A Equação de Lane-Emden-Fowler em Teoria Clássica de Campos e Astrofísica Estelar
TESE DE DOUTORADO

MARCELO CRISTINO GAMA

IMECC-UNICAMP

2008

A EQUAÇÃO DE LANE-EMDEN-FOWLER EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS E ASTROFÍSICA ESTELAR

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Marcelo Cristino Gama e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de Julho de 2008

Amaia

Prof. Dr. Adolfo Maia Júnior
Orientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr. Adolfo Maia Júnior (Orientador)
2 Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar
3 Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima
4 Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Júnior
5 Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação tação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA APLICADA

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

Gama, Marcelo Cristino

G14e A equação de Lane-Emden-Fowler em teoria clássica de campos e astrofísica estelar / Marcelo Cristino Gama -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Adolfo Maia Júnior

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais não-lineares. 2. Física matemática. 3. Teoria de campos. 4. Astrofísica. I. Maia Junior, Adolfo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The Lane-Emden-Fowler equation in classifical field theory and stellar astrophysics.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Non-linear differential equations. 2. Mathematical physics. 3. Field theory. 4. Astrophysics.

Área de concentração: Física-Matemática

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:
Prof. Dr. Adolfo Maia Junior (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)
Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima (IAG-USP)
Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Júnior (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 15/07/2008

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matematica Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 15 de julho de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). ADOLFO MAIA JUNIOR

Prof. (a). Dr (a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA

Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof. (a) Dr. (a) WALDIR ALVES RODRIGUES JUNIOR

Dedico este trabalho aos meus pais,
Maurilo e Geny, ao meu irmão Fábio,
e à memória do meu cachorro Barão.

AGRADECIMENTOS

Expresso meus sinceros agradecimentos ao Prof. Adolfo Maia Júnior, pela orientação, amizade e principalmente pela paciência, sem a qual nenhuma linha deste trabalho teria sido escrita.

Quero agradecer também:

aos professores que ao longo desses anos, contribuiram direta ou indiretamente para a minha formação, em especial aos Profs. do Grupo de Física-Matemática Waldyr Alves Rodrigues Júnior, que será sempre uma fonte de inspiração e Samuel Rocha de Oliveira, pela leitura desse trabalho em sua fase inicial,

à Profa. Carola Dobrigkeit Chinellato, do Instituto de Física Gleb Wataghin, pela leitura, conselhos e sugestões,

ao pessoal da secretaria de pós-graduação, Cidinha, Tânia e Ednaldo, e à D. Fátima da secretaria do Instituto, pela ajuda e conselhos em diversas ocasiões,

aos colegas de república Salomão Pamplona da Silva Júnior, Gustavo do Amaral Valdiviesso e Márcio Luís Lanfredi Viola pela amizade de todos esses anos, e pelo apoio incondicional,

a uma grande amiga, Camila Ichikawa, que soube encontrar as palavras certas nos momentos mais difíceis,

à CAPES e a UNICAMP pelo suporte financeiro.

“A natureza é grandiosa nas coisas grandes e gigante nas pequeninas.”

SAINT-PIERRE

“As ciências têm as raízes amargas, porém os frutos são doces.”

ARISTÓTELES

Resumo

Neste trabalho buscamos soluções exatas não-triviais da Equação de Lane-Emden-Fowler. Esta equação tem aplicações importantes em Teoria de Campos não-linear, bem como em Astrofísica Estelar. Inicialmente, a partir do formalismo da Integral Primeira, obtemos soluções para um modelo $\lambda\phi^{n+1}$ com $n = 2, 3, 5$, utilizando Integrais Elípticas de Jacobi. Segue-se então o cálculo de flutuações no modelo $\lambda\phi^{n+1}$ para um campo clássico ϕ sujeito a um potencial da forma

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{n+1}\phi^{n+1},$$

em torno de uma solução estática.

Uma outra aplicação é no estudo das configurações de Equilíbrio Hidrostático de estrelas esféricas politrópicas. Mostramos que o método da Integral Primeira fornece uma série de soluções singulares na origem. Também é obtida a bem conhecida solução de Chandrasekhar, que é regular na origem.

