \\
\mathrm{SC}^{n}(R) \in \mathrm{SC}^{n+2}(R) &\vdash \mathrm{SC}^{n}(R) \subseteq \mathrm{SC}^{n+1}(R) \\
&\vdash \mathrm{SC}^{n-1}(R) \subseteq \mathrm{SC}^{n-1}(R) \\
&\vdash \mathrm{SC}^{n-1}(R) \in \mathrm{SC}^{n}(R) \\
&\vdash \mathrm{SC}^{n-1}(R) \in \mathrm{SC}^{n+1}(R) \\
&\vdash \mathrm{SC}^{n-1}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+1}(R)} \text{ (por (2))} \\
&\vdash x \in \Lambda \text{ (pelo Lema I.4.3, ítem II)} \\
&\vdash \mathrm{SC}^{n}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+2}(R)} \text{ (pelo Lema I.4.2, ítem III)}
\end{aligned}$$

logo, $\vdash \mathrm{SC}^{n}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+2}(R)}$

Então,

(3) $(\mathrm{SC}^{n-1}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+1}(R)}) \supset (\mathrm{SC}^{n}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+2}(R)})$

De (1) e (3), pelo princípio de indução, temos

$\vdash (n)(\mathrm{SC}^{n}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+2}(R)})$

TEOREMA III.22: $\vdash (n)(\mathrm{SC}^{n}(R) \neq \mathrm{SC}^{n-1}(R))$

DEMONSTRAÇÃO:

Se $n = 0$, o resultado já está provado no Teorema III.14.

Se $n \neq 0$, então pelos Teoremas III.21 e III.18, temos

$\vdash \mathrm{SC}^{n-1}(R) \in \overline{\mathrm{SC}^{n+1}(R)}$ & $\mathrm{SC}^{n-1}(R) \in \mathrm{SC}^{n}(R)$

logo,

$\vdash (\mathrm{E}y)(y \in \overline{\mathrm{SC}^{n+1}(R)}$ & $y \in \mathrm{SC}^{n}(R))$

e, consequentemente,

$\vdash \overline{SC^{n+1}(R)} \neq SC^{n}(R)$

TEOREMA III.23: $\vdash (n)(SC^{n+1}(R) \subset SC^{n}(R))$

DEMONSTRAÇÃO:

Se $n = 0$, pelo Teorema III.14, $\vdash SC(R) \neq R$

Se $n \neq 0$, pelos Teoremas III.18 e III.22, temos,

$\vdash SC^{n+1}(R) \subseteq SC^{n}(R)$ & $SC^{n+1}(R) \neq SC^{n}(R)$

logo, $\vdash SC^{n+1}(R) \subset SC^{n}(R)$

Como consequência do Teorema III.22, temos:

$\ldots SC^{n+1}(R) \subset SC^{n}(R) \subset \ldots \subset SC^{2}(R) \subset SC(R) \subset R$.

BIBLIOGRAFIA

E.H. ALVES

[1] - LÓGICA E INCONSISTÊNCIA, UM ESTUDO DOS CÁLCULOS C_n, $1 \leqslant n \leqslant \omega$ (Tese de Mestrado), Instituto de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, 1976.

A.I. ARRUDA

[2] - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS SISTEMAS FORMAIS NF_n (Tese), Universidade Federal do Paraná, Brasil, 1964.

[3] - *Sur les systèmes formels* NF_i *de da Costa*, C.R. Acad. Sc. Paris **270 A** (1970), pág. 1081 - 1084.

[4] - *Sur le système* NF_ω, C.R. Acad. Sc. Paris **270 A** (1970), pág. 1137 - 1139.

[5] - *La mathématique classique dans les systèmes* NF_n, C.R. Acad. Sc. Paris **272 A** (1971), pág. 1152 - 1153.

[6] - *Le schéma de la séparation dans les systèmes* NF_n, C.R. Acad. Sc. Paris **280 A** (1975), pág. 1341-1344.

[7] - A *Survey of Paraconsistent Logic* em MATHEMATICAL LOGIC IN LATIN AMERICA (editado por A.I. Arruda, R. Chuaqui e N.C. A. da Costa), North - Holland (1980), pág. 1 - 41.

[8] - *The Paradox of Russell in the Systems* NF_n, a ser publicado em Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic (editado por A. I. Arruda, N.C.A. da Costa e A.M. Sette), a ser publicado em 1980.

A.I. ARRUDA e N.C.A. DA COSTA

[9] - *On the relevant systems* **P** *and* **P*** *and some related systems*, a ser publicado.

N.C.A. DA COSTA

[10] - SISTEMAS FORMAIS INCONSISTENTES (Tese), Universidade Federal do Paraná, 1963.

[11] - *Sur un système inconsistant de théorie des ensembles*, C.R. Acad. Sc. Paris **258** (1964), pág. 3144-3147.

[12] - *Remarques sur le système* **NF_1**, C.R. Acad. Sc. Paris **272 A** (1971), pág. 1149 - 1151.

[13] - *On the theory of Inconsistent Formal Systems*, Notas de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, 1972.

[14] - *On the theory of inconsistent formal systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic **XI** (1974), pág. 497 - 510.

[15] - *Sur les systèmes formels* C_i, C_i^*, $C_i^=$, D_i e NF_i, C.R. Acad. Sc. Paris **260** (1975), pág. 5427 - 5430.

N.C.A. DA COSTA e E.H. ALVES

[16] - *Une sémantique pour le calcul* C_1, C.R. Acad. Sc. Paris **283 A** (1976), pág 729 - 731.

[17] - A *semantical analysis of the calculi* C_n, Notre Dame Journal of Formal Logic **XVIII**, nº 4 (1977), pág. 621 - 630.

S.C. KLEENE

[18] - INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS, D. Van Nostrand (1952).

J.B. ROSSER

[19] - LOGIC FOR MATHEMATICIANS, McGraw-Hill, New York (1953).