DISTRIBUIÇÃO EXATA DO CRITÉRIO PARA TESTAR A IGUALDADE DE VÁRIAS DISTRIBUIÇÕES NORMAIS MULTIVARIADAS.

CLAUDETTE MARIA MEDEIROS VENDRAMINI.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: PROF.DR.PUSHPA NARAYAN RATHIE

CAMPINAS

Estado de São Paulo - Brasil

1979

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PREÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: Claudette Maria Medeiros Vendramini
Nº de Identificação:
Endereço para Correspondência: Rua Napoleão Reinaldi, 55 - Itatiba - SP
Curso: Estatística
Nome do Orientador: Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie
Título da Dissertação ou Tese: Distribuição Exata do Critério para Testar a Igualdade de Várias Distribuições Normais Multivariadas.
Data proposta para a Defesa: 26 de novembro de 1979

(O Aluno deverá assinar um dos 3 ítens abaixo)

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir desta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

/ /
Data

assinatura do aluno

2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

/ /
Data

assinatura do aluno

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consulte, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o fornecimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a interessados.

07/11/79
Data

assinatura do aluno

De acordo

à *Maira*

ao *Marco*

e

à minha mãe

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

Apresentaremos em nosso trabalho, a distribuição exata do critério sugerido por Bartlet (1937), para testar a hipótese de que várias distribuições normais multivariadas e independentes, são idênticas. O critério utilizado é uma modificação do critério de razão de verossimilhança apresentado por Wilks (1932).

O problema de testar a hipótese acima mencionada, pode ser encontrado detalhadamente no livro de Anderson (1958), que discute os testes de razão de verossimilhança ou adaptações destes, apresentando os momentos do critério e expansões assintóticas da distribuição deste critério. O nosso propósito neste trabalho é encontrar a distribuição exata do mesmo.

Além do livro de Anderson (1958), podem ser encontradas pesquisas mais recentes sobre Análise Multivariada, como nos livros de Johnson e Kotz (1972), Rao (1972) e Subrahmaniam (1973).

Iniciaremos o nosso trabalho, apresentando a função densidade de Probabilidade e função distribuição acumulada do critério sugerido por Bartlet (1937), em termos das funções G-Meijer e H, e posteriormente em forma computável.

Para a obtenção da função densidade de probabilidade do critério nos utilizaremos da Transformada Inversa de Mellin, e para a resolução das integrais que aparecem nestas transformadas aplicaremos a teoria dos resíduos.

Os resultados serão obtidos com a ajuda de algumas propriedades das funções gama, psi e zeta generalizada.

As definições e resultados necessários da teoria de Variáveis Complexas, não serão apresentados aqui, pelo fato de que esta teoria poderá ser encontrada exaustivamente em muitos livros de Variáveis Complexas, dentre os quais nos utilizamos do Kaplan (1915)

Consideraremos que as amostras de distribuições normais multivariadas são de mesmo tamanho, e o caso em que o número de variáveis é maior ou igual ao número de populações normais.

O caso particular em que o número de variáveis é menor do que o número de populações, foi desenvolvido por Mathai (1970).

Para o caso univariado, Jain, Rathie e Shah (1975), determinaram a distribuição exata do critério de razão de verossimilhança, para testar a igualdade de várias distribuições normais univariadas, dada por Neyman e Pearson (1931).

1 - TESTE DE HIPÓTESE E MOMENTOS.

Consideremos um conjunto de q populações normais p -variadas e independentes, com matriz de covariância $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_q$ e vetores médias $\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2, \ldots, \underline{\mu}_q$.

Seja $\underline{x}_g^i$ $(i = 1,2,\ldots,N_g)$, $g = 1,2,\ldots,q$ uma observação da g-ésima população normal $N(\underline{\mu}_g, \Sigma_g)$.

Desejamos testar a hipótese de que estas q populações normais p-variadas e independentes, são idênticas, isto é, testar a hipótese:

(1.1) $$H: \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \ldots = \underline{\mu}_q \, , \, \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_q$$

Bartlet (1937), sugeriu o critério V, para testar esta hipótese, o qual é uma modificação do critério de razão de verossimilhança para testar H, dado por Wilks (1932). Para maiores detalhes sobre este critério ver Anderson (1958), p. 247-251.

O critério V é dado por:

(1.2) $$V = \frac{\prod_{g=1}^{q} |A_g|^{\frac{1}{2}n_g}}{|B|^{\frac{1}{2}n}}$$

Onde:

(1.3) $n_g = N_g - 1$; $N_1, N_2, \ldots, N_q$ são os tamanhos das amostras.

(1.4) $$n = \sum_{g=1}^{q} n_g = N - q$$

(1.5) $$N = \sum_{g=1}^{q} N_g$$

(1.6) $$B = \sum_{g=1}^{q} \sum_{i=1}^{N_g} (\underline{x}_g^i - \overline{\underline{x}})(\underline{x}_g^i - \underline{x})'$$

(1.7) $B \sim W_p\ (\Sigma\ ,\ n)$: B tem distribuição de Wishart p-variada central com parâmetros n e Σ

(1.8) $$A_g = \sum_{i=1}^{N_g} (\underline{x}_g^i - \overline{\underline{x}}_g)(\underline{x}_g^i - \overline{\underline{x}}_g)' \quad ; \ g = 1,2,\ldots,q$$

(1.9) $$\overline{\underline{x}}_g = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \overline{\underline{x}}_g^i$$

(1.10) $$\overline{\underline{x}} = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^{q} \sum_{i=1}^{N_g} \overline{\underline{x}}_g^i$$

(1.11) $\underline{x}_g^i$ = é o vetor $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{pi} \end{pmatrix}$ para a g-ésima amostra e x_{ji} =

= valor observado da variável j sobre o i-ésimo elemento da g-ésima amostra.

Wilks (1932) demonstrou pela primeira vez, o teorema que dá o h-ésimo momento do critério de razão de verossimilhança, sob a hipótese de que H é verdadeira, e através do qual podemos achar o h-ésimo momento de V, como: {Anderson (1958), p.253 (5)}

$$(1.12)\quad E(V^h) = \prod_{i=1}^{p}\left\{\left[\prod_{q=1}^{q}\frac{\Gamma\{(n_g+h\ n_g\ +1-i)/2\}}{\Gamma\{(n_g+1-i)2\}}\right]\cdot\frac{\Gamma\{(n+q-i)/2\}}{\Gamma\{(n+hn+q-i)/2\}}\right\}$$

2 - A DENSIDADE DE $V^{2/n'}$, EM TERMOS DE FUNÇÃO G-MEIJER E FUNÇÃO-H.

Acharemos a função densidade de $V^{2/n'}$, em lugar da função densidade de V, pelo fato de que a primeira é obtida mais facilmente, e através de uma simples transformação podemos obter a segunda.

Considerando o caso especial em que:

$$(2.1) \qquad n_1 = n_2 = \ldots = n_g = n' \Rightarrow \sum_{g=1}^{q} n_g = q \cdot n' = n$$

o h-ésimo momento de V, dado em (1.12) fica igual a:

$$(2.2) \qquad E(V^h) = \prod_{i=1}^{p} \left\{ \left[\frac{\Gamma^q \{(n'+hn'+1-i)/2\}}{\Gamma^q \{(n'+1-i)/2\}} \right] \cdot \frac{\Gamma\{(n'q+q-i)/2\}}{\Gamma\{(n'q+hn'q+q-i)/2\}} \right\}$$

$$0 < V < 1$$

Reescrevendo a expressão (2.2) de outra maneira, ou seja $E(V^{2/n'})^h$, e substituindo $V^{2/n'}$ por W, temos:

$$(2.3) \qquad E(W^h) = C_{p,q} \cdot \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma^q \{(n'+1-i)/2+h\}}{\Gamma\{(n'q+q-i)/2+hq\}} \right]$$

$$0 < w < 1$$

Onde:

$$(2.4) \qquad C_{p,q} = \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma_q \{(n'q+q-i)/2\}}{\Gamma_q \{(n'+1-i)/2\}} \right]$$

Para obter a função densidade de W, denotada por f(w), utilizaremos a definição de transformada inversa de Mellin, a qual pode ser encontrada no livro de Erdilyi, A. et al (1953),e é dada como:

$$(2.5) \qquad f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_L E(W^h)\, w^{-h-1} dh$$

onde L é um contorno propriamente escolhido e $i = \sqrt{-1}$.

Tomando a Transformada inversa de Mellin de (2.3), temos:

$$(2.6) \quad f(w) = C_{p,q}\, w^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_L \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma_q \{(n'+1-i)/2+h\}}{\Gamma_q \{(n'q+q-i)/2+hq\}} \right] w^{-h} dh$$

Utilizando a definição da função-H, encontrada em Erdilyi (1953), Fox (1961), Braaksma (1964), dada por:

$$(2.7) \qquad H^{m,n}_{p,q} \left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_1,\alpha_1), \ldots, (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1), \ldots, (b_q,\beta_q) \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j - \alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j - \beta_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j + \alpha_j s)} z^{-s} ds$$

Onde $i = \sqrt{-1}$, p,q,m,n são inteiros tais que $1 \le m \le q$, $0 \le n \le p$, $\alpha_j (j=1,\ldots,p)$, $\beta_j (j=1,\ldots,q)$ são números positivos e $a_j (j=1,\ldots,p)$, $b_j (j=1,\ldots,q)$ são números complexos, tais que,

(2.8) $\alpha_j (b_h + \nu) \neq \beta_h (a_j - 1 - \lambda)$, para $\nu, \lambda = 0,1,\ldots$; $h=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$.

L é um contorno separando os pontos:

(2.9) $-s = (b_j + \nu)/\beta_j$, $j=1,\ldots,m$; $\nu = 0,1,\ldots$

e

$-s = (a_j - 1 - \nu)/\alpha_j$, $j=1,\ldots,n$; $\nu = 0,1,\ldots$

Uma condição de existência da função-H, é que ela existe para cada $z \neq 0$ se $\mu > 0$ onde,

(2.10) $$\mu = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$$

e para $0 < |z| < \beta^{-1}$, se $\mu = 0$ onde

$$(2.11) \qquad \beta = \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{-\beta_j}$$

[Mathai/Saxena (1973), p. 181]

Uma discussão mais detalhada de (2.7) pode ser encontrada em Braaksma(1964).

Temos:

$$(2.12) \qquad f(w) = C_{p,q}\, w^{-1}\, H^{pq,o}_{p,pq}\left[w \left| \begin{array}{ll} (\frac{n'q+q-i}{2},q)\,; & i=1,2,\ldots,p \\ (\frac{n'+1-i}{2},1)\,; & i=1,2,\ldots,p; \\ & \text{repetido} \\ & \text{q vezes.} \end{array} \right. \right]$$

$$0 < w < 1$$

Aplicando a fórmula de multiplicação de Gauss-Legrende, que é dada por:

$$(2.13) \qquad \Gamma(mz) = (2\pi)^{\frac{1-m}{2}}\, m^{mz-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(z + j/m)$$

em (2.3) temos:

$$(2.14)\quad E\,(W^h) = C'_{p,q} \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma^q\{(n'+1-i)/2+h\}\quad (q^q)^{-h}}{\prod_{j=0}^{q-1} \Gamma\,\{(n'+1-i/q)/2+j/q+h\}} \right]$$

$$0 < w < 1$$

onde

$$(2.15)\quad C'_{p,q} = \frac{C_{p,q}}{\prod_{i=1}^{p} (2\pi)^{\frac{1-q}{2}}\; q^{\frac{n'q+q-i}{2} - \frac{1}{2}}}$$

Podemos reescrever $f(w)$ dado em (2.6), utilizando o resultado (2.14), obtendo:

$$(2.16)\quad f(w) = C'_{p,q}\; w^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma^q\;\{(n'+1-i)/2+h\}}{\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=0}^{q-1} \Gamma\;\{(n'+1-i/q)/2+j/q+h\}} \cdot$$

$$\cdot\,(wq^q)^{-h}\; dh$$

Esta densidade pode ser escrita em termos de função-G quando temos $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_q = 1$, na função-H, ou seja:

$$(2.17)\quad H^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,1),\ldots,(a_p,1)\\(b_1,1),\ldots,(b_q,1)\end{matrix}\right] = G^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=i}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=i}^{n}\Gamma^{(1-a_j-s)}}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)}\, z^{-s}\, ds.$$

Portanto:

$$(2.18)\quad f(w) = C'_{p,q}\, w^{-1}\, G^{pq,o}_{pq,pq}\left[w_q^{\,q}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{n'}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2j-i}{2q}\ ;i=1,=,\ldots,p;\ j=0,1,\ldots,q-1\\ \frac{n'+1-i}{2};\ i=1,2,\ldots,p;\text{repetido } q \text{ vezes.}\end{matrix}\right]$$

CASO ESPECIAL.

