EXISTENCIA DE CENTROS RELATIVOS DE CHEBYSHEV

MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

ORIENTADOR: Dr. João Bosco Prolla

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

JANEIRO DE 1982

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. João Bosco Prolla por me ter proposto o tema o presente trabalho, por sua orientação segura e dedicação constante.

Ao Grupo de Análise Funcional, Holomorfia e Teoria da Aproximação pelas discussões instrutivas e pelo incentivo.

A Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNP_q) pelo apoio financeiro.

Ao José Antonio

e à Fernanda

EXISTENCIA DE CENTROS RELATIVOS
DE CHEBYSHEV

INTRODUÇÃO

É um resultado clássico que toda subálgebra fechada de $C(X; \mathbb{R})$ é proximinal em $C(X; \mathbb{R})$, X compacto. Este resultado foi estabelecido por Mazur que entretanto não publicou a demonstração. Posteriormente Pelczynski e Semadeni publicaram demonstrações desse resultado. Diversas generalizações e extensões da proximinalidade das subálgebras de funções contínuas tem desde então aparecido na literatura.

Uma primeira idéia é a de considerar funções a valores vetoriais, substituindo $\mathbb{R}$ por um espaço de Banach E. Como neste caso $C(X;E)$ perde a estrutura de álgebra, investiga-se a proximinalidade de subespaços vetoriais com propriedades extras que os tornam generalizações das subálgebras. Nesta linha podemos citar a tese de J. Blatter, "*Grothendieck spaces in approximation Theory*", publicada na coleção "Memoirs of the American Mathematical Society", nº 120 (1972).

Outra idéia consiste em generalizar a noção de proximinalidade: em vez de perguntar se toda função f possui uma melhor aproximação por elementos da álgebra $A \subset C(X; \mathbb{R})$, tem-se o problema de tentar aproximar simultaneamente todas as funções pertencentes a um conjunto limitado $B \subset C(X; \mathbb{R})$. Neste caso, podemos considerar até mesmo a álgebra $A = C(X; \mathbb{R})$. Como as melhores aproximações dos elementos de B por A são conhecidos como centros de Chebyshev de B relativos a A, ou simplesmente centros de Chebyshev de B, se A for $C(X; \mathbb{R})$, dizemos que se trata do problema da existência de tais centros. Os primeiros a investigar essa questão foram os russos Garkavi, Kadets e Zamyatin, que estabeleceram que o espaço de Banach $C(X; \mathbb{R})$, X com pacto de Haurdorff, admite centros, isto é, quando $A = C(X;\mathbb{R})$ todo limitado $B \subset C(X;\mathbb{R})$ possui centro de Chebyshev.

Quando $A = C_b(X;E)$, a existencia de centros de Chebyshev foi estudada por Ward (1974) nos casos: (a) X paracompacto e dim $E < \infty$, E estritamente convexo; (b) X normal e E espaço de Hilbert. Estes resultados foram generalizados por Amir (1978) que provou que $C(X;E)$ admite centros para X qualquer espaço topológico e E um espaço de Banach uniformemente convexo. Anteriormente, Smith e Ward (1975), haviam mostrado que toda subálgebra fechada A de $C(X;\mathbb{R})$ é tal que todos os limitados $B \subset C(X;\mathbb{R})$ possuem centros de Chebyshev relativos a A; aqui X é um compacto de Haurdorff. Mach (1979), mostrou que nesse resultado X pode ser qualquer conjunto e A qualquer subálgebra de $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$, o espaço das funções reais, limitadas, definidas em X.

Voltando ao caso de funções a valores vetoriais observamos que uma das generalizações mais interessantes da noção de subálgebra de $C_b(X;\mathbb{R})$ é a noção de *álgebra polinomial* de $C_b(X;E)$, que contém como caso particular a noção de *subespaço de Stone-Weierstrass* de $C_b(X;E)$. O trabalho já citado de Blatter, e Yost (1980) consideram a proximinalidade de subespaços de Stone-Weierstrass no caso em que E é um espaço de Lindenstrauss real. Olech (1968) considerou a proximinalidade no caso em que E é um espaço de Banach uniformemente convexo. Lau (1979) generalizou este último resultado substituindo $C_b(X;E)$ por $\ell_\infty(X;E)$. Mach (1979) generalizou o resultado de Olech mostrando que os subespaços de Stone-Weierstrass não só são proximinais mas admitem centros relativos de Chebyshev, quando E é uniformemente convexo.

Todos estes resultados da literatura são casos particulares dos Teoremas 2.15 e 3.13 em que estabelecemos a propriedade dos centros de Chebyshev para álgebras polinomiais (E uniformemente convexo) e para espaços de Stone-Weierstrass (E Lindenstrauss real), respectivamente.

No Teorema 2.15 B pode ser qualquer limitado, e em 3.13 B é compacto.

Outro resultado clássico em Teoria da Aproximação é aquele que afirma ser o espaço dos operadores lineares compactos K(H) proximinal no espaço de todos os operadores lineares limitados L(H) num espaço de Hilbert H. Esta conjectura de Blatter (1969) foi provada por Holmes e Kripke (1971). Posteriormente, Holmes, Scranton e Ward (1975) reobtiveram este resultado a partir do fato que todo M-ideal é proximinal. De fato, Dixmier havia obtido em 1950 um resultado que afirma ser K(H) um M-ideal de L(H). A partir desses resultados passou-se a investigar pares de espaços de Banach E e F tais que K(E;F) fosse proximinal em L(E;F), ou mais geralmente tais que K(E;F) tem a propriedade dos centros de Chebyshev em L(E;F). Por exemplo, se $E = F = \ell_p$ $(1 < p < \infty)$, a proximinalidade segue do fato que $K(\ell_p)$ é um M-ideal em $L(\ell_p)$, ou então por prova direta devida a Mach e Ward (1978). Entretanto $K(\ell_1)$ *não* é um M-ideal de $L(\ell_1)$: sua proximinalidade foi provada diretamente por Mach e Ward (1978), e por Yost (1980). O caso restante foi decidido negativamente: $K(\ell_\infty)$ *não* é proximinal em $L(\ell_\infty)$, Feder (1980).

Lau (1979) provou que K(E;F) é proximinal em L(E;F) quando E é uniformemente liso e $F = C_b(X)$, X topológico qualquer. Em 1978, Mach havia obtido esse resultado para E um espaço de Hilbert, ou um espaço ℓ_p, $1 < p < \infty$, ou $E = c_o$.

Yost (1979) provou que $K(E;c_o)$ é um M-ideal em $L(E;c_o)$, para todo Banach E, generalizando um resultado correspondente de Henne-feld: $K(c_o)$ é M-ideal de $L(c_o)$.

Recentemente, Deutach, Mach e Saatkamp estabeleceram a proximinalidade de $K_N(E;F^*)$ em $L(E;F^*)$ onde $K_N(E;F^*)$ denota o conjunto dos operadores lineares $T \in L(E;F^*)$ tais que $\dim T(E) \leq N$. No capítulo 4 consideramos o problema mais geral de existência de centros de Chebyshev para subconjuntos de operadores não necessariamente lineares; em particular espaços de polinômios homogêneos contínuos. Nosso principal resultado, Teorema 4.6, tem como corolários, entre outros, os seguintes resultados: toda álgebra de von Neumann de L(H) tem a propriedade dos centros de Chebyshev, H espaço de Hilbert; $\mathcal{P}^m(E;F^*)$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em $\mathcal{P}(E;F^*)$; $\mathcal{P}_N^m(E;F^*)$ tem essa propriedade em $\mathcal{P}^m(E;F^*)$. Este último resultado generaliza aquele anteriormente citado de Deutsch, Mach e Saatkamp em duas direções: os operadores não são mais necessariamente lineares e obtivemos a propriedade mais geral dos centros de Chebyshev e não apenas a proximinalidade.

No capítulo 5 voltamos ao caso de operadores lineares e provamos que $K(E;C_o(X))$ tem a propriedade nos centros de Chebyshev em $L(E;C_o(X))$, quando E é um espaço de Banach uniformemente liso e X é localmente compacto. Este resultado é análogo ao resultado de Deutsch, Mach e Saatkamp, que afirma ser $K_N(E;C_o(X))$ proximinal em $K(E;C_o(X))$ quando E^* é, por exemplo, estritamente convexo. Nosso resultado tam bém generaliza aquele de Lau, que obtivera a proximinalidade de $K(E;C_b(X))$ em $L(E;C_b(X))$ com E uniformemente liso.

---x---

CAPÍTULO 1

NOTAÇÕES E PRELIMINARES

1.1 - DEFINIÇÃO: Sejam $(E, \| \ \|)$ um espaço normado e $W \subset E$ um subconjunto não-vazio. Diz-se que W *é proximinal em* E quando para todo $y \in E$, existe $x \in W$ tal que

$$\|x-y\| = \inf_{t \in W} \|t-y\|$$

Indicaremos por $P_W(y)$ *o conjunto de todos os* $x \in W$ *tais que*

$$\|x-y\| = \inf_{t \in W} \|t-y\|$$

É claro que, W é proximinal significa que $P_W(y) \neq \emptyset$, para todo $y \in E$.

É fácil ver que todo subconjunto proximinal é fechado.

1.2 - DEFINIÇÃO: Sejam $(E, \| \ \|)$ um espaço normado e $W \subset E$ um subconjunto não-vazio. Para cada subconjunto limitado não-vazio $B \subset E$, definimos o *raio de Chebyshev de* B *relativo a* W por

$$\mathrm{rad}_W(B) = \inf_{x \in W} \sup_{y \in B} \|x-y\|$$

Os elementos de W onde o ínfimo é assumido são chamados *centros de Chebyshev de* B *(com respeito a* W*)*. Denotaremos o conjunto de tais elementos por $\text{cent}_W(B)$. Cada elemento de $\text{cent}_W(B)$ é também chamado uma melhor aproximação simultânea de B por elementos de W.

1.3 - DEFINIÇÃO: Sejam E e W como na Definição 1.2. Diz-se que W *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* E quando, para todo $B \subset E$ limitado não-vazio, tem-se $\text{cent}_W(B) \neq \emptyset$. Em particular, quando W = E diz-se simplesmente que E *admite centros de Chebyshev*.

Tomemos B = {y} na definição 1.2. Então

$$\text{rad}_W(B) = \inf_{t \in W} \|t-y\| = \text{dist}(y,W)$$

e

$$\text{cent}_W(B) = P_W(y).$$

Portanto, todo W que tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em E é proximinal em E.

Consideraremos nesta Tese, os seguintes tipos de problemas, uma vez dado o espaço normado $(E, \|\ \|)$:

1º) determinar se $(E, \|\ \|)$ admite centros de Chebyshev;

2º) dado $W \subset E$, determinar se W tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em E;

3º) dado $W \subset E$, determinar se W é proximinal em E;

4º) dado $W \subset E$, determinar a maior classe de limitados $B \subset E$ tais que $\text{cent}_W(B) \neq \emptyset$.

Coletamos a seguir as principais notações e definições, e alguns resultados preliminares, necessários para a compreensão dos enunciados dos capítulos posteriores.

Caso não se esfecifique, todos os espaços vetoriais considerados, serão espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Se $(E, \| \ \|)$ é um espaço normado, $x \in E$ e $r > 0$, escrevemos

$$B(x,r) = \{y \in E; \|y-x\| < r\}$$

e

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in E; \|y-x\| \leq r\}$$

Se E e F são espaços vetoriais topológicos, denotaremos por $L(E;F)$ o espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de E em F; em particular, $L(E;\mathbb{K})$ será indicado por E'. A topologia fraca, definida em E por um sistema dual entre E e F, será denotada por $\sigma(E,F)$.

Se X é um conjunto não-vazio e $(E, \| \ \|)$ é um espaço normado, indicaremos por $\ell_\infty(X;E)$ o espaço normado de todas as aplicações limitadas de X em E com a norma do supremo:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

para todo $f \in \ell_\infty(X;E)$.

Quando $X = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$ e $E = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente ℓ_∞ em vez de $\ell_\infty(\mathbb{N};\mathbb{K})$.

Se X é um espaço topológico não-vazio, e E é um espaço vetorial topológico, indicaremos por $C(X;E)$ o espaço vetorial de todas as aplicações contínuas de X em E. O subespaço vetorial de $C(X;E)$ de todas as aplicações contínuas e limitadas de X em E será indicado por $C_b(X;E)$. Recordamos que $f\colon X \to E$ é dita limitada se $f(X)$ é um subconjunto limitado de E. Quando E for normado tem-se, evidentemente,

$$C_b(X;E) = \ell_\infty(X;E) \cap C(X;E)$$

e $C_b(X;E)$, neste caso, será sempre considerado como subespaço normado de $\ell_\infty(X;E)$.

Outro subespaço vetorial interessante de $C(X;E)$ é aquele constituido pelas aplicações $f \in C(X;E)$ que são nulas no infinito, isto é, tais que dada uma vizinhança V da origem de E, existe um compacto $K \subset X$ tal que $f(x) \in V$ para todo $x \notin K$. Indicaremos por $C_o(X;E)$ tal subespaço. Observemos que

$$C_o(X;E) \subset C_b(X;E)$$

É claro que $C_o(X;E)$ só tem interesse real no caso em que X é localmente compacto.

Quando E é normado, sempre consideraremos $C_o(X;E)$ como subespaço normado de $C_b(X;E)$ ou, o que é o mesmo, como subespaço normado de $\ell_\infty(X;E)$.

1.4 - **DEFINIÇÃO:** Um espaço normado $(E, \| \ \|)$ é *uniformemente convexo* se para cada ε, $0 < \varepsilon \leq 2$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $x,y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ então $\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$.

Os espaços L_p e ℓ_p com $1<p<\infty$ são exemplos de espaços uniformemente convexos (ver Clarkson [4] e Diestel [7]).

1.5 - **DEFINIÇÃO:** Um espaço normado $(E, \| \|)$ é *uniformemente liso* se a norma de E é uniformemente Fréchet-diferenciável (fora da origem), isto é,

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

existe uniformemente para $x,y \in E$ com $\|x\| = \|y\| = 1$.

1.6 - **OBSERVAÇÃO:** Vale o seguinte resultado: Seja $(E, \| \|)$ um espaço de Banach. Então E é uniformemente liso se, e somente se, o dual E' de E é uniformemente convexo. (Para uma demonstração ver, por exemplo, Diestel [7], Theorem 1, pag. 36).

São exemplos de espaços uniformemente lisos os L_p e ℓ_p, com $1 < p < \infty$.

1.7 - **DEFINIÇÃO:** Um *espaço de Lindenstrauss* é um espaço de Banach cujo dual é isometricamente isomorfo a um espaço $L_1(S, \sum, u)$.

Lindenstrauss [21], Theorem 6.1, obteve a seguinte caracterização:

1.8 - TEOREMA: *Um espaço de Banach real* E *é um espaço de Lindens-trauss se, e somente se, toda coleção de bolas fechadas de* E, *interceptando-se duas a duas e cujo conjunto dos centros é relativamente compacto tem interseção não-vazia.*

1.9 - DEFINIÇÃO: Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço de Banach. Dizemos que E *pertence à classe* P_1 se, para cada espaço de Banach F contendo E como subespaço normado, existe uma projeção linear e contínua P de F sobre E de norma $\|P\| = 1$.

