UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC

Departamento de Matemática

Identidades Polinomiais em Álgebras T-primas

Tese de Doutorado

Marcello Fidélis*

Orientador: **Prof. Dr. Plamen E. Koshlukov**

Fevereiro de 2005
Campinas-SP

* Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

Identidades Polinomiais em Álgebras T-primas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Marcello Fidélis** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de março de 2005.

Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov
Orientador

Banca Examinadora
1 Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov
2 Prof. Dr. Antônio José Engler
3 Prof. Dr. Ivan Chestakov
4 Prof. Dr. Guilherme Augusto de la Rocque Leal
5 Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Fidélis, Marcello

F448i Identidades polinomiais em ágebras T-primas / Marcello Fidélis -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Plamen Emilov Koshlukov

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Identidades polinomiais. 2. Anéis (Álgebra). 3. Álgebra não-comutativa. I. Koshlukov, Plamen Emilov. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Polynomial identities in T-prime algebras

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Polynomial identities. 2. Rings (Algebra). 3. Noncommutative algebra

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutorado em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov (UNICAMP)
Prof. Dr. Antonio José Engler (UNICAMP)
Prof. Dr. Guilherme Augusto de la Rocque Leal (UFRJ)
Prof. Dr. Ivan Chestakov (USP)
Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (USP)

Data da defesa: 24/02/2005

Tese de Doutorado defendida em 24 de fevereiro de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

P Kochloukov

Prof. (a). Dr (a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Antonio José Engler

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof. (a). Dr (a). IVAN CHESTAKOV

Guilherme Leal

Prof. (a). Dr (a). GUILHERME AUGUSTO DE LA ROCQUE LEAL

Prof. (a) Dr. (a) VYACHESLAV FUTORNY

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela vida e por permitir nela encontrar as duas pessoas mais importantes na realização deste trabalho: meu orientador, o professor Plamen E. Koshlukov e minha amada esposa Paula Takatsuka, a Paulinha.

Ao professor Plamen agradeço pela orientação objetiva, amizade e por sua grande disposição para me guiar no estudo da Teoria de Anéis, esclarencendo minhas dúvidas após o expediente e me atendendo em sua casa.

À linda e polivalente Paulinha agradeço todo o incentivo, encorajamento, companheirismo, amor e dedicação nestes anos que estamos juntos. E, como se tudo isso não fosse o bastante, leu, corrigiu e contribuiu muito para melhorar a apresentação deste trabalho.

Quero também deixar registrado meus agradecimentos aos excelentes profissionais da Seção de Pós-Graduação e da Biblioteca do IMECC. Aos meus familiares (incluindo a família da Paulinha). Aos amigos, colegas e professores que conheci na Universidade.

Finalmente, agradeço ao CNPq pela bolsa que possibilitou a realização deste trabalho e à banca examinadora pelas sugestões que melhoraram significativamente a exposição da tese.

Muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho estudamos os produtos tensoriais de T-ideais T-primos sobre corpos infinitos. O comportamento destes produtos tensoriais sobre corpos de característica zero foi descrito por Kemer. Primeiramente mostramos, usando os métodos introduzidos por Regev, que tal descrição vale se nos restringirmos apenas aos polinômios multilineares. Num segundo momento, aplicando identidades graduadas, mostramos que o Teorema sobre o Produto Tensorial é falso para os T-ideais das álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, onde E é a álgebra de Grassmann com dimensão infinita; $M_{1,1}(E)$ consiste das matrizes 2×2 sobre E tendo somente elementos pares (i.e. centrais) de E na diagonal principal, e a outra diagonal consistindo de elementos ímpares (anticomutitativos) de E. Então voltamos nossa atenção para outros produtos tensoriais e estudamos suas respectivas identidades graduadas. Obtivemos novas demonstrações de alguns dos casos do Teorema sobre o Produto Tensorial de Kemer. Note que estas demonstrações não dependem da teoria sobre a estrutura dos T-ideais, mas são "elementares". Finalmente, usando outra vez identidades polinomiais graduadas, mostramos que o Teorema sobre o Produto Tensorial não é válido em mais um caso: quando o corpo base possui característica positiva. Isto vem para mostrar novamente que a teoria sobre a estrutura dos T-ideais é, essencialmente, uma teoria sobre identidades polinomiais multilineares.

Abstract

In this work we study tensor products of T-prime T-ideals over infinite fields. The behaviour of these tensor products over a field of characteristic zero was described by Kemer. First we show, using methods due to Regev, that such a description holds if one restricts oneself to multilinear polynomials only. Second, applying graded polynomial identities, we prove that the Tensor Product Theorem fails for the T-ideals of the algebras $M_{1,1}(E)$ and $E \otimes E$ where E is the infinite dimensional Grassmann algebra; $M_{1,1}(E)$ consists of the 2×2 matrices over E having even (i.e. central) elements of E in the main diagonal, and the other diagonal consisting of odd (anticommuting) elements of E. Then we pass to other tensor products and study the respective graded identities. We obtain new proofs of some cases of Kemer's Tensor Product Theorem. Note that these proofs do not depend on the structure theory of T-ideals but are "elementary" ones. Finally, using graded polynomial identities once again, we show that the Tensor Product Theorem fails in one more case when the base field is of positive characteristic. All this comes to show once more that the structure theory of T-ideals is essentially about the multilinear polynomial identities.

Sumário

Introdução

As álgebras de matrizes sobre anéis, bem como as álgebras comutativas e álgebras de dimensão finita são objetos de estudo de grande importância devido ao seu amplo espectro de aplicações. Estas álgebras são exemplos de estruturas que compartilham o fato de satisfazerem relações polinomiais entre seus elementos. Mais precisamente, para cada uma das álgebras acima, existe um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ com variáveis não comutativas que se anula quando avaliado nos elementos desta álgebra. A álgebra que cumpre esta condição é chamada *álgebra com identidade polinomial*, ou simplesmente *PI-álgebra*. Seu estudo, a grosso modo, consiste em relacionar o efeito das identidades polinomiais na estrutura das álgebras que as satisfazem.

Historicamente, o desenvolvimento da Teoria de Identidades Polinomiais começou a se intensificar em torno dos anos 1950, época da publicação do celebrado Teorema de Amitsur-Levitzki, um resultado clássico que mostra que a álgebra das matrizes de ordem n satisfaz a identidade "standard" de grau $2n$. Contemporaneamente, Specht levantou a seguinte questão: "Toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais?". A busca pela resposta a esta pergunta, que ficou conhecida como o Problema de Specht, motivou o boa parte do desenvolvimento desta teoria, onde inicialmente eram consideradas apenas álgebras sobre corpos com característica zero.

O Problema de Specht foi respondido afirmativamente em 1987, quando Kemer apresentou sua densa Teoria sobre a Estrutura dos T-ideais. Um fato importante em seu estudo foi a classificação das álgebras T-primas sobre corpos com característica zero.

Pela dificuldade de trabalhar com identidades polinomiais, em alguns momentos torna-se interessante considerarmos outros tipos de identidades, tais como identidades fracas, identidades com traço, com involução e graduadas. Estas últimas têm atraído a atenção dos pesquisadores, não só pelo seu valor intrínseco, como também por possuir aplicações independentes. Por exemplo, como veremos em nosso trabalho, as identidades graduadas têm um papel muito importante na teoria de Kemer.

Dentre outras conseqüências dos estudos de Kemer, destacamos o Teorema sobre o Produto Tensorial (TPT). Este resultado estabelece a igualdade de identidades satisfeitas por álgebras sobre corpos com característica zero. Demonstrações alternativas para as afirmações do TPT foram obtidas por diversos autores de forma independente, com o intuito de chegar a estes resultados de maneira mais "elementar". Estes estudos, em sua grande parte, fazem uso direta ou indiretamente das identidades graduadas. Como acontece freqüentemente nas ciências, a resposta a uma pergunta levanta outras perguntas, e a teoria citada acima não é uma excessão. Uma pergunta natural que surge com relação ao TPT é a veracidade deste teorema quando consideramos álgebras sobre corpos com característica positiva, e é nesta direção que foi realizado nosso trabalho. Um dos obstáculos que aparecem é o surgimento de novos T-ideais T-primos, chamados de T-ideais irregulares, cuja descrição completa é ainda um problema em aberto e, levando em consideração que pouco se sabe sobre as identidades polinomiais satisfeitas por álgebras importantes, mesmo sobre corpos com característica zero, temos uma idéia da dificuldade em lidar com esta generalização.

Neste trabalho, apresentaremos os resultados obtidos nos artigos [3] e [4], onde usamos identidades graduadas em álgebras T-primas com graduações convenientes para obtermos informações sobre as identidades ordinárias que estas satisfazem e investigamos a validade do TPT em característica positiva, obtendo-se dentre outros resultados, bases para as identidades graduadas consideradas em cada caso e contra-exemplos para as afirmações do teorema citado acima.

O texto está organizado em quatro capítulos, onde procuramos fornecer detalhes omitidos nos artigos que originaram este trabalho. Os capítulos estão estruturados da seguinte forma:

O primeiro é um capítulo preliminar, onde apresentamos formalmente alguns dos nossos principais objetos de estudo, bem como alguns aspectos históricos e resultados clássicos que motivaram o desenvolvimento da Teoria de Identidades Polinomiais, ou simplesmente PI-teoria. Este capítulo auxilia o leitor como referência quanto aos resultados e a terminologia empregada nos seguintes.

No segundo capítulo é apresentado o conceito de álgebra supercomutativa, e estudam-se as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, onde E denota a álgebra de

Grassmann (ou exterior); $E \otimes E$ é o quadrado tensorial de E; $M_{1,1}(E)$ é uma subálgebra especial de $M_2(E)$, e estas álgebras são formalmente definidas no primeiro capítulo. Neste capítulo, construímos modelos adequados para as álgebras relativamente livres nas variedades determinadas pelas álgebras acima, muito importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Os resultados aqui apresentados encontram-se em [16]. Eles representam uma generalização, para corpos com característica positiva, de alguns resultados de Di Vincenzo em [7].

O terceiro capítulo contém uma exposição mais detalhada do artigo [3] onde, seguindo os passos de Regev em [18], demonstramos a "versão multilinear" do Teorema sobre o Produto Tensorial em característica $p > 2$. Encerramos o capítulo mostrando que, em característica positiva, temos a inclusão própria $T(M_{1,1}(E)) \subset T(E \otimes E)$, exibindo um polinômio que é uma identidade de $E \otimes E$, e não é uma identidade de $M_{1,1}(E)$. Naturalmente, tal polinômio depende da característica p do corpo base. Este fato fornece um contra-exemplo para a terceira afirmação do TPT.

O capítulo final de nosso trabalho faz um estudo sobre as identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ (estas álgebras também são formalmente definidas no primeiro capítulo). Exibimos bases para as suas identidades graduadas, de modo semelhante ao Capítulo 2. Também fazemos uso dos métodos introduzidos em [24], [25] e desenvolvidos em [1]. Aqui, veremos que a álgebra $M_{a,a}(E) \otimes E$ satisfaz certas identidades graduadas que não são satisfeitas por $M_{2\,a}(E)$ quando a característica do corpo base é $p > 2$. É interessante observarmos que a diferença entre os respectivos T-ideais graduados se dá apenas em monômios. Isto é, a álgebra $M_{a,b}(E) \otimes E$ satisfaz uma identidade monomial que não é satisfeita por $M_{a+b}(E)$. Encerramos nosso trabalho estudando em detalhes o caso $a = b = 1$. Exibimos bases finitas das respectivas identidades graduadas e encontramos uma identidade ordinária satisfeita por $M_{1,1}(E) \otimes E$, mas não por $M_2(E)$. Neste caso, explicitamos o monômio que cumpre esta condição, mostrando que $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ não são PI-equivalentes quando K é um corpo infinito com característica $p > 2$, como feito em [4].

Acreditamos que os resultados contidos neste trabalho contribuem para um melhor entendimento da natureza dos T-ideais em característica positiva, uma tarefa cuja solução completa ainda está além de nosso conhecimento atual.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos alguns dos principais objetos de estudo da Teoria de Identidades Polinomiais, ou simplesmente PI-teoria. Aqui recordaremos, em geral sem demonstração, resultados clássicos e de importância para nosso trabalho, bem como alguns problemas que motivaram o desenvolvimento desta teoria. Além disso, também estabeleceremos a notação e terminologia usada nos capítulos seguintes.

No decorrer de todo o texto, exceto menção explícita do contrário, K denota um corpo arbitrário de qualquer característica. Todos os espaços vetoriais (portanto todas as álgebras) e produtos tensoriais serão considerados sobre K.

1.1 Conceitos básicos sobre álgebras

Como este trabalho dedica-se ao estudo de álgebras com identidades polinomiais, começaremos com a definição do nosso principal objeto de estudo.

Definição 1.1 Um espaço verorial A é dito uma *álgebra* (ou K-álgebra) se está definida uma operação binária $\cdot : A \times A \to A$ (chamada *multiplicação*) que satisfaz, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\alpha \in K$, as seguintes propriedades:

(1) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

(2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

(3) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$.

Por simplicidade, escreveremos simplesmente $a\,b$ ao invés de $a \cdot b$.

Definição 1.2 Seja A uma álgebra.

(1) A é dita *associativa*, se $(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$, para todo $a, b, c \in A$.

(2) A é dita *comutativa*, se $a\,b = b\,a$, para todo $a, b \in A$.

(3) A é dita *unitária*, se possui uma *unidade*. Isto é, um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A\,a = a\,1_A = a$, para todo $a \in A$. No decorrer do texto, freqüentemente usaremos simplesmente 1 ao invés de 1_A.

Em todo o texto estaremos trabalhando, em geral, com álgebras associativas e unitárias. Portanto, daqui em diante (exceto menção explícita do contrário), o termo *álgebra* deverá ser entendido como *álgebra associativa unitária*.

Exemplo 1.3 Seja V um espaço vetorial com base enumerável $\{e_i \mid i \in I\}$. A *álgebra de Grassmann* (ou álgebra exterior) $E = E(V)$ é a álgebra associativa gerada por $\{e_i \mid i \in I\}$ que satisfaz as seguintes relações:

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \text{ para todo } i, j \in I.$$

E se a característica de K for igual a dois, $e_i^2 = 0$, para todo $i \in I$.

Note que $D = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r, r = 1, 2, 3 \ldots\}$ é uma base de E. Além disso, se V_n é o subespaço de V gerado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$, denotaremos por $E(V_n)$ sua álgebra de Grassmann correspondente.

Exemplo 1.4 Seja A uma álgebra. Considere $A^{op} = A$, como espaço vetorial. Definimos em A^{op} a multiplicação $*$ como:

$$a * b = b\,a, \text{ para todo } a,\, b \in A^{op}.$$

Dessa forma, A^{op} é uma álgebra, chamada de *álgebra oposta de A*.

Definição 1.5 O subespaço (vetorial) B da álgebra A é chamado uma *subálgebra* se para todo $b_1, b_2 \in B$, temos $b_1\,b_2 \in B$. O subespaço I de A é chamado de *ideal à esquerda* se para todo $a \in A$ e $i \in I$, temos $a\,i \in I$. De modo análogo, define-se *ideal à direita*. Um ideal bilateral (ideal à esquerda e direita ao mesmo tempo) é chamado simplesmente de *ideal*.

Exemplo 1.6 O conjunto $C(A) = \{a \in A \mid a\,x = x\,a, \text{ para todo } x \in A\}$ é uma subálgebra de A. Esta subálgebra é chamada de *centro de A* e seus elementos são ditos *centrais*. Quando $A = E$ (a álgebra de Grassmann) temos que $C(E) = E_0$, onde E_0 é o subespaço de E gerado por $D_0 = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r, \, r = 2, 4, 6, \ldots\}$.

Exemplo 1.7 Seja $M_n(E)$ a álgebra de matrizes sobre a álgebra de Grassmann E. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a + b = n$, verifica-se através das regras de multiplicação de matrizes (em blocos) que o conjunto:

$$M_{a,b}(E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E_0 & \ldots & E_0 & E_1 & \ldots & E_1 \\ \vdots & a \times a & \vdots & \vdots & a \times b & \vdots \\ E_0 & \ldots & E_0 & E_1 & \ldots & E_1 \\ \hline E_1 & \ldots & E_1 & E_0 & \ldots & E_0 \\ \vdots & b \times a & \vdots & \vdots & b \times b & \vdots \\ E_1 & \ldots & E_1 & E_0 & \ldots & E_0 \end{array}\right)$$

é uma subálgebra de $M_n(E)$.

Definição 1.8 Uma transformação linear $\varphi : A_1 \to A_2$ entre as álgebras A_1 e A_2 é dita um *homomorfismo* (de álgebras) se:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b), \text{ para todo } a, b \in A_1$$

e, além disso $\varphi(1) = 1$. Analogamente às demais estruturas algébricas, chamamos *isomorfismo* quando φ for um homomorfismo bijetor (e denotaremos $A_1 \cong A_2$), *mergulho* quando for injetor, *endomorfismo* quando for um homomorfismo de uma álgebra sobre ela mesma, e *automorfismo* quando for um endomorfismo bijetor.

Exemplo 1.9 Seja A' uma álgebra sem unidade. Podemos mergulhar A' numa álgebra com unidade. Com efeito, considere $A = A' \oplus K$ como soma direta de espaços vetoriais. Definimos em A a seguinte multiplicação:

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (\alpha b + \beta a + ab, \alpha\beta), \text{ para todo}\, a, b \in A', \, \alpha, \beta \in K.$$

Temos que $(0, 1)$ é uma unidade em A e a inclusão $A' \hookrightarrow A$ é um mergulho. Dizemos que A é obtida através de A' por *introdução formal da unidade*.

O próximo resultado é muito comum nas estruturas algébricas e é geralmente denominado Teorema do Isomorfismo.

Teorema 1.10 *Seja $\varphi : A_1 \to A_2$ um homomorfismo. Então o núcleo de φ,*

$$ker\,\varphi = \{a \in A_1 \mid \varphi(a) = 0\}$$

é um ideal de A_1 e a álgebra quociente $A_1/ker\varphi$ é isomorfa a sua imagem

$$\varphi(A_1) = \{\varphi(a) \mid a \in A_1\}.$$

1.2 Álgebras com identidades polinomiais

Nesta seção, definiremos as álgebras com identidades polinomiais, uma classe muito importante de álgebras, pois além de surgirem como uma generalização das álgebras nilpotentes, comutativas e de dimensão finita, mantêm boas propriedades das classes citadas acima.

Definição 1.11 Para o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de variáveis, $K\langle X\rangle$ denota a *álgebra associativa livre.* Isto é, $K\langle X\rangle$ tem como base os elementos da forma:

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

e multiplicação definida por:

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_m})(x_{j_1}\cdots x_{j_n}) = x_{i_1}\cdots x_{i_m}x_{j_1}\cdots x_{j_n},\ x_{i_k}, x_{j_l} \in X.$$

Os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados *polinômios.*

O subespaço $K\langle X\rangle' \subseteq K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n = 1, 2, \ldots$, é uma subálgebra chamada de *álgebra associativa livre sem unidade.*

Observe que a álgebra $K\langle X\rangle$ definida acima é, em outras palavras, a álgebra dos polinômios não comutativos.

Definição 1.12 Sejam $0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e A uma álgebra. Dizemos que f, ou a expressão $f = 0$, é uma *identidade polinomial de A* (ou para A), se:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \text{para todo } a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

Se A satisfaz uma identidade polinomial não trivial, dizemos que A é uma *PI-álgebra.*

Exemplo 1.13 Seja A uma PI-álgebra. É imediato que a álgebra oposta A^{op} é uma PI-álgebra e satisfaz as mesmas identidades de A.

Exemplo 1.14 Recordemos que uma álgebra A (sem unidade) é chamada *nil de índice limitado* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$, e é chamada *nilpotente* se existe $m \in \mathbb{N}$ (chamado índice) tal que $a_1 \, a_2 \cdots a_m = 0$, para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$. É imediato que toda álgebra nilpotente é nil de índice limitado.

Toda álgebra nil de índice limitado (em particular toda álgebra nilpotente) é uma PI-álgebra, pois o polinômio $f(x) = x^n$ é uma identidade polinomial de A. Quando a álgebra A é nilpotente de índice m, o polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 \, x_2 \cdots x_m$ também é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.15 Toda álgebra comutativa A é uma PI-álgebra, pois o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$ (comutador) é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.16 A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois um cálculo direto usando os elementos da base de E mostra que $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3] = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial de E.

Exemplo 1.17 Seja A uma álgebra de dimensão finita, onde $\dim(A) < n$. Então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz uma generalização do polinômio comutador $[x_1, x_2]$, conhecida como *identidade "standard" de grau n*:

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde $(-1)^\sigma$ é o sinal de $\sigma \in S_n$, o grupo das permutações de n elementos. A álgebra A também satisfaz a *identidade de Capelli*:

$$d_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}.$$

Para verificarmos as afirmações acima, basta fazê-lo para uma base de A, pois os polinômios s_n e d_n são lineares nas variáveis x_i's.

1.3 Variedades, T-ideais e álgebras relativamente livres

A seguir, apresentaremos as variedades (de álgebras associativas) que classificam as PI-álgebras de acordo com as identidades que estas satisfazem. Dentro das variedades, encontram-se seus elementos mais importantes: as álgebras relativamente livres. Através destes conceitos, desenvolve-se o estudo das álgebras e suas identidades polinomiais.

Definição 1.18

(1) Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios. A classe $\mathcal{V}$ de todas as álgebras satisfazendo as identidades $f_i = 0$, para todo $i \in I$, é chamada *variedade definida pelo sistema de identidades* $\{f_i \mid i \in I\}$.