Em geral a função-G não pode ser escrita em termos de funções especiais elementares, mas para alguns valores de p e q isto é possível, por exemplo; para *p=1 e p=2* a função densidade $f(w)$ se reduz a:

$$(2.19)\quad f(w) = C'_{1,2}\, w^{-1}\, G^{2,0}_{2,2}\left[4w\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{n'}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{n'}{2}+\frac{3}{4}\\ \frac{n'}{2},\ \frac{n'}{2}\end{matrix}\right]$$

ou ainda: [ver Mathai/Saxena (1973), p.64]

(2.20) $$f(w) = C'_{1,2} \quad (4w)^{n'/2} \quad {}_2F_1 \left(\frac{3}{4} , \frac{1}{4} ; 1 ; 1-4w \right) \cdot w^{-1}$$

onde

(2.21) $$C'_{1,2} = \frac{(2\pi)^{1/2} \cdot \Gamma(n'+1/2)}{2^{n'} \quad \Gamma^2 \quad (n'/2)}$$

e

(2.22) $${}_2F_1 \ (a,b;c;z) \ = \sum_{n=0}^{\infty} \ \frac{(a)n \ \ (b)n}{(c)_n} \ z^n,$$ é função hipergeo-

métrica de Gauss.

A série acima é convergente para $|z| < 1$; $c \neq 0,-1,-2,...,$ para os outros casos, ver o livro de Luke (1969).

(2.23) $$(a)n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \ \ldots \ (a+n-1)$$

CASO ESPECIAL:

Para p=2 e q=2 a função densidade (2.18) se reduz a:

$$(2.24)\qquad f(w) = C'_{2,2}\, w^{-1}\, G^{4,0}_{4,4}\left[4w \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{n'+1/2}{2}, \frac{n'+3/2}{2}, \frac{n'}{2}, \frac{n'+1}{2} \\ \frac{n'-1}{2}, \frac{n'}{2}, \frac{n'-1}{2}, \frac{n'}{2} \end{matrix}\right]$$

Utilizando a fórmula de multiplicação de funções gamas, temos:

ver Mathai/Saxena (1973), propriedade (1.2.4),p.6

$$(2.25)\qquad f(w) = C'_{2,2}\, w^{-1}\, 2^{5/2}\, G^{2,0}_{2,2}\left[2w^{1/2} \,\middle|\, \begin{matrix} n'+1/2,\ n' \\ n'-1,\ n'-1 \end{matrix}\right]$$

$$= C'_{2,2}\, w^{-1}\, \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\, (2\, w^{1/2})^{n'-1}\, (1-2\, w^{1/2})^{3/2} \cdot$$

$$\cdot\ {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1-2w^{1/2}\right)$$

Onde:

$$(2.26)\qquad C'_{2,2} = \frac{(2\pi)\, \Gamma(n'+1/2)\, \Gamma(n')}{2^{2n'-1/2}\, \Gamma^2(n'/2)\, \Gamma^2\{(n'-1)/2\}}$$

e

${}_2F_1$ definida em (2.22)

3 - SIMPLIFICAÇÃO DE FUNÇÕES GAMAS EM $E(W^h)$.

Com a finalidade de colocarmos a função f(w) em forma computável, utilizaremos o teorema dos resíduos o qual estabelece que:

"Se f(z) é uma função analítica em C∪R, onde C é uma curva fechada e R a região limitada por C, exceto nos polos a, b,c,... pertencentes a R, que possuem resíduos dados por R_a, R_b, R_c, ... Então:

$$\int_L f(z)\, dz = 2\pi i\ (R_a + R_b + R_c + \dots) \tag{3.1}$$

onde a integral é calculada no sentido anti-horário ao longo de L. Para maiores detalhes ver Kaplan (1915).

De acordo com este teorema e com (2.5), a densidade f(w) é a soma dos resíduos de $E(W^h)\ w^{-h-1}$, nos polos apresentados para o produto de funções gamas. A ordem destes polos varia para diferentes valores de p e q, por esta razão dividimos o nosso problema em quatro casos de acordo com esta variabilidade da ordem dos polos, tal como:

(3.2)
- 1º Caso: p-par e q-par
- 2º Caso: p-ímpar e q-ímpar
- 3º Caso: p-par e q-ímpar
- 4º Caso: p-ímpar e q-par

Consideraremos neste trabalho que $p \geq q$, pois para o caso de $p < q$, que é obtido mais facilmente, foi desenvolvido por Mathai (1970).

Quando $p < q$, isto é, quando temos mais amostras de populações normais do que o número p de variáveis destas, fica fácil estabelecer uma regra geral para a obtenção da ordem dos polos, o que não ocorre quando $p \geq q$.

Devido a isto, foi necessário dividir o problema dentro de cada um dos 4 casos apresentados em (3.2), da seguinte maneira:

(3.3) 1. $q \leq p \leq 2q-1$

2. $2q-1 < p \leq 3q-1$

3. $3q-1 < p \leq 4q-1$

e assim sucessivamente.

E como o desenvolvimento é análogo para todos os subcasos apresentados em (3.3), vamos encontrar a ordem dos polos e posteriormente a função densidade $f(w)$, apenas para o subcaso número 1.

A esperança $E(W^h)$ dada em (2.14) pode ser escrita como:

$$E(W^h)=C'_{p,q} \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma^q\{\alpha+(1-i)/2\} \cdot (q^q)^{-h}}{\prod_{j=0}^{q-1} \Gamma\{\alpha+(q-i+2j)/(2q)\}} \right] \tag{3.4}$$

onde:

$$\alpha = h + \frac{n'}{2} \tag{3.5}$$

e ainda:

$$E(W^h)=C'_{p,q} \cdot (q^q)^{-h} \cdot \frac{\Gamma^q(\alpha)\ \Gamma^q(\alpha-1/2)\ \Gamma^q(\alpha-1) \ldots \Gamma^q\{\alpha-(p-1)/2\}}{\prod_{i=1}^{p} \prod_{j=0}^{q-1} \Gamma\{\alpha+1/2 + (2j-i)/(2q)\}} \tag{3.6}$$

Consideraremos a partir daqui, apenas o produto de gamas da função acima, que denotaremos por:

$$(3.7)\qquad E'(W^h) = \frac{E(W^h)\cdot (q^q)^{-h}}{C'_{p,q}}$$

e

$$(3.8)\qquad \beta(\alpha) = \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=0}^{q-1} \Gamma\{\alpha+1/2+(2j-i)/(2q)\}$$

Obtendo portanto:

$$(3.9)\qquad E'(W^h) = \frac{\Gamma^q(\alpha)\ \Gamma^q(\alpha-1/2)\ \ \Gamma^q(\alpha-1)\ \ldots\ \Gamma^q\{\alpha-(p-1)/2\}}{\beta(\alpha)}$$

Em primeiro lugar estudaremos quais os casos em que aparecem repetições de funções gamas no numerador e denominador de (3.9), e faremos isto através da expressão $(2j-i)/(2q)$ de $\beta(\alpha)$ dado em (3.8).

A expressão $(2j-i)/(2q)$ assume os seguintes valores:

$$(3.10)\qquad \frac{2j-i}{2q} < 1 \quad \text{para} \quad j=0,1,\ldots,q-1\ ;\ i=1,2,\ldots,p$$

ou seja:

$$(3.11)\qquad \frac{2j-i}{2q} = \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{-1}{2},\ -1,\ \frac{-3}{2},\ldots.$$

Para cada um desses valores assumidos, o número de funções gamas que aparecem no denominador $\beta(\alpha)$ de (3.9) é diferente. Os resultados obtidos serão apresentados a seguir, nas tabelas

I, II, III e IV.

Através destas tabelas podemos notar a necessidade de considerarmos os subcasos apresentados em (3.3), para escrevermos a função $E(W^h)$ em forma computável.

Pela fórmula de $E'(W^h)$ apresentada em (3.9), utilizando os resultados das tabelas I, II, III e IV, e considerando $\beta'(\alpha)$ em lugar de $\beta(\alpha)$, tal como segue:

$$(3.12)\qquad \beta'(\alpha) = \prod_{(i,t)\,\varepsilon A} \Gamma\{\alpha+1/2+(2t-i)/(2q)\}$$

e

$$(3.13)\qquad A = \{(i,t)/i=1,2,\ldots,p\ ;\ t=0,1,\ldots,q-1\ ;\ i\neq 2t-q\ ;\ i\neq 2t\ ;\ i\neq 2t+q\}$$

a $E'(W^h)$ será dada por:

1º SUBCASO: *p-par* e *q-par* ; $q \leq p \leq 2q-1$

$$(3.14)\qquad E'(W^h) = \{\Gamma^{q-p/2}(\alpha)\cdot \prod_{j=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}(\alpha-\frac{p-2}{2}+j)\cdot \Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2)\cdot \prod_{j=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}(\alpha-\frac{p-1}{2}+j)\} \;/\; \{\alpha^{q/2-1}(\alpha-1/2)^{p/2}\ \beta'(\alpha)\}$$

2º SUBCASO: *p-ímpar* e *q-ímpar* ; $q \leq p \leq 2q-1$

$$(3.15)\qquad E'(W^h) = \{\Gamma^{q-(p+1)/2}(\alpha)\cdot \prod_{j=0}^{(p-3)/2} \Gamma^{q}(\alpha-\frac{p-1}{2}+j)\cdot \Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha-1/2)\cdot \prod_{j=0}^{(p-5)/2} \Gamma^{q}(\alpha-\frac{p-2}{2}+j)\} \;/\; \{\Gamma^{(q-1)/2}(\alpha-1/2)^{(p-1)/2}\ \beta'(\alpha)\}$$

3º SUBCASO: *p-par* e *q-ímpar* ; $q \leq p \leq 2q-1$

$$(3.16)\quad E'(W^h) = \{\Gamma^{q-p/2}(\alpha)\cdot \prod_{j=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}\left(\alpha-\frac{p-2}{2}+j\right)\cdot \Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2)\cdot \prod_{j=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}\left(\alpha-\frac{p-1}{2}+j\right)\} \,/\, \{\alpha^{(q-1)/2}(\alpha-1/2)^{p/2}\beta'(\alpha)\}$$

4º SUBCASO: *p-ímpar* e *q-par* ; $q \leq p \leq 2q-1$

$$(3.17)\quad E'(W^h) = \{\Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha)\cdot \prod_{j=0}^{(p-3)/2} \Gamma^{q}\left(\alpha-\frac{p-1}{2}+j\right)\cdot \Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha-1/2)\cdot \prod_{j=0}^{(p-5)/2} \Gamma^{q}\left(\alpha-\frac{p-2}{2}+j\right)\} / \{\alpha^{q/2-1}(\alpha-1/2)^{(p-1)/2}\beta'(\alpha)\}$$

TABELA I 1º CASO: *p-par* e *q-par* , $p \geq q$.		
$\frac{2j-i}{2q}$	$\beta(\alpha)$ (gamas que aparecem no denominador)	RESTRIÇÕES
$\frac{1}{2}$	$\Gamma^{q/2\ -1}(\alpha+1) = \alpha^{\frac{q}{2}-1}\ \Gamma^{\frac{q}{2}-1}(\alpha)$	——
0	$\Gamma^{p/2}(\alpha+1/2) = (\alpha-1/2)^{p/2}\ \Gamma^{p/2}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q-1}(\alpha+1/2) = (\alpha-1/2)^{q-1}\ \Gamma^{q-1}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $p > 2q-1$
$-\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{p-q}{2}+1}(\alpha)$ $\Gamma^{q}(\alpha)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $p > 3q-1$
-1	$\Gamma^{o}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{\frac{p-2q}{2}+1}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $2q-1 < p \leq 4q-1$ $p > 4q-1$
$-\frac{3}{2}$	$\Gamma^{o}(\alpha-1)$ $\Gamma^{\frac{p-3q}{2}+1}(\alpha-1)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $3q-1 < p \leq 5q-1$ $p > 5q-1$
-2	$\Gamma^{o}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{\frac{p-4q}{2}+1}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-3/2)$	$q \leq p \leq 4q-1$ $4q-1 < p \leq 6q-1$ $p > 6q-1$