Abstract

In this work we search for non-trivial exact solutions to the Lane-Emden-Fowler's Equation. That equation has important applications in Non-linear Field Theory, as well in Stellar Astrophysics. Initially, from the First Integral formalism, we obtain solutions for a $\lambda\phi^{n+1}$ model with $n = 2, 3, 5$, using Jacobian Elliptic Integrals. Follows the calculation of the fluctuations in the $\lambda\phi^{n+1}$ model for a classical field ϕ in a potential of the form

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{n+1}\phi^{n+1},$$

around a static solution.

Another application is the study of the Hydrostatic Equilibrium configuration of politropic spherical stars. We show the First Integral Method gives solutions that are singular at the origin. In addition we obtain the well known Chandrasekhar's solution, which is regular at the origin.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O modelo mais simples em Teoria de Clássica de Campos Interagentes consiste de dois campos bosônicos, sendo um deles auto-interagente ϕ e o outro χ satisfazendo uma Equação Diferencial Linear (EDO), em que o campo ϕ aparece como um Potencial. Nesse modelo, surge naturalmente uma equação diferencial não-linear, cujo termo de não-linearidade é da forma ϕ^n. Tais modelos já foram anteriormente estudados por Campos e Maia [1] no contexto do estado de Ressonância Paramétrica em estrelas de nêutrons. O modelo $\lambda\phi^4$ em dimensão 1 também foi estudado por Carrillo e Maia em uma série de artigos [2, 3, 4] no contexto de comportamento de campos confinados em cavidades. Nesses trabalhos, não foi considerado a "backreaction"de χ sobre ϕ, isto é, o campo χ não aparece na equação não-linear de ϕ. Um dos objetivos deste trabalho é estender os resultados de Carrillo e Maia em dimensão 1, incorporando novas soluções para outros modelos do tipo $\lambda\phi^{n+1}$, concentrando nosso estudo exclusivamente na equação para ϕ.

Por outro lado, esse tipo de não-lineridade surge também no estudo da estrutura de uma estrela esférica em equilíbrio hidrostático, ou seja, um elemento de volume no interior da estrela está em equilíbrio sob a ação exclusiva das forças gravitacionais e de pressão. Nesse contexto, nosso trabalho consiste na busca de novas soluções.

No Capítulo 1, apresentamos alguns aspectos gerais da Equação de Lane-Emden-Fowler e apresentamos alguns teoremas referentes às propriedades das soluções.

No Capítulo 2, apresentamos um breve resumo do modelo de campos interagentes com termo de auto-interação dado por $\lambda\phi^{n+1}$ com n inteiro positivo, deduzimos as equações para os campos ϕ e χ. Apresentamos algumas soluções da Equação de Lane-Emden-Fowler, nos casos em que n admite os valores 2, 3 e 5. Esses casos foram escolhidos por possuirem soluções exatas, dadas em termos de funções elípticas. Essas funções surgem em diversos problemas da Física Teórica, como em Relatividade Geral e Cosmologia [5], [6]. Nesse capítulo utilizamos o formalismo da Integral Primeira para obter essas soluções explicitamente.

No Capítulo 3, estudamos o problema das flutuações no modelo clássico $\lambda\phi^{n+1}$, em torno de uma solução estática. Usamos uma adaptação do Método de Hirota, que nos permite encontrar um conjunto de equações recorrentes cujas soluções fornecem uma aproximação para as flutuações.

No Capítulo 4, estudamos a Equação de Lane-Emden-Fowler tridimensional e independente do tempo, nesse caso denominada de Equação de Lane-Emden, no contexto da estrutura de uma estrela esférica formada por um gás do tipo politropo. Uma solução dessa equação é a bem conhecida solução de Chandrasekhar e consta na literatura básica de Astrofísica Estelar[7, 8]. Nosso método fornece, além da solução de Chandrasekhar, a qual é regular na origem, novas soluções estáticas, que são singulares na origem, e descritas por funções elípticas de Jacobi.

No Capítulo 5 discutimos os resultados obtidos em cada capítulo e as perspectivas deste trabalho.