(2) O conjunto $T(\mathcal{V})$ formado por todas as identidades polinomiais satisfeitas pela variedade $\mathcal{V}$ é chamado de *T-ideal de* $\mathcal{V}$, e dizemos que o T-ideal $T(\mathcal{V})$ é *gerado como T-ideal pelo conjunto de identidades* $\{f_i \mid i \in I\}$ *que definem* $\mathcal{V}$. Neste caso, denotamos $T(\mathcal{V}) = \langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle^T$ e o conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ é chamado de *base das identidades polinomiais de* $\mathcal{V}$ (ou para $\mathcal{V}$). Os elementos de $T(\mathcal{V})$ são chamados de *conseqüências* (ou *seguem*) dos polinômios da base. Para uma álgebra A denotamos por $T(A)$, o T-ideal das identidades polinomiais satisfeitas por A.

(3) Dizemos que dois conjuntos de identidades polinomiais são *equivalentes* se geram o mesmo T-ideal.

Observação 1.19 É imediato que $T(\mathcal{V})$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso, para qualquer variedade $\mathcal{V}$, seu T-ideal é invariante sob todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Com efeito, seja $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in T(\mathcal{V})$ e $\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um endomorfismo. Então $\varphi(x_{i_j}) = g_{i_j} \in K\langle X\rangle$. Podemos assumir que $g_{i_j} = g_{i_j}(x_1, \ldots, x_r)$ para r suficientemente grande. Sejam $A \in \mathcal{V}$ e $a_1, \ldots, a_r \in A$. Chame $a_{i_j} = g_{i_j}(a_1, \ldots, a_r)$ e note que:

$$0 = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = f(g_{i_1}(a_1, \ldots, a_r), \ldots, g_{i_n}(a_1, \ldots, a_r)) = \varphi(f)(a_1, \ldots, a_r).$$

Logo, temos que $\varphi(f) \in T(\mathcal{V})$.

Vale destacar que, do argumento acima, temos que:

$$T(\mathcal{V}) \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle,\ x_1, \ldots, x_m \in X$$

também é invariante sob os endomorfismos de $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$.

Definição 1.20 Para um conjunto fixo Y, a álgebra $F_Y(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$ é chamada uma *álgebra relativamente livre* de $\mathcal{V}$, se $F_Y(\mathcal{V})$ é livre na classe $\mathcal{V}$ (e é livremente gerada por Y). A cardinalidade de Y é chamada de *posto de* $F_Y(\mathcal{V})$.

A seguinte proposição caracteriza as álgebras relativamente livres em qualquer variedade.

Proposição 1.21 *Sejam $\mathcal{V}$ a variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto arbitrário e J um ideal de $K\langle Y \rangle$ gerado por:*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_j \in K\langle Y \rangle,\ i \in I\}.$$

Então a álgebra $F = K\langle Y \rangle / J$ é a álgebra relativamente livre, com $\overline{Y} = \{y + J \mid y \in Y\}$ sendo seu conjunto de geradores. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres de mesmo posto são isomorfas.

Demonstração: Veja [11], Proposition 2.2.5, p. 23. ∎

Observação 1.22 Se $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ são variedades tais que $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$, então temos que $T(\mathcal{V}_1) \supseteq T(\mathcal{V}_2)$ e, desta forma, podemos considerar as identidades polinomiais de $\mathcal{V}_1$ módulo $T(\mathcal{V}_2)$. Portanto, se conhecermos as identidades polinomiais de $\mathcal{V}_2$ e queremos estudar as identidades polinomiais de $\mathcal{V}_1$, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre $F(\mathcal{V}_2)$ ao invés de $K\langle X \rangle$.

Uma questão natural é nos perguntarmos: Quais seriam as propriedades que uma classe de álgebras deve satisfazer para ser uma variedade? A resposta é dada pelo Teorema de Birkhoff.

Teorema 1.23 (Birkhoff) *Uma classe de álgebras $\mathcal{V} \neq \varnothing$ é uma variedade se, e somente se, é fechada com relação ao produto direto infinito, formação de subálgebras e álgebras quocientes.*

Demonstração: Veja [11], Theorem 2.3.2, pp. 24–25. ∎

Definição 1.24 Para uma classe de álgebras $\mathcal{V}$, denotamos por $var\mathcal{V}$ a variedade de álgebras definida pelas identidades de $T(\mathcal{V})$ e chamamos esta variedade de *variedade gerada por* $\mathcal{V}$. Quando $\mathcal{V} = \{A\}$, denotamos simplesmente por $T(A)$ seu ideal de identidades e chamamos $varA$ a *variedade gerada por* A.

Um dos principais problemas da Teoria de Identidades Polinomiais consiste em encontrar uma base para as identidades polinomiais de uma álgebra. Em 1950, Specht propôs no artigo [23] o seguinte problema para álgebras associativas sobre corpos com característica zero: "Toda álgebra possui uma base finita para suas identidades polinomiais?". Esta pergunta foi uma das principais questões da PI-teoria e ficou conhecida como o Problema de Specht. Após 37 anos, finalmente foi respondida de forma afirmativa por Kemer (veja [15]) que, para tanto, desenvolveu uma densa teoria sobre a estrutura dos T-ideais. Alguns dos resultados oriundos desta teoria serão vistos (sem demonstração) na Seção 1.5 para conhecermos um pouco mais sobre esta teoria e ilustrarmos a importância do estudo de identidades polinomiais graduadas.

1.4 Identidades polinomiais homogêneas, multilineares e próprias

Neste momento, veremos que sob certas condições podemos simplificar as identidades que estamos trabalhando. À primeira vista, estes resultados parecem apenas simplificações técnicas, mas sua importância vai muito além disso, como veremos no decorrer do texto.

Definição 1.25 Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ é *multilinear de grau* m, se f é multi-homogêneo de grau $(1, \ldots, 1)$ em $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \subseteq K\langle X\rangle$. Denotamos por $P\langle X\rangle$ o conjunto de todos os polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$.

Proposição 1.26 *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X\rangle,$$

onde f_i *é uma componente homogênea de* f *com grau* i *em* x_1.

(1) Se o corpo K *tem mais que* n *elementos, então as identidades polinômiais* $f_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *seguem de* $f = 0$.

(2) Se K tem característica zero, então $f = 0$ é equivalente a um sistema de identidades polinomiais multilineares.

Demonstração: Veja [11], Proposition 4.2.3, pp. 39–40. ∎

Definição 1.27

(1) O *comutador de comprimento* n, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ é definido indutivamente por:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n],\ n \geqslant 3.$$

(2) Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado *polinômio próprio* se é combinação linear de produtos de comutadores, isto é:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{(i,\ldots,j)}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}],\ \alpha_{(i,\ldots,j)} \in K.$$

Para uma definição mais abrangente, assumiremos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores. Denotaremos por $B\langle X\rangle$ o conjunto de todos os polinômios próprios em $K\langle X\rangle$.

O importante resultado abaixo é a versão moderna do que fora observado por Specht, no artigo clássico [23]. Na Seção 2.1, apresentaremos uma variação deste resultado feita por Koshlukov e Azevedo no artigo [16], que será de grande valia para nosso estudo.

Proposição 1.28 *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo infinito K. Então as identidades polinomiais de A seguem das identidades próprias, isto é, o conjunto $T(A) \cap B\langle X\rangle$ gera o T-ideal $T(A)$. Se a característica de K é zero, podemos restringir ainda mais, isto é, o conjunto $(T(A) \cap B\langle X\rangle) \cap P\langle X\rangle$ gera o T-ideal $T(A)$.*

Demonstração: Veja [11], Proposition 4.3.3 (ii), pp. 42–43. ∎

1.5 Identidades graduadas

No estudo das identidades polinomiais, em alguns momentos é interessante considerarmos outros tipos de identidades. Desta idéia surgiram, por exemplo, as identidades polinomiais graduadas, identidades fracas, identidades com involução e identidades com traço. Estas técnicas, além de seu valor intrínseco, nos fornecem informações sobre as identidades polinomiais comuns (ou ordinárias). Para nossos propósitos, usaremos apenas as identidades polinomiais graduadas. Nesta seção, além de apresentaremos está técnica, que desempenha um papel fundamental em nosso trabalho, faremos um breve resumo da importante teoria de estrutura dos T-ideais desenvolvida por Kemer.

Até o final desta seção $(G,+)$ denota um grupo abeliano aditivo.

Definição 1.29 Uma álgebra A é dita *G-graduada* (ou simplesmente graduada), se:

$$A = \oplus_{g\in G} A_g,$$

onde A_g é subespaço de A, para todo $g \in G$ e $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$, para todo $g, h \in G$.

Um elemento $a \in \cup_{g\in G} A_g$ é chamado *homogêneo*. Para todo elemento homogêneo a, temos que $a \in A_g$, para algum $g \in G$. Dessa forma, o *grau homogêneo* de a é igual a g, e denota-se $\omega_G(a) = g$. Se $a = \sum_{a_g \in A_g} a_g$, chamamos a_g de *componente homogênea de grau g de a.*

Definição 1.30 Um subespaço B de uma álgebra G-graduada A é dito *G-graduado* se $B = \sum_{g\in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$.

Definição 1.31 Uma aplicação $\varphi : A \to B$ entre álgebras G-graduadas é chamada *homomorfismo G-graduado* se φ é um homomorfismo que satisfaz $\varphi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$. De modo análogo, define-se *isomorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduados.*

Os próximos dois lemas são de demonstração imediata.

Lema 1.32 *Se A é uma álgebra G-graduada e B é uma subálgebra de A, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) B é subálgebra G-graduada de A;

(2) B é uma álgebra G-graduada tal que $B_g \subseteq A_g$, para todo $g \in G$;

(3) As componentes homogêneas de cada elemento de B pertencem a B.

Lema 1.33 *Se I é um ideal G-graduado da álgebra (G-graduada) A, então A/I é G-graduada de maneira natural, considerando-se $(A/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$.*

Observação 1.34 Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo G-graduado, então temos que $ker\,\varphi$ é um ideal G-graduado e $\varphi(A)$ é uma subálgebra G-graduada de B tal que $(\varphi(A))_g = \varphi(A_g)$. Em outras palavras, conforme o lema acima, vale a "versão graduada" do Teorema do Isomorfismo, isto é, a álgebra quociente $A/ker\,\varphi$ é isomorfa (como álgebra graduada) a $\varphi(A)$.

A seguir daremos alguns exemplos de álgebras graduadas. Desde que uma mesma álgebra pode ter diferentes graduações, estes exemplos serão utilizados para fixarmos as graduações que usaremos no decorrer do texto, também chamadas de *graduações canônicas*.

Exemplo 1.35 A álgebra de Grassmann E é $\mathbb{Z}_2$-graduada. Com efeito, seja E_1 o subespaço de E gerado por $D_1 = \{e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r,\, r = 1, 3, 5, \ldots\}$. Recordemos do Exemplo 1.6 que E_0 é o subespaço gerado por $D_0 = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r,\, r = 2, 4, 6, \ldots\}$. De acordo com o Exemplo 1.3, temos que $E = E_0 \oplus E_1$ e verifica-se diretamente que $E_i E_j \subseteq E_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Disto segue que E é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 1.36 A partir da graduação dada no exemplo acima, daremos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann $E \otimes E$. Para tanto, basta tomarmos $(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$ e $(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$. Usando o fato de que o produto tensorial é distributivo com relação à soma direta, é imediato que $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$. Além disso, verifica-se diretamente que $(E \otimes E)_i\,(E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{(i+j)}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$, e isto nos diz que $E \otimes E$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 1.37 A álgebra $M_{1,1}(E)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada. Com efeito:

$$M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1,$$

onde

$$(M_{1,1}(E))_0 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0\},$$

$$(M_{1,1}(E))_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1\}$$

e verifica-se diretamente que $(M_{1,1}(E))_i\,(M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 1.38 A álgebra $M_n(K)$ é $\mathbb{Z}_n$-graduada. Com efeito, denote por $\bar{t}$ o resíduo módulo n de $t \in \mathbb{N}$ e e_{ij} as matrizes unidade, isto é, a matriz que tem 1 na posição (i, j) e 0 nas demais posições. Seja $M_n(K)_\alpha$, o subespaço de $M_n(K)$ gerado por todas as matrizes unidade e_{ij} tais que $\overline{j-i} = \alpha$. Assim, $M_n(K)_0$ consiste das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \in K,$$

e, para $0 < t \leqslant n-1$, $M_n(K)_{\bar{t}}$ consiste das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,1+t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{1,t+1}, a_{2,t+2}, \ldots, a_{n-t,n}, a_{n-t+1,1}, \ldots, a_{n,t} \in K$. Como $e_{ij}\,e_{js} = e_{is}$ e $e_{ij}\,e_{rs} = 0$ se $j \neq r$, segue que $M_n(K)_{\overline{p}}\,M_n(K)_{\overline{q}} \subseteq M_n(K)_{\overline{p+q}}$, para $p,\ q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, definindo assim uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para a álgebra $M_n(K)$.

Exemplo 1.39 A partir da graduação dada no exemplo acima para $M_n(K)$, e da $\mathbb{Z}_2$-graduação de E, daremos uma $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação para a álgebra $M_n(E)$. Com efeito, seja $g = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$. Considere $M_n(E)_g = \{(a_{ij}) \in M_n(E) \mid a_{ij} \in E_\beta$ se $\overline{j-i} = \alpha$ e 0 caso contrário$\}$. É imediato que $M_n(E) = \oplus_{g \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} M_n(E)_g$. Agora, observemos que, para $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ e $\beta \in \mathbb{Z}_2$, $M_n(E)_{(\alpha,\beta)}$ é formado por matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,\alpha+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,\alpha+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-\alpha,n} \\ a_{n-\alpha+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,\alpha} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{1,\alpha+1}$, $a_{2,\alpha+2}$, $\ldots$, $a_{n-\alpha,n}$, $a_{n-\alpha+1,1}$, $\ldots$, $a_{n,\alpha} \in E_\beta$. Seguindo o argumento dado no exemplo acima e levando em consideração a $\mathbb{Z}_2$-graduação de E temos que:

$$M_n(E)_{(\alpha,\beta)}\, M_n(E)_{(\gamma,\delta)} \subseteq M_n(E)_{(\alpha+\gamma,\beta+\delta)},$$

para α, $\gamma \in \mathbb{Z}_n$ e β, $\delta \in \mathbb{Z}_2$. Portanto, temos que $M_n(E)$ é $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduada. Observemos que a graduação descrita acima é induzida pelas graduações de $M_n(K)$ e E, pois verifica-se diretamente que $M_n(E) \cong M_n(K) \otimes E$.

Sejam a, $b \in \mathbb{N}$ tais que $a+b=n$, a álgebra $M_{a,b}(E)$ herda, de modo natural a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação de $M_n(E)$. Observemos que, dependendo de $g = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ podemos ter $M_{a,b}(E)_g = 0$.

Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos disjuntos e enumeráveis. Tome $X = \cup_{g\in G} X_g$, a álgebra $K\langle X\rangle$ é chamada de *álgebra livre G-graduada*. Para uma variável $x \in X$, definimos $\omega_G(x) = g$ se $x \in X_g$. Recordemos que o conjunto de monômios $\{1, x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} \mid x_{i_j} \in X, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ é uma base de $K\langle X\rangle$. Para um tal monômio, digamos $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, definimos $\omega_G(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n} \omega_G(x_{i_j})$ como sendo o *grau homogêneo do monômio*, e desta forma podemos estender esta definição para todos os elementos de $K\langle X\rangle$. Se $g \in G$, denotamos por $K\langle X\rangle_g$ o subespaço gerado pelos monômios com grau homogêneo g. Observemos que $K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{(g+h)}$, para todo g, $h \in G$, e disto temos que $K\langle X\rangle$ é de fato G-graduada.

Definição 1.40 Um ideal I da álgebra G-graduada A é chamado de *T_G-ideal* se I é invariante por todos os endomorfismos G-graduados de A. Isto é, $\varphi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo G-graduado φ de A.

Definição 1.41 Um polinômio $0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, ou a expressão $f = 0$, é chamado de *identidade polinomial G-graduada* de uma álgebra (G-graduada) A se:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

para todo $a_i \in A_{g_i}$, onde $g_i = \omega_G(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. O conjunto $T_G(A)$ de todas as identidades G-graduadas de A é um T_G-ideal, chamado de *T-ideal das identidades G-graduadas* da álgebra A.

De forma análoga ao caso ordinário, as álgebras com identidades polinomiais graduadas possuem as mesmas propriedades no que diz respeito a T-ideais, variedades, polinômios lineares, polinômios homogêneos, etc. Assim, por exemplo dizemos que $h \in K\langle X\rangle$ é T_G conseqüencia de f (ou h segue de f como identidade graduada) se h pertence ao T_G-ideal gerado por f em $K\langle X\rangle$, bem como dado um conjunto de polinômios $\{f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{n_i}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$, a classe $\mathcal{V}$ de todas as álgebras G-graduadas satisfazendo as identidades $f_i = 0$, para todo i, é chamada uma variedade de álgebras G-graduadas determinada pelo sistema de identidades $\{f_i \mid i \in I\}$, e desse modo adaptamos as propriedades de identidades ordinárias para as identidades graduadas.

Os seguintes resultados, de demonstração imediata, mostram a relação entre identidades graduadas e ordinárias.

Lema 1.42 Sejam A e B duas álgebras G-graduadas, com seus respectivos T-ideais de identidades G-graduadas $T_G(A)$ e $T_G(B)$. Se $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ então $T(A) \subseteq T(B)$.

Corolário 1.43 Se $T_G(A) = T_G(B)$ então $T(A) = T(B)$.

Agora, faremos um breve resumo da teoria sobre a estrutura dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras sobre corpos de característica zero. Portanto, até o final desta seção K denotará um corpo com característica zero.

Definição 1.44

(1) Um T-ideal S é chamado *T-semiprimo* se, para qualquer T-ideal J tal que $J^n \subseteq S$, para algum n, temos $J \subseteq S$.

(2) Um T-ideal I é chamado de *T-primo* se, para quaisquer T-ideais J_1, J_2 tais que $J_1 J_2 \subseteq I$, temos $J_1 \subseteq I$ ou $J_2 \subseteq I$.

Se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, então $E(A) = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$ é chamado de *envelope de Grassmann de A*.

Os próximos resultados encontram-se nas Seções 2 e 3 do Capítulo 1 de [15] e recomendamos este livro para mais detalhes sobre esta teoria.

Teorema (Kemer [15])

(1) Todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada;

(2) O T-ideal de qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada coincide com o T-ideal de alguma álgebra também $\mathbb{Z}_2$-graduada e de dimensão finita.

De (1) e (2) acima, segue que todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e de dimensão finita. Também fica claro que esta teoria depende fortemente das propriedades das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas, motivando seu estudo independente.

O seguinte teorema é constituído dos resultados que possibilitaram a classificação dos T-ideais T-primos para corpos com característica zero.

Teorema (Kemer [15])

(1) Seja $\mathcal{V} \neq \varnothing$ uma variedade. Então $\mathcal{V} = \mathcal{N}_m \mathcal{W}$, onde $\mathcal{N}_m$ é a variedade de todas as álgebras nilpotentes de índice $\leqslant m$, $\mathcal{W}$ é a maior subvariedade semiprima de $\mathcal{V}$, e o produto de duas variedades $\mathcal{N}\mathcal{M}$ consiste das álgebras A tendo um ideal I contido em $\mathcal{N}$ e cujo quociente A/I está em $\mathcal{M}$.

(2) O T-ideal I é semiprimo se, e somente se, $I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_q$, onde os T-ideais I_j são T-primos.

(3) Os únicos T-ideais T-primos não triviais são $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$.

Dentre as conseqüências mais importantes dos resultados acima, está a resposta afirmativa ao Problema de Specht.

Como visto anteriormente, a hipótese sobre a característica do corpo ser zero permite trabalharmos apenas com identidades multilineares e assim, podemos nos utilizar das boas propriedades da multilinearidade. Na teoria de Kemer, estas propriedades foram muito utilizadas. Uma questão interessante, que será respondida no final do Capítulo 3, é: "O quanto esta teoria depende das identidades multilineares?". Observemos que esta questão está intimamente relacionada com uma possível generalização dos resultados obtidos por Kemer para álgebras sobre corpos infinitos de qualquer característica, e é nesta direção que foi realizado nosso trabalho. Convém notar que, em característica positiva, a teoria de Kemer não se aplica diretamente. Um dos obstáculos é o surgimento de novos T-ideais T-primos, chamados de T-ideais irregulares, cuja descrição completa é ainda um problema em aberto. No entanto, vimos que as identidades graduadas podem ser usadas no estudo das identidades polinomiais ordinárias em álgebras sobre corpos de qualquer característica. Nos demais capítulos, veremos que esta ferramenta será muito útil em nosso trabalho.

Ressaltamos que recentemente foi demonstrado por Belov [5], Grishin [12] e Shchigolev [22] que o problema de Specht resolve-se em negativo sobre corpos de característica positiva.

Capítulo 2

Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas em álgebras T-primas

Neste capítulo, estudaremos as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras T-primas $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$. Como foi dito anteriormente, as identidades graduadas, além da sua importância intrínseca, são uma ferramenta valiosa devido a sua relação com as identidades ordinárias. Outra ferramenta crucial neste momento é uma variação das álgebras genéricas, pois permitiu construirmos modelos adequados para as álgebras relativamente livres. Os resultados aqui apresentados encontram-se no artigo [16]. Eles representam uma generalização, para corpos infinitos de qualquer característica distinta de dois, de alguns dos resultados de Di Vincenzo em [7]. Também é usado o conceito de álgebra supercomutativa livre.

2.1 Álgebras livres $\mathbb{Z}_2$-graduadas e supercomutativas

Recordemos que K denota um corpo infinito de qualquer característica distinta de dois. Como vimos no final do capítulo anterior, as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas ocupam uma posição de destaque na PI-teoria. Desde que $\mathbb{Z}_2$ tem apenas dois elementos, utilizaremos uma notação simplificada para as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, digamos $A = A_0 \oplus A_1$, será chamada simplesmente de *álgebra 2-graduada.* O subespaço A_0 é chamado *subespaço par* e seus elementos são ditos *pares.* De forma análoga, A_1 é chamado *subespaço ímpar* e seus elementos são ditos *ímpares.*

Sejam $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ conjuntos de variáveis, onde $Y \cap Z = \varnothing$.