TABELA II

2º CASO: *p-ímpar e q-ímpar, p≥q*

$\frac{2j-i}{2q}$	$\beta(\alpha)$ (gamas que aparecem no denominador)	RESTRIÇÕES
$\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{q-3}{2}+1}(\alpha+1) = \alpha^{\frac{q-3}{2}+1}\,\Gamma^{\frac{q-3}{2}+1}(\alpha)$	——
0	$\Gamma^{\frac{p-1}{2}}(\alpha+1/2) = (\alpha-1/2)^{\frac{p-1}{2}}\,\Gamma^{\frac{p-1}{2}}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q-1}(\alpha+1/2) = (\alpha-1/2)^{q-1}\,\Gamma^{q-1}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $p > 2q-1$
$-\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{p-q}{2}+1}(\alpha)$ $\Gamma^{q}(\alpha)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $p > 3q-1$
-1	$\Gamma^{o}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{\frac{p-2q-1}{2}+1}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $2q-1 < p \leq 4q-1$ $p > 4q-1$
$-\frac{3}{2}$	$\Gamma^{o}(\alpha-1)$ $\Gamma^{\frac{p-3q}{2}+1}(\alpha-1)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $3q-1 < p \leq 5q-1$ $p > 5q-1$
-2	$\Gamma^{o}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{\frac{p-4q-1}{2}+1}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-3/2)$	$q \leq p \leq 4q-1$ $4q-1 < p \leq 6q-1$ $p > 6q-1$

TABELA III

3º CASO: *p-par* e *q-ímpar* , $p \geq q$

$\frac{2j-i}{2q}$	$\beta(\alpha)$ (gamas que aparecem no denominador)	RESTRIÇÕES
$\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{q-3}{2}+1}(\alpha+1) = \alpha^{\frac{q-3}{2}+1}\,\Gamma^{\frac{q-3}{2}+1}(\alpha)$	——
0	$\Gamma^{p/2}(\alpha+1/2)=(\alpha-1/2)^{p/2}\,\Gamma^{p/2}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q-1}(\alpha+1/2)=(\alpha-1/2)^{q-1}\,\Gamma^{q-1}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $p > 2q-1$
$-\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{p-q-1}{2}+1}(\alpha)$ $\Gamma^{q}(\alpha)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $p > 3q-1$
-1	$\Gamma^{o}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{\frac{p-2q}{2}+1}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $2q-1 < p \leq 4q-1$ $p > 4q-1$
$-\frac{3}{2}$	$\Gamma^{o}(\alpha-1)$ $\Gamma^{\frac{p-3q-1}{2}+1}(\alpha-1)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $3q-1 < p \leq 5q-1$ $p > 5q-1$
-2	$\Gamma^{o}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{\frac{p-4q}{2}+1}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-3/2)$	$q \leq p \leq 4q-1$ $4q-1 < p \leq 6q-1$ $p > 6q-1$

T A B E L A IV 4º CASO: *p-ímpar e q-par,* $p \geq q$		
$\frac{2j-i}{2q}$	$\beta(\alpha)$ (gamas que aparecem no denominador)	RESTRIÇÕES
$\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{q-4}{2}+1}(\alpha+1) = \alpha^{\frac{q-4}{2}+1}\,\Gamma^{\frac{q-4}{2}+1}(\alpha)$	———
0	$\Gamma^{\frac{p-1}{2}}(\alpha+1/2) = (\alpha-1/2)^{\frac{p-1}{2}}\,\Gamma^{\frac{p-1}{2}}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q-1}(\alpha+1/2) = (\alpha-1/2)^{q-1}\,\Gamma^{q-1}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $p > 2q-1$
$-\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{p-q-1}{2}+1}(\alpha)$ $\Gamma^{q}(\alpha)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $p > 3q-1$
-1	$\Gamma^{o}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{\frac{p-2q-1}{2}+1}(\alpha-1/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1/2)$	$q \leq p \leq 2q-1$ $2q-1 < p \leq 4q-1$ $p > 4q-1$
$-\frac{3}{2}$	$\Gamma^{o}(\alpha-1)$ $\Gamma^{\frac{p-3q-1}{2}+1}(\alpha-1)$ $\Gamma^{q}(\alpha-1)$	$q \leq p \leq 3q-1$ $3q-1 < p \leq 5q-1$ $p > 5q-1$
-2	$\Gamma^{o}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{\frac{p-4q-1}{2}+1}(\alpha-3/2)$ $\Gamma^{q}(\alpha-3/2)$	$q \leq p \leq 4q-1$ $4q-1 < p \leq 6q-1$ $p > 6q-1$

4 - A FUNÇÃO DENSIDADE f(w) E FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO F(w), EM FORMA COMPUTÁVEL.

De acordo com teorema dos resíduos dado em (3.1), com (3.6), (3.7) e (2.5), a função f(w) pode ser escrita como:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_L E(W^h)\, w^{-h-1} dh$$

ou ainda:

$$f(w) = C'_{p,q}\, w^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L E'(W^h)\,(wq^q)^{-h} dh\right\} \tag{4.1}$$

é a soma dos resíduos de $E(W^h)w^{-h}$ nos polos de $E'(W^h)$, que se apresenta de forma diferente para cada um dos casos apresentados em (3.3), e considerando $q \leq p \leq 2q-1$ conforme (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17).

Estes polos poderão ser encontrados, igualando a zero os seguintes fatores:

$$\prod_{j=0}^{\infty} \{\alpha-(p-1)/2+j\}^{a_j} \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \{\alpha-(p-2)/2+j\}^{b_j} \tag{4.2}$$

Temos portanto dois tipos de polos e resíduos:

os resíduos R_j de $E(W^h)w^{-h}$ nos polos $(\frac{p-1}{2}-j)$ de ordem a_j, e os resíduos K_j de $E(W^h)w^{-h}$ nos polos $(\frac{p-2}{2}-j)$ de ordem b_j.

As ordens dos polos a_j e b_j são dados a seguir, para os diferentes subcasos, como:

1º SUBCASO: *p-par e q-par* ; $q \leq p \leq 2q-1$

$$(4.3) \qquad a_j = \begin{cases} q(j+1) & ; \quad j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2 \\ \frac{q.p}{2} & ; \quad j=\frac{p}{2}-1 \\ \frac{p(q-1)}{2} & ; \quad j \geq \frac{p}{2} \end{cases}$$

$$(4.4) \qquad b_j = \begin{cases} q(j+1) & ; \quad j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2 \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} - \frac{1}{2} & ; \quad j=\frac{p}{2}-1 \\ \frac{p(q-1)}{2} & ; \quad j \geq \frac{p}{2} \end{cases}$$

2º SUBCASO: *p-ímpar e q-ímpar* ; $q \leq p \leq 2q-1$

$$(4.5) \qquad a_j = \begin{cases} q(j+1) & ; \quad j=0,1,\ldots,\frac{p-1}{2}-1 \\ \frac{(q-1)(p+2)}{2} & ; \quad j=\frac{p-1}{2} \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & ; \quad j \geq \frac{p-1}{2}+1 \end{cases}$$

$$(4.6) \qquad b_j = \begin{cases} q(j+1) & ; \quad j=0,1,\ldots,\frac{p-1}{2}-2 \\ \frac{q(p-1)}{2} & ; \quad j=\frac{p-1}{2}-1 \\ \frac{(q-1)(p-1)}{2} & ; \quad j \geq \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

3º SUBCASO: *p-par e q-ímpar ; $q \leq p \leq 2q-1$*

(4.7) $a_j = (a_j$ do 1º subcaso).

$$(4.8) \qquad b_j = \begin{cases} q(j+1) & ; \quad j=0,1,\ldots,\frac{p}{2}-2 \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & ; \quad j=\frac{p}{2}-1 \\ \frac{p(q-1)}{2} & ; \quad j \geq \frac{p}{2} \end{cases}$$

4º SUBCASO: *p-ímpar e q-par ; $q \leq p \leq 2q-1$*

$$(4.9) \qquad a_j = \begin{cases} q(j+1) & ; \quad j=0,1,\ldots,\frac{p-1}{2}-1 \\ \frac{(q-1)(p+2)}{2}+\frac{1}{2} & ; \quad j=\frac{p-1}{2} \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2}+1 & ; \quad j \geq \frac{p-1}{2}+1 \end{cases}$$

(4.10) $b_j = (b_j$ do 2º subcaso)

Através de (4.1), os resíduos R_j de $E(W^h)w^{-h}$ correspondentes aos polos de ordem a_j são dados por:

$$(4.11) \qquad R_j = \frac{1}{(a_j-1)!}\,\frac{\partial^{a_j-1}}{\partial\alpha^{a_j-1}}\left\{(\alpha-\frac{p-1}{2}+j)^{a_j}\cdot E'(W^h)(w^{q^q})^{-h}\right\}$$

quando $\alpha \to (p-1)/2-j$

$$= \frac{(wq^q)^{-h}}{(a_j-1)!} \left\{\frac{\partial}{\partial\alpha} + \left[-\log(wq^q)\right]\right\}^{a_j-1} \cdot \left\{(\alpha - \frac{p-1}{2}+j)^{a_j} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot\ E'(W^h)\right\} \qquad \text{quando } \alpha \to (p-1)/2-j$$

com $\alpha = h + n'/2$

Onde os operadores são definidos como se segue:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha} + a\right\}^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k \frac{\partial^{r-k}}{\partial\alpha^{r-k}} \tag{4.12}$$

Utilizando (4,12) em (4.11), temos:

$$R_j = \frac{(wq^q)^{\frac{n'}{2}+j-\frac{p-1}{2}}}{(a_j-1)!} \sum_{k=0}^{a_j-1} \left[\binom{a_j-1}{k} \{-\log(wq^q)\}^k A_{oj}^{(a_j-1-k)}\right] \tag{4.13}$$

onde:

$$\begin{cases} A_j = (\alpha - \frac{p-1}{2}+j)^{a_j} \quad E'(W^{\alpha-n'/2}) \\ A_j^{(r)} = \frac{\partial^r}{\partial\alpha^r} A_j \end{cases} \tag{4.14}$$

e

$$\begin{cases} A_{oj} \quad \text{denota o valor de } A_j \text{ quando } \alpha = \frac{p-1}{2} - j \\ A_{oj}^{(r)} \quad \text{denota o valor de } A_j^{(r)} \text{quando } \quad \alpha = \frac{p-1}{2} - j \end{cases} \tag{4.15}$$

Do mesmo modo os resíduos K_j de $E(W^h)w^{-h}$ correspondentes aos polos de ordem b_j são dados por:

$$(4.16)\qquad K_j = \frac{1}{(b_j-1)!}\,\frac{\partial^{b_j-1}}{\partial\alpha^{b_j-1}}\left\{\left(\alpha-\frac{p-2}{2}+j\right)^{b_j}\cdot E'(W^{h})(wq^{q})^{-h}\right\}$$

quando $\alpha \to \frac{p-2}{2}-j$

$$= \frac{(wq^{q})^{-h}}{(b_j-1)!}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}+\left[(-\log(wq^{q})\right]\right\}^{b_j-1}\cdot\left\{\left(\alpha-\frac{p-2}{2}+j\right)^{b_j}\cdot E'(W^{h})\right\}$$

quando $\alpha \to \frac{p-2}{2}-j$

com $\alpha = h + n'/2$

Utilizando (4.12) em (4.16) temos:

$$(4.17)\qquad K_j = \frac{(wq^{q})^{\frac{n'}{2}+j-\frac{p-2}{2}}}{(b_j-1)!}\sum_{k=0}^{b_j-1}\left[\binom{b_j-1}{k}\{-\log(wq^{q})\}^{k}\, B_{oj}^{(b_j-1-/k)}\right]$$

onde:

$$(4.18)\quad \begin{cases} B_j = \left(\alpha-\frac{p-2}{2}+j\right)^{b_j}\; E'(W^{\alpha-n'/2}) \\[2ex] B_j^{(r)} = \frac{\partial^{r}}{\partial\alpha^{r}}\, B_j \end{cases}$$

e

$$(4.19)\quad \begin{cases} B_{oj} \text{ denota o valor de } B_j \text{ quando } \alpha = \frac{p-2}{2}-j \\[2ex] B_{oj}^{(r)} \text{ denota o valor de } B_j^{(r)} \text{ quando } \alpha = \frac{p-2}{2}-j \end{cases}$$

Então a função densidade f(w) fica como:

$$(4.20)\qquad f(w) = C'_{p,q}\; w^{-1}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} R_j + \sum_{j=0}^{\infty} K_j\right\}\qquad 0 < w < 1$$

Substituindo (4.13) e (4.17) em (4.20) resulta:

$$(4.21)\qquad f(w)=C'_{p,q}\; w^{\frac{n'}{2}-1}\,(q^q)^{n'/2}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{a_j-1}\left[\binom{a_j-1}{k}\{-\log(wq^q)\}^k A_{oj}^{(a_j-1-k)}\right]\cdot\frac{(wq^q)^{j-\frac{p-1}{2}}}{(a_j-1)!}+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{b_j-1}\left[\binom{b_j-1}{k}\{-\log(wq^q)\}^k B_{oj}^{(b_j-1-k)}\right]\cdot\frac{(wq^q)^{j-\frac{p-2}{2}}}{(b_j-1)!}\right\}$$

para $0 < w < 1$

Com a finalidade de calcularmos $A_{oj}^{(r)}$ e $B_{oj}^{(r)}$ definiremos:

$$(4.22)\qquad C_j=\frac{\partial}{\partial\alpha}\log A_j$$

e

$$(4.23)\qquad D_j=\frac{\partial}{\partial\alpha}\log B_j$$

Então:

$$(4.24)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}A_j=A_j.C_j=A_j^{(1)}$$

$$(4.25)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}B_j=B_j.D_j=B_j^{(1)}$$

e

$$(4.26)\qquad A_j^{(m)}=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{m-1}{r}A_j^{(m-1-r)}\;.\;C_j^{(r)}$$

onde $C_j^{(r)}$ indica a j-ésima derivada de C_j.