Capítulo 1

A Equação de Lane-Emden-Fowler

Este trabalho está focado no estudo de métodos para se encontrar soluções exatas da chamada Equação de Lane-Emden-Fowler, a qual pode ser escrita, na sua forma geral, como:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x)y^n = 0. \tag{1.1}$$

em que $y = y(x)$, $p(x)$, $q(x)$ e $r(x) \neq 0$ são funções de x e $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

Do ponto de vista histórico esta equação não-linear aparece em forma mais simples, no estudo da estabilidade de estrelas politrópicas. Admitindo-se simetria esférica, Lane[9] e Emden[10] estudaram estrelas politrópicas estáticas onde o parâmetro de densidade θ obedece à equação

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) + \lambda\theta^n = 0 \tag{1.2}$$

que é, claramente, um caso particular da Eq.(1.1) acima.

Baseando-se nos trabalhos de Emden sobre a equação (1.1), Fowler estudou a equação:

$$(x^p y')' \pm x^\sigma y^n = 0, \tag{1.3}$$

conhecida como equação de Emden-Folwer. A Equação de Emden-Fowler reduz-se à Equação de Lane-Emden no caso em que $p = \sigma = 2$.

A equação (1.1) é uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem não-linear, cuja não-linearidade é devida a um termo do tipo y^n, e será denominada a partir desse ponto de Equação de Emden-Fowler Generalizada ou Equação de Lane-Emden-Fowler.

Alguns fatos interessantes sobre essa equação podem ser encontrados nas referências $[9-13]$, porém estão fora do escopo deste trabalho. Mencionamos, a título de informação, os seguintes teoremas[15]:

Teorema: *A equação* (1.1) *pode ser reduzida à chamada forma canônica*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g(t)z^n = 0 \tag{1.4}$$

por um par de transformações do tipo

$$\begin{aligned} y &= u(x)z \\ dt &= v(x)dx, \end{aligned} \tag{1.5}$$

chamadas transformações de Kummer-Liouville.

Para o caso em que a equação (1.1) pode ser escrita da forma [1]

$$(p(x)y')' + r(x)y^n = 0, \quad x \geq 0, \tag{1.6}$$

as transformações de Kummer-Liouville são

$$\begin{aligned} y &= z, \\ t &= \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

se a integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\xi}{p(\xi)}$ converge, e

$$\begin{aligned} t &= \left(\int_x^\infty \frac{d\xi}{p(\xi)}\right)^{-1} \\ y &= \frac{z(t)}{t}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

se a integral diverge. Assim, as formas canônicas são, respectivamente:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + p(t)r(t)z^n = 0, \tag{1.9}$$

e

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{p(t)r(t)}{t^{n+3}}z^n = 0. \tag{1.10}$$

A importância da forma canônica está no fato de que os teoremas de oscilação (que determinam se as soluções da equação possuem um número finito

[1] Em alguns casos, como por exemplo em [11], essa forma é chamada de Equação de Emden-Fowler Generalizada. Em outros, como [15], é a equação (1.1) que recebe essa denominação. Para evitar ambigüidades usaremos o termo Equação de Lane-Emden-Fowler para a Equação (1.1).

ou infinito de zeros), dependem explicitamente da forma da função $g(t)$. Uma solução de (1.4) é dita "oscilatória"se possui um número arbitrário de raízes, ou seja, se para qualquer valor $T > 0$, existe $t \geq T$ tal que $z(t) = 0$. Caso contrário, a solução é dita não-oscilatória.

Teorema(de Fowler): *As soluções da equação*

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha t^\sigma z^n = 0, \tag{1.11}$$

para $n > 1$ satisfazem:

- (i) *Se $\sigma + 2 \geq 0$, todas as soluções são oscilatórias*;
- (ii) *Se $\sigma + \dfrac{(n+3)}{2} < 0$, todas as soluções são não-oscilatórias*;
- (iii) *Se $\sigma + 2 < 0 \leq \sigma + \dfrac{(n+3)}{2}$, então existem soluções oscilatórias e não-oscilatórias.*

Podemos aplicar esses dois teoremas à Equação de Lane-Emden (1.2) a fim de obter alguma informação sobre as soluções oscilatórias. De fato, como a integral

$$\int_0^\infty \frac{dr}{r^2}, \tag{1.12}$$

diverge a forma canônica da equação de Lane-Emden é:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \lambda r^{1-n}\theta^n = 0. \tag{1.13}$$

Pelo Teorema de Fowler, temos que $\sigma = 1 - n$ de forma que as soluções são todas oscilatórias se $1 < n \leq 3$, são todas não oscilatórias se $n > 5$ e se $3 < n \leq 5$ então existem soluções oscilatórias e não-oscilatórias.

