Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Identidades Polinomiais Graduadas e Produto Tensorial Graduado

por

José Antônio Oliveira de Freitas

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Plamen Koshlukov

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes, Unicamp e CNPq.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **José Antônio Oliveira de Freitas** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 9 de Novembro de 2009.

Prof. Dr. Plamen Kochloukov

Banca examinadora:

Prof. Dr. Plamen Kochloukov

Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

Prof. Dr. Ivan Chestakov

Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

Profa. Dra. Marinês Guerreiro

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Freitas, Jose Antonio Oliveira de
F884i Identidades polinomiais graduadas e produto tensorial graduado / Jose Antonio Oliveira de Freitas -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Plamen Emilov Kochloukov
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. PI-algebras. 2. Produto tensorial. 3. Lie, Algebras de. 4. Algebra não-comutativa. I. Kochloukov, Plamen Emilov. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Graded polynomial identities and graded tensor products.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. PI-algebras. 2. Tensor products. 3. Lie algebras. 4. Noncommutative algebras.

Área de concentração: Algebra

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ivan Shestakov (IME-USP)
Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (IME-USP)
Profa. Dra. Marinês Guerreiro (DMA-UFV)

Data da defesa: 06/11/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 06 de novembro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Prof(a). Dr(a). IVAN CHESTAKOV

Prof(a). Dr(a). VYACHESLAV FUTORNY

Prof(a). Dr(a). MARINES GUERREIRO

Aos meus pais Manoel e
Maria do Carmo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado esta oportunidade e me guiado nesta tese. Sem Ele nada disso teria sentido.

A meus pais Maria do Carmo e Manoel. Meus irmãos Leandro, Giovane, João Paulo e Marcos Vinícius que sempre me incentivaram e apoiaram nesta caminhada.

Aos meus amigos Adilson, Adilson (avx), pela amizade todo esse tempo, Antônio Brandão, Ariosvaldo, Durval, Danilo, Luis, apesar de ser Flamenguista, Luiz, Maurício e Ísis, Rogério Casagrande, Rogério, aos colegas de curso tanto do IMECC/UNICAMP quanto da UFV, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória. E aos amigos que permanecem em minha cidade, Viçosa, e outros que há muito não vejo.

Agradeço em especial ao Dimas, companheiro de sala de estudo e irmão acadêmico, pela amizade e ajuda nesses anos. Principalmente pela piadas "engraçadíssimas" que ajudaram a descontrair e ao Tiago, também companheiro de sala de estudo, por ajudar a rir das piadas do Dimas.

Em especial, à Lúcia Rolim Santana uma pessoa muito especial para mim. Obrigado pelo carinho, companheirismo, atenção, dedicação e ajuda todo esse tempo.

Aos professores do IMECC-UNICAMP e da UFV. Em especial meu orientador, Plamen Kochloukov, pela paciência, dedicação, orientação excelente e por toda ajuda que me concedeu com o seu imenso conhecimento matemático todo esse tempo. E também em especial à professora Marinês Guerreiro que me proporcionou começar meus estudos em Álgebra.

Muito obrigado.

RESUMO

Nesta tese estudamos identidades polinomiais graduadas para certas álgebras. Inicialmente, estudamos identidades satisfeitas pelo produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado. Este estudo foi motivado pelo trabalho de Regev e Seeman com produtos tensoriais $\mathbb{Z}_2$-graduados. Eles provaram vários casos nos quais tal produto tensorial é PI equivalente a certas álgebras T-primas. Também conjeturaram que isto sempre ocorre. Trabalhamos com os demais casos e conseguimos provar que tal conjetura é verdadeira. Além disso, provamos que para certas álgebras, quando consideramos corpos de característica positiva, o produto tensorial graduado ainda se comporta como o não graduado. Consideramos também o produto tensorial β-graduado e suas identidades. Provamos que o Teorema $A \otimes B$ de Regev continua válido no caso do produto tensorial β-graduado quando as álgebras são graduadas por grupos abelianos finitos, e β é um bicaracter antissimétrico. Também estudamos a PI equivalência do produto tensorial β-graduado de álgebras T-primas.

Em seguida estudamos identidades graduadas, descrevemos um conjunto de geradores para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra de Lie W_1. A álgebra W_1 é a álgebra das derivações do anel de polinômios $K[t]$, e é conhecida como a álgebra de Witt. Provamos que se a característica do corpo for 0, então as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de W_1 são geradas por um conjunto de identidades de grau 2 e 3. Mais ainda, provamos que não é possível obter um conjunto finito de geradores para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de W_1.

ABSTRACT

In this PhD thesis we study graded polynomial identities for certain types of algebras. First, we study polynomial identities satisfied by the $\mathbb{Z}_2$-graded tensor products. This research was motivated by the paper of Regev and Seeman about the $\mathbb{Z}_2$-graded tensor products. They proved that in a series of cases such tensor products are PI equivalent to T-prime algebras. Then they conjectured that this is always the case. We deal here with the remaining cases and thus confirm Regev and Seeman's conjecture. Furthermore, we prove that for some algebras we can remove the restriction on the characteristic of the base field, and we show that the behaviour of the corresponding graded tensor products is quite similar to that for the usual ungraded tensor products. We consider too the β-graded tensor products and their identities where β is a skew symmetric bicharacter. We show that Regev's $A \otimes B$ theorem holds for β-graded tensor products whenever the gradings are by finite abelian groups. Furthermore we study the PI equivalence of β-graded tensor products of T-prime algebras.

Afterwards we study the graded identities of the Lie algebra W_1. We describe a set of generators of the $\mathbb{Z}$-graded identities of W_1. The algebra W_1 is the algebra of derivation of the polynomial ring $K[t]$, and it is known as the Witt algebra. We prove that if K is a field of characteristic 0, then the $\mathbb{Z}$-graded identities of W_1 are consequences of a collection of polynomials of degree 2 and 3. Furthermore we prove that the $\mathbb{Z}$-graded identities for W_1 do not admit a finite basis.

SUMÁRIO

Introdução **1**

1 Conceitos Preliminares **8**

1.1 Álgebras com identidades polinomiais 8

1.2 Variedades e álgebras relativamente livres 13

1.3 Identidades Homogêneas, Multilineares e Próprias 14

1.4 Álgebras Graduadas 17

1.5 Álgebras de Lie 22

1.6 Teoria de Kemer 26

1.7 Produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado 28

2 Tensor $\mathbb{Z}_2$-graduado **30**

2.1 A álgebra $M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$ 30

2.2 As álgebras $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$ 38

2.3 As álgebras $M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$ 43

3 O produto β-tensorial graduado **48**

3.1 Uma generalização do Teorema de Regev 48

3.2 $M_n(K) \otimes_\beta E$ e $M_n(E)$ 51

3.3 As álgebras $M_{2^n,2^n}(E)$, $M_{2^n}(E)$ e $E^{\otimes_\beta n}$ 54

4 Identidades $\mathbb{Z}$-graduadas para W_1 57

4.1 Identidades $\mathbb{Z}$-graduadas em álgebras de Lie 57

4.2 Prova do teorema principal 58

4.3 Independência das identidades graduadas 71

4.4 Considerações finais 74

Bibliografia 74

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de alguns tópicos da álgebra: teoria de anéis, e mais especificamente, da teoria das álgebras com identidades polinomiais (PI-álgebras).

Álgebras de matrizes sobre anéis comutativos são objetos de estudo de grande importância devido ao seu amplo aspecto de aplicações. Não menos importantes são as álgebras comutativas, as de dimensão finita, as álgebras exteriores. Todas elas compartilham o fato de satisfazerem relações polinomiais entre seus elementos. Isto quer dizer que para cada uma dessas álgebras existe um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ nas variáveis não comutativas x_i que se anula quando avaliado nos elementos das mesmas. Se uma álgebra satisfaz esta condição ela é chamada uma álgebra com identidade polinomial (ou uma PI-álgebra, da sigla em inglês *polynomial identity*). Tais álgebras compartilham várias propriedades em comum; o estudo delas pode consistir em descrever a influência das identidades polinomiais sobre a estrutura da álgebra. Podemos também estudar o conjunto das identidades satisfeitas por alguma álgebra importante, ou ainda todas as álgebras que satisfazem alguma família de identidades.

A teoria das álgebras com identidades polinomiais começou o seu desenvolvimento há 80 anos, com trabalhos de Dëhn e Wagner. Nesses trabalhos aparecem, embora de forma implícita, estudos sobre algumas identidades polinomiais para as matrizes de ordem 2. Os trabalhos de Dëhn e de Wagner foram motivados por pesquisas em geometria finita. Por outro lado, conceitos mais algébricos relacionados com a PI teoria, encontram-se ainda em

trabalhos de Sylvester sobre os invariantes de duas matrizes de ordem 2, por volta de 1870.

A pesquisa das PI-álgebras, no sentido próprio, intensificou-se em torno de 1950, quando foi demonstrado o Teorema de Amitsur e Levitzki. Esse teorema mostrou que a álgebra das matrizes de ordem n com entradas num corpo satisfaz o polinômio standard de grau $2n$. O teorema afirma que a somatória alternada de todos os produtos de $2n$ matrizes de ordem n é sempre igual a matriz nula. Também na mesma época foi demonstrado o teorema de Nagata e Higman: Se A é uma álgebra associativa sobre corpo de característica 0 que é nil de índice limitado, então A é nilpotente. (Recordamos que esse teorema foi originalmente demonstrado por Dubnov e Ivanov, em 1943, mas o trabalho deles, publicado durante a Segunda Guerra Mundial, ficou desconhecido para os algebristas na época.) Desde então, vários algebristas reconhecidos deram contribuições importantes para a PI teoria. Relacionamos aqui os nomes de G. Bergman, P. M. Conh, I. N. Herstein, N. Jacobson, I. Kaplansky, A. I. Kostrikin, V. N. Latyshev, Yu. N. Malcev, E. Posner, A. I. Shirshov, R. Swan, entre outros. Vários algebristas têm trabalhado na área; segue uma lista de nomes (sem qualquer pretensão de ser completa): Y. Bahturin, A. Berele, A. Braun, V. Drensky, E. Formanek, A. Giambruno, A. Kemer, C. Procesi, Yu. P. Razmyslov, A. Regev, L. H. Rowen, J. T. Stafford, M. Van Den Bergh, M. R. Vaughan-Lee, M. Zaicev, E. Zelmanov.

Aqui discutiremos brevemente um dos feitos mais importantes na PI teoria, a teoria estrutural desenvolvida por Kemer. Essa teoria foi motivada pelo famoso problema de Specht proposto em 1950: "Se A é uma PI álgebra sobre corpo de característica 0, então as identidades de A seguem de um conjunto finito de tais identidades?" Esse problema estava atraindo a atenção de vários algebristas; a resolução dele exigiu o desenvolvimento de uma complexa teoria.

Nessa teoria, as álgebras verbalmente primas desempenham um papel proeminente. Aqui recordamos que uma álgebra é verbalmente prima (ou T-prima) se o seu T-ideal, isto é, o ideal de todas identidades da álgebra, é primo na classe de todos os T-ideais na álgebra associativa livre. A teoria estrutural de T-ideais desenvolvida por Kemer classificou as álgebras verbalmente primas sobre tais corpos. Mais ainda, Kemer mostrou que os T-ideais verbalmente semiprimos são intersecções finitas de T-ideais verbalmente primos, e finalmente que se $\mathcal{I}$ é um T-ideal então $\mathcal{J}^n \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ para alguma escolha de n e de um T-ideal $\mathcal{J}$

verbalmente semiprimo.

Seja K um corpo de característica 0 e seja E a álgebra de Grassmann (ou exterior) do espaço vetorial V com base $\{e_1, e_2, \dots\}$. Então, E tem base consistindo dos elementos 1 e $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ onde $k = 1, 2, \dots$, e a multiplicação em E é induzida por $e_i e_j = -e_j e_i$ para todos i e j. De acordo com a teoria de Kemer as álgebras verbalmente primas são exatamente as seguintes: primeiro as triviais; $\{0\}$ e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto infinito. Em seguida, $M_n(K)$, a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em K. Mais uma classe de álgebras verbalmente primas é dada pela álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em E, denotada por $M_n(E)$. A álgebra E tem $\mathbb{Z}_2$-graduação natural definida como segue: seja E_0 o centro de E, então E_0 é gerado como espaço vetorial por todos os monômios na base de E com comprimento par, denotamos por E_1 o espaço gerado pelos monômios de comprimento ímpar. Então, os elementos de E_1 anti-comutam. A última classe de álgebras verbalmente primas é denotada por $M_{a,b}(E)$. Esta é a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ que consiste de todas as matrizes sob a forma $Ae_{11} + Be_{12} + Ce_{21} + De_{22}$ onde e_{ij} são as matrizes elementares 2×2, $A \in M_a(E_0)$, $B \in M_{a\times b}(E_1)$, $C \in M_{b\times a}(E_1)$ e $D \in M_b(E_0)$.

Duas álgebras A e B são PI-equivalentes, $A \sim B$, quando satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Como uma consequência da teoria, Kemer mostrou que em característica 0 a classe das álgebras T-primas é fechada sob produtos tensoriais. Ele descreveu a PI-equivalência nos produtos tensoriais de álgebras verbalmente primas. Esta descrição é conhecida como **Teorema sobre o Produto Tensorial (T.P.T.)**. Seja $\operatorname{car} K = 0$, então

(1) $M_{a,b}(E) \otimes E \sim M_{a+b}(E)$;

(2) $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E) \sim M_{ac+bd,ad+bc}(E)$;

(3) $E \otimes E \sim M_{1,1}(E)$.

Aqui, e no que segue, todos os produtos tensoriais são considerados sobre o corpo K.

Já comentamos que como uma das consequências de sua teoria estrutural, Kemer (1987) resolveu em afirmativo o famoso e antigo problema (1950) de Specht: "Todo T-ideal é finitamente gerado como um T-ideal?"Tudo isso mostrou que a estrutura dos T-ideais na álgebra relativamente livre é bastante parecida, em certo sentido, com a estrutura dos ideais

na álgebra dos polinômios comutativos em várias variáveis. Aqui recordamos que uma das principais ferramentas utilizadas na teoria de Kemer foram as identidades graduadas. Recomendamos a leitura de [26] para mais detalhes sobre a teoria estrutural de PI-álgebras e as contribuições de Kemer nesta teoria.

O Teorema sobre o Produto Tensorial, embora uma consequência da teoria estrutural, admite provas que independem dela. Regev [36] deu uma tal demonstração, em seguida Di Vincenzo; Di Vincenzo e Nardozza, provaram partes deste teorema, veja ([14],[15], [16]). Outras provas elementares de casos do T.P.T. foram dadas em ([3],[4],[28]). Nesses últimos artigos, os autores estudaram também o comportamento dos correspondentes T-ideais em característica positiva. Eles mostraram que o T.P.T. continua válido sobre corpos infinitos de característica positiva $p > 2$, mas somente em nível multilinear. Em outras palavras, as partes multilineares dos respectivos T-ideais coincidem. Mais ainda, em [3], eles provaram que a terceira afirmação do T.P.T. falha e, em [4], também provaram que a primeira afirmação falha (quando $a = b = 1$). A segunda afirmação do T.P.T. também falha em característica positiva, conforme demonstrado em [1].

As graduações com grupos adequados e as respectivas identidades graduadas desempenharam um papel decisivo na pesquisa em torno do Teorema sobre o produto tensorial. Ressaltamos que logo após a pesquisa de Kemer as identidades graduadas tornaram-se objeto de estudo extensivo, e de interesse independente. As possíveis graduações em álgebras matriciais foram estudadas por vários algebristas; o leitor pode encontrar mais detalhes e referências bibliográficas no artigo [8].

Nos últimos anos intensificou-se o estudo das propriedades combinatoriais de produtos tensoriais *torcidos*, várias vezes chamados de produtos tensoriais graduados, ou com fatores de comutação. Um exemplo de tal produto tensorial, é o produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado. Este produto foi estudado por Regev e Seeman, [37]. Neste artigo os autores provam alguns casos do **Teorema do Produto Tensorial** quando substituímos o tensor usual pelo graduado. Para mais detalhes sobre produto tensorial graduado veja [13, 41]. Outro produto tensorial graduado pode ser obtido tomando-se $\beta : G \times G \to K^*$, onde G é um grupo abeliano finito, tal que $\beta(g + h, k) = \beta(g, k)\beta(h, k)$, $\beta(g, h + k) = \beta(g, h)\beta(g, k)$ e $\beta(g, h)\beta(h, g) = 1$, para todo g, h, $k \in G$. Tal β é chamado um *bicaracter antissimétrico*. A partir deste β podemos

definir um produto tensorial β-graduado. Tal produto tensorial é estudado em [21].

Aqui destacamos um outro teorema célebre da teoria das álgebras com identidades polinomiais. Ele foi um dos primeiros resultados obtidos por meio de aplicações adequadas da combinatória à PI teoria. Este é o Teorema $A \otimes B$ de Regev, demonstrado em [34]. É bem conhecido e fácil demonstrar que se A é uma PI álgebra então as subálgebras e os quocientes de A também são PI álgebras. Tampouco é dificil demonstrar que produto direto de álgebras PI é de novo PI. O Teorema de Regev diz que o produto tensorial $A \otimes B$ de duas PI álgebras A e B de novo é PI. A demonstração dada por Regev foi um ponto marcante no desenvolvimento da PI teoria; nós voltaremos a discutir essa demonstração em detalhes mais adiante. Em [37] os autores demonstraram uma generalização do teorema $A \otimes B$ quando o produto tensorial é substituído pelo produto tensorial 2-graduado.

Pelo exposto acima podemos concluir que a teoria de identidades polinomiais graduadas em álgebras associativas está bem desenvolvida. Por outro lado, identidades graduadas em outras classes de álgebras (não associativas) foram pouco estudadas. Identidades polinomiais em álgebras de Lie foram estudadas extensivamente, ver por exemplo [33], [20]. Mas os resultados conhecidos sobre identidades graduadas em álgebras de Lie são muito restritos.

O único caso não trivial onde as identidades graduadas de uma álgebra de Lie são conhecidas é o da álgebra $sl_2(K)$ das matrizes 2×2 de traço 0, quando K é um corpo infinito e de característica $\neq 2$. As possíveis graduações em $sl_2(K)$ foram descritas em [38], onde as respectivas álgebras graduadas relativamente livres foram também descritas (assumindo-se o corpo de característica 0). Acontece que, além da graduação trivial, $sl_2(K)$ admite mais três graduações, dadas por: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$. No último caso, a graduação está concentrada em -1, 0, 1. Bases (finitas) das identidades graduadas em cada uma dessas graduações foram descritas em [27], assumindo-se K de qualquer característica diferente de 2.

Ainda nesta direção, em [30] foram estudadas as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra de Lie $gl_2(K) = M_2(K)^-$ sobre um corpo infinito de característica 2. Foi demonstrado que essas identidades não admitem bases finitas. Ainda mais, foi dado um exemplo de uma variedade de álgebras de Lie graduadas que não admite qualquer base finita mas toda subvariedade própria possui base finita de identidades graduadas.

Neste trabalho apresentaremos os resultados obtidos nos artigos [21] e no manuscrito [22].

O artigo [21] trata de identidades em álgebras graduadas e produtos tensoriais com fatores de comutação. Os principais resultados do artigo consistem em resolver (em afirmativo) uma conjetura de Regev e Seeman (ver [37]) e demonstrar que a classe das álgebras T-primas é fechada sob produtos tensoriais graduados em característica 0. Mais ainda, mostramos naquele artigo que quando a característica do corpo é positiva, tal afirmação deixa de ser verdadeira. Ainda demonstramos naquele artigo uma generalização do Teorema $A \otimes B$ de Regev.

Em [22] estudamos identidades graduadas em álgebras de Lie. Estudamos a álgebra W_1 das derivações da álgebra polinomial $K[t]$ sobre corpos de característica 0. Esta álgebra é simples (e de dimensão infinita), e é muito importante para a teoria. Sabe-se que ela satisfaz uma identidade de grau 5, mas não se sabe nada sobre os geradores do ideal das identidades dessa álgebra de Lie. A álgebra W_1 admite uma $\mathbb{Z}$-graduação natural, e nós estudamos as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de W_1. Encontramos uma base dessas identidades graduadas. A base é composta por uma sequência infinita de identidades graduadas. Em seguida, exibimos uma base minimal, isto é, uma base composta por identidades independentes. Essa base também é infinita.

O texto está organizado em quatro capítulos, estruturados como segue.

- O Capítulo 1 é dedicado às definições preliminares e apresentação de alguns dos nossos objetos de estudo, bem como alguns aspectos históricos e resultados clássicos que motivaram o desenvolvimento da teoria das Identidades Polinomiais, ou simplesmente PI teoria. Este capítulo auxilia o leitor como referência aos resultados básicos. Ressaltamos que para um leitor com bom conhecimento básico da PI teoria, este capítulo pode ser evitado sem comprometimento dos demais.

- O Capítulo 2 trata do produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado. Provamos que em característica positiva o produto tensorial graduado $\bar{\otimes}$ não se comporta como em característica zero. Mais exatamente, provamos que se $\operatorname{car} K = 0$, temos $T(M_{k,l}\bar{\otimes}E) = T(M_{k+l}(E))$ e $T(M_{k,l}\bar{\otimes}M_{r,s}) = T(M_{p,q})$ onde $p = kr + ls$, $q = ks + lr$, exatamente o mesmo comportamento do produto tensorial ordinário, isto é, sem considerar a $\mathbb{Z}_2$-graduação. Se $\operatorname{car} K = p > 2$, provamos que $T(M_2(E)) \subset T(M_{1,1}\bar{\otimes}E)$, uma inclusão própria. Os resultados deste capítulo foram publicados no artigo [21].

- O Capítulo 3 trata do produto tensorial β-graduado, isto é, o produto tensorial dado por um bicaracter antissimétrico β. Neste capítulo provamos um análogo do Teorema $A \otimes B$ de Regev, para o produto tensorial β-graduado. Também provamos que $M_n(K) \otimes_\beta E$ e $M_n(E)$ são PI equivalentes. Mais ainda, utilizando o produto tensorial β-graduado, é possível dar uma nova prova de alguns resultados obtidos em [19]. Os resultados deste capítulo foram publicados em [21].

- No Capítulo 4 estudamos as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de W_1, a álgebra de Lie das derivações do anel de polinômios em um variável comutativa t. Obtemos que o T-ideal $\mathbb{Z}$-graduado de W_1 é gerado por um conjunto infinito de identidades e mais ainda, não é possível obter um subconjunto finito de identidades que gerem $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Os resultados deste capítulo estão em fase final de preparação para serem submetidos para publicação.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados importantes para uma boa compreensão do texto. Na maioria das vezes não apresentamos demonstrações. Para os resultados mais importantes indicamos as devidas referências. Para mais detalhes veja [5, 20, 23].

1.1 Álgebras com identidades polinomiais

Aqui apresentamos nosso objeto de estudo e algumas de suas propriedades. Também expomos alguns exemplos de álgebras com identidades polinomiais.

Todas álgebras e espaços vetoriais serão considerados sobre algum corpo K. Os produtos tensoriais também serão sobre K. As álgebras que consideramos não serão necessariamente associativas. No decorrer do texto consideraremos álgebras associativas e álgebras de Lie. Abaixo discutiremos algumas questões sobre identidades polinomiais em álgebras associativas.

Definição 1.1.1. *Seja $\mathfrak{V}$ uma classe de álgebras e seja $F \in \mathfrak{V}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é chamada uma* ***álgebra livre na classe $\mathfrak{V}$, livremente***

gerada por X*, se para qualquer álgebra* $R \in \mathfrak{V}$*, toda aplicação* $X \to R$ *pode ser extendida a um homomorfismo* $F \to R$*. A cardinalidade* $|X|$ *do conjunto* X *é chamada* ***posto*** *de* F*.*

Proposição 1.1.2. *[20, Proposition 1.2.3] Seja* $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ *um conjunto infinito e enumerável de variáveis não comutativas. Seja* $K\langle X\rangle$ *a álgebra com base formada pelos elementos:*

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}, \quad x_{i_j} \in X,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

onde o elemento de comprimento 0 será denotado por 1*. A multiplicação de dois quaisquer elementos* $x_{i_1}\dots x_{i_p}$ *e* $x_{j_1}\dots x_{j_q}$ *é dada pela regra*

$$(x_{i_1}\dots x_{i_p})(x_{j_1}\dots x_{j_q}) = x_{i_1}\dots x_{i_p}x_{j_1}\dots x_{j_q}.$$

Então $K\langle X\rangle$ *é livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade. Tal álgebra é chamada* ***álgebra associativa livre.***

O subespaço $K\langle X\rangle' \subseteq K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, $x_{i_j} \in X$, $n = 1, 2, \dots,$ é uma subálgebra chamada de **álgebra associativa livre sem unidade**.

Note que a álgebra $K\langle X\rangle$ definida acima é, em outras palavras, a álgebra dos polinômios não comutativos.