Analogamente para $B_j^{(m)}$.

A função f(w) estará completamente determinada, depois de termos encontrado os valores de $A_{oj}^{(a_j-1-k)}$ e $B_{oj}^{(b_j-1-k)}$, e para isto precisamos encontrar os valores de A_{oj}, C_{oj}, $C_{oj}^{(r)}$, B_{oj}, D_{oj} e $D_{oj}^{(r)}$ para cada um dos quatro subcasos apresentados para (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17), o que será feito a seguir:

4.1 - 1º SUBCASO:

a_1) Para j=0,1,...,p/2-2 temos por (4.3) que $a_j=q(j+1)$ e de acordo com (3.14)e(4.14), temos:

$$(4.1.1)\ A_j = \{\alpha-(p-1)/2+j)^{a_j} \cdot \frac{\Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2)\cdot\Gamma^{q(j+1)}\{\alpha-(p-1)/2+j\}\cdot}{(\alpha-1/2)^{p/2}\prod_{i=0}^{j-1}\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}}\cdot$$

$$\frac{\prod_{i=j+1}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}\ \Gamma^{q-p/2}(\alpha)\cdot\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{\alpha^{q/2-1}\cdot\beta'(\alpha)}$$

ou ainda:

$$A_j = \frac{\Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2)\cdot\Gamma^{a_j}\{\alpha-(p-1)/2+j+1\}\cdot\prod_{i=j+1}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}\cdot}{(\alpha-1/2)^{p/2}\prod_{i=0}^{j-1}\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Gamma^{q-p/2}(\alpha)\cdot\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{\alpha^{q/2-1}\cdot\beta'(\alpha)}$$

e

$$(4.1.2)\quad A_{oj}=\frac{\Gamma^{q-p/2}(p/2-j-1)\prod\limits_{i=j+1}^{p/2-2}\Gamma^{q}(i-j)\cdot\Gamma^{q-p/2}\{(p-1)/2-j)\}}{(p/2-j-1)^{p/2}\prod\limits_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}\cdot(p/2-1/2-j)^{q/2-1}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\prod\limits_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}(1/2-j+i)}{\beta'(p/2-1/2-j)}$$

Agora para o cálculo de C_j , precisamos da definição da função-Psi dada a seguir: [ver Erdelyi (1953)]

$$(4.1.3)\quad \Psi(z)=\frac{\partial}{\partial z}\log\Gamma(z) = -\gamma+(z-1)\sum_{s=0}^{\infty}\{(s+1).(z+s)\}^{-1}$$

$$z\neq 0,-1,-2,\ldots \text{ e } \gamma\simeq 0,5772156\ldots$$

$$(4.1.4)\quad C_j=\frac{\partial\log A_j}{\partial\alpha}=\{(q-P/2)\ \Psi(\alpha-1/2)+a_j\cdot\Psi\{\alpha-(p-1)/2+j+1)\}+q\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=j+1}^{p/2-2}\Psi\{\alpha-(p-1)/2+i\}+(q-p/2)\ \Psi(\alpha)+q\cdot\sum_{i=0}^{p/2-2}\Psi\{\alpha-(p-2)/2+i\}-$$

$$\frac{p}{2(\alpha-1/2)}-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{\{\alpha-(p-1)/2+i\}}-(q/2-1)\cdot\frac{1}{\alpha}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\beta'(\alpha)$$

onde:

$$(4.1.5)\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\beta'(\alpha)=\sum_{(i,t)\in A}\Psi(\alpha+1/2+\frac{2t-i}{2q})$$

de acordo com (3.12).

$$(4.1.6)\quad C_{oj} = \Bigg\{ (q-p/2)\ \Psi\{(p-1)/2-1-1/2\} + a_j\ \Psi(1) + q \sum_{i=j+1}^{p/2-2} \Psi(i-j)$$

$$+ (q-p/2).\ \Psi\{(p-1)/2-j\} + q \sum_{i=0}^{p/2-2} \Psi(i-j+1/2) - \frac{p}{(p-2j-2)} -$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(1/2-j+i)} - \sum_{(i,t)\varepsilon A} \Psi(p/2-j+\frac{2t-i}{2q}) \Bigg\}$$

Diferenciando C_j dado em (4.14), r vezes, e utilizando a definição da função-zeta dada como: [ver Titchmarch (1951)]

$$(4.1.7)\quad \zeta(n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (z+r)^{-n} \quad ; \quad R(n) > 1 \quad ; \quad c \neq 0,-1,-2,...$$

ou ainda:

$$(4.1.8)\quad \frac{\partial^k}{\partial z^k} \log\ \Gamma(a+z) = \Psi(a+z) \quad \text{para} \quad k=1$$
$$= (-1)^k\ (k-1)!\ \ \zeta(k,a+z) \quad \text{para}\ k \geq 2.$$

Temos:

$$(4.1.9)\quad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \Bigg\{ (q-p/2).\ \zeta(r+1,\alpha-1/2) + a_j \zeta\{r+1,\alpha-(p-1)/2+j+1\}$$

$$+q \sum_{i=j+1}^{p/2-2} \zeta\{r+1,\alpha-(p-1)/2+i\} + (q-p/2)\ \zeta\ (r+1,\ \alpha)$$

$$+q \sum_{i=0}^{p/2-2} \zeta\{r+1,\ \alpha-(p-2)/2+i\} + \frac{p}{2(\alpha-1/2)^{r+1}}$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{r+1}} + \frac{q/2-1}{\alpha^{r+1}} - \sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta(r+1,\alpha+1/2+\frac{2t-i}{2q}) \Bigg\}$$

$$(4.1.10)\quad C_{oj}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \left\{ (q-p/2)\, \zeta\{r+1,(p-1)/2-j-1/2)\} + a_j \zeta(r+1,1) \right.$$

$$+q \sum_{i=j+1}^{p/2-2} \zeta(r+1,i-j) + (q-p/2)\, \zeta\{r+1,(p-1)/2-j)\}$$

$$+q \sum_{i=0}^{p/2-2} \zeta(r+1,i-j+1/2) + \frac{p}{2(p/2-1-j)^{r+1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{\{\alpha-(p-1)/2+i)\}^{r+1}} + \frac{q/2-1}{\{(p-1)/2-j\}^{r+1}}$$

$$\left. - \sum_{(i,t)\in A} \zeta(r+1,\ p/2-j+\frac{2t-i}{2q}) \right\}$$

Como os elementos A_j, C_j, $C_j^{(r)}$, A_{oj}, C_{oj}, $C_{oj}^{(r)}$, já foram determinados, posso calcular por recorrência, através da igualdade (4.26), os elementos $A_j^{(r)}$ e $A_{oj}^{(r)}$, que são necessários para f(w).

a_2) Para $j=p/2-1$ temos de acordo com (4.3) que $a_j=(q.p)/2$ e utilizando (3.14) e (4.14) chegamos no seguinte resultado:

$$A_j = \{\alpha-(p-1)/2+j)\}^{(qp)/2} \cdot E'(W^{\alpha-n'/2}) = (\alpha-1/2)^{(qp)/2} . E'(W^{\alpha-n'/2})$$

$$= (\alpha-1/2)^{(qp)/2} \frac{\Gamma^{-p/2}(\alpha-1/2)\,\Gamma^{(qp)/2}(\alpha-1/2)\,\Gamma^{q-p/2}(\alpha)}{(\alpha-1/2)^{p/2} \prod_{i=0}^{p/2-2} \{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}\, \alpha^{q/2-1}}$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{\beta'(\alpha)}$$

ou ainda:

$$A_j = \frac{\Gamma^{(qp)/2-p/2}(\alpha+1/2)\ \Gamma^{q-p/2}(\alpha) \prod_{i=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{\prod_{i=0}^{p/2-2} \{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}\ \alpha^{q/2-1}\ \beta'(\alpha)} \tag{4.1.11}$$

Substituindo $j=p/2-1$ em $\alpha=(p-1)/2-j$ temos que $\alpha=1/2$, e:

$$A_{oj} = \frac{\Gamma^{q-1/2}(1/2) \prod_{i=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}(i-p/2+3/2)}{\prod_{i=p/2}^{j-1} (i-p/2+1)^{q(i+1)}\ (1/2)^{q/2-1}\ \beta'(1/2)} \tag{4.1.12}$$

$$C_j = \frac{\partial}{\partial\alpha}\log A_j = \frac{p}{2}(q-1)\,\Psi(\alpha+1/2)+(q-p/2)\,\Psi(\alpha)+q \tag{4.1.13}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{p/2-2} \Psi\{\alpha-(P-2)/2+i\} - \sum_{i=0}^{p/2-2} \frac{q(i+1)}{\{\alpha-(p-1)/2+i\}} - \frac{(q/2-1)}{\alpha}$$

$$- \sum_{(i,t)\,\varepsilon A} \Psi\left(\alpha+1/2+\frac{2t-i}{2q}\right)$$

$$C_{oj} = \frac{p}{2}(q-1)\ \Psi(1)+(q-p/2)\ \Psi(1/2)+q \sum_{i=0}^{p/2-2} \Psi(p/2+3/2+i) \tag{4.1.14}$$

$$- \sum_{i=0}^{p/2-2} \frac{q(i+1)}{(i-p/2+1)} - 2(q/2-1) - \sum_{(i,t)\,\varepsilon A} \Psi\left(1+\frac{2t-i}{2q}\right)$$

$$(4.1.15)\qquad C_j^{(r)}=(-1)^{r+1}\, r!\Big\{p(q-1)/2\,\zeta(r+1,\alpha+1/2)+(q-p/2)\ \zeta(r+1,\alpha)$$

$$+q\sum_{i=0}^{p/2-2}\zeta\{r+1,\alpha-(p-2)/2+i\}+\sum_{i=0}^{p/2-2}\frac{q(i+1)}{\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{r+1}}$$

$$+\frac{q/2-1}{\alpha^{r+1}}-\sum_{(i,t)\in A}\zeta(r+1,\alpha+1/2+\frac{2t-i}{2q})\Big\}$$

$$(4.1.16)\qquad C_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}\, r!\Big\{p(q-1)/2\,\zeta(r+1,1)+(q-p/2)\,\zeta(r+1,1/2)$$

$$+q\sum_{i=0}^{p/2-2}\zeta(r+1,p/2+3/2+i)+\sum_{i=0}^{p/2-2}\frac{q(i+1)}{(i-p/2+1)^{r+1}}$$

$$+\frac{q/2-1}{(1/2)^{r+1}}-\sum_{(i,t)\in A}\zeta(r+1,1+\frac{2t-1}{2q})\Big\}$$

a_3) Para $j\geq p/2$ temos de acordo com (4.3) que $a_j=p(q-1)/2$ e utilizando (3.14) e (4.14) chegamos no seguinte resultado:

$$(4.1.17)\qquad A_j=\frac{\{\alpha-(p-1)/2+j\}^{a_j}\,\Gamma^{p(q-1)/2}(\alpha-1/2)\,\Gamma^{q-p/2}(\alpha)}{(\alpha-1/2)^{p/2}\prod_{i=0}^{p/2-2}\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}\,\alpha^{q/2-1}}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{\beta'(\alpha)}$$

$$A_j = \frac{\Gamma^{p(q-1)/2}\{\alpha-(p-1)/2+j+1\}\,\Gamma^{q-p/2}(\alpha)}{(\alpha-1/2)^{p/2}\prod_{i=p/2-1}^{j-1}\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{p(q-1)/2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{\prod_{i=0}^{p/2-2}\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}\,\alpha^{q/2-1}\,\beta'(\alpha)}$$

$$(4.1.18)\quad A_{oj} = \frac{\Gamma^{q-p/2}\{(p-1)/2-j\}\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}(i-j+1/2)}{\prod_{i=p/2-1}^{j-1}(i-j)^{p(q-1)/2}\prod_{i=0}^{p/2-2}(i-j)^{q(i+1)}\,(p/2-j-1)^{p/2}}$$