1.10 - DEFINIÇÃO: Diz-se que um espaço normado $(E, \| \ \|)$ *tem a propriedade da extensão* se para cada espaço normado $(G, \| \ \|)$ e cada subespaço vetorial F de G, toda transformação linear e contínua $f: F \to E$ tem pelo menos uma extensão $\tilde{f}: G \to E$ que é linear, contínua e $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

1.11 - OBSERVAÇÃO: Um espaço de Banach $(E, \| \ \|)$ tem a propriedade da extensão se, e sómente se, pertence à classe P_1. (Nachbin, [28]).

Um espaço de Banach E tem a propriedade da extensão se, e só se, é isometricamente isomorfo a um $C(S; \mathbb{K})$, onde S é um compacto de Hausdorff extremamente desconexo (isto é, o fecho de um aberto de S é aberto em S). No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, este resultado foi estabelecido por Kelley [19], complementando resultados de Nachbin [28] e Goodner [14] que faziam a hipótese de existir um ponto extremal na bola unitária de E. No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a caracterização acima é devida a Hasumi [15].

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Nachbin [28] demonstrou que a propriedade da extensão é equivalente à propriedade da interseção binária. Ou seja, para um espaço de Banach real E, são equivalentes:

(a) E tem a propriedade da extensão

(b) E pertence à classe P_1

(c) E é isometricamente isomorfo a um espaço $C(S;\mathbb{R})$ onde S é um compacto de Hausdorff extremamente desconexo.

(d) toda coleção de bolas fechadas de E, que se intersecionam duas a duas, tem interseção não-vazia.

1.12 - DEFINIÇÃO: Sejam X um espaço topológico e E um espaço vetorial topológico localmente convexo. Diz-se que um subespaço vetorial $W \subset C(X;E)$ é uma *álgebra polinomial* se

$$A = \{\gamma \circ g \; ; \; \gamma \in E', \; g \in W\}$$

é uma subálgebra de $C(X;\mathbb{K})$ tal que $A \otimes E \subset W$.

Uma álgebra polinomial W é dita auto-adjunta se a subálgebra A é auto-adjunta.

Uma referencia básica para álgebras polinomiais é Prolla [31].

1.13 - DEFINIÇÃO: Sejam X um espaço topológico e E um espaço normado. Um subespaço vetorial $W \subset C_b(X;E)$ é um *subespaço de Stone-Weierstrass* se existe um espaço topológico Y e uma sobrejeção contínua e fechada $\pi: X \to Y$ tais que

$$W = \{g \circ \pi \; ; \; g \in C_b(Y;E)\}$$

1.14 - OBSERVAÇÃO: Se X é um espaço paracompacto e $\pi : X \to Y$ é uma sobrejeção contínua e fechada então Y é paracompacto (ver Dugundji [9]).

1.15 - PROPOSIÇÃO: *Sejam X um espaço topológico e $(E, \| \ \|)$ um espaço normado. Todo subespaço de Stone-Weierstrass W de $C_b(X;E)$ é uma álgebra polinomial fechada e auto-adjunta.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja W um tal subespaço. Por 1.13,

$$W = \{g \circ \pi \ ; \ g \in C_b(Y;E)\}$$

onde Y é um espaço topológico e $\pi : X \to Y$ uma sobrejeção contínua e fechada. Seja

$$A = \{\gamma \circ f \ ; \ \gamma \in E' \ , \ f \in W\}$$

É fácil ver que A é uma subálgebra de $C(X; \mathbb{K})$.

Sejam $\gamma \circ f \in A$ e $s \in E$. Queremos mostrar que $(\gamma \circ f) \otimes s \in W$. Seja $g \in C_b(Y;E)$ tal que $f = g \circ \pi$, e seja $(\gamma \circ g) \otimes s \in C_b(Y;E)$. Por 1.13, $((\gamma \circ g) \otimes s) \circ \pi \in W$. Como

$$\begin{aligned} ((\gamma \circ f) \otimes s)(x) &= \gamma(f(x))s \\ &= \gamma(g(\pi x))s \\ &= [((\gamma \circ g) \otimes s) \circ \pi](x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, temos que

$$(\gamma \circ f) \otimes s \in W$$

Provemos que a subálgebra A é auto-adjunta. Seja pois $\gamma \circ f \in A$. Então $f = g \circ \pi$ para alguma $g \in C_b(Y;E)$, e ainda

$$\overline{\gamma \circ f} = \overline{\gamma \circ g \circ \pi} = \overline{(\gamma \circ g)} \circ \pi.$$

Por outro lado, se $v \in E$, $v \neq 0$ temos

$$w = \overline{\gamma \circ f} \otimes v = ((\overline{\gamma \circ g}) \circ \pi) \otimes v$$

$$= (\overline{\gamma \circ g} \otimes v) \circ \pi$$

Logo, $w \in W$ pois $\overline{\gamma \circ g} \otimes v \in C_b(Y;E)$. Tomando $\psi \in E'$ com $\psi(v) = 1$ resulta que

$$\psi \circ w = \overline{\gamma \circ f}$$

pertence a A.

Seja agora $(f_n)_{n \in N}$ uma sequencia em W e seja $f \in C_b(X;E)$ tal que $f_n \to f$ na norma do supremo. Para cada $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$. Como $f_n \in W$, temos que $f_n = g_n \circ \pi$ onde $g_n \in C_b(Y;E)$.
Segue-se que, $g_n(\pi(x)) \to f(x)$ em E, para cada $x \in X$.

Seja $y \in Y$. Existe $x \in X$ tal que $y = \pi(x)$.

Definimos $g(y) = f(x)$. Suponhamos que $\pi(x) = \pi(x')$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $g_n(\pi(x)) = g_n(\pi(x'))$, e segue daí que $f_n(x) = f_n(x')$. Como E é de Hausdorff, resulta da unicidade do limite que $f(x) = f(x')$. Portanto, $g(\pi(x)) = g(\pi(x'))$. Como π é contínua e fechada, $g \in C_b(Y;E)$. Além disso, $g \circ \pi = f$, o que significa que $f \in W$. Portanto, W é fechado.

1.16 - **DEFINIÇÃO:** Sejam X e Y espaços topológicos e denotemos por $\Gamma(Y)$ o conjunto das partes não-vazias de Y. Uma aplicação $\Phi: X \to \Gamma(Y)$ é chamada de *portador*:

Um portador $\Phi: X \to \Gamma(Y)$ é dito *semicontínuo inferiormente* se para todo aberto $G \subset Y$, o conjunto $\{x \in X ; \Phi(x) \cap G \neq \emptyset\}$ é aberto em X.

Uma *seleção contínua* γ para o portador $\Phi: X \to \Gamma(Y)$ é uma aplicação contínua $\gamma: X \to Y$ tal que $\gamma(x) \in \Phi(x)$, para todo $x \in X$.

1.17 - **TEOREMA:** (Michael [27], Theorem 1). *Seja X um espaço para-compacto. Todo portador semicontínuo inferiormente Φ de X no conjunto das partes fechadas, convexas e não-vazias de um espaço de Banach Y, admite uma seleção contínua.*

1.18 - **OBSERVAÇÃO:** Na demonstração do Teorema 1.17 feita por Michael, observamos que, se para todo $x \in X$, o conjunto $\Phi(x)$ é limitado em Y pela mesma constante $M > 0$, então a seleção obtida para Φ é contínua e limitada.

1.19 - OBSERVAÇÃO: Vale o seguinte resultado: Seja $\Phi: X \to \Gamma(Y)$ um portador semicontínuo inferiormente. Sejam $a \in Y$ e $Z \subset X$ um subconjunto fechado não-vazio tais que $a \in \Phi(x)$, para todo $x \in Z$. Então, o portador $\Phi_1: X \to \Gamma(Y)$ definido por:

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{se} \quad x \in X \setminus Z \\ \\ \{a\} & \text{se} \quad x \in Z \end{cases}$$

é também semicontínuo inferiormente.

Com efeito, por Michael [27], Proposition 2.1 é suficiente mostrar que dados $x_o \in X$, $y \in \Phi_1(x_o)$ e uma vizinhança V de y em Y, existe uma vizinhança U de x_o em X tal que $\Phi_1(x) \cap V \neq \emptyset$, para todo $x \in U$.

Sejam $x_o \in X$, $y \in \Phi_1(x_o)$ e V como acima.

1º) Se $x_o \in Z$ então $y = a \in \Phi(x_o)$. Como Φ é semicontínua inferiormente, pela mesma Proposição existe uma vizinhança U de x_o em X tal que $\Phi(x) \cap V \neq \emptyset$, para todo $x \in U$.
Seja $x \in U$. Se $x \in Z$, $\Phi_1(x) \cap V = \{a\} \neq \emptyset$.
Por outro lado, se $x \in X \setminus Z$, temos $\Phi_1(x) \cap V = \Phi(x) \cap V \neq \emptyset$.

2º) Se $x_o \in X \setminus Z$ então $y \in \Phi(x_o)$, e pela semicontinuidade inferior de Φ, existe uma vizinhança U_1 de x_o em X tal que $\Phi(x) \cap V \neq \emptyset$, para todo $x \in U$. Por outro lado, como Z é fechado em X, existe uma vizinhança U_2 de x_o em X tal que $U_2 \subset X \setminus Z$. Seja $U = U_1 \cap U_2$. Como $U \cap (X \setminus Z) = \emptyset$, temos

$$\Phi_1(x) \cap V = \Phi(x) \cap V \neq \emptyset$$

para todo $x \in U$.

---x---

CAPÍTULO 2

MELHOR APROXIMAÇÃO SIMULTÂNEA DE FUNÇÕES LIMITADAS POR FUNÇÕES CONTÍNUAS

2.1 - **DEFINIÇÃO**: Seja $(E,\| \ \|)$ um espaço normado. Para cada $\varepsilon > 0$, denotaremos por E_ε a aplicação definida por:

$$E_\varepsilon(u,v) = v, \text{ se } \|u-v\| \leq \varepsilon$$

$$E_\varepsilon(u,v) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|u-v\|}\right) u + \frac{\varepsilon}{\|u-v\|} v, \text{ se } \|u-v\| > \varepsilon$$

para todo $(u,v) \in E \times E$.

Observemos que a aplicação E_ε é contínua, $E_\varepsilon(0,0) = 0$ e ainda:

$$\|E_\varepsilon(u,v) - u\| \leq \varepsilon$$

para todo $(u,v) \in E \times E$. Mais ainda, $E_\varepsilon(u,v)$ é uma *combinação convexa* de u e v.

2.2 - **DEFINIÇÃO**: Sejam $(E,\| \ \|)$ um espaço normado e $M \subset E$ um subconjunto não-vazio. Diz-se que *o par* (E,M) *tem a propriedade* (P) se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1) $E_\varepsilon(u,v) \in M$, para todo $\varepsilon > 0$ e $(u,v) \in M \times M$,

2) Dados $r > 0$, $\varepsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\bar{B}(u,r+\delta) \cap \bar{B}(v,r+\theta) \subset \bar{B}(E_\varepsilon(u,v), r+\theta)$$

para todo $0 < \theta < \delta$ e $(u,v) \in M \times M$.

Quando o par (E,E) tem a propriedade acima, diz-se que *o espaço* $(E,\|\ \|)$ *tem a propriedade* (Q).

A definição da propriedade (P) dada acima foi sugerida por propriedade análoga introduzida por Mach [23].

Segundo Mach [23], dados um espaço normado E, e um subconjunto $M \subset E$, diz-se que o par (E,M) tem a propriedade (P_1) (respectivamente (P_2)) se, dados $r > 0$, $\varepsilon > 0$, existirem $\delta(\varepsilon) > 0$ e uma função (respectivamente, contínua) $h: M \times M \to M$ tais que:

$$\|h(x,y) - x\| \leq \varepsilon$$

e

$$\bar{B}(x, r+\delta(\varepsilon)) \cap \bar{B}(y, r+\theta) \subset \bar{B}(h(x,y), r+\theta)$$

para todo $x,y \in M$ e $|\theta| < \delta(\varepsilon)$.

2.3 - EXEMPLO: Sejam $(E,\|\ \|)$ um espaço normado *uniformemente convexo* e $M \subset E$ *um subconjunto convexo*. O par (E,M) tem a propriedade (P). (ver Mach [23], Proposition 1). Em particular, o espaço $(E,\|\ \|)$ tem a propriedade (Q), quando E é uniformemente convexo.

2.4 - LEMA: *Seja* $(E,\|\ \|)$ *um espaço normado com a propriedade* (Q). *Para todo subconjunto* M *de* E *satisfazendo a condição* 1) *da definição* 2.2, *o par* (E,M) *tem a propriedade* (P).

DEMONSTRAÇÃO: A condição 2) da definição 2.2 aplicada ao par (E,M) é um caso particular da sua análoga para (E,E).

2.5 - **OBSERVAÇÃO:** Se X é um conjunto não-vazio e $(E,\| \|)$ um espaço normado, consideraremos sempre o espaço $\ell_\infty(X;E)$ munido da *norma do supremo*:

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| ;\ x \in X\}$$

para toda $f \in \ell_\infty(X;E)$. Quando E é um espaço de Banach, o mesmo acontece com $\ell_\infty(X;E)$.

2.6 - **DEFINIÇÃO:** Sejam X e $(E,\| \|)$ como na Observação 2.5, e $\varepsilon > 0$. Seja E_ε como na definição 2.1. Se $f,g \in \ell_\infty(X;E)$, denotaremos por $E_\varepsilon^*(f,g)$ a aplicação definida por:

$$E_\varepsilon^*(f,g)\ (x) = E_\varepsilon(f(x),\ g(x))$$

para todo $x \in X$.

Observemos que $E_\varepsilon^*(f,g) \in \ell_\infty(X;E)$. Em particular, se X é um espaço topológico e $f,g \in C_b(X;E)$, então $E_\varepsilon^*(f,g) \in C_b(X;E)$.

O seguinte resultado, devido a Mach [23], é fundamental no decorrer deste capítulo, e por esse motivo, apresentaremos aqui o seu enunciado.

2.7 - **LEMA:** (Mach [23], Theorem 2). *Sejam $(F,\| \|)$ um espaço normado e $V \subset F$ um subconjunto completo. Se o par (F,V) tem a propriedade (P_1) então V tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em F.*

2.8 - **TEOREMA:** *Sejam X um conjunto não-vazio e $(E,\| \|)$ um espaço normado (respectivamente, de Banach) com a propriedade (Q). Seja $W \subset \ell_\infty(X;E)$*

um subconjunto completo (respectivamente, fechado) e suponhamos que para todo $\varepsilon > 0$ *e* $f,g \in W$ *se tenha* $E_\varepsilon^*(f,g) \in W$. *Então* W *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;E)$ *e, a fortiori, é proximinal em* $\ell_\infty(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $r > 0$, $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existente pela propriedade (Q). Podemos definir uma aplicação $H_\varepsilon : W \times W \to W$, colocando

$$H_\varepsilon(f,g) = E_\varepsilon^*(f,g)$$

para todo $f,g \in W$. Resulta das propriedades da aplicação E_ε que

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon(f,g) - f\| &= \|E_\varepsilon^*(f,g) - f\| \\ &= \sup\{\|E_\varepsilon(f(x), g(x)) - f(x)\| ; x \in X\} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $f,g \in W$.