Definição 1.1.3. *O elemento* $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$ *é chamado uma* ***identidade polinomial*** *para a álgebra* R*, se* $f(r_1, \dots, r_n) = 0$ *para todo* $r_1, \dots, r_n \in R$*. Em outras palavras,* $f(x_1, \dots, x_n)$ *pertence ao núcleo de todos homomorfismos* $K\langle X\rangle \to R$*. Se existe um elemento não nulo* $f(x_1, \dots, x_n)$ *de* $K\langle X\rangle$ *que é uma identidade polinomial para* R*, então* R *é chamada uma* ***PI-álgebra****.*

Exemplo 1.1.4. *Recordemos que uma álgebra* A*, sem unidade, é chamada* ***nil de índice limitado*** *se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a^n = 0$*, para todo* $a \in A$*. Agora se existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_1a_2\dots a_m = 0$*, para quaisquer* $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$*, então* A *é chamada* ***nilpotente*** *e* m *é chamado o* ***índice de nilpotência****. É imediato que toda álgebra nilpotente é nil de índice limitado.*

Toda álgebra nil de índice limitado, em particular toda álgebra nilpotente é uma PI-álgebra. De fato, o polinômio $f(x) = x^n$ *é uma identidade polinomial de* A*. Quando a*

álgebra A é nilpotente de índice m, o polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 x_2 \ldots x_m$ também é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.1.5. *Toda álgebra comutativa A é uma PI-álgebra, pois o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.1.6. *Seja V um espaço vetorial com base enumerável $\{e_i \mid i \in I\}$. A **álgebra de Grassmann**, ou álgebra exterior, $E = E(V)$ é a álgebra associativa gerada por $\{e_i \mid i \in I\}$ que satisfaz as seguintes relações:*

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \text{ para todo } i,\ j \in I.$$

E se a característica de K for igual a dois, exigimos também $e_i^2 = 0$, para todo $i \in I$.

Note que $D = \{1, e_{i_1} \ldots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r,\ r = 1, 2, 3 \ldots\}$ é uma base de E. Além disso, se V_n é o subespaço de V gerado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$, denotaremos por $E(V_n)$ sua álgebra de Grassmann correspondente.

Exemplo 1.1.7. *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra. De fato, um cálculo direto usando os elementos da base de E mostra que $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3] = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial de E.*

Exemplo 1.1.8. *Seja A uma álgebra de dimensão finita, onde $\dim A < n$. Então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz uma generalização do polinômio comutador $[x_1, x_2]$, conhecida como **identidade "standard"** de grau n:*

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

*onde $(-1)^\sigma$ é o sinal de $\sigma \in S_n$, o grupo das permutações de n elementos. A álgebra A também satisfaz a **identidade de Capelli**:*

$$d_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \ldots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}.$$

Para verificarmos as afirmações acima, basta fazê-lo para uma base de A, pois os polinômios s_n e d_n são lineares e antissimétricos nas variáveis x_i's.

Teorema 1.1.9 (Amitsur-Levitzki [2], Theorems 1, 2 e 3)**.** *(i) A álgebra $M_n(K)$, das matrizes de ordem n, satisfaz a identidade standard de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}.$$

Esta álgebra não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau menor que $2n$. Ainda mais, se a cardinalidade de K é maior que 2 ou $n > 2$, todas identidades de $M_n(K)$ de grau $2n$ são múltiplos escalares de s_{2n}.

(ii) Suponha que S_{n+1} age no conjunto de símbolos $\{0, 1, \ldots, n\}$. Então $M_n(K)$ satisfaz a identidade de algebricidade

$$\begin{aligned} a_n(x, y_1, \ldots, y_n) &= d_{n+1}(1, x, x^2, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_{n+1}} (-1)^\pi x^{\pi(0)} y_1 x^{\pi(1)} y_2 \ldots y_n x^{\pi(n)}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.10. *Seja $M_n(E)$ a álgebra das matrizes de ordem n com entradas na álgebra de Grassmann E. Para quaisquer a, $b \in \mathbb{N}$ tais que $a + b = n$, verifica-se através das regras de multiplicação de matrizes em blocos, que o conjunto $M_{a,b}(E)$ das matrizes*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} E_0 & \ldots & E_0 & E_1 & \ldots & E_1 \\ \vdots & a \times a & \vdots & \vdots & a \times b & \vdots \\ E_0 & \ldots & E_0 & E_1 & \ldots & E_1 \\ \hline E_1 & \ldots & E_1 & E_0 & \ldots & E_0 \\ \vdots & b \times a & \vdots & \vdots & b \times b & \vdots \\ E_1 & \ldots & E_1 & E_0 & \ldots & E_0 \end{array}\right)$$

é uma subálgebra de $M_n(E)$.

Lema 1.1.11. *[11, Lemma p.1509] Seja s_n o polinômio standard de grau n. Então*

1. *A álgebra $M_n(E)$ satisfaz a identidade s_{2n}^k para algum $k > 1$, mas não satisfaz s_{2n} e nem identidades da forma s_m^k, para qualquer k, quando $m < 2n$.*

2. *Se $a \geq b$, então a álgebra $M_{a,b}(E)$ satisfaz a identidade s_{2a}^k para algum $k > 1$, mas não satisfaz s_{2a} nem identidades da forma s_m^k, para qualquer k, quando $m < 2a$.*

Como será visto mais adiante, as álgebras $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$ desempenham um papel extremamente importante na classificação dos T-ideais em característica zero dada por Kemer em [26].

É bem claro que subálgebras e quocientes (isto é, imagens homomorfas) de PI-álgebras são de novo PI-álgebras. Verifica-se facilmente que produtos diretos de PI-álgebras são também PI. O próximo teorema, devido a A. Regev, providencia mais uma maneira natural de obter PI-álgebras a partir de duas PI-álgebras dadas.

Teorema 1.1.12 ([34], Theorem 5.1)**.** *O produto tensorial $A \otimes B$ de duas PI-álgebras é de novo uma PI-álgebra.*

Definição 1.1.13. *Um ideal $\mathcal{I}$ de uma álgebra A é dito ser um **T-ideal**, se $\mathcal{I}$ for invariante sob todo endomorfismo ϕ de A, isto é, se $\phi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ para todo endomorfismo da álgebra A.*

Vamos considerar principalmente T-ideais na álgebra livre.

Teorema 1.1.14. *O ideal $T(A)$ das identidades da álgebra A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $\phi\colon K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um endomorfismo. Como $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$ e $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, obtemos $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in T(A)$. Portanto, $\phi(T(A)) \subseteq T(A)$. ♢

O próximo resultado mostra que a afirmação recíproca do teorema anterior também vale.

Teorema 1.1.15. *Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então, $I = T(K\langle X\rangle/I)$.*

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $f_1, \ldots, f_n \in K\langle X\rangle$. Como $f(f_1, \ldots, f_n) \in I$, obtemos

$$f(f_1 + I, \ldots, f_n + I) = f(f_1, \ldots, f_n) + I.$$

Logo, $I \subseteq T(K\langle X\rangle/I)$. Por outro lado, supondo $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(K\langle X\rangle/I)$, temos $I = f(x_1 + I, \ldots, x_n + I) = f(x_1, \ldots, x_n) \in I$. Portanto, $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$. ♢

1.2 Variedades e álgebras relativamente livres

Nesta seção apresentamos as variedades de álgebras associativas e suas relações com as PI-álgebras.

Definição 1.2.1. *(1) Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. A classe $\mathfrak{V}$ das álgebras associativas satisfazendo as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i \in I$ é chamada a* ***variedade*** *de álgebras associativas definida, ou determinada, pelo sistema de identidades polinomiais $\{f_i \mid i \in i\}$. A variedade $\mathfrak{W}$ é chamada uma* ***subvariedade*** *de $\mathfrak{V}$ se $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$.*

(2) O conjunto $T(\mathfrak{V})$ de todas identidades polinomiais satisfeitas pela variedade $\mathfrak{V}$ é chamado o ***T-ideal*** *ou* ***ideal verbal*** *de $\mathfrak{V}$. Dizemos que o T-ideal $T(\mathfrak{V})$ é gerado como T-ideal pelo conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$, se o menor ideal gerado por $\{f_i \mid i \in I\}$ coincide com $T(\mathfrak{V})$. Usamos a notação $T(\mathfrak{V}) = \langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ e dizemos que o conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ é uma* ***base*** *das identidades polinomiais para $\mathfrak{V}$ se f_i não pertence ao ideal gerado por $\{f_j \mid j \in I,\ j \neq i\}$. Os elementos de $T(\mathfrak{V})$ são chamados* ***consequências****, ou seguem, das identidades polinomiais da base.*

(3) Se R é qualquer álgebra, denotamos por $T(R)$ o ideal das identidades polinomiais satisfeitas por R.

Definição 1.2.2. *Fixe um conjunto Y, a álgebra $F_Y(\mathfrak{V})$ na variedade $\mathfrak{V}$ é chamada* ***álgebra relativamente livre*** *de $\mathfrak{V}$ (ou uma álgebra $\mathfrak{V}$-livre), se $F_Y(\mathfrak{V})$ é livre na classe $\mathfrak{V}$ (e é livremente gerada por Y). A cardinalidade de Y é chamada* ***o posto*** *de $F_Y(\mathfrak{V})$.*

Proposição 1.2.3. *[20, Proposition 2.2.5] Sejam $\mathcal{V}$ a variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto arbitrário e J o ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por:*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_j \in K\langle Y\rangle, i \in I\}.$$

Então a álgebra $F = K\langle Y\rangle/J$ é a álgebra relativamente livre, com $\overline{Y} = \{y + J \mid y \in Y\}$ sendo seu conjunto de geradores. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres de mesmo posto são isomorfas.

Observação 1.2.4. *A partir da Proposição 1.2.3, temos que o T-ideal em $K\langle X\rangle$ gerado por $\{f_i \mid i \in I\}$ consiste de todas as combinações lineares dos elementos da forma*

$$u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) v_i \quad \textit{onde } g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle X\rangle.$$

1.3 Identidades Homogêneas, Multilineares e Próprias

O objetivo desta seção é apresentar as relações que existem entre as identidades polinomiais e os tipos de polinômios existentes em $K\langle X\rangle$, bem como a relação que existe entre a característica do corpo K e os geradores do T-ideal de uma PI-álgebra A. Os assuntos que discutimos aqui são relevantes, pois permitem uma redução significativa do conjunto de polinômios que temos de considerar.

Definição 1.3.1. *Um monômio M tem grau k em x_i, se a variável x_i ocorre em M exatamente k vezes. Um polinômio é* ***homogêneo*** *de grau k em x_i, se todos os seus monômios têm grau k em x_i, e será denotado por $\deg_{x_i} f = k$. Um* ***polinômio linear*** *em x_i é um polinômio de grau um em x_i.*

Definição 1.3.2. *Um polinômio é* ***multihomogêneo****, se para cada variável x_i todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. Um polinômio é* ***multilinear****, se é linear em cada variável. O* ***grau*** *de um polinômio é o grau de seu maior monômio.*

Definição 1.3.3. *Sejam f um polinômio em $K\langle X\rangle$ de grau n e x_k uma variável de f. Podemos escrevê-lo como uma soma, $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada polinômio f_i é homogêneo de grau i na variável x_k. Cada polinômio f_i é chamado a* ***componente homogênea*** *de grau i em x_k do polinômio f.*

Definição 1.3.4. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ é* ***multilinear de grau*** *m, se f é multihomogêneo de grau $(1, \ldots, 1)$ em $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \subseteq K\langle X\rangle$. Denotamos por P o conjunto de todos os polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$, enquanto que por P_n denotaremos o espaço vetorial dos polinômios multilineares de grau n.*

Observação 1.3.5. *A dimensão de P_n é $n!$ e uma base é dada por*

$$\{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Proposição 1.3.6. *Seja*

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X\rangle,$$

onde f_i são as componentes homogêneas de f com grau i em x_1.

(1) Se o corpo K tem mais que n elementos, então as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i = 0,\ 1,\ \dots,\ n$, seguem de $f = 0$.

(2) Se $\operatorname{car} K = 0$ ou $\operatorname{car} K > \deg f$, então $f = 0$ é equivalente a um sistema de identidades polinomiais multilineares.

Prova: (i) Seja $I = \langle f\rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0,\ \dots,\ \alpha_n$ de K. Como I é um T-ideal, temos:

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \in I; \quad j = 0,\ 1,\ \dots,\ n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0,\ 1,\ \dots,\ n$. Sendo o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

o determinante de Vandermonde que é diferente de zero, resolvemos o sistema pela regra de Crammer. A solução é obtida através de somas, subtrações, multiplicações e divisão por escalar. Assim como I é um ideal temos cada $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \in I$, ou seja, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são consequências de $f = 0$.

(ii) Pela parte (i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ é multihomogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$, escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) \in I$ sob a forma:

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo, $f_i \in I$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Como $\deg_{y_i} f_i < k$; $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2$, podemos utilizar indução para cada f_i e obtemos assim um conjunto de consequências multilineares de $f = 0$. Para ver que estas identidades multilineares são equivalentes a $f = 0$, é suficiente observarmos que:

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{k}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e o coeficiente binomial é diferente de zero, pois assumimos que $\operatorname{car} K = 0$ ou maior que o grau de f. ♢

Observamos que, o item (i) do lema acima significa que os T-ideais gerados pelo polinômio f e pelos polinômios f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$, coincidem.

Corolário 1.3.7. *Seja A uma álgebra.*

(i) Se o corpo K é infinito, então todas identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multihomogêneas;

(ii) Se o corpo K tem característica zero, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multilineares.

Definição 1.3.8. *Seja R uma PI-álgebra com T-ideal $T(R)$. A n-ésima **codimensão** do T-ideal $T(R)$ é definada como*

$$c_n(R) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(R)}$$

onde $n \in \mathbb{N}$. A sequência

$$c_1(R),\ c_2(R),\ \ldots,\ c_n(R),\ \ldots$$

*é chamada **sequência de codimensões** do T-ideal T(R).*

A sequência das codimensões de uma álgebra A é um dos invariantes numéricos mais importantes das identidades polinomiais satisfeitas por A. Estudaremos em mais detalhes codimensões mais adiante. Por enquanto mencionamos que o principal ingrediente da demonstração do teorema $A \otimes B$ de Regev consiste em demonstrar o seguinte resultado. Se R é uma PI-álgebra então $c_n(R) < (d-1)^{2n}$, onde d é o grau de alguma identidade satisfeita por R. Veja que $\dim P_n = n!$ e a função $n!$ tem crescimento muito mais rápido que $(d-1)^{2n}$. Dito

em outras palavras, os T-ideais em $K\langle X\rangle$ são muito "grandes". Portanto convém estudar o quociente $P_n/P_n\cap T(R)$ ao invés de $P_n\cap T(R)$. Ressaltamos também que tal fato não ocorre no caso de álgebras de Lie. Conhecem-se exemplos de álgebras de Lie com crescimento das codimensões mais que exponencial, ver [32, Theorem 6].

Definição 1.3.9. *Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado* ***polinômio próprio*** *se é combinação linear de produtos de comutadores, isto é:*

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum \alpha_{(i,\ldots,j)}[x_{i_1},\ldots,x_{i_p}]\ldots[x_{j_1},\ldots,x_{j_q}], \quad \alpha_{(i,\ldots,j)} \in K.$$

Para uma definição mais abrangente, assumiremos que 1 *é um produto de um conjunto vazio de comutadores. Denotaremos por B o conjunto de todos os polinômios próprios em $K\langle X\rangle$.*

Teorema 1.3.10. *[20, Proposition 4.3.3] Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito, então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T(A)\cap B$.) Se a característica do corpo for zero, então as identidades polinomias de A seguem das identidades próprias multilineares.*

1.4 Álgebras Graduadas

Nesta seção introduzimos a definição de álgebras graduadas por um grupo. Apresentamos alguns exemplos de graduações, bem como resultados importantes para o decorrer do trabalho. Seja A uma álgebra sobre um corpo K e G um grupo qualquer.

Definição 1.4.1. *Uma álgebra (não necessariamente associativa) A é G-**graduada** se A pode ser escrita como uma soma direta de subespaços $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ tal que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ para quaisquer g, $h \in G$.*

Da definição é imediato que qualquer $a \in A$ pode ser escrito unicamente como uma soma finita $a = \sum_{g\in G} a_g$ com $a_g \in A_g$. Os subespaços A_g são chamados de **componentes homogêneas** de A. Desse modo, dizemos que um elemento $a \in A$ é homogêneo (ou homogêneo de grau g) se $a \in A_g$.

Definição 1.4.2. *Um homomorfismo $\phi : A \to B$ entre álgebras G-graduadas é um homomorfismo G-graduado se $\phi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$.*

Definição 1.4.3. *Um subespaço B de uma álgebra G-graduada A é G-graduado ou homogêneo se $B = \oplus_{g\in G}(B \cap A_g)$. Em outras palavras, B é graduado se para qualquer $b \in B$, $b = \sum_{g\in G} b_g$ implica que $b_g \in B$ para todo $g \in G$. De maneira análoga define-se ideal graduado (ou homogêneo).*

A demonstração do próximo lema é imediata e será omitida.

Lema 1.4.4. *Se I é um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada A, então A/I é uma álgebra G-graduada tomando-se $(A/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$.*

Observação 1.4.5. *Se $\phi : A \to B$ é um homomorfismo G-graduado, então* $\ker\phi$ *é um ideal G-graduado de A e $\phi(A)$ é uma subálgebra G-graduada de B tal que $\phi(A)_g = \phi(A_g)$ para todo $g \in G$. Além disso, $A/\ker\phi \cong \phi(A)$, onde o isomorfismo canônico é isomorfismo G-graduado.*

Exemplo 1.4.6. *Qualquer álgebra A pode ser graduada por qualquer grupo G. Basta definir $A_e = A$ e $A_g = 0$ para qualquer $g \neq e \in G$. Tal G-graduação é chamada* ***graduação trivial****.*

Exemplo 1.4.7. *Seja $G = \mathbb{Z}_2$ e $A = E$ a álgebra de Grassmann de dimensão infinita com unidade. Sejam $E_0 = \{1,\ e_{i_1} \dots e_{i_{2n}} \mid i_1 < \dots < i_{2n}\}$; $E_1 = \{e_{i_1} \dots e_{i_{2m+1}} \mid i_1 < \dots < i_{2m+1}\}$. Isto define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $E = E_0 \oplus E_1$.*

Exemplo 1.4.8. *Seja $M_n(K)$ a álgebra das matrizes de ordem n sobre K. Sejam e_{ij} as matrizes elementares, $1 \leq i,\ j \leq n$. Assim a matriz e_{ij} tem entrada 1 na posição (i, j) e zeros nas demais posições. Para $\alpha \in \mathbb{Z}_n$, defina $\mathcal{M}_n^{(\alpha)}$ como o subespaço de $M_n(K)$ gerado por todas matrizes elementares e_{ij} tais que $\overline{j-i} = \alpha$. Desse modo, $\mathcal{M}_n^{(0)}$ consiste de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad a_{ii} \in K, \quad i = 1, \dots, n$$

e para $0 < t \leq n-1$, $\mathcal{M}_n^{(\bar{t})}$ *consiste de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & a_{n,t} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $a_{1,t+1}$, $a_{2,t+2}$, $\dots$, $a_{n-t+1,1}$, $a_{n-t+2,2}$, $\dots$, $a_{n,t} \in K$. *Então*

$$M_n(K) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} \mathcal{M}_n^{(\alpha)}$$

e $M_n(K)$ *é* $\mathbb{Z}_n$*-graduada.*

Exemplo 1.4.9. *Uma outra graduação em* $M_n(K)$ *pode ser dada do seguinte modo. Para cada* $\alpha \in \mathbb{Z}$, *seja* $M_n(K)^{(\alpha)}$ *o subespaço de* $M_n(K)$ *gerado por todas as matrizes elementares* e_{ij} *tais que* $j - i = \alpha$. *Assim,* $M_n(K)^{(0)}$ *consiste das matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \in K;$$

Exemplo 1.4.10. *para* $1 \leq \alpha \leq n-1$, $M_n(K)^{(\alpha)}$ *consiste das matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,\alpha+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,\alpha+2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-\alpha,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{1,\alpha+1}, a_{2,\alpha+2}, \dots, a_{n-\alpha,n} \in K$$

e $M_n(K)^{(-\alpha)}$ *consiste das matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{\alpha+1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{\alpha+2,2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n-\alpha} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{\alpha+1,1}, a_{\alpha+2,2}, \dots, a_{n,n-\alpha} \in K.$$

Finalmente, $M_n(K)^{(\alpha)} = 0$ *para* $|\alpha| \geq n$. *Como* $e_{ij}e_{js} = e_{is}$ *e* $e_{ij}e_{rs} = 0$ *se* $j \neq r$, *segue que*

$$M_n(K)^{(\alpha)} M_n(K)^{(\beta)} \subseteq \begin{cases} M_n(K)^{(\alpha+\beta)}, & \text{se } |\alpha+\beta| < n \\ \{0\}, & \text{se } |\alpha+\beta| \geq n. \end{cases}$$

para α, $\beta \in \mathbb{Z}$. *Portanto* $M_n(K) = \bigoplus_{\alpha=-n+1}^{n+1} M_n(K)^{(\alpha)}$, *onde* $M_n(K)^{(\alpha)} = 0$ *se* $|\alpha| \geq n$, *define uma* $\mathbb{Z}$*-graduação em* $M_n(K)$.

Exemplo 1.4.11. *Podemos também graduar* $M_n(K)$ *da seguinte forma: seja* G *um grupo arbitrário. Dada uma n-upla* $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ *defina*

$$\mathcal{M}_n^{(g)} = span_K\{e_{ij} \mid g_i^{-1}g_j = g\},$$

onde $g \in G$ *e* e_{ij} *são as matrizes elementares. Não é difícil ver que isto define uma* G*-graduação em* $M_n(K)$. *Tal graduação (onde as matrizes* e_{ij} *são homogêneas) é chamada* ***graduação elementar****.*

As graduações elementares provêm de graduações num espaço vetorial de dimensão n. Suponha V um espaço vetorial G-graduado, $\dim V = n$. Seja $V = \oplus_{g\in G} V_g$ a decomposição de V em soma direta de componentes homogêneas. Um operador linear φ em V é G-graduado (ou homogêneo) de grau h se $\varphi(V_g) \subseteq V_{hg}$ para todo $g \in G$. Seja $\pi_g \colon V \to V_g$ a projeção canônica de V sobre V_g. Então para qualquer operador homogêneo φ em V, $\pi_g\varphi\pi_h$ é um operador homogêneo, com grau igual a gh^{-1}. Mais ainda, $\varphi = \sum_{g,h\in G} \pi_g\varphi\pi_h$ e esta decomposição define uma G-graduação em $L(V)$, a álgebra dos operadores lineares de V. Para mais detalhes veja [8, Section 2.1].

Proposição 1.4.12 ([9], Proposition 2.2)**.** *A álgebra $M_n(K)$ com uma G-graduação elementar é isomorfa (como álgebra G-graduada) à álgebra $L(V)$ de algum espaço vetorial G-graduado V.*

Exemplo 1.4.13. *Seja $(t,\lambda) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$. Defina $M_n(E)^{(t,\lambda)} = \{(a_{ij}) \in M_n(E) \mid a_{ij} \in E_\lambda\}$ se $\overline{j-i} = t$ e 0 caso contrário. Não é difícil ver que isto define uma $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação em $M_n(E)$.*

Exemplo 1.4.14. *A partir da $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação em $M_n(E)$ podemos definir uma $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação em $M_{k,l}(E)$, onde $k+l=n$, pondo*

$$(M_{k,l}(E))^{(t,\lambda)} := M_n(E)^{(t,\lambda)} \cap M_{k,l}(E).$$

Em $M_{k,l}(E) \otimes E$ definimos

$$(M_{k,l}(E) \otimes E)^{(t,\lambda)} := (M_{k,l}(E))^{(t,\lambda)} \otimes E_0 \oplus (M_{k,l}(E))^{(t,\lambda+1)} \otimes E_1.$$

Então $M_{k,l}(E) \otimes E$ é $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduada. Por exemplo, para a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação:

$$M_{1,1}(E)^{(0,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a,\ d \in E_0 \right\} \text{ e } M_{1,1}(E)^{(1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b,\ c \in E_1 \right\}$$

e as demais componentes são nulas.

Como trabalharemos com identidades graduadas, temos de definir uma G-graduação para a álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de subconjuntos disjuntos e enumeráveis de X tais que $X = \cup_{g\in G} X_g$. Uma variável $x \in X$ tem grau homogêneo g, denotado por $\alpha(x) = g$, se $x \in X_g$. O conjunto dos monômios

$$\{x_{i_1} \cdots x_{i_k} \mid x_{i_1},\ \ldots,\ x_{i_k} \in X,\ k \in \mathbb{N}\}$$

é uma base da álgebra livre $K\langle X\rangle$ como espaço vetorial. O grau homogêneo de um monômio $m = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ é definido como $\alpha(m) = \alpha(x_{i_1}) + \cdots + \alpha(x_{i_k})$. Para $g \in G$, denote por $K\langle X\rangle_g$ o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios com grau homogêneo g. Note que $K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{g+h}$. Assim

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} K\langle X\rangle_g \tag{1.1}$$

é G-graduada.

Definição 1.4.15. *Um ideal I de uma álgebra G-graduada A é um T_G-**ideal** se é invariante sob todos os endomorfismos G-gradudados de A, ou seja, $\phi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado ϕ de A.*

Definição 1.4.16. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma **identidade polinomial G-graduada** da álgebra G-graduada A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \cup_{\alpha\in G} A_\alpha$ tais que $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$, $i = 1, \ldots, n$.*

O lema a seguir é de fácil demonstração, porém bastante útil.