$$\cdot \frac{1}{\{(p-1)/2-j\}^{q/2-1}\,\beta'\{(p-1)/2-j\}}$$

$$(4.1.19)\quad C_j = \frac{p(q-1)}{2}\,\Psi\{\alpha-(p-1)/2+j+1\} + (q-p/2)\Psi(\alpha) + q$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{p/2-2}\Psi\{\alpha-(p-2)/2+i\} - \sum_{i=p/2-1}^{j-1}\frac{p(q-1)/2}{\alpha-(p-1)/2+i} - \sum_{i=0}^{p/2-2} q(i+1)\,\cdot$$

$$\frac{1}{\{\alpha-(p-1)/2+i\}} - \frac{p/2}{\alpha-1/2} - \frac{q/2-1}{\alpha} - \sum_{(i,t)\,\varepsilon\,A}\Psi\left(\alpha+1/2+\frac{2t-i}{2q}\right)$$

$$(4.1.20)\quad C_{oj} = \frac{p(q-1)}{2}\ \Psi(1) + (q-p/2)\Psi\{(p-1)/2-j\} + q \sum_{i=0}^{p/2-2} \Psi(i-j+1/2)$$

$$- \sum_{i=p/2-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{i-j} - \sum_{i=0}^{p/2-2} \frac{q(i+1)}{i-j} - \frac{p/2}{p/2-1-j} - \frac{q/2-1}{(p-1)/2-j}$$

$$- \sum_{(i,t)\varepsilon A} \Psi(p/2-j+ \frac{2t-i}{2q})$$

$$(4.1.21)\quad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \Big\{ p(q-1)/2\ \ \zeta\{r+1,\ \alpha-(p-1)/2+j+1\} + (q-p/2)\cdot$$

$$\cdot\zeta(r+1,\alpha) + q \sum_{i=0}^{p/2-2} \zeta\{r+1,\ \alpha-(p-2)/2+i\} + \sum_{i=p/2-1}^{j-1} \Big[\frac{p(q-1)}{2}$$

$$\cdot \frac{1}{\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{r+1}} \Big] + \sum_{i=0}^{p/2-2} \frac{q(i+1)}{\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{r+1}}$$

$$+ \frac{p/2}{(\alpha-1/2)^{r+1}} + \frac{q/2-1}{\alpha^{r+1}} - \sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta(r+1,\alpha+1/2+ \frac{2t-i}{2q}) \Big\}$$

$$(4.1.22)\quad C_{oj}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \Big\{ p(q-1)/2\ \ \zeta(r+1,1) + (q-q/2)\zeta\{r+1(p-1)/2-j\}$$

$$+ q \sum_{i=0}^{p/2-2} \zeta(r+1,i-j+1/2) + \sum_{i=p/2-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(i-j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{p/2-2} \Big[q(i+1)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(i-j)^{r+1}} \Big] + \frac{p/2}{(p/2-1-j)^{r+1}} + \frac{q/2-1}{\{(p-1)/2-j\}^{r+1}} -$$

$$\sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta(r+1),p/2-j+ \frac{2t-i}{2q} \Big\}$$

b_1) Para $j=0,1,\ldots,p/2-2$, $b_j=q(j+1)$, conforme (4.4)

$$(4.1.23)\quad B_j = \{\alpha-(p-2)/2+j\}^{b_j} \frac{\Gamma^{q-p/2}(\alpha)\;\Gamma^{q(j+1)}\{\alpha-(p-2)/2+j\}}{\alpha^{q/2-1}\prod_{i=0}^{j-1}\{\alpha-(p-2)/2+i\}^{q(i+1)}}$$

$$\cdot\frac{\prod_{i=j+1}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}\;\Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2)\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}}{(\alpha-1/2)^{p/2}\;\beta'(\alpha)}$$

$$(4.1.24)\quad B_{oj} = \frac{\Gamma^{q-p/2}\{(p-2)/2-j\}\prod_{i=j+1}^{p/2-2}\Gamma^{q}(i-j)\;\Gamma^{q-p/2}\{(p-3)/2-j\}}{\{(p-2)/2-j\}^{q/2-1}\prod_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}\;\{(p-3)/2-j\}^{p/2}}\cdot$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}(i-j-1/2)}{\beta'\{(p-2)/2-j\}}$$

$$(4.1.25)\quad D_{oj} = (q-p/2)\;\Psi\{(p-2)/2-j\} + q(j+1)\;\Psi(1)+q\sum_{i=j+1}^{p/2-2}\Psi(i-j)$$

$$+(q-p/2)\;\Psi\{(p-3)/2-j\} + q\sum_{i=0}^{p/2-2}\Psi(i-j-1/2) - \frac{q/2-1}{(p-2)/2-j}$$

$$-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)} - \frac{p/2}{\{(p-3)/2-j\}} - \sum_{(i,t)\,\varepsilon\,A}\Psi\{(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\}$$

$$(4.1.26)\quad \acute{D}^{(r)}_{oj} = (-1)^{r+1} r! \Bigg\{ (q-p/2)\ \zeta\{r+1,(p-2)/2-j\} + q(j+1)\,\zeta(r+1,1)$$

$$+q \sum_{i=j+1}^{p/2-2} \zeta(r+1,i-j) + q \sum_{i=0}^{p/2-2} \zeta(r+1,i-j-1/2) + (q-p/2)$$

$$\cdot\, \zeta\{r+1,(p-3)/2-j\} + \frac{q/2-1}{\{(p-2)/2-j\}^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}$$

$$+ \frac{p/2}{\{(p-3)/2-j\}^{r+1}} - \sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A} \zeta\{r+1,(p-1)/2-j+ \frac{2t-i}{2q}\} \Bigg\}$$

b_2) Para $j=p/2-1$; $b_j=(q-1)(p+1)/2-1/2$ conforme (4.4)

$$(4.1.27)\quad B_j = \{\alpha-(p-2)/2+j\}^{b_j} \frac{\Gamma^{-p/2}(\alpha)\ \Gamma^{q(p/2)}(\alpha)\ \Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2)}{\alpha^{q/2-1} \prod_{i=0}^{p/2-2} \{\alpha-(p-2)/2+i\}^{q(i+1)}} \cdot$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}}{(\alpha-1/2)^{p/2}\ \beta'(\alpha)} =$$

$$= \frac{\alpha^{b_j-q/2+1}\ \Gamma^{(qp)/2-p/2}(\alpha)\ \Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2) \prod_{i=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}}{\prod_{i=0}^{p/2-2} \{\alpha-(p-2)/2+i\}^{q(i+1)}\ (\alpha-1/2)^{p/2}\ \beta'(\alpha)}$$

$$(4.1.28)\quad B_{oj}=\frac{\Gamma^{q-p/2}(-1/2)\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}(i-p/2+1/2)}{\prod_{i=0}^{p/2-2}(i-p/2+1)^{q(i+1)}\;(-1/2)^{p/2}\;\beta'(0)}$$

$$(4.1.29)\quad D_{oj}=\frac{(q-1)p}{2}\Psi(1)+(q-p/2)\Psi(-1/2)+q\sum_{i=0}^{p/2-2}\Psi\{i-(p-1)/2\}$$

$$-\sum_{i=0}^{p/2-2}\frac{q(i+1)}{\{i-(p-2)/2\}}+p-\sum_{(i,t)\varepsilon A}\Psi(1/2+\frac{2t-i}{2q})$$

$$(4.1.30)\quad D_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\Big\{\{(q-1)p/2\}\zeta(r+1,1)+(q-p/2)\zeta(r+1,-1/2)$$

$$+q\sum_{i=0}^{p/2-2}\zeta\{r+1,i-(p-1)/2\}+\sum_{i=0}^{p/2-2}\frac{q(i+1)}{\{i-(p-2)/2\}^{r+1}}$$

$$+\frac{p/2}{(-1/2)^{r+1}}-\sum_{(i,t)\varepsilon A}\zeta(r+1,\frac{1}{2}+\frac{2t-i}{2q})\Big\}$$

b_3) Para $j \geq p/2$; $b_j = p(q-1)/2$ conforme (4.4)

$$(4.1.31)\quad B_j=\{\alpha-(p-2)/2+j\}^{b_j}\frac{\Gamma^{-p/2}(\alpha)\;\Gamma^{(qp)/2}(\alpha)\;\Gamma^{q-p/2}(\alpha-1/2)}{\alpha^{q/2-1}\prod_{i=0}^{p/2-2}\{\alpha-(p-2)/2+i\}^{q(i+1)}}$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{p/2-2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}}{(\alpha-1/2)^{p/2}\;\beta'(\alpha)}$$

$$(4.1.32)\quad B_{oj} = \frac{\Gamma^{q-p/2}\{(p-3)/2-j\} \prod_{i=0}^{p/2-2} \Gamma^{q}(i-j-1/2)}{\prod_{i=p/2-1}^{j-1} (i-j)^{p(q-1)/2} \prod_{i=0}^{p/2-2} (i-j)^{q(i+1)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\{(p-2)/2-j\}^{q/2-1} \{(p-3)/2-j\}^{q/2-1} \beta'\{(p-2)/2-j\}}$$

$$(4.1.33)\quad D_{oj} = \frac{p(q-1)}{2} \Psi(1) + (q-p/2)\ \Psi\{(p-3)/2-j\} + q \sum_{i=0}^{p/2-2} \Psi(i-j-1/2)$$

$$\sum_{i=p/2-1}^{j-1} \frac{p(q-1)}{2(i-j)} - \frac{q-2}{(p-2-2j)} - \sum_{i=0}^{p/2-2} \frac{q(i+1)}{(i-j)} - \frac{p}{(p-3-2j)}$$

$$\sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A} \Psi\{[(p-1)/2-j] + \frac{2t-i}{2q}\}$$

$$(4.1.34)\quad D_{oj}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \Big\{ \{p(q-1)/2\}\zeta(r+1,1) + (q-p/2)\,\zeta\{r+1,(p-3)/2-j\}$$

$$+q \sum_{i=0}^{p/2} \zeta(r+1,i-j-1/2) + \sum_{i=p/2-1}^{j-1} \frac{p(q-1)}{2(i-j)^{r+1}}$$

$$+ \frac{q-2}{2\ \{(p-2)/2-j\}^{r+1}} + \sum_{i=0}^{p/2-2} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} + \frac{p}{2\{\ (p-3)/2-j\}^{r+1}}$$

$$- \sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A} \zeta\{r+1,\ (p-1)/2-j + \frac{2t-i}{2q}\} \Big\}$$

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

A função distribuição acumulada F(x) é obtida integrando a densidade f(w) dada em (4.21) de 0 a x. Isto é,

$$(4.1.35) \qquad F(x) = \int_0^x f(w)\, dw.$$

Para calcular F(x) precisamos utilizar o seguinte resultado:

$$(4.1.36) \qquad \int_0^x w^a (-\log w)^{k-1}\, dw = x^{a+1} \sum_{r=1}^{k} \frac{k!\,(-\log x)^{k-r}}{k(k-r)!\,(a+1)^r}$$

para a > 0 ; k=1,2,...; 0 < w < 1

{ver Mathai/Rathie (1971)}

Então, a função distribuição acumulada é dada por:

$$(4.1.37) \quad F(x) = C'_{p,q} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(a_j-1)!} \sum_{k=0}^{a_j-1} \Bigg[\binom{a_j-1}{k} A_{oj}^{(a_j-1-k)} \int_0^x (wq^q)^{\frac{n'}{2}+j-(p+1)/2} \{-\log (wq^q)\}^k \, d(wq^q) \Bigg]$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(b_j-1)!} \sum_{k=0}^{b_j-1} \Bigg[\binom{b_j-1}{k} B_{oj}^{(b_j-1-k)} \int_0^x (wq^q)^{\frac{n'}{2}+j-p/2}$$

$$\left. \cdot \{-\log (wq^{q})\}^{k} \; d(wq^{q}) \right] \qquad 0 < w < 1$$

Considerando:

(4.1.38) $\quad z = wq^{q} \;, \; dz = q^{q}\, dw$

A primeira integral que aparece em (4.1.37), dada por:

$$\int_{o}^{x} (wq^{q})^{\frac{n'}{2}+j-(p+1)/2} \{-\log (wq^{q})\}^{k} \, d(wq^{q})$$

fica igual a:

$$(4.1.39) \int_{o}^{x.q^{q}} z^{\frac{n'}{2}+j-(p+1)/2} (-\log z)^{k} \, dz =$$

$$= (x\, q^{q})^{\frac{n'}{2}+j-(p-1)/2} \sum_{r=1}^{k+1} \frac{(k+1)!\, \{-\log (xq^{q})\}^{k-r}}{(k+1)\,(k+1-r)!\, \{n'/2+j-(p-1)/2\}^{r}}$$