Por outro lado, se $0 < \theta < \delta$ e $f,g \in W$ então $h \in \bar{B}(f,r+\delta) \cap \bar{B}(g,r+\theta)$ implica que para todo $x \in X$,

$$h(x) \in \bar{B}(f(x), r+\delta) \cap \bar{B}(g(x), r+\theta)$$

Pela parte 2) da propriedade (Q), vem

$$h(x) \in \bar{B}(E_\varepsilon(f(x), g(x)), r+\theta)$$

para todo $x \in X$. Portanto

$$h \in \bar{B}(H_\varepsilon(f,g), r+\theta)$$

Como W é completo, basta aplicar o Lema 2.7 e a demonstração está completa.

2.9 - **COROLARIO:** *Sejam* X *um conjunto não-vazio e* $(E,\| \ \|)$ *um espaço de Banach com a propriedade* (Q). *Todo* $\ell_\infty(X;\mathbb{K})$ *- submódulo fechado* W *de* $\ell_\infty(X;E)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;E)$ *e, em particular, é proximinal em* $\ell_\infty(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f,g \in W$ e $\varepsilon > 0$. Consideremos a função real β_ε definida por

$$\beta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon}{t} & \text{se } |t| > \varepsilon \end{cases}$$

Observando a definição 2.1 e utilizando a função β_ε acima, podemos escrever

$$E_\varepsilon(f(x),\ g(x)) = f(x)+\beta_\varepsilon(\|f(x)-g(x)\|)[g(x)-f(x)]$$

para todo $x \in X$.

Usando a notação

$$\psi_{\varepsilon,f,g}(x) = \beta_\varepsilon(\|f(x) - g(x)\|)$$

resulta que $\psi_{\varepsilon,f,g} \in \ell_\infty(X;\mathbb{K})$, e ainda pela definição 2.6,

$$E_\varepsilon^*(f,g) = f + \psi_{\varepsilon,f,g} \cdot (g-f)$$

Como W é $\ell_\infty(X;\mathbb{K})$ - submodulo, segue daí que

$$E^*_\varepsilon(f,g) \in W$$

Basta aplicar agora o Teorema 2.8.

2.10 - TEOREMA: *Sejam X um espaço topológico e $(X,\| \ \|)$ um espaço de Banach com a propriedade (Q). Seja $W \subset C_b(X;E)$ um subconjunto fechado tal que para todo $\varepsilon > 0$ e $f,g \in W$ se tenha $E^*_\varepsilon(f,g) \in W$. Então W tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, em $C_b(X;E)$. Em particular, W é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, em $C_b(X;E)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $C_b(X;E)$ é completo, o mesmo ocorre com W, e o resultado segue do Teorema 2.8.

2.11 - COROLARIO: *Sejam X e $(E,\| \ \|)$ como no Teorema 2.10. Então $C_b(X;E)$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$. Em particular, $C_b(X;E)$ admite centros de Chebyshev.*

DEMONSTRAÇÃO: $W = C_b(X;E)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.10.

Observemos que, segue-se do Corolário 2.11 que, se E *é um espaço de Banach uniformemente convexo e* X *é qualquer espaço topológico, então em* $C_b(X;E)$, *todo subconjunto limitado e não-vazio tem um centro de Chebyshev, isto é,* $C_b(X;E)$ *admite centros de Chebyshev.* Este resultado deve-se a D. Amir ([1], Theorem 2). Anteriormente, J.D. Ward [35] havia provado esse resultado nos casos particulares em que: 1) E é um espaço estritamente convexo e de dimensão finita (logo uniformemente convexo) e X é paracompacto; 2) E é um espaço de Hilbert e X é normal.

Quando X *é compacto* e $E = \mathbb{R}$, segue-se do Corolário 2.11 que $C(X;\mathbb{R})$ *admite centros de Chebyshev*. Quando $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, este resultado deve-se a I.M. Kadets e V. Zamyatin [18].

2.12 - **TEOREMA:** *Sejam X um espaço topológico e $(E,\|\ \|)$ um espaço de Banach com a propriedade (Q). Todo subespaço vetorial fechado $W \subset C_b(X;E)$ que é um $C_b(X;\mathbb{K})$ - módulo tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Análoga à do Corolário 2.9 com a observação que as funções $\psi_{\varepsilon,f,g}$ lá empregadas pertencem agora ao espaço $C_b(X;\mathbb{K})$.

Gostaríamos de observar que o Teorema 2.12 generaliza o Corolário 2.11. Além disso, segue-se do Teorema 2.12 que, se E *é um espaço de Banach uniformemente convexo e* X *é qualquer espaço topológico, todo* $C_b(X;\mathbb{K})$ - *módulo fechado* $W \subset C_b(X;E)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;E)$. Este resultado deve-se a Ka-Sing Lau ([20], Theorem 4.4) e, é claro, generaliza o resultado citado acima de D. Amir.

2.13 - **COROLÁRIO:** *Sejam S e $(E,\|\ \|)$ como no Teorema 2.12. Então, todo $C(X;[0,1])$ - módulo convexo e fechado $W \subset C_b(X;E)$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Recordamos que W é um $C_b(X;\mathbb{K})$ - módulo convexo se para todo $f,g \in W$ e todo $\beta \in C_b(X;\mathbb{K})$, tem-se que $(1-\beta)f + \beta g \in W$.

Se $f,g \in W$ e $\varepsilon > 0$, usando a mesma notação que na demonstração do Corolário 2.9, temos:

$$E_\varepsilon^*(f,g) = f + \psi_{\varepsilon,f,g} \cdot (g-f)$$

$$= (1 - \psi_{\varepsilon,f,g})\, f + \psi_{\varepsilon,f,g} \cdot g$$

onde $\psi_{\varepsilon,f,g} \in C(X;[0,1])$. Portanto,

$$E_\varepsilon^*(f,g) \in W$$

e o resultado segue do Teorema 2.8.

2.14 - **COROLÁRIO:** *Sejam X um espaço topológico e $(E,\|\ \|)$ um espaço de Banach com a propriedade (Q). Seja $Z \subset X$ um subconjunto fechado e não-vazio. Então*

$$W = \{f \in C_b(X;E);\ f_{/Z} \equiv 0\}$$

tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $f,g \in W$ e $\varepsilon > 0$, como $E_\varepsilon(0,0) = 0$, resulta que

$E_\varepsilon^*(f,g) \in W$. Basta aplicar o Teorema 2.8.

Uma demonstração da proximinalidade de tais subspaços, quando E é um espaço de Banach qualquer, foi feita por Yost ([36], Proposition 2.4) através de propriedade das n-bolas.

2.15 - **TEOREMA**: *Sejam X um espaço compacto e $(E,\|\ \|)$ um espaço de Banach com a propriedade (Q). Toda álgebra polinomial fechada e auto-adjunta $W \subset C(X;E)$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, em particular, é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f,g \in W$ e $\varepsilon > 0$. Seja $x \in X$ e suponhamos que para todo $h \in W$ se tenha $h(x) = 0$. Então

$$E_\varepsilon^*(f,g)(x) = E_\varepsilon(f(x),g(x)) = E_\varepsilon(0,0) = 0$$

Por outro lado, se $x,y \in X$ e $h(x) = h(y)$ para todo $h \in W$, resulta da definição de $E_\varepsilon^*(f,g)$ que

$$E_\varepsilon^*(f,g)(x) = E_\varepsilon^*(f,g)(y)$$

Pelo Teorema de Stone-Weierstrass para álgebras polinomiais, temos que $E^*(f,g) \in W$. Basta aplicar o Teorema 2.8.

2.16 - **COROLÁRIO**: *Sejam X e $(E,\|\ \|)$ como no Teorema 2.15. Todo subespaço de Stone-Weierstrass W de $C(X;E)$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Imediata a partir do Corolário 2.15 e da Proposição 1.15.

Segue-se do Corolário 2.16 que se *X é um espaço compacto e* $(E, \| \ \|)$ *é um espaço de Banach uniformemente convexo então todo subespaço de Stone-Weierstrass de* $C(X;E)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;E)$ *e, a fortiori, em* $C(X;E)$. Olech ([29], Theorem 2) havia provado a proximinalidade de tais subespaços em C(X;E). Mach ([24], Theorem 1.4) generalizou o resultado de Olech para a existencia de centros relativos de Chebyshev (em C(X;E)).

2.17 - COROLÁRIO: *Seja X um espaço compacto. Toda subálgebra fechada e auto-adjunta A de* $C(X;\mathbb{K})$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;\mathbb{K})$ *e, a fortiori, em qualquer subespaço de* $\ell_\infty(X;\mathbb{K})$ *que contenha A.*

DEMONSTRAÇÃO: $\mathbb{K}$ é uniformemente convexo quando munido de seu valor absoluto usual e, em $C(X;\mathbb{K})$ as noções de subálgebra e de álgebra polinomial coincidem.

2.18 - COROLÁRIO: *Seja X um conjunto não-vazio. Toda subálgebra fechada e auto-adjunta A de* $\ell_\infty(X;\mathbb{K})$ *tem a propriedade dos centros de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;\mathbb{K})$. *Em particular, se X é um espaço topológico, toda subálgebra fechada e auto-adjunta A de* $C_b(X;\mathbb{K})$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;\mathbb{K})$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos X_d o espaço topológico obtido munindo X da topologia discreta. Então

$$\ell_\infty(X; \mathbb{K}) = C_b(X_d; \mathbb{R})$$

Como X_d é completamente regular e de Hausdorff, $C_b(X_d; \mathbb{R})$ é isometricamente isomorfo como C^*-álgebra à álgebra $C(\beta X_d; \mathbb{K})$, e o resultado segue do Corolário 2.17.

Quando X é um espaço topológico, qualquer subálgebra fechada de $C_b(X; \mathbb{K})$ é fechada em $\ell_\infty(X; \mathbb{K})$, e o resultado segue da primeira parte.

Observemos que, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e X *é compacto*, segue-se do Corolário 2.18 que *toda subálgebra fechada* $A \subset C(X; \mathbb{R})$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $C(X; \mathbb{R})$. Este resultado deve-se a Smith e Ward ([34], Theorem 1). Em particular, toda subálgebra fechada de $C(X; \mathbb{R})$ é proximinal em $C(X; \mathbb{R})$. Este resultado foi estabelecido por A. Pelczynski (ver também a prova (inédita) devida a S. Mazur, e que Semadeni publicou em seu livro [33], pag. 124).

Yost ([36] Corollary 2.3) estabeleceu que toda subálgebra fechada de $C(X; \mathbb{R})$ tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ bolas e, portanto, é proximinal em $C(X; \mathbb{R})$.

2.19 EXEMPLO: Seja X um conjunto não-vazio. Consideremos o reticulado de Banach $\ell_\infty(X; \mathbb{R})$. Para cada $\varepsilon > 0$, a função $\mathbb{R}_\varepsilon$ pode ser escrita

$$\mathbb{R}_\varepsilon(u,v) = \begin{cases} v & \text{se } |u-v| \leq \varepsilon \, , \\ \\ u \pm \varepsilon v & \text{se } |u-v| > \varepsilon \end{cases}$$

para todo $u,v \in \mathbb{R}$. Consequentemente, se $f,g \in \ell_\infty(X;\mathbb{R})$ podemos representar a função $\mathbb{R}_\varepsilon^*(f,g)$ por

$$\mathbb{R}_\varepsilon^*(f,g) = \sup(\inf(g,f+\varepsilon),\ f-\varepsilon)$$

Desta representação e do Teorema 2.8 decorre o seguinte resultado

2.20 - **PROPOSIÇÃO**: *Seja* X *um conjunto não-vazio. Todo reticulado fechado* $L \subset \ell_\infty(X;\mathbb{R})$ *tal que para todo* $f \in L$ *e* $\varepsilon > 0$*, se tenha* $f \pm \varepsilon \in L$*, tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$.

2.21 - **EXEMPLO**: Seja $(X;\leq)$ um conjunto pre-ordenado. Indicaremos por $\mathcal{J}$ *o conjunto das funções não-decrescentes de* $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$. Se f é não-decrescente e $\varepsilon > 0$, é imediato que $f+\varepsilon$ e $f-\varepsilon$ são não-decrescentes. Logo, $\mathcal{J}$ é um reticulado fechado que satisfaz as hipóteses da Proposição 2.20.

2.22 - **EXEMPLO**: Sejam X um conjunto não-vazio e $a,b \in \ell_\infty(X;\mathbb{R})$. Consideremos o intervalo

$$[a,b] = \{h \in \ell_\infty(X;\mathbb{R}); a(x) \leq h(x) \leq b(x),\ \forall x \in X\}$$

e sejam $f,g \in [a,b]$ e $\varepsilon > 0$. Consideremos a representação de $\mathbb{R}_\varepsilon^*(f,g)$

como acima, e seja $x \in X$. Como $a(x) \leq g(x)$ e $a(x) \leq f(x) \leq f(x) + \varepsilon$, resulta que

$$a(x) \leq \inf\,(g(x),\ f(x)+\varepsilon) \leq \mathbb{R}_\varepsilon^*(f,g)(x)$$

Por outro lado, das desigualdades

$$f(x) - \varepsilon < f(x) \leq b(x)$$

e

$$\inf(g(x),\ f(x)+\varepsilon) \leq g(x) \leq b(x)$$

resulta que $\mathbb{R}_\varepsilon^*(f,g)(x) \leq b(x)$. Como x é arbitrário, segue que

$$\mathbb{R}_\varepsilon^*(f,g) \in [a,b]$$

Decorre daí e do Teorema 2.8 o seguinte resultado

2.23 - PROPOSIÇÃO: *Seja X um conjunto não-vazio. Para cada par a,b em* $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$, *o intervalo* $[a,b]$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$ *e, a fortiori, é proximinal em* $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$.

Observemos que $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$ é um reticulado de Banach e que, portanto, por [12], Lemma 3.5 , o intervalo $[a,b]$ é proximinal em $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$. Mas, pela Proposição 2.23 acima, vemos que $[a,b]$ tem, na verdade, a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$, e esta conclusão não podemos retirar do resultado abstrato de Franchetti e Cheney [12].

Os resultados das proposições 2.20 e 2.23 podem ser generalizados, considerando-se X um conjunto não-vazio e E um reticulado de Banach, com a propriedade (Q) e com uma unidade de ordem e. (ver Schaefer [32], capítulo V). Para cada $\varepsilon > 0$, a função E_ε pode ser escrita

$$E_\varepsilon(u,v) = \begin{cases} v & \text{se } \|u-v\| \leq \varepsilon \ , \\ \\ u \pm \varepsilon e & \text{se} \|u-v\| > \varepsilon \end{cases}$$

para todo $u,v \in E$. De modo análogo ao do exemplo 2.19 podemos representar $E_\varepsilon^*(f,g)$ por

$$E_\varepsilon^*(f,g) = \sup\,(\inf(g,f+\varepsilon e),\ f-\varepsilon e)$$

para todo $f,g \in \ell_\infty(X;E)$.