Lema 1.4.17. *Se A e B são duas álgebras G-graduadas tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Se ainda $T_G(A) = T_G(B)$ então $T(A) = T(B)$.*

Prova: Seja $f(x_1, \ldots, x_m) \in T(A)$ e sejam

$$b_1 = \sum_{g\in G} b_{1g}, \ \ldots, \ b_m = \sum_{g\in G} b_{mg}$$

elementos de B. Como $f \in T(A)$, temos

$$f(\sum_{g\in G} x_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{mg}) \in T_G(A) \subseteq T_G(B).$$

Logo $f(b_1, \ldots, b_m) = f(\sum_{g\in G} b_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{mg}) = 0$, assim $T(A) \subseteq T(B)$.

A segunda afirmação do lema decorre imediatamente da primeira, usando-se as duas inclusões opostas ao invés da igualdade. ♢

1.5 Álgebras de Lie

Durante esta seção K denotará um corpo infinito.

Definição 1.5.1. *Seja K um corpo e L um espaço vetorial sobre K. Dizemos que L é uma **álgebra de Lie** se existe uma multiplicação $[\ ,\ ]$ em L satisfazendo:*

(1) $[x, y] = -[y, x]$, para todo $x,\ y \in L$. Esta propriedade é conhecida como lei anticomutativa. E se $car\, K = 2$, então exigimos que $[x, x] = 0$.

(2) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0,\ x,\ y,\ z\in L$, *conhecido como* ***identidade de Jacobi****.*

Observação 1.5.2. *Se* $\operatorname{car}K\neq 2$ *então a condição (1) da definição anterior é equivalente à condição* $[x,x]=0$*.*

Definição 1.5.3. *Um subespaço* M *de uma álgebra de Lie* L *é chamado um* ***ideal*** *de* L *se* $[M,L]\subseteq L$*.*

Definição 1.5.4. *Sejam* $x_1,\ \ldots,\ x_n\in L$*. O produto* $[x_1,\ldots,x_n]$ *será escrito da esquerda para a direita, isto é,*

$$[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n]=[[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}],x_n],\quad x_1,\ldots,x_n\in L,\ n\geqslant 3.$$

Exemplo 1.5.5. *Toda álgebra associativa* A *torna-se uma álgebra de Lie, que denotaremos por* $A^{(-)}$*, com respeito à operação*

$$[a_1,a_2]=a_1a_2-a_2a_1,\ a_i\in A,\ i=1,\ 2.$$

Observação 1.5.6. *O Teorema 1.5.9 mostra que toda álgebra de Lie é uma subálgebra de* $A^{(-)}$ *para uma álgebra associativa conveniente* A*.*

Exemplo 1.5.7. *Seja* R *uma álgebra e denote por* $\operatorname{Der}R$ *o conjunto de todas as transformações lineares* $\delta\colon R\to R$ *tais que* $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$*. Tais transformações são chamadas* ***derivações****. É fácil verificar que* $\operatorname{Der}R$ *é um espaço vetorial e que* $[\delta,\mu]=\delta\mu-\mu\delta$ *é uma derivação, se* $\delta,\ \mu\in\operatorname{Der}R$*. Como todas as transformações lineares de* R *formam uma álgebra associativa, pelo exemplo anterior é fácil ver que* $\operatorname{Der}R$ *é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.5.8. *Seja* $R=K[t]$ *o anel dos polinômios em uma variável. Seja* $d\in\operatorname{Der}R$*. Como* $d(t^n)=nt^{n-1}d(t)$ *e* $d(1)=0$*, então* d *é unicamente determinada pelo valor* $d(t)$*. Em outras palavras,* d *age em* $K[t]$ *como* $f(t)\dfrac{d}{dt}$*:*

$$d(h(t))=f(t)\frac{dh}{dt}.$$

Segue que $W_1=\operatorname{Der}K[t]$ *é uma álgebra de Lie de dimensão infinita. De fato, as derivações*

$$e_{-1}=\frac{d}{dt},e_0=t\frac{d}{dt},\ldots,e_n=t^{n+1}\frac{d}{dt},\ldots$$

formam uma base de W_1 com multiplicação dada por $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$.

De modo mais geral, a álgebra de Lie $W_n = Der\, K[t_1, \ldots, t_n]$ é gerada por todas as derivações da forma $f(t_1, \ldots, t_n)\frac{\partial}{\partial t_i}$, $1 \leq i \leq n$, com produto

$$[f\frac{\partial}{\partial t_i}, g\frac{\partial}{\partial t_j}] = f\frac{\partial g}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j} - g\frac{\partial f}{\partial t_j}\frac{\partial}{\partial t_i}.$$

Teorema 1.5.9 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *[20, Theorem 1.3.2] Seja G uma álgebra de Lie com base como espaço vetorial dada por*

$$\{g_i \mid i \in I\}$$

onde I é um conjunto ordenado. Então:

(i) Existe uma álgebra associativa $U(G)$, chamada álgebra universal envolvente *de G tal que G é uma subálgebra de Lie de $U(G)^{(-)}$ e para toda álgebra associativa A, todo homomorfismo de álgebras de Lie*

$$\phi : G \to A^{(-)}$$

pode ser extendido para um homomorfismo de álgebras associativas

$$\psi : U(G) \to A.$$

Além disso, $U(G)$ é única a menos de isomorfismo.

(ii) A álgebra universal envolvente $U(G)$ de G tem uma base dada por

$$\{g_{i_1} \ldots g_{i_n} \mid i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n,\ n = 0,\ 1,\ \ldots\}.$$

Teorema 1.5.10 (Witt)**.** *[20, Theorem 1.3.5] A álgebra de Lie livre, isto é, a álgebra livre na classe de todas álgebras de Lie no sentido da Definição 1.1.1, com conjunto de geradores livres X é isomorfa à subálgebra de Lie gerada por X na álgebra $K\langle X\rangle^{(-)}$, onde $K\langle X\rangle$ é a álgebra associativa livre. Tal álgebra de Lie será denotada por $L(X)$.*

Os elementos de $L(X)$ são chamados polinômios de Lie em X, qualquer comutador dos elementos de X é chamado monômio de Lie. Qualquer monômio de Lie f em $x_1, \ldots, x_n$ é um polinômio associativo multihomogêneo como elemento de $K\langle X\rangle$. Assim $\deg f$ e $\deg_{x_i} f$, $1 \leq i \leq n$ estão todos bem definidos.

Definição 1.5.11. *Um polinômio não nulo $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in L(X)$ é chamado uma* ***identidade polinomial*** *da álgebra de Lie L, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in L$. A identidade de Lie f é homogênea e $\deg f = k$ se todos os monômios de Lie de f são de grau k. Uma identidade é multihomogênea se todos os seus monômios de Lie são multihomogêneos do mesmo multigrau. Em particular, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é multilinear se $\deg_{x_i} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Como no caso associativo, todas as identidades de Lie de L formam um ideal $Id(L)$ de $L(X)$ estável sob todos endomorfismos da álgebra de Lie $L(X) \to L(X)$. Chamaremos tais ideais de novo de T-ideais; isso não poderá gerar confusão com o caso associativo.

Teorema 1.5.12 ([5], Theorem 5, Section 4.2)**.** *Se $\mathrm{car}\, K = 0$, então toda identidade de Lie é equivalente a uma família de identidades multilineares. Em particular, qualquer T-ideal de $L(X)$ é gerado pelos polinômios multilineares que ele contém.*

Lema 1.5.13. *Sejam L uma álgebra de Lie e $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio de Lie em $x_1, \ldots, x_n$. Então o espaço gerado por todos os valores $f(a_1, \ldots, a_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in L$, é um ideal de L.*

Proposição 1.5.14 ([5], Section 4)**.** *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio de Lie homogêneo de grau k. Então*

1. *f é uma combinação linear de comutadores $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$;*
2. *se f é multilinear, $k = n$, então f é uma combinação linear dos monômios*

$$[x_0, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}], \quad \sigma \in S_n; \tag{1.2}$$

3. *os elementos (1.2) são linearmente independentes sobre K e ainda formam uma base do espaço dos polinômios multilineares de grau n em $L(X)$.*

Definição 1.5.15. *O polinômio multilinear de Lie*

$$s_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} [x_0, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$$

é chamado ***polinômio standard*** *de Lie de grau $n+1$. Uma álgebra de Lie L satisfaz a identidade standard de grau $n+1$ se $s_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ em L.*

Definição 1.5.16. *A álgebra de Lie $W_n = L$ pode ser $\mathbb{Z}$-graduada do seguinte modo: $L_s = \{0\}$ para $s \leq -2$ e L_{s-1} é o espaço gerado por todas as derivações da forma $f\frac{\delta}{\delta x_i}$ com f polinômio homogêneo de grau s.*

Observação 1.5.17. *Para $W_1 = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ temos em particular:*

$$L_i = \{0\}, \quad i \leq -2$$
$$L_i = span\langle t^{i+1}d/dt\rangle, \quad i \geq -1.$$

Teorema 1.5.18. *A álgebra de Lie $W_n = Der\, K[t_1, \ldots, t_n]$ satisfaz a identidade standard $s_m(x_0, \ldots, x_m)$, com $m = n^2 + 2n + 2$.*

Prova: Ver [5] p. 43. ♢

1.6 Teoria de Kemer

Aqui apresentamos um breve resumo sobre a teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras sobre corpos de característica zero.

Essa teoria foi desenvolvida há aproximadamente 25 anos, e foi um dos feitos mais significativos e importantes na PI teoria. Kemer conseguiu classificar os T-ideais. Ele mostrou que os T-ideais na álgebra associativa livre, sobre corpos de característica 0, têm comportamento semelhante ao dos ideais na álgebra dos polinômios em várias variáveis. Ainda mais ele descreveu os chamados T-ideais T-primos (isto é, primos na classe de todos T-ideais) em termos concretos e realizou esses T-ideais como ideais de três séries de álgebras bem concretas e naturais. Uma das principais ferramentas utilizada por Kemer foi a das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas e o uso sistêmico da álgebra de Grassmann e da sua graduação natural. Como uma consequência direta ele resolveu o famoso Problema de Specht. Mais precisamente ele mostrou que toda álgebra associativa sobre corpo de característica 0, tem base finita das suas identidades.

Não descreveremos a teoria desenvolvida por Kemer em detalhes pois isso nos levaria a um aumento significativo do texto. Por outro lado, não precisaremos utilizar os métodos desenvolvidos por Kemer. O leitor interessado pode consultar a monografia [26] ou ainda [23] e [24].

Definição 1.6.1. *Diremos que*

1. *Um T-ideal $\mathcal{S}$ é T-semiprimo se, para qualquer T-ideal $\mathcal{J}$ com $\mathcal{J}^n \subseteq \mathcal{S}$, então $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$.*

2. *Um T-ideal $\mathcal{I}$ é T-primo se, para quaisquer T-ideais $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ tais que $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$, então $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{S}$ ou $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{S}$.*

Teorema 1.6.2. *[26, Theorem 1.2]*

1. *Seja $\mathcal{V} \neq \emptyset$ uma variedade. Então $\mathcal{V} = \mathcal{N}_m\mathcal{W}$, onde $\mathcal{N}_m$ é a variedade de todas as álgebras nilpotentes de índice menor ou igual a m, $\mathcal{W}$ é a maior subvariedade semiprima de $\mathcal{V}$ e o produto de duas variedades $\mathcal{N}\mathcal{M}$ consiste das álgebras A que possuem um ideal I contido em $\mathcal{N}$ e cujo quociente A/I está em $\mathcal{M}$.*

2. *O T-ideal $\mathcal{I}$ é semiprimo se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_q$ onde os T-ideais $\mathcal{I}_j$ são T-primos.*

3. *Os únicos T-ideais T-primos não triviais são:*

$$T(M_n(K)), T(M_n(E)) \text{ e } T(M_{a,b}(E)).$$

Definição 1.6.3. *Se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada então*

$$E \otimes A = A_0 \otimes E_0 \oplus A_1 \otimes E_1$$

onde $E = E_0 \oplus E_1$ é a álgebra de Grassmann, é denominado o ***envelope de Grassmann*** *da álgebra A.*

Teorema 1.6.4. *[26, Theorem 2.3]*

1. *Todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada.*

2. *O T-ideal de qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada coincide com o T-ideal de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita.*

3. *De (1) e (2) segue que todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita.*

Mais ainda, Kemer demonstrou que o produto tensorial de quaisquer duas álgebras T-primas é PI-equivalente a uma álgebra T-prima. Em outras palavras, a classe das álgebras T-primas é fechada com respeito a produtos tensoriais, a menos de PI equivalência.

Teorema 1.6.5 (Teorema do produto tensorial de Kemer)**.** *Seja car $K = 0$. Então*

$M_{a,b} \otimes E \sim M_{a+b}(E)$; $\quad M_{a,b} \otimes M_{c,d} \sim M_{ac+bd,ad+bc}$; $\quad M_{1,1} \sim E \otimes E$.

Nos demais casos temos isomorfismos.

É sabido, ver [1, 3, 4], que no caso de característica $p > 2$, o Teorema do produto tensorial falha. Mas ele continua válido se considerarmos somente identidades multilineares.

1.7 Produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado

Nesta seção apresentamos a definição e alguns resultados sobre o produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado, que será objeto de estudo do Capítulo 2. Para mais detalhes e usos veja [41], e em [13] encontramos uma abordagem mais formal.

Definição 1.7.1. *Sejam A e B duas K-álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Os elementos de $A_0 \cup A_1$ são homogêneos com $\mathbb{Z}_2$-grau $\partial(a) = i$, se $a \in A_i$. O* ***produto tensorial graduado*** *$A\bar{\otimes}B$ com respeito a esta $\mathbb{Z}_2$-graduação é o espaço vetorial $A \otimes_K B$ com multiplicação*

$$(a_1\bar{\otimes}b_1)(a_2\bar{\otimes}b_2) = (-1)^{\partial(b_1)\partial(a_2)}a_1a_2\bar{\otimes}b_1b_2,$$

para a_i, b_i homogêneos.

Definição 1.7.2. *Duas K-álgebras A e B são* ***multilinearmente equivalentes*** *se elas satisfazem as mesmas identidades multilineares, denotaremos isso por $A \sim B$.*

Observação 1.7.3.

1. *Para a prova que o produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado está bem definido, que $A\bar{\otimes}B$ e $B\bar{\otimes}A$ são isomorfas e que $A\bar{\otimes}(B\bar{\otimes}C)$ e $A\bar{\otimes}(B\bar{\otimes}C)$ são isomorfas veja [41].*

2. *A associatividade não ocorre se envolvermos o tensor graduado e o tensor ordinário. Por exemplo: $(E\bar{\otimes}E) \otimes E \sim E \otimes E$ enquanto $E\bar{\otimes}(E \otimes E) \sim E \otimes E \otimes E$ ([37, Theorem 6.4 (b)]), ou seja, álgebras que não são PI-equivalentes não podem ser isomorfas.*

Teorema 1.7.4 ([37], Theorem 5.1)**.** *Sejam A e B PI-álgebras que são $\mathbb{Z}_2$-graduadas, então $A\bar{\otimes}B$ é uma PI-álgebra.*

Eles também introduziram uma ferramenta poderosa para estudar identidades do produto tensorial graduado, chamada **decomposição regular**.

Definição 1.7.5. *Seja U uma álgebra e considere a decomposição $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde os U_i são espaços vetoriais. Tal decomposição é chamada **"regular"** se satisfaz:*

(P1) Dados n e uma sequência ordenada $i_1, \ldots, i_n$ com $1 \leq i_j \leq r$ para todo i_j, existem $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ onde cada $x_{i_j} \in U_{i_j}$ e $x_{i_1} \cdots x_{i_n} \neq 0$.

(P2) Para todo $x \in U_i$, $y \in U_j$ $(1 \leq i,\ j \leq r)$, $xy = \varepsilon_{i,j}^U yx$, onde $0 \neq \varepsilon_{i,j}^U \in K$ depende somente de i e j. Daí para elementos homogêneos x, $y \in U$,

$$xy = \varepsilon_{\deg(x),\deg(y)}^U yx. \tag{1.3}$$

Para mais detalhes ver [37, Section 2.2]. Usando esta decomposição eles provaram o seguinte resultado.

Proposição 1.7.6. *[37, Proposition 6.3] Temos:*

1. $M_a(E)\bar{\otimes}M_b(E) \sim M_{ab}(E)$.
2. $M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E \sim E \otimes E \otimes E$ e $(E \otimes E)\bar{\otimes}E \sim E \otimes E \otimes E$.
3. $M_{a,a}(E)\bar{\otimes}M_n(E) \sim M_{2an}(E)$.
4. $M_{a,a}(E)\bar{\otimes}M_{b,b}(E) \sim M_{2ab,2ab}(E)$ e $(E \otimes E)\bar{\otimes}(E \otimes E) \sim E^{\otimes 4}$.

E então conjeturaram que:

Conjetura 1.7.7. *[37, Conjecture 6.2] Sejam A e B duas álgebras T-primas. Então $A\bar{\otimes}B \sim C$ para alguma álgebra T-prima C.*

CAPÍTULO 2

TENSOR $\mathbb{Z}_2$-GRADUADO

Este capítulo contém alguns dos principais resultados da tese. Aqui apresentamos os demais casos da Conjetura 1.7.7. Provamos que em característica positiva o produto tensorial graduado não se comporta como em característica zero. Mais exatamente, provamos que se $\operatorname{car} K = 0$, temos $T(M_{k,l}\bar{\otimes}E) = T(M_{k+l}(E))$ e $T(M_{k,l}\bar{\otimes}M_{r,s}) = T(M_{p,q})$ onde $p = kr + ls$, $q = ks + lr$, exatamente o mesmo comportamento do produto tensorial ordinário, isto é, sem considerar a $\mathbb{Z}_2$-graduação. Se $\operatorname{car} K = p > 2$, provamos que $T(M_2(E)) \subset T(M_{1,1}\bar{\otimes}E)$, uma inclusão própria. Os resultados deste capítulo foram publicados no artigo [21].

2.1 A álgebra $M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$

Seja K um corpo infinito, $\operatorname{car} K = p > 2$. Seja $X = \cup_{(i,j)\in\{0,1\}} X_{(i,j)}$, onde $X_{(0,0)} = \{u_i\}$, $X_{(0,1)} = \{v_i\}$, $X_{(1,0)} = \{t_i\}$ e $X_{(1,1)} = \{w_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, são conjuntos infinitos e disjuntos de variáveis. Defina $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. A álgebra $K\langle X\rangle$ é G-graduada de modo natural, conforme feito em 1.1.

Agora sejam $Y = \{u_i, w_i\}$ e $Z = \{v_i, t_i\}$. Defina uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $K\langle X\rangle$, supondo Y variáveis pares e Z variáveis ímpares. Seja T o ideal em $K\langle X\rangle$ gerado por todos $ab - (-1)^{\partial(a)\partial(b)}ba$, onde a e b são monômios homogêneos e defina $\Omega = K\langle X\rangle/T$. A álgebra Ω é a

álgebra supercomutativa livre e $\Omega \cong K[Y] \otimes_K E(Z)$, onde $K[Y]$ é a álgebra dos polinômios comutativos em Y e $E(Z)$ é a álgebra de Grassmann gerada pelo espaço vetorial com base Z, ver ([10], Section 2).

Sejam $Y = \{y_{ij}^k\}$, $Z = \{z_{ij}^k\}$ e $\Omega = K[Y] \otimes_K E(Z)$ a álgebra supercomutativa livre correspondente. Seguindo [10], vamos construir a álgebra relativamente livre na variedade de álgebras gerada por $M_2(E)$. Esta álgebra relativamente livre é uma subálgebra de $M_2(\Omega)$. Seja $B^{(k)} \in M_2(\Omega)$ a matriz cuja (i,j)-ésima entrada é $(y_{ij}^k + z_{ij}^k)$ e seja $C^{(k)} = \begin{pmatrix} y_{11}^k & z_{12}^k \\ z_{21}^k & y_{22}^k \end{pmatrix} \in M_2(\Omega)$.

Teorema 2.1.1 ([10], Theorem 2)**.** *1. As matrizes $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, ..., geram uma subálgebra de $M_2(\Omega)$ que é relativamente livre em $\operatorname{var} M_2(E)$.*

2. As matrizes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ..., geram uma subálgebra de $M_2(\Omega)$ que é relativamente livre em $\operatorname{var} M_{1,1}(E)$.

Observação 2.1.2. *O teorema anterior pode ser visto como um análogo das matrizes genéricas. Recordamos a respectiva construção. Sejam $x_{ij}^{(k)}$ variáveis comutativas, $1 \leq i,j \leq n$, $k \geq 1$ e denote por $K[X]$ a álgebra polinomial (comutativa) nas variáveis $x_{ij}^{(k)}$. Sejam $X_k = (x_{ij}^{(k)})$ matrizes $n \times n$ em $M_n(K[X])$. Então a álgebra G_n, gerada pelas matrizes X_1, X_2, ..., é a álgebra das matrizes genéricas de ordem n. É bem conhecido, ver por exemplo [20, p. 86], que G_n é isomorfa à álgebra relativamente livre na variedade de álgebras determinada por $M_n(K)$. A álgebra G_n é um dos principais objetos de estudo da Teoria de Anéis.*

Defina as seguintes matrizes 2×2:

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} u_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & v_i \\ t_i & 0 \end{pmatrix},$$

onde u_i, $w_i \in \Omega_0$ e t_i, $v_i \in \Omega_1$ e $\Omega = \Omega_0 \oplus \Omega_1$. Seja SC uma outra cópia da álgebra supercomutativa livre; SC é livremente gerada pelas variáveis pares $\{y_i\}$ e ímpares $\{z_i\}$. Sejam $C_i^{(r,s)} \in M_2(\Omega) \bar{\otimes} SC$, r, $s \in \mathbb{Z}_2$ definidas como:

$$C_i^{(0,0)} = A^{(i)} \bar{\otimes} y_i,\ C_i^{(0,1)} = A^{(i)} \bar{\otimes} z_i,\ C_i^{(1,0)} = D^{(i)} \bar{\otimes} y_i,\ C_i^{(1,1)} = D^{(i)} \bar{\otimes} z_i,\ i \geq 1.$$

Denote por F a álgebra gerada por $C_i^{(r,s)}$, r, $s \in \mathbb{Z}_2$, $i \geq 1$. Temos F é G-graduada a partir dos G-graus dos elementos $C^{(r,s)}$.

Agora, defina $\psi\colon K\langle X\rangle \to F$ pondo:

$$u_i \mapsto C_i^{(0,0)};\ v_i \mapsto C_i^{(0,1)};\ t_i \mapsto C_i^{(1,0)},\ w_i \mapsto C_i^{(1,1)}.$$

É fácil verificar que ψ é um homomorfismo G-graduado, sobrejetor e além disso, $\ker\psi = T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$. Logo, $F \cong K\langle X\rangle/T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$. Aqui estamos considerando a G-graduação em $M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$ como em [4, p. 1016], isto é, sendo $P = M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$, defina $P_{(\alpha,\beta)} = (M_{1,1}(E))^{(\alpha,\beta)}\bar{\otimes}E_0 \oplus (M_{1,1}(E))^{(\alpha,\beta+1)}\bar{\otimes}E_1$, $(\alpha,\beta) \in G$. Assim

$$P_{(0,0)} = M_{(0,0)}\bar{\otimes}E_0,\ P_{(0,1)} = M_{(0,0)}\bar{\otimes}E_1,\ P_{(1,0)} = M_{(1,1)}\bar{\otimes}E_1, P_{(1,1)} = M_{(1,1)}\bar{\otimes}E_0,$$

onde

$$M_{(0,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a,\ d \in E_0 \right\} \quad \text{e} \quad M_{(1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b,\ c \in E_1 \right\}.$$

Seja S o conjunto de identidades na tabela a seguir, onde $t \in \mathbb{Z}_2$.

Identidade	$(\alpha(x_1),\beta(x_1))$	$(\alpha(x_2),\beta(x_2))$	$(\alpha(x_3),\beta(x_3))$
$x_1x_2 - x_2x_1$	$(0,0)$	$(0,0)$	
	$(0,1)$	$(0,0)$	
$x_1x_2 + x_2x_1$	$(0,1)$	$(0,1)$	
$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$	$(t,0)$	$(t,0)$	$(t,1)$
	$(t,0)$	$(t,1)$	$(t,0)$
	$(t,1)$	$(t,0)$	$(t,0)$
$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$	$(t,0)$	$(t,1)$	$(t,1)$
	$(t,1)$	$(t,0)$	$(t,1)$
	$(t,1)$	$(t,1)$	$(t,1)$

Lema 2.1.3. *[4, Lemma 6] Seja I' o ideal de identidades G-graduadas gerado pelo conjunto S e por todos os monômios em $T_G(P)$. Então $I' \subseteq T_G(P)$.*

Corolário 2.1.4. *[4, Corollary 13] Nas mesmas hipóteses do lema anterior, temos:*

1. $T_G(M_2(E)) \subseteq T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$.

2. $T(M_2(E)) \subseteq T(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$.