Tomando $X = Y \cup Z$, denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra livre gerada por X. Freqüentemente, chamaremos os elementos de Y *pares*, e os do conjunto Z *ímpares*. Em outras palavras, definimos $\omega = \omega_{\mathbb{Z}_2} : X \to \mathbb{Z}_2$ por $\omega(x) = 0$ se $x \in Y$, e $\omega(x) = 1$ se $x \in Z$. Desse modo, os elementos de Y também são chamados 0-*variáveis*, e os de Z de 1-*variáveis*. A partir da função grau ω, dado um monômio f, podemos classificá-lo como par ($\omega(f) = 0$) ou ímpar ($\omega(f) = 1$). Assim, $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$ é uma álgebra 2-graduada, onde $K\langle X\rangle_0$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios pares e $K\langle X\rangle_1$ é o subespaço gerado pelos monômios ímpares. A álgebra $K\langle X\rangle$ é chamada *álgebra livre* 2-*graduada* e seus elementos *polinômios*. Um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $K\langle X\rangle$ será simplesmente chamado de T_2-*ideal*.

Como dito na Seção 1.4, a seguir daremos a "versão 2-graduada" de alguns resultados muito úteis neste capítulo.

Lema 2.1 *Se* $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in K\langle X\rangle$ *é um polinômio homogêneo, então este polinômio é equivalente como identidade graduada a um sistema de identidades graduadas cujas variáveis pares* $y_1, \ldots, y_n$ *aparecem apenas em comutadores.*

Demonstração: A demonstração é similar à encontrada em [11], Proposition 4.3.3. A única mudança é que só podemos substituir $x_i + 1$ por x_i quando $x_i \in Y$, pois o elemento 1 de $K\langle X\rangle$ pertence a $K\langle X\rangle_0$. ∎

Denotamos por $B_2 = B_2\langle X\rangle$ o conjunto dos polinômios $f \in K\langle X\rangle$ tal que cada variável y_i aparece apenas em comutadores no sistema equivalente dado pelo lema acima. Os elementos de B_2 são chamados 0-*próprios*.

Corolário 2.2 *Seja* I *um* T_2*-ideal em* $K\langle X\rangle$*. Então* I *é gerado como* T_2*-ideal pelo conjunto* $I \cap B_2$*.*

Demonstração: Imediata. ∎

Definição 2.3 Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra 2-graduada. Os elementos de $A_0 \cup A_1$ são chamados *homogêneos*. Além disso, cada elemento homogêneo a possui um grau ω em $\mathbb{Z}_2$, isto é, $\omega(a) = 0$ ou 1. A álgebra A é dita ser *supercomutativa* se

$$ab = (-1)^{\omega(a)\omega(b)}ba$$

para todos os elementos homogêneos a, b.

Exemplo 2.4 A álgebra de Grassmann E é, sem dúvida, o exemplo mais importante de álgebra supercomutativa.

Seja $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$ a álgebra livre 2-graduada. Para os monômios f, $g \in K\langle X\rangle$, considere as relações $fg = (-1)^{\omega(f)\omega(g)}gf$ e seja I o ideal 2-graduado gerado por estas relações. A álgebra $K\langle Y;Z\rangle = K\langle X\rangle/I$ é naturalmente 2-graduada (pois herda a graduação de $K\langle X\rangle$) e é chamada *álgebra livre supercomutativa.*

Lema 2.5 *Sejam $K[Y]$ a álgebra de polinômios comutativos gerada por Y e $E(Z)$ a álgebra de Grassmann gerada pelo espaço vetorial com base Z. Então as álgebras $K\langle Y;Z\rangle$ e $K[Y] \otimes E(Z)$ são isomorfas.*

Demonstração: Seja $\varphi : K[Y] \otimes E(Z) \to K\langle X\rangle/I = K\langle Y;Z\rangle$ a aplicação definida por $\varphi(a \otimes b) = ab + I$. É imediato que esta aplicação é um homomorfismo (de álgebras) sobrejetor. Sejam $a = y_1 \cdots y_n \in K[Y]$ e $b = z_1 \cdots z_m \in E(Z)$, ambos monômios não-nulos. Fazendo as substituições $y_1 = \cdots = y_n = 1$, $z_1 = e_1, \ldots, z_m = e_m$, onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é um subconjunto de D, a base da álgebra de Grassmann E (veja o Exemplo 1.3), temos que $a\,b \notin T_2(E)$. Por outro lado, como $K\langle X\rangle/I$ é a álgebra livre supercomutativa, temos que $I = \cap \{ Q \mid Q$ é T_2-ideal de alguma álgebra supercomutativa$\}$. Em particular $I \subseteq T_2(E)$ e disto segue a injetividade de φ, como queríamos. ∎

2.2 As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$

Recordemos do Exemplo 1.37 a 2-graduação canônica de $M_{1,1}(E)$:

$$M_{1,1}(E) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{(M_{1,1}(E))_0} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{(M_{1,1}(E))_1},$$

onde $a, d \in E_0$, $c, b \in E_1$.

Para descrevermos as identidades 2-graduadas desejadas, vamos construir um modelo para a álgebra relativamente livre na variedade de álgebras 2-graduadas determinada por

$M_{1,1}(E)$. Para tanto, começaremos considerando os conjuntos $Y = \{y_i^{(j)} \mid i \geqslant 1,\ j = 1,2\}$ e $Z = \{z_i^{(j)} \mid i \geqslant 1,\ j = 1,2\}$ como os conjuntos geradores da álgebra livre supercomutativa. Sejam

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & 0 \\ 0 & y_i^{(2)} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad i \geqslant 1,$$

elementos de $M_2(K\langle Y; Z\rangle)$. Denote por $Gen(M_{1,1}(E))$ a subálgebra gerada pelas matrizes A_i, B_i definidas acima. Esta subálgebra possui uma 2-graduação natural cuja parte par é formada pelas matrizes da forma $f_{11}e_{11} + f_{22}e_{22}$ e a ímpar por $f_{12}e_{12} + f_{21}e_{21}$, onde $f_{ij} \in K\langle Y; Z\rangle$ e e_{ij} denotam as matrizes unidade.

Observemos que, de acordo com as regras de multiplicação de matrizes, temos $f_{11}, f_{22} \in K\langle Y; Z\rangle_0$ e $f_{12}, f_{21} \in K\langle Y; Z\rangle_1$.

Segundo [6] (Theorem 2), a álgebra gerada pelas matrizes $C_i = A_i + B_i$ $(i \geqslant 1)$ é canonicamente isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável em $var(M_{1,1}(E))$. Com um argumento similar ao usado no artigo citado acima, temos o seguinte resultado:

Lema 2.6 *A álgebra 2-graduada $Gen(M_{1,1}(E))$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável $F_2(M_{1,1}(E)) = K\langle Y; Z\rangle / T_2(M_{1,1}(E))$ na variedade de álgebras 2-graduadas determinadas por $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração: Considere a aplicação $\varphi : K\langle Y; Z\rangle \to F_2(M_{1,1}(E))$ definida por $\varphi(f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)) = f(A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n)$. Esta aplicação é claramente um homomorfismo 2-graduado sobrejetor (veja Definição 1.31). Além disso, verifica-se diretamente que $ker\, \varphi = T_2(M_{1,1}(E))$ e o resultado segue como queríamos. ∎

A próxima proposição nos permite encontrar uma base finita para as identidades 2-graduadas satisfeitas por $M_{1,1}(E)$. Este fato foi inicialmente demonstrado por Di Vincenzo para corpos com característica zero (veja [7]). Mais tarde, em [16], este resultado foi demonstrado para o nosso presente caso, isto é, corpos infinitos com qualquer característica diferente de dois.

Proposição 2.7 *Seja I o T_2-ideal das identidades 2-graduadas para $M_{1,1}(E)$. Então:*

(1) Os polinômios $[y_1, y_2]$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in K\langle X\rangle$ pertencem a I;

(2) Considere a projeção canônica $K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/J$, onde J é o ideal das identidades 2-graduadas geradas por $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$. Identifique as variáveis y_i e z_i com suas imagens sob esta projeção.

Então os monômios:

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}\widehat{z}_{d_m},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}\widehat{z}_{d_m}$$

geram $K\langle X\rangle/J$. Aqui, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_l$, $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ e $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Para os monômios na segunda linha do conjunto de geradores temos $k + l \geqslant 1$, e para os da última linha, se $k = l = 0$ seu grau é maior que 2. Além disso, o símbolo $\widehat{\ }$ sobre a variável indica que esta pode ser omitida.

(3) Os monômios de (2) são linearmente independentes módulo as identidades 2-graduadas da álgebra $M_{1,1}(E)$.

Demonstração: A parte *(1)* é um cálculo direto usando o fato de que $E_0 = C(E)$ (ou seja, $[y_1, y_2]$ é uma identidade 2-graduada para $M_{1,1}(E)$) e que $a_1a_2a_3 = a_3a_2a_1$ para todo $a_i \in E_1$, $i = 1, 2, 3$.

Demonstremos agora a parte *(2)*. Pelo item anterior, temos que todo monômio de $K\langle X\rangle/T_2(M_{1,1}(E))$ é uma combinação linear de monômios da forma:

$$h_1(y)\widehat{z}_{r_1}h_2(y)z_{r_2}z_{r_3}\cdots z_{r_s},$$

onde $h_1(y)$, $h_2(y)$ são monômios nas variáveis y_i. Pela identidade $[y_1, y_2]$, podemos supor que os índices das variáveis em $h_1(y)$ e $h_2(y)$ estão em ordem não-decrescente (repetições são permitidas). Agora, usando a identidade $z_1z_2z_3 = z_3z_2z_1$, podemos colocar as variáveis z_i na ordem desejada (observe que se $r_1 > r_3$ em algum monômio, usamos o fato de que $z_{r_1}(h_2(y)z_{r_2})z_{r_3} = z_{r_3}(h_2(y)z_{r_2})z_{r_1}$ módulo $T_2(M_{1,1}(E))$).

Finalmente, para mostrarmos *(3)* basta fazê-lo para monômios multi-homogêneos com o mesmo multigrau (veja Proposição 1.26). Para facilitar nossos cálculos, faremos as contas em $Gen(M_{1,1}(E))$. Chamaremos os monômios da primeira linha do conjunto de geradores apresentados em *(2)* de monômios do primeiro tipo, e assim por diante. Substituindo y_i por A_i e z_i por B_i em um monômio do primeiro tipo, temos:

$$A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k} = \begin{pmatrix} y_{a_1}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} & 0 \\ 0 & y_{a_1}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, podemos retornar ao monômio original (em $K\langle Y\cup Z\rangle$) de modo único através da expressão acima. Assim, se um polinômio multi-homogêneo (formado por monômios com o mesmo multigrau que a expressão acima) for nulo em $Gen(M_{1,1}(E))$, obteremos uma combinação linear de matrizes igual a zero, e isto só é possível se todos os coeficientes forem iguais a zero. Deste fato segue a independência linear dos monômios do primeiro tipo.

Analogamente, observe que:

$$A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l} = \begin{pmatrix} 0 & y_{a_1}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}\cdots y_{b_l}^{(2)} \\ y_{a_1}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}\cdots y_{b_l}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como no caso anterior, podemos retornar ao monômio original de modo único. Com o mesmo argumento usado acima, segue a independência linear dos monômios do segundo tipo.

Para os monômios do terceiro e quarto tipo, a técnica é a mesma usada nos casos anteriores. Logo, faremos somente para os do quarto tipo. Neste caso, escolha um monômio desta forma que pertença a $K\langle Y\cup Z\rangle_0$. Em outras palavras, temos que existe um número par de variáveis z_i's neste monômio. Como feito nos casos anteriores, calculando o monômio

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m} \tag{1}$$

nas matrizes A_i, B_i, obtemos:

$$\begin{pmatrix} y_{a_1}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}\cdots y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)} & 0 \\ 0 & y_{a_1}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}\cdots y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Note que na expressão acima, novamente podemos retornar (de modo único) ao monômio (1). Com o mesmo argumento usado nos casos anteriores, mostra-se que os monômios com o mesmo multigrau de (1) são linearmente independentes.

O raciocínio acima funciona de modo semelhante se o monômio estiver em $K\langle Y\cup Z\rangle_1$. Destas considerações, o resultado segue como queríamos. ∎

Como foi dito no parágrafo anterior à Proposição 2.7, temos:

Teorema 2.8 *As identidades 2-graduadas da álgebra $M_{1,1}(E)$ seguem das identidades (2-graduadas) $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$.*

Demonstração: Este resultado é uma conseqüência imediata da Proposição 2.7. ∎

Observações 2.9

(1) Seja $f \in K\langle Y \cup Z\rangle$ um polinômio multi-homogêneo que não é uma identidade de $M_{1,1}(E)$. Se a variável z_i ocorre nos monômios de f, então o grau de f com respeito a z_i, denotado por $\deg_{z_i} f$, é menor ou igual a dois. Com efeito, se temos três variáveis z_i em algum monômio de f, pelo menos duas delas estarão em uma das seqüências c_i ou d_i como na Proposição 2.7. Logo, a identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ anula este monômio. Aplicando este raciocínio para os demais monômios de f, segue que $\deg_{z_i} f \leqslant 2$.

(2) Quando a característica de K é $p > 2$, o polinômio $[y^p, z]$ não é uma identidade graduada de $M_{1,1}(E)$. Com efeito, tome $y = e_{11} + 2\,e_{22}$ e $z = g\,e_{12} + g\,e_{21}$, onde $g \in E_1$ e e_{ij} são as matrizes unidade. Assim, $y^p = e_{11} + 2^p\,e_{22}$ e desde que $2^p = 2 \neq 1$ em K, segue que $[y^p, z] = g\,(1 - 2^p)\,e_{12} + g\,(2^p - 1)\,e_{21} \neq 0$.

Agora, a fim de explorarmos outras propriedades das indentidades graduadas de $M_{1,1}(E)$, construiremos um novo modelo para $Gen(M_{1,1}(E))$. Para tanto, sejam $a_i^{(0)}$, $b_i^{(0)}$ variáveis comutativas e $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ anticomutativas. Através destas variáveis, podemos formar um novo modelo de álgebra livre supercomutativa, a saber $K\langle a_i^{(j)}, b_i^{(j)}\rangle$, livremente gerada pelas variáveis $a_i^{(j)}$, $b_i^{(j)}$, onde $i \geqslant 1$ e $j = 1, 2$. Considere as matrizes:

$$\widetilde{A}_i = a_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_i = a_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chamemos de L a álgebra gerada por $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{B}_i$ e $\widetilde{1} = e_{11} + e_{22}$. Assumindo que os $\widetilde{A}_i$'s são elementos pares e os $\widetilde{B}_i$'s são ímpares, segue que L é uma álgebra 2-graduada.

Lema 2.10 *A álgebra L, definida acima, é isomorfa à álgebra $Gen(M_{1,1}(E))$.*

Demonstração: Seja $\varphi : Gen(M_{1,1}(E)) \to L$ o homomorfismo definido por $\varphi(A_i) = \widetilde{A}_i$, $\varphi(B_i) = \widetilde{B}_i$. É imediato que φ é um isomorfismo 2-graduado e o resultado segue, como queríamos. ∎

Note que as matrizes $a_i^{(0)}(e_{11} + e_{22})$ estão no centro de L. Denotemos por $B_2(L)$ a subálgebra de L gerada por $\widetilde{1}$ e pelos elementos de L tais que os $\widetilde{A}_i$'s aparecem apenas em comutadores. Desde que os elementos $a_i^{(0)}(e_{11} + e_{22})$ são centrais, eles não aparecerão em nenhum polinômio não-nulo de $B_2(L)$.

Lema 2.11 *As matrizes $G_i = b_i^{(0)}(e_{11} - e_{22})$ e $H_i = \widetilde{B}_i = (a_i^{(1)}e_{12} + b_i^{(1)}e_{21})$ satisfazem as seguintes relações:*

$$G_i\,G_j \textit{ são centrais}, \quad G_i\,G_j = G_j\,G_i,$$

$$G_i\,H_j = -H_j\,G_i, \quad H_i^2\,H_j = -H_j\,H_i^2.$$

Demonstração: Imediata. ∎

Agora, seja $B_2(M_{1,1}(E))$ a subálgebra de $Gen(M_{1,1}(E))$ gerada por $\widetilde{1} = e_{11} + e_{22}$ e pelos polinômios onde cada variável par aparece apenas em comutadores. Ou seja, $B_2(M_{1,1}(E)) = B_2\langle X\rangle/(B_2\langle X\rangle \cap T_2(M_{1,1}(E)))$. Disto segue que $B_2(M_{1,1}(E))$ é canonicamente isomorfa a $B_2(L)$, o que permite identificarmos $B_2(M_{1,1}(E))$ e $B_2(L)$.

A vantagem de mudarmos o modelo de $Gen(M_{1,1}(E))$ é vista no resultado abaixo, que nos permite organizar os polinômios 0-próprios desta álgebra.

Proposição 2.12 *Se $f \in B_2(L)$ é um polinômio multi-homogêneo, então f é uma combinação linear de polinômios da forma:*

$$G_{i_1}^{\alpha_1} G_{i_2}^{\alpha_2} \cdots G_{i_k}^{\alpha_k} H_{j_1}^2 H_{j_2}^2 \cdots H_{j_l}^2 g(H_{n_1}, \ldots, H_{n_m}),$$

onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\} \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_m\} = \varnothing$ e g é um polinômio multilinear.

Demonstração: Seja $f \in B_2(L)$. Recordemos que $\widetilde{1} = e_{11}+e_{22}$ é central, e disto segue que, em f, não aparecerão matrizes do tipo $a_i^{(0)}(e_{11}+e_{22})$. Pelo Lema 2.11, podemos escrever

$$f = G_{i_1}^{\alpha_1} G_{i_2}^{\alpha_2} \cdots G_{i_k}^{\alpha_k} \widetilde{f}(H_1, H_2, \ldots, H_t),$$

onde $\widetilde{f}$ é um polinômio multi-homogêneo. Se $\deg_{H_i} \widetilde{f} > 2$ para algum H_i, $\widetilde{f}$ seria uma identidade 2-graduada de $M_{1,1}(E)$, conforme a Observação 2.9 (1). Logo, podemos supor que $deg_{H_i}\widetilde{f} \leqslant 2$, para todo i. Agora, escreva $\widetilde{f}$ como a soma de seus monômios, e ordenando estes monômios como foi feito na Proposição 2.7, podemos vê-los como sendo constituídos de duas seqüências ascendentes. Assim, se a variável H_i aparece duas vezes numa mesma seqüência deste monômio, temos que este deve ser nulo devido à identidade $z_1z_2z_1 = 0$ (conseqüência de $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 = 0$). Logo, se $\deg_{H_i} \widetilde{f} = 2$, devemos ter a variável H_i aparecendo uma vez em cada seqüência. Isto significa que, a menos de sinal, podemos escrever este monômio na forma $\ldots H_i^2 \ldots$, e usando as relações $H_i^2\, H_j = -H_j\, H_i^2$, $H_i^2\, H_j^2 = H_j^2\, H_i^2$, para todo i, j, deixamos o polinômio $\widetilde{f}$ na forma desejada, como queríamos demonstrar. ∎

2.3 As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $E \otimes E$

Nesta seção, estaremos trabalhando com o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann E. Recordemos que a 2-graduação canônica de $E \otimes E$ é dada por:

$$(\underbrace{E_0 \otimes E_0 \oplus E_1 \otimes E_1}_{(E\otimes E)_0}) \oplus (\underbrace{E_0 \otimes E_1 \oplus E_1 \otimes E_0}_{(E\otimes E)_1}).$$

Como foi feito na seção anterior, construiremos um modelo para a álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade de álgebras 2-graduadas determinadas por $E \otimes E$. Para tanto, consideremos $a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)}$ variáveis comutativas e $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}$ anticomutativas. Tome $Y = \{a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)} \mid i \geqslant 1\}$ e $Z = \{a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)} \mid i \geqslant 1\}$. Seja $K\langle Y; Z\rangle$ a álgebra livre supercomutativa gerada pelos conjuntos Y (variáveis pares) e Z (variáveis ímpares). Seja também F a subálgebra de $K\langle Y; Z\rangle \otimes K\langle Y; Z\rangle$ gerada pelos elementos da forma:

$$Y_i = a_i^{(0)} \otimes b_i^{(0)} + a_i^{(1)} \otimes b_i^{(1)},$$

$$Z_i = c_i^{(0)} \otimes d_i^{(1)} + c_i^{(1)} \otimes d_i^{(0)}.$$

Considerando as variáveis Y_i como pares e as Z_i como ímpares, temos que $F = F_0 \oplus F_1$ é uma álgebra 2-graduada.

Lema 2.13 *A álgebra F é isomorfa (como álgebra 2-graduada) à álgebra relativamente livre de posto enumerável $K\langle X\rangle/T_2(E\otimes E)$ na variedade de álgebras 2-graduadas determinadas por $E\otimes E$.*

Demonstração: Considere $\varphi : K\langle X\rangle/T_2(E\otimes E) \to F$ definida por $\varphi(y_i) = Y_i$ e $\varphi(z_i) = Z_i$. É imediato que φ é um homomorfismo 2-graduado sobrejetor, $ker\,\varphi = T_2(E\otimes E)$ e o resultado segue, como queríamos. ∎

Seguindo a abordagem feita na seção anterior, a seguir apresentaremos algumas propriedades da álgebra $E\otimes E$. Primeiramente, observemos que o centro de $E\otimes E$ é $E_0\otimes E_0$.

Lema 2.14 *Os polinômios $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ são identidades graduadas de $E\otimes E$. Se a característica de K for $p > 2$, então o polinômio $[y^p, z]$ também é uma identidade graduada de $E\otimes E$.*

Demonstração: Um cálculo direto mostra que $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ são identidades graduadas de $E\otimes E$.