2.24 - PROPOSIÇÃO: *Sejam X um conjunto não-vazio e E um reticulado de Banach com a propriedade (Q) e com uma unidade de ordem e. Todo reticulado fechado $L \subset \ell_\infty(X;E)$ tal que para todo $f \in L$ e $\varepsilon > 0$, se tenha $f \pm \varepsilon e \in L$, tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Análoga à da Proposição 2.20.

Sejam X e E como na Proposição 2.24. Para cada par $a,b \in \ell_\infty(X;E)$, definimos o intervalo $[a,b]$ como no exemplo 2.22. De modo análogo ao da Proposição 2.23 demonstra-se o seguinte resultado

2.25 - **PROPOSIÇÃO:** *Sejam X e E como na Proposição 2.24. Para cada par a,b* $\in \ell_\infty(X;E)$, *o intervalo* $[a,b]$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;E)$ *e, em particular, é proximinal em* $\ell_\infty(X;E)$.

2.26 - **TEOREMA:** *Sejam X um espaço localmente compacto e* $(E,\| \ \|)$ *um espaço de Banach com a propriedade (Q). Seja* $W \subset C_0(X;E)$ *um subconjunto fechado tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *e* $f,g \in W$ *se tenha* $E_\varepsilon^*(f,g) \in W$. *Então W tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\ell_\infty(X;E)$ *e, a fortiori, em* $C_b(X;E)$ *e em* $C_0(X;E)$. *Em particular, W é proximinal em* $\ell_\infty(X;E)$ *e, a fortiori, em* $C_b(X;E)$ *e em* $C_0(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\varepsilon > 0$ e $f,g \in W$. Existe um subconjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|g(x)\| < \varepsilon$$

para todo $x \in X \setminus K$. Resulta daí que

$$\|E_\varepsilon^*(f,g)(x)\| < \varepsilon$$

para todo $x \in X \setminus K$. Portanto, $E_\varepsilon^*(f,g) \in C_0(X;E)$

Basta então aplicar o Teorema 2.10.

2.27 **COROLÁRIO:** *Sejam X e E como no Teorema 2.26. Então $C_o(X;E)$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, em $C_n(X;E)$. Em particular, $C_o(X;E)$ admite centros de Chebyshev.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta considerar $W = C_o(X;E)$ no Teorema 2.26.

Amir e Deutsch ([2], Proposition 3.4) deram uma prova construtiva de que $C_o(X;E)$ é proximinal em $C(X;E)$, quando E é uniformemente convexo.

2.28 - **COROLÁRIO:** *Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço de Banach com a propriedade (Q). Então $C_0(\mathbb{N};E)$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ e, a fortiori, é proximinal em $\ell_\infty(X;E)$. Em particular, $C_0(\mathbb{N};E)$ admite centros de Chebyshev.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta aplicar o Corolário 2.27, munindo $\mathbb{N}$ da topologia discreta.

2.29 **COROLÁRIO:** *O espaço c_o tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em ℓ_∞ e, a fortiori, é proximinal em ℓ_∞. Em particular, c_o admite centros de Chebyshev.*

DEMONSTRAÇÃO: $c_o = C_o(\mathbb{N};\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}$ é uniformemente convexo quando munido de seu valor absoluto usual.

Ressaltamos aqui que, para um espaço de Banach qualquer E, a proximinalidade de $C_o(\mathbb{N};E)$ resulta do fato que tais subespaços são M-ideais em $\ell_\infty(X;E)$ (ver Yost [36], Lemma 2.6).

2.30 - **PROPOSIÇÃO:** *Sejam* X *um espaço topológico,* $(E,\|\ \|)$ *um espaço normado com a propriedade* (Q) *e* $M \subset E$ *um subconjunto completo e convexo. Então*

$$C_b(X;M) = \{f \in C_b(X;E);\ f(X) \subset M\}$$

tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E)$ *e, em particular, é proximinal em* $\ell_\infty(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como M é convexo, pelo Lema 2.4 o par $(E;M)$ tem a propriedade (P). A demonstração segue agora analogamente à do Teorema 2.8.

O seguinte resultado será utilizado no decorrer deste capítulo. Para as definições pertinentes ver Diestel e Uhl [8].

2.31 - **PROPOSIÇÃO:** *Sejam* $(S, \sum, u)$ *um espaço de medida σ-finita e positiva e* F *um espaço de Banach satisfazendo a propriedade de Radon-Nikodym com respeito a* $(S, \sum, u)$. *Então,* $L(L_1(S, \sum, u); F)$ *é isometricamente isomorfo ao espaço* $L_\infty(S, \sum, u; F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, onde os conjuntos são dois a dois disjuntos e $u(S_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\sum_n = \{A \in \sum\ ;\ A \subset S_n\}$ e consideremos $T \in L(L_1(S, \sum, u); F)$.

Para cada n definamos $T_n(g) = T(\tilde{g})$, para todo elemento $g \in L_1(S_n, \sum_n u)$, onde $\tilde{g} \equiv g$ em S_n e $\tilde{g} \equiv 0$ em $S \setminus S_n$.

É fácil ver que T_n é linear e contínuo.

Por Diestel ([8], Theorem 5 pag. 63), existe $g_n \in L_\infty(S_n, \sum_n, u ; F)$ tal que

$$T_n(g) = \int_{S_n} g\, g_n\, d u$$

e $\|T_n\| = \text{ess sup } \|g_n\|_F$.

Seja $g \in L_\infty(S, \sum, u; F)$ tal que $g/_{S_n} = g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $f. \in L_1(S, \sum, u)$ tem-se

$$\int_S f\, g\, d u = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} (f.g)\chi_{S_n}\, d u$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} (f.\chi_{S_n})gn\, d u$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(f\chi_{S_n})$$

$$= T(f)$$

Reciprocamente, se $g \in L_\infty(S, \sum, u;F)$ definamos

$$T(f) = \int_S f\, g\, d\, u$$

para todo $f \in L_1(S, \sum, u)$. Então T é um operador linear e contínuo de $L_1(S, \sum, u)$ em F, e $\|T\| = \text{ess sup } \|g\|_F$.

2.32 - **PROPOSIÇÃO:** *Sejam* $(S, \sum, u)$ *e F como na Proposição 2.31. O espaço* $K(L_1(S, \sum, u); F)$ *é isometricamente isomorfo ao subespaço* $K_\infty(S, \sum, u; F)$ *de* $L_\infty(S, \sum, u; F)$ *consistindo dos elementos cuja imagem é u-essencialmente relativamente compacta em F.*

Para a demonstração desse resultado, ver Dunford-Schwartz [10], Theorem 10, pag. 507.

2.33 - **TEOREMA:** *Sejam* $(S, \sum, u)$ *e F como na Proposição 2.31. Seja* $W \subset L_\infty(S, \sum, u; F)$ *um subconjunto fechado tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *e* $f, g \in W$ *se tenha* $E_\varepsilon^*(f, g) \in W$. *Então W tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L_\infty(S, \sum, u; F)$ *e, em particular, é proximinal em* $L_\infty(S, \sum, u; F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Perfeitamente análoga à demonstração do Teorema 2.8, observando que aqui

$$\|f\| = \underset{s \in S}{\text{ess sup}} \|f(s)\|$$

para todo $f \in L_\infty(S, \sum, u; F)$.

2.34 - TEOREMA: *Sejam* (S, Σ, u) *um espaço de medida* σ-*finita e positiva e* F *um espaço de Banach satisfazendo a propriedade de Radon-Nikodym com respeito a* (S, Σ, u). *O espaço* $K(L_1(S, \Sigma, u);F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(L_1(S, \Sigma, u);F)$ *e, em particular, é proximinal em* $L(L_1(S, \Sigma, u);F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelas Proposições 2.31 e 2.32, $L(L_1(S, \Sigma, u);F)$ e $L_\infty(S, \Sigma, u;F)$ são isometricamente isomorfos, bem como também o são $K(L_1(S, \Sigma, u);F)$ e $K_\infty(S, \Sigma, u;F)$, desde que todo espaço uniformemente convexo tem a propriedade de Radon-Nikodym (Clarkson [4]).

Sejam $\varepsilon > 0$ e $f,g \in K_\infty(S, \Sigma, u;F)$. Usando a mesma notação que na demonstração do Corolário 2.9 temos

$$F_\varepsilon^*(f,g)(s) = f(s) + \beta_\varepsilon(\|f(s) - g(s)\|)[g(s) - f(s)]$$

para todo $s \in S$. Sejam N_f e N_g, respectivamente, os conjuntos de medida u-nula correspondentes a f e g, pela definição de $K_\infty(S, \Sigma, u;F)$ e consideremos $K_f = f(S \setminus N_f)$ e $K_g = g(S \setminus N_g)$. Temos que K_f e K_g são relativamente compactos.

Seja $N = N_f \cup N_g$ o conjunto de medida u-nula. Se $s \in S \setminus N$ então

$$F_\varepsilon^*(f,g)(s) \in K_f + [0,1](K_g - K_f)$$

Logo,

$$F_\varepsilon^*(f,g)(X \setminus N) \subset K$$

2.35 - COROLÁRIO: *Sejam* (S, Σ, u) *um espaço de medida* σ*-finita e positiva e* F *um espaço de Banach uniformemente c-nvexo. O espaço* $K(L_1(S, \Sigma, u);F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(L_1(S, \Sigma, u);F)$ *e, a fortiori, é proximinal em* $L(L_1(S, \Sigma, u);F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Imediata a partir do Teorema 2.34 com a observação de que todo espaço uniformemente convexo tem a propriedade de Radon-Nikodym (Clarkson [4]).

O corolário acima generaliza um resultado de Ka-Sing Lau ([20], Theorem 4.5 parte (i)) que havia aprovado a proximinalidade de tais subespaços nas hipóteses acima.

2.36 - COROLÁRIO: *Seja* (S, Σ, u) *um espaço de medida* σ*-finita e positiva. O espaço* $K(L_1(S, \Sigma, u);\ell_1)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(L_1(S, \Sigma, u);\ell_1)$ *e, a fortiori é proximinal em* $L(L_1(S, \Sigma, u);\ell_1)$.

DEMONSTRAÇÃO: O espaço ℓ_1, embora não uniformemente convexo, tem a propriedade de Radon-Nikodym (ver Clarkson [4] e Diestel-Uhl [8], pag. 64).

CAPÍTULO 3

ESPAÇOS DE STONE-WEIERSTRASS

Durante este capítulo consideraremos apenas espaços normados reais.

3.1 - DEFINIÇÃO: Seja $(E, \| \|)$ um espaço normado real. Denotaremos por $\Gamma(E)$ (respectivamente, $\mathbb{L}(E)$) *o conjunto de todas as partes não-vazias* (respectivamente, *partes limitadas não-vazias*) *de* E.

3.2 - DEFINIÇÃO: Sejam $(E, \| \|)$ um espaço normado real e $\mathcal{B} \subset \Gamma(E)$ um subconjunto não-vazio. Diz-se que E tem a *propriedade da interseção binária relativamente a* $\mathcal{B}$ (p.i.b. - B) se toda coleção de bolas fechadas de E, interceptando-se duas a duas e cujo conjunto dos centros pertence a B, tem interseção não-vazia.

Quando $\mathcal{B} = \Gamma(E)$, diremos simplesmente que E tem a *propriedade da interseção binária* (p.i.b.). Esta noção foi introduzida por Nachbin [28]. Entretanto, seguimos a nomenclatura de Day [5].(Pela nomenclatura de Nachbin, diríamos que a coleção de bolas fechadas de E é que tem a p.i.b.).

Quando $\mathcal{B} = \mathbb{L}(E)$ diremos que E tem a *propriedade da interseção binária limitada* (p.i.b. limitada).

É claro que se E tem a p.i.b. então E tem a p.i.b. relativamente a qualquer B; em particular, relativamente a $\mathbb{L}(E)$.

Ressaltamos aqui que a Observação 1.11 nos fornece outras ca racterizações para um espaço de Banach *real* E que tem a p.i.b. Em particular, E *ter a p.i.b.* é equivalente a dizer que E *pertence* à *classe* P_1.

3.3 - EXEMPLOS:

a) Se $S \neq \emptyset$ é qualquer conjunto, então $\ell_\infty(S;\mathbb{R})$ pertence à classe P_1 (ver Philips [30] e Day [5], pag. 123).

b) Os espaços L^p e ℓ^p (com $p > 1$) *não pertencem* à classe P_1 (ver Day [5], pag. 125).

c) O espaço c_o *não pertence* à classe P_1. Com efeito, não existe projeção linear contínua de ℓ_∞ sobre c_o (Philips [30])

d) Todo espaço de Lindenstrauss *real* tem a p.i.b. relativamente à família de todos os subconjuntos relativamente compactos. (ver Teorema 1.8).

3.4 - DEFINIÇÃO: Seja $(F, \| \ \|)$ um espaço normado real. Sejam $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(F)$ e $M \subset F$ subconjuntos não-vazios. Diz-se que M tem a *propriedade* $(\mathcal{J})$ *relativamente a* $\mathcal{B}$ se dados $A \in \mathcal{B}$, $a_o \in M$, $r_o > 0$ e uma coleção de números positivos $(r_a)_{a\in A}$ tais que $\|a - a_o\| < r_a + r_o$, para todo $a\in A$, *a condição* $M \cap \left(\bigcap_{a\in A} \bar{B}(a,r_a)\right) \neq \emptyset$ *implica que*

$$M \cap \left(\bigcap_{a\in A} \bar{B}(a,r_a)\right) \cap \bar{B}(a_o,r_o) \neq \emptyset$$

Quando $\mathcal{B} = \mathbb{L}(F)$, diz-se simplesmente que M tem a propriedade $(\mathcal{J})$.

3.5 - OBSERVAÇÃO: Quando $\mathcal{B} = \{\{y\}\ ;\ y \in F\}$ a propriedade de $(\mathfrak{I})$ relativa a $\mathcal{B}$ coincide com a propriedade das $1\frac{1}{2}$ bolas em F definida por Yost [36].