No próximo capítulo, estudaremos a Equação de Lane-Emden-Fowler no contexto da Teoria Clássica de Campos, apresentando novas soluções obtidas pelo método da Integral Primeira.

Capítulo 2

Campos Clássicos

2.1 A Equação de Lane-Emden-Fowler para Campos Clássicos

Inicialmente, neste capítulo, apresentamos a motivação física para o estudo da Equação de Lane-Emden-Fowler que aparece nos trabalhos de Carrillo e Maia[$2-4$]. Consideramos um sistema de dois campos escalares interagentes descrito pela Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \frac{\lambda}{n+1}\phi^{n+1} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \chi\right)\left(\partial^\mu \chi\right) + \\ + \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 - g\phi^2\chi^2. \tag{2.1}$$

O primeiros três termos definem um modelo não-linear do tipo $\lambda\phi^n$, com n inteiro positivo (sendo mais popular o modelo para $n = 3$). Os dois termos em χ descrevem um campo linear, que pode ser pensado aqui como um campo de teste (ou perturbação) no "background" do campo ϕ. O último termo é o de interação (ou acoplamento). Este termo é quadrático em χ a fim de fornecer uma equação linear em χ. Também é escolhido ser quadrático em ϕ para que a única contribuição não-linear seja a do termo $\lambda\phi^{n+1}$. Nesse sentido, podemos dizer que a equação (2.1) nos fornece um dos modelos interagentes não-lineares mais simples possível. Este trabalho foi motivado pela possibilidade de se estudar Teorias de Campos Interagentes não-lineares para aplicações em modelos em Astrofísica Estelar e de outros objetos compactos.

Através das Equações de Euler-Lagrange, obtemos as Equações de Movimento para os campos ϕ e χ:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(2g\chi^2 - m_\phi^2\right)\phi + \lambda\phi^n = 0, \tag{2.2}$$

e

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + \left(2g\phi^2 - m_\chi^2\right)\chi = 0. \tag{2.3}$$

Podemos interpretar o termo $2g\chi^2\phi$ na equação (2.2) como a "back-reaction" do campo χ sobre o campo ϕ. Se o campo χ é tal que $|\chi| << m_\phi/\sqrt{2g}$, então podemos desprezar esse termo e a equação se reduz a:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi + \lambda \phi^n = 0. \tag{2.4}$$

No caso estático, $\phi \equiv \phi(\vec{x})$, a equação (2.4) reduz-se à

$$-\nabla^2 \phi - m_\phi^2 \phi + \lambda \phi^n = 0, \tag{2.5}$$

e no caso unidimensional a

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + m_\phi^2 \phi - \lambda \phi^n = 0. \tag{2.6}$$

Para $m_\phi = 0$, a equação (2.5) reduz-se à chamada Equação de Emden. Para $m \neq 0$ ela é denominada Equação de Emden-Fowler. Para o caso em que $m_\phi = 0$ e $\phi = \phi(r)$, com $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ reduz-se à Equação de Lane-Emden. Não analisaremos a equação

$$\nabla^2 \phi + m_\phi^2 \phi - \lambda \phi^n = 0, \tag{2.7}$$

a qual denominaremos "Equação de Lane-Emden-Fowler Tridimensional", onde ∇^2 é o operador Laplaciano tridimensional, uma vez que esta equação não pode ser resolvida pelo método da Integral Primeira.

Equações do tipo (2.6) são estudadas em Teoria de Campos (Clássica e Quântica). Para os nossos propósitos, os modelos de maior interesse são aqueles para os quais $n = 3$ e $n = 5$ nos quais $\lambda\phi^n$ é interpretado como um potencial com um ponto de mínimo (para n par) e que ainda seja renormalizável, no sentido que a teoria não leve perturbativamente à "quantidades infinitas" que não possam ser "absorvidas" pelos parâmetros físicos da teoria, como, por exemplo, a massa m_ϕ ou a constante de acoplamento λ.