Para o polinômio $[y^p, z]$, seja $a \in (E_0\otimes E_0)\oplus(E_1\otimes E_1)$. Então $a = \sum(e_i\otimes f_i + g_i\otimes h_i)$, onde $e_i, f_i \in E_0$, $g_i, h_i \in E_1$. Logo, $a^p = \sum e_i^p\otimes f_i^p + g_i^p\otimes h_i^p$, pois os coeficientes binomiais $\binom{p}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$ são divisíveis por p. Agora, observemos que $g_i^3 = h_i^3 = 0$ devido à identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$. Como $p > 2$, segue que $g_i^p = h_i^p = 0$ e daí

$$a^p = \sum e_i^p \otimes f_i^p.$$

Desde que este elemento é central em $E\otimes E$, temos que $[y^p, z]$ é uma identidade 2-graduada, como queríamos demonstrar. ∎

Observação 2.15 Note que, de acordo com a Observação 2.9 (1), a identidade graduada $[y^p, z]$ não é satisfeita por $M_{1,1}(E)$. Logo, esta não pode ser uma conseqüência das identidades $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$.

As relações abaixo foram verificadas inicialmente em [8] (Lemma 2.2) e sua demonstração é um cálculo direto.

Lema 2.16 *As seguintes relações são válidas em $E \otimes E$, para todo t, t_1, $t_2 \in E_1 \otimes E_1$, z, z_1, $z_2 \in (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$ e u, $v \in E \otimes E$:*

(1) $z_1 z z_1 = 0$, $z_1 u z_1 v z_1 = 0$, $z_1^2 z_2^2 = z_2^2 z_1^2$, $z_1^2 z_2 = -z_2 z_1^2$;

(2) $t_1 u t_2 - t_2 u t_1 = 0$, $zt = -tz$.

Até agora sabemos que $T_2(M_{1,1}(E)) \subseteq T_2(E \otimes E)$ (Teorema 2.8 e Lema 2.14). Portanto, a álgebra relativamente livre 2-graduada F é imagem homomórfica de $Gen(M_{1,1}(E))$ e também de L (veja Lema 2.10). Com estas observações temos o seguinte resultado.

Lema 2.17 *A álgebra $B_2(F) = B_2\langle X\rangle/(B_2\langle X\rangle \cap T_2(E \otimes E))$ é imagem homomórfica de $B_2(L) \cong B_2(Gen(M_{1,1}(E)))$.*

Demonstração: Sabemos que $T_2(M_{1,1}(E)) \subseteq T_2(E \otimes E)$ e portanto $B_2\langle X\rangle/(B_2\langle X\rangle \cap T_2(E \otimes E))$ é imagem homomórfica de $B_2\langle X\rangle/(B_2\langle X\rangle \cap T_2(M_{1,1}(E))$ pela aplicação induzida por $\pi : K\langle X\rangle/T_2(M_{1,1}(E)) \to K\langle X\rangle/T_2(E \otimes E)$, onde $\pi(f + T_2(M_{1,1}(E))) = f + T_2(E \otimes E)$, e o resultado segue como queríamos. ∎

Para uma melhor dinâmica do texto, optamos por não reproduzir aqui a parte combinatória do artigo de Koshlukov e Azevedo [16], que não só forneceu o resultado que estabelece a independência linear dos monômios multilineares $m(z_{s_1}, z_{s_2}, \ldots, z_{s_n})$ módulo $T_2(E \otimes E)$, como também permitiu uma descrição combinatória das álgebras Mésons, que desempenham uma função importante na teoria de representações de álgebras de Jordan e também aparecem de modo natural na teoria de álgebras de Clifford (veja [14] p. 115 e pp. 264–272 para mais informações). Aqui, enunciaremos apenas uma definição e um resultado que tem como corolário a independência linear citada acima. Para mais detalhes recomendamos o artigo [16].

Definição 2.18 ([16]) Seja $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, onde S_n é o grupo simétrico e considere a partição (A, B) de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Isto é, $A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $A \cap B = \varnothing$. Podemos considerar que estamos pintando o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ com as cores A e B. O par (i_α, i_β),

$1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n$ é dito uma *inversão colorida* (com respeito à partição (A, B)) se $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n$, $i_\alpha > i_\beta$ e α, β estão ambos em A ou em B. Ressaltamos que nossa definição não leva em consideração a ordem do par (A, B) que representa a partição $A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Isto é, para nós $(A, B) = (B, A)$.

Seja $q(\sigma, A, B)$ o número de inversões coloridas de $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ com respeito à partição (A, B) de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Definimos o *sinal colorido de σ com respeito a (A, B)* como sendo $(-1)^{q(\sigma,A,B)}$.

Proposição 2.19 ([16], Lemma 20) *Seja $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$ tal que $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$. Se $\sigma \neq (1, 2, \ldots, n)$, então o sinal colorido $q(\sigma, A, B)$ é 1 para 2^{n-2} partições (A, B) de $\{1, 2, \ldots n\}$ e -1 para as demais 2^{n-2} partições.*

Como Corolário do resultado acima, podemos caracterizar os monômios multilineares nas variáveis ímpares módulo $T_2(E \otimes E)$, como dito anteriormente.

Corolário 2.20 *Os polinômios multilineares*

$$m_{ij} = z_{i_1} z_{j_1} z_{i_2} z_{j_2} \cdots z_{i_n} \widehat{z}_{j_n},$$

onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-1} < j_n$ e z_{j_n} é omitido quando o grau de m_{ij} é ímpar, são linearmente independentes módulo $T_2(E \otimes E)$.

Demonstração: Suponha para uma contradição que estes monômios são linearmente dependentes, isto é, existem escalares α_{ij} e monômios m_{ij} tais que $\sum \alpha_{ij} m_{ij} = 0$. Então $\sum \alpha_{ij} m_{ij}$ é uma identidade graduada de $E \otimes E$. Devido à homogeneidade, podemos supor que todos os m_{ij} são monômios nas variáveis $z_1, z_2, \ldots, z_k$, para $k \in \mathbb{N}$ conveniente. Suponha que $z_1 z_2 \cdots z_{k-1} z_k$ participa desta combinação linear com o coeficiente não-nulo α. Escolha uma partição (A, B) de $\{1, 2, \ldots, k-1, k\}$. Seja $D = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r, r = 1, 2, 3, \ldots\}$ a base de E (veja Exemplo 1.3). Escolha uma partição (A, B) de $\{1, 2, \ldots, k-1, k\}$ e considere as substituições $z_i \mapsto e_i \otimes 1$ para todo $i \in A$ e $z_j \mapsto 1 \otimes e_j$ para todo $j \in B$, onde e_i, e_j pertencem a D. A avaliação desta substituição na combinação linear é zero, pois $\sum \alpha_{ij} m_{ij} = 0$ é uma identidade graduada. Somando-se as avaliações para todas as partições (A, B) e levando em consideração que os elementos de $E_1 \otimes E_0$ anticomutam, bem como os de $E_0 \otimes E_1$, e os elementos de $E_1 \otimes E_0$ comutam com os de $E_0 \otimes E_1$, podemos aplicar a Proposição 2.19 e obter que $2^r \alpha = 0$, para algum inteiro positivo r. Mas isto é claramente uma contradição com a hipótese da característica de K ser diferente de 2. Esta contradição implica no resultado desejado. ∎

Lema 2.21 *Sejam $g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ polinômios multilineares linearmente independentes módulo $T_2(M_{1,1}(E))$. Então os polinômios:*

$$y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 z_{n+2}^2 \cdots z_{n+r}^2 g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

são linearmente independentes módulo $T_2(M_{1,1}(E))$.

Demonstração: Fazendo $y_1 = G_1 + \cdots + G_{i_1}, \ldots,\ y_k = G_{t+1} + \cdots + G_{t+i_k}$ para $t = i_1 + \cdots + i_{k-1}$, $z_{n+1} = H_{n+1} + H_{n+2}, \ldots, z_{n+r} = H_{n+2r-1} + H_{n+2r}$, obtemos um fator não-nulo e o resultado segue da independência linear dos polinômios g_i, como queríamos. ∎

Combinando os resultados acima, temos:

Corolário 2.22 *Seja $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in B_2(M_{1,1}(E)) \cong B_2(L)$ um polinômio, onde substituímos $\widetilde{A}_i$ por y_i e $\widetilde{B}_i$ por z_i nos geradores de L (veja a definição de L na Seção 2.2). Então, módulo $T_2(E \otimes E)$, f é igual a um polinômio da forma:*

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} z_{i_1}^2 z_{i_2}^2 \cdots z_{i_k}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_l}),$$

onde $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \varnothing$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e os g_j's são polinômios multilineares. Se a característica de K é igual a $p > 2$, temos $\alpha_i < p$, para cada $i = 1, \ldots, m$.

Além disso, se os polinômios multilineares g_j forem linearmente independentes módulo $T_2(E \otimes E)$, então os polinômios acima também o são.

Demonstração: A demonstração é a mesma que para $B_2(M_{1,1}(E))$ feita na Proposição 2.12. Para a afirmação adicional sobre os expoentes α_i, basta observarmos (como visto na demonstração do Lema 2.14) que se $a \in E_1 \otimes E_1$, então $a^p = 0$. Além disso, a independência linear dos polinômios g_j módulo $T_2(E \otimes E)$ segue do Lema 2.21. ∎

Teorema 2.23 *O ideal das identidades* 2*-graduadas da álgebra* $E \otimes E$*,* $T_2(E \otimes E)$ *é gerado pelos polinômios* $[y_1, y_2]$ *e* $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$*, e se a característica de* K *é* $p > 2$*, acrescentamos o polinômio* $[y^p, z]$*.*

Demonstração: Já sabemos que os polinômios acima são identidades 2-graduadas de $E \otimes E$. Desde que os dois primeiros constituem uma base para as identidades de $M_{1,1}(E)$, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre gerada pelos mesmos, isto é, $Gen(M_{1,1}(E))$. Do Corolário 2.2, basta considerarmos os polinômios onde as variáveis pares aparecem apenas em comutadores. Mas, neste caso, o corolário acima implica no resultado desejado. ∎

Capítulo 3

Teorema sobre o Produto Tensorial em característica positiva

Uma conseqüência da teoria de Kemer sobre a estrutura dos T-ideais é conhecida como o Teorema sobre o Produto Tensorial (TPT):

Teorema 3.1 (Kemer) *Seja K um corpo com característica zero e a, b, c, $d \in \mathbb{N}$. Então:*

(1) $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$;

(2) $T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$;

(3) $T(M_{1,1}(E)) = T(E \otimes E)$.

Este resultado foi também demonstrado por Regev em [18], sem o uso da teoria citada acima. A demonstração de Regev é mais simples, pois usa argumentos combinatórios e (implicitamente) identidades graduadas. A idéia central do artigo citado acima é construir uma aplicação linear que, embora não possua propriedades como ser homomorfismo, injetividade e sobrejetividade, ainda garante a igualdade dos respectivos T-ideais. Uma importante idéia deste estudo foi olhar para as matrizes em questão como uma álgebra de funções. A princípio, esta atitude pode não parecer interessante mas, além de facilitar a notação, goza de boas propriedades.

No artigo [3] foi indicada uma demonstração, quando K é um corpo infinito com característica diferente de dois, para a versão multilinear do TPT. Isto é, quando nos restringimos aos T-ideais gerados apenas pelos polinômios multilineares. Nas próximas seções desenvolveremos as idéias de Regev ([18]), com as devidas modificações, para demonstrarmos o TPT multilinear como foi sugerido no artigo citado no início do parágrafo. Na última seção, mostraremos que o TPT (geral) não é válido em característica positiva.

3.1 Álgebras de matrizes

Definição 3.2 Seja I um conjunto finito e $v : I \to \mathbb{Z}_2$ uma função. O par (I, v) é chamado *conjunto a valores em* $\mathbb{Z}_2$. Escreveremos $I = I_0 \cup I_1$, onde $I_g = v^{-1}(g),\ g \in \mathbb{Z}_2$. Dado um segundo conjunto (I', v'), $v' : I' \to \mathbb{Z}_2$, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{v} = (v, v') : & I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ & (i, j) & \longmapsto & (v(i), v'(j)) \end{array}$$

e também

$$\begin{array}{rccc} v_+ : & I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ & (i, i') & \longmapsto & v(i) + v'(i'). \end{array}$$

Observação 3.3 A definição acima nos permite escrever $M_{a,b}(E)$ de outro modo: seja $I = I_0 \cup I_1$, $|I_0| = a$, $|I_1| = b$, com $v : I \to \mathbb{Z}_2$ como acima e considere $v_+ : I \times I \to \mathbb{Z}_2$. Assim, podemos escrever $M_{a,b}(E) = \{(a_{i,j})_{i,j\in I} \mid a_{i,j} \in E_{v_+(i,j)}\} = M_I(E_{v_+(i,j)} \mid i, j \in I)$. Nesta seção, denotaremos por simplicidade $E_{i,j} = E_{v_+(i,j)}$. Desta forma, escreveremos $M_I(E_{i,j}) = M_I(E_{v_+(i,j)} \mid i, j \in I)$. Recordemos que $E_g E_h \subseteq E_{g+h}$ se g, $h \in \mathbb{Z}_2$ e a soma $g + h$ é a soma de $\mathbb{Z}_2$. Logo, $E_{i_1,i_2} E_{i_2,i_3} \subseteq E_{i_1,i_3}$, para todo i_1, i_2, $i_3 \in I$.

Note que, como espaços vetoriais, $M_I(E_{i,j}) = \oplus_{i,j\in I} E_{i,j}$. Consideremos:

$$\pi_{r,s} : E_{r,s} \to \oplus_{i,j\in I} E_{i,j}$$

as inclusões canônicas. Para termos a igualdade acima no nível de álgebras, definimos a multiplicação em $M_I(E_{i,j})$ como sendo distributiva e satisfazendo:

$$\pi_{i,j}(a_{i,j})\, \pi_{r,s}(a_{r,s}) = \begin{cases} 0 \in M_I(E_{i,j}) & \text{se} \quad j \neq r \\ \pi_{i,s}(a_{i,j}\, a_{j,s}) & \text{se} \quad j = r. \end{cases}$$

A próxima observação ilustra o bom comportamento dos conjuntos a valores em $\mathbb{Z}_2$ com o produto tensorial.

Observação 3.4 Para (I, v) e (I', v') conjuntos a valores em $\mathbb{Z}_2$, considere $M_I(E_{i,j})$ e $M_{I'}(E_{r,s})$. Então $M_I(E_{i,j}) \otimes M_{I'}(E_{r,s}) \cong M_{I\times I'}(E_{i,j} \otimes E_{r,s})$ (veja Definição 3.2). Com efeito, temos que $M_I(E_{i,j}) \otimes M_{I'}(E_{r,s}) = (\oplus_{i,j\in I} E_{i,j}) \otimes (\oplus_{r,s\in I'} E_{r,s}) \cong \oplus_{i,j\in I} \oplus_{r,s\in I'} (E_{i,j} \otimes E_{r,s})$, como espaços vetoriais. Além disso, este isomorfismo é dado por:

$$\pi_{i,j}(a_{i,j}) \otimes \pi_{r,s}(a_{r,s}) \mapsto \pi_{(i,r),(j,s)}(a_{i,j} \otimes a_{r,s}),$$

o que faz dele um isomorfismo de álgebras.

Por outro lado, se $M_{a,b}(E) = M_I(E_{i,j})$ e $M_{c,d}(E) = M_{I'}(E_{r,s})$, então segue da Observação 3.3 que $M_{ac+bd,ad+bc}(E) = M_{I\times I'}(E_{(i,j),(r,s)})$.

3.2 Equivalência multilinear

Nesta seção, enunciaremos o resultado principal deste capítulo: o TPT multilinear. Faremos algumas simplificações na notação e, logo após, definiremos a aplicação μ^*, estudaremos suas propriedades e apresentaremos alguns resultados essenciais para a demonstração do TPT multilinear.

Para uma álgebra A, denotamos por $P(A)$ o T-ideal gerado pelas identidades polinomiais multilineares satisfeitas por A.

Definição 3.5 Duas PI-álgebras A e B são ditas *PI-equivalentes* se $T(A) = T(B)$. Quando $P(A) = P(B)$, dizemos que A e B estão em *equivalência multilinear*.

Observemos que, quando consideramos álgebras sobre corpos com característica zero, a PI-equivalência é conseqüência da equivalência multilinear. Veremos no final deste capítulo (Observação 3.43) que, para álgebras sobre corpos infinitos com característica positiva, isto não é verdade.

O resultado principal deste capítulo é o TPT multilinear, ou seja, a "versão multilinear" do Teorema sobre o Produto Tensorial:

Teorema *Seja K um corpo infinito com qualquer característica diferente de dois e a, b, c, $d \in \mathbb{N}$. Então:*

(1) $P(M_{a,b}(E) \otimes E) = P(M_{a+b}(E))$;

(2) $P(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = P(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$;

(3) $P(M_{1,1}(E)) = P(E \otimes E)$.

No restante desta seção desenvolveremos grande parte da técnica necessária para a demonstração do teorema acima. Vale notar que, de acordo com a Observação 3.3, para demonstrarmos a primeira afirmação do TPT multilinear é suficiente mostrarmos que:

$$P(M_{I\times I'}(E_{i,j} \otimes E_{r,s})) = P(M_{I\times I'}(E_{(i,j),(r,s)})).$$

Definição 3.6 Seja $\mu : E \otimes E \to E$ a multiplicação $\mu(x \otimes y) = xy$.

Observação 3.7 De acordo com a definição acima, para $g,\ h,\ g+h \in \mathbb{Z}_2$, temos que $\mu(E_g \otimes E_h) \subseteq E_{g+h}$. Assim, sejam $D(l) = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_l} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_l\}$, $E^{(n)}$ o subespaço de E gerado pela união $\cup_{l \geqslant n} D(l)$ e seja também $E_g^{(n)} = E_g \cap E^{(n)}$. Então, temos que $\mu(E_0 \otimes E_g) = \mu(E_g \otimes E_0) = E_g$, pois $1 \in E_0$ e $\mu(E_1 \otimes E_1) = E_0^{(2)}$. Deste modo, denotaremos $\mu(E_g \otimes E_h) = E_{g+h}^{(g,h)}$.

Neste momento, usando a observação acima, faremos algumas simplificações nas notações que serão usadas nesta e em outras seções.

Notações 3.8 Dados (I, v), (I', v') conjuntos a valores em $\mathbb{Z}_2$, denotaremos:

- $E[i,j,r,s] = E_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)}^{(v_+(i,j),v'_+(r,s))}$;
- $M_1 = M_{I\times I'}(E[i,j,r,s])$;
- $M = M_{I\times I'}(E_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)})$;
- $N = M_{I\times I'}(E_{v_+(i,j)} \otimes E_{v'_+(r,s)})$.

A ação de μ nas entradas de N induz uma aplicação sobrejetora $\mu^* : N \to M_1 \subseteq M$. Mais precisamente, se $(x_{k,l})_{k,l\in I\times I'} \in N$, então $\mu^*((x_{k,l})) = (\mu(x_{k,l}))$. É imediato que a aplicaçao μ^* é linear.

Teorema 3.9 *Sejam M_1, M como nas Notações 3.8. Então $P(M) = P(M_1)$.*

Para demonstrarmos este teorema faremos uso do seguinte resultado:

Lema 3.10 *Sejam $A \supseteq B$ duas PI-álgebras satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, existem $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \in C(A)$ tais que:*

(1) $a'_i\, a_i \in B$ para $i = 1, \ldots, n$;

(2) Para qualquer $a \in K\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ temos $a'_1\, a'_2 \cdots a'_n \cdot a = 0$ se, e somente se, $a = 0$.

Então $P(A) = P(B)$.

Demonstração: Como $A \supseteq B$, basta mostrarmos que toda identidade multilinear de B é também uma identidade de A. Para tanto, sejam $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade multilinear de B e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Chame $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ e sejam $a'_1, \ldots, a'_n \in C(A)$ satisfazendo *(1)* e *(2)*. Logo, segue de *(1)* que:

$$0 = f(a'_1\, a_1, \ldots, a'_n\, a_n) = a'_1 \cdots a'_n\, f(a_1, \ldots, a_n) = a'_1 \cdots a'_n\, a$$

e, por *(2)*, temos que $a = f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, como queríamos. ∎

Agora estamos em condições de demonstrar o teorema.

Demonstração: (**Teorema 3.9**) Basta mostrarmos que M_1 e M satisfazem as hipóteses do Lema 3.10. Com efeito, desde que $E[i,j,r,s] = E^{(v_+(i,j), v'_+(r,s))}_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)} \subseteq E_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)}$, temos que $M_1 \subseteq M$.

Sabemos que $M = M_{k,l}(E)$, para k, l convenientes (veja Observação 3.3). Assim, dados $u_1, \ldots, u_t \in M$, seja $n = n(u_1, \ldots, u_t)$, tal que $u_1, \ldots, u_t \in M_{k,l}(E(V_n))$ (veja Exemplo 1.3). Tome $u'_1 = e_{n+1}\, e_{n+2}\, 1_M, \ldots, u'_t = e_{2t-1}\, e_{2t}\, 1_M$, e disto seguem *(1)* e *(2)* do Lema 3.10, implicando no resultado desejado. ∎

Notações 3.11 Seja $W = I \times I'$. Dados $u, w \in W$, considere $e_{u,w} \in M_{I\times I'}(E)$ a "matriz" unidade correspondente à posição u, w. Isto é, $e_{u,w} : W \times W \to E$ é definida por:

$$e_{u,w}(r,s) = \begin{cases} 1 & \text{se } (r,s) = (u,w) \\ 0 & \text{se } (r,s) \neq (u,w). \end{cases}$$

Observe que, dependendo de u e w, podemos ter $e_{u,w} \notin N$ ou $e_{u,w} \notin M_1$. Seguindo a notação da Definição 3.2, para $u, w \in W$, escreveremos em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$\tilde{v}(u) + \tilde{v}(w) = (g,h), \;\; g, h \in \mathbb{Z}_2,$$

e denotaremos:

$$E(\tilde{v}(u) + \tilde{v}(w)) = E_g \otimes E_h.$$

Recordemos que $D_0 = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r, r = 2, 4, 6, \ldots\}$, $D_1 = \{e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r, r = 1, 3, 5, \ldots\}$ e $D = D_0 \cup D_1$ é uma base de E. Assim, escreveremos $S = \{(c \otimes d)\, e_{u,w} \mid u, w \in W,\ c \in D_g, \text{ e } d \in D_h, \text{ onde } \tilde{v}(u) + \tilde{v}(w) = (g, h)\}$.