3.6 - OBSERVAÇÃO: A definição 3.4 é equivalente à seguinte: dados $A \in \mathcal{B}$ e uma coleção de números positivos $(r_a)_{a\in A}$ tais que $\|a\| < 1 + r_a$, para todo $a \in A$, *a condição* $M \cap \left(\bigcap_{a\in A} \bar{B}(a,r_a)\right) \neq \emptyset$ *implica que*

$$M \cap \left(\bigcap_{a\in A} \bar{B}(a,r_a)\right) \cap \bar{B}(0,1) \neq \emptyset$$

3.7 - TEOREMA: *Sejam* $(F;\ \|\ \|)$ *um espaço normado e* $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(F)$ *um subconjunto não-vazio. Todo subespaço vetorial completo* M *de* F *que tem a propriedade* $(\mathfrak{I})$ *relativamente a* $\mathcal{B}$ *é tal que*

$$\operatorname{cent}_M(A) \neq \emptyset$$

para todo $A \in \mathcal{B}$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $A \in \mathcal{B}$ e $R = \operatorname{rad}_M(A)$. Pela definição de R, para cada número natural $k > 0$, tem-se

$$M \cap \left(\bigcap_{a\in A} \bar{B}(a,\ R + 2^{-k})\right) \neq \emptyset \qquad (1)$$

Seja $x_1 \in M \cap \left(\bigcap_{a\in A} \bar{B}(a,\ R + 2^{-1})\right)$ e suponhamos já definido $x_n \in M$ tal que

$$\|x_n - a\| \leq R + 2^{-n}$$

para todo $a \in A$. Aplicando (1) para $k = n-1$, e observando que, para todo $a \in A$ se tem

$$\|x_n - a\| < R + 2^{-n-1} + 2^{-n}$$

resulta da propriedade ($\mathfrak{I}$) que

$$M \cap \left(\bigcap_{a \in A} \bar{B}(a,\ R + 2^{-n-1}) \right) \cap \bar{B}(x_n,\ 2^{-n}) \neq \emptyset \ .$$

Seja x_{n+1} um ponto dessa interseção. Deste modo, obtivemos uma sequencia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M tal que:

(i) $\|x_n - x_{n+1}\| \leq 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\|x_n - a\| \leq R + 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in A$

Segue da condição (i) que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequencia de Cauchy em M. Seja $x_o \in M$ o ponto limite dessa sequencia. Em virtude de (ii) temos

$$\|x_o - a\| \leq R$$

para todo $a \in A$, o que significa que $x_o \in \text{cent}_M(A)$.

3.8 - **OBSERVAÇÃO:** Quando $\mathfrak{B} = \mathbb{L}(F)$ o Teorema 3.7 pode ser enunciado como segue: *Todo subespaço vetorial completo* $M \subset F$ *que satisfaz a propriedade* ($\mathfrak{I}$), *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* Y. *Em particular,* M *é proximinal em* F.

3.9 - OBSERVAÇÃO: Yost ([36], Lemma 1.1) demonstrou que a propriedade das $1\frac{1}{2}$ bolas implica em proximinalidade. Ressaltamos aqui que, quando B = {y} ; y ∈ F} o resultado do Teorema 3.7 pode ser estendido, através de um argumento bastante simples, a subconjuntos precompactos de F, isto é, pode-se concluir que $\mathrm{cent}_M(K) \neq \emptyset$, para todo subconjunto precompacto $K \subset F$.

3.10 - TEOREMA: *Sejam X um espaço paracompacto e $(E, \|\ \|)$ um espaço de Banach real com a p.i.b. limitada, e denotemos por $\mathcal{E}$ a família de todos os subconjuntos limitados e equicontínuos de $C_b(X;E)$. Então, todo subespaço de Stone-Weierstrass W de $C_b(X;E)$ tem a propriedade $(\mathcal{J})$ relativamente a $\mathcal{E}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela definição 1.13 existem um espaço topológico Y e uma sobrejeção contínua e fechada $\pi: X \to Y$ tais que

$$W = \{g \circ \pi;\ g \in C_b(X;E)\}$$

Sejam $A \in \mathcal{E}$ e $(r_f)_{f\in A}$ uma coleção de números positivos tais que

$$\|f\| \leq 1 + r_f \qquad (1)$$

para todo $f \in A$, e suponhamos que

$$W \cap \left(\bigcap_{f\in A} \bar{B}(f, r_f)\right) \neq \emptyset \qquad (2)$$

Para cada y $\in$ Y, definamos

$$\Lambda(y) = \bar{B}(0,1) \cap \left[\bigcap_{f\in A} \left(\bigcap_{x\in\pi^{-1}(y)} \bar{B}(f(x), r_f)\right)\right]$$

É fácil ver que $\Lambda(y)$ é fechado, convexo e limitado em E. Provemos que $\Lambda(y) \neq \emptyset$.

Para cada f $\in$ A e cada x $\in \pi^{-1}(y)$, resulta de (1) que:

$$\bar{B}(0,1) \cap \bar{B}(f(x), r_f) \neq \emptyset \qquad (3)$$

Em virtude de (2), existe h $\in C_b(Y;E)$ tal que

$$h \circ \pi \in \bigcap_{f\in A} \bar{B}(f, r_f)$$

Resulta daí que, se $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ e f,g $\in$ A

$$\begin{aligned}\|f(x_1) - g(x_2)\| &\leq \|f(x_1) - h(y)\| + \|h(y) - g(x_2)\| \\ &= \|f(x_1) - h(\pi(x_1))\| + \|h(\pi(x_2)) - g(x_2)\| \\ &\leq \|f - h \circ \pi\| + \|h \circ \pi - g\| \\ &\leq r_f + r_g\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{B}(f(x_1), r_f) \cap \bar{B}(g(x_2), r_g) \neq \emptyset \qquad (4)$$

Segue de (3) e (4) que as bolas fechadas que definem $\Lambda(y)$ interceptam-se duas a duas. Além disso, se denotarmos por C o conjunto de todos os centros de tais bolas, vemos que:

$$C = \left(\bigcup_{f \in A} f(\pi^{-1}(y)) \right) \cup \{0\}$$

Como A é limitado, resulta que $C \in \mathbb{L}(E)$. Pela p.i.b. limitada, segue que $\Lambda(y) \neq \emptyset$.

Mostraremos agora que o portador Λ é semicontínuo inferiormente.

Sejam $G \subset E$ aberto e

$$\mathcal{O}_G = \{y \in Y;\ \Lambda(y) \cap G \neq \emptyset\}$$

Consideremos $y_o \in \mathcal{O}_G$ e $z \in \Lambda(y_o) \cap G$. Então $\|z\| \leq 1$ e

$$f(\pi^{-1})) \subset \bar{B}(z,\ r_f)$$

para todo $f \in A$. Mais ainda, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}(z,\varepsilon) \subset G$.

Seja

$$N = \{y \in Y;\ \pi^{-1}(y) \subset \bigcap_{f \in A} f^{-1}(B(z,\ r_f + \varepsilon))$$

Observe que $y_o \in N$; e vamos mostrar que N é uma vizinhança de y_o em Y. Seja $x \in \pi^{-1}(y_o)$. Pela equicontinuidade, existe um aberto V_x contendo x e tal que

$$x' \in V_x \Rightarrow \|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$$

para todo $f \in A$. O conjunto

$$V' = \bigcup_{x \in \pi^{-1}(y_o)} V_x$$

é aberto e contém $\pi^{-1}(y_o)$. Como π é fechada, existe um aberto saturado V de X tal que

$$\pi^{-1}(y_o \subset V \subset V'$$

Seja $U = \pi(V)$. Então $y_o \in U$ e U é aberto pois, $\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(V)) = V$.

Sejam $y \in U$ e $x \in \pi^{-1}(y)$. Pela definição de V', existe $x_o \in \pi^{-1}(y_o)$ tal que $x \in V_{x_o}$. Logo, para todo $f \in A$,

$$\|f(x) - f(x_o)\| < \varepsilon$$

Portanto,

$$\|f(x) - z\| \leq \|f(x) - f(x_o)\| + \|f(x_o) - z\|$$

$$< r_f + \varepsilon$$

para todo $f \in A$. Resulta daí que

$$x \in \bigcap_{f \in A} f^{-1}(B(z, r_f + \varepsilon))$$

Logo, $U \subset N$.

Mostramos finalmente que $N \subset \mathcal{O}_G$. Seja $y \in N$. Como $\|z\| \leq 1$, tem-se que

$$\bar{B}(0,1) \cap \bar{B}(z,\varepsilon) \neq \emptyset \qquad (5)$$

Por outro lado, pela definição de N, vem que

$$\bar{B}(f(x),\ r_f) \cap \bar{B}(z;\varepsilon) \neq \emptyset \qquad (6)$$

para todo $f \in A$ e $x \in \pi^{-1}(y)$. Como

$$\Lambda(y) \cap \bar{B}(Z,\varepsilon) = \bar{B}(0,1) \cap \left[\bigcap_{f\in A}\left(\bigcap_{x\in\pi^{-1}(y)} \bar{B}(f(x),\ r_f)\right)\right] \cap \bar{B}(z,\varepsilon)$$

segue de (3) a (6) que as bolas fechadas que definem $\Lambda(y) \cap \bar{B}(z,\varepsilon)$ interceptam-se duas a duas. Além disso o conjunto dos centros de tais bolas é agora $C \cup \{0\}$ que resulta limitado. Pela p.i.b. limitada, temos que

$$\Lambda(y) \cap \bar{B}(z,\varepsilon) \neq \emptyset$$

É então imediato que $\Lambda(y) \cap G \neq \emptyset$, e assim Λ é semicontínuo inferiormente.

Como X é paracompacto, pela Observação 1.14 Y também o é, e podemos aplicar o Teorema 1.17 (Michael) e a observação 1.18, obtendo $g \in C_b(Y;E)$ tal que

$$g(y) \in \Lambda(y) \qquad (7)$$

para todo $y \in Y$.

Consideremos $g \circ \pi \in W$ e $x \in X$. Chamando $\pi(x) = y$, resulta de (7) que

$$\|g \circ \pi)(x)\| = \|g(y)\| \leq 1$$

e ainda

$$\|(g \circ \pi)(x) - f(x)\| = \|g(y) - f(x)\| \leq r_f$$

para todo $f \in A$. Resulta daí que

$$g \circ \pi \in \bar{B}(0,1) \cap \left(\bigcap_{f \in A} \bar{B}(f, r_f) \right)$$

e a demonstração está completa.

3.11 - **COROLÁRIO:** *Sejam* X *e* $(E, \| \ \|)$ *como no Teorema 3.10. Todo subespaço de Stone-Weierstrass* W *de* $C_b(X;E)$ *é tal que*

$$\text{cent}_W(K) \neq \emptyset$$

para todo limitando equicontínuo K *de* $C_b(X;E)$. *Em particular,* W *é proximinal em* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Imediata a partir dos Teoremas 3.7 e 3.10.

3.12 - **COROLÁRIO:** *Sejam* X *um espaço paracompacto e* $(E, \| \|)$ *um espaço de Banach real pertencente à classe* P_1. *Todo subespaço de Stone-Weierstrass* W *de* $C_b(X;E)$ *é tal que*

$$\mathrm{cent}_W(K) \neq \emptyset$$

para todo limitado equicontínuo K *de* $C_b(X;E)$ *e, a fortiori, é proximinal em* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Imediata a partir do Corolário 3.11 e do fato que todo espaço de Banach real que pertence à classe P_1 tem a p.i.b.

3.13 - **TEOREMA:** *Sejam* X *um espaço paracompacto e* $(E,\| \|)$ *um espaço de Lindenstrauss real. Seja* W *um subespaço de Stone-Weierstrass de* $C_b(X;E)$ *tal que a aplicação* π *que o define seja própria. Então*

$$\mathrm{cent}_W(K) \neq \emptyset$$

para todo compacto K *de* $C_b(X;E)$. *Em particular,* W *é proximinal em* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $K \subset C_b(X;E)$ um subconjunto compacto não-vazio. Usando as mesmas definições da demonstração do Teorema 3.10, resulta do fato da aplicação π ser própria, que o conjunto C dos centros é compacto. A demonstração segue agora de modo perfeitamente análo go à do referido teorema.

3.14 - COROLÁRIO: *Sejam* X *um espaço compacto de Hausdorff e* $(E, \| \ \|)$ *um espaço de Lindenstrauss real. Todo subespaço de Stone-Weierstrass de* $C(X;E)$ *é tal que*

$$\mathrm{cent}_W(K) \neq \emptyset$$

para todo compacto $K \subset C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Imediata a partir do Teorema 3.13.

Yost ([36], Theorem 1) havia provado a proximinalidade dos subespaços de Stone-Weierstrass nas condições do Corolário 3.14. Este resultado generaliza, portanto, o resultado de Yost.

3.15 - TEOREMA: *Sejam* X *um espaço paracompacto e* $(E, \| \ \|)$ *um espaço de Banach real com p.i.b. limitada. Todo subespaço vetorial de* $C_b(X;E)$ *da forma*

$$W(Z) = \{g \circ \pi;\ g \in C_b(X;E) \text{ e } g_{/Z} \equiv 0\}$$

onde Y *é um espaço paracompacto,* $Z \subset Y$ *um subconjunto fechado e* $\pi: X \to Y$ *uma sobrejeção contínua e fechada é tal que*

$$\mathrm{cent}_{W(Z)}(K) \neq \emptyset$$

para todo limitado equicontínuo K *de* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $A \subset C_b(X;E)$ um subconjunto limitado e equicontínuo, e $(r_f)_{f \in A}$ uma coleção de números positivos tais que

$$\|f\| \leq 1 + r_f$$

para todo $f \in A$. Suponhamos que

$$W(Z) \cap \left(\bigcap_{f \in A} \bar{B}(f, r_f) \right) \neq \emptyset$$

Para cada $y \in Y$, definamos $\Lambda(y)$ como no Teorema 3.10. Seja $g \circ \pi \in W(Z)$ tal que

$$\|f - g \circ \pi\| \leq r_f$$

para todo $f \in A$. Se $y \in Z$ segue então que $g(\pi(x)) = 0$, para todo $x \in \pi^{-1}(y)$. Portanto,

$$\|f(x)\| = \|f(x) - g(\pi(x))\| \leq \|f - g \circ \pi\| \leq r_f$$

para todo $f \in A$ e $x \in \pi^{-1}(y)$.

Logo, $0 \in \Lambda(y)$, para todo $y \in Z$.

Definimos agora o seguinte portador em Y:

$$\Lambda_1(y) = \begin{cases} \Lambda(y) & \text{se} \quad y \in Y \setminus Z \\ \\ \{0\} & \text{se} \quad y \in Z \end{cases}$$

Como A é semicontínuo inferiormente e $0 \in A(y)$, para todo $y \in Z$, resulta da Observação 1.19 que A_1 é semicontínuo inferiormente.

Analogamente à demonstração do Teorema 3.10, uma aplicação do Teorema 1.17 (Michael) completa a demonstração.

----x----

CAPÍTULO 4

MELHOR APROXIMAÇÃO SIMULTÂNEA DE OPERADORES LIMITADOS POR POLINOMIOS

4.1 - DEFINIÇÃO: Sejam $(E, \| \|)$ e $(G, \| \|)$ espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{F}(E;G)$ o espaço vetorial de todas as aplicações de E em G.

Vamos considerar em $\mathcal{F}(E;G)$ algumas topologias localmente convexas. Indicaremos por τ_1 a topologia gerada pela família de seminormas $\{q_x \; ; \; x \in E\}$ definidas por:

$$q_x(T) = \|T_x\|$$

para todo $T \in \mathcal{F}(E;G)$. Por outro lado, τ_2 designará a topologia gerada pela família de seminormas $\{q_{x,\psi} \; ; \; x \in E \; , \; \psi \in G^*\}$ definidas por:

$$q_{x,\psi}(T) = | < Tx \; , \; \psi >|$$

para todo $T \in \mathcal{F}(E;G)$.