Analogamente, a segunda integral de (4.1.37), dada por

$$\int_{o}^{x} (wq^{q})^{\frac{n'}{2}+j-p/2} \left\{-\log (wq^{q})\right\}^{k} d(wq^{q})$$

fica igual a:

$$(4.1.40) = (xq^{q})^{\frac{n'}{2}+j-(p-2)/2} \sum_{r=1}^{k+1} \frac{(k+1)!\, \left\{-\log (xq^{q})\right\}^{k-r}}{(k+1)\,(k+1-r)!\, \{n'/2+j-(p-2)/2\}^{r}}$$

Substituindo (4.1.39) e (4.1.40) em (4.1.37) temos:

$$(4.1.41)\quad F(x) = C'_{p,q}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(a_j-1)!}\sum_{k=0}^{a_j-1}\left[\binom{a_j-1}{k} A_{oj}^{\;(a_j-1-k)}\right.\right.$$

$$\left.\cdot (xq^q)^{\frac{n'}{2}+j-(p-1)/2}\sum_{r=1}^{k+1}\frac{(k+1)!\ \{-\log(xq^q)\}^{k-r}}{(k+1)(k+1-r)!\ \{n'/2+j-(p-1)/2\}^{r}}\right]$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(b_j-1)!}\sum_{k=0}^{b_j-1}\left[\binom{b_j-1}{k} B_{oj}^{\;(b_j-1-k)}\right.$$

$$\left.\left.\cdot (xq^q)^{\frac{n'}{2}+j-(p-2)/2}\sum_{r=1}^{k+1}\frac{(k+1)!\ \{-\log(xq^q)\}^{k-r}}{(k+1)(k+1-r)!\ \{n'/2+j-(p-2)/2\}^{r}}\right]\right\}$$

Para os subcasos que se seguem, achamos desnecessário colocar todas as passagens, pois estes são obtidos de maneira análoga ao primeiro deles.

4.2 - 2º SUBCASO:

Utilizando (3.15), (4.14) e (4.18) chegamos nos seguintes resultados:

a_1) Para $j=0,1,2,\ldots,(p-1)/2-1$; $a_j=q(j+1)$ em (4.5)

$$A_j=\{\alpha-(p-1)/2+j\}^{a_j}\;\frac{\Gamma^{q(j+1)}\{\alpha-(p-1)/2+j\}\;\Gamma^{q(p+1)/2}(\alpha)}{\alpha^{(q-1)/2}\prod_{i=0}^{j-1}\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}} \tag{4.2.1}$$

$$\frac{\prod_{i=j+1}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}\;\Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha-1/2)\prod_{i=0}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{(\alpha-1/2)^{(p-1)/2}\;\beta'(\alpha)}$$

$$A_{oj}=\frac{\Gamma^{q(j+1)}(1)\;\Gamma^{q-(p+1)/2}\{(p-1)/2-j\}\prod_{i=j+1}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}(i-j)}{\{(p-1)/2-j\}^{(q-1)/2}\prod_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}} \tag{4.2.2}$$

$$\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(p/2-1-j)\prod_{i=0}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}(i-j+1/2)}{(p/2-j-1)^{(p-1)/2}\;\beta'\{(p-1)/2-j\}}$$

$$C_{oj}=\{q-(p+1)/2\}\Psi\{(p-1)/2-j\}+q(j+1)\;\Psi(1)+q\sum_{i=j+1}^{(p-3)/2}\Psi(i-j) \tag{4.2.3}$$

$$+\{q-(p-1)/2\}\Psi(p/2-1-j)+q\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\Psi(i-j+1/2)-\frac{(q-1)/2}{(p-1)/2-j}$$

$$-\frac{(p-1)/2}{(p/2-j-1)}-\sum_{(i,t)\,\varepsilon\,A}\Psi\left(p/2-j+\frac{2t-i}{2q}\right)$$

$$(4.2.4)\quad C_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}\, r!\Big\{\{q-(p+1)/2\}\zeta\{r+1,(p-1)/2-j\}+q(j+1)\zeta(r+1,1)$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{(p-3)/2}\zeta(r+1,i-j)+\{q-(p-1)/2\}\zeta(r+1,p/2-1-j)\ +q\,\cdot$$

$$\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\zeta(r+1,i-j+1/2)+\frac{(q-1)/2}{\{(p-1)/2-j\}^{r+1}}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}$$

$$+\frac{(p-1)/2}{(p/2-j-1)^{r+1}}-\sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A}\zeta\left(r+1,p/2-j+\frac{2t-i}{2q}\right)\Big\}$$

a_2) Para $j=(p-1)/2$; $a_j=(q-1)(p+2)/2$ em (4.5)

$$(4.2.5)\quad A_j=\{\alpha-(p-1)/2+j\}^{a_j}\,\frac{\Gamma^{-(p+1)/2}(\alpha)\ \Gamma^{q(p+1)/2}(\alpha)}{\alpha^{(q-1)/2}\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}}$$

$$\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha-1/2)\prod_{i=0}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{(\alpha-1/2)^{(p-1)/2}\ \beta'(\alpha)}$$

$$(4.2.6)\quad A_{oj}=\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(-1/2)\prod_{i=0}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}(i-p/2+1)}{\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\{i-(p-1)/2\}^{q(i+1)}\ (-1/2)^{(p-1)/2}\ \beta'(0)}$$

(4.2.7) $$C_{oj}=\{(q-1)(p+1)/2\}\Psi(1) + \{q-(p-1)/2\}\Psi(-1/2)+q \sum_{i=0}^{(p-5)/2}$$

$$\Psi(i-p/2+1) - \sum_{i=0}^{(p-3)/2} \frac{q(i+1)}{\{i-(p-1)/2\}} + (p-1) -$$

$$- \sum_{(i,t)\varepsilon A} \Psi(1/2+ \frac{2t-i}{2q})$$

(4.2.8) $$C_{oj}^{(r)}= (-1)^{r+1} r! \left\{ \{(q-1)(p+1)/2\} \zeta(r+1,1)+\{q-(p-1)/2\}\zeta(r+1,-1/2)\right.$$

$$+q \sum_{i=0}^{(p-5)/2} \zeta\{(r+1,i-p/2+1)\}+ \sum_{i=0}^{(p-3)/2} \frac{q(i+1)}{\{(i-(p-1)/2\}^{r+1}}$$

$$\left. + \frac{(p-1)/2}{(-1/2)^{r+1}} - \sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta(r+1, 1/2+ \frac{2t-i}{2q}) \right\}$$

a_3) Para $j \geq (p-1)/2+1$; $a_j=(q-1)(p+1)/2$ em (4.5)

(4.2.9) $$A_j=\{\alpha-(p-1)/2+j\}^{a_j} \frac{\Gamma^{q-(p+1)/2}(\alpha)\ \Gamma^{q(p-1)/2}(\alpha)\Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha-1/2}{\alpha^{(q-1)/2} \prod_{i=0}^{(p-3)/2} \{\alpha-(p-1)/2+i\}^{q(i+1)}}$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{(p-5)/2} \Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}}{(\alpha-1/2)^{(p-1)/2}\ \beta'(\alpha)}$$

$$(4.2.10)\quad A_{oj} = \frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(p/2-j-1) \prod_{i=0}^{(p-5)/2} \Gamma^{q}(i-j+1/2)}{\prod_{i=(p-1)/2}^{j-1} (i-j)^{(q-1)(p+1)/2} \prod_{i=0}^{(p-3)/2} (i-j)^{q(i+1)}}$$

$$\frac{1}{\{(p-1)/2-j\}^{(q-1)/2} \quad (p/2-j-1)^{(p-1)/2} \quad \beta'\{(p-1)/2-j\}}$$

$$(4.2.11)\quad C_{oj} = \{(q-1)(p+1)/2\}\Psi(1) + \{q-(p-1)/2\}\,\Psi(p/2-j-1)$$

$$+q \sum_{i=0}^{(p-5)/2} \Psi(i-j+1/2) - \sum_{i=(p-1)/2}^{j-1} \frac{(q-1)(p+1)}{2(i-j)} -$$

$$-\sum_{i=0}^{(p-3)/2} \frac{q(i+1)}{(i-j)} - \frac{q-1}{p-1-2j} - \frac{p-1}{p-2-2j} - \sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A} \Psi\left(p/2-j+\frac{2t-i}{2q}\right)$$

$$(4.2.12)\quad C_{oj}^{(r)} = (-1)^{r+1}\, r!\,\Big\{\{(q-1)(p+1)/2\}\zeta(r+1,1) + \{q-(p-1)/2\}\zeta(r+1,p/2-j-1)$$

$$+q \sum_{i=0}^{(p-5)/2} \zeta(r+1,i-j+1/2) + \sum_{i=(p-1)/2}^{j-1} \frac{(q-1)(p+1)}{2(i-j)^{r+1}}$$

$$+\sum_{i=0}^{(p-3)/2} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} + \frac{q-1}{2\{(p-1)/2-j\}^{r+1}} + \frac{p-1}{2(p/2-j-1)^{r+1}} -$$

$$-\sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A} \zeta\left(r+1,\ p/2-j+\frac{2t-i}{2q}\right)\Big\}$$

b_1) Para $j=0,1,\ldots,(p-1)/2-2$; $b_j=q(j+1)$ conforme (4.6)

$$(4.2.13)\quad B_j=\{\alpha-(p-2)/2+j\}^{b_j}\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha-1/2)\,\Gamma^{q(j+1)}\{\alpha-(p-2)/2+j\}}{(\alpha-1/2)^{(p-1)/2}\prod_{i=0}^{j-1}\{\alpha-(p-2)/2+i\}^{q(i+1)}}$$

$$\frac{\prod_{i=j+1}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-2)/2+i\}\Gamma^{q-(p+1)/2}(\alpha)\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}}{\alpha^{(q-1)/2}\beta'(\alpha)}$$

$$(4.2.14)\quad B_{oj}=\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}\{(p-3)/2-j\}\prod_{i=j+1}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}(i-j)}{\{(p-3)/2-j\}^{(p-1)/2}\prod_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma^{q-(p+1)/2}\{(p-2)/2-j\}\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}(i-j-1/2)}{\{(p-2)/2-j\}^{(q-1)/2}\beta'\{(p-2)/2-j\}}$$

$$(4.2.15)\quad D_{oj}=\{q-(p-1)/2\}\Psi\{(p-3)/2-j\}+q(j+1)\ \Psi(1)+q\sum_{i=j+1}^{(p-5)/2}\Psi(i-j)$$

$$+\{q-(p+1)/2\}\Psi\{(p-2)/2-j\}+q\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\Psi(i-j-1/2)-\frac{p-1}{p-3-2j}$$

$$-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{i-j}-\frac{q-1}{p-2-2j}-\sum_{(i,t)\in A}\Psi\{(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\}$$

$$(4.2.16)\quad D_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}\, r!\Big\{\{q-(p-1)/2\}\zeta\{r+1,(p-3)/2-j\} +q(j+1)\zeta(r+1,1)$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{(p-5)/2} \zeta(r+1,i-j)+\{q-(p+1)/2\}\zeta\{r+1,(p-2)/2-j\}+\{q-(p+1)/2\}$$

$$.\,\zeta\{r+1,(p-2)/2-j\} +q\sum_{i=0}^{(p-3)/2} \zeta(r+1,i-j-1/2)+\frac{p-1}{2\{(p-3)/2-j\}^{r+1}}$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} + \frac{q-1}{2\{(p-2)/2-j\}^{r+1}} -$$

$$-\sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta\{r+1,(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\}\Big\}$$

b_2) Para $j=(p-1)/2-1$; $b_j= q(p-1)/2$ conforme (4.6)

$$(4.2.17)\quad B_j=\{\alpha-(p-2)/2-j\}^{b_j}\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(\alpha-1/2)\,\Gamma^{q(p-3)/2}(\alpha-1/2)}{(\alpha-1/2)^{(p-1)/2}\prod_{i=0}^{(p-5)/2}\{\alpha-p/2+1-i\}^{q(i+1)}}$$

$$\frac{\Gamma^{q-(p+1)/2}(\alpha)\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}}{\alpha^{(q-1)/2}\,\beta'(\alpha)}$$

$$(4.2.18)\quad B_{oj}=\frac{\Gamma^{q-(p+1)/2}(1/2)\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}(i-p/2+1)}{\prod_{i=0}^{(p-5)/2}\{i-(p-3)/2\}^{q(i+1)}\,(1/2)^{(q-1)/2}\,\beta'(1/2)}$$