Observações 3.12 No que foi feito acima, considere $u = (i, r)$, $w = (j, s) \in W = I \times I'$. Então $\tilde{v}(u) + \tilde{v}(w) = (v(i) + v(j), v'(r) + v'(s)) = (v_+(i, j), v'_+(r, s)) = (g, h)$. Logo, se $c \in D_g$ e $d \in D_h$, temos que $c \otimes d \in E_{v_+(i,j)} \otimes E_{v_+(r,s)}$ e estes elementos $c \otimes d$ geram linearmente $E_{v_+(i,j)} \otimes E_{v_+(r,s)}$. Disto segue que o conjunto S, definido nas Notações 3.11, gera linearmente a álgebra N.

Definição 3.13 Sejam A e B duas PI-álgebras. Uma aplicação linear sobrejetora $\varphi : A \to B$ é dita *cancelável* se, para todo polinômio multilinear $f(x)$, temos que $\varphi \circ f(x)$ é identidade em B se, e somente se, $f(x)$ é identidade em A.

Queremos mostrar que μ^* é cancelável, e para tanto precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.14 *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$, a base de E. Então existem um homomorfismo (de álgebras) $\varphi : E \to E$ e elementos $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \in D$ tais que $\varphi(a'_i) = a_i$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, e $a'_1\, a'_2 \cdots a'_n \neq 0$.*

Demonstração: Desde que $\dim E = \infty$, podemos encontrar elementos $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \in D$ tais que $a'_1\, a'_2 \cdots a'_n \neq 0$, e $a'_i \in D_0$ se, e somente se, $a_i \in D_0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Primeiramente, definamos $\varphi(a'_1) = a_1$ e seja $K\langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle \subseteq E$ a subálgebra gerada por $a'_1, \ldots, a'_n$. Como $a'_i\, a'_j = -a'_j\, a'_i$ para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$, segue que $H = \{a'_{i_1}\, a'_{i_2} \cdots a'_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n\}$ é uma base linear de $K\langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle$. Para os elementos da base H definiremos $\varphi(a'_{i_1} \cdots a'_{i_r}) = a_{i_1} \cdots a_{i_r} = \varphi(a'_{i_1}) \cdots \varphi(a'_{i_r})$. Desta forma, podemos estender φ linearmente para $K\langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle$ e, pela escolha dos elementos a'_i, φ é um homomorfismo de álgebras.

Como espaços vetoriais, temos $E = K\langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle \oplus A$, para algum subespaço $A \subseteq E$. Logo, estendendo φ trivialmente para E, isto é, impondo $\varphi(A) = 0$, obtemos o resultado desejado. ∎

Teorema 3.15 *A aplicação $\mu^* : N \to M_1$ é cancelável.*

Demonstração: Seja $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear. Primeiramente, suponha que $f(x)$ é uma identidade para N. Então, temos imediatamente que $\mu^* \circ f(x)$ é uma identidade para M_1, pois μ^* é sobrejetora e linear.

Reciprocamente, suponha que $\mu^* \circ f(x)$ é uma identidade para M_1. Sejam $S \subseteq N$ e $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l)e_{u_l,w_l} \in S$, para $1 \leqslant l \leqslant n$ (como nas Notações 3.11 e Observações 3.12). Desde que S gera linearmente N, é suficiente mostrarmos que $f(\overline{x}) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = 0$. O restante da demonstração será dividido em dois casos:

Caso 1: Assuma que $c_1\, c_2 \cdots c_n \cdot d_1\, d_2 \cdots d_n \neq 0$, e sejam $u, w \in W = I \times I'$. Então a entrada u, w de $f(\overline{x})$ (isto é, os coeficientes de $e_{u,w}$ em $f(\overline{x})$) é $\alpha_{u,w}\ c_1 \cdots c_n \otimes d_1 \cdots d_n$, para algum $\alpha_{u,w} \in K$. Logo, $\alpha_{u,w}\ c_1 \cdots c_n \cdot d_1 \cdots d_n$ é a entrada u, w em $0 = \mu^* \circ f(\overline{x})$. Como $c_1 \cdots c_n \cdot d_1 \cdots d_n \neq 0$, segue que $\alpha_{u,w} = 0$, e disto obtemos $f(\overline{x}) = 0$.

Caso 2: Sejam $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ quaisquer. Aplicando o Lema 3.14 para $c_1, \ldots,$ c_n, $d_1, \ldots,$ d_n, temos que existem $\varphi : E \to E$ homomorfismo de álgebras e $c_1', \ldots,$ c_n', $d_1', \ldots, d_n' \in D$ tais que:

$$\varphi(c_l') = c_l, \quad c_l' \in D_0 \text{ se, e somente se, } c_l \in D_0$$

e

$$\varphi(d_l') = d_l, \quad d_l' \in D_0 \text{ se, e somente se, } d_l \in D_0,$$

com $c_1' \cdots c_n' \cdot d_1' \cdots d_n' \neq 0$. Definindo $\overline{x}_l' = (c_l' \otimes d_l')e_{u_l,w_l}$, tem-se $\overline{x}_l' \in S$, para todo $1 \leqslant l \leqslant n$. Agora, estendendo φ para o homomorfismo de álgebras $\varphi^* : N \to N$ pela ação de $\varphi \otimes \varphi$ nas entradas, temos:

$$\varphi(c' \otimes d')e_{u,w} = (\varphi(c') \otimes \varphi(d'))e_{u,w}.$$

Logo, $\varphi^*(\overline{x}_l') = \overline{x}_l$, para todo $1 \leqslant l \leqslant n$, e desde que $f(\overline{x}_l') = 0$, segue do *Caso 1* que:

$$0 = \varphi^*(0) = \varphi^*(f(\overline{x}_l')) = f(\varphi^*(\overline{x}_l')) = f(\overline{x}),$$

como queríamos demonstrar. ∎

Notações 3.16 Fixemos $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l)e_{u_l,w_l} \in S$, $1 \leqslant l \leqslant n$ (como no Teorema 3.15). Denotemos $e_\sigma = \prod_{l=1}^{n} e_{u_{\sigma(l)},w_{\sigma(l)}}$, $\overline{x}_\sigma = \prod_{l=1}^{n} \overline{x}_{\sigma(l)}$, onde $\sigma \in S_n$, o grupo das permutações de n elementos. Se $e_\sigma = 0$, então $\overline{x}_\sigma = 0$. Assuma que $e_\sigma \neq 0$, para algum $\sigma \in S_n$. Por simplicidade, assuma que $e_1 \neq 0$. Logo, $w_l = u_{l+1}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Denotemos $w_n = u_{n+1}$ e $(\underline{u}) = (u_1, \ldots, u_{n+1})$. Chamaremos a permutação $\sigma \in S_n$ de $(u_1, \ldots, u_{n+1})$-*permissível* se $e_\sigma \neq 0$. Isto é, $u_{\sigma(l+1)} = w_{\sigma(l)+1}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$, e para este σ denotaremos $(\underline{u})\sigma = (u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)+1})$. Observemos que se $\eta \in S_n$ é $(\underline{u})\sigma$-permissível, então $((\underline{u})\sigma)\eta = (\underline{u})(\sigma\eta)$. Em outras palavras, $\sigma\eta$ é $(\underline{u})$-permissível.

Observação 3.17 Sejam $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2 \in S$, como nas notações acima. Naturalmente tem-se $d_1 c_2 = \varepsilon c_2 d_1$, $\varepsilon = \pm 1$ e daí $\mu^*(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) = \varepsilon \mu^*(\overline{x}_1) \cdot \mu^*(\overline{x}_2)$. Se ambos os lados são não-nulos, ε é unicamente determinado e depende apenas da paridade de d_1 e c_2. Logo, ε é determinado por $(u_1,\, u_2,\, u_3)$. Analogamente, podemos estender estas considerações para qualquer produto de elementos $\overline{x}_l$ e, em particular, para o produto $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n$. Observe que, neste caso, $\varepsilon = \pm 1$ é determinado por $(\underline{u}) = (u_1, \ldots, u_{n+1})$.

Definição 3.18

(1) Sejam $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in S$ e $(\underline{u}) = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ como nas Notações 3.16. Então definimos $\varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{n+1})$ via:

$$\mu^*(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n) = \varepsilon(u_1, \ldots, u_n)\, \mu^*(\overline{x}_1) \cdots \mu^*(\overline{x}_n).$$

(2) Se $\sigma \in S_n$ é $(\underline{u})$-permissível, então $\varepsilon((\underline{u})\sigma)$ é dado por:

$$\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)} \cdots \overline{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon((\underline{u})\sigma)\, \mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)}) \cdots \mu^*(\overline{x}_{\sigma(n)}).$$

Observação 3.19 Recordemos das Notações 3.11 que $E(g, h) = E_g \otimes E_h$, para g, $h \in \mathbb{Z}_2$, e a soma $g+h$ é a soma de $\mathbb{Z}_2$, e também $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l) e_{u_l, w_l}$, onde $c_l \otimes d_l \in E(\tilde{v}(u_l) + \tilde{v}(w_l))$, para $1 \leqslant l \leqslant n$. Desde que $w_l = u_{l+1}$, para $1 \leqslant l \leqslant n$, e $z + z = 0$ em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, segue que para quaisquer $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$, temos:

$$\prod_{l=a}^{b} (c_l \otimes d_l) \in E(\tilde{v}(u_a) + \tilde{v}(u_{b+1})).$$

Lema 3.20 *Sejam $\varepsilon(\underline{u})$ como na Definição 3.18 e $1 \leqslant a \leqslant n-1$. Então:*

$$\varepsilon(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{a+1})\, \varepsilon(u_{a+1}, \ldots, u_{n+1})\, \varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{n+1}).$$

Demonstração: Sejam $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ como nas Notações 3.16. Pela Observação 3.19:

$$\prod_{l=1}^{a} \overline{x}_l = (c' \otimes d') e_{u_1, u_{a+1}}, \quad c' \otimes d' \in E(\tilde{v}(u_1) + \tilde{v}(u_{a+1}))$$

e

$$\prod_{l=a+1}^{n} \overline{x}_l = (c'' \otimes d'') e_{u_{a+1}, u_{n+1}}, \quad c'' \otimes d'' \in E(\tilde{v}(u_{a+1}) + \tilde{v}(u_{n+1})).$$

A demonstração segue da comparação das ações de μ^* em ambos os lados da equação:

$$\prod_{l=1}^{n} \overline{x}_l = \left(\prod_{l=1}^{a} \overline{x}_l \right) \left(\prod_{l=a+1}^{n} \overline{x}_l \right).$$

∎

Para demonstrarmos o resultado principal desta seção, como no capítulo anterior, precisaremos de uma definição e um resultado de caráter combinatório, devido também a Regev [19]. Pelo mesmo motivo dado anteriormente, omitiremos sua demonstração.

Definição 3.21 ([19]) Um elemento $\eta \in S_n$ é dito ser uma *transposição de blocos* se podemos escrever $x_1 \cdots x_n = ABCDE$ e $x_{\eta(1)} \cdots x_{\eta(n)} = ADCBE$, $(B, D \neq 1)$.

Teorema 3.22 ([19]) *Sejam $e_{u_l, w_l} = e_{u_l, u_{l+1}}$, $1 \leqslant l \leqslant n$, como nas Notações 3.16. Então $\prod_{l=1}^{n} e_{u_l, u_{l+1}} = e_{u_1, u_{n+1}}$. Seja também $\sigma \in S_n$ tal que $e_\sigma = e_{u_1, u_{n+1}}$. Então existem transposições de blocos $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(s)} \in S_n$ tais que, se escrevermos $\eta^{(1)} \cdots \eta^{(i)} = \sigma^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, temos:*

(1) $\sigma = \sigma^s$ e

(2) $e_{\sigma^{(i)}} = e_{u_1, u_{n+1}}$, para cada $1 \leqslant i \leqslant s$.

Com o resultado acima, podemos demonstrar o próximo lema, que será usado na demonstração do teorema principal desta seção.

Lema 3.23 *Sejam $\overline{x}_l$, $1 \leqslant l \leqslant n$ (como nas Notações 3.16 e $(\underline{u}) = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ correspondente), σ uma permutação $(\underline{u})$-permissível de S_n tal que $u_1 = u_{\sigma(1)}$, $u_{n+1} = u_{\sigma(n)+1}$ e ε como na Definição 3.18. Então $\varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon((\underline{u})\sigma)$.*

Demonstração: Segue das Notações 3.16 e do Teorema 3.22 que é suficiente mostrarmos o Lema 3.23 no caso em que σ é uma transposição de blocos $(\underline{u})$-permissível.

Assumiremos que $x_1 \cdots x_n = ABCDE$ e $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = ADCBE$. Mais ainda, $u_{\sigma(1)} = u_1$ e $u_{\sigma(n)+1} = u_{n+1}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $A = E = 1$, $x_1 \cdots x_n = BCD$ e $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = DCB$. Estes blocos correspondem às seqüências $B \leftrightarrow (u_1, \ldots, u_{a+1})$, $C \leftrightarrow (u_{a+1}, \ldots, u_{b+1})$ e $D \leftrightarrow (u_{b+1}, \ldots, u_{n+1})$. Desde que σ é $(\underline{u})$-permissível, temos:

$$u_1 = u_{b+1} \qquad \text{e} \qquad u_{a+1} = u_{n+1}. \tag{1}$$

Além disso,

$$DCB \quad \leftrightarrow \quad (\overbrace{u_{b+1}, u_{b+2}, \ldots, \underset{\substack{\| \\ u_{a+1}}}{u_{n+1}}}^{D}, \overbrace{u_{a+2}, \ldots, \underset{\substack{\| \\ u_{1}}}{u_{b+1}}}^{C}, \overbrace{u_2, \ldots, u_{a+1}}^{B}) \tag{2}$$

Aplicando o Lema 3.20 duas vezes, temos que $\varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \varepsilon_5$, onde cada ε_i é dado por $\varepsilon_1 = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{a+1})$, $\varepsilon_2 = \varepsilon(u_{a+1}, \ldots, u_{b+1})$, $\varepsilon_3 = \varepsilon(u_{b+1}, \ldots, u_{n+1})$, $\varepsilon_4 = \varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{b+1})$ e $\varepsilon_5 = \varepsilon(u_1, u_{b+1}, u_{n+1})$. Com um argumento similar, segue de (2) acima que $\varepsilon((\underline{u})\sigma) = \varepsilon_3\, \varepsilon_2\, \varepsilon_1\, \delta_4\, \delta_5$, onde $\delta_4 = \varepsilon(u_{b+1}, u_{n+1}, u_{b+1})$ e $\delta_5 = \varepsilon(u_{b+1}, u_{b+1}, u_{a+1})$. De (1) segue que $\varepsilon_4 = \delta_4$ e $\varepsilon_5 = \delta_5$, implicando no resultado. ∎

Teorema 3.24 *A aplicação $\mu^* : N \to M_1$ da Definição 3.6 satisfaz:*

(1) Existe $S \subseteq N$ tal que S gera linearmente N.

(2) Dados $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in S$ e u, $w \in W$, existe $\varepsilon = \varepsilon(u, w, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \neq 0$ tal que, para todo $\sigma \in S_n$, a entrada u, w satisfaz:

$$\left(\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)} \cdots \overline{x}_{\sigma(n)})\right)_{u,w} = \varepsilon \left(\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)}) \cdots \mu^*(\overline{x}_{\sigma(n)})\right)_{u,w}$$

(independente de $\sigma \in S_n$).

Demonstração: Para demonstrarmos *(1)*, basta tomarmos S como nas Notações 3.11. Nas Observações 3.12 foi visto que S gera linearmente N.

Para a afirmação *(2)*, sejam $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l)e_{u_l,w_l} \in S$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$, $\sigma \in S_n$ e u, $w \in W$. Denotemos:

$$L(\sigma) = \left(\mu^*\left(\prod_{l=1}^{n} \overline{x}_{\sigma(l)}\right)\right)_{u,w}$$

e

$$R(\sigma) = \left(\prod_{l=1}^{n} \mu^*(\overline{x}_{\sigma(l)})\right)_{u,w}.$$

Da Definição 3.18 sabemos que $L(\sigma) = \varepsilon(\sigma, u, v, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)R(\sigma)$. A fim de completarmos a demonstração é suficiente mostrarmos que este ε não depende de σ. Podemos assumir, sem perda de generalidade que, para algum $\sigma \in S_n$, temos $L(\sigma)$, $R(\sigma) \neq 0$. Por simplicidade, assumiremos que $L(1)$, $R(1) \neq 0$. Logo $w_l = u_{l+1}$, $1 \leqslant l \leqslant n$, e desta forma $(\underline{u}) = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ foi determinado. Escreva $L(1) = \varepsilon R(1)$, com $\varepsilon = \pm 1$. Mostremos que para este ε temos $L(\sigma) = \varepsilon R(\sigma)$, para qualquer $\sigma \in S_n$.

Claramente temos $L(\sigma) = 0$ se, e somente se, $R(\sigma) = 0$. Dessa forma, podemos assumir que ambos são não-nulos. Segue que σ é $(\underline{u})$-permissível e $u_1 = u_{\sigma(1)} = u$, $u_{\sigma(n)+1} = u_{n+1} = w$. Pelo Lema 3.23, temos:

$$\mu^*\left(\prod_{l=1}^{n} \overline{x}_{\sigma(l)}\right) = \varepsilon(\underline{u}) \prod_{l=1}^{n} \mu^*(\overline{x}_{\sigma(l)}),$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon((\underline{u})\sigma)$. E isto vale para cada entrada u, $w \in W$, implicando na afirmação *(2)*, como queríamos. ∎

Corolário 3.25 *Sejam N e M_1 como nas Notações 3.8. Então $P(N) = P(M_1)$.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ uma identidade multilinear de N. Desde que $\mu^*(S)$ gera M_1, basta mostrarmos que para quaisquer u, $w \in W$ e $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in S$, temos $(f(\mu^*(\overline{x}_1), \ldots, \mu^*(\overline{x}_n)))_{u,w} = 0$. Seja $\varepsilon = \varepsilon(u, w, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ como no Teorema 3.24. Então $0 = (\mu^*(f(\overline{x}))_{u,w} = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \mu^* \left(\overline{x}_{\sigma(1)} \cdots \overline{x}_{\sigma(n)}\right)_{u,w} = \varepsilon\left(f(\mu^*(\overline{x}))\right)_{u,w}$. Logo, $f(x)$ é uma identidade em M_1.

Como μ^* é cancelável (Teorema 3.15), segue que $P(N) = P(M_1)$, como queríamos. ∎

3.3 A demonstração do TPT multilinear

Nesta seção, estamos em condições de demonstrar o TPT multilinear. Como a demonstração de cada afirmação usa técnicas distintas, demonstraremos cada afirmação como um novo teorema.

Teorema 3.26 [TPT multilinear (2)] *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $p = ac+bd$ e $q = ad+bc$. Então as álgebras $N_1 = M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)$ e $M = M_{p,q}(E)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais multilineares.*

Demonstração: A álgebra N_1 é isomorfa à álgebra N, conforme a Observação 3.4 (veja também Notações 3.8). Da mesma observação citada acima, temos que $M = M_{I\times I'}(E_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)})$. O Teorema 3.9 diz que $P(M) = P(M_1)$. Agora, segue dos Teoremas 3.24, 3.15 e do Corolário 3.25 que $P(N_1) = P(M)$, como queríamos. ∎

Antes da demonstração da segunda afirmação do TPT, precisaremos de algumas definições.

Definição 3.27

(1) Seja $a = a_0 + a_1 \in E$, onde $a_0 \in E_0$, $a_1 \in E_1$, e defina g_0, $g_1 : E \to M_2(E)$ por:

$$g_0(a_0 + a_1) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \text{ e } g_1(a_0 + a_1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Denote $g_i(E) = \Omega_i$, para $i = 1, 2$, e $\Omega = \Omega_0 \otimes \Omega_1 \subseteq M_2(E)$. Observe que Ω_0 é uma subálgebra de $M_{1,1}(E)$, $\Omega_0 \cong E$ e Ω_1 é um Ω_0-módulo. Claramente temos que $\Omega = \{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in E\}$ é uma álgebra.

(2) Defina $f : \Omega \to E$ por:

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = x + y.$$

É imediato que f é um homomorfismo de álgebras. Além disso, $f \circ g_0 = f \circ g_1 = id_E$. Logo, $f|_{\Omega_i}$ é injetora, para $i = 1, 2$.

(3) Seja (I, v) um conjunto a valores em $\mathbb{Z}_2$, com $|I_0| = a$ e $|I_1| = b$. Defina a álgebra $U \subseteq M_{2(a+b)}(E)$ por:

$$U = \{g_{v+(i,j)}(x_{i,j}) \mid i, j \in I,\ x_{i,j} \in E\}.$$

Assim, para $I' = I \times \mathbb{Z}_2$ e $v'(i, z) = v(i) + z \in \mathbb{Z}_2$, temos $U \subseteq M_{I'}(E_{v+(r,s)} \mid r, s \in I')$.

Lema 3.28 *Com as notações e definições da Definição 3.27, temos que* $U \cong M_{a+b}(E) = M_I(E)$.