Quando $G = F^*$ para algum espaço normado $(F, \| \|)$, podemos considerar ainda em $\mathcal{F}(E,G)$, a topologia τ_3 gerada pela família de seminormas $\{q_{x,y} \; ; \; x \in E, \; y \in F\}$ definidas por:

$$q_{x,y}(T) = |(T_x)(y)|$$

para todo $T \in \mathcal{F}(E;G)$.

Claramente, $\tau_3 \leq \tau_2$. Quando G é *reflexivo*, tem-se $\mathcal{F}(E;G) = \mathcal{F}(E,F')$, onde $F = G^*$, e $\tau_3 = \tau_2$, neste caso.

Seja $M \subset \mathcal{F}(E;G)$ um subespaço vetorial tal que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \; ; \; \|x\| \leq 1\}$$

é uma norma em M. Seja $W \subset M$ um subconjunto não-vazio. Para cada limitado $B \subset M$, $B \neq \emptyset$, definamos $\gamma_B : W \to \mathbb{R}$ por:

$$(*) \qquad \gamma_B(T) = \sup_{U \in B} \|T - U\|$$

$$= \sup_{U \in B} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|(T - U)x\|$$

$$= \sup_{U \in B} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \sup_{\substack{\psi \in G^* \\ \|\psi\| \leq 1}} |\psi((T - U)x)|$$

para cada $T \in W$.

Observe que $\inf\limits_{T \in W} \gamma_B(T) = rad_W(B)$.

São exemplos de subespaços de $\mathcal{F}(E;G)$ tais que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \; ; \; \|x\| \leq 1\}$$

é uma norma, o espaço $\mathcal{P}(E;G)$ dos polinomios contínuos de E em G, bem como (caso E e G sejam complexos) o espaço $\mathcal{H}_b(E;G)$ das funções holomorfas f de E em G tais que, para todo limitado $A \subset E$, o conjunto $f(A)$ é limitado em G. Podemos citar ainda o espaço $L(E;G)$ das aplicações lineares e contínuas de E em G; neste caso, as topologias τ_1, τ_2 e τ_3 são chamadas, respectivamente, de topologia forte de operadores, topologia fraca de operadores e topologia fraca* de operadores.

4.2 - PROPOSIÇÃO: *Seja $M \subset \mathcal{F}(E;G)$ um subespaço vetorial tal que*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \; ; \; \|x\| \leq 1\}$$

é uma norma em M. Sejam $\emptyset \neq W \subset M$ e $B \subset M$ um subconjunto limitado não-vazio. A aplicação γ_B, definida por (*), é τ_1 - semicontínua inferiormente (respectivamente, τ_2 - semicontínua inferiormente; ou τ_3 - semicontínua inferiormente, quando $G = F^*$) em W.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T \in W$. Para cada $x \in E$ e cada $U \in B$, seja

$$\gamma_{x,U}(T) = \|(T-U)x\|$$

Como

$$\gamma_B(T) = \sup_{U \in B} \; \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \gamma_{x,U}(T)$$

basta provar que cada aplicação $\gamma_{x,U}$ é τ_1 - contínua em W. Se $T_o \in W$ então

$$\left|\gamma_{x,U}(T) - \gamma_{x,U}(T_o)\right| = \left|\|(T-U)x\| - \|(T_o-U)x\|\right|$$

$$\leq \|(T-U)x - (T_o-U)x\|$$

$$= \|T_x - T_o x\|$$

$$= q_x(T-T_o)$$

Logo, $\gamma_{x,U}$ é τ_1 - contínua.

Para o caso de τ_2, prova-se, analogamente, que para cada $x \in E$, cada $\psi \in G^*$ e cada $U \in B$, a aplicação, definida em W, por:

$$\gamma_{x,\psi,U}(T) = |\psi((T-U)x)|$$

é τ_2 - contínua. A semicontinuidade inferior de γ_B segue do fato que

$${}_B(T) = \sup_{U \in B} \ \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \ \sup_{\substack{\psi \in G \\ \|\psi\| \leq 1}} \gamma_{x,\psi,U}(T)$$

Quando $G = F^*$, demonstra-se analogamente que a aplicação γ_B é τ_3 - semicontínua inferiormente, em virtude da imersão canonica de F em F^{**}.

4.3 - DEFINIÇÃO: Sejam M e W como na Proposição 4.2. Para cada $B \subset M$ limitado, denotaremos por r_B o número

$$\mathrm{rad}_W(B) + \sup_{U \in B} \|U\| + 1$$

4.4 - LEMA: *Sejam M, W e B como na Proposição 4.2. Seja $T \in W$ e suponhamos que $\|T\| > r_B$. Então*

$$\gamma_B(T) > \mathrm{rad}_W(B) + \frac{1}{2}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $R = \mathrm{rad}_W(B)$ e seja $T \in W$ tal que $\|T\| > r_B$. Segue-se então que

$$\|T\| > \|U\| + R + 1$$

para todo $U \in B$. Portanto, para todo $U \in B$,

$$\|T-U\| > \|T\| - \|U\| > R + 1$$

donde

$$\sup_{U \in B} \|T-U\| \geq R + 1 > R + \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\gamma_B(T) > R + \frac{1}{2}$$

4.5 - OBSERVAÇÃO: Decorre do Lema 4.5 que

$$\mathrm{rad}_W(B) = \inf\{\gamma_B(T) \; ; \; T \in \bar{B}(0,r_B) \cap W\}$$

4.6 - TEOREMA: *Seja* $M \subset \mathcal{F}(E;G)$ *um subespaço vetorial tal que*

$$\|T\| = \sup\{\|T_x\| \; ; \; \|x\| \leq 1\}$$

é uma norma em M. *Seja* $W \subset M$ *um subconjunto tal que, para todo* $r > 0$, *o conjunto* $\{T \in W \; ; \; \|T\| \leq r\}$ *é* τ_1 *- compacto (respectivamente,* τ_2 *- compacto; ou* τ_3 *- compacto quando* $G = F^*$*). Então* W *tem a proprieda de dos centros relativos de Chebyshev em* M*. Em particular,* W *é proximinal em* M.

DEMONSTRAÇÃO: Seja W como no enunciado e seja $B \subset M$ um subconjunto limitado não-vazio. Pela τ_1 - compacidade do conjunto $\{T \in W \; ; \; \|T\| \leq r_B\}$ (respectivamente, τ_2 - compacidade; ou τ_3 - compacidade quando $G = F^*$) e pela Proposição 4.2, segue que existe $T_o \in W$ com $\|T_o\| \leq r_B$ tal que

$$\gamma_B(T_o) = \inf\{\gamma_B(T) \; ; \; T \in W, \; \|T\| \leq r_B\}$$

Pelo Lema 4.4, vemos que

$$\gamma_B(T_o) = \mathrm{rad}_W(B)$$

Resulta agora em definição de γ_B, que

$$T_o \in \mathrm{cent}_W(B)$$

Outra demonstração quando W é um subespaço vetorial:

Pelo Teorema de Dixmier-Ng (ver Holmes [16], pag. 211), $(W, \| \ \|)$ é o dual de algum espaço normado X, isto é, $W = X^*$.

Para $n = 1,2,\ldots$, existe $f_n \in W$ tal que

$$\sup\{\|f_n - y\| \ ; \ y \in B\} \leq \text{rad}_W(B) + \frac{1}{n}$$

Seja f_o um ponto de acumulação da sequencia (f_n) na topologia $\sigma(X^*,X)$. Como $\| \ \|$ é $\sigma(X^*,X)$-semicontinua inferiormente, temos

$$\sup\{\|f_o - y\| \ ; \ y \in B\} \leq \text{rad}_W(B)$$

e portanto $f_o \in \text{cent}_W(B)$.

4.7 - **COROLÁRIO:** *Seja* M *como no Teorema 4.6. Seja* $W \subset M$ *um subespaço vetorial que é um espaço semi-Montel quando equipado com a topologia* τ_1 *(respectivamente* τ_2 *; ou* τ_3 *quando* $G = F^*$*). Então* W *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* M.

DEMONSTRAÇÃO: Para cada $r > 0$, o conjunto

$$\{T \in W \ ; \ \|T\| \leq r\}$$

é τ_1 - limitado. Como W é semi-Montel, segue que tal conjunto é τ_1-compacto. Basta aplicar agora o Teorema 4.6.

4.8 - COROLÁRIO: *Toda álgebra de von-Neumann tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(H)$ *e, a fortiori, é proximinal em* $L(H)$.

DEMONSTRAÇÃO: Toda álgebra de von-Neumann em H é uma *- subálgebra A de $L(H)$ fracamente fechada, isto é, τ_3 - fechada (ver Bratteli e Robinson, Theorem 2.4.11, pag. 72). Como $\{T \in L(H) ; \|T\| \leq 1\}$ é compacto, o mesmo acontece com bola unitária fechada de A.

Vamos considerar agora o espaço $\mathcal{P}^m(E;F^*)$ dos polinomios m-homogeneos e contínuos de E em F^*. Observe que se $m = 1$, $\mathcal{P}^m(E;F^*) = L(E,F^*)$.

Seja M um espaço vetorial contendo $\mathcal{P}^m(E;F^*)$ e normado por:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| ; \|x\| \leq 1\}$$

Temos o seguinte resultado:

4.9 - LEMA: *A bola unitária fechada de* $\mathcal{P}^m(E;F^*)$ *é* τ_3 *- compacta.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$S = \{P \in \mathcal{P}^m(E;F^*) ; \|P\| \leq 1\}$$

Se $m = 0$, $\mathcal{P}^m(E;F^*) = F^*$ e o resultado é verdadeiro pelo Teorema de Alaoglu.

Suponhamos $m \geq 1$. Para cada $x \in E$ seja

$$Y_x = \{\psi \in F' \ ; \ \|\psi\| \leq \|x\|^m\}$$

Pelo Teorema de Alaoglu, cada Y_x é compacto na topologia induzida por $\sigma(F^*,F)$. Logo, o espaço

$$Y = \prod_{x \in E} Y_x$$

é compacto na topologia produto, pelo Teorema de Tyconov.

Consideremos S munido da topologia induzida por τ_3. Para cada $P \in S$ definamos

$$\Phi(P) = (P_x)_{x \in E}$$

Como

$$\|P_x\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^m \leq \|x\|^m$$

para cada $x \in E$, segue daí que $\Phi(P) \in Y$.

É fácil ver que Φ é injetora. Vamos mostrar que Φ é contínua. Sejam $P_o \in S$ e $U = U_{x_1} x \ldots x \ U_{x_n} \ x \prod_{x \neq x_i} Y_x$ uma vizinhança de $\Phi(P_o)$ em Y, onde cada U_{x_i} é da forma

$$U_{x_i} = \{\psi \in F' \ ; \ P_{y_i}(\psi - P_o x_i) < \varepsilon_i\}$$

onde $y_i \in F$, $\varepsilon_i > 0$ e P_{y_i} denota a seminorma em F^* definida por:

$$P_{y_i}(\eta) = |\eta(y_i)|$$

Seja

$$V = \{P \in S \; ; \; q_{x_i,y_i}(P-P_o) < \varepsilon_i \; , \; 1 \leq i \leq n\}$$

uma τ_3 - vizinhança de P_o em S.

Se $P \in V$ então, para $1 \leq i \leq n$,

$$|(P_{x_i} - P_o x_i)y_i| < \varepsilon_i$$

e segue daí que $P_{x_i} \in U_{x_i}$, logo, $\Phi(P) \in U$.

Para mostrar que $\Phi(P)$ é fechado em Y, seja $(P_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ um net em S e seja $T = (T_x)_{x\in E}$ um elemento de Y tais que $\Phi(P_\alpha) \to T$, na topologia produto. Logo, para cada $x \in E$, tem-se

$$\Phi(P_\alpha)x = P_\alpha(x) \to T_x \qquad (1)$$

em Y_x.

Para cada $\alpha \in \Lambda$, $P_\alpha = \hat{A}_\alpha$ onde $A_\alpha \in L_s(^mE;F^*)$. Pela fórmula de polarização, se $x_1,\ldots,x_m \in E$, tem-se

$$A_\alpha(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_1=\pm1\\ \vdots\\ \varepsilon_m=\pm1}} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_m\ P_\alpha(\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_mx_m)$$

Sejam $x_1,\ldots,x_m \in E$. Definamos

$$A(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_1=\pm1\\ \vdots\\ \varepsilon_m=\pm1}} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_m\ T(\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_mx_m)$$

Resulta de (1) que $A_\alpha \to A$ pontualmente. Portanto, A é m-linear e simétrica, e assim $x \longrightarrow T_x$ é um polinomio m-homogeneo, digamos P, de em F^*.

Por outro lado, como $P_\alpha \in S$, para cada $y \in F$ tem-se

$$|P_\alpha(x)y| \leq \|P_\alpha(x)\|.\|y\|$$

$$\leq \|x\|^m . \|y\|$$

para todo $x \in E$. No limite, como $P_\alpha(x)y \to T_x(y)$, vemos que

$$|T_x(y)| = |P(x)y| \leq \|x\|^m . \|y\|$$

Logo, $\|T_x\| = \|P(x)\| \leq \|x\|^m$, para todo $x \in E$, e portatnto $P \in S$. Como $\Phi(P) = T$ segue que $T \in \Phi(S)$.

4.10 - TEOREMA *Sejam* E *e* F *espaços normados e suponhamos que* F *é um espaço dual (por exemplo,* F *reflexivo, ou Hilbert). Se* $W \subset \mathcal{P}^m(E;F)$ *é um subconjunto* τ_3 *- fechado, então* W *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em qualquer subespaço vetorial* $M \subset \mathcal{F}(E;F)$ *contendo* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *e normado por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ ; \ \|x\| \leq 1\}$$

Em particular, isto é verdadeiro para:

a) $W = \mathcal{P}^m(E;F)$ *e* M *como acima;*

b) $W = M = \mathcal{P}^m(E;F)$, *o que significa que* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *admite centros de Chebyshev.*

c) $W \subset \mathcal{P}^m(E;F)$ *como acima e* $M = \mathcal{P}(E;F)$.

d) $W = \mathcal{P}^m(E;F)$ *e* $M = \mathcal{P}(E,F)$, *o que significa que* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\mathcal{P}(E;F)$ *e, a fortiori, é proximinal em* $\mathcal{P}(E,F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $r > 0$. Pelo Lema 4.9 o conjunto $\{P \in \mathcal{P}^m(E;F) \ ; \ \|P\| \leq r\}$ é τ_3 - compacto. Portanto,

$$S_r = \{P \in M \ ; \ \|P\| \leq r\}$$

$$= M \cap \{P \in \mathcal{P}^m(E;F) \ , \ \|P\| \leq r\}$$

é τ_3 - compacto, e o resultado segue do Teorema 4.6.