$$(4.2.19)\quad D_{oj} = \{(q-1)(p-1)/2\}\Psi(1)+\{q-(p+1)/2\}\Psi(1/2)+q$$

$$\sum_{i=0}^{(p-3)/2} \Psi(i-p/2+1) - \sum_{i=0}^{(p-5)/2} \frac{q(i+1)}{\{i-(p-3)/2\}} -(q-1)$$

$$-\sum_{(i,t)\varepsilon A} \Psi(1+\frac{2t-i}{2q})$$

$$(4.2.20)\quad D_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1} r! \Big\{\{(q-1)(p-1)/2\}\zeta(r+1,1)+\{q-(p+1)/2\}\zeta(r+1,1/2)$$

$$+q\sum_{i=0}^{(p-3)/2} \zeta(r+1,i-p/2+1)+\sum_{i=0}^{(p-5)/2} \frac{q(i+1)}{\{i-(p-3)/2\}^{r+1}}$$

$$+\frac{q-1}{2(1/2)^{r+1}} - \sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A} \zeta(r+1,1+\frac{2t-i}{2q}) \Big\}$$

b_3) Para $j \geq (p-1)/2$; $b_j = (q-1)(p-1)/2$ conforme (4.6)

$$(4.2.21)\quad B_j=\{\alpha-(p-2)/2+j\}^{b_j} \frac{\Gamma^{(q-1)(p-1)/2}\{\alpha-(p-2)/2-j\}\Gamma^{q-(p+1)/2}(\alpha)}{(\alpha-1/2)^{(p-1)/2} \qquad \alpha^{(q-1)/2} \qquad \beta'(\;)}$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{(p-3)/2} \Gamma^{q}\{\alpha-(p-1)/2+i\}}{\prod_{i=(p-3)/2}^{j-1} \{\alpha-(p-2)/2+i\}^{(q-1)(p-1)/2} \prod_{i=0}^{(p-5)/2} \{\alpha-(p-2)/2+i\}^{q(i+1)}}$$

$$(4.2.22)\quad B_{oj}=\frac{\Gamma^{q-(p+1)/2}\{(p-2)/2-j\}\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}(i-j-1/2)}{\{(p-3)/2-j\}^{(p-1)/2}\prod_{i=(p-3)/2}^{j-1}(i-j)^{(q-1)(p-1)/2}}$$

$$\frac{1}{\prod_{i=0}^{(p-5)/2}(i-j)^{q(i+1)}\{(p-2)/2-j\}^{(q-1)/2}\beta'\{(p-2)/2-j\}}$$

$$(4.2.23)\quad D_{oj}=\{(q-1)(p-1)/2\}\Psi(1)+\{q-(p+1)/2\}\Psi\{(p-2)/2-j\}+q$$

$$\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\Psi(i-j-1/2)-\frac{p-1}{p-3-2j}-\sum_{i=(p-3)/2}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)}{2(i-j)}-\sum_{i=0}^{(p-5)/2}$$

$$\frac{q(i+1)}{i-j}-\frac{q-1}{p-2-2j}-\sum_{(i,t)\varepsilon A}\Psi\{(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\}$$

$$D_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\left\{\{(q-1)(p-1)/2\}\zeta(r+1,1)+\{q-(p+1)/2\}\right.$$

$$\cdot\zeta\{r+1,(p-2)/2-j\}+q\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\zeta(r+1,i-j-1/2)+\frac{(p-1)/2}{\{(p-3)/2-j\}^{r+1}}$$

$$+\sum_{i=(p-3)/2}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)}{2(i-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}+\frac{q-1}{2\{(p-2)/2-j\}^{r+1}}$$

$$- \sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta\{r+1,(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\} \Bigg\}$$

A função densidade f(w) e a função distribuição acumulada F(w), são iguais a (4.21) e (4.1.41) respectivamente, com os valores a_j , b_j , $A_{oj}^{(a_j-1-k)}$, $B_{oj}^{(b_j-1-k)}$ substituídos pelos resultados obtidos para o 2º SUBCASO.

4.3 - 3º SUBCASO:

Utilizando (3.16) chegamos nos seguintes resultados:

a_1) Para $j=0,1,\ldots,p/2-2$; $a_j = q(j+1)$ conforme (4.7)

Considerando:

$$(4.3.1)\quad \begin{cases} A'_{oj} = A_{oj} \text{ de } (4.1.2) \\ C'_{oj} = C_{oj} \text{ de } (4.1.6) \\ C^{(r)'}_{oj} = C^{(r)}_{oj} \text{ de } (4.1.10) \end{cases}$$

$$(4.3.2)\quad A_{oj} = A'_{oj}\ \frac{\{(p-1)/2-j\}^{q/2-1}}{\{(p-1)/2-j\}^{(q-1)/2}} = A'_{oj}\ \{(p-1)/2-j\}^{-1/2}$$

$$(4.3.3)\quad C_{oj} = C'_{oj} + \frac{q/2-1}{(p-1)/2-j} - \frac{(q-1)/2}{(p-1)/2-j} = C'_{oj} - \frac{1/2}{(p-1)/2-j}$$

$$(4.3.4)\quad C^{(r)}_{oj} = C^{(r)'}_{oj} - \left[(-1)^{r+1}\, r!\ \frac{q/2-1}{\{(p-1)/2-j\}^{r+1}}\right] + $$

$$+ \left[(-1)^{r+1}\, r!\ \frac{(q-1)/2}{\{(p-1)/2-j\}^{r+1}}\right]$$

$$C^{(r)}_{oj} = C^{(r)'}_{oj} + \frac{(-1)^{r+1}\ r!}{2\{(p-1)/2-j\}^{r+1}}$$

a_2) Para $j=p/2-1$; $a_j = (qp)/2$ conforme (4.7)

Considerando:

$$(4.3.5)\begin{cases} A'_{oj} = A_{oj} & \text{de} \quad (4.1.12) \\ C'_{oj} = C_{oj} & \text{de} \quad (4.1.14) \\ C^{(r)\prime}_{oj} = C^{(r)}_{oj} & \text{de} \quad (4.1.16) \end{cases}$$

Temos:

$$(4.3.6) \quad A_{oj} = A'_{oj} \ \{(p-1)/2-j\}^{-1/2}$$

$$(4.3.7) \quad C_{oj} = C'_{oj} + \frac{1}{p-1-2j}$$

$$(4.3.8) \quad C^{(r)}_{oj} = C^{(r)\prime}_{oj} + \frac{(-1)^{r+1} \ r!}{2(p/2-1/2-j)^{r+1}}$$

a_3) Para $j \geq p/2$; $a_j = p(q-1)/2$ conforme (4.7)

Considerando:

$$(4.3.9)\begin{cases} A'_{oj} = A_{oj} & \text{de} \quad (4.1.18) \\ C'_{oj} = C_{oj} & \text{de} \quad (4.1.20) \\ C^{(r)\prime}_{oj} = C^{(r)}_{oj} & \text{de} \quad (4.1.22) \end{cases}$$

Temos:

$$(4.3.10) \quad A_{oj} = A'_{oj} \cdot \{(p-1)/2-j\}^{-1/2}$$

$$(4.3.11)\quad C_{oj} = C'_{oj} - \frac{1}{p-1-2j}$$

$$(4.3.12)\quad C^{(r)}_{oj} = C^{(r)\prime}_{oj} + \frac{(-1)^{r+1}\, r!}{2(p/2-1/2-j)^{r+1}}$$

b_1) Para $j=0,1,\ldots,p/2-2$; $b_j=q(j+1)$ conforme (4.8)

Considerando:

$$(4.3.13)\begin{cases} B'_{oj} = B_{oj} \text{ de } (4.1.24) \\ D'_{oj} = D_{oj} \text{ de } (4.1.25) \\ D^{(r)\prime}_{oj} = D^{(r)}_{oj} \text{ de } (4.1.26) \end{cases}$$

Temos:

$$(4.3.14)\quad B_{oj} = B'_{oj} \frac{\{(p-2)/2-j\}^{q/2-1}}{\{(p-2)/2-j\}^{(q-1)/2}} = B'_{oj}\ \{(p-2)/2-j\}^{-1/2}$$

$$(4.3.15)\quad D_{oj} = D'_{oj} + \frac{q/2-1}{(p-2)/2-j} - \frac{(q-1)/2}{(p-2)/2-j} = D'_{oj} - \frac{1}{p-2-2j}$$

$$(4.3.16)\quad D^{(r)}_{oj} = D^{(r)\prime}_{oj} + (-1)^{r+1}\, r! \left[- \frac{q/2-1}{\{(p-2)/2-j\}^{r+1}} + \frac{(q-1)/2}{\{(p-2)/2-j\}^{r+1}} \right]$$

$$= D^{(r)\prime}_{oj} + \frac{(-1)^{r+1}\, r!}{\{(p-2)/2-j\}^{r+1}}$$

b_2) Para $j=p/2-1$; $b_j=(q-1)(p+1)/2$ conforme (4.8)

(4.3.17) $B_{oj} = B_{oj}$ de (4.1.28)

(4.3.18) $D_{oj} = D_{oj}$ de (4.1.29)

(4.3.19) $D_{oj}^{(r)} = D_{oj}^{(r)}$ de (4.1.30)

b_3) Para $j \geq p/2$; $b_j = p(q-1)/2$ conforme (4.8)

Considerando:

$$(4.3.20)\begin{cases} B'_{oj} = B_{oj} \text{ de } (4.1.32) \\ D'_{oj} = D_{oj} \text{ de } (4.1.33) \\ D_{oj}^{(r)\prime} = D_{oj}^{(r)} \text{ de } (4.1.34) \end{cases}$$

Temos:

$$(4.3.21)\quad B_{oj} = B'_{oj} \; \frac{\{(p-2)/2-j\}^{q/2-1}}{\{(p-2)/2-j\}^{(q-1)/2}} = B'_{oj} \; \{(p-2)/2-j\}^{-1/2}$$

$$(4.3.22)\quad D_{oj} = D'_{oj} + \frac{(q-2)/2}{(p-2)/2-j} - \frac{(q-1)/2}{(p-2)/2-j} = D'_{oj} - \frac{1}{p-2-2j}$$

$$(4.3.23)\quad D_{oj}^{(r)} = D_{oj}^{(r)\prime} - \left[(-1)^{r+1} r! \; \frac{q-2}{2\,\{(p-2)/2-j\}^{r+1}}\right] + \left[(-1)^{r+1} r! \; \frac{q-1}{2\{(p-2)/2-j\}^{r+1}}\right]$$

$$= D_{oj}^{(r)} + \frac{(-1)^{r+1} \; r!}{2\{(p-2)/2-j\}^{r+1}}$$

A função densidade f(w) e a função distribuição acumulada F(w), são iguais a (4.21) e (4.1.41) respectivamente, com os valores a_j , b_j , $A_{oj}^{(a_j-1-k)}$, $B_{oj}^{(b_j-1-k)}$ substituídos pelos resultados obtidos para o 3º SUBCASO.

4.4 - 4º SUBCASO:

Utilizando (3.17) chegamos nos seguintes resultados:

a_1) Para $j=0,1,\dots,(p-1)/2-1$; $a_j=q(j+1)$ conforme (4.9)

$$A_{oj}=\frac{\Gamma^{q(j+1)}(1)\ \Gamma^{q-(p-1)/2}\{(p-1)/2-j\}\ \prod_{i=j+1}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}(i-j)}{\{(p-1)/2-j\}^{q/2-1}\ \prod_{i=0}^{j-1}(i-j)^{q(i+1)}\ (p/2-j-1)^{(p-1)/2}} \tag{4.4.1}$$

$$\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(p/2-1-j)\ \prod_{i=0}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}(i-j+1/2)}{\beta'\{(p-1)/2-j\}}$$

$$C_{oj}=q(j+1)\ \Psi(1)+\{q-(p-1)/2\}\Psi\{(p-1)/2-j\}+q\sum_{i=j+1}^{(p-3)/2}\Psi(i-j) \tag{4.4.2}$$

$$+\{q-(p-1)/2\}\Psi(p/2-1-j)+q\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\Psi(i-j+1/2)-\frac{q/2-1}{\{(p-1)/2-j\}}$$

$$-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)}-\frac{p-1}{2(p/2-j-1)}-\sum_{(i,t)\in A}\Psi\left(p/2-j+\frac{2t-i}{2q}\right)$$

$$C_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\ \Big\{q(j+1)\zeta(r+1,1)+\{q-(p-1)/2\}\zeta\{r+1,(p-1)/2-j\} \tag{4.4.3}$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{(p-3)/2}\zeta(r+1,i-j)+\{q-(p-1)/2\}\zeta(r+1,p/2-1-j)$$

$$+q\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\zeta(r+1,i-j+1/2)+\frac{q/2-1}{\{(p-1)/2-j\}^{r+1}}$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} + \frac{p-1}{2(p/2-j-1)^{r+1}} - \sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta(r+1,p/2-j+\frac{2t-i}{2q})\Big\}$$

a_2) Para $j=(p-1)/2$; $a_j=(q-1)(p+2)/2+1/2$ conforme (4.9)

$$(4.4.4)\quad A_{oj}=\frac{\Gamma^{(q-1)(p+1)/2+1}(1)\ \Gamma^{q-(p-1)/2}(-1/2)\ \prod_{i=0}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}(i-p/2+1)}{\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\{i-(p-1)/2\}^{q(i+1)}\ (-1/2)^{(p-1)/2}\ \beta'(0)}$$

$$(4.4.5)\quad C_{oj}=\{(q-1)(p+1)/2+1\}\psi(1)+\{q-(p-1)/2\}\psi(-1/2)$$

$$+q\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\psi(i-P/2+1) - \sum_{i=0}^{(p-3)/2}\frac{q(i+1)}{(i-p/2+1/2)} +(p-1)$$

$$-\sum_{(i,t)\varepsilon A}\psi(1/2+\frac{2t-i}{2q})$$

$$(4.4.6)\quad C_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\ \Big\{\{(q-1)(p+1)/2+1\}\ \zeta(r+1,1)\ +\{q-(p-1)/2\}$$

$$.\zeta(r+1,-1/2)\ +q\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\zeta(r+1,i-p/2+1)+\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\frac{q(i+1)}{(i-p/2+1/2)^{r+1}}$$

$$+\frac{p-1}{2(-1/2)^{r+1}} - \sum_{(i,t)\varepsilon A}\zeta(r+1,1/2+\frac{2t-i}{2q})\Big\}$$

a_3) Para $j \geq (p-1)/2+1$; $a_j=(q-1)(p+1)/2+1$ conforme (4.9)

$$(4.4.7)\quad A_{oj}=\frac{\Gamma^{(q-1)(p+1)/2+1}(1)\;\Gamma^{q-(p-1)/2}(p/2-j-1)}{\prod_{i=(p-1)/2}^{j-1}(i-j)^{(q-1)(p+1)/2+1}\;\prod_{i=0}^{(p-3)/2}(i-j)^{q(i+1)}}$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{(p-5)/2}\Gamma^{q}(i-j+1/2)}{(p/2-1/2-j)^{q/2-1}\;(p/2-j-1)^{(p-1)/2}\;\beta'(p/2-1/2-j)}$$

$$(4.4.8)\quad C_{oj}=\{(q-1)(p+1)/2+1\}\;\Psi(1)+\{q-(p-1)/2\}\Psi(p/2-j-1)$$

$$+q\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\Psi(i-j+1/2)-\sum_{i=(p-1)/2}^{j-1}\frac{(q-1)(p+1)/2+1}{i-j}$$

$$-\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\frac{q(i+1)}{i-j}-\frac{q/2-1}{(p/2-1/2-j}-\frac{p-1}{p-2-2j}$$

$$-\sum_{(i,t)\,\varepsilon\,A}\Psi(p/2-j+\frac{2t-i}{2q})$$

$$(4.4.9)\quad C_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}r!\left\{\{(q-1)(p+1)/2+1\}\;\zeta(r+1,1)+\{q-(p-1)/2\}\right.$$

$$\zeta(r+1,p/2-j-1)+q\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\zeta(r+1,i-j+1/2)$$

$$+\sum_{i=(p-1)/2}^{j-1}\frac{(q-1)(p+1)/2+1}{(i-j)^{r+1}}+\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}$$

$$+ \frac{q/2-1}{(p/2-1/2-j)^{r+1}} + \frac{(p-1)}{2(p/2-1-j)^{r+1}} - \sum_{(i,t)\varepsilon A} \zeta(r+1, \frac{p}{2} - j + \frac{2t-i}{2q})$$

b_1) Para $j=0,1,\ldots,(p-1)/2-2$; $b_j=q(j+1)$ conforme (4.10)

$$(4.4.10)\quad B_{oj} = \frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(p/2-3/2-j) \prod_{i=j+1}^{(p-5)/2} \Gamma^{q}(i-j)\ \Gamma^{q-(p-1)/2}(p/2-1-j)}{(p/2-3/2-j)^{(p-1)/2} \prod_{i=0}^{j-1} (i-j)^{q(i+1)}}$$

$$\frac{\prod_{i=0}^{(p-3)/2} \Gamma^{q}(i-j-1/2)}{(p/2-1-j)^{q/2-1}\ \beta'(p/2-1-j)}$$

$$(4.4.11)\quad D_{oj} = q(j+1)\ \Psi(1) + \{q-(p-1)/2\}\Psi\{(p-3)/2-j\} + q \sum_{i=j+1}^{(p-5)/2} \Psi(i-j)$$

$$+\{q-(p-1)/2\}\Psi\{(p-2)/2-j\} + q \sum_{i=0}^{(p-3)/2} \Psi(i-j+1/2) - \frac{p-1}{p-3-2j}$$

$$- \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{i-j} - \frac{q/2-1}{p/2-1-j} - \sum_{(i,t)\varepsilon A} \Psi\{(p-1)/2-j+ \frac{2t-i}{2q}\}$$

$$(4.4.12)\quad D_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}\,r!\left\{q(j+1)\ \zeta(r+1,1)+\{q-(p-1)/2\}\zeta\{r+1,(p-3)/2-j\}\right.$$

$$+q\sum_{i=j+1}^{(p-5)/2}\zeta(r+1,i-j)+\{q-(p-1)/2\}\zeta\{r+1,(p-2)/2-j\}$$

$$+q\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\zeta(r+1,i-j-1/2)-\frac{p-1}{2(p/2-3/2-j)^{r+1}}$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}+\frac{q/2-1}{(p/2-1-j)^{r+1}}$$

$$\left.-\sum_{(i,t)\varepsilon A}\zeta\{r+1,(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\}\right\}$$

b_2) Para $j=(p-1)/2-1$; $b_j=q(p-1)/2$ conforme (4.10)

$$(4.4.13)\quad B_{oj}=\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(1/2)\displaystyle\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}(i-p/2+1)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{(p-5)/2}(i-p/2-3/2)^{q(i+1)}\ (1/2)^{q/2-1}\ \beta'(1/2)}$$

$$(4.4.14)\quad D_{oj}=(q-1)(p-1)/2\ \Psi(1)+\{q-(p-1)/2\}\Psi(1/2)+q\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\Psi(i-p/2+1)$$

$$-\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\frac{q(i+1)}{(i-p/2-3/2)}-(q-2)-\sum_{(i,t)\varepsilon A}\Psi(1+\frac{2t-i}{2q})$$

$$(4.4.15)\quad D_{oj}^{(r)}=(-1)^{r+1}\, r!\Big\{\{(q-1)(p-1)/2\}\ \zeta(r+1,1)+\{q-(p-1)/2\}\zeta(r+1,1/2)$$

$$+\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\zeta(r+1,i-p/2+1)+\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\frac{q(i+1)}{(i-p/2-3/2)^{r+1}}$$

$$+\frac{q/2-1}{(1/2)^{r+1}}-\sum_{(i,t)\in A}\zeta\left(r+1,1+\frac{2t-i}{2q}\right)\Big\}$$

b_3) Para $j \geq (p-1)/2$; $b_j=(q-1)(p-1)/2$ conforme (4.10)

$$(4.4.16)\quad B_{oj}=\frac{\Gamma^{q-(p-1)/2}(p/2-1-j)\prod_{i=0}^{(p-3)/2}\Gamma^{q}(i-j-1/2)}{(p/2-3/2-j)^{(p-1)/2}\prod_{i=(p-3)/2}^{j-1}(i-j)^{(q-1)(p-1)/2}}$$

$$\frac{1}{\prod_{i=0}^{(p-5)/2}(i-j)^{q(i+1)}\ (p/2-1-j)^{q/2-1}\ \beta'(p/2-1-j)}$$

$$(4.4.17)\quad D_{oj}=\{(q-1)(p-1)/2\}\ \Psi(1)+\{q-(p-1)/2\}\Psi(p/2-1-j)$$

$$+q\sum_{i=0}^{(p-3)/2}\Psi(i-j-1/2)-\frac{p-1}{p-3-2j}-\sum_{i=(p-3)/2}^{j-1}\frac{(q-1)(p-1)}{2(i-j)}$$

$$-\sum_{i=0}^{(p-5)/2}\frac{q(i+1)}{i-j}-\frac{q/2-1}{p/2-1-j}-\sum_{(i,t)\in A}\Psi\left\{(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\right\}$$

$$(4.4.18)\quad D_{oj}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \Big\{ \{(q-1)(p-1)/2\}\ \zeta(r+1,1) + \{q-(p-1)/2\}$$

$$\zeta(r+1,p/2-1-j) + q \sum_{i=0}^{(p-3)/2} \zeta(r+1,i-j-1/2) + \frac{p-1}{2(p/2-3/2-j)^{r+1}}$$

$$+ \sum_{i=(p-3)/2}^{j-1} \frac{(q-1)(p-1)}{2(i-j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{(p-5)/2} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}}$$

$$+ \frac{q/2-1}{(p/2-1-j)^{r+1}} - \sum_{(i,t)\,\varepsilon\, A} \zeta\{r+1,(p-1)/2-j+\frac{2t-i}{2q}\} \Big\}$$

A função densidade f(w) e a função distribuição acumulada F(w), são iguais a (4.21) e (4.1.41) respectivamente, com os valores a_j , b_j , $A_{oj}^{(a_j-1-k)}$, $B_{oj}^{(b_j-1-k)}$ substituídos pelos resultados obtidos para o 4º SUBCASO.

REFERÊNCIAS

(1) ANDERSON, T.W. (1958). *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley , New York.

(2) BARTLETT, M.S. (1937). *Properties of Sufficiency and Statistical Tests*, Proc. Roy. Soc., A, 160, 268-282.

(3) BRAAKSMA, B.L.J. (1964). *Asymptotic Expansions and Analytic Continuations for Barnes-Integrals*, Compositio Mathematica, 15, 239-341.

(4) ESPTEIN, B. (1948). *Some Applications of the Mellin Transform in Statistics*, Ann. Math. Statist. 19, 370-379.

(5) ERDÉLYI, A.;MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F. & TRICOMI, G.F.(1953). *Higher Transcendental Functions*, vol.I, Mac.Graw-Hill.

(6) ERDÉLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F. & TRICOMI, G.F.(1954). *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, Mac. Graw-Hill.

(7) FOX, C. (1961). *The G and H Functions as Symmetric Fourier Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc., 98.

(8) JAIN, S.K.; RATHIE, P.N. & SHAH, M.C. (1975). *The Exact Distributions of Certain Likelihood Ratio Criteria*, Sanhya: The Indian Journal of Statistics, Vol.37,Series A,pp.150-163.

(9) JOHNSON, N.L. & KOTZ, S. (1972). *Multivariate Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*, Wiley, New York.

(10) KAPLAN, W. (1915). *Cálculo Avançado*; Coordenação, Elza Gomide; Tradução, Frederic Tsu /S.Paulo/, Edgard Blucher, Ed. da Univ. de São Paulo, (1972), Vol. II

(11) LUKE, Y.L. (1969). *The Special Functions and their Approximations*, Vol.I, Academic Press.

(12) MATHAI, A.M. (1970). *Exact Distributions of a Criterion for Testing the Hypothesis that Several Multivariate Populations are Identical*, J. Indian Statist.Assoc., 8, 1-17.

(13) MATHAI, A.M. & RATHIE, P.N. (1971).*The Exact Distribution of Wilk's Criterion*, Ann, Math. Statist., 42, 1010-1019.

(14) MATHAI, A.M. & SAXENA, R.K. (1973). *Generalized Hypergeometric Function with Applications in Statistics and Physical Sciences*, Lecture Notes in Mathematics,No.348, Springer-Verlag.

(15) MEIJER, S.N. (1946). *On the G-Functions*, I-VIII. Nederl.Akad. Wetensch. Proc.49, 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175

(16) NEYMAN, J. & PEARSON, E.S. (1931). *On the Problems of K Samples*, Bull-Acad.Polo.Sci, 3, (1931), 460-481.

(17) RAO, C.R. (1972). *Recent Founds of Research Work in Multivariate Analysis*, Biometrics, 28, 3-22.

(18) SUBRAHMANIAM, K. & SUBRAHMANIAM, K. (1973). *Multivariate Analysis*, A selected and abstract bibliography, 1957-1972, Marcel Dekker, Inc., New York.

(19) TITCHMARSH, E.C. (1951). *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Oxford Univ. Press.

(20) WILKS, S.S. (1932). *Certain Generalizantions in the Analysis of Variance*, Biometrika, 24, 471-494.

--/--