2.2 Soluções da Equação de Lane-Emden-Fowler: O Caso Unidimensional

Vamos supor, inicialmente que o campo ϕ depende somente de uma coordenada espacial, isto é, $\phi = \phi(x)$ é um campo estático. Dessa forma, a equação (2.4) fica:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + m_\phi^2\phi - \lambda\phi^n = 0, \qquad n \geq 0. \tag{2.8}$$

Para $n = 0$ e $n = 1$ a equação (2.8) reduz-se a uma equação linear, cujas soluções são:

$$\phi(x) = A\cos(m_\phi x) + B\sin(m_\phi x) + \frac{\lambda}{m_\phi^2}, \tag{2.9}$$

para $n = 0$ e

$$\phi(x) = A\cos\left(\sqrt{m_\phi^2 - \lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{m_\phi^2 - \lambda}x\right), \text{ se } \lambda < m_\phi^2 \tag{2.10}$$

$$\phi(x) = Cx + D, \text{ se } \lambda = m_\phi^2 \tag{2.11}$$

$$\phi(x) = Ee^{\sqrt{\lambda - m_\phi^2}x} + Fe^{-\sqrt{\lambda - m_\phi^2}x}, \text{ se } \lambda > m_\phi^2, \tag{2.12}$$

para $n = 1$, em que A,B,C,D,E e F são constantes arbitrárias.

Buscaremos, agora, uma solução de (2.8) através da integral primeira da equação. Na equação (2.53), isolando a segunda derivada de ϕ e multiplicando a equação por $\frac{d\phi}{dx}$ encontramos

$$\frac{d\phi}{dx}\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda\phi^n\frac{d\phi}{dx} - m_\phi^2\phi\frac{d\phi}{dx}, \tag{2.13}$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{n+1}\phi^{n+1} - \frac{m_\phi}{2}\phi^2 + C_1\right). \tag{2.14}$$

Isolando $\frac{d\phi}{dx}$, encontramos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{n+1}\phi^{n+1} - m_\phi^2 + 2C_1}, \tag{2.15}$$

e invertendo, obtemos

$$\frac{dx}{d\phi} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2\lambda}{n+1}\phi^{n+1} - m_\phi^2\phi^2 + 2C_1}}, \tag{2.16}$$

assim, temos que:

$$x + C_2 = \pm\int\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2\lambda}{n+1}\phi^{n+1} - m_\phi^2\phi^2 + 2C_1}}, \tag{2.17}$$

em que C_1 e C_2 são constantes de integração.

Usando a transformação:

$$\phi = \left(\frac{(n+1)m_\phi^2}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{n-1}} z \qquad n \geq 0, n \neq 1, \tag{2.18}$$

podemos escrever a integral (2.17) da forma:

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{m_\phi}\int \frac{dz}{\sqrt{z^{n+1} - z^2 + \frac{D}{2}}}. \tag{2.19}$$

onde $D = \left(\frac{2C_1}{m_\phi^2}\right)\left(\frac{2\lambda}{(n+1)m_\phi^2}\right)^{\frac{2}{n-1}}$. Nosso interesse concentra-se nos modelos para os quais os termos de auto-interação da Lagrangeana (2.1) são polinomiais. Buscaremos, agora, algumas soluções da integral primeira (2.19).

Iniciaremos com o caso em que o campo ϕ não possui massa. Nesse caso, a integral primeira (2.17) reduz-se a

$$x = \pm\sqrt{\frac{n+1}{2\lambda}}\int \frac{d\phi}{\sqrt{\phi^{n+1} + \frac{(n+1)C_1}{\lambda}}}. \tag{2.20}$$

Caso $C_1 = 0$, temos

$$x = \pm\sqrt{\frac{n+1}{2\lambda}}\int \frac{d\phi}{\sqrt{\phi^{n+1}}} = \pm\sqrt{\frac{2(n+1)}{\lambda}}\frac{1}{1-n}\phi^{\frac{1-n}{2}}, \tag{2.21}$$

e portanto

$$\phi(x) = \left[(1-n)^2\frac{\lambda}{2(n+1)}x^2\right]^{\frac{1}{1-n}} \tag{2.22}$$

Para o caso em que $C_1 \neq 0$, a integral pode ser escrita como

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2C_1}}\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{-\lambda}{C_1(n+1)}\phi^{n+1}}}. \tag{2.23}$$