4.11 - COROLÁRIO: *Sejam* E *e* F *como no Teorema 4.10, e seja* $W \subset L(E;F)$ *um subconjunto* τ_3 *- fechado. Então* W *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em qualquer subespaço vetorial* $M \subset \mathcal{F}(E;F)$ *contendo* $L(E;F)$ *e normado por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ ; \ \|x\| \leq 1\}$$

Em particular, isto é verdadeiro para:

a) $W = L(E;F)$ *e* M *como acima;*

b) $W = M = L(E;F)$, *o que significa que* $L(E,F)$ *admite centros de Chebyshev;*

c) $W \subset L(E;F)$ *como acima e* $M = \mathcal{P}(E;F)$.

d) $W = L(E;F)$ *e* $M = \mathcal{P}((E;F)$, *o que significa que* $L(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\mathcal{P}(E;F)$ *e, a fortiori, é proximinal em* $\mathcal{P}(E;F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Fazer $m = 1$ no Teorema 4.10.

Quando E e F são espaços normados complexos, então $M = \mathcal{H}_b(E;F)$ é tal que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ ; \ \|x\| \leq 1\}$$

é uma norma em M. Com efeito, se $\|T\| = 0$ então T é nula em $\{x \in E \ ; \ \|x\| \leq 1\}$, e sendo uma função *inteira*, T é nula em E, isto é, $T = 0$. Logo, o seguinte resultado é verdadeiro.

4.12 - TEOREMA: *Sejam E e F espaços normados complexos, e suponhamos que F é um espaço dual (em particular, F reflexivo ou Hilbert). Para todo* $m \geq 1$, *o espaço* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\mathcal{H}_b(E;F)$.

Sejam m e k números naturais. Vamos indicar por $\mathcal{P}_k^m(E;G)$ o conjunto de todos os polinomios $P \in \mathcal{P}^m(E;G)$ tais que $\dim [P(E)] \leq k$ (aqui $[P(E)]$ denota o subespaço vetorial gerado por $P(E) \subset G$).

4.13 - LEMA: *Cada elemento* $P \in \mathcal{P}_k^m(E;G)$ *pode ser escrito na forma*

$$P = \sum_{i=1}^{k} P_i \otimes y_i$$

onde $P_i \in \mathcal{P}^m(E;\mathbb{K})$, $\|P_i\| \leq \|P\|$ *e* $y_i \in G$ *com* $\|y_i\| \leq 1$ *para* $1 \leq i \leq k$ *e* $y_1,\ldots,y_k$ *são linearmente independentes.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $P \in \mathcal{P}_k^m(E;G)$, e suponhamos que $\dim[P(E)] = n \leq k$. Seja $\{y_1,\ldots,y_n\}$ uma base de $[P(E)]$ tal que $\|y_i\| = 1$, $1 \leq i \leq n$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\} \subset [P(E)]^*$ tal que $\gamma_i(y_j) = \delta_{ij}$ e $\|\gamma_i\| = 1$ para todo $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Portanto, para todo $v \in [P(E)]$, tem-se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(v) y_i$$

Pelo mesmo Teorema, podemos estender γ_i até G^*. Denotaremos tais extensões também por γ_i. Logo, para cada $x \in E$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(P(x)y_i$$

Escrevendo $P_i = \gamma_i \circ P$ resulta que $P_i \in \mathcal{P}^m(E;\mathbb{K})$ e

$$\|P_i\| \leq \|\gamma_i\| \; \|P\| = \|P\| \qquad , \qquad 1 \leq i \leq n$$

e ainda

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \otimes y_i$$

4.14 - **LEMA:** *A bola unitária fechada de* $\mathcal{P}_k^m(E;F^*)$ *é* τ_3 *- compacta.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 4.9 é suficiente mostrar que

$$S = \{P \in \mathcal{P}_k^m(E;F^*) \; ; \; \|P\| \leq 1\}$$

é um subconjunto τ_3 - fechado de

$$U = \{P \in \mathcal{P}^m(E;F^*) \; ; \; \|P\| \leq 1\}$$

Seja $(P_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ um net em S com limite $P \in \mathcal{P}^m(E;F^*)$ e $\|P\| \leq 1$, isto é, $P_\alpha \xrightarrow{\tau_3} P$ em U. Queremos mostrar que $P \in S$.

Pelo Lema 4.13, cada P_α se escreve na forma

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{k} P_{i\alpha} \otimes y_{i\alpha}$$

onde $P_{i\alpha} \in \mathcal{P}^m(E;\mathbb{K})$. $\|P_{i\alpha}\| \leq \|P_\alpha\| \leq 1$ e $y_{i\alpha} \in F^*$, $\|y_{i\alpha}\| = 1$, para todo $1 \leq i \leq k$.

Pelo Lema 4.9, existe um subnet $(P_{i\beta})_{\beta\in\Delta}$ e existe $P_i \in \mathcal{P}^m(E;\mathbb{K})$ tais que $P_{i\beta} \to P_i$ na topologia τ_3, e pelo Teorema de Alaoglu, existe um subnet $(y_{i\beta})_{\beta\in\Delta}$ e $y_i \in F^*$ tais que $y_{i\beta} \to y_i$ na topologia fraca de F^*, para todo $1 \leq i \leq k$.

Defina

$$P_o = \sum_{i=1}^{k} P_i \otimes y_i$$

Claramente $P_o \in \mathcal{P}_k^m(E;F^*)$

Considere o subnet $(P_\beta)_{\beta\in\Delta}$ definido por

$$P = \sum_{i=1}^{k} P_{i\beta} \otimes y_{i\beta}$$

Temos que

$$\begin{aligned}(P_o x)y &= \lim_\beta (P_\beta x)y \\ &= \lim_\alpha (P_\alpha x)y \\ &= (Px)y\end{aligned}$$

para todo $x \in E$ e $y \in F$. Logo

$$P = P_o \in \mathcal{P}_k^m(E;F^*)$$

Como $\|P\| \leq 1$, segue que $P \in S$.

4.15 - **TEOREMA:** *Sejam* E *e* F *espaços normados e suponhamos que* F *é um espaço dual (por exemplo,* F *reflexivo ou Hilbert). Todo subconjunto* τ_3 *- fechado* $W \subset \mathcal{P}_k^m(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em qualquer subespaço vetorial* $M \subset \mathcal{F}(E;F)$ *contendo* $\mathcal{P}_k^m(E;F)$ *e tal que*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \; ; \; \|x\| \leq 1\}$$

é uma norma em M. *Em particular, isto é verdadeiro para:*

a) $W = \mathcal{P}_k^m(E;F)$ *e* M *como acima;*

b) $W \subset \mathcal{P}_k^m(E;F)$ *como acima e* $M = \mathcal{P}^m(E;F)$;

c) $W = \mathcal{P}_k^m(E;F)$ *e* $M = \mathcal{P}^m(E;F)$ *ou* $\mathcal{P}(E;F)$, *o que significa que* $\mathcal{P}_k^m(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *e em* $\mathcal{P}(E;F)$ *e a fortiori, é proximinal em* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *e em* $\mathcal{P}(E;F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $r > 0$. Pelo Lema 4.14 o conjunto $\{P \in \mathcal{P}_k^m(E;F) \; ; \; \|P\| \leq r\}$ é τ_3 - compacto. O resultado segue agora do Teorema 4.6.

4.16 - **COROLÁRIO:** *Sejam* E *e* F *como no Teorema 4.15. O espaço* $K_N(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(E;F)$. *Em particular,* $K_N(E;F)$ *é proximinal em* $L(E;F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Imediata a partir do Teorema 4.15, com a observação que, quando m = 1, $\mathcal{P}_N^m(E;F) = K_N(E;F)$ e $\mathcal{P}^m(E;F) = L(E;F)$

Deutsch, Mach, Saatkamp ([6], Theorem 2.2) demonstraram a proximinalidade de $K_N(E;F^*)$ em $L(E;F^*)$. O Corolário 4.16 é uma generalização desse resultado.

4.17 - **DEFINIÇÃO:** Sejam $(G, \| \ \|)$ um espaço normado e $F \subset G$ um subespaço vetorial. Diz-se que F *está confinado em* G se existe uma projeção linear, de norma 1, de G sobre F.

4.18 - **EXEMPLOS:**

a) Todo espaço pertencente à classe $\mathcal{P}_1$ está confinado em qualquer espaço que o contenha; em particular, em seu duplo dual.

b) Todo espaço dual está confinado em seu segundo dual: a transposta da isometria canonica $J: E \to E^{**}$ é uma projeção de E^* em $E^{***} = (E^{**})^*$ com norma 1. Em particular, todo espaço reflexivo, e portanto todo espaço de Hilbert, está confinado em seu segundo dual.

c) $L^1(S,u)$ com S localmente compacto e u σ-finita, está confinado em seu segundo dual.

d) c_o não está confinado em seu segundo dual ℓ_∞ .

4.19 - **LEMA:** *Sejam $(G, \| \ \|)$ um espaço normado e $F \subset G$ um subespaço vetorial. Suponhamos que F está confinado em G. Seja $M \subset \mathcal{F}(E;F)$ um subespaço normado por*

$$T = \sup\{\|Tx\| ; \|x\| \leq 1\}$$

e sejam W *e* W' *tais que*

(1) $W \subset W' \subset M$;

(2) $P \circ T \in W$ *para todo* $T \in W'$, *onde* P *é uma projeção linear, de norma* 1 *de* G *sobre* F

Então, para todo limitado não-vazio $B \subset M$, *tem-se*

$$T \in \mathrm{cen}_{W'}(B) \Rightarrow P \circ T \in \mathrm{cent}_W(B).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \subset M$ limitado não-vazio. Como $W \subset W' \subset M$ segue que

$$\mathrm{rad}_{W'}(B) \leq \mathrm{rad}_W(B)$$

Seja $T \in \mathrm{cent}_{W'}(B)$. Como $T \in W'$ segue de (2) que $P \circ T \in W$. Mais ainda, para todo $U \in B$ e todo $x \in E$, temos

$$Ux = P(Ux)$$

pois $Ux \in F$. Logo,

$$\|U - P \circ T\| = \|P \circ U - P \circ T\|$$

$$\leq \|U-T\|$$

$$\leq \mathrm{rad}_{W'}(B)$$

$$\leq \mathrm{rad}_{W}(B)$$

e $P \circ T \in \mathrm{cent}_W(B)$.

4.20 - **TEOREMA** *Sejam* E *e* F *espaços normados e suponhamos que* F *está confinado num espaço dual. Então* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em qualquer subespaço vetorial* $M \subset \mathcal{F}(E;F)$ *normado por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ ; \ \|x\| \leq 1\}$$

e que contenha $\mathcal{P}^m(E;F)$. *Em particular, isto é verdadeiro para* $M = \mathcal{P}^m(E;F)$ *ou* $\mathcal{P}(E;F)$, *o que significa que* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *admite centros de Chebyshev e tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\mathcal{P}(E;F)$, *a fortiori,* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *é proximinal em* $\mathcal{P}(E;F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $W = \mathcal{P}^m(E;F)$ e $W' = \mathcal{P}^m(E;G^*)$ onde G^* é o espaço dual onde F está confinado. Obviamente $W \subset W'$, e $P \circ T \in W$ para todo $T \in W'$, onde P é a projeção linear de norma 1 de F sobre G^*. Pelo Teorema 4.10, parte a), para todo limitado não vazio $B \subset M$, tem-se

$$\mathrm{cent}_{W'}(B) \neq \emptyset$$

O resultado segue agora do Lema 4.19.

4.21 - COROLÁRIO: *Sejam* E *e* F *como no Teorema 4.20. Então* L(E;F) *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em qualquer subespaço* $M \subset \mathcal{F}(E;F)$ *normado por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ ; \ \|x\| \leq 1\}$$

e que contenha L(E;F). *Em particular, isto é verdadeiro para* $M = L(E;F)$ *ou* $\mathcal{P}(E;F)$ *o que significa que* L(E;F) *admite centros de Chebyshev e tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\mathcal{P}(E;F)$. *A fortiori,* L(E;F) *é proximinal em* $\mathcal{P}(E;F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Fazer m=1 no Teorema 4.20.

4.22 - TEOREMA: *Sejam* E *e* F *espaços normados e suponhamos que* F *está confinado num espaço dual. Então* $\mathcal{P}_k^m(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em qualquer subespaço vetorial* $M \subset \mathcal{F}(E;F)$ *normado por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ ; \ \|x\| \leq 1\}$$

e que contenha $\mathcal{P}_k^m(E;F)$. *Em particular, isto é verdadeiro para* $M = \mathcal{P}_k^m(E;F)$ *ou* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *ou ainda* $\mathcal{P}(E;F)$, *o que significa que* $\mathcal{P}_k^m(E;F)$ *admite centros de Chebyshev e tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *e em* $\mathcal{P}(E;F)$. *A fortiori,* $\mathcal{P}_k^m(E;F)$ *é proximinal em* $\mathcal{P}^m(E;F)$ *e em* $\mathcal{P}(E;F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam G^* o espaço dual onde Γ está confinado e P uma projeção linear de norma 1 de F sobre G^*. Consideremos então $W = \mathcal{P}^m_k(E;F)$ e $W' = \mathcal{P}^m_k(E;G^*)$. É claro que $W \subset W'$ e $P \circ T \in W$ para todo $T \in W'$.

Se $B \subset M$ é um subconjunto limitado não vazio, pelo Teorema 4.15, existe $T_o \in cent_{W'}(B)$. Resulta agora do Lema 4.19 que $P \circ To \in cent_W(B)$.

4.23 - **COROLÁRIO:** *Sejam* E *e* F *como no Teorema 4.22. Então* $K_N(E;F)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* L(E;F) *e a fortiori, é proximinal em* L(E;F).

DEMONSTRAÇÃO: Fazer m=1 no Teorema 4.22.

O Corolário 4.22 acima generaliza um resulta de Deutsch, Mach, Satkamp ([6], Corollary 2.6) que haviam demonstrado a proximinalidade de tais subespaços.

---x---

CAPÍTULO 5

MELHOR APROXIMAÇÃO SIMULTANEA DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS POR OPERADORES COMPACTOS

5.1 - **DEFINIÇÃO:** Sejam X um espaço topológico localmente compacto e $(E, \|\ \|)$ um espaço normado. Seja τ uma topologia localmente convexa sobre o dual E^*. Denotaremos por $C_o(X;(E^*,\tau))$ o espaço vetorial de todas as aplicações $f: X \to E^*$ que são contínuas e nulas no infinito quando E^* esta munido da topologia τ.

Quando τ for a topologia da norma de E^*, escrevemos simplesmente $C_o(X;E^*)$.

Observemos que

$$C_o(X;E^*) \subset C_b(X;E^*) \subset \ell_\infty(X;E^*)$$

5.2 - **DEFINIÇÃO:** Sejam X e E como na Definição 5.1. Definimos

$$C_\sigma(X;E^*) = \ell_\infty(X;E^*) \cap C_o(X;(E^*,\sigma))$$

onde $\sigma = \sigma(E^*,E)$.

O espaço $C_\sigma(X;E^*)$ será munido da norma de subespaço de $\ell_\infty(X;E^*)$.