Demonstração: Defina $f^* : U \to M_I(E)$ por $f^*(g_{v+(i,j)}(x_{i,j})) = (f \circ g_{v+(i,j)}(x_{i,j})) = x_{i,j}$, para todo i, $j \in I$. Observe que f^* é um homomorfismo de álgebras, pois herda de f esta propriedade. Além disso, f^* é claramente sobrejetora, e desde que $f|_{\Omega_0}$, $f|_{\Omega_1}$ são injetoras, segue que f^* é injetora. Portanto, f^* é um isomorfismo de álgebras, como queríamos. ∎

Observação 3.29 Seja $E' = E^{(1)}$ a álgebra de Grassmann sem unidade (veja Observação 3.7), e seja U como na Definição 3.27 (3). Considere $U' = \{g_{v+(i,j)}(x_{i,j}) \mid i, j \in I$ e $x_{i,j} \in E'\} \subseteq U$. Com um argumento similar ao do Teorema 3.9, temos que $P(U) = P(U')$. Logo, para qualquer U'' tal que $U' \subseteq U'' \subseteq U$, temos que $P(U'') = P(U)$.

Teorema 3.30 [TPT multilinear (1)] *Sejam a, $b, \in \mathbb{N}$. Então as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ satisfazem as mesmas identidades multilineares.*

Demonstração: Sejam $M_{a,b}(E) = M_I(E_{v+(i,j)})$, $M_{1,1}(E) = M_{\mathbb{Z}_2}(E_{z_1+z_2} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_2)$ e denote $U_1 = M_I(E_{v+(i,j)}) \otimes E$. O mergulho $g_0 : E \hookrightarrow M_{1,1}(E)$ induz o mergulho $\overline{g}_0 = (id, g_0) : U_1 \hookrightarrow M_I(E_{v+(i,j)}) \otimes M_{\mathbb{Z}_2}(E_{z_1+z_2}) = M_{I\times\mathbb{Z}_2}(E_{v+(i,j)} \otimes E_{z_1+z_2}) = G$. Denote $\overline{U} = \overline{g}_0(U_1) \subseteq G$. Aplicando μ^*, temos:

$$\mu^* : G \to M_{I\times\mathbb{Z}_2}(E_{v+(i,j)+z_1+z_2}).$$

Sejam $\mu^*(\overline{U}) = \mu^*(\overline{g}_0(U_1)) = U''$ e U, U' como na Definição 3.27 (3) e Observação 3.29. Verifica-se diretamente que $U' \subseteq U'' \subseteq U$, e pela mesma observação citada acima, temos que $P(U'') = P(U) = P(U')$.

A mesma demonstração de que μ^* é cancelável e satisfaz as propriedades do Teorema 3.24 se aplica para a restrição de μ^* à subálgebra $\overline{U} \subseteq G$, com o subconjunto gerador sendo $\overline{U} \cap S$. Logo, pelo Teorema 3.25 temos:

$$P(\overline{U}) = P(\mu^*(\overline{U})) = P(U'') = P(U).$$

Como $\overline{g}_0$ é um mergulho, segue que $U_1 \cong \overline{U}$. Logo, $P(U_1) = P(\overline{U})$, e da igualdade acima temos que $P(U_1) = P(U)$. Como $U \cong M_I(E) = M_{a+b}(E)$ (Lema 3.28), segue que $P(M_{a+b}(E)) = P(U) = P(U_1) = P(M_{a,b}(E) \otimes E)$, como queríamos. ∎

Como nos casos anteriores, precisamos explorar algumas propriedades antes de demonstrarmos a última afirmação do TPT.

Recordemos do Exemplo 1.4 que E^{op} denota a álgebra oposta de E. A multiplicação em E^{op} é denotada por $*$, isto é, $a * b = b\,a$, para a, $b \in E^{op}$, e $T(E) = T(E^{op})$, conforme o Exemplo 1.13. Assim, de acordo com os resultados de [17], temos que $T(E \otimes E) = T(E \otimes E^{op})$ e, em particular, que $P(E \otimes E) = P(E \otimes E^{op})$.

Definição 3.31

(a) Sejam $\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Observe que $\underline{i}\,\underline{j} = \underline{k} = -\underline{j}\,\underline{i}$, $\underline{i}^2 = \underline{k}^2 = \underline{1}$ e $\underline{j}^2 = -\underline{1}$.

(b) Defina $g : E \to M_{1,1}(E)$, $h : E^{op} \to M_{1,1}(E)$ por:

$$g(a) = g(a_0 + a_1) = a_0\underline{1} + a_1\underline{i}\,, \ \text{onde}\ a = a_0 + a_1 \in E = E_0 \oplus E_1,$$

$$h(b) = g(b_0 + b_1) = b_0\underline{1} + b_1\underline{j}\,, \ \text{onde}\ b = b_0 + b_1 \in E^{op} = E_0^{op} \oplus E_1^{op}.$$

Observação 3.32 As aplicações g e h possuem as seguintes propriedades (de verificação imediata):

(1) $g : E \to M_{1,1}(E)$ e $h : E^{op} \to M_{1,1}(E)$ são mergulhos de álgebras.

(2) $g(a)\,h(b) = h(b)\,g(a)$, para todo $a \in E$, $b \in E^{op}$.

Definição 3.33 Com g e h como na Definição 3.31, definimos $\varphi : E \otimes E^{op} \to M_{1,1}(E)$ por $\varphi(a \otimes b) = g(a)\, h(b)$.

Lema 3.34 *A aplicação φ definida acima satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) φ é homomorfismo de álgebras;

(2) $\varphi(E \otimes E^{op}) \supseteq \begin{pmatrix} E_0^{(2)} & E_1 \\ E_1 & E_0^{(2)} \end{pmatrix}$.

Demonstração: A afirmação *(1)* é imediata.

Para demonstrarmos *(2)*, note que se $a_1 \in E_1$, então $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \in \varphi(E \otimes E^{op})$, pois $\frac{1}{2}[\varphi(a_1 \otimes 1) + \varphi(1 \otimes a_1)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ (lembremos que a característica de K é diferente de dois). Analogamente para $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Logo, $\begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$ e igualmente para $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 b_1 \end{pmatrix}$. Assim, ambos estão em $\varphi(E \otimes E^{op})$ e a afirmação *(2)* segue. ∎

Finalmente estamos em condições de demonstrar a última afirmação do TPT.

Teorema 3.35 [TPT multilinear (3)] *As álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ satisfazem as mesmas identidades multilineares.*

Demonstração: Seja $A = E \otimes E^{op}$. Seguindo a demonstração do Teorema 3.9, temos que $P(\varphi(A)) = P(M_{1,1}(E))$, onde φ é o homomorfismo do Lema 3.34. Portanto, para completarmos a demonstração, basta mostrarmos que $P(A) = P(\varphi(A))$. Desde que φ é um homomorfismo, temos que $P(A) \subseteq P(\varphi(A))$. Logo, para obter a igualdade desejada, devemos mostrar a inclusão $P(\varphi(A)) \subseteq P(A)$. Com efeito, seja $f(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \in P(\varphi(A))$. Para mostrarmos que $f(x) \in P(A)$, é suficiente fazê-lo para os elementos $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in D$, isto é, substituir x_l por $\overline{x}_l = a_l \otimes b_l$ e verificar que $f(a \otimes b) = f(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) = 0$. Desta forma, calculemos:

$$f(a \otimes b) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes b_{\sigma(1)} * \cdots * b_{\sigma(n)}.$$

Denote $d(a_l) = d_l \in \mathbb{Z}_2$, se $a_l \in E_{d_l}$, e defina a função sinal $\varepsilon : S_n \times \mathbb{Z}_2^n \to \pm 1$ por $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma, d(a_1), \ldots, d(a_n)) a_1 \cdots a_n$. É imediato que $b_{\sigma(1)} * \cdots * b_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma, d(b_1), \ldots, d(b_n)) b_1 * \cdots * b_n$. Logo:

$$f(a \otimes b) = \beta(a_1 \cdots a_n \otimes b_1 * \cdots * b_n), \tag{3}$$

onde $\beta = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma, \underline{d(a)}) \cdot \varepsilon(\sigma, \underline{d(b)})$. Nosso objetivo é mostrar que $\beta = 0$. Desde que β depende somente de $\underline{d(a)}$, $\underline{d(b)}$ (lembremos que, segundo o Teorema 3.24, ε não depende de σ), podemos escolher $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ tais que $a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_n \neq 0$ em E. Agora, aplicando φ em ambos os lados de (3), obtemos que $\varphi(f(a \otimes b)) = 0$, pois $f \in P(\varphi(A))$. Por outro lado, $\varphi(a_1 \cdots a_n \otimes b_1 * \cdots * b_n) = a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_n \underline{i}^r \underline{j}^s$, para r, s convenientes. Assim,

$$0 = \beta a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_n \underline{i}^r \underline{j}^s.$$

Desde que $\underline{i}^r \underline{j}^s$ é uma matriz não nula (com entradas $0, \pm 1$) e $a_1 \cdots a_n \, b_1 \cdots b_n \neq 0$, temos que $\beta = 0$ e o resultado segue, como queríamos. ∎

3.4 O TPT é falso para $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ em característica positiva

Na seção anterior, mostramos que a versão multilinear do TPT vale para corpos infinitos com qualquer característica distinta de dois. Em característica zero, o TPT multilinear garante a PI-equivalência, pois neste caso qualquer identidade polinomial é equivalente a um sistema de identidades multilineares (veja Proposição 1.26). Como veremos nesta seção, embora seja válido o TPT multilinear mesmo quando a característica de K é $p \neq 2$, a versão geral não é válida. Para tanto, como feito em [3], construiremos um contra-exemplo para a terceira afirmação do TPT.

Recordemos novamente do Exemplo 1.37 que a álgebra $M_{1,1}(E)$ é 2-graduada da seguinte forma: $M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1$, onde:

$$(M_{1,1}(E))_0 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0\}, \; (M_{1,1}(E))_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1\}.$$

Para $E \otimes E$, temos:

$$E \otimes E = (E_0 \otimes E_0 \oplus E_1 \otimes E_1) \oplus (E_0 \otimes E_1 \oplus E_1 \otimes E_0).$$

No capítulo anterior (Teoremas 2.8 e 2.23) vimos que as identidades 2-graduadas de $M_{1,1}(E)$ seguem de $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, enquanto as identidades 2-graduadas de $E \otimes E$ seguem das mesmas citadas anteriormente, e adicionamos a identidade graduada $[y^p, z]$ quando a característica de K é $p > 2$. Neste caso, temos a inclusão própria $T_2(M_{1,1}(E)) \subsetneq T_2(E \otimes E)$.

Como na seção anterior, denotemos por E' a álgebra de Grassmann sem unidade e consideremos a álgebra (também sem unidade) $M_{1,1}(E')$. Observe que esta álgebra, como subálgebra de $M_{1,1}(E)$, é 2-graduada de maneira natural. Além disso, sua componente ímpar coincide com a de $M_{1,1}(E)$. Seja $A = M_{1,1}(E') \oplus K$ a álgebra unitária formada de $M_{1,1}(E')$ adicinonando-se formalmente uma unidade (veja Exemplo 1.9).

Lema 3.36 *A álgebra A satisfaz todas as identidades 2-graduadas de $T_2(E \otimes E)$.*

Demonstração: Como $T_2(E \otimes E)$ é gerado pelas identidades $[y_1, y_2]$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ e $[y^p, z]$, basta mostrarmos que A também satisfaz estas identidades graduadas. A inclusão $A \subseteq M_{1,1}(E)$ implica que A satisfaz as identidades graduadas $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$. Observe que a álgebra E' satisfaz a identidade ordinária $x^p = 0$ (veja [20], Lemma(1.2) (b)). Seja $a \in A_0$. Então $a = \lambda I + (a_{11}e_{11} + a_{22}e_{22})$, onde e_{ij} são as matrizes unidade, I é a matriz identidade e $a_{ii} \in E'_0$. Agora, note que $(a_{11}e_{11} + a_{22}e_{22})^p = (a_{11}^p e_{11} + a_{22}^p e_{22}) = 0$. Por outro lado, λI é central e os p-ésimos coeficientes binomiais $\binom{p}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$ são divisíveis por p. Logo, $a^p = \lambda^p I$ é central. Assim, A satisfaz $[y^p, z]$, como queríamos demonstrar. ∎

A seguir, usaremos a mesma abordagem feita nas Seções 2.2 e 2.3 do capítulo anterior para descrevermos $T_2(A)$. Começaremos construindo a álgebra livre 2-graduada de posto enumerável na variedade de álgebras 2-graduadas determinada por A. Para tanto, Considere:

$$A_i = a_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = b_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & c_i \\ d_i & 0 \end{pmatrix},$$

onde a_i, b_i são variáveis comutativas, c_i, d_i anticomutativas, tais que os b_i's geram a parte par da álgebra livre supercomutativa sem unidade e c_i, d_i geram a parte ímpar, para todo $i \geqslant 1$. Denotemos por $Gen(A)$ a álgebra 2-graduada gerada por A_i, B_i e C_i, onde os elementos A_i, B_i são pares e os C_i são ímpares.

Exatamente como feito nos Lemas 2.6 e 2.13, $Gen(A)$ é isomorfa (como álgebra 2-graduada) à álgebra livre de posto enumerável na variedade de álgebras 2-graduadas determinada por A.

Proposição 3.37 [veja Lema 2.21] *Sejam $g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ polinômios multilineares que são linearmente independentes módulo $T_2(A)$. Então os polinômios:*

$$y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 z_{n+2}^2 \cdots z_{n+r}^2 g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

são linearmente independentes módulo $T_2(A)$.

Demonstração: A demonstração é semelhante à do Lema 2.21. Como no caso citado, tome:

$$y_1 = (A_1 + B_1) + \cdots + (A_{i_1} + B_{i_1}) \, , \ldots, \; y_k = (A_{t+1} + B_{t+1}) + \cdots + (A_{t+i_k} + B_{t+i_k})$$

para $t = i_1 + \cdots + i_{k-1}$;

$$z_{n+1} = C_{n+1} + C_{n+2} \, , \ldots, \; z_{n+r} = C_{n+2r-1} + C_{n+2r}.$$

e o resultado segue. ∎

Note que, como A pertence à variedade de álgebras 2-graduadas determinada por $M_{1,1}(E)$, que por sua vez está sempre contida na variedade determinada por $E \otimes E$, obtemos o lema abaixo, um resultado análogo à Proposição 2.12 e ao Corolário 2.22.

Lema 3.38 *Seja f um polinômio 0-próprio de $Gen(A)$. Então, módulo $T_2(A)$, f é igual a uma combinação linear de polinômios da forma:*

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} z_{i_1}^2 z_{i_2}^2 \cdots z_{i_k}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_l})$$

onde $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \varnothing$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e g_j é um polinômio multilinear. Se a característica de K for $p > 2$, temos que $\alpha_i < p$ para $i = 1, \ldots, m$. Além disso, se os polinômios multilineares g_j forem linearmente independentes módulo $T_2(A)$, então os polinômios acima também serão linearmente independentes.

Demonstração: Análoga aos resultados citados acima. ∎

Neste momento, estamos em condições de demonstrar a igualdade $T_2(E \otimes E) = T_2(A)$.

Proposição 3.39 *As álgebras A e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades 2-graduadas.*

Demonstração: Pelo Lema 3.36, basta mostrarmos que toda identidade 2-graduada de A é satisfeita por $E \otimes E$. Sabemos também que é suficiente considerarmos apenas as identidades 0-próprias.

No Lema 3.39 encontramos os geradores do espaço vetorial dos polinômios 0-próprios de $Gen(A)$. Com esta informação, mostraremos que $Gen(A)$ é relativamente livre na variedade de álgebras 2-graduadas determinadas por $E \otimes E$.

Desde que $A \subseteq M_{1,1}(E)$, temos que $Gen(A)$ é imagem homomórfica de $Gen(M_{1,1}(E))$. Logo, todo polinômio 0-próprio de $Gen(A)$ pode ser escrito como combinação linear de polinômios da forma:

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} z_{a_1}^2 z_{a_2}^2 \cdots z_{a_s}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_l}) \tag{4}$$

onde $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \varnothing$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_s$ e g_j é multilinear. Note que podemos assumir $\alpha_i < p$. Com efeito, fixemos i e suponha que $\alpha_i \geqslant p$ em algum polinômio. Desde que estamos considerando apenas polinômios 0-próprios, temos que cada variável par aparece apenas em comutadores. Assim, o elemento correspondente a este expoente (bem como a parte escalar das matrizes) anula a expresssão (4) deste polinômio.

Segundo a Proposição 2.7, temos que uma base para o subespaço vetorial de $Gen(M_{1,1}(E))$ gerado pelos polinômios multilineares nas variáveis z_j consiste de elementos da seguinte forma:

$$z_{t_1} z_{u_1} z_{t_2} z_{u_2} \cdots z_{t_m} \widehat{z}_{u_m}$$

para $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $u_1 < u_2 < \cdots < u_m$ onde símbolo $\widehat{\ }$ acima da variável z_{u_m} indica que esta pode ser omitida. É imediato que estes polinômios geram o mesmo subespaço em $Gen(A)$. Logo, conforme os Lemas 3.37 e 3.38, temos que os polinômios da forma (4) constituem uma base para o subespaço vetorial formado pelos polinômios 0-próprios de $Gen(A)$.

Recordemos que $T_2(E \otimes E)$ é gerado por $[y_1, y_2]$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ e por $[y^p, z]$ quando a característica de K é $p > 2$ (Teorema 2.23). Logo, segue que $Gen(A)$ é também relativamente livre na variedade de álgebras 2-graduadas determinada por $E \otimes E$. Em outras palavras, temos que $T_2(A) = T_2(E \otimes E)$, como queríamos. ∎

Corolário 3.40 *As álgebras A e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais, isto é, $T(A) = T(E \otimes E)$.*

Demonstração: Pela proposição acima, as álgebras A e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades 2-graduadas. Logo, do Corolário 1.43, temos que $T(A) = T(E \otimes E)$, como queríamos. ∎

Agora, apresentaremos o contra-exemplo citado no início desta seção:

Lema 3.41 *Quando a característica de K é $p > 2$, o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1^{p^2}, x_2]$ é uma identidade em A, mas não é uma identidade em $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração: Seja $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{1,1}(E)$. Observe que $b^{p^2} = b$, que não é central. Logo, se substituirmos x_1 por b em $f(x_1, x_2)$, teremos que $f \notin T(M_{1,1}(E))$. Agora, mostremos que, para todo $a \in A$, o elemento a^{p^2} é central. Desde que $a = \alpha I + a'$, onde $\alpha \in K$, $a' \in M_{1,1}(E')$ e I é a matriz identidade, tem-se $a^{p^2} = \alpha^{p^2} I + (a')^{p^2}$ e $\alpha^{p^2} I$ é central. Logo, basta mostrarmos para $a = a' \in M_{1,1}(E')$. Com efeito, seja $a = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_{1,1}(E')$, onde x, $t \in E'_0$, y, $z \in E'_1 = E_1$. Como $p \geqslant 3$, temos que $p^2 \geqslant 4p - 3$. As entradas de a^{p^2} serão combinações lineares de monômios em x, y, z, t e cada um destes monômios tem grau p^2. Logo, cada um destes monômios contém um dos elementos x, y, z, t pelo menos p vezes. Usando que x, t são centrais em E' e y, z anticomutam, podemos escrever, a menos de sinal, cada monômio na forma $x^n y^m z^r t^s$, onde pelo menos uma das potências tem grau maior ou igual a p. Mas, de acordo com [20], a álgebra E' satisfaz a identidade $x_1^p = 0$. Portanto, $a^{p^2} = 0$, como queríamos. ∎

Teorema 3.42 *Seja $p > 2$ a característica de K. Então $T(M_{1,1}(E)) \subsetneq T(E \otimes E)$. Mais precisamente, a identidade $[x_1^{p^2}, x_2]$ é satisfeita por $E \otimes E$, mas não por $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração: Do Corolário 3.40 e do Lema 3.41 segue que $T(E \otimes E) = T(A) \subsetneq T(M_{1,1}(E))$, como queríamos. ∎

Encerramos este capítulo com uma importante observação:

Observação 3.43 O teorema acima mostra que o Teorema sobre o Produto Tensorial é falso em característica positiva. Entretanto, é verdadeiro se nos restringirmos às partes multilineares dos respectivos T-ideais.

Observemos também que, embora seja um fato já conhecido, as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ nos dão um exemplo de álgebras que satisfazem as mesmas identidades multilineares, mas possuem T-ideais diferentes quando a característica de K é $p > 2$. Outro exemplo será dado no final do próximo capítulo. Isto mostra também que a teoria de Kemer (em característica zero) é, na verdade, uma teoria sobre identidades polinomiais multilineares.

Capítulo 4

PI-equivalência em característica positiva

Vimos no capítulo anterior, que $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ estão em equivalência multilinear. Neste capítulo, usando identidades polinomiais graduadas, daremos uma outra demonstração da equivalência acima, e mostraremos que $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ não são PI-equivalentes quando K é um corpo infinito com característica $p > 2$, fornecendo o exemplo citado na Observação 3.43.

Veremos também que a álgebra $M_{a,a}(E) \otimes E$ satisfaz certas identidades graduadas que não são satisfeitas por $M_{2a}(E)$.

Os resultados aqui apresentados estão no artigo [4] e representam uma generalização, para corpos com característica positiva (distinta de dois), de alguns resultados de Di Vincenzo e Nardozza em [9] e [10].

4.1 As identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_n(E)$

Nesta seção denotaremos por G o grupo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$. Recordemos do Exemplo 1.39 a G-graduação canônica de $M_n(E)$: se $g = (\alpha, \beta) \in G$, temos que:

$$M_n(E)_g = \{(a_{ij}) \in M_n(E) \mid a_{ij} \in E_\beta \text{ se } \overline{j-i} = \alpha \text{ e } 0 \text{ caso contrário}\},$$

onde $\overline{m}$ denota o resíduo módulo n de $m \in \mathbb{N}$.

Seja A uma álgebra G-graduada e h um elemento homogêneo de grau $(\alpha,\, \beta) \in G$. Para tal h escreveremos $\alpha(h) = \alpha \in \mathbb{Z}_n$ e $\beta(h) = \beta \in \mathbb{Z}_2$.