Efetuando a mudança de variável

$$u^{n+1} = \frac{C_1(n+1)}{-\lambda}\phi^{n+1}, \tag{2.24}$$

encontramos

$$\left(\frac{-\lambda}{C_1(n+1)}\right)^{\frac{1}{n+1}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^{n+1}}} = \left(\frac{-\lambda}{C_1(n+1)}\right)^{\frac{1}{n+1}}\int_0^u \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^{n+1}}}. \tag{2.25}$$

Uma nova mudança de variável

$$\tau^{n+1} = u^{n+1} z, \tag{2.26}$$

leva a

$$x = \pm \left(\frac{-\lambda}{C_1(n+1)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{u}{n+1} \int_0^1 z^{-\frac{n}{n+1}} \left(1 - u^{n+1} z\right)^{-\frac{1}{2}} dz. \tag{2.27}$$

Comparando a equação (2.27) à representação integral da função hipergeométrica ${}_2F_1(a,b;c;y)$

$${}_2F_1(a,b;c;y) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}, \tag{2.28}$$

e invertendo as mudanças de variável, obtemos a seguinte solução

$$\begin{aligned} x = \pm \left(\frac{-\lambda}{C_1(n+1)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{2\lambda}} \phi \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{n+1}, -\frac{\lambda}{(n+1)C_1} \phi^{n+1} \right), \end{aligned} \tag{2.29}$$

em que ϕ está definida implicitamente.

Para $m_\phi \neq 0$ a integral em (2.19) Será analisada em dois casos, $D = 0$ e $D \neq 0$.

O Caso $D = 0$

A integral em (2.19) é facilmente resolvida para $D = 0$, caso em que obtemos:

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{m_\phi} \int \frac{dz}{\sqrt{z^{n+1} - z^2}} = \pm \frac{1}{m_\phi} \frac{2}{n-1} \arcsin\left(z^{\frac{1-n}{2}} \right), n \neq 1, n \neq 2,$$

que fornece a solução para ϕ:

$$\phi(x) = \left[\frac{(n+1)\, m_\phi^2}{2\lambda} \csc^2\left(\frac{m_\phi(n-1)}{2}(x + C_2) \right) \right]^{\frac{1}{n-1}} \qquad n \geq 0, n \neq 1. \tag{2.30}$$

Essa solução, no entanto, não é limitada, uma vez que a função co-secante é, para n fixo, divergente nos pontos:

$$x_k = \frac{2k\pi}{m_\phi(n-2)} - C_2, \quad n \neq 0, n \neq 1 \quad n \neq 2. \tag{2.31}$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Na figura 2.1 mostramos o gráfico da solução (2.30) para $n = 4$. Também tomamos, sem perda de generalidade para a nossa análise, $\dfrac{(n+1)\, m_\phi^2}{2\lambda} = 1$ e $\dfrac{m_\phi(n-1)}{2} = 1$ nas figuras. Também podemos tomar $C_2 = 0$ devido à simetria translacional, de modo que esse valor será fixado em todo o restante deste trabalho. A figura 2.1 é um gráfico típico da solução (2.30).

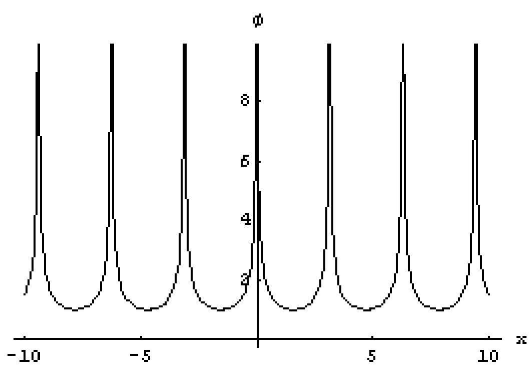

Figura 2.1: Gráfico da solução (2.30) para $n = 4$.

Temos, portanto que, para $D = 0$ em (2.19), as soluções da equação (2.8) têm um número infinito de singularidades com excessão do caso $n = 0$. Veremos adiante que, para $D \neq 0$, outras soluções não-singulares e não-triviais aparecem.