Observemos que

$$C_o(X;E^*) \subset C_\sigma(X;E^*)$$

Com efeito, se $f \in C_o(X;E^*)$, é claro que $f: X \to (E^*,\sigma)$ é contínua. Resta provar que f é nula no infinito como aplicação de X em (E^*,σ). Seja U uma σ-vizinhança da origem em E^*. Como σ é menos fina do que a topologia da norma, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{\gamma \in E^* \ ; \ \|\gamma\| < \varepsilon\} \subset U.$$

Para este $\varepsilon > 0$, como $f \in C_o(X;E^*)$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $\|f(x)\| < \varepsilon$, para todo $x \notin K$. Logo, $f(x) \in U$ para todo $x \notin K$, isto é, f é nula no infinito quando E^* está munido da topologia σ.

Observemos que, se a função f pertence a $C_o(X;(E^*,\sigma))$, então $f(X)$ é $\sigma(E^*,E)$-limitado. Logo, quando $(E, \| \ \|)$ for *completo*, segue-se do Princípio da Limitação Uniforme que $f(X)$ é limitado em $(E^*,\| \ \|)$ isto é, $f \in \ell_\infty(X;E^*)$.

Vemos pois que no caso de ser $(E, \| \ \|)$ um espaço de Banach,

$$\ell_\infty(X;E) \cap C_o(X;(E^*,\sigma)) = C_o(X;(E^*,\sigma))$$

e portanto

$$C_\sigma(X;E^*) = C_o(X,(E^*,\sigma))$$

5.3 - **TEOREMA:** *Sejam X um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff e $(E, \| \ \|)$ um espaço de Banach. O espaço $L(E;C_o(X))$ é isometricamente isomorfo a $C_\sigma(X;E^*)$ através da aplicação definida por*

$$\phi(T)x = \delta_x \circ T$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E;C_o(X))$ *e* $x \in X$, *onde* δ_x *denota a função avaliação no ponto* x. *Sob esta aplicação,* $K(E,C_o(X))$ *é isometricamente isomorfo a* $C_o(X;E^*)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T \in L(E;C_o(X))$. Para cada $x \in X$ consideremos $\delta_x \in C_o(X)^*$. Logo $\delta_x \circ T \in E^*$, para cada $x \in X$. Definimos

$$u_T: X \longrightarrow E^*$$

$$x \longmapsto \delta_x \circ T$$

Então

$$u_T(x)s = \delta_x(Ts) = Ts(x) \quad , \quad x \in X, \ s \in E$$

Afirmamos que $u_T \in C_o(X,(E^*,\sigma))$. Com efeito, se $x_o \in X$, $s_o \in E$ e $\varepsilon > 0$, como $Ts_o \in C(X)$ existe uma vizinhança U de x_o tal que

$$x \in U \Rightarrow |Ts_o(x) - Ts_o(x_o)| < \varepsilon$$

ou seja,

$$x \in U \Rightarrow |u_T(x)s_o - u_T(x_o)s_o| < \varepsilon$$

Logo, $u_T \in C(X,(E^*,\sigma))$. Por outro lado, se $s_o \in E$ e $\varepsilon > 0$, como $Ts_o \in C_o(X)$, existe um compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que

$$x \notin K_\varepsilon \Rightarrow \|u_T(x)s_o\| = \|Ts_o(x)\| < \varepsilon$$

e portanto, $u_T \in C_o(X;(E^*,\sigma))$.

Definamos ϕ: $L(E;C_o(X)) \rightarrow C_o(X;(E^*,\sigma))$ por

$$\phi(T) = u_T$$

É fácil ver que ϕ está bem definida e é uma isometria linear e injetora. Provemos que ϕ é sobrejetora.

Seja $u \in C_o(X;(E^*,\sigma))$. Para cada $s \in E$, definimos $Ts: X \longrightarrow \mathbb{K}$ por $Ts(x) = u(x)s$ para todo $x \in X$. Resulta da continuidade de u que $Ts \in C(X)$. Por outro lado, seja $\varepsilon > 0$. Como u é nula no infinito, existe um compacto K_ε X tal que

$$x \notin K \Rightarrow |Ts(x)| = |u(x)s| < \varepsilon$$

o que prova que $Ts \in C_o(X;\mathbb{K})$.

Consideremos $T: E \rightarrow C_o(X)$

$$s \mapsto Ts$$

Como, para cada $x \in X$, $u(x)$ é linear, segue que T é linear. Além disso,

$$\|T\| = \sup_{\|s\| \leq 1} \|Ts\|$$

$$= \sup_{\|s\| \leq 1} \sup_{x \in X} |Ts(x)|$$

$$= \sup_{\|s\| \leq 1} \sup_{x \in X} \|u(x)s\|$$

$$= \sup_{x \in X} \|u(x)\|$$

$$< \infty$$

onde a última desigualdade resulta do Princípio da Limitação Uniforme. Logo,

$$T \in L(E;C_o(X))$$

Mais ainda, como $u(x)s = Ts(x)$, para todo $s \in E$ e $x \in X$, segue que $u = \phi(T)$, e portanto, ϕ é sobrejetora.

Reciprocamente, sejam $u \in C_o(X;E^*)$ e $T \in \mathcal{K}(E;C_o(X))$ tal que $\phi(T) = u$. Se $B = \{s \in E; \|u\| \leq 1\}$, o conjunto $T(B)$ é relativamente compacto em $C_o(X)$. Isto resulta do Teorema de Arzelà-Ascoli, aplicado à imagem de $T(B)$ pelo isomorfismo que leva $C_o(X)$ em $C(X \cup \{\infty\})$, onde $X \cup \{\infty\}$ denota o compactificado de Alexandroff de X.

5.4 - TEOREMA: *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff e $(E, \| \|)$ um espaço de Banach uniformemente liso. O espaço $K(E;C_o(X))$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $L(E;C_o(X))$. Em particular, $K(E;C_o(X))$ é proximinal em $L(E;C_o(X))$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como E^* é uniformemente convexo, resulta do Corolário 2.26, que $C_o(X;E^*)$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $\ell_\infty(X;E^*)$, e a fortiori, em $C_\sigma(X;E^*)$. Aplicando o teorema 5.3, a demonstração fica completa.

Quando X é discreto e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, escrevemos $C_o(X;\mathbb{R}) = c_o(X)$. Neste caso, $K(E;c_o(X))$ é um M-ideal de $L(E;c_o(X))$ qualquer que seja o espaço normado E (Mach e Ward [26], Theorem 3.1), e a sua proximinalidade segue então da teoria geral dos M-ideais. Deutsch, Mach, Saatkamp ([6], Theorem 3.11) deram uma prova direta da proximinalidade e deduziram outros fatos (como, por exemplo, uma prova construtiva da existencia de uma seleção homogenea e contínua para a projeção métrica).

Resulta do Teorema 5.4 acima que, para X discreto e E uniformemente liso, $K(E;c_o(X))$ é não somente proximinal mas tem até mesmo a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $L(E;c_o(X))$. Entretanto, não sabemos se a hipótese de ser E uniformemente liso pode ser removida de 5.4.

5.5 - COROLÁRIO: *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Suponhamos que E seja um espaço de Hilbert, ou um espaço ℓ_p ou um L_p, com $1 < p < \infty$. Então, o espaço $K(E,C_o(X))$ tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em $L(E,C_o(X))$.*

DEMONSTRAÇÃO: Os espaços citados no enunciado são exemplos de espaços uniformemente lisos.

Mach ([22], Corolário 3) havia provado a proximinalidade de tais subespaços, quando X é compacto de Hausdorff.

5.6 - COROLÁRIO: *Seja* $(E, \| \|)$ *um espaço de Banach uniformemente liso. O espaço* $K(E;c_0)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(E;c_0)$ *e, em particular, é proximinal em* $L(E;c_0)$.

DEMONSTRAÇÃO: $c_0 = C_0(\mathbb{N};\mathbb{K})$ onde $\mathbb{N}$ tem a topologia discreta.

Mach e Ward ([26]; Theorem 3.1) (ver também Yost [36], Corollary 2.7) provaram que, para todo espaço de Banach E, $K(E;c_0)$ é um M-ideal de $L(E;c_0)$, e que portanto, para todo espaço de Banach E, $K(E;c_0)$ é proximinal em $L(E,c_0)$.

5.7 - COROLÁRIO: *Seja* $1 < p < \infty$. *O espaço* $K(\ell_p;c_0)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(\ell_p;c_0)$ *e, a fortiori, é proximinal em* $L(\ell_p;c_0)$.

DEMONSTRAÇÃO: Imediata a partir do Corolário 5.6 observando que para $1 < p < \infty$, o espaço ℓ_p é uniformemente liso.

5.8 - COROLÁRIO: *Se* X *é um espaço compacto de Hausdorff e* E *é um espaço de Banach uniformemente liso, então* $K(E;C(X))$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(E;C(X))$.

DEMONSTRAÇÃO: Como X é compacto, $C_0(X) = C(X)$ e o resultado segue do Teorema 5.4.

5.9 - COROLÁRIO: *Seja* X *um espaço completamente regular de Hausdorff e* E *um espaço de Banach uniformemente liso. O espaço* $K(E;C_b(X))$ *tem* *a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(E;C_b(X))$.

DEMONSTRAÇÃO: Existe uma isometria linear entre $C_b(X)$ e $C(\beta X)$, onde βX denota o compactificado de Stone-Cech de X.

Portanto, os espaços $L(E;C_b(X))$ e $L(E;C(\beta X))$ são isometricamente isomorfos, bem como também o são $K(E;C_b(X))$ e $K(E;C(\beta X))$. Basta aplicar agora o Corolário 5.8.

Ka-Ling Lau ([20], Theorem 4.5, parte ii)) havia demonstrado a proximinalidade de tais subespaços.

5.10 - **COROLÁRIO:** *Seja* E *um espaço de Banach uniformemente liso. O espaço* $K(E;\ell_\infty)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(E;\ell_\infty)$. *Em particular,* $K(E,\ell_\infty)$ *é proximinal em* $L(E;\ell_\infty)$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\mathbb{N}$ está equipado da topologia discreta, então

$$\ell_\infty = C_b(\mathbb{N};\mathbb{K})$$

5.11 - **COROLÁRIO:** *Seja* $1 < p < \infty$. *O espaço* $K(\ell_p;\ell_\infty)$ *tem a propriedade dos centros relativos de Chebyshev em* $L(\ell_p;\ell_\infty)$ *e, em particular, é proximinal em* $L(\ell_p;\ell_\infty)$.

Ressaltamos aqui que Feder([11], Theorem 1) provou que $K(\ell_\infty;\ell_\infty)$ *não é proximinal* em $L(\ell_\infty;\ell_\infty)$. Portanto, no Corolário acima, não se pode tomar $1 < p \leq \infty$.

---x---

BIBLIOGRAFIA

[1] AMIR, D., Chebyshev centers and uniform convexity, *Pacific J. Math.* 77 (1978), 1-6.

[2] AMIR, D. e F. DEUTSCH, Approximation hy certain subspeces in the Banach space of continuous vector-velued functions, *Journal Approximation Th.* 27 (1979), 254-270.

[3] BRATTELI, O. e D.W. ROBINSON, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, I., Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

[4] CLARKSON, J.A., Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 40 (1936), 296-414.

[5] DAY, M.M., *Normed linear spaces*, $3^{\underline{a}}$ ed., Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 19 .

[6] DEUTSCH, F., MACH, J. e K. SAATKAMP, Approximation by finite rank operators, por aparecer.

[7] DIESTEL, J., *Geometry of Banach Spaces Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer-Verlag, 1975.

[8] DIESTEL, J. e J.J. UHL, Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[9] DUGUNDJI, J. , *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1970.

[10] DUNFORD, N. e J. SCHWARTZ, *Linear operators* I., Interscience Publ., New York, 1958.

[11] FEDER, M., On a certain subset of $L_1(0,1)$ and non-existence of best approximation in some spaces of operators, *Journal Approximation Th.* 29 (1980), 170-177.

[12] FRANCHETTI, C. e E.W. CHENEY, Simultaneous approximation and restricted Chebyshev centers in function spaces. In "*Approximation Theory and Applications*" Editor: Z. Ziegler. Academic Press, Inc., 1981.

[13] GARKAVI, A.L., The best possible net and the best possible cronsection of a set in a normed space, *Amer. Math. Soc. Translations* 39 (1964), 111-132.

[14] GOODNER, D.B., Projections in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 69 (1950), 89-108.

[15] HASUMI, M., The extension property of complex Banach spaces, *Tohoku Math. J.* 10 (1958), 135-142.

[16] HOLMES, R.B., *Geometrical Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1975.

[17] HOLMES, R.B. e B.R. KRIPKE, Best approximation by compact operators, *Indiana Univ. Math. J.* 21 (1971), 255-263.

[18] KADETS, I.M. e V. ZAMYATIN, Chebyshev centers in the space C[a,b], *Teoria Funk., Funckcion. Anal. Pril.* 7 (1968), 20-26.

[19] KELLEY, J.L., Banach spaces with the extension property, *Trans. Amer. Math. Soc.* 72 (1952), 323-326.

[20] LAU, K.S., Approximation by continuous vector volued functi_ ons, *Studia Math* 68 (1979), 291-299.

[21] LINDENSTRAUSS, J., Extension of compact operators, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 48 (1964).

[22] MACH, J., On the proximinality of compact operators with range in C(S), *Proc. Amer. Math. Soc.* 72 (1978), 99-104.

[23] MACH, J., Best simultaneous approximation of bounded functions with values in certain Banach spaces, *Math. Annalen* 240 (1979), 157-164.

[24] MACH, J., On the existence of best simultaneous approximation, *Journal Approximation Th.* 25 (1979), 258-265.

[25] MACH, J., On the proximinality of Stone-Weierstrass subspaces, *Pacific J. Math.*, por aparecer.

[26] MACH, J. e J.D. WARD., Approximation by compact operators on certain Banach spaces, *Journal Approximation Th.* 23 (1978), 274-286.

[27] MICHAEL, E., Selected selection Theorems, *Amer. Math. Monthly* 63 (1956), 233-238.

[28] NACHBIN, L., A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformatious, *Trans. Amer. Math. Soc.* 68 (1950), 28-46.

[29] OLECH, C., Approximation of set-valued functious by continuous functions, *Colloq. Math.* 19 (1968), 285-293.

[30] PHILIPS, R.S., On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 48 (1940), 516-541.

[31] PROLLA, J.B., *Approximation of vector volued functions*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1977.

[32] SCHAEFER, H.H., *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[33] SEMADENI, Z., *Banach spaces of continuous functions*, Polish Scientific Publ., Varsóvia, 1971.

[34] SMITH, P.W., e J.D. WARD, Restricted centers in subalgebras of C(X), *Journal Approximation Th.* 15 (1975), 54-59.

[35] WARD, J.D., Chebyshev centers in spaces of continuous functions, *Pacific J. Math* 52 (1974), 283-287.

[36] YOST, D.T., Best approximation and intersections of balls in Banach spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* 20 (1979), 285-300.

----x----