Sejam $M(x_1,\ldots,x_m)$, $N(x_1,\ldots,x_m) \in K\langle X\rangle$ monômios da álgebra livre G-graduada $K\langle X\rangle$. Denote por F' a álgebra gerada pelas matrizes $A^{(i)}$ e $D^{(i)}$. Esta álgebra pode ser G-graduada definindo o G-grau de $A^{(i)}$ como sendo $(0,0)$ e o G-grau de $D^{(i)}$ $(1,1)$. Assim as componentes de G-grau $(0,1)$ e $(1,0)$ serão nulas. Seja $\varphi\colon K\langle X\rangle \to F'$ um homomorfismo G-graduado definido por $\varphi(x_i) = A^{(i)}$ ou $B^{(i)}$, dependendo de $\partial(x_i)$.

Proposição 2.1.5. *([4], Proposition 14) Suponha que as matrizes $\varphi(M(x_1,\ldots,x_m))$ e $\pm\varphi(N(x_1,\ldots,x_m))$ para algum φ, têm em alguma posição o mesmo elemento não nulo, então $M \equiv \pm N \mod I'$.*

Teorema 2.1.6. *As identidades G-graduadas de $M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$ seguem dos polinômios do conjunto S e de todos os monômios em $T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$.*

Prova: É suficiente provar que se f é multihomogêneo tal que $f \in T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$, então $f \in I'$. Escolha o menor $r \geq 0$ tal que

$$f \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i f_i \mod I' \tag{2.1}$$

com f_i monômio em $K\langle X\rangle$ e $a_i \neq 0$ para algum i. Suponha que $r > 0$. Assim $f_1 \notin T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$ devido à minimalidade de r. Assim existem $\delta_k = \gamma_{t_{k,1}} + \cdots + \gamma_{t_{k,n_k}}$, $t_{r,s} \neq t_{u,v}$ para $(u,v) \neq (r,s)$ tais que $f(\delta_1,\ldots,\delta_m) \neq 0$. Escreva $f_1 = x_{i_1}\ldots x_{i_q}$. Seja $J = \{t_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n_i\} \subset \mathbb{N}$ e defina uma função $g : J \to \{1,\ldots,m\}$ pondo $g(t_{u,v}) = u$; g está bem definida. Como $f_1(\delta_1,\ldots,\delta_m) \neq 0$ obtemos um termo $H_{j_1}\ldots H_{j_q}\bar{\otimes}e \neq 0$, $H_{j_s} \in M_{1,1}(E)$ para $1 \leq s \leq q$, que não será cancelado. Aqui $e \in SC$. Além disso, note que $g(j_k) = i_k$.

De (2.1) obtemos $a_1 f_1(\delta_1,\ldots,\delta_m) = -\sum_{i=2}^{r} a_i f_i(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ e assim o lado direito contém um termo $H_{j_{\sigma(1)}}\ldots H_{j_{\sigma(q)}}\bar{\otimes}e$ para algum $\sigma \in S_q$. Mas $H_{j_1}\ldots H_{j_q}$ e $H_{j_{\sigma(1)}}\ldots H_{j_{\sigma(q)}}$ possuem uma mesma entrada não nula numa mesma posição. Assuma que o último termo acima venha de $f_2 = x_{s_1}\ldots x_{s_q}$, então $g(j_{\sigma(k)}) = s_k$. Seja $h_1(x_1,\ldots,x_q) = x_{j_1}\ldots x_{j_q}$ e $h_2(x_1,\ldots,x_q) = x_{j_{\sigma(1)}}\ldots x_{j_{\sigma(q)}}$. Assim pela Proposição 2.1.5, $h_1 \equiv \pm h_2 \mod I'$. Mas $i_{\sigma(k)} = g(j_{\sigma(k)}) = s_k$ e

daí $f_1(x_1,\ldots,x_m) = h_1(x_{j_1},\ldots,x_{j_q})$ e $f_2(x_1,\ldots,x_m) = h_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_q})$. Portanto $f_1 \equiv \pm f_2$ mod I' e então $f \equiv (a_1 \pm a_2)f_1 + \sum_{i=3}^{r} a_i f_i \mod I'$, o que contradiz a minimalidade de r. $\diamondsuit$

Considere o polinômio $c(x_1,\ldots,x_p) = x_1x_2x_1x_3x_1\ldots x_1x_px_1$, com $\alpha(x_i) = 1$ para todo i e $\beta(x_1) = 0$. Seja I_1 o ideal de identidades G-graduadas gerado por I' e por $c(x_1,\ldots,x_p)$.

Lema 2.1.7 ([4], Lemma 18)**.** *Se $\mathrm{car}\, K = p \neq 0$, então $I_1 \subseteq T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$.*

Prova: Temos $I' \subseteq T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$, resta mostrar que $c(x_1,\ldots,x_p) \in T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$. Mas c é linear em $x_2,\ \ldots, x_p$ e assim podemos substituir x_1 por $a_j = \sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes}\gamma_j$ e $x_i,\ i > 1$, por $a_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i \\ \epsilon_i & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes}\varphi_i$, onde $\alpha_j,\ \beta_j,\ \gamma_j,\ \delta_i,\ \epsilon_i \in E_1$ e $\varphi_i \in E_0 \cup E_1$. Quando $i > 1$, temos $a_1a_i = -\sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} \alpha_j\epsilon_i & 0 \\ 0 & \beta_j\delta_i \end{pmatrix} \bar{\otimes}\gamma_j\varphi_i$. Usando isto e o fato de que $t^2 = 0$, para $t \in E_1$, obtemos $c(a_1,\ldots,a_p) = 0$ quando $r < p$. Considere $r = p$. Então $c(x_1,\ldots,x_p) = -\sum_{\sigma\in S_p} \begin{pmatrix} 0 & u_\sigma \\ v_\sigma & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes}w_\sigma$, onde $u_\sigma = \alpha_{\sigma(1)}\epsilon_2\alpha_{\sigma(2)}\epsilon_3\ldots\alpha_{\sigma(p-1)}\epsilon_p\alpha_{\sigma(p)}$, v_σ e w_σ possuem expressões semelhantes. Logo $c(a_1,\ldots,a_p) = -(p!) \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ v_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes}w_1 = 0$ em K, uma vez que $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$ e ϵ_i anticomutam. O caso $r > p$ é reduzido aos casos anteriores tomando subconjuntos de p elementos cada. $\diamondsuit$

Observação 2.1.8. *Como em [4, Remark 4] temos $c(x_1,\ldots,x_p) \notin T_G(M_2(E))$. Logo, $T_G(M_2(E)) \subsetneq T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$.*

Lema 2.1.9. *1. Se $f \in K\langle X\rangle$ é um monômio e $x \in X$ é tal que $\beta(x) = 1$ e $\alpha(x) = \alpha(f)$, então o monômio $xfx \in I_1$.*

2. Se $f_1,\ f_2 \in K\langle X\rangle$ são monômios e $x \in X$ é tal que $\beta(x) = 1$, então $xf_1xf_2x \in I_1$.

Prova:

Caso 1: Quando $\alpha(x) = 1$, usando $x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1 = 0$, obtemos $xfx \equiv -xfx \mod I_1$ e daí $xfx \in I_1$. Se $\alpha(x) = 0$, podemos considerar $\deg f \geq 1$ desde que, quando $\deg f = 1$,

$x_1x_2 = -x_2x_1$ e $x^2 \in I_1$. Então se $\beta(f) = 0$, usamos $x_1x_2 = x_2x_1$ e obtemos $xfx \equiv xxf \in I_1$. Analogamente, se $\beta(f) = 1$, por $x_1x_2 = -x_2x_1$ obtemos $xfx \equiv -xxf \in I_1$.

Caso 2: Seja $\alpha(x) = 0$ então, como anteriormente, podemos considerar $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) = 1$. Daí $\alpha(f_1xf_2) = 0$ e $xf_1xf_2 \in I_1$. Analogamente quando $\alpha(x) = 1$. $\diamondsuit$

Proposição 2.1.10. *Se o monômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$, então $f \in I_1$.*

Prova: Mostraremos por indução em $q = \deg f$ que se $f \notin I_1$, então $f(a_1, \ldots, a_m) \neq 0$ para alguns $a_i \in M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$. O caso em que $q = 1$ é imediato, suponha que $q > 1$ e escreva $f = hx_i$ para algum i. Se $h \in I_1$, nada há a fazer. Suponha que $h \notin I_1$ e que $i = 1$, daí $f = hx_1$. Então $h(b_1, \ldots, b_m) \neq 0$ para alguns $b_i \in M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$.

Suponha $\deg_{x_1} f = d$ e escolha os $b_i's$ de tal modo que os geradores $e_1,\ e_2,\ e_3$ e e_4 de E não apareçam em nenhum deles. Escreva $f = f_1x_1f_2x_1 \ldots x_1f_dx_1$, onde os f_i são monômios que não contém x_1. Logo $f_i = f_i(x_2, \ldots, x_m)$. Escrevemos $f(x),\ h(b)$ e assim por diante, para indicar $f(x_1, \ldots, x_m),\ h(b_1, \ldots, b_m)$, respectivamente. Vamos analisar os graus homogêneos $(\alpha(x_1), \beta(x_1))$ de x_1.

Caso 1: $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (0, 0)$. Como $f_1(b)b_1f_2(b)b_1 \ldots b_1f_d(b)b_1 \neq 0$, obtemos $f_1(b)f_2(b) \ldots f_d(b) \neq 0$. Então para $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\otimes}1$ teremos

$$f(a, b_2, \ldots, b_m) = f_1(b)af_2(b)a \ldots af_d(b)a = f_1(b) \ldots f_d(b) \neq 0.$$

Caso 2: $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (1, 1)$. Escolha $a = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes}1$. Pelo Lema 2.1.9 temos $d \leq 2$. Se $d = 1$, então $f(a, b_2, \ldots, b_m) = h(b)a \neq 0$. Quando $d = 2$, pelo Lema 2.1.9, obtemos $\alpha(f_2) = 0$. Mas $h(b) = f_1(b)b_1f_2(b) \neq 0$ e daí $f_1(b)af_2(b) \neq 0$. Se $\alpha, \beta \in E_0$, então $\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e_1e_2 & 0 \\ 0 & \alpha e_2e_1 \end{pmatrix}$. Portanto, $f(a, b_1, \ldots, b_m) = f_1(b)af_2(b)a \neq 0$.

Caso 3: $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (0, 1)$. Seja $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\otimes}e_1,\ a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_2e_3 \end{pmatrix} \bar{\otimes}e_4$. Pelo Lema 2.1.9, temos $d \leq 2$. Se $d = 1$ então $f(a, b_2, \ldots, b_m) = h(b)a \neq 0$. Seja $d = 2$, então $\alpha(f_2) = 1$. Mas $h(b) = f_1(b)b_1f_2(b) \neq 0$, daí $f_1(b)af_2(b) \neq 0$. Denote por

$f_2(b) = \sum_j \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes}\gamma_j$, então $af_2(b)a' = -\sum_j \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j e_2 e_3 \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes} e_1\gamma_j e_4$ e $a'f_2(b)a = -\sum_j \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ e_2e_3\beta_j & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes} e_4\gamma_j e_1$. Daí, $f(a+a', b_2, \ldots, b_m) = f_1(b)(a+a')f_2(b)(a+a')$, o que é igual a $f_1(b)a + f_2(b)a' + f_1(b)a'f_2(b)a = f_1(b)af_2(b) \begin{pmatrix} 1-e_2e_3 & 0 \\ 0 & e_2e_3-1 \end{pmatrix} \bar{\otimes} e_4 \neq 0$.

Caso 4: $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (1,0)$. Seja $a = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes} e_3$, então $f(a+b_1, b_2, \ldots, b_m) = \sum_{i=1}^{d} f_1(b)b_1 \ldots f_i(b)af_{i+1}(b)b_1 \ldots f_d(b)b_1$. Primeiro, seja $\alpha(f_i) = 1$ para todo $i \leq 2$. Se $d \leq p$, segue da identidade $c(x_1, \ldots, x_p)$ que $f \in I_1$. Portanto $d < p$ e $f(a+b_1, b_2, \ldots, b_m) = df_1(b)bf_2(b)\ldots b_1f_d(b)a = dh(b)a \neq 0$ por $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$. Assim consideremos o caso $\alpha(f_i) = 0$ para algum $i \geq 2$. Seja t o número de todos os j, $2 \leq j \leq d$ tais que $\alpha(f_jx_1f_{j+1}x_1 \ldots x_1f_d) = 0$ e escolha r como o maior j com esta propriedade. Denotamos $u = f_1(b)b_1f_2(b)b_1 \ldots b_1f_d(b)a$ e $v = f_1(b)b_1f_2(b)b_1 \ldots b_1f_{r-1}(b)af_r(b)b_1 \ldots b_1f_d(b)b_1$. Então por $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$ obtemos $f(a+b_1, b_2, \ldots, b_m) = (d-t)u + tv$. Agora se $d - t \leq p$ e/ou $t \leq p$, pela identidade c obtemos $f \in I_1$. Como $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\delta e_2 & 0 \\ 0 & \beta\gamma e_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1\delta\beta & 0 \\ 0 & e_2\gamma\alpha \end{pmatrix}$, vemos que e_1 e e_2 estão em linhas diferentes dos respectivos produtos para u e v. Logo u e v são linearmente independentes e $f(a+b_1, b_2, \ldots, b_m) \neq 0$. ♢

Agora usando a Proposição 2.1.10 e o Teorema 2.1.6 obtemos:

Teorema 2.1.11. *Seja $\mathrm{car}K = p \neq 2$. As identidades G-graduadas da álgebra $M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E$ seguem de I_1.*

Seja $A = M_{1,1}(E') \oplus K$, onde E' é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sem unidade. Temos $A = A_0 \oplus A_1$, onde

$$A_0 = M_{1,1}(E')_0 \oplus K \text{ e } A_1 = M_{1,1}(E').$$

Assim, $A \otimes E = A_0 \otimes E_0 \oplus A_0 \otimes E_1 \oplus A_1 \otimes E_0 \oplus A_1 \otimes E_1$. É fácil verificar que $I_1 \subseteq T_G(A \otimes E)$. Logo, $T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E) \subseteq T_G(A \otimes E)$. Mais ainda, esta inclusão é própria. De

fato, tome $f(y,z) = [y^p, z]$, onde $\operatorname{car} K = p \neq 2$, $\alpha(y) = \beta(y) = 0$ e $\alpha(z) = 1$. Tomando $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{\otimes} 1$, $z = \begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes} h$, onde $g \in E_1$, $h \in E_0 \cup E_1$, $g,\ h \neq 0$, obtemos $[y^p, z] = \begin{pmatrix} 0 & (1-2^p)g \\ (2^p-1)g & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes} h \neq 0$ uma vez que $2^p \neq 1$.

Por outro lado, seja $a \otimes b \in A_0 \otimes E_0$ onde $a = \sum_{i=1}^{r} \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & f_i \end{pmatrix} + k_i$, $e_i,\ f_i \in E_0',\ k_i \in K$. Então

$$a^p = \sum_{i=1}^{r} \begin{pmatrix} e_i^p & 0 \\ 0 & f_i^p \end{pmatrix} + k_i^p,$$

mas x^p é identidade para E', daí $a^p = \sum_{i=1}^{r} k_i^p$. Portanto $a^p \otimes b^b$ é central, logo $[y^p, z] = 0$ em $A \otimes E$, donde $[y^p, z] \in T_G(A \otimes E)$. Daí, $T_G(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E) \subsetneq T_G(A \otimes E)$. Logo temos $T(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E) \subseteq T(A \otimes E)$.

Agora, tome $f(y,z) = [y^{p^2}, z]$. Como antes, se tomarmos $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{\otimes} 1$, $z = \begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix} \bar{\otimes} h$, onde $g \in E_1$, $h \in E$, $g,\ h \neq 0$, vemos que $f(y,z) \neq 0$, ou seja, $[y^{p^2}, z] \notin T(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$. Em [3, Lemma 12], os autores provaram que para todo $a \in A$, a^{p^2} é central, assim $[(a \otimes e)^{p^2}, b \otimes f] = [a^{p^2} \otimes e^{p^2}, b \otimes f] = a^{p^2}b \otimes (e^{p^2}f - fe^{p^2})$. Mas $[y^{p^2}, z]$ é identidade para E, daí $[y^{p^2}, z] \in T(A \otimes E)$. Portanto $T(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E) \subsetneq T(A \otimes E)$. Por outro lado, em [3, Proposition 10] os autores também provaram que $T(A) = T(E \otimes E)$, portanto $T(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E) \subsetneq T(E \otimes E \otimes E) = T(A \otimes E)$.

Agora em [4, Theorem 23] foi provado que se tomarmos B como sendo a subálgebra de $M_2(E)$ consistindo das matrizes cujas entradas na segunda diagonal pertencem a E', então $T_G(B) = I_1$. Assim, temos que $T(M_2(E)) \subsetneq T(M_{1,1}(E)\bar{\otimes}E)$, sendo que o exemplo que mostra que a inclusão é própria é o mesmo que aparece naquele artigo. Assim, provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.12. *Seja $\operatorname{car} K = p > 2$, então $T(M_2(E)) \subset T(M_{1,1}\bar{\otimes}E)$, uma inclusão própria.*

2.2 As álgebras $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$

Aqui assuminos que $\operatorname{car} K = 0$. A álgebra $M_{k,l}(E)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada do seguinte modo:

$$M_{k,l}(E)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in M_k(E_0),\ d \in M_l(E_0) \right\}$$

$$M_{k,l}(E)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b \in M_{k\times l}(E_1),\ c \in M_{l\times k}(E_1) \right\}.$$

Como $E = E_0 \oplus E_1$ também é $\mathbb{Z}_2$-graduada, obtemos o produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$.

Agora, uma $\mathbb{Z}_n$-graduação em $M_n(K)$ é dada por

$$(M_n(K))^t := \operatorname{span}_K\langle e_{ij} \mid \overline{j-i} = t \in \mathbb{Z}_n\rangle.$$

As identidades graduadas para esta graduação foram descritas em [44, Theorem p. 3518].

Se $k + l = n$ e $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ então a $\mathbb{Z}_n$-graduação acima para $M_n(K)$ induz uma G-graduação em $M_{k,l}(E)$. Se $(t, \lambda) \in G$, definimos $(M_{k,l}(E))^{(t,\lambda)}$ como sendo o espaço gerado por todos os $E_\lambda e_{ij} \cap M_{k,l}(E)$ tais que $j - i \equiv t \pmod n$. Daí $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$ é G-graduada definindo $(M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E)^{(t,\lambda)} = (M_{k,l}(E))^{(t,\lambda)}\bar{\otimes}E_0 \oplus (M_{k,l}(E))^{(t,\lambda+1)}\bar{\otimes}E_1$.

Definição 2.2.1. *Seja $\epsilon : \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \to \mathbb{Z}_2$ a aplicação definida por*

$$\epsilon(i,j) := \begin{cases} 0, & \text{se } i,\ j \le k \text{ ou } i,\ j > k \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja ε_0 a K-base natural de E_0 e ε_1 a K-base natural de E_1. Então

$$\mathcal{A} := \{ae_{ij} \mid 1 \le i,j \le n,\ a \in \varepsilon_{\epsilon(i,j)}\}$$

é uma K-base para $M_{k,l}(E)$ e

$$\mathcal{B} := \{ae_{ij}\bar{\otimes}b \mid 1 \le i,j \le n,\ a \in \varepsilon_{\epsilon(i,j)},\ b \in \varepsilon_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z}_2\}$$

é uma K-base para $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$. Além disso, escrevendo a^λ ao invés de $a \in \varepsilon_\lambda$, verifica-se:

$$(M_{k+l}(E))^{(t,\lambda)} = \operatorname{span}_K\langle a^{\epsilon(i,j)}e_{ij} \mid \overline{j-i} = t \in \mathbb{Z}_n, \epsilon(i,j) = \lambda\rangle$$

e

$$(M_{k+l}(E)\bar{\otimes}E)^{(t,\lambda)} = \text{span}_K\langle a^{\epsilon(i,j)}e_{ij}\bar{\otimes}b^{\lambda+\epsilon(i,j)} \mid \overline{j-i} = t \in \mathbb{Z}_n, \epsilon(i,j) = \lambda\rangle.$$

Usando estas definições, o seguinte lema segue facilmente.

Lema 2.2.2. *Com as definições anteriores, a álgebra $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$ é G-graduada.*

Lema 2.2.3. *Sejam $A_s := a_s^{\epsilon(i_s,j_s)}e_{i_s,j_s}\bar{\otimes}b_s^{\lambda_s+\epsilon(i_s,j_s)} \in \mathcal{B}$ para $s = 1,\ 2$. Se $A_1A_2 \neq 0$, então $cA_1A_2 \in \mathcal{B}$, onde $c = \pm 1$. Mais ainda,*

$$j_1 = i_2,\ \epsilon(i_1,j_1) + \epsilon(i_2,j_2) = \epsilon(i_1,j_2)\ \text{ e } \partial(A_1A_2) = (\overline{j_2 - i_1}, \lambda_1 + \lambda_2),$$

onde ∂ denota o G-grau.

Prova: Sejam $\rho(i_1,j_1) = \rho_1$ e $\rho(i_2,j_2) = \rho_2$. Como $A_1A_2 \neq 0$, temos $j_1 = i_2$. Provaremos que $\rho(i_1,j_1) + \rho(i_2,j_2) = \rho(i_1,j_2)$ caso por caso. Se, digamos, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ então o inteiro k está necessariamente entre i_1 e j_1. Logo $i_1 \leq k$ e $j_2 \leq k$ ou $i_1 > k$, $j_2 > k$; em ambos os casos $\rho(i_1,j_2) = 0 = \rho_1 + \rho_2$. Os três demais casos para ρ_1 e ρ_2 são provados de modo análogo.

Finalmente sejam $a_1 = e_{l_1}\dots e_{l_r}$, $a_2 = e_{m_1}\dots e_{m_t}$, $l_1 < \dots < l_r$, $m_1 < \dots < m_t$. Mas $\{l_1,\dots,l_r\} \cap \{m_1,\dots,m_t\} = \emptyset$ uma vez $A_1A_2 \neq 0$. Então reordenando, se necessário, as entradas de a_1a_2 obtemos um elemento de $\varepsilon_{\rho_1+\rho_2}$. Este elemento é igual, a menos de sinal, a a_1a_2. De modo análogo, trabalhamos com b_1b_2. Portanto

$$0 \neq A_1A_2 = (-1)^{(\lambda_1+\rho(i_1,j_1))\rho(i_2,j_2)}a_1a_2e_{i_1j_2}\bar{\otimes}b_1^{(\lambda_1+\rho(i_1,j_1))}b_2^{(\lambda_2+\rho(i_2,j_2))}$$

e consequentemente $\partial(A_1A_2) = (\overline{j_2 - i_1}, \lambda_1 + \lambda_2)$. ♢

Definição 2.2.4. *Seja m um monômio multilinear de comprimento r na álgebra G-graduada livre $K\langle X\rangle$ e seja $\mathcal{S} := (A_1,\dots,A_r)$ uma substituição $x_i \to A_i$, $i = 1,\ \dots,\ r$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é uma* ***substituição standard*** *se*

1. *$\partial(x_i) = \partial(A_i)$, para cada x_i ocorrendo em m;*

2. *$A_i \in \mathcal{B}$ para cada i.*

Como $\operatorname{car} K = 0$ as identidades G-graduadas de $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$ são consequências de uma coleção finita de identidades multilineares. Mais ainda, um polinômio multilinear é uma identidade graduada para $M_{(k,l)}(E)\bar{\otimes}E$ se, e somente se, ele se anula sobre todas as substituições standard.

Lema 2.2.5 ([44], Lemma 1)**.** *Sejam $e_{i_1j_1}$, e_{ij}, $e_{i_2j_2} \in M_n(K)$ matrizes elementares tais que $\overline{j_1 - i_1} = \overline{j_2 - i_2} = -\overline{j - i}$. Então $e_{i_1j_1}e_{ij}e_{i_2j_2} \neq 0$ se, e somente se, $i_1 = j = i_2$ e $j_1 = i = j_2$. Neste caso, $e_{i_1j_1}e_{ij}e_{i_2j_2} = e_{i_2j_2}e_{ij}e_{i_1j_1}$.*

Definição 2.2.6. *Seja $\mathcal{I}$ o conjunto de polinômios multilineares na tabela:*

Identidade	$(\alpha(x_1), \beta(x_1))$	$(\alpha(x_2), \beta(x_2))$	$(\alpha(x), \beta(x))$
$x_1x_2 - x_2x_1$	$(0,0)$	$(0,0)$	
	$(0,1)$	$(0,0)$	
$x_1x_2 + x_2x_1$	$(0,1)$	$(0,1)$	
$x_1xx_2 - x_2xx_1$	$(t,0)$	$(-t,0)$	$(t,0)$
	$(t,0)$	$(-t,1)$	$(t,0)$
	$(t,1)$	$(-t,0)$	$(t,0)$
$x_1xx_2 + x_2xx_1$	$(t,1)$	$(-t,1)$	$(t,0)$
	$(t,1)$	$(-t,0)$	$(t,1)$
	$(t,1)$	$(-t,1)$	$(t,1)$

onde $t \in \mathbb{Z}_n$. Denotamos por I o ideal em $K\langle X\rangle$ de identidades G-graduadas gerado por $\mathcal{I}$.

Proposição 2.2.7 ([15], Proposition 2.6)**.** *$I \subseteq T_G(M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E))$.*

Prova: Como os polinômios em $\mathcal{I}$ são multilineares é suficiente provar que eles se anulam para substituições standard.