O problema, então, consiste em resolver a integral em (2.19) com $D \neq 0$, denominada Integral Abeliana ou Hiperelíptica [16]". É possível resolver essa integral, usando funções elípticas, para os casos em que n toma os valores 2, 3 e 5, que correspondem aos modelos $\lambda\phi^3$,$\lambda\phi^4$ e $\lambda\phi^6$, em Teoria Clássica de Campos Escalares. Nesses casos, a integral (2.19) reduz-se a uma Integral Elíptica de Primeiro Tipo.

O Caso $D \neq 0$

2.2.1 O caso $n = 2$

Nesse caso a equação (2.19) se reduz a:

$$x = \pm\frac{1}{m_\phi}\int\frac{dz}{\sqrt{z^3 - z^2 + \frac{D}{2}}}. \tag{2.32}$$

Como o polinômio na equação acima tem grau 3, podemos dividir o problema em 3 subcasos: $P(z)$ possui $1, 2$ ou 3 raízes reais disintas. Inicialmente calcularemos os valores do parâmetro D para os quais cada um desses casos ocorre. O Polinômio $P(z) = z^3 - z^2 + \dfrac{D}{2}$ possui as seguintes raízes:

$$z_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\Delta} + \frac{\Delta}{2^{\frac{2}{3}}}\right),$$

$$z_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{\frac{1}{3}}\Delta} - \frac{(1-\sqrt{3}i)\Delta}{2^{\frac{5}{3}}}\right)$$

e

$$z_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2^{\frac{1}{3}}\Delta} - \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\Delta}{2^{\frac{5}{3}}}\right).$$

Em que o parâmetro Δ é definido da forma:

$$\Delta = \left(4 - 27D + 3\sqrt{3}\sqrt{27D^2 - 8D}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{2.33}$$

Nosso objetivo, agora, é encontrar condições sobre o parâmetro D para os quais o polinômio possua 1, 2, ou 3 raízes distintas. Se $P(z)$ possui uma única raiz real então essa raiz tem multiplicidade 1, pois caso tivesse multiplicidade 3 teríamos:

$$P(z) = z^3 - z^2 + \frac{D}{2} = (z - z_1)^3 = z^3 + 3z_1^2 z - 3z_1 z^2 - z_1^3,$$

o que implicaria que z_1 admite 2 valores distintos simultaneamente, $z_1 = 0$ e $z_1 = 1/3$.

Portanto, se $P(z)$ possui uma única raiz real, essa tem multiplicidade 1. Supondo que Δ é um parâmetro complexo, isto é, $\Delta = a + bi$, temos a seguintes condições para que as raízes sejam reais:

1. z_1 é real se:

$$\left(-\frac{2^{\frac{2}{3}}}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) b = 0,$$

   ou seja, se

$$b = 0 \tag{2.34}$$

   ou

$$a^2 + b^2 = 2^{\frac{4}{3}} \tag{2.35}$$

2. z_2 é real se:

$$\left(b - \sqrt{3}a\right)\left(\frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}\right) = 0$$

   ou seja, se

$$b = \sqrt{3}a \tag{2.36}$$

$$a^2 + b^2 = 2^{\frac{4}{3}} \tag{2.37}$$

   e

3. z_3 é real se:

$$\left(b + \sqrt{3}a\right)\left(\frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}\right) = 0$$

   ou seja, se

$$b = -\sqrt{3}a \tag{2.38}$$

   ou

$$a^2 + b^2 = 2^{\frac{4}{3}} \tag{2.39}$$

Para que z_1 seja a única raiz real, devemos ter $b = 0$, pois nesse caso temos $\Delta = a$ e:

$$z_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{a} + \frac{a}{2^{\frac{2}{3}}}\right), \tag{2.40}$$

$$z_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{\frac{1}{3}}a} - \frac{(1-\sqrt{3}i)a}{2^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}a} - \frac{a}{2^{\frac{5}{3}}}\right] - i\sqrt{3}\left[\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}a} - \frac{a}{2^{\frac{5}{3}}}\right]\right), \tag{2.41}$$

$$z_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2^{\frac{1}{3}}a} - \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)a}{2^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}a} - \frac{a}{2^{\frac{5}{3}}}\right] + \sqrt{3}i\left[\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}a} - \frac{a}{2^{\frac{5}{3}}}\right]\right). \tag{2.42}$$

Dessa forma, para $a \neq \pm 2^{\frac{2}{3}}$ temos que z_1 é a única raiz real do polinômio. Para $a = 2^{\frac{2}{3}}$, que corresponde a $D = 0$, temos $z = 0$ como uma raiz com multiplicidade 2. Se, no entanto, $a = -2^{\frac{2}{3}}$, temos $z = \frac{2}{3}$ como raiz de multiplicidade 2, correspondendo a $D = \frac{8}{27}$.