Como feito no Capítulo 2, montaremos um modelo para a álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade de álgebras G-graduadas determinada por $M_n(E)$. Para tanto, seja $X = Y \cup Z$, onde $Y = \{y_i^d \mid d \in \mathbb{Z}_n,\, i \geqslant 1\}$, $Z = \{z_i^d \mid d \in \mathbb{Z}_n,\, i \geqslant 1\}$ e $Y \cap Z = \varnothing$. Recordemos da Seção 2.1 que $K\langle Y; Z\rangle$ denota a álgebra livre supercomutativa. Seguindo novamente as idéias de [6] (Theorem 2), se $X = \{x_1,\, x_2, \ldots\}$, definimos $A_k = (a^k_{r\,s})$ como sendo a seguinte matriz em $M_n(K\langle Y; Z\rangle)$:

$$(a^k_{r\,s}) = \begin{cases} y_k^{\overline{r-1}} & \text{se } (\alpha(x_k),\, \beta(x_k)) = (\overline{s-r},\, 0), \\ z_k^{\overline{r-1}} & \text{se } (\alpha(x_k),\, \beta(x_k)) = (\overline{s-r},\, 1), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Chamaremos de H a subálgebra G-graduada de $M_n(K\langle Y; Z\rangle)$ gerada pelas matrizes A_k, para $k \geqslant 1$.

Observação 4.1 O comportamento da multiplicação dos elementos homogêneos com respeito à G-graduação em $M_n(K\langle Y; Z\rangle)$, bem como na subálgebra H definida acima, é similar ao descrito para $M_n(E)$ no Exemplo 1.39.

Proposição 4.2 *A álgebra G-graduada H é relativamente livre na variedade de álgebras G-graduadas determinada por $M_n(E)$.*

Demonstração: Seja $\varphi : K\langle X\rangle \to H$ o homomorfismo definido por $x_i \mapsto A_k$, $k \geqslant 1$. Logo, temos que φ é um homomorfismo graduado e sobrejetor. Um cálculo direto mostra que $ker\,\varphi = T_G(M_n(E))$, e o resultado segue como queríamos. ∎

A tabela a seguir contém os polinômios G-graduados que, como veremos adiante, formam uma base para as identidades G-graduadas de $M_n(E)$.

Seja S o conjunto formado pelas identidades da Tabela 4.1 e I o ideal de identidades G-graduadas em $K\langle X\rangle$ gerado por S. Verifica-se diretamente que todos os polinômios de S são identidades para $M_n(E)$, e como conseqüência imediata temos que:

Lema 4.3 *$I \subseteq T_G(M_n(E))$.*

Identidade	$(\alpha(x_1),\,\beta(x_1))$	$(\alpha(x_2),\,\beta(x_2))$	$(\alpha(x_3),\,\beta(x_3))$
$x_1x_2 - x_2x_1$	$(0,0)$	(0,0)	
	$(0,0)$	$(0,1)$	
$x_1x_2 + x_2x_1$	$(0,1)$	$(0,1)$	
$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$	$(\alpha,0)$	$(-\alpha,0)$	$(\alpha,0)$
	$(\alpha,1)$	$(-\alpha,0)$	$(\alpha,0)$
	$(\alpha,0)$	$(-\alpha,1)$	$(\alpha,0)$
$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$	$(\alpha,1)$	$(-\alpha,1)$	$(\alpha,1)$
	$(\alpha,0)$	$(-\alpha,1)$	$(\alpha,1)$
	$(\alpha,1)$	$(-\alpha,0)$	$(\alpha,1)$

Tabela 4.1: Conjunto de identidades que formam S.

Lema 4.4 *Seja $M = M(x_1,\dots,x_m) \in K\langle X\rangle_{(\alpha,\beta)}$ um monômio não-nulo de comprimento r. Então:*

$$M(A_1,\dots,A_m) = \pm\sum_{\gamma=0}^{n-1} M_\gamma\, e_{\gamma+1,\,j}. \tag{1}$$

Aqui $\overline{j-\gamma-1} = \alpha$; $M_\gamma = y_{i_1}^{\delta_1+\gamma}\cdots y_{i_t}^{\delta_t+\gamma}\, z_{j_1}^{\theta_1+\gamma}\cdots z_{j_s}^{\theta_s+\gamma}$ para $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_l \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_s \leqslant m$ convenientes, e δ_k, $\theta_k \in \mathbb{Z}_n$, $\gamma = 0,\, 1,\dots,n-1$. A soma dos índices superiores nos monômios M_γ é a soma em $\mathbb{Z}_n$.

Demonstração: Por indução sobre o comprimento $r = s+t$ de M. Para $r = 1$ o resultado é imediato. Se $r > 1$, escreva $M(x_1,\dots,x_m) = N(x_1,\dots,x_m)\cdot x_q$, para algum q, e o restante da demonstração segue da hipótese de indução aplicada ao monômio N, levando em consideração o comportamento da multiplicação citado na Observação 4.1. ∎

Proposição 4.5 *Sejam M, $N \in K\langle X\rangle$ monômios com $M(A_1,\dots,A_m)$ e $\pm N(A_1,\dots,A_m)$ possuindo, na mesma posição, a mesma entrada não-nula pertencente à álgebra livre super-comutativa. Então $M \equiv \pm N$ módulo I.*

Demonstração: Por indução sobre o comprimento q do monômio M. Para $q = 1$ nada temos a demonstrar. Se $q > 1$, suponha que $(h,\,k)$ é a entrada comum não-nula. Assim, escreva $M = M_1x_tM_2$ para algum t, onde $\alpha(M_1) = r$ e $\alpha(M_2) = s$, para r, $s \in \mathbb{Z}_n$.

Primeiramente, suponhamos $\beta(x_t) = 0$. A entrada (h, k) do monômio $M(x_1, \ldots, x_m)$ é:

$$M''\, e_{h,h+r}\, y_t^{h+r-1}\, e_{h+r,k-s}\, M''\, e_{k-s,k} \quad \text{onde } \alpha(x_t) = k - s - h - r \in \mathbb{Z}_n,$$

e os índices superiores, bem como os índices das matrizes unidade $e_{i,j}$, estão em $\mathbb{Z}_n$, como visto no Exemplo 1.39.

Conforme a hipótese, podemos escrever $N = N'\, x_t\, N''$. Avaliando N nas matrizes A_i, a contribuição de A_t para a entrada (h, k) de $N(A_1, \ldots, A_m)$ será exatamente $y_t^{h+r-1}\, e_{h+r,k-s}$. Mas, de acordo com a Observação 4.1, temos que $N = N_1\, x_t\, N_2$, onde a avaliação dos A_i's é algum $N'\, e_{h,h+r} \neq 0$. Logo, $\alpha(N_1) = \alpha(M_1) = r \in \mathbb{Z}_n$, e deste modo temos que se $M = M_1\, x_t\, M_2\, x_t\, M_3 \cdots M_{l-1}\, x_t\, M_l$, então $N = N_1\, x_t\, N_2\, x_t\, N_3 \cdots N_{l-1}\, x_t\, N_l$, para monômios N_i convenientes. Além disso, para alguma permutação σ de $\{1, 2, \ldots, l-1, l\}$ tem-se:

$$\alpha(M_1\, x_t\, M_2\, x_t \cdots x_t\, M_k) = \alpha(N_1\, x_t\, N_2\, x_t \cdots x_t\, N_{\sigma(k)}).$$

Agora, suponhamos que o monômio M comece com a variável x_1. Então $N = N_1\, x_1\, N_2$, com $\alpha(N_1) = 0$. O restante da demonstração será dividido em três casos:

Caso 1: Considere $M = x_1\, M_1\, x_1\, M_2$ e $\alpha(x_1\, M_1) = 0$. Então $N = N_3\, x_1\, N_4\, x_1\, N_5$ com $\alpha(N_3) = \alpha(N_3\, x_1\, N_4) = 0$. Mas, neste caso, temos $\alpha(x_1\, N_4) = 0$ e $N \equiv \pm x_1\, N_4\, x_1\, N_5$ (módulo I), de acordo com as identidades que geram I (veja a Tabela 4.1).

Caso 2: Considere $M = M_1\, x_a\, x_b\, M_2$, $N = N_3\, x_a\, N_4\, x_1\, N_5\, x_b$, e $N_1 = N_3\, x_a\, N_5$ tais que $\alpha(M_1) = \alpha(N_3)$, $\alpha(M_1\, x_a) = \alpha(N_3\, x_a\, N_4\, x_1\, N_5)$. Então $\alpha(N_4\, x_a\, N_5) = 0$. Mas $\alpha(N_3\, x_a\, N_4) = \alpha(N_1) = 0$ e portanto $\alpha(N_3\, x_a) = -\alpha(N_4) = \alpha(x_1\, N_5)$. Logo, novamente de acordo com as identidades da Tabela 4.1, temos que $N \equiv x_1\, N_5\, N_4\, N_3\, x_a\, x_b\, N_6$ (módulo I).

Caso 3: Nenhum dos casos acima. Escreva $M = x_{i_1}\, x_{i_2} \cdots x_{i_q}$ e escolha uma variável, digamos x_1, que ocorre em N_1. Assim, podemos escrever $N_1 = N_3\, x_1\, N_4$ e então, para algum $1 \leqslant p \leqslant q$, teremos $i_p = 1$. Portanto $\alpha(N_3) = \alpha(x_{i_1}\, x_{i_2} \cdots x_{i_{p-1}})$. Se $p < q$ suponha que $N = N_5\, x_{i_{p+1}}\, N_6$, e daí $\alpha(N_5) = \alpha(x_{i_1}\, x_{i_2} \cdots x_{i_p})$. Mas o comprimento do monômio N_1 é maior que o do monômio N_5, pois se fossem iguais estaríamos no *Caso 1*, e se o comprimento de N_5 fosse maior que o de N_1, estaríamos no *Caso 2*. Deste modo, concluímos que a variável $x_{i_{p+1}}$ ocorre em N_1. Portanto, para algum p_0, os monômios N_1 e $x_{i_{p_0}}\, x_{i_{p_0+1}} \cdots x_{i_q}$ serão homogêneos de mesmo grau em G. Agora, se N começa com x_j, temos $M = M_3\, M_4\, x_j\, M_5$, para alguns monômios M_i satisfazendo $\alpha(M_3\, M_4) = 0$ e $M_4\, x_j\, M_5 = x_{i_{p_0}}\, x_{i_{p_0+1}} \cdots x_{i_q}$. Como conseqüência obtemos:

$$\alpha(M_4\, x_j\, M_5) = \alpha(x_{i_{p_0}}\, x_{i_{p_0+1}} \cdots x_{i_q}) = \alpha(N_1) = 0 \, \in \mathbb{Z}_n.$$

Desde que $\alpha(M_3) = -\alpha(x_j\, M_5)$, temos $M \equiv x_j\, M_5\, M_4\, M_3$ (módulo I), que começa como N.

Nos três casos considerados acima, mostramos que $M \equiv U$ módulo I e $N \equiv V$ módulo I, onde U e V começam com a mesma variável, digamos x. Escreva $U = x\, U'$ e $V = x\, V'$. Desde que $I \subseteq T_G(M_n(E))$, temos:

$$M(A_1, \ldots, A_m) = U(A_1, \ldots, A_m), \quad N(A_1, \ldots, A_m) = V(A_1, \ldots, A_m).$$

Agora, usando a hipótese de indução, o resultado segue para o caso $\beta(x_t) = 0$. Quando $\beta(x_t) = 1$, a argumentação é análoga. Destas considerações, o resultado segue como queríamos. ∎

Lema 4.6 *Se $M(A_1, \ldots, A_m) = 0$ para algum monômio $M \in K\langle X\rangle$, então $M \in I$.*

Demonstração: Desde que $M(A_1, \ldots, A_m) = 0$, do Lema 4.4 temos que alguma variável, digamos x, aparece em M pelo menos duas vezes. Com efeito, se M fosse multilinear, o lema citado acima implicaria que um monômio multilinear na álgebra livre supercomutativa deveria se anular, o que é claramente uma contradição. Logo, $M = M_1\, x\, M_2\, x\, M_3$ para alguns monômios M_1, M_2 e M_3. Além disso, $\alpha(M_1) = \alpha(M_1\, x\, M_2)$ e $\beta(x) = 1$, pelo Lema 4.4 novamente. Mas isto não pode ocorrer se as entradas são lineares nas variáveis z, e portanto $\alpha(x) = -\alpha(M_2)$. Usando a identidade $x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$, com $x_1 = x_3 = x$ e $x_2 = M_2$, temos que $x\, M_2\, x \in I$. Logo, $M = M_1\, x\, M_2\, x\, M_3 \in I$, como queríamos. ∎

Com o resultado acima, podemos mostrar que as identidades G-graduadas de $M_n(E)$ são conseqüências do conjunto S, como dito anteriormente. Vale ressaltar que o resultado abaixo fora obtido por Di Vincenzo e Nardozza em [9], para álgebras sobre corpos com característica zero.

Teorema 4.7 *As identidades G-graduadas de $M_n(E)$ seguem do conjunto S.*

Demonstração: No Lema 4.3 vimos que $I \subseteq T_G(M_n(E))$. Para mostrarmos a inclusão recíproca, seja $f \in T_G(M_n(E))$ e escreva $f = \sum_{i=1}^{r} a_i\, f_i$ (módulo I), onde cada f_i é um monômio homogêneo. Escolha um menor inteiro r com esta propriedade (logo, temos

$0 \neq a_i \in K$). Se $r \geqslant 1$, então $f_i \neq 0$ para algum i. Assuma, por simplicidade, $f_1 \neq 0$ (módulo I). Assim, $f_1(A_1, \ldots, A_m) \neq 0$ conforme o Lema 4.6. Mas, $a_1 f_1(A_1, \ldots, A_m) = -\sum_{i=2}^{r} a_i f_i(A_1, \ldots, A_m)$ e, para algum $2 \leqslant q \leqslant r$, digamos $q = 2$, as matrizes $f_1(A_1, \ldots, A_m)$ e $\pm f_2(A_1, \ldots, A_m)$ têm, na mesma posição, a mesma entrada não-nula. Segundo a Proposição 4.5 segue que $f_1 \equiv \pm f_2$ (módulo I) e, deste modo $f \equiv (a_1 \pm a_2) f_1 + \sum_{i=3}^{r} a_i f_i$, o que contradiz a minimalidade de r. Esta contradição implica no resultado desejado. ∎

4.2 As identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{a,b}(E) \otimes E$

Nesta seção, descreveremos as identidades graduadas da álgebra $M_{a,b}(E) \otimes E$, onde $a+b = n$. Como a maioria das afirmações e demonstrações são similares às da seção anterior, apenas daremos uma idéia das demonstrações ou simplesmente as omitiremos.

Seja $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$. A álgebra $P = M_{a,b}(E) \otimes E$ é G-graduada. Com efeito, seja $(\alpha, \beta) \in G$. Primeiramente, recordemos do Exemplo 1.39 que a G-graduação de $M_{a,b}(E)$ é induzida por $M_n(E)$ ($n = a+b$), e deste modo temos $M_{a,b}(E)_{(\alpha,\beta)} = M_{a,b}(E) \cap M_n(E)_{(\alpha,\beta)}$. A partir destas considerações mostra-se diretamente que:

$$P_{(\alpha,\beta)} = M_{a,b}(E)_{(\alpha,\beta)} \otimes E_0 + M_{a,b}(E)_{(\alpha,\beta+1)} \otimes E_1$$

define uma G-graduação em P.

Sejam:

$$\Delta_0 = \{(i,j) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant a \text{ ou } a+1 \leqslant i,j \leqslant a+b = n\}$$

e

$$\Delta_1 = \{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant a,\ a+1 \leqslant j \leqslant a+b \text{ ou } 1 \leqslant j \leqslant a,\ a+1 \leqslant i \leqslant a+b\}.$$

Consideremos $K\langle Y; Z\rangle$ como na Seção 4.1. Definamos as seguintes matrizes em $M_n(K\langle Y; Z\rangle)$:

$$A^{(i)} = (a_{rs}) = \begin{cases} y_i^{\overline{r-1}} & \text{se } \alpha(x_i) = \overline{s-r} \text{ e } (r,s) \in \Delta_0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B^{(i)} = (b_{rs}) = \begin{cases} z_i^{\overline{r-1}} & \text{se } \alpha(x_i) = \overline{s-r} \text{ e } (r,s) \in \Delta_1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotemos por SC um outra cópia da álgebra livre supercomutativa, livremente gerada pelas variáveis pares $\{y_i\}$ e pelas variáveis ímpares $\{z_i\}$. Agora, considere os elementos $C_i \in M_n(K\langle Y;Z\rangle) \otimes SC$ definidos por: $C_i = A^{(i)} \otimes y_i + B^{(i)} \otimes z_i$ se $\beta(x_i) = 0$ e $C_i = B^{(i)} \otimes y_i + A^{(i)} \otimes z_i$ se $\beta(x_i) = 1$. É imediato que a álgebra F gerada por C_i, $i \geqslant 1$ é G-graduada. De forma imediata temos:

Lema 4.8 $T_G(F) = T_G(P)$.

Observação 4.9 Considere o homomorfismo G-graduado:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : K\langle X\rangle & \longrightarrow & F \\ x_i & \longmapsto & C_i. \end{array}$$

Este homomorfismo é claramente sobrejetor. Mas $ker\,\varphi \neq T_G(P)$. Com efeito, tome $a = b = 1$ e $f(x_1) = x_1^2$, com $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (1,0)$. Então $\varphi(f) = 0$, pois um cálculo direto mostra que $P_{(1,0)} \cdot P_{(1,0)} = 0$. Por outro lado, se substituirmos x_1 por $d = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes e_5 + \begin{pmatrix} 0 & e_3 \\ e_4 & 0 \end{pmatrix} \otimes e_6$, teremos $f(d) = d \neq 0$. Isto é uma conseqüência do fato de que *$ker\,\varphi$ não é um T_G-ideal*, embora tenhamos que $T_G(P) \subset ker\,\varphi$.

Seja I' o ideal das identidades G-graduadas geradas pelo conjunto S definido na Seção 4.1 (mais precisamente na Tabela 4.1) e por todos os monômios de $T_G(P)$.

O próximo resultado foi demonstrado em [10], Proposition 2.6, para álgebras sobre corpos com característica zero. Em nosso presente caso a demonstração é imediata.

Lema 4.10 $I' \subseteq T_G(P)$.

Corolário 4.11

(1) $T_G(M_n(E)) \subseteq T_G(M_{a,b}(E) \otimes E)$;

(2) $T(M_n(E)) \subseteq T(M_{a,b}(E) \otimes E)$.

Demonstração: Segue diretamente do Lema 4.10 e do Teorema 4.7. ∎

Sejam $M(x_1, \ldots, x_m)$, $N(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ monômios da álgebra livre G-graduada $K\langle X\rangle$. As matrizes $A^{(i)}$ e $B^{(i)}$ definidas no começo desta seção possuem uma G-graduação natural, herdada de $M_n(E)$. Suponha que F' é a álgebra gerada pelas matrizes $A^{(i)}$, $B^{(i)}$. Seja $\varphi : K\langle X\rangle \to F'$ um homomorfismo G-graduado tal que $\varphi(x_i) = A^{(i)}$ ou $B^{(i)}$.

Proposição 4.12 *De acordo com as notações dadas acima, sejam $\varphi(M(x_1,\ldots,x_m))$ e $\pm\varphi(N(x_1,\ldots,x_m))$, para algum φ, matrizes que têm, na mesma posição, a mesma entrada não-nula. Então $M \equiv \pm N$ (módulo I') em $K\langle X\rangle$.*

Demonstração: Basta seguir os passos da Proposição 4.5. Como no resultado citado, mostra-se por indução no comprimento dos monômios e usa-se as identidades de S para reescrever, módulo I', ambos os monômios começando com a mesma letra. ∎

Observemos que a proposição acima não é uma conseqüência direta da Proposição 4.5, pois neste resultado as matrizes A_i são os geradores livres da álgebra relativamente livre, enquanto os $A^{(i)}$ e $B^{(i)}$ definidos nesta seção não cumprem este papel.

Teorema 4.13 *As identidades G-graduadas de $M_{a,b}(E) \otimes E$, $a + b = n$, seguem dos polinômios do conjunto S e de todos os monômios que estão em $T_G(M_{a,b}(E) \otimes E)$.*

Demonstração: Seguiremos os passos da demonstração do Teorema 4.7 com algumas modificações. Para tanto, é suficiente mostrarmos que se f é multi-homogêneo e f pertence a $T_G(M_{a,b}(E) \otimes E)$, então $f \in I'$. Escolha, como no teorema citado acima, o menor $r \geqslant 0$ tal que $f \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i\, f_i$ (módulo I') onde os f_i são monômios em $K\langle X\rangle$ e $0 \neq a_i \in K$. Supondo $r > 0$, temos que f_1 não pode ser uma identidade graduada de $M_{a,b}(E) \otimes E$, devido à minimalidade de r. Portanto $f_1(w_1,\ldots,w_m) \neq 0$, para $w_k = C_{t_{k,1}} + \ldots + C_{t_{k,n_k}}$ convenientes e $t_{u,v} \neq t_{r,s}$ se $(u,v) \neq (r,s)$. Escreva $f_1 = x_{i_1}\, x_{i_2} \cdots x_{i_q}$ e seja

$$J = \{t_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Definamos a função $g : J \to \{1, 2, \ldots m\}$ por $g(t_{u,v}) = u$. Desde que $f_1(w_1,\ldots,w_m) \neq 0$, obtemos um termo $H_{j_1} \cdots H_{j_q} \otimes e \neq 0$, onde $e \in SC$ é um monômio. Além disso, observe que $g(j_k) = i_k$.