Uma substituição standard genérica para um polinômio de grau 3 será:

$$A_1 = a_1^{\epsilon(i_1,j_1)}e_{i_1j_1}\bar{\otimes}b_1^{\lambda_1+\epsilon(i_1,j_1)}, \quad A_2 = a_2^{\epsilon(i_2,j_2)}e_{i_2j_2}\bar{\otimes}b_2^{\lambda_2+\epsilon(i_2,j_2)}, \quad A = a^{\epsilon(i,j)}e_{ij}\bar{\otimes}b^{\lambda+\epsilon(i,j)}$$

para $\overline{j_1 - i_1} = \overline{j_2 - i_2} = \overline{i - j} = t \in \mathbb{Z}_n$. Pelo Lema 2.2.5 os produtos $e_{i_1j_1}e_{ij}e_{i_2j_2}$ e $e_{i_2j_2}e_{ij}e_{i_1j_1}$ são ambos nulos a não ser que

$$i_1 = i_2 = j \text{ e } j_1 = j_2 = i$$

e neste caso são iguais a e_{ij} e $\epsilon(i_1, j_1) = \epsilon(i_2, j_2) = \epsilon(i, j) = \epsilon$. Daí as substituições que temos fazer são do tipo

$$A_1 = a_1^\epsilon e_{ij} \bar{\otimes} b_1^{\lambda_1+\epsilon}, \quad A_2 = a_2^\epsilon e_{ij} \bar{\otimes} b_2^{\lambda_2+\epsilon}, \quad A = a^\epsilon e_{ij} \bar{\otimes} b^{\lambda+\epsilon}$$

para $\overline{i-j} = t \in \mathbb{Z}_n$. Agora observe que

$$A_1 A A_2 = (-1)^{\lambda\epsilon} a_1^\epsilon a^\epsilon a_2^\epsilon e_{ij} \bar{\otimes} b_1^{\lambda_1+\epsilon} b^{\lambda+\epsilon} b_2^{\lambda_2+\epsilon}$$

$$A_2 A A_1 = (-1)^{\lambda\epsilon} a_2^\epsilon a^\epsilon a_1^\epsilon e_{ij} \bar{\otimes} b_2^{\lambda_2+\epsilon} b^{\lambda+\epsilon} b_1^{\lambda_1+\epsilon}$$

e daí podemos usar os mesmos argumentos utilizados em [15, Lemma 2.2] para concluir que os polinômios em $\mathcal{I}$ são identidades para $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$. ♢

Seja $m := x_1 \dots x_r$ um monômio multilinear de comprimento r. Se $\sigma \in S_r$, denotaremos por m_σ o monômio $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(r)}$. Se $\mathcal{S}$ é qualquer substituição graduada, denotamos por $m|_{\mathcal{S}}$ o valor de m sob a substituição $\mathcal{S}$. Podemos extender por linearidade essas noções para o caso de polinômios multilineares em $x_1, \dots, x_r$.

Observação 2.2.8. *Para cada $\sigma \in S_r$ é fácil encontrar uma substituição standard $\mathcal{S}$ tal que $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$.*

Definição 2.2.9. *Para $1 \leq p \leq q \leq r$ definimos*

$$m_\sigma^{[p,q]} := x_{\sigma(p)} \dots x_{\sigma(q)}.$$

Observação 2.2.10. *Seja $\mathcal{S}$ uma substituição standard e fixe de agora em diante*

$$\mathcal{S} : x_s \to A_s := a_s^{\epsilon(i_s,j_s)} e_{i_s j_s} \bar{\otimes} b_s^{\lambda_s+\epsilon(i_s,j_s)}, \ s = 1, \ \dots, r$$

onde $\partial(x_s) = (\overline{j_s - i_s}, \lambda_s) = \partial(A_s)$. Se

$$m_\sigma|_{\mathcal{S}} = A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(r)} \neq 0$$

então de acordo com o Lema 2.2.3, existem $A \in \mathcal{B}$, $c \in \{-1, 1\}$ tais que $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = cA$. Mais ainda, $m_\sigma|_{\mathcal{S}} \neq 0$ se, e somente se, para todo p, q, $1 \leq p \leq q \leq r$, $m_\sigma^{[p,q]}|_{\mathcal{S}} \neq 0$ e neste caso

$$\partial(m_\sigma^{[p,q]}) = (\overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}, \lambda_{\sigma(p)} + \dots + \lambda_{\sigma(q)}).$$

De fato, novamente pelo Lema 2.2.3 temos

$$\begin{aligned}\partial(m_\sigma^{[p,q]}) &= \partial(x_{\sigma(p)}) + \cdots + \partial(x_{\sigma(q)}) \\ &= (\overline{j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}}, \lambda_{\sigma(p)}) + \cdots + (\overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}}, \lambda_{\sigma(q)}) \\ &= (\overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}, \lambda_{\sigma(p)} + \cdots + \lambda_{\sigma(q)}).\end{aligned}$$

Os resultados seguintes bem como suas provas são semelhantes à [15, Lemmas 3.1, 3.2].

Lema 2.2.11. *Suponha que para uma substituição standard $\mathcal{S}$ resulta que*

$$m_\sigma|_{\mathcal{S}} = \pm m|_{\mathcal{S}} \neq 0.$$

Então existe $c \in \{-1, 1\}$ tal que

$$m_\sigma \equiv c x_1 m'(x_2, \ldots, x_r) \mod I.$$

Lema 2.2.12. *Com a mesma notação do lema anterior, se para uma substituição standard $\mathcal{S}$ verifica-se*

$$m_\sigma|_{\mathcal{S}} = cm|_{\mathcal{S}} \neq 0$$

para um certo $c \in \{-1, 1\}$, então $m_\sigma \equiv cm'(x_2, \ldots, x_r) \mod I$.

Corolário 2.2.13. *Sejam $\sigma,\ \tau \in S_r$ e suponha que para uma substituição standard $\mathcal{S}$ resulta*

$$m_\sigma|_{\mathcal{S}} = cm_\tau|_{\mathcal{S}} \neq 0$$

para $c \in \{-1, 1\}$. Então $m_\sigma \equiv cm_\tau \mod I$.

Teorema 2.2.14. *Seja $n = k + l$. Então o conjunto $\mathcal{I}$ descrito na Definição 2.2.6 gera $T_G(M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E)$, isto é,*

$$I = T_G(M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E).$$

Prova: A proposição 2.2.7 nos dá uma das inclusões. Assim é suficiente provar que toda identidade multilinear graduada para $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$ está em I.

Suponha assim que existe um polinômio multilinear graduado $f = f(x_1, \ldots, x_r) \in T_G(M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E)$ tal que $f \notin I$. Então podemos escrever

$$f \equiv \sum_{s=1}^{t} d_{\sigma_s} m_{\sigma_s} \mod I$$

para alguns monômios multilineares m_{σ_s}, $\sigma_s \in S_r$, escalares não nulos $d_{\sigma_s} \in K$ e $s = 1, \ldots, t$. Entre todos os f com esta propriedade, tome um com o menor t possível. Pela Observação 2.2.8 temos $t \geq 2$. Mais ainda, existe uma substituição standard $\mathcal{S}$ tal que $m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Como f é uma identidade para $M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E$, em particular $f|_{\mathcal{S}} = 0$. Logo $d_{\sigma_1} m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} = -\sum_{s=2}^{t} d_{\sigma_s} m_{\sigma_s}|_{\mathcal{S}}$.

Como na Observação 2.2.10, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $0 \neq m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} = c_1 A$ para algum $c_1 \in \{-1, 1\}$. Logo existe $p \in \{2, \ldots, t\}$ de modo que $0 \neq m_{\sigma_p}|_{\mathcal{S}} = c_2 A$, onde $c_2 \in \{-1, 1\}$. Então $0 \neq m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} = c_1 c_2^{-1} m_{\sigma_p}|_{\mathcal{S}}$, e pelo Corolário 2.2.13, $m_{\sigma_p} \equiv c m_{\sigma_1} \pmod{I}$ onde $c = c_1 c_2^{-1}$. Portanto

$$f \equiv (d_{\sigma_1} + c d_{\sigma_p}) m_{\sigma_1} + \sum_{s=2,\ s\neq p}^{t} d_{\sigma_s} m_{\sigma_s} \pmod{I},$$

contradizendo a minimalidade de t. ♢

Um dos principais resultados em [15], Theorem 4.1, é o seguinte.

Teorema 2.2.15. *O conjunto $\mathcal{I}$ gera o ideal de identidades G-graduada para $M_n(E)$.*

Corolário 2.2.16. *Se $k + l = n$, então $T_G(M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E) = T_G(M_n(E))$.*

Como duas álgebras G-graduadas satisfazendo as mesmas identidades G-graduadas são PI-equivalentes, obtemos um dos casos do teorema do produto tensorial *graduado*.

Teorema 2.2.17. *Se $k + l = n$, então $T(M_{k,l}(E)\bar{\otimes}E) = T(M_n(E))$.*

2.3 As álgebras $M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$

As álgebras $M_{p,q}$ e $M_{r,s}$ são $\mathbb{Z}_2$-graduadas como na Seção 2.2. Assim podemos definir o produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado $M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$.

Sejam $m = p + q$, $n = r + s$. Defina aplicações $\alpha\colon \{1, \ldots, m\} \to \mathbb{Z}_2$, $\beta\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_2$ pondo:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq x \leq p \\ 1, & \text{se } p + 1 \leq x \leq m \end{cases}$$

e

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq x \leq r \\ 1, & \text{se } r+1 \leq x \leq n \end{cases}.$$

Seja G um grupo abeliano e seja R uma álgebra G-graduada, isto é, $R = \oplus_{g\in G} R_g$. Assuma que $\mathcal{B}$ é uma K-base de R e que os elementos de $\mathcal{B}$ são G-homogêneos. Como em [17, Definition 1], chamamos $\mathcal{B}$ uma *base standard* de R se para todo $a,\ b \in \mathcal{B}$ tais que $ab \neq 0$, existe $\rho \in K$ tal que $\rho ab \in \mathcal{B}$.

Aqui vamos modificar a definição de substituição standard do seguinte modo. Seja $\mathcal{S}\colon K\langle X\rangle \to R$ é um homomorfismo de álgebras G-graduadas tal que $\mathcal{S}(x_i) = a_i \in \mathcal{B}$ para todo $x_i \in \mathcal{B}$. Então $\mathcal{S}$ é uma **substituição standard**. Se $f \in K\langle X\rangle$ é um polinômo multilinear, denotaremos por $f|_{\mathcal{S}}$ a imagem de f segundo $\mathcal{S}$.

A base natural ε da álgebra de Grassmann E é standard com $\rho = \pm 1$. Foi mostrado em [17, Section 2] que o seguinte conjunto é uma base de $M_{p,q} \otimes M_{r,s}$

$$\mathcal{B} = \{ae_{ij} \otimes be_{uv} \mid a \in \varepsilon_{\alpha(j)-\alpha(i)},\ b \in \varepsilon_{\beta(v)-\beta(u)},\ 1 \leq i,\ j \leq m,\ 1 \leq u,\ v \leq n\}.$$

Se $G = \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$, então $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ é G-graduada definindo

$$\partial_G(ae_{ij} \otimes be_{uv}) = (\overline{n(j-i)+v-u}, \alpha(j) + \beta(v) - (\alpha(i) - \alpha(u))) \in \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$$

para cada $ae_{ij} \otimes be_{uv}$ na base $\mathcal{B}$ de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$. A base $\mathcal{B}$ é G-homogênea e standard, ver [17, p. 5]. Segue que a álgebra G-graduada $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ possui uma base standard, a saber $\mathcal{B}$.

Mas, como espaços vetoriais $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$ são idênticos. Logo $\mathcal{B} = \{ae_{ij}\bar{\otimes}be_{uv} \mid a \in \varepsilon_{\alpha(j)-\alpha(i)},\ b \in \varepsilon_{\beta(v)-\beta(u)},\ 1 \leq i,\ j \leq m,\ 1 \leq u,\ v \leq n\}$ é uma base de $M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$. Além disso, definindo a mesma graduação de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$, temos $\mathcal{B}$ é uma base G-homogênea e também uma base standard para $M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$.

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de todos os monômios multilineares na álgebra livre G-graduada $K\langle X\rangle$.

Proposição 2.3.1 ([17], Proposition 8)**.** *Seja R uma álgebra G-graduada e $\mathcal{B}$ uma base standard de R. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de identidades polinomiais graduadas de R e denote*

por $\mathcal{I}$ o T_G-ideal gerado por $\mathcal{N}$. Assuma que, para todos m, $m' \in \mathcal{M} \setminus T_G(R)$, existe uma substituição standard $\mathcal{S}$ e um elemento não nulo $c \in K$ tal que

$$m|_{\mathcal{S}} = cm'|_{\mathcal{S}} \text{ se, e somente se, } m \equiv cm' \pmod{\mathcal{I}}.$$

Então $T_G(R)$ é gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(R))$.

Considere $R = M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$ dotada com a $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-graduação dada anteriormente. Seja $0 \neq w = ae_{ij}\bar{\otimes}be_{ub} \in R_{(0,\delta)}$, assim $n(j-i)+v-u = kmn$, $k \in \mathbb{Z}$, isto é $n \mid (v-u)$. Como $1 \leq u, v \leq n$, temos $v = u$. De modo análogo, $i = j$ e então $\delta = 0$. Portanto $a,\ b \in E_{\alpha(j)-\alpha(i)} = E_{\beta(j)-\beta(i)} = E_0$. Daí $R_{(0,1)} = 0$ e todo monômio em $K\langle X\rangle$ de G-grau $(0,1)$ é uma identidade graduada de R. Seja $\mathcal{N}$ o seguinte conjunto de polinômios multilineares:

$$\begin{aligned}
&x_1x_2 - x_2x_1, && \text{onde } \partial_G(x_1) = \partial_G(x_2) = (0,0)\\
&x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1, && \text{onde } \partial_G(x_1) = \partial_G(x_3) = -\partial_G(x_2) = (t,0)\\
&x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1, && \text{onde } \partial_G(x_1) = \partial_G(x_3) = -\partial_G(x_2) = (t,1).
\end{aligned}$$

Lema 2.3.2. $\mathcal{N} \subseteq T_G(R)$.

Prova: Para qualquer elemento homogêneo w de uma álgebra G-graduada denotamos por $\gamma(w) \in \mathbb{Z}_{mn}$ e $\delta(w) \in \mathbb{Z}_2$ a primeira e a segunda componentes de seu G-grau, respectivamente. Seja $w := a_he_{i_hj_h}\bar{\otimes}b_he_{u_hv_h} \in \mathcal{B}$ para $h = 1,\ 2,\ 3$ e assuma que $\gamma(w_1) = \gamma(w_3) = -\gamma(w_2)$. Se $w_1w_2w_3 \neq 0$ então $w_1w_2 \neq 0$ e $\delta(w_1w_2) = 0$. Como $w_1w_2 \neq 0$ temos $j_1 = i_2$ e $v_1 = u_2$. Mais ainda, $j_2 = i_1$ e $u_1 = v_2$. Analogamente, $j_2 = i_3$, $v_2 = u_3$, $j_3 = i_2$ e $v_3 = u_2$. Assim $w_1 = a_1e_{ij}\bar{\otimes}b_1e_{uv}$, $w_2 = a_2e_{ji}\bar{\otimes}b_2e_{vu}$ e $w_3 = a_3e_{ij}\bar{\otimes}b_3e_{uv}$ para $1 \leq i,\ j \leq m$ e $1 \leq u,\ v \leq n$. Agora,

$$w_1w_2w_3 = (-1)^{\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_1e_{uv})\partial_{\mathbb{Z}_2}(a_2e_{ji})}a_1a_2a_3e_{ij}\bar{\otimes}b_1b_2b_2e_{uv}$$

e

$$w_3w_2w_1 = (-1)^{\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_3e_{uv})\partial_{\mathbb{Z}_2}(a_2e_{ji})}a_3a_2a_1e_{ij}\bar{\otimes}b_3b_2b_1e_{uv}.$$

Mas, $b_1,\ b_3 \in E_{\beta(v)-\beta(u)}$, assim $\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_1e_{uv}) = \partial_{\mathbb{Z}_2}(b_3e_{uv})$ e consequentemente $(-1)^{\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_1e_{uv})\partial_{\mathbb{Z}_2}(a_2e_{ji})} = (-1)^{\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_3e_{uv})\partial_{\mathbb{Z}_2}(a_2e_{ji})}$. Além disso, para $h = 1,\ 2,\ 3$ temos $a_h \in E_{\alpha(j)-\alpha(i)} = E_{\alpha(i)-\alpha(j)}$ e $b_h \in E_{\beta(v)-\beta(u)} = E_{\beta(u)-\beta(v)}$ e portanto o resultado segue. ♢

Lema 2.3.3. *Sejam m, m' monômios multilineares no mesmo conjunto de variáveis e seja $\mathcal{S}$ uma substituição standard em $R = M_{p,q}(E)\bar{\otimes}M_{r,s}(E)$ tal que $m'|_{\mathcal{S}} = cm|_{\mathcal{S}} \neq 0$ para algum $c \in K$. Então $m' \equiv cm \mod I$.*

Prova: Sejam $m = x_1 \dots x_d$ e $m' = m_\sigma = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(d)}$ para alguma permutação $\sigma \in S_d$. Se $d = 1$, o resultado é verdadeiro. Assim suponha $d \geq 2$. Faremos por indução em d. Primeiro, provaremos que existe $c' \in K$ tal que $m' \equiv c'x_1m''(x_2, \dots, x_d) \mod I$. De fato, para $1 \leq a \leq b \leq d$ escrevemos $w^{[a,b]} := x_a \dots x_b$. Seja $\mathcal{S}(x_h) = w_h = a_h e_{i_h j_h} \bar{\otimes} b_h e_{u_h v_h} \in \mathcal{B}$ para $h = 1, \dots, d$. Desde que $m'|_{\mathcal{S}} = cm|_{\mathcal{S}} \neq 0$ obtemos $i_1 = i_{\sigma(1)}$ e $u_1 = u_{\sigma(1)}$.

Suponha $\sigma^{-1}(1) > 1$ e seja

$$t := \min\{j \geq d \mid 1 \leq \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(1)\}.$$

Então $t > 1$ e mais ainda $1 \leq \sigma^{-1}(t) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t-1)$. Defina $l := \sigma^{-1}(t)$, $k := \sigma^{-1}(t-1)$, $h := \sigma^{-1}(1)$ e considere as duas possibilidades: $l = 1$ ou $l > 1$.

No primeiro caso resulta

$$\gamma(m_\sigma^{[1,h-1]}) = \gamma(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(h-1)}) = \overline{(r+s)(j_{\sigma(k-1)} - i_{\sigma(1)}) + v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(1)}}$$

e

$$\gamma(m_\sigma^{[h,k]}) = \gamma(x_{\sigma(h)} \dots x_{\sigma(k)}) = \overline{(r+s)(j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(k)}) + v_{\sigma(k)} - u_{\sigma(h)}}.$$

Como $m_\sigma^{[1,h-1]}$ e $m_\sigma^{[h,k]}$ são não nulos para a substituição standard $\mathcal{S}$ devemos ter:

$$\begin{aligned}
&j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(h)} - i_1 = i_1 - i_1 = 0\\
&v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(1)} = u_{\sigma(h)} - u_1 = u_1 - u_1 = 0\\
&j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(h)} = j_{t-1} - i_1 = i_t - i_1 = i_{\sigma(l)} - i_1 = i_{\sigma(1)} - i_1 = i_1 - i_1 = 0\\
&v_{\sigma(k)} - u_{\sigma(h)} = v_{t-1} - u_1 = u_t - u_1 = u_{\sigma(l)} - u_1 = u_{\sigma(1)} - u_1 = u_1 - u_1 = 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\gamma(m_\sigma^{[1,h-1]}) = \gamma(m_\sigma^{[h,k]}) = 0$. Além disso, $\delta(m_\sigma^{[1,h-1]}) = \delta(m_\sigma^{[h,k]}) = 0$, caso contrário esses monômios seriam identidades para R pois $R_{(0,1)} = 0$.

Uma vez que I contém o polinômio $x_1x_2 - x_2x_1$ para $\partial_G(x_1) = \partial_G(x_2) = (0,0)$ então obtemos $m' \equiv m_\sigma^{[h,k]} m_\sigma^{[1,h-1]} m_\sigma^{[k+1,d]}$ e $m_\sigma^{[h,k]}$ começa com x_1.

Se $l > 1$, usando argumentos semelhantes ao caso anterior, obtemos

$$\gamma(m_\sigma^{[1,l-1]}) = -\gamma(m_\sigma^{[l,h-1]}) = \gamma(m_\sigma^{[h,k]})$$

e

$$\delta(m_\sigma^{[1,l-1]}) = -\delta(m_\sigma^{[l,h-1]}) = \delta(m_\sigma^{[h,k]}).$$

Como $\mathcal{N} \subseteq I$, existe $c \in \{-1, 1\}$ tal que

$$m' \equiv c' m_\sigma^{[h,k]} m_\sigma^{[l,h-1]} m_\sigma^{[k+1,d]} \mod I$$

e $m_\sigma^{[h,k]}$ começa com x_1.

Em ambos os casos obtemos $c' x_1 m''(x_2, \ldots, x_d) \equiv m' \mod I$ e daí $c' x_1 m''(x_2, \ldots, x_d)|_{\mathcal{S}} = cm|_{\mathcal{S}}$ logo $m''(x_2, \ldots, x_d)|_{\mathcal{S}} = (c')^{-1} c x_2 \ldots x_d|_{\mathcal{S}}$. Portanto usando indução obtemos $m''(x_2, \ldots, x_d) \equiv c'' x_2 \ldots x_d \mod I$, onde $c'' = (c')^{-1} c$ e então $m' \equiv c'' x_1 \ldots x_d \mod I$. O lema está demonstrado. ♢

Pelo lema anterior e pela Proposição 2.3.1 temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.4. *O ideal $T_G(M_{p,q}(E) \bar{\otimes} M_{r,s}(E))$ é gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(R))$, isto é, é gerado pelos polinômios*

$$\begin{aligned} &x_1x_2 - x_2x_1, && \text{onde } \partial_G(x_1) = \partial_G(x_2) = (0,0) \\ &x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1, && \text{onde } \partial_G(x_1) = \partial_G(x_3) = -\partial_G(x_2) = (t,0) \\ &x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1, && \text{onde } \partial_G(x_1) = \partial_G(x_3) = -\partial_G(x_2) = (t,1). \end{aligned}$$

e por todos os monômios multilineares que são identidades graduadas de $M_{p,q}(E) \bar{\otimes} M_{r,s}(E)$.

Teorema 2.3.5. *Quando $\operatorname{car} K = 0$, as álgebras $M_{p,q}(E) \bar{\otimes} M_{r,s}(E)$ e $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ são PI-equivalentes.*

Prova: Em [17, Theorem 13] os autores provaram que o conjunto dado no Teorema 2.3.4 gera o T_G-ideal de identidades de $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$, daí $T_G(M_{p,q}(E) \bar{\otimes} M_{r,s}(E)) = T_G(M_{pr+qs,ps+qr}(E))$. Portanto $T(M_{p,q}(E) \bar{\otimes} M_{r,s}(E)) = T(M_{pr+qs,ps+qr}(E))$. ♢

Observação 2.3.6. *Tomamos conhecimento que O. M. Di Vincenzo e V. Nardozza provaram resultados parecidos aos Teoremas 2.2.17 e 2.3.5, no caso de característica 0. O artigo* "On a Regev–Seeman conjecture about $\mathbb{Z}_2$-graded tensor products"*, foi aceito para publicação no* Israel Journal of Mathematics*, [18].*

CAPÍTULO 3

O PRODUTO β-TENSORIAL GRADUADO

O produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado pode ser generalizado para o produto β-tensorial graduado, também chamado **produto tensorial com fatores de comutação**. Os resultados deste capítulo encontram-se em [21]. Agradecemos ao Professor Yuri Bahturin, de Memorial University of Newfoundland, St. John's, Canadá, pela sugestão a respeito do produto β-tensorial graduado.

3.1 Uma generalização do Teorema de Regev

Definição 3.1.1. *Seja G um grupo abeliano finito. Dizemos que uma aplicação $\beta\colon G\times G\to K^*$ é um* ***bicaracter antissimétrico*** *se, para todos g, h, $k\in G$, satisfaz:*

(1) $\beta(g+h,k)=\beta(g,k)\beta(h,k)$,

(2) $\beta(g,h+k)=\beta(g,h)\beta(g,k)$,

(3) $\beta(g,h)\beta(h,g)=1$.

Segue da definição que $\beta(g,0) = \beta(0,h) = 1$ e $\beta(g,g) = \pm 1$, para todos g, $h \in G$.

Bicaracteres antissimétricos são usado nas teoria de (super)álgebras de Lie coloridas, veja por exemplo [8]. Em [46] foi dada uma descrição dos bicaracteres antissimétricos para grupos abelianos finitos.

Definição 3.1.2. *A álgebra G-graduada A é β-comutativa se $a_g a_h = \beta(g,h)a_h a_g$, para todo $a_g \in A_g$, $a_h \in A_h$. Se impomos esta condição na álgebra livre G-graduada $K\langle X\rangle$ obtemos a álgebra livre β-comutativa. Em [46] foi obtida uma descrição das álgebras T-primas (em característica 0) que são PI-equivalentes à álgebra livre β-comutativa.*

Definição 3.1.3. *Sejam A e B duas K-álgebras G-graduadas e β um bicaracter antissimétrico em G. Definimos o β-**produto tensorial G-graduado**, ou β-**tensor G-graduado**, com respeito a essa G-graduação como sendo o espaço vetorial $A \otimes_K B$ com multiplicação*

$$(a_1 \otimes_\beta b_1)(a_2 \otimes_\beta b_2) = \beta(h_1, g_2)a_1a_2 \otimes_\beta b_1b_2 \tag{3.1}$$

para todos $a_i \in A_{g_i}$, $b_i \in B_{h_i}$, com $i = 1, 2$, a_i e b_i elementos homogêneos.

Dados $a_i \in A_{g_i}$ e $b_i \in B_{h_i}$, $i = 1, \ldots, 3$, temos:

$$\begin{aligned}
[(a_1 \otimes_\beta b_1)(a_2 \otimes_\beta b_2)](a_3 \otimes_\beta b_3) &= \beta(h_1, g_2)(a_1a_2 \otimes_\beta b_1b_2)(a_3 \otimes_\beta b_3) \\
&= \beta(h_1, g_2)\beta(h_1 + h_2, g_3)(a_1a_2)a_3 \otimes_\beta (b_1b_2)b_3 \\
&= \beta(h_1, g_2)\beta(h_1, g_3)\beta(h_2, g_3)(a_1a_2)a_3 \otimes_\beta (b_1b_2)b_3 \\
(a_1 \otimes_\beta b_1)[(a_2 \otimes_\beta b_2)(a_3 \otimes_\beta b_3)] &= \beta(h_2, g_3)(a_1 \otimes_\beta b_1)(a_2a_3 \otimes_\beta b_2b_3) \\
&= \beta(h_2, g_3)\beta(h_1, g_2 + g_3)a_1(a_2a_3) \otimes_\beta b_1(b_2b_3) \\
&= \beta(h_2, g_3)\beta(h_1, g_2)\beta(h_1, g_3)a_1(a_2a_3) \otimes_\beta b_1(b_2b_3).
\end{aligned}$$

Logo $A \otimes_\beta B$ é associativo se A e B o são.

Tome $C_k = \bigoplus_{g+h=k} A_g \otimes_\beta B_h$, para g, h, $k \in G$. É fácil ver que $A \otimes_\beta B = \bigoplus_{k\in G} C_k$ e, além disso, $C_gC_h \subseteq C_{g+h}$, para todos g, $h \in G$. Portando $A \otimes_\beta B$ é G-graduado. Para mais propriedades do β-tensor ver [13].

O teorema a seguir foi inspirado no trabalho de A. Regev, ver [34], onde ele demonstrou que o produto tensorial de duas PI álgebras é novamente uma PI álgebra. Recordamos que o teorema $A \otimes B$ de Regev deduz-se a partir do importantíssimo resultado que se a álgebra A satisfaz uma identidade de grau d, então a sequência das codimensões $c_n(A)$ de A tem crescimento exponencial, a saber $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$. Aqui recordamos que $\dim P_n = n!$, o que tem um crescimento muito mais rápido que qualquer função d^n. Isto quer dizer que os T-ideais são bastante "grandes".

Teorema 3.1.4. *Sejam K um corpo e G um grupo com um bicaracter antissimétrico β. Sejam A e B duas PI-álgebras que também são G-graduadas. Então*

$$c_n(A \otimes_\beta B) \leq |G|^{2n} c_n(A) c_n(B). \tag{3.2}$$

Prova: Se uma álgebra satisfaz uma identidade polinomial de grau d, então ela satisfaz uma identidade multilinear de grau $\leq d$. Tomando uma consequência dela, podemos supor que satisfaz uma identidade multilinear de grau d.

Seja $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \gamma_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$ uma identidade polinomial multilinear. Queremos encontrar condições sobre os coeficientes $\{\gamma_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$ que implicarão que $g(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial de $A \otimes_\beta B$. Devido à multilinearidade, é suficiente considerar substituições $x_k \mapsto a_k \otimes_\beta b_k$, $k = 1, \ldots, n$, onde todos os a_k e b_k são homogêneos em A e B, respectivamente. Para tal substituição temos:

$$\begin{aligned} g(a_1 \otimes_\beta b_1, \ldots, a_n \otimes_\beta b_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \gamma_\sigma (a_{\sigma(1)} \otimes_\beta b_{\sigma(1)}) \ldots (a_{\sigma(n)} \otimes_\beta b_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \gamma_\sigma \left(\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} \beta(h_{\sigma(j)}, g_{\sigma(i)}) \right) a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} \otimes_\beta b_{\sigma(1)} \ldots b_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

devido ao fato de β ser um bicaracter antissimétrico em G.

Sejam $c_n(A) = \alpha_n$ e $c_n(B) = \delta_n$, então $\dim P_n(A) = \alpha_n$ e $\dim P_n(B) = \delta_n$. Assim existem α_n monômios em P_n, digamos $M = \{M_i(x_1, \ldots, x_n) \mid 1 \leq i \leq \alpha_n\}$ tais que, para todo $\sigma \in S_n$, o monômio $x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$ é uma combinação linear dos monômios em M módulo $T(A)$. Logo, para todo $\sigma \in S_n$, existem $r_{\sigma,i} \in K$, com $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{\alpha_n} r_{\sigma,i} M_i(a_1, \ldots, a_n)$, para todo $\sigma \in S_n$.

Analogamente para B: existem monômios $\{N_j(x_1,\ldots,x_n) \mid 1 \leq j \leq \delta_n\}$ e coeficientes $s_{\sigma,j}$ tais que, para $\sigma \in S_n$, $b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)} = \sum_{j=1}^{\delta_n} s_{\sigma,j} N_j(b_1,\ldots,b_n)$. Assim obtemos $g(a_1 \otimes_\beta b_1, \ldots, a_n \otimes_\beta b_n)$ é igual a

$$\sum_{i=1}^{\alpha_n}\sum_{j=1}^{\delta_n}\left[\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}\beta(h_{\sigma(j)},g_{\sigma(i)})\right) r_{\sigma,i}s_{\sigma,j}\gamma_\sigma\right] M_i(a_1,\ldots,a_n)\otimes_\beta N_j(b_1,\ldots,b_n).$$

Considere os $n!$ coeficientes γ_n como incógnitas no seguinte sistema linear

$$\left(\sum_{\sigma\in S_n}\left[\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}\beta(h_{\sigma(j)},g_{\sigma(i)})\right] r_{\sigma,i}s_{\sigma,j}\right)\gamma_\sigma = 0, \qquad 1\leq i\leq \alpha_n, \quad 1\leq j\leq \delta_n.$$

Como o valor de $\beta(h_j,g_i)$ depende somente do G-grau de a_i e b_j existem no máximo $|G|^2$ possibilidades para $\beta(h_j,g_i)$. Mais ainda, como $g(x_1,\ldots,x_n)$ tem grau n, obtemos no máximo $|G|^{2n}$ produtos da forma $\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}\beta(h_{\sigma(j)},g_{\sigma(i)})$, $\sigma \in S_n$. Logo teremos no máximo $|G|^{2n}\alpha_n\delta_n$ equações no sistema. Mas $c_n(A\otimes_\beta B)$ é igual ao posto do sistema, portanto $c_n(A\otimes_\beta B) \leq |G|^{2n}c_n(A)c_n(B)$. ♢

Teorema 3.1.5. *Sejam G um grupo abeliano finito e K um corpo. Suponha que A e B são PI-álgebras G-graduadas e que β é um bicaracter antissimétrico em G. Então $A\otimes_\beta B$ é uma PI-álgebra.*

Prova: De acordo com [34, Proposition 4.7], existem constantes P e Q tais que $\alpha_n < P^n$ e $\delta_n < Q^n$ para todo n. (Se A satisfaz uma identidade de grau d, então podemos tomar $P = (d-1)^2$, veja por exemplo [20, p. 111].) Logo $c_n(A\otimes_\beta B) < R^n$ para alguma constante R e, para todos os valores de n suficientemente grandes temos, $c_n(A\otimes_\beta B) < n!$. Portanto o sistema linear acima admite solução não trivial para todo n suficientemente grande e cada solução corresponde a uma identidade polinomial para $A\otimes_\beta B$. ♢

Observação 3.1.6. *Recentemente, Y. Bahturin e A. Regev em [7, Theorem 4.1] provaram um análogo ao Teorema 3.1.5.*

3.2 $M_n(K)\otimes_\beta E$ e $M_n(E)$

Sejam A e B duas K-álgebras, com A G-graduada e B H-graduada para alguns grupos abelianos aditivos G e H. Sejam $\beta_A\colon G\times G\to K^*$ e $\beta_B\colon H\times H\to K^*$ bicaracteres

antissimétricos em G e H, respectivamente. Suponha que, para todos $a_i \in A_{g_i}$, $b_i \in B_{h_i}$, $i = 1, 2$ tenhamos

$$a_{g_1}a_{g_2} = \beta_A(g_1, g_2)a_{g_2}a_{g_1} \quad \text{e} \quad b_{h_1}b_{h_2} = \beta_B(h_1, h_2)b_{h_2}b_{h_1}.$$

Definimos $\beta\colon (G \times H) \times (G \times H) \to K^*$ um bicaracter antissimétrico em $G \times H$ por

$$\beta((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = \beta_A(g_1, g_2)\beta_B(h_1, h_2)$$

e

$$(a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_1})(a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_2}) = \beta((g_2, h_2), (g_1, h_1))a_{g_1}a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_1}b_{h_2}.$$

Assim temos

$$\begin{aligned}(a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_1})(a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_2}) &= \beta((g_2, h_2), (g_1, h_1))a_{g_1}a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_1}b_{h_2} \\ &= \beta_A(g_2, g_1)\beta_B(h_2, h_1)a_{g_1}a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_1}b_{h_2} \\ &= \beta_A(g_2, g_1)\beta_B(h_2, h_1)\beta_A(g_1, g_2)\beta_B(h_1, h_2)a_{g_2}a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_2}b_{h_1} \\ &= a_{g_2}a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_2}b_{h_1}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_2})(a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_1}) = \beta_A(g_1, g_2)\beta_B(h_1, h_2)a_{g_2}a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_2}b_{h_1}$$

e assim

$$\beta_A(g_2, g_1)\beta_B(h_2, h_1)(a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_2})(a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_1}) = a_{g_2}a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_2}b_{h_1},$$

logo

$$(a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_1})(a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_2}) = \beta((g_2, h_2), (g_1, h_1))(a_{g_2} \otimes_\beta b_{h_2})(a_{g_1} \otimes_\beta b_{h_1}).$$

Portanto, $[x_{(g_1,h_1)}, x_{(g_2,h_2)}]_\beta$ é uma identidade graduada para $A \otimes_\beta B$.

Agora seja $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ e tome ε uma raíz n-ésima primitiva da unidade. Em $M_n(K)$ defina as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{n-2} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $AB = \varepsilon BA$ e $A^n = B^n = 1$. Mais ainda, as matrizes A^iB^j, $1 \leq i, j \leq n$ são linearmente independentes e formam uma base de $M_n(K)$.

Dado $g \in G$, $g = (\overline{r}, \overline{s})$, $\overline{r}$, $\overline{s} \in \mathbb{Z}_n$, defina a componente de G-grau g como o espaço unidimensional

$$(M_n(K))_g = \langle A^r B^s \rangle.$$

Temos $M_n(K) = \oplus_{g \in G}(M_n(K))_g$ e, além disso, $(M_n(K))_g(M_n(K))_h \subseteq (M_n(K))_{g+h}$, o que define uma G-graduação em $M_n(K)$. Tome agora $\beta_1 \colon G \times G \to K^*$ definido como $\beta_1(g,h) = \varepsilon^{rv-st}$, onde $g = (\overline{r}, \overline{s})$, $h = (\overline{t}, \overline{v}) \in G$. Temos que $C_g D_h = \beta_1(g,h) D_h C_g$, para todos g, $h \in G$ e C_g, $D_h \in M_n(K)$. As identidades para esta graduação foram descritas em [6].

Teorema 3.2.1 ([6], Theorem 3.4)**.** *Seja $M_n(K)$ G-graduada como acima. Então os polinômios*

$$[x_{g_1}, x_{g_2}]_{\beta_1} = x_{g_1}x_{g_2} - \beta_1(g_1, g_2)x_{g_2}x_{g_1}, \quad g_1, g_2 \in G$$

formam uma base para as identidades G-graduadas de $M_n(K)$.

Denote por β_2 o bicaracter antissimétrico em $\mathbb{Z}_2$ definido como $\beta_2(\overline{i}, \overline{j}) = (-1)^{ij}$. Daí $\beta = \beta_1\beta_2$ é um bicaracter antissimétrico em $G \times \mathbb{Z}_2$

Lema 3.2.2. *Com a notação utilizada anteriormente, a álgebra $M_n(K) \otimes_\beta E$ é β-comutativa. Mais ainda, nenhum monômio não nulo da forma $x_{(g_1,i_1)} \dots x_{(g_n,i_n)}$, $g_j \in G$, $i_j \in \mathbb{Z}_2$, é uma identidade graduada para $M_n(K) \otimes_\beta E$.*

Prova: Para a primeira afirmação é suficiente provar que $[x_{(g_1,i)}, x_{(g_2,j)}]_\beta = 0$ é uma identidade para $M_n(K) \otimes_\beta E$. Isto consiste de uma verificação direta e será omitida. A segunda afirmação também é óbvia. ♢

Corolário 3.2.3. *O ideal das identidades $G \times \mathbb{Z}_2$-graduadas para $M_n(K) \otimes_\beta E$ é gerado por todos os comutadores $[x_{(g_1,i)}, x_{(g_2,j)}]_\beta$, com (g_1, i), $(g_2, j) \in G \times \mathbb{Z}_2$.*

Prova: A prova é similar à dada em [15, Theorem 4.1], veja também o Teorema 2.2.14 para o caso $\mathbb{Z}_2$-graduado. ♢

Por outro lado, $M_n(E)$ é $G \times \mathbb{Z}_2$-graduada de modo natural. De fato, se $(g, i) \in G \times \mathbb{Z}_2$, então a componente homogênea de grau (g, i) é $E_i A^r B^s$ onde $g = (\overline{r}, \overline{s}) \in G$. O mesmo

β definido acima é um fator de comutação para $M_n(E)$, isto é, $M_n(E)$ é β-comutativo. Provamos, como no Lema 3.2.2, que nenhum monômio não nulo é uma identidade graduada para $M_n(E)$. Além disso, como no Corolário 3.2.3 temos

Corolário 3.2.4. *O ideal das identidades $G\times\mathbb{Z}_2$-graduadas para $M_n(E)$ é gerado por todos os comutadores $[x_{(g_1,i)},x_{(g_2,j)}]_\beta$, com (g_1,i), $(g_2,j)\in G\times\mathbb{Z}_2$.*

Teorema 3.2.5. *As álgebras $M_n(E)$ e $M_n(K)\otimes_\beta E$ satisfazem as mesmas identidades $G\times\mathbb{Z}_2$-graduadas. Mais ainda, elas são PI-equivalentes no sentido usual.*

Prova: Combinando os Corolários 3.2.3 e 3.2.4 temos o resultado sobre as identidades graduadas. A PI-equivalência destas duas álgebras segue disto. ♢

3.3 As álgebras $M_{2^n,2^n}(E)$, $M_{2^n}(E)$ e $E^{\otimes_\beta n}$

Os resultados presentes nesta seção podem ser encontrados na tese [40, Capítulo 4], ver também [19], mas com uma linguagem diferente. O objetivo de incluir estes resultados aqui foi mostrar que o emprego dos bicaracteres e dos métodos desenvolvidos nesta tese podem simplificar a exposição, bem como torná-la mais transparente.

Seja K um corpo de característica zero. Definimos o grupo multiplicativo $G_n\subset M_{2^n}(K)$ da seguinte maneira: G_0 é o grupo gerado por -1 em K, isto é, $G_0=\{-1,1\}$. G_1 é o grupo gerado por $A_{1,1}$ e $B_{1,1}$, onde

$$A_{1,1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad B_{1,1}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Suponha definidas as matrizes $A_{1,n},\ldots,A_{n,n}$ e $B_{1,n},\ldots,B_{n,n}$ de $M_{2^n}(K)$. Definimos $A_{1,n+1},\ldots,A_{n+1,n+1}$, $B_{1,n+1},\ldots,B_{n+1,n+1}\in M_{2^{n+1}}(K)$ do seguinte modo:

$$A_{i,n+1}=\begin{pmatrix}0&A_{i,n}\\A_{i,n}&0\end{pmatrix},\quad B_{i,n+1}=\begin{pmatrix}0&B_{i,n}\\B_{i,n}&0\end{pmatrix},\quad\text{se } 1\leq i\leq n.$$

Agora tome $C_n=A_{1,n}A_{2,n}\ldots A_{b,n}B_{2,n}B_{1,n}\ldots B_{n,n}$ e I_{2^n} a matriz identidade em $M_{2^n}(K)$, defina

$$A_{n+1,n+1}=\begin{pmatrix}0&C_n\\C_n&0\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad B_{n+1,n+1}=\begin{pmatrix}0&-I_{2^n}\\I_{2^n}&0\end{pmatrix}.$$

Lema 3.3.1. *Para n inteiro positivo e para quaisquer i, $j \leq n$, as seguintes relações ocorrem:*

1. $A_{i,n}^2 = -B_{j,n}^2 = C_n^2 = I_{2^n}$;
2. $A_{i,n}A_{j,n} = -A_{j,n}A_{i,n}$, *para* $i \neq j$;
3. $B_{i,n}B_{j,n} = -B_{j,n}B_{i,n}$, *para* $i \neq j$;
4. $A_{i,n}B_{j,n} = -B_{j,n}A_{i,n}$, *para todo* i, j;
5. $A_{i,n}C_n = -C_nA_{i,n}$;
6. $B_{i,n}C_n = -C_nB_{i,n}$.

Assim qualquer elemento do grupo G_n pode ser escrito de maneira única na forma $\pm A_{1,n}^{\alpha_1}A_{2,n}^{\alpha_2}\dots A_{n,n}^{\alpha_2}B_{1,n}^{\alpha_{n+1}}B_{2,n}^{\alpha_{n+2}}\dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}}$, com $(\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}$. Observe também que podemos definir um fator de comutação β à partir das relações no Lema 3.3.1.

Denote por H_n o subconjunto $\{A_{1,n}^{\alpha_1}\dots A_{n,n}^{\alpha_n}B_{1,n}^{\alpha_{n+1}}\dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} \mid (\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}\}$. Agora denote por $H_{0,n}$ o conjunto formado pelos monômios tais que $\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i = 0 \pmod 2$ e por $H_{1,n}$ o conjunto formado pelos monômios tais que $\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i = 1 \pmod 2$. Agora, para A uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, $A\widehat{\otimes}E = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$ denota o envelope de Grassmann da álgebra A.

Lema 3.3.2 ([35], Lemma 1)**.** *Utilizando as notações acima, o conjunto H_n forma uma base de matrizes invertíveis para $M_{2^n}(K)$. Além disso, $H_{0,n}$ e $H_{1,n}$ geram, respectivamente, subespaços $M_{2^n}(K)_0$ e $M_{2^n}(K)_1$ em $M_{2^n}(K)$, onde*

$$M_{2^n}(K)_0 = \begin{pmatrix} M_{2^{n-1}}(K) & 0 \\ 0 & M_{2^{n-1}}(K) \end{pmatrix} \quad e \quad M_{2^n}(K)_1 = \begin{pmatrix} 0 & M_{2^{n-1}}(K) \\ M_{2^{n-1}}(K) & 0 \end{pmatrix},$$

o que define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_{2^n}(K)$ de tal modo que $M_{2^n}(K)\widehat{\otimes}E = M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$.

Vamos agora definir uma $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduação em $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ da seguinte maneira: defina o espaço $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)_{(\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_{2n})}$ como sendo o espaço gerado pelo conjunto $H_{(\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_{2n})} = \{rA_{1,n}^{\alpha_1}\dots A_{n,n}^{\alpha_n}B_{1,n}^{\alpha_{n+1}}\dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} \mid r \in E_{\overline{\alpha}_1+\dots+\overline{\alpha}_{2n}}\}$. Pelo Lema 3.3.1 segue que $H_\alpha H_{\alpha'} \subseteq H_{\alpha+\alpha'}$ para quaisquer α, $\alpha' \in \mathbb{Z}_2^{2n}$.

Defina $\beta((\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{2n}),(\overline{\gamma}_1,\ldots,\overline{\gamma}_{2n})) = (-1)^{\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\gamma_i}$ para $(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{2n})$, $(\overline{\gamma}_1,\ldots,\overline{\gamma}_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}$. Assim β é um fator de comutação, ou seja, dados A, $B \in M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ elementos $\mathbb{Z}_2^{2n}$-homogêneos, $AB = \beta(\alpha,\gamma)BA$, para α, $\gamma \in \mathbb{Z}_2^{2n}$. Logo é fácil ver que

$$T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)) = \langle [x_\alpha, x_\gamma]_\beta \rangle^T.$$

Para $M_{2^n}(E)$ precisamos definir uma $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduação. Para isto definimos a componente de grau $\alpha = (\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{2n+1})$ como sendo o espaço gerado pelos elementos da forma $rA_{1,n}^{\alpha_1}\ldots B_{n,n}^{\alpha_{2n}}C_n^{\alpha^{2n+1}}$, com $r \in E_0 \cup E_1$. Definindo β' de modo análogo ao β definido anteriormente temos β' é um fator de comutação para $M_{2^n}(E)$ e é imediato ver que $T_{\mathbb{Z}_2^{2n+1}}(M_{2^n}(E)) = \langle [x_\alpha, x_\gamma]_{\beta'} \rangle$.

Vamos agora olhar para a álgebra $E^{\otimes_\beta k}$. Podemos definir uma $\mathbb{Z}_2^k$-graduação em $E^{\otimes_\beta k}$ pondo: $E^{\otimes_\beta k}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$ é o espaço gerado pelos elementos da forma $a_1 \otimes_\beta \ldots \otimes_\beta a_k$ tais que $\partial_{\mathbb{Z}_2}(a_j) = \alpha_j$. Aqui β é como nos casos anteriores.

Portanto, temos os seguintes resultados.

Lema 3.3.3. $T_{\mathbb{Z}_2^k}(E^{\otimes_\beta k}) = \langle [x_\alpha, x_\gamma]_\beta \rangle$.

Teorema 3.3.4. $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E) \sim E^{\otimes_\beta 2n}$ *e* $M_{2^n}(E) \sim E^{\otimes_\beta (2n+1)}$.

CAPÍTULO 4

IDENTIDADES $\mathbb{Z}$-GRADUADAS PARA W_1

4.1 Identidades $\mathbb{Z}$-graduadas em álgebras de Lie

De agora em diante vamos considerar álgebras de Lie graduadas pelo grupo aditivo dos inteiros $\mathbb{Z}$. Sejam $X^i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots\}$, $i \in \mathbb{Z}$, conjuntos infinitos enumeráveis e disjuntos de variáveis. Defina $X = \cup_{i\in\mathbb{Z}} X^i$. Denote por $L(X)$ a álgebra de Lie livre, livremente gerada sobre K pelo conjunto X. Definimos uma $\mathbb{Z}$-graduação em $L(X)$ como segue. Os elementos de X^i são de grau i, e se m, $n \in L(X)$ são de graus i e j, respectivamente, então $[m, n]$ tem grau $j + i$. Consideraremos os comutadores escritos à esquerda, isto é, $[u, v, w] = [[u, v], w]$. Então definimos $L(X)_i$ como o espaço gerado por todos os elementos de grau i em $L(X)$. É imediato que isto define uma $\mathbb{Z}$-graduação em $L(X)$. Um polinômio $f(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_k}^{i_k}) \in L(X)$ é uma identidade graduada para a álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada $L = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} L_r$ se $f(a_1, \ldots, a_k) = 0$ em L para toda escolha de $a_t \in L_{i_t}$. Quando um tal polinômio for uma identidade escreveremos $f(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_k}^{i_k}) = 0$. O conjunto $T_{\mathbb{Z}}(L)$ de todas as identidades graduadas para L é o T-ideal graduado de L. É fácil ver que é um ideal e que é fechado sob todos os endomorfismos $\mathbb{Z}$-graduados de $L(X)$. O conjunto $B = \{f_i \mid i \in I\} \subseteq T_{\mathbb{Z}}(L)$ de identidades

para L é uma base do T-ideal graduado se B gera $T_{\mathbb{Z}}(L)$ como T-ideal graduado.

Recordamos que W_1 é a álgebra das derivações do anel de polinômios em uma variável $K[t]$ e tem por base os elementos

$$e_{-1} = \frac{d}{dt}, e_0 = t\frac{d}{dt}, \ldots, e_n = t^{n+1}\frac{d}{dt}, \ldots.$$

Além disso, a multiplicação em W_1 é dada por $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. Para mais detalhes veja o Exemplo 1.5.8 e a Observação 1.5.17.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. *Seja car $K = 0$. As seguintes identidades graduadas*

$$[x_1^i, x_2^i] = 0, \tag{4.1}$$

$$\alpha[x_1^a, x_2^b, x_3^c] - \beta[x_1^a, x_3^c, x_2^b] = 0, \tag{4.2}$$

$$x^d = 0, \tag{4.3}$$

onde $i \geq -1$, $c \neq a+b$, $b \neq a+c$, $\alpha = (c-a)(b-c-a)$, $\beta = (b-a)(c-b-a)$, $d \leq -2$, formam uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra de Lie W_1.