Como $a_1\, f_1 = -\sum_{i=2}^{r} a_i\, f_i$, o lado direito contém um termo $H_{j_{\sigma(1)}} \cdots H_{\sigma(q)} \otimes e$, para alguma permutação σ de $\{1, 2,\ldots,q\}$. Mas, $H_{j_1} \cdots H_{j_q}$ e $H_{j_{\sigma(1)}} \cdots H_{j_{\sigma(q)}}$ têm uma entrada não-nula na mesma posição. Assumindo que o termo acima vem de $f_2 = x_{s_1} \cdots x_{s_q}$, temos que $g(j_{\sigma(k)}) = s_k$. Seja $h_1(x_{j_1},\ldots,x_{j_q}) = x_{j_1} \cdots x_{j_q}$ e $h_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_q}) = x_{j_{\sigma(1)}} \cdots x_{j_{\sigma(q)}}$. Logo, $h_1 = \pm h_2$ (módulo I'), conforme a Proposição 4.12. Mas $i_{\sigma(k)} = g(j_{\sigma(k)}) = s_k$, e portanto

$f_1(x_1,\ldots,x_m) = h_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_q})$ e $f_2(x_1,\ldots,x_m) = h_2(x_{i_1},\ldots,x_{i_q})$. Agora, a demonstração é finalizada da mesma forma como no Teorema 4.7. ∎

O teorema anterior nos permite dar uma demonstração alternativa para o seguinte resultado:

Teorema 4.14 ([10], Theorem 4.1) *Seja K um corpo com característica zero. Então as identidades G-graduadas de $M_{a,b}(E) \otimes E$ seguem do conjunto S.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 4.13 e observando que a característica de K é zero, temos que $T_G(M_{a,b}(E) \otimes E)$ é gerado pelo conjunto S, juntamente com os monômios multilineares de $T_G(M_{a,b}(E) \otimes E)$.

Seja $M(x_1,\ldots,x_m) \neq 0$ um monômio multilinear. Então, com uma indução no comprimento de M, mostra-se que existem $a_1,\ldots,a_m \in M_{a,b}(E) \otimes E$ tais que $M(a_1,\ldots,a_m) \neq 0$, e o resultado segue. ∎

Uma conseqüência imediata do Teorema 4.14 é a primeira afirmação do Teorema sobre o Produto Tensorial de Kemer, para o qual uma demonstração alternativa é um dos principais resultados de [10].

Corolário 4.15 *Se a característica de K é zero, então $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_n(E))$, onde $a + b = n$.*

Observação 4.16 Quando a característica de K é $p > 0$, o Teorema 4.14 acima, em geral, não é verdadeiro. Existem identidades G-graduadas para $M_{a,b}(E) \otimes E$ que não seguem das identidades graduadas de S. Por exemplo, considere para $M_{a,a}(E) \otimes E$, o monômio $c_a(x_1,\ldots,x_p) = x_1 x_2 x_1 x_3 x_1 \cdots x_1 x_p x_1$ com $\alpha(x_i) = a \in \mathbb{Z}_n$, $\beta(x_1) = 0$ e $n = 2a$. Note que $c_a \in T_G(M_{a,a}(E) \otimes E)$. Mas para $d = \sum_{i=1}^{a}(e_{i,a-1+i} + e_{a+i,i}) \in M_{2a}(E)$ temos $c_a(d,d,\ldots,d) = d \neq 0$, e com isto, segue que $T_G(M_{2a}(E)) \subsetneq T_G(M_{a,a}(E) \otimes E)$, para $G = \mathbb{Z}_{2a} \times \mathbb{Z}_2$. Na próxima seção, mostraremos que a primeira afirmação do TPT (Corolário 4.15) não é, em geral, verdadeira quando K é um corpo infinito com característica $p > 2$, através de um estudo mais detalhado do caso $a = b = 1$.

4.3 As identidades de $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$

Como dito no final da seção anterior, daremos um contra-exemplo para o Teorema 4.14 e a primeira afirmação do TPT (Corolário 4.15) quando K é um corpo infinito com característica $p \neq 0$. Para tanto, fixaremos $a = b = 1$, $n = 2$ e $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Denote por I o ideal das identidades G-graduadas geradas pelo conjunto S e chame de I_1 o ideal das identidades G-graduadas geradas por I e pelo monômio $c(x_1, x_2, \ldots, x_p) = x_1\, x_2\, x_1\, x_3\, x_1 \cdots x_1\, x_p\, x_1$, com $\alpha(x_i) = 1$ para todo i e $\beta(x_1) = 0$.

Lema 4.17 *Se a característica de K é $p \neq 0$, então $I_1 \subseteq T_G(M_{1,1}(E) \otimes E)$.*

Demonstração: De acordo com o Lema 4.10 temos que $I \subseteq T_G(M_{1,1}(E) \otimes E)$. Logo, basta mostrarmos que $c \in T_G(M_{1,1}(E) \otimes E)$. Desde que c é linear em $x_2, \ldots, x_p$, podemos substituir x_i $(i > 1)$ por $a_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i \\ \varepsilon_i & 0 \end{pmatrix} \otimes \varphi_i$ e x_1 por $a_1 = \sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix} \otimes \gamma_j$, onde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i \in E_1$ e $\varphi_i \in E_0 \cup E_1$. Quando $i > 1$, temos que:

$$a_1\, a_i = \sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} \alpha_j\, \varepsilon_i & 0 \\ 0 & \beta_j\, \delta_i \end{pmatrix} \otimes \gamma_j\, \varphi_i$$

e deste fato juntamente com $t^2 = 0$, para $t \in E_1$, segue que $c(a_1, \ldots, a_p) = 0$, para todo $r < p$. Agora considere $r = p$. Então $c(a_1, \ldots, a_p) = \sum \begin{pmatrix} 0 & u_\sigma \\ v_\sigma & 0 \end{pmatrix} \otimes w_\sigma$, para todo $\sigma \in S_p$, o grupo das permutações, $u_\sigma = \alpha_{\sigma(1)}\, \varepsilon_2\, \alpha_{\sigma(2)}\, \varepsilon_3 \cdots \alpha_{\sigma(p-1)}\, \varepsilon_p\, \alpha_{\sigma(p)}$ e expressões similares para v_σ, w_σ. Logo, $c(a_1, \ldots, a_p) = p! \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ v_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes w_1 = 0$ em K, pois α_i, β_i, γ_i e ε_i anticomutam. Para o caso $r > p$, reduzimos ao caso acima considerando-se subconjuntos com p elementos cada, e assim obtemos o resultado. ∎

Observe que $c(e_{12} + e_{21}, \ldots, e_{12} + e_{21}) = e_{12} + e_{21}$ em $M_2(E)$, e isto implica que c não é uma identidade G-graduada para $M_2(E)$. Logo, $T_G(M_2(E)) \subsetneq T_G(M_{1,1}(E) \otimes E)$.

Lema 4.18

(1) Sejam $f \in K\langle X\rangle$ um monômio e $x \in X$ uma variável tal que $\beta(x) = 1$ e $\alpha(x) = \alpha(f)$. Então temos que o monômio $x\, f\, x \in I_1$.

(2) Sejam f_1, $f_2 \in K\langle X\rangle$ monômios e $x \in X$ uma variável tal que $\beta(x) = 1$. Então temos que $x\, f_1\, x\, f_2\, x \in I_1$.

Demonstração: Para demonstrarmos *(1)*, observe que quando $\alpha(x) = 1$, temos que $x\, f\, x \equiv -x\, f\, x$ (módulo I_1) de acordo com a identidade $x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1 = 0$. Se $\alpha(x) = 0$, podemos considerar $\deg f \geqslant 1$. Com efeito, se $\deg f = 1$, obtemos o resultado através de $x_1x_2 = -x_2x_1$ e $x^2 \in I_1$. Agora, se $\beta(f) = 0$, usamos $x_1x_2 = x_2x_1$ para obter $x\, f\, x \equiv x\, x\, f \in I_1$. Analogamente, se $\beta(f) = 1$, por $x_1x_2 = -x_2x_1$ temos que $x\, f\, x \equiv -x\, x\, f$, que está em I_1.

Para *(2)*, seja $\alpha(x) = 0$ e, segundo o que foi feito acima, podemos considerar $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) = 1$. Logo, $\alpha(f_1\, x\, f_2) = 0$ e daí $x\, f_1\, x\, f_2\, x \in I_1$. Analogamente, obtem-se o resultado quando $\alpha(x) = 1$, como queríamos. ∎

Proposição 4.19 *Se o monômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in T_G(M_{1,1}(E) \otimes E)$, então $f \in I_1$.*

Demonstração: Mostraremos por indução sobre $q = \deg f$ que, se $f \notin I_1$, então $f(a_1, \ldots, a_m) \neq 0$ para $a_i \in M_{1,1}(E) \otimes E$. Para $q = 1$ o resultado é imediato. Suponha $q > 1$ e escreva $f = h\, x_i$ para algum i. Agora, se $h \in I_1$ nada temos a demonstrar. Logo, assuma que $h \notin I_1$ e, por simplicidade seja $i = 1$. Então $f = h\, x_1$ e por hipótese de indução, existem $b_i \in M_{1,1}(E) \otimes E$, $i = 1, \ldots, m$, tais que $h(b_1, \ldots, b_m) \neq 0$. Suponha que $\deg_{x_i} f = d$ e escolha os b_i's de forma que os geradores e_1, e_2, e_3 e e_4 de E não apareçam em nenhum deles. Escreva $f = f_1\, x_1\, f_2\, x_1 \cdots x_1\, f_d\, x_1$, onde os f_i são monômios que não contêm x_1. Em outras palavras, $f_i = f_i(x_2, \ldots, x_m)$. Para simplificar os próximos cálculos, escreveremos $f(x)$, $h(b)$, e assim por diante para indicar $f(x_1, \ldots, x_m)$ e $h(b_1, \ldots, b_m)$, respectivamente. O restante da demonstração será dividido em quatro casos:

Caso 1: Suponha $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (0, 0)$. Desde que $f_1(b)\, b_1\, f_2\, b_1 \cdots b_1\, f_d \neq 0$, temos que $f_1(b) \cdots f_d(b) \neq 0$. Então para $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes 1$, obtemos:

$$f(a, b_2, \ldots, b_m) = f_1(b)\, a\, f_2(b)\, a \cdots f_d(b)\, a = f_1(b) \cdots f_d(b) \neq 0.$$

Caso 2: Suponha $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (1, 1)$. Escolha $a = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1$. Segundo o Lema 4.18, temos que $d \leqslant 2$. Se $d = 1$, então $f(a, b_2, \ldots, b_m) = h(b)\, a \neq 0$. Quando $d = 2$, também usando o Lema 4.18 obtemos que $\alpha(f_2) = 0$. Mas $h(b) = f_1(b)\, b_1\, f_2(b) \neq 0$ e daí $f_1(b)\, a\, f_2(b) \neq 0$. Se $\alpha,\, \beta \in E_0$, então:

$$\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\, e_1\, e_2 & 0 \\ 0 & \alpha\, e_2\, e_1 \end{pmatrix}.$$

Portanto $f(a, b_2, \ldots, b_m) = f_1(b)\, a\, f_2(b)\, a \neq 0$.

Caso 3: Suponha $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (0, 1)$. Sejam $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes e_1$, $a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_2\, e_3 \end{pmatrix} \otimes e_4$. Novamente pelo Lema 4.18, temos que $d \leqslant 2$. Se $d = 1$, então $f(a, b_2, \ldots, b_m) = h(b)\, a \neq 0$. Assim, considere $d = 2$. Neste caso, temos $\alpha(f_2) = 1$. Mas $h(b) = f_1(b)\, b_1\, f_2(b) \neq 0$ e daí $f_1(b)\, a\, f_2(b) \neq 0$. Escrevendo $f_2(b) = \sum_j \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix} \otimes \gamma_j$, temos que $a\, f_2(b)\, a' = \sum_j \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j\, e_2\, e_3 \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix} \otimes e_1\, \gamma_j\, e_4$, e $a' f_2(b) a = \sum_j \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ e_2\, e_3\, \beta_j & 0 \end{pmatrix} \otimes e_4\, \gamma_j\, e_1$. Logo

$$f(a + a', b_2, \ldots, b_m) = f_1(b)(a + a')f_2(b)(a + a'),$$

que por sua vez é igual a:

$$f_1(b)\, a\, f_2(b)\, a' + f_1(b)\, a'\, f_2(b)\, a = f_1(b)\, a\, f_2(b)\begin{pmatrix} 1 - e_2\, e_3 & 0 \\ 0 & e_2\, e_3 - 1 \end{pmatrix} \otimes e_4 \neq 0.$$

Nestes cálculos usamos $a\, f_2(b)\, a = a'\, f_2(b)\, a' = 0$, pois este fato decorre diretamente das relações $e_1^2 = e_2^2 = 0$ em E.

Caso 4: Suponha que $(\alpha(x_1), \beta(x_1)) = (1, 0)$. Seja $a = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes e_3$. Então $f(a + b_1, b_2, \ldots, b_m) = \sum_{i=1}^{d} f_1(b)b_1 \cdots f_i(b)af_{i+1}(b)b_1 \cdots f_d(b)b_1$. Primeiramente, consideremos $\alpha(f_i) = 1$, para todo $i \geqslant 2$. Se $d \geqslant p$, segue da identidade c que $f \in I_1$. Logo, $d < p$ e $f(a + b_1, b_2, \ldots, b_m) = d\, f_1(b)\, b_1\, f_2(b)\, b_1 \cdots b_1\, f_d(b)\, a = d\, h(b)\, a \neq 0$ pela identidade $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$. Assim, considere $\alpha(f_i) = 0$, para algum $i \geqslant 2$ e seja t o número de j's, $2 \leqslant j \leqslant d$, tais que $\alpha(f_j\, x_1\, f_{j+1} \cdots x_1\, f_d) = 0$. Escolha r como sendo o maior j com esta propriedade. Denotemos $u = f_1(b)b_1f_2(b)b_1 \cdots b_1f_d(b)a$ e $v = f_1(b)b_1f_2(b)b_1 \cdots b_1f_{r-1}(b)af_r(b)b_1 \cdots b_1f_d(b)b_1$. Então, por $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$, temos que $f(a+b_1, b_2, \ldots, b_m) = (d-t)u+tv$. Agora, se $d-t \geqslant p$ ou $t \geqslant p$, pela identidade c obtemos que $f \in I_1$. Desde que:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,\delta\,e_2 & 0 \\ 0 & \beta\,\gamma\,e_1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1\,\delta\,\beta & 0 \\ 0 & e_2\,\gamma\,\alpha \end{pmatrix},$$

temos que e_1 e e_2 estão em linhas diferentes dos respectivos produtos que constituem u e v. Logo, segue que u e v são linearmente independentes e finalmente temos que $f(a + b_1, b_2, \dots, b_m) \neq 0$, encerrando a demonstração. ∎

Do Teorema 4.13 e da Proposição 4.19, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.20 *Seja K um corpo com característica $p \neq 2$. As identidades G-graduadas da álgebra $M_{1,1}(E) \otimes E$ seguem das identidades do conjunto S, com $n = 2$, $a = b = 1$ e da identidade $c(x_1, \dots, x_p) = 0$.*

Agora, consideremos $E' \subset E$ a álgebra de Grassmann sem unidade. E' satisfaz a identidade $x^p = 0$ (veja [20]). Seja A a subálgebra de $M_2(E)$ formada pelas matrizes do tipo $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, tais que $\beta, \gamma \in E'$. A álgebra A é G-graduada de modo natural, pois herda a graduação de $M_2(E)$. Descreveremos as identidades graduadas para A, onde $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Para tanto, faremos uso das matrizes A_i, definidas no começo da Seção 4.2, com $n = 2$. Para nos adequarmos à estrutura da álgebra A, adicionaremos a relação $(y_i)^p = 0$, quando $(\alpha(x_i), \beta(x_i)) = (1, 0)$ em $K\langle Y; Z\rangle$.

Lema 4.21 *Se $f(x_1, \dots, x_m) \in K\langle X\rangle$ é um monômio tal que $f(A_1, \dots, A_m) = 0$, então $f \in I_1$.*

Demonstração: Usando a notação do Lema 4.4 e a Equação (1), temos dois casos a considerar:

Caso 1: A variável z_j^{β} ocorre duas vezes (ou mais) no monômio M_0. Aqui, $j \in \{j_1, \dots, j_s\}$ e $\beta \in \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Então $f = f_1 x_j f_2 x_j f_3$, para os monômios f_1, f_2 e f_3.

Mas temos que $\alpha(f_1) = \alpha(f_1 x_j f_2)$ e $\beta(x_j) = 1$. Portanto $\alpha(x_j) = -\alpha(f_2)$. Agora, por $x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1 = 0$, fazendo $x_1 = x_3 = x_j$ e $x_2 = f_2$, obtemos que $x_j f_2 x_j \in I_1$.

Caso 2: Algum y_i^α ocorre p vezes (ou mais) em M_0. Para $(\alpha(x_i), \beta(x_i)) = (1, 0)$, escreva $f = f_1 x_i f_2 x_i \cdots x_i f_p x_i f_{p+1}$ e então $\alpha(f_1) = \alpha(f_1 x_i f_2) = \cdots = \alpha(f_1 x_i f_2 x_i \cdots x_i f_p)$. Logo, $\alpha(x_i) = -\alpha(f_r)$ para todo $r = 2, \ldots, p$. Usando a identidade $c = 0$, obtemos que $f \in I_1$, como queríamos. ∎

Teorema 4.22 *As identidades G-graduadas da álgebra A têm como base as identidades do conjunto S (com $n = 2$) e a identidade $c = 0$.*

Demonstração: A demonstração é a mesma dada ao Teorema 4.7. ∎

Corolário 4.23 *Seja K um corpo com característica $p \neq 2$. Então as álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e A satisfazem as mesmas identidades polinomiais ordinárias.*

Na Seção 3.4, mostramos que $T(E \otimes E) \subsetneq T(M_{1,1}(E))$. Agora daremos o contra-exemplo para a primeira afirmação do Teorema sobre o Produto Tensorial, como dito anteriormente.

Teorema 4.24 *Seja K um corpo com característica $p > 2$. Então:*

$$T(M_2(E)) \subsetneq T(M_{1,1}(E) \otimes E).$$

Demonstração: Usando identidades graduadas vimos que $T(M_2(E)) \subseteq T(M_{1,1}(E) \otimes E)$. Agora, exibiremos um polinômio que é uma identidade de $M_{1,1}(E) \otimes E$, mas não é uma identidade de $M_2(E)$. Observemos inicialmente que devido ao Teorema 3.26, tal polinômio não pode ser multilinear. Para tanto, escolha $f = [x_1, x_2]^{8p-7}$. Então $f(e_{21} - e_{12}, e_{11}) = e_{21} + e_{12} \neq 0$ em $M_2(E)$ e daí $f \notin T(M_2(E))$. Por outro lado, $[a, b] \in M_2(E')$, para todo a, $b \in A$. Se $u \in M_2(E')$, então $u^{8p-7} = 0$. Com efeito, escrevendo $u = u_0 + u_1$, $u_i \in M_2(E'_i)$ e usando a identidade $x^p = 0$, juntamente com o princípio da casa do pombo, segue que $u^{8p-7} = 0$. Portanto, $f \in T(A)$. Conforme o Corolário 4.23, temos que $T(A) = T(M_{1,1}(E) \otimes E)$ e o resultado segue como queríamos. ∎

Referências Bibliográficas

[1] S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Communications in Algebra, **30**, no. 12, 5849–5860 (2002).

[2] S. Azevedo, *Identidades Graduadas para Álgebras de Matrizes*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, (2003).

[3] S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Tensor products theorems in positive characteristic*, Journal of Algebra **276**, no. 2, 836–845 (2004).

[4] S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic*, a aparecer em Communications in Algebra.

[5] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specht Problem* (Em russo), Matematicheskii Sbornik, no. 3, 13–24 (2000); Tradução para o inglês em Mathematics of the USSR-Sbornik, **191**, no. 3-4, 329–340 (2000).

[6] A. Berele, *Generic verbally prime PI-algebras and their GK dimensions*, Communications in Algebra, **21**, no. 5, 1487–1504 (1993).

[7] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel Journal of Mathematics **80**, no. 3, 323–335 (1992).

[8] O. M. Di Vincenzo, V. Drensky, *Polynomial identities for tensor products of Grassmann algebras*, Mathematica Pannonica **4**, no. 2, 249–272 (1993).

[9] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Communications in Algebra, **31**, no. 3, 1453–1474 (2003).

[10] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, $\mathbb{Z}_{k+l} \times \mathbb{Z}_2$*-graded polynomial identities for* $M_{k,l}(E) \times E$, Rendeconti del Seminario Matematico della Università di Padova, **108**, 27–39 (2002).

[11] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, 1999.

[12] A. V. Grishin, *Examples of* T*-spaces and* T*-ideals in characteristic 2 without finite basis property* (Em russo), Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, **5**, no. 1, 101–118 (1999).

[13] I. Herstein, *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, SP, 1970.

[14] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **39**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[15] A. R. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Translations of Mathematical Monographs, **87**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[16] P. Koshlukov, S. Azevedo, *Graded identities for* T*-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel Journal of Mathematics **128**, 157–176 (2002).

[17] U. Leron, A. Vapne, *Polynomial identities of related rings*, Israel Journal of Mathematics **8**, 127–136 (1970).

[18] A. Regev, *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra*, Journal of Algebra **133**, no. 2, 512–526 (1990).

[19] A. Regev, *A transposition factorization of walk-permutations in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **56**, no. 1, 160–165 (1991).

[20] A. Regev, *Grassmann algebras over finite fields*, Communications in Algebra, **19**, no. 2, 601–612 (1998).

[21] E. Santulo Junior, *Identidades Polinomiais em Álgebras*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, (2004).

[22] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable T-spaces* (Em russo), Matematicheskii Sbornik, no. 3, **191**, 143–160 (2000); Tradução para o inglês em Mathematics of the USSR-Sbornik, **191**, no. 3-4, 459–476 (2000).

[23] W. Specht, *Gesetze in ringen*, Mathematische Zeitschrift, **52**, 557–589 (1950).

[24] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}$-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Communications in Algebra, **26**, no. 2, 601–612 (1998).

[25] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n*, Proceedings of the American Mathematical Society, **127**, no. 12, 3517–3524 (1999).