Mais ainda, provamos que as identidades graduadas de W_1 não admitem uma base finita. Mais precisamente, mostramos que as identidades graduadas (4.1) e a *maioria* das identidades (4.2) são independentes. Isto é, as identidades independentes são (4.1) e as de (4.2) com $a > b > c \geq -1$ e $a \neq b + c$.

4.2 Prova do teorema principal

As álgebras consideradas aqui são sobre um corpo de característica 0. Portanto, todo T-ideal graduado é gerado por seus elementos multilineares. Assim, consideramos apenas os polinômios multilineares.

Lema 4.2.1. *As identidades graduadas (4.1), (4.2) e (4.3) são válidas para W_1.*

Prova: Seja $W_1 = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ como na Observação 1.5.17, então a identidade (4.3) é satisfeita uma vez que $L_d = 0$ quando $d \leq -2$. Também as identidades (4.1) são válidas, pois $\dim L_i = 1$ quando $i \geq -1$. A validade de (4.2) é de verificação imediata. ♢

Denotemos por I o T-ideal graduado gerado pelos polinômios (4.1), (4.2) e (4.3). De acordo com o Lema 4.2.1, temos $I \subseteq T_{\mathbb{Z}}(W_1)$.

Agora vamos apresentar algumas identidades graduadas que são consequências dos geradores de I. Com o objetivo de simplificar a notação, escreveremos algumas vezes $|x|$ para denotar o grau homogêneo de um elemento de uma álgebra graduada.

Usando a identidade de Jacobi, vemos imediatamente que

$$[x, y, z] - [z, y, x] \in I, \quad [x_2, x_3, x_1] - [x_2, x_1, x_3] \in I \tag{4.4}$$

se $|x| = |y|$ e $|x_1| = |x_3|$ ou $|x_2| = |x_1| + |x_3|$. Além disso, por indução obtemos

$$[x_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] - [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in I \tag{4.5}$$

para toda permutação σ de $\{2, 3, \ldots, n\}$, se $|x_2| = \cdots = |x_n|$.

Lema 4.2.2. *Sejam $|x_1| = |x_4|$ e $|x_2| = |x_3|$. Então*

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_4, x_2, x_3, x_1] \in I, \tag{4.6}$$

e, mais geralmente,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n] - [x_n, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}, x_1] \in I, \tag{4.7}$$

onde σ é uma permutação de $\{2, \ldots, n-1\}$ e $|x_1| = |x_n|$, $|x_2| = \cdots = |x_{n-1}|$.

Prova: Aqui e no que segue, $u \equiv v$ significa $u \equiv v \pmod{I}$. Temos $[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv [x_1, x_2, x_4, x_3]$ por (4.1). Desse modo, $[x_1, x_2, x_4, x_3] \equiv [x_4, x_2, x_1, x_3]$ por (4.4), e finalmente por (4.1) obtemos $[x_4, x_2, x_1, x_3] \equiv [x_4, x_2, x_3, x_1]$, como queríamos. Agora, (4.7) segue de (4.6) por indução. ♢

Lema 4.2.3. *Se $a + b \neq 0$, então existe $k \in K$ (dependendo de a e b) tal que*

$$[x_1^a, x_2^b, x_3^a, x_4^{a+b}] \equiv k[x_4^{a+b}, x_1^a, x_3^a, x_2^b], \quad k \in K. \tag{4.8}$$

Prova: Se $a \leq -2$ ou $b \leq -2$, a afirmação do lema é trivial, assim suponha $a \geq -1$ e $b \geq -1$. Aplicamos (4.4) para obter

$$\begin{aligned}
[x_1^a, x_2^b, x_3^a, x_4^{a+b}] &\equiv [x_4^{a+b}, x_3^a, [x_1^a, x_2^b]] \\
&= [x_4^{a+b}, x_3^a, x_1^a, x_2^b] - [x_4^{a+b}, x_3^a, x_2^b, x_1^a] \\
&= [x_4^{a+b}, x_1^a, x_3^a, x_2^b] - [x_4^{a+b}, x_3^a, x_2^b, x_1^a].
\end{aligned}$$

Vamos considerar o comutador $[[x_4^{a+b}, x_3^a], x_2^b, x_1^a]$. Aplicando a identidade (4.2) e por (4.4) podemos escrever

$$-(\beta/\alpha)[x_4^{a+b}, x_3^a, x_1^a, x_2^b] = -(\beta/\alpha)[x_4^{a+b}, x_1^a, x_3^a, x_2^b].$$

Isso é possível se $\alpha \neq 0$, isto é, $a+b+a \neq a$ e $b \neq a+b+a+a$. Logo se $a \neq 0$ e $a+b \neq 0$, o resultado segue. Mas se $a = 0$, então $[x_1^0, x_2^b, x_3^0, x_4^b] \in I$ e isto prova o lema. ♢

Observação 4.2.4. *Se $a = -1$ e $b > 0$, vemos facilmente que*

$$[x_1^{-1}, x_2^b, x_3^{-1}, x_4^{b-1}] = -[x_2^b, x_1^{-1}, x_3^{-1}, x_4^{b-1}] \equiv k[x_2^b, x_4^{b-1}, x_1^{-1}, x_3^{-1}].$$

Lema 4.2.5. *Sejam $0 \leq a < c \leq b$, então para algum $k \in K$ temos*

$$[x_1^a, x_2^b, x_3^c, x_4^{a+b}] \equiv k[x_4^{a+b}, x_1^a, x_3^c, x_2^b].$$

Prova: De $0 \leq a < c < b$ segue que $c \neq a+b$. Suponha primeiro que $b \neq a+c$. Então aplicando (4.2) obtemos

$$[x_1^a, x_2^b, x_3^c, x_4^{a+b}] \equiv k_1[x_1^a, x_3^c, x_2^b, x_4^{a+b}] = k_1[[x_1^a, x_3^c], x_2^b, x_4^{a+b}].$$

Aplicando (4.2) várias vezes ao lado direito concluímos a prova deste caso.

Agora suponha $b = a+c$, então por (4.1) obtemos

$$[x_1^a, x_2^b, x_3^c] = -[x_2^b, x_1^a, x_3^c] \equiv -[x_2^b, x_3^c, x_1^a] = [x_3^c, x_2^b, x_1^a]$$

e então basta continuar como anteriormente. ♢

Observação 4.2.6. *Recordamos que $u \equiv v$ significa $u \equiv v \pmod{I}$.*

Definição 4.2.7. *Dado $m = [x_1, \ldots, x_n] \in L(X)$, com $|x_i| = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, dizemos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é uma* ***sequência boa*** *se:*

1. *$\alpha_i \geq -1$, para todo $i = 1, \ldots, n$;*
2. *$\alpha_1 + \cdots + \alpha_t \geq -1$, para $1 \leq t \leq n$;*
3. *$\alpha_1 + \cdots + \alpha_t \neq \alpha_{t+1}$, para $1 \leq t \leq n-1$.*

Observação 4.2.8. *1. O monômio m não está no ideal I se, e somente se, a sequência $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é uma sequência boa.*

2. Dado $m = [x_1, \ldots, x_n] \in L(X)$, podemos escrever m como uma combinação linear de comutadores que começam com uma determinada variável x_i. Assim, podemos supor que m sempre começa com uma variável de maior $\mathbb{Z}$-grau. Por exemplo, aquela que tiver o menor índice.

Proposição 4.2.9. *Sejam $|x| = |y| = -1$, $|z_i| = \alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, n$ e $[x, z_1, \ldots, z_n, y] \notin I$. Então*

$$[x, z_1, \ldots, z_n, y] \equiv [y, z_1, \ldots, z_n, x].$$

Prova: A prova será por indução em n.

Se $n = 1$, a afirmação é consequência de (4.4).

Para $n = 2$ temos que analisar dois casos.

Caso 1: $\alpha_1 = \alpha_2$. Neste caso basta usar (4.6).

Caso 2: $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Se ainda $\alpha_1 = \alpha_2 - 1$, então

$$\begin{aligned}[x, z_1, z_2, y] &= -[z_1, x, z_2, y] \equiv -[z_1, z_2, x, y] \equiv -[z_1, z_2, y, x] \\ &\equiv -[z_1, y, z_2, x] = [y, z_1, z_2, x]\end{aligned}$$

e temos a afirmação.

Suponha então que $\alpha_1 \neq \alpha_2 - 1$. Se $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 = -1$ temos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e basta usar o *Caso 1.* Portanto podemos supor que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Então

$$\begin{aligned}[x, z_1, z_2, y] =& [x, y, z_1, z_2] + [x, z_1, [z_2, y]] + [x, [z_1, y], z_2] \\ \equiv& [x, z_1, [z_2, y]] + [x, [z_1, y], z_2] \\ =& [y, z_2, x, z_1] - [y, z_2, z_1, x] + [y, z_1, x, z_2] \\ \equiv& \beta[y, z_2, z_1, x] - [y, z_2, z_1, x] + \delta[y, z_1, z_2, x] \\ \equiv& ((\beta - 1)\gamma + \delta)[y, z_1, z_2, x].\end{aligned}$$

Aqui

$$\beta = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2 + 2)}{(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \gamma = \frac{(\alpha_2 + 1)(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 - \alpha_1 + 1)}, \quad \delta = \frac{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1 + 2)}{(\alpha_2 - \alpha_1 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Agora, não é difícil ver que $(\beta-1)\gamma+\delta=1$ e então o resultado segue quando $n=2$.

Suponha $n=3$. Consideraremos alguns casos para α_1, α_2 e α_3.

Caso 1. Se $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$, então por (4.6) o resultado é imediato.

Suponha então que pelos menos dois dos α_i sejam distintos.

Caso 2. Se $[x,z_1,z_2]\equiv\gamma[x,z_2,z_1]$ com $\gamma\neq 1$, então, usando a hipótese da indução, teremos

$$\begin{aligned}
[x,z_1,z_2,z_3,y] =& [x,[z_1,z_2],z_3,y]+[x,z_2,z_1,z_3,y]\\
\equiv& [y,[z_1,z_2],z_3,x]+\frac{1}{\gamma}[x,z_1,z_2,z_3,y]\\
(1-\frac{1}{\gamma})[x,z_1,z_2,z_3,y] \equiv& [y,z_1,z_2,z_3,x]-[y,z_2,z_1,z_3,x]\\
\equiv& [y,z_1,z_2,z_3,x]-\frac{1}{\gamma}[y,z_1,z_2,z_3,x]\\
=& (1-\frac{1}{\gamma})[y,z_1,z_2,z_3,x].
\end{aligned}$$

Logo $[x,z_1,z_2,z_3,y]\equiv[y,z_1,z_2,z_3,x]$.

Caso 3. Agora se $\gamma=1$, devemos ter $\alpha_1=\alpha_2$.

Subcaso 3.1. Suponha que $[x,z_1,z_2,z_3]=\delta[x,z_1,z_3,z_2]$ com $\delta\neq 1$, então procedemos como em Caso 2.

Subcaso 3.2. Se $\delta=1$ teremos que ou $\alpha_2=\alpha_3$, ou $\alpha_2+\alpha_3=-1+\alpha_1$. Mas a primeira possibilidade nos leva ao Caso 1, enquanto a segunda implica que $\alpha_3=-1$, absurdo.

Caso 4. Não existe γ com $[x,z_1,z_2]=\gamma[x,z_2,z_1]$. Mas isso é possível somente quando $[x,z_2,z_1]=0$, isto é $\alpha_2=-1$ ou $\alpha_1=-1+\alpha_2$. Como $\alpha_i\geq 0$ temos de considerar somente $\alpha_1=-1+\alpha_2$. Temos

$$[x,z_1,z_2,z_3,y]=-[z_1,x,z_2,z_3,y]\equiv-[z_1,z_2,x,z_3,y]$$

por (4.4). Então $-[z_1,z_2,x,z_3,y]=[x,[z_1,z_2],z_3,y]$ e usamos a indução.

Caso 5. Não existe δ como no Caso 3. Então $[x,z_1,z_3,z_2]\equiv 0$ e temos que $-1+\alpha_1=\alpha_3$, ou $-1+\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2$. Neste caso escrevemos

$$[x,z_1,z_2,z_3,y]=[x,z_1,[z_2,z_3],y]+[x,z_1,z_3,z_2,y]\equiv[x,z_1,[z_2,z_3],y]$$

e de novo usamos a indução.

Com isso concluimos o caso de $n = 3$.

Suponha então que para todo monômio multilinear de grau menor que n nas variáveis z_i e que não pertence a I, o resultado seja verdadeiro. Tome $m = [x, z_1, \ldots, z_n, y]$ e seja

$$M = [x, z_1, \ldots, z_n, y] - [y, z_1, \ldots, z_n, x].$$

Então temos

$$m = [x, z_1, \ldots, z_{i-1}, [z_i, z_{i+1}], z_{i+2}, \ldots, z_n, y] + [x, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_i, z_{i+2}, \ldots, z_n, y].$$

Logo teremos pela hipótese da indução que

$$m \equiv [y, z_1, \ldots, z_{i-1}, [z_i, z_{i+1}], z_{i+2}, \ldots, z_n, x] + [x, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_i, z_{i+2}, \ldots, z_n, y].$$

Mas o de cima pode ser reescrito como

$$M \equiv [x, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_i, z_{i+2}, \ldots, z_n, y] - [y, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_i, z_{i+2}, \ldots, z_n, x].$$

É bem conhecido que as transposições $\{(i, i+1) \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ geram o grupo simétrico S_n. Logo para mostrar que $M \equiv 0$ é suficiente mostrar que para alguma permutação $\sigma \in S_n$, vale $M_\sigma \equiv 0$. Aqui M_σ é o elemento obtido de M aplicando-se a permutação σ às variáveis $z_1, \ldots, z_n$.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ então o resultado segue de (4.7). Suponha portanto que pelo menos dois dos α_i sejam distintos, e que α_1 é o maior entre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e $\alpha_1 > \alpha_2$. Então se $[x, z_1, z_2] \equiv 0$ teremos $m \equiv 0$ e também $M \equiv 0$, logo podemos assumir $[x, z_1, z_2] \not\equiv 0$. Temos $\alpha_2 \neq -1$ e $\alpha_1 \neq \alpha_2 - 1$, logo $[x, z_1, z_2] \equiv \rho[x, z_2, z_1]$, $\rho \in K$. Mas $\rho = 1$ somente quando $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ ou $\alpha_1 = \alpha_2$. Essas duas possibilidades são descartadas pela escolha de α_1 e α_2, e assim temos $\rho \neq 1$, e podemos usar a hipótese da indução. Com isso a demonstração da proposição está completa. ♢

Como consequência direta da proposição anterior, temos o seguinte corolário, que será de grande utilidade.

Corolário 4.2.10. *Se $m \in L(X)$, $m \notin I$ é um monômio multilinear, então podemos permutar as variáveis de $\mathbb{Z}$-grau -1 sem alterar o coeficiente do monômio.*

Prova: Seja $m = [x_1, \ldots, x_k, x, y_1, \ldots, y_t, y, z_1, \ldots, z_s]$ com $|x| = |y| = -1$ e $|y_i| \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq t$. Se $m \neq 0$, então $|x_1| + \cdots + |x_k| \geq 0$. Denotamos $a = [x_1, \ldots, x_k]$ e $m' = [a, x, y_1, \ldots, y_t, y]$. Pela proposição anterior temos

$$m' = -[x, a, y_1, \ldots, y_t, y] = -[y, a, y_1, \ldots, y_t, x] = [a, y, y_1, \ldots, y_t, x].$$

Assim podemos trocar duas entradas consecutivas de grau -1 em m e assim a demonstração está completa. ♢

Lema 4.2.11. *Seja $m = [x_1, \ldots, x_n] \in L(X)$ um monômio multilinear tal que $|x_i| = \alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Então, se $m \notin I$, temos*

$$m \equiv k[x_1, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}],$$

onde $k \in K$, $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$, $\alpha_1 = \max\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $x_1 > x_{j_1}$ e $x_{j_1} \leq \cdots \leq x_{j_{n-1}}$.

Prova: Podemos escrever m como uma combinação linear de monômios que começam com uma variável dada. Logo podemos supor que x_1 é a variável com maior $\mathbb{Z}$-grau. Assim se $\alpha_{i_r} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{i_{r-1}} + \alpha_{i_{r+1}}$, então $\alpha_{i_2} = \cdots = \alpha_{i_{r-1}} = \alpha_{i_{r+1}} = 0$, uma vez que α_1 é o maior grau. Analogamente para $\alpha_{i_{r+1}} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i_{r-1}}$. Neste caso nada há a fazer. Se $\alpha_{i_r} \neq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i_{r-1}}$ e $\alpha_{i_{r+1}} \neq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i_{r-1}}$, então usando (4.2) e (4.5), se necessário, podemos reordenar as variáveis como desejado. ♢

Lema 4.2.12. *Seja $m = [x_1, \ldots, x_n] \in L(X)$, $m \notin I$ um monômio multilinear tal que existe uma única variável de $\mathbb{Z}$-grau -1. Denote por α_i o $\mathbb{Z}$-grau de x_i. Se existe sequência boa $(\alpha_1, -1, \alpha_{j_1}, \ldots)$ com α_1 o máximo dos $\mathbb{Z}$-graus, então*

$$m \equiv k[x_1, x, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-2}}]$$

onde $|x| = -1$, $k \in K$ e $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$. Se não existe tal sequência boa, então

$$m \equiv k[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}, x]$$

onde $|x| = -1$ e $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$.

Prova: Suponha que existe sequência boa $(\alpha_1, -1, \alpha_{j_1}, \dots)$ com α_1 o máximo dos $\mathbb{Z}$-graus, que a variável de grau -1 ocorra na posição $r+1$ e denote essa variável por x. Temos $m = [x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, x, \dots, x_n]$. Observamos que a sequência $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, -1, \dots, \alpha_n)$ tem que ser boa. Então qualquer parte inicial desta sequência também é boa. Se $\alpha_r = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1} - 1$ então como x_1 é a variável de maior $\mathbb{Z}$-grau temos dois casos para analisar:

Caso 1: $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ e $\alpha_r = \alpha_1 - 1$. Neste caso temos

$$\begin{aligned} m =& [x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r, x, \dots, x_n] \\ =& [x_1, \dots, x_{r-1}, [x_r, x], \dots, x_n] + [x_1, \dots, x_{r-1}, x, x_r, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

A última parcela está em I, portanto

$$m \equiv k[x_1, [x_r, x], x_2, \dots, x_{r-1}, \dots, x_n] = k[x_1, x_r, x, x_2, \dots, x_{r-1}, \dots, x_n].$$

Mas neste caso tal sequência boa não existe, um absurdo pois $m \notin I$.

Agora considere a variável y que está imediatamente à direita de x em m. Seja $m' = [x_1, \dots, x_r, x, y]$, $|x_1| = a$, $|x_2| = \cdots = |x_{r-1}| = 0$, $|x_r| = a - 1$, $|y| = b$. Caso $a > 1$ podemos escrever $m' \equiv p[x_1, \dots, x_r, y, x]$, $p \in K$, pois $a + a - 1 > b$ e $a + b \neq -1$. Se, por outro lado, $a = 1$, teremos $b = 1$ e

$$\begin{aligned} m' =& [x_1, \dots, x_r, x, y] = [x_1, \dots, x_r, [x, y]] \\ \equiv& [x_1, [x, y], x_2, \dots, x_r] = [x_1, x, y, x_2, \dots, x_r]. \end{aligned}$$

Caso 2: $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-2} = 0$, $\alpha_r = \alpha_1$ e $\alpha_{r-1} = 1$. Teremos

$$m = [x_1, x_2, \dots, x_{r-2}, x_{r-1}, x, \dots, x_n] \equiv k_1[x_1, x_{r-1}, x_r, x, x_2, \dots, x_{r-2}, \dots, x_n].$$

Mas

$$\begin{aligned} [x_1, x_{r-1}, x_r, x, \dots, x_n] =& [x_1, x_{r-1}, [x_r, x], \dots, x_n] + [x_1, x_{r-1}, x, x_r, \dots, x_n] \\ \equiv& -[[x_r, x], x_1, x_{r-1}, \dots, x_n] + [x_{r-1}, [x_r, x], x_1, \dots, x_n] \\ \equiv& -[x_r, x, x_1, x_{r-1}, \dots, x_n], \end{aligned}$$

então $m \equiv k[x_1, x, x_r, x_2, \dots, x_{r-2}, \dots, x_n]$ usando (4.4). Se $\alpha_r \neq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}$, então podemos mover x uma posição à esquerda no comutador. Repetindo esse procedimento e usando o argumento anterior, se necessário, obtemos o resultado.

Agora, suponha que não existe sequência boa da forma $(\alpha_1, -1, \alpha_{j_1}, \dots)$. Se a variável de grau -1 ocorre na posição r, então

$$m = [x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n].$$

Se $\alpha_{r+1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}$, então como x_1 é a variável de maior grau devemos ter $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ e $\alpha_{r+1} = \alpha_1$. Assim

$$m = [x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n] \equiv k[x_1, x_r, x_{r+1}, x_2, \dots, x_{r-2}, \dots, x_n].$$

Portanto, $\alpha_{r+1} \neq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}$ e podemos mover x_r uma posição para a direita. Prosseguindo com este raciocínio, obtemos o resultado. ♢

Lema 4.2.13. *Nas notações do Lema 4.2.12, suponha que existem duas variáveis de $\mathbb{Z}$-grau -1. Se existe sequência boa $(\alpha_1, -1, \alpha_{j_1}, \dots)$ com α_1 o máximo dos $\mathbb{Z}$-graus, então*

$$m \equiv k[x_1, x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}]$$

onde $|x_{j_0}| = -1$, $k \in K$ e $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$. Se não existe tal sequência boa, então

$$m \equiv k[x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-1}}, x_{j_n}]$$

onde $|x_{j_n}| = -1$ e $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$.

Prova: Suponha que as variáveis de $\mathbb{Z}$-grau -1 ocorram nas posições i_0 e j_0 de m, $i_0 \neq j_0$. Para simplificar a notação vamos reescrever as variáveis $x_{i_0+1} = y_1$, $\dots$, $x_{i_0+j_0-1} = y_l$, $x_{i_0+j_0+1} = z_1$, $\dots$, $x_{i_n} = z_t$, $x_{i_0} = x$ e $x_{j_0} = y$. Assim

$$m = [x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, y_1, \dots, y_l, y, z_1, \dots, z_t],$$

onde $|x| = |y| = -1$ e x_1 é a variável de maior grau. Do lema anterior

$$[x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, y_1, \dots, y_l] \equiv k[x_1, x, x_{s_1}, \dots, x_{s_r}, y_{v_1}, \dots, y_{v_l}]$$

ou

$$[x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, y_1, \dots, y_l] \equiv k[x_1, x_{s_1}, \dots, x_{s_r}, y_{v_1}, \dots, y_{v_l}, x].$$

Se ocorre o primeiro caso, o resultado segue pois

$$m \equiv k[x_1, x, x_{s_1}, \dots, x_{s_r}, y_{v_1}, \dots, y_{v_l}, z_1, \dots, z_t].$$

Suponha então que $m = [x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, y, z_1, \dots, z_t]$, $|x_i| \geq 0$ e $|z_i| \geq 0$. Neste caso não podemos ter $-1 = |x_1| + \cdots + |x_{i_0-1}|$, logo $m \equiv k_1[x_1, \dots, x_{i_0-2}, x, x_{i_0-1}, y, z_1, \dots, z_t]$. Se $|x_{i_0-1}| = |x_1| + \cdots + |x_{i_0-2}|$, então como x_1 é a variável com maior grau, devemos ter $|x_2| = \cdots = |x_{i_0-2}| = 0$ e $|x_{i_0-1}| = |x_1|$. Assim para $|x_1| > 1$ temos

$$\begin{aligned} m \equiv & k_1[x_1, \dots, x_{i_0-2}, x, x_{i_0-1}, y, z_1, \dots z_t] \\ \equiv & k_2[x_1, y, x_{i_0-1}, x_2, \dots, x_{i_0-2}, y, z_1, \dots, z_t]. \end{aligned}$$

Agora, se $|x_1| = 1$, então

$$m = [x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, y, z_1, \dots, z_t] = [x_1, \dots, [x_{i_0-1}, x], y, z_1, \dots, z_t] + [x_1, \dots, x, x_{i_0-1}, y, z_1, \dots, z_t].$$

A última parte pertence a I, e como $[x_{i_0-1}, x]$ tem grau zero, segue que

$$m \equiv [x_1, x, x_{i_0-1}, \dots, y, z_1, \dots, z_t],$$

e o resultado segue. Suponha então que não existe sequência boa $(\alpha_1, -1, \alpha_{j_1}, \dots)$.

Suponha que $|z_1| = |x_1| + \cdots + |x_{i_0-1}| - 1 + |y_1| + \cdots + |y_l|$. Devemos ter:

Caso 1: $|x_1| - 1 = |z_1|$ e $|x_2| = \cdots = |x_{i_0-1}| = |y_1| = \cdots = |y_l| = 0$. Logo, se $|x_1| > 1$, então $m \equiv k[x_1, y, \dots]$ e por hipótese tal situação não ocorre. Logo devemos ter $|x_1| = 1$ e daí $m = [x^1, y^{-1}, z^{-1}, t^0] = -[y^{-1}, x^1, z^{-1}, t^0]$. Assim da Observação 4.2.4 segue que $m \equiv k[x^1, t^0, y^{-1}, z^{-1}]$.

Caso 2: $|x_1| = |z_1|$ e $|x_2| + \cdots + |x_{i_0-1}| + |y_1| + \cdots + |y_l| = 1$. Suponha $|x_1| > 1$. Temos os seguintes subcasos para analisar:

Caso 2.1: $|x_2| = \cdots = |x_{i_0-1}| = 0$. Temos

$$m \equiv k[x_1, y, \dots]$$

o que é impossível.

Caso 2.2: $|y_1| = \cdots = |y_l| = 0$. Teremos

$$m \equiv k[x_1, x_2, y, z, x_3, \dots, x_{i_0-1}, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_t].$$

Daí podemos considerar $m = [x_1, x^1, y^{-1}, z^{-1}, x_2]$. Se $|x_1| \neq 2$, então $m \equiv k[x_1, y^{-1}, x^1, z^{-1}, x_2]$. Logo $|x_1| = 2$. Mas

$$\begin{aligned}[x_1, x^1, y^{-1}, z^{-1}] =& [x_1, [x^1, y^{-1}], z^{-1}] + [x_1, y^{-1}, x^1, z^{-1}] \\ \equiv& [x_1, [x^1, y^{-1}], z^{-1}] \equiv k[x_1, z^{-1}, [x^1, y^{-1}]] \equiv k[x_1, z^{-1}, y^{-1}, x^1]\end{aligned}$$

o que não é possível.

Se $|x_1| = 1$, então $|x_2| = \cdots = |x_{i_0-1}| = 0$, $|y_1| = 1$ e $|z_1| = 1$. Daí

$$\begin{aligned}m =& [x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, x, y_1, \ldots, y_l, y, z_1, \ldots, z_t] \\ =& [x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, [x, y_1], \ldots, y_l, y, z_1, \ldots, z_t] \\ &+ [x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, y_1, x, \ldots, y_l, y, z_1, \ldots, z_t] \\ \equiv& [x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, [x, y_1], \ldots, y_l, y, z_1, \ldots, z_t] \\ \equiv& k[x_1, [x, y_1], x_2, \ldots, x_{i_0-1}, \ldots, y_l, y, z_1, \ldots, z_t] \\ =& [y_1, x, x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, \ldots, y_l, y, z_1, \ldots, z_t] \\ \equiv& [x_1, y, y_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, \ldots, y_l, y, z_1, \ldots, z_t],\end{aligned}$$

que novamente é impossível. Portanto $|z_1| \neq |x_1| + \cdots + |x_{i_0-1}| - 1 + |y_1| + \cdots + |y_l|$ e podemos mover y uma posição para a direita. Repetindo esse argumento obtemos o resultado. ♢

Lema 4.2.14. *Seja $m = [x_1, \ldots, x_n] \in L(X)$, $m \notin I$, um monômio multilinear tal que existem r variáveis de $\mathbb{Z}$-grau -1. Denote por α_i o $\mathbb{Z}$-grau de x_i. Se existe sequência boa $(\alpha_1, -1, \alpha_{j_1}, \ldots)$ com α_1 o máximo dos $\mathbb{Z}$-graus, então*

$$m \equiv k[x_1, x, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-2}}]$$

onde $|x| = -1$, $k \in K$ e $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$. Se não existe tal sequência boa, então

$$m \equiv k[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}, x]$$

onde $|x| = -1$ e $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$. Mais ainda, podemos escolher x como sendo a variável de grau -1 com o menor índice.

Prova: Faremos a prova por indução no número de variáveis de $\mathbb{Z}$-grau -1. Os casos de nenhuma variável, uma variável e duas foram feitos nos Lemas 4.2.11, 4.2.12 e 4.2.13, respectivamente. Assim suponha que para $r-1$ variáveis de grau -1, o resultado seja verdadeiro. Se $m=[x_1,\ldots,x_n]$ possui $r\geq 3$ variáveis de grau -1, então seja i_0 o menor índice tal que $\alpha_{i_0}=-1$, denote $x_{i_0}=x$. Assim no monômio $m=[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x,x_{i_0+1},\ldots,x_n]$ temos $\alpha_2\geq 0$, $\ldots$, $\alpha_{i_0-1}\geq 0$ e $\alpha_1\geq 1$. Denotamos $y=[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x]$ e em $[y,x_{i_0+1},\ldots,x_n]$ temos $r-1$ variáveis de grau -1. Por indução temos que:

$$m\equiv k[[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x],x_{j_1},\ldots,x_{j_s}],\text{ onde }\alpha_{j_s}=-1 \tag{4.9}$$

ou

$$m\equiv k[[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x],x_{j_1},\ldots,x_{j_s}],\text{ onde }\alpha_{j_1}=-1. \tag{4.10}$$

Se ocorre (4.9), o lema está provado. Se ocorre (4.10), então considere o monômio $n=[[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x,x_{j_1}],\ldots,x_{j_s}]$. Aplicando a hipótese de indução à n, temos

$$n\equiv k[[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x,x_{j_1}],x_{l_1}\ldots,x_{l_t}],\text{ onde }\alpha_{l_t}=-1 \tag{4.11}$$

ou

$$n\equiv k[[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x,x_{j_1}],x_{l_1},\ldots,x_{l_t}],\text{ onde }\alpha_{l_1}=-1. \tag{4.12}$$

Se acontece (4.11) nada há a fazer. Se acontece (4.12), repetimos o mesmo raciocínio em $[[x_1,\ldots,x_{i_0-1},x,x_{j_1}],x_{l_1},\ldots,x_{l_t}]$. Assim temos que considerar o caso $m=[x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots z_l]$, $m\notin I$, onde $|x_i|\geq 0$, $|z_j|\geq 0$, para $i=1,\ldots,s$, $j=1,\ldots,l$ e $|y_1|=\cdots=|y_r|=-1$. Neste caso não podemos ter $-1=|x_1|+\cdots+|x_s|$, logo $m\equiv k_1[x_1,\ldots,x_{s-1},y_1,x_s,y_2,\ldots,y_r,z_1,\ldots z_l]$. Agora, se $|x_s|=|x_1|+\cdots+|x_{s-1}|$, então como x_1 é a variável com maior grau, devemos ter $|x_2|=\cdots=|x_{s-1}|=0$ e $|x_s|=|x_1|$. Assim para $|x_1|>1$ temos

$$\begin{aligned} m\equiv & k_1[x_1,\ldots,x_{s-1},y_1,x_s,y_2,\ldots,y_r,z_1,\ldots z_l]\\ \equiv & k_2[x_1,y_1,x_s,x_2,\ldots,x_{s-1},y_2,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_l]. \end{aligned}$$

Se $|x_1|=1$, então m possui no máximo duas variáveis de grau -1, e este caso foi feito no Lema 4.2.13. Portanto o lema está provado.

Agora, da Proposição 4.2.9 podemos permutar as variáveis de grau -1. Assim podemos escolher sempre a de menor índice, por exemplo, para colocar na segunda ou última entrada de m. $\diamondsuit$

Corolário 4.2.15. *Seja $m = [x_1, \ldots, x_n] \in L(X)$, $m \notin I$, um monômio multilinear de grau n, $\alpha_i = |x_i|$ e $\alpha_1 = \max\{\alpha_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Se existe pelo menos uma variável de $\mathbb{Z}$-grau -1, então*

$$m \equiv k[x_1, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}],$$

onde $k \in K$ e $\alpha_{j_1} = -1$, se existe sequência boa $(\alpha_1, -1, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{n-1}})$, se não $\alpha_{j_{n-1}} = -1$. Mais ainda, podemos escolher x_{j_1} ou x_{j_s}, conforme o caso, como a variável de grau -1 com o menor índice.

Prova: Segue imediatamente do lema anterior. ♢

Teorema 4.2.16. *$T_{\mathbb{Z}}(W_1) = I$.*

Prova: Seja $f \in L(X)$ uma identidade multilinear de W_1. Se o grau de f é 3, então $f \in I$. De fato, podemos supor que a variável de maior $\mathbb{Z}$-grau está no começo dos comutadores. Assim,

$$f = \alpha[x^a, y^b, z^c] + \beta[x^a, z^c, y^b],$$

onde $a \geq b$, $a \geq c$ e α, $\beta \in K$.

Se $b = a$ então $f \equiv \beta[x^a, z^c, y^a]$ e daí como f é identidade devemos ter $f \in I$. Analogamente para $c = a$. Suponha então $b \neq a$ e $c \neq a$. Se $b = a + c$ ou $c = a + b$, então também obtemos $f \in I$. Assim também devemos supor $b \neq a + c$ e $c \neq a + b$. Com esta hipótese obtemos

$$f \equiv \gamma[x^a, z^c, y^b].$$

E aqui também $f \in I$.

Assim podemos considerar somente identidades de grau maior ou igual a 4. Tome f uma identidade multilinear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e $|x_i| = \alpha_i$, de menor grau tal que $f \notin I$. Se $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$ então pelo Lema 4.2.11, podemos escrever

$$f \equiv k[x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}]$$

$k \in K$, $|x_{j_t}| = \alpha_{j_t}$, $x_{j_1} = \max\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $x_{j_1} > x_{j_2}$ e $x_{j_2} \leq \cdots \leq x_{j_n}$. Logo f é uma identidade de W_1 se, e só se, $f \in I$. Agora se existe r tal que $|x_r| = -1$, então pelo corolário anterior temos dois casos para analisar:

Caso 1: $f \equiv \sum \lambda_i[x_{j_1}, x, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-2}}]$ onde x_{j_1} é a variável de maior $\mathbb{Z}$-grau e $|x| = -1$. Neste caso podemos substituir o comutador $[x_{j_1}, x]$ por uma variável y tal que $|y| = |x_{j_1}| - 1$. Assim obtemos um polinômio g de grau menor que f e que é identidade de W_1. Logo $g \in I$ e portanto $f \in I$. O que é um absurdo.

Caso 2: $f \equiv \sum \lambda_i[x_{\sigma(j_1)}, \ldots, x_{\sigma(j_{n-1})}, x_{j_0}]$ onde $|x_{j_0}| = -1$. Escreva $f \equiv [g, x_{j_0}]$ onde g é um polinômio de grau $n-1$. Se g não é identidade para W_1, então o $\mathbb{Z}$-grau de g é -1, pois f é identidade. Daí $f \in I$ o que é um absurdo. Logo, g é identidade. Mas da escolha de f, devemos ter $g \in I$ e portanto $f \in I$, novamente um absurdo. Logo $T_{\mathbb{Z}}(W_1) \subseteq I$.

Agora, pelo Lema 4.2.1 temos a outra inclusão, portanto $T_{\mathbb{Z}}(W_1) = I$. ♢

4.3 Independência das identidades graduadas

Denote por $f_i = [x_1^i, x_2^i] \in L(X)$ os polinômios graduados de (4.1). Denote também por A a menor álgebra de Lie não abeliana: A tem uma base consistindo de e_1, e_2 e $[e_1, e_2] = e_1$. Seja A_i uma cópia de A, e defina $W_{(n)} = (\oplus_{i=-1}^{n} L_i) \oplus (\oplus_{i>n}(L_i \oplus A_i))$. Além disso, a $\mathbb{Z}$-graduação em W_1 é dada por $W_1 = \oplus_{i \geq -1} L_i$. Então $W_{(n)}$ é um espaço vetorial $\mathbb{Z}$-graduado cuja i-ésima componente homogênea é L_i se $i \leq n$, e $L_i \oplus A_i$ caso contrário. A multiplicação em $W_{(n)}$ é definida como segue. Os elementos de L_i e L_j multiplicam-se do mesmo modo como os elementos em W_1. Além disso, $[L_i, A_j] = 0$ para todos i e j, finalmente se $a \in A_i$, $b \in A_j$ então $[a, b] \in A_{i+j}$ é definido como o colchete de a e b em $A = A_{i+j}$.

Lema 4.3.1. *A álgebra $W_{(n)}$ satisfaz as identidades graduadas f_i, $1 \leq i \leq n$. Ainda $W_{(n)}$ não satisfaz nenhuma identidade graduada f_j, $j > n$.*

Prova: Ambas as afirmações são imediatas. ♢

Corolário 4.3.2. *O conjunto de polinômios $\{f_i \mid i \geq -1\}$ é um conjunto independente de identidades graduadas em $L(X)$.*

Prova: É uma consequência direta do Lema 4.3.1. ♢

Agora denotamos por $f_{abc} = \alpha[x_1^a, x_2^b, x_3^c] - \beta[x_1^a, x_3^c, x_2^b]$ a identidade graduada definida em (4.2). Observe que $\alpha = (c-a)(b-c-a)$ e $\beta = (b-a)(c-b-a)$. Primeiro note que quando $c = a$ temos $\alpha = 0$ mas o segundo comutador de f_{aba} se anula devido à identidade

graduada (4.1), e analogamente para $b = a$. Daí supomos $b \neq a$ e $c \neq a$. Mais ainda, se $b = c+a$ então $\alpha = 0$ mas o segundo comutador em f_{abc} se anula também por causa de (4.1). Assim podemos supor $b \neq a + c$ e analogamente $c \neq a + b$. Observe também que se $c = b$ então temos $[x_1^a, x_2^b, x_3^b] - [x_1^a, x_3^b, x_3^b]$ que pertence ao ideal graduado gerado pelas identidades (4.1). Logo podemos supor também que $b \neq c$. De modo semelhante, se $a = b + c$ obtemos $[x_1^a, x_2^b, x_3^c] - [x_1^a, x_3^c, x_2^b]$ está no ideal graduado gerado por (4.1). Portanto devemos supor $a \neq b + c$.

As considerações anteriores provam o seguinte Lema.

Lema 4.3.3. *Os polinômios (4.1), (4.3) e (4.2) com a, b, c distintos e $a \neq b+c$, $b \neq a+c$, $c \neq a+b$, formam uma base das identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de W_1.*

Vamos impor mais algumas restrições nas identidades graduadas do tipo (4.2). Considere a identidade graduada

$$f_{bac} = \gamma[x_2^b, x_1^a, x_3^c] - \delta[x_2^b, x_3^c, x_1^a], \quad \gamma = (c-b)(a-b-c), \delta = (a-b)(c-a-b).$$

Os lemas seguintes são imediatos.

Lema 4.3.4. *Se uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada L satisfaz as identidades graduadas f_{abc} e f_{bac} com a, b, c como no Lema 4.3.3, então L satisfaz a identidade graduada f_{cab}. Em outras palavras, a identidade graduada f_{cab} segue de f_{abc} e f_{bac}.*

Prova: Temos $f_{cab} = -\gamma[x_3^c, x_1^a, x_2^b] + \alpha[x_3^c, x_2^b, x_1^a]$. Assim a afirmação segue de uma simples manipulação com as expressões de f_{abc} e f_{bac}. ♢

Lema 4.3.5. *A identidade graduada f_{bac} segue de f_{abc}.*

Prova: Usando a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} f_{abc} &= \alpha[x_1^a, x_2^b, x_3^c] - \beta[x_1^a, x_3^c, x_2^b] \\ &= \alpha[x_1^a, x_2^b, x_3^c] + \beta[x_3^c, x_2^b, x_1^a] + \beta[x_2^b, x_1^a, x_3^c] \\ &= (\beta - \alpha)[x_2^b, x_1^a, x_3^c] - \beta[x_2^b, x_3^c, x_1^a], \end{aligned}$$

o que é exatamente f_{bac}, uma vez que $\delta = -\beta$ e é fácil verificar que $\gamma = \alpha - \beta$. ♢

De fato, segue da prova que f_{abc} e f_{bac} são equivalentes como identidades graduadas.

Proposição 4.3.6. *As identidades graduadas f_{abc}, onde a, b e c são como no Lema 4.3.3, e além disso $a > b > c$, são independentes.*

Prova: Fixe uma tripla (a, b, c) de inteiros tais que $a > b > c \geq -1$ e $a \neq b + c$. Devemos construir uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada L_{abc} que satisfaça todas as identidades do tipo (4.1) e (4.3). Mais ainda, L_{abc} irá satisfazer todas identidades graduadas f_{uvw} com $u > v > w \geq -1$ e tais que $(u, v, w) \neq (a, b, c)$. Além disso, f_{abc} não será uma identidade graduada para L_{abc}. Claramente a existência de tal álgebra prova a proposição.

Vamos começar com a álgebra $W_1 = \oplus_{i \geq -1} L_i$. Os elementos e_i geram L_i, para todo $i \geq -1$, e $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. A álgebra $L_{abc} = \oplus_{i \geq -1} H_i$ é $\mathbb{Z}$-graduada com a i-ésima componente homogênea igual a H_i quando $i \geq -1$ e 0 caso contrário. Daí ela satisfaz as identidades graduadas (4.3). Definimos $H_i = L_i$ para todo $i \in \mathbb{Z} \setminus \{a, b, c, a + b, a + c, b + c, a + b + c\}$. Tome elementos $h_a \in H_a$, $h_b \in H_b$ e $h_c \in H_c$ que centralizem W_1, isto é, $[h_k, e_i] = 0$ para todo i e todo $k = a$, b, c. Seja

$$[h_a, h_b] = h_{a+b} \in H_{a+b}, \quad [h_b, h_c] = h_{b+c} \in H_{b+c}, \quad [h_c, h_a] = h_{c+a} \in H_{c+a}$$

e coloque $[h_{a+b}, h_c] = h_{a+b+c} \in H_{a+b+c}$, $[h_{b+c}, h_a] = h_{a+b+c}$. Desde que L_{abc} deve satisfazer a identidade de Jacobi devemos ter $[h_{c+a}, h_b] = -2h_{a+b+c}$. Todos os outros produtos entre os h's definimos como 0.

Vamos calcular

$$\begin{aligned} f_{abc}(h_a, h_b, h_c) &= (b-a)(c-a-b)[h_a, h_b, h_c] - (c-a)(b-a-c)[h_a, h_c, h_b] \\ &= (b-a)(c-a-b)h_{a+b+c} + 2(c-a)(b-a-c)h_{a+b+c}. \end{aligned}$$

Mas $(b-a)(c-a-b) + 2(c-a)(b-a-c) \neq 0$ em $\mathbb{Z}$ pois ambos os somandos são negativos. Isto conclui a prova uma vez que é evidente que L_{abc} satisfaz todas as identidades graduadass f_{uvw} exceto por f_{abc}. ♢

Como os resultados anteriores temos o seguinte teorema.

Teorema 4.3.7. *As identidades graduadas (4.1), (4.3) e f_{abc} com $a > b > c \geq -1$, $a \neq b+c$, formam uma base minimal para $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$.*

Corolário 4.3.8. *As identidades $\mathbb{Z}$-graduadas para a álgebra de Lie W_1 sobre um corpo de característica 0 não admitem uma base finita.*

4.4 Considerações finais

As identidades ordinárias de W_1 são desconhecidas. É bem sabido e fácil verificar que W_1 satisfaz a identidade de Lie standard s_5. Não se sabe se as identidades ordinárias de W_1 admitem uma base finita. A determinação dessas identidades é um importante problema em aberto na teoria das identidades em álgebras de Lie. A álgebra W_n é simples para todo $n \geq 1$, e é muito importante para a teoria.

Pode ser interessante determinar as identidades graduadas da álgebra de Lie W_n para $n \geq 2$. Podemos considerar esta álgebra graduada naturalmente por $\mathbb{Z}^n$, onde acreditamos que os resultados irão ser obtidos com argumentos semelhantes aos usados aqui.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. M. Alves, P. Koshlukov, *Polynomial identities of algebras in positive characteristic*, J. Algebra **305**, (2006), 1149–1165.

[2] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, (1950), 449–463.

[3] S. S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Tensor product theorems in positive characteristic*, J. Algebra, **276 (2)**, (2004), 836–845.

[4] S. S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic*, Comm. Algebra, **33**, (2005), 1011–1022.

[5] Y. Bahturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Scienc Press BV, Utrecht, First English Edition, (1987).

[6] Y. Bahturin, V. Drensky, *Graded polynomial identities of matrices*, Linear Algebra Appl., **357**, (2002), 15–34.

[7] Y. Bahturin, A. Regev, *Graded tensor products*, J. Pure Appl. Algebra, **213**, (2009), 1643–1650.

[8] Y. Bahturin, M. Zaicev, *Graded algebras and graded identities*, Polynomial Identities and Combinatorial Methods, Lecture Notes in Pure Appl. Math. **235**, M. Dekker, 2003, 101–139.

[9] Y. Bahturin, M. Zaicev, *Group gradings on matrix algebras*, Canad. Math. Bull. **45**, (2002), 499–508.

[10] A. Berele, *Generic verbally prime algebras and their GK-dimensions*, Comm. Algebra, **21 (5)**, (1993), 1487–1504.

[11] A. Berele, *Classification theorems for verbally semiprime algebras*, Comm. Algebra, **21 (5)**, (1993), 1487–1504.

[12] A. Berele, *Invariant theory and trace identities associated with Lie color algebras*, J. Algebra **310** (2007), 194–206.

[13] N. Bourbaki, *Algèbre*, III, Hermann, Paris, (1971).

[14] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel J. Math, **80 (3)**, (1992), 323–335.

[15] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, $\mathbb{Z}_{k+l}\times\mathbb{Z}_2$*-graded polynomial identities for* $M_{k,l}(E)\otimes E$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **108**, (2002), 27–39.

[16] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Comm. Algebra, **31 (3)**, (2003), 1453–1474.

[17] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *Graded polynomial identities of verbally prime algebras*, J. Algebra Appl. **6 (3)**, (2007), 385–401.

[18] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *On a Regev-Seeman conjecture about* $\mathbb{Z}_2$*-graded tensor products*, Israel J. Math. **2009**, a ser publicado.

[19] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, E. A. Santulo Jr., *Graded identities for tensor products of matrix (super)algebras over the Grassmann algebra*, Linear Algebra Appl. **2009**, a ser pubicado.

[20] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, (1999).

[21] J. A. Freitas, P. Koshlukov, *Polynomial identities for graded tensor products of algebras*, J. Algebra, **321 (2)**, (2009), 667–681.

[22] J. A. Freitas, P. Koshlukov, A. Krasilnikov, $\mathbb{Z}$*-graded identities for* W_1, Em fase final de elaboração.

[23] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monographs **122**, AMS, Providence, RI, 2005.

[24] A. Kanel-Belov, L. Rowen, *Computational aspects of polynomial identities*, Research Notes in Mathematics, 9. A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005.

[25] A. Kemer, *Varieties and* $\mathbb{Z}_2$*-graded algebras*, Izvestiya **48 (5)**, (1984), (in Russian). English translation in Izvestiya **25 (2)**, (1985), 359-374.

[26] A. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. **87 (2)**, (1991).

[27] P. Koshlukov, *Graded polynomial identities for the Lie algebra* $sl_2(K)$, Internat. J. Algebra Comput. **18 (5)** (2008), 825–836.

[28] P. Koshlukov, S. S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over a field of positive characteristic*, Israel J. Math., **81 (3)**, (2002), 343–355.

[29] P. Koshlukov, A. Krasilnikov, D. Silva, *Graded identities for Lie algebras*, Contemporary Math., AMS, 2009, a ser publicado.

[30] P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *Just nonfinitely based varieties of 2-graded Lie algebras*, a ser publicado.

[31] U. Leron, A. Vapne, *Polynomial identities of related rings*, Israel J. Math. **8**, (1970), 127–137.

[32] V. M. Petrogradsky, *On Lie algebras with nonintegral q-dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**, (1997), 649–656.

[33] Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Translations Math. Monographs, **138**, AMS, Providence, RI, 1994.

[34] A. Regev, *Existence of identities in* $A \otimes B$, Israel J. Math. **11**, (1972), 131–152.

[35] A. Regev, *Homomorphisms for tensor products of Grassmann algebras*, Ring Theory 1989: Israel Math. Conf. Proc., **1**, (1989), 111-117, Weizmann, Jerusalem.

[36] A. Regev, *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra, **133 (2)**, (1990), 512–526.

[37] A. Regev, T. Seeman, $\mathbb{Z}_2$*-graded tensor products of PI-algebras*, J. Algebra, **291**, (2005), 274–296.

[38] D. V. Repin, *Graded identities of a simple three-dimensional Lie algebra*, Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser. 2004, Special Issue 2, 5–16 (Russian).

[39] L. H. Rowen, *Polynomial identities in Ring Theory*, Academic Press, New York, 1980.

[40] E. A. Santulo Júnior, *Megulhos graduados de PI-álgebras*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2007.

[41] M. Scheunert, *The Theory of Lie Superalgebras*, Lecture Notes in Math., **716**, Springer, Berlin, 1979.

[42] S. Yu. Vasilovsky, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra and Logic **28 (5)**, (1989), 355–368.

[43] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Comm. Algebra **26 (2)**, (1998), 601–612.

[44] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}_n$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order* n, Proc. Amer. Math. Soc. **127 (12)**, (1999), 3517–3524.

[45] C. T. C. Wall, *Graded Brauer groups*, J. Reine Angew. Math. **213**, (1963/1964), 187–199.

[46] A. A. Zolotykh, *Commutation factors and varieties of associative algebras*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **3 (2)**, (1997) 453–468, (In Russian).