Para que z_2 seja a única raiz real, devemos ter $b = \sqrt{3}a$ e nesse caso:

$$z_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{a(1+\sqrt{3}i)} + \frac{a(1+\sqrt{3}i)}{2^{\frac{2}{3}}}\right) =$$

$$= \quad \tfrac{1}{3}\left[\left(1 + \tfrac{1}{2^{\frac{4}{3}}a} + \tfrac{a}{2^{\frac{2}{3}}}\right) + \tfrac{\sqrt{3}i}{2}\left(2^{\frac{1}{3}}a - \tfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}a}\right)\right], \tag{2.43}$$

$$z_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{a(1+\sqrt{3}i)} - \frac{(1-\sqrt{3}i)a(1+\sqrt{3}i)}{2^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - 2^{\frac{1}{3}}a - \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}a}\right), \tag{2.44}$$

$$z_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2^{\frac{1}{3}}a(1+\sqrt{3}i)} - \frac{a\left(1+\sqrt{3}i\right)(1+\sqrt{3}i)}{2^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}a} + \frac{a}{2^{\frac{2}{3}}}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}a} - 2^{\frac{1}{3}}a\right)\right]. \tag{2.45}$$

Nesse caso, z_2 é a única raiz real a menos que $a = \pm 2^{-\frac{1}{3}}$, ou seja, $\Delta = \pm 2^{-\frac{1}{3}}\left(1+\sqrt{3}i\right)$, que implica em $D = 0$ para $a = 2^{-\frac{1}{3}}$ e $D = \frac{8}{27}$ para $a = -2^{-\frac{1}{3}}$.

Para que z_3 seja a única raiz real devemos ter $\Delta = a(1-\sqrt{3}i)$, que implica em:

$$z_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{a(1-\sqrt{3}i)} + \frac{a(1-\sqrt{3}a)}{2^{\frac{2}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}a} + \frac{a}{2^{\frac{2}{3}}}\right) + \sqrt{3}i\left(\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}a} - \frac{a}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\right), \tag{2.46}$$

$$z_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2^{\frac{1}{3}}a(1-\sqrt{3}i)} - \frac{(1-\sqrt{3}i)(a(1-\sqrt{3}i))}{2^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}a} + \frac{a}{2^{\frac{2}{3}}}\right) + \sqrt{3}i\left(\frac{a}{2^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}a}\right)\right], \tag{2.47}$$

$$z_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2^{\frac{1}{3}}a(1-\sqrt{3}i)} - \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)(a(1-\sqrt{3}i))}{2^{\frac{5}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - 2^{\frac{1}{3}}a - \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}a}\right). \tag{2.48}$$

Então, nesse caso, z_3 é a única raiz real a menos que $a = \pm 2^{-\frac{1}{3}}$, casos que correspondem a $D = 0$ e $D = D = \frac{8}{27}$.

Podemos garantir que os valores de D para os quais o polinômio $p_3(z) = z^3 - z^2 + \frac{D}{2}$ possui raízes múltiplas são somente $D = 0$ e $D = \frac{8}{27}$ através do teorema:

Teorema 1 *Seja z^* uma raiz do polinômio $P(z)$ com grau maior que 1. Então z^* possui multiplicidade maior que 1 se, e somente se, z^* é raiz de $P'(z)$.*

Prova: Seja $m \neq 1$ a multiplicidade de z^*. Então $P(z) = (z - z^*)^m g(z)$, em que $g(z)$ é um polinômio e $g(z^*) \neq 0$. A derivada de $P(z)$ é :

$$P'(z) = (z - z^*)^m g(z) + m(z - z^*)^{m-1} g'(z),$$

e então, $P'(z^*) = 0$.

Reciprocamente, supondo que z^* é uma raiz tanto de $P(z)$ quanto de $P'(z)$. Se a multiplicidade de z^* é $m = 1$ então podemos escrever:

$$P(z) = (z - z^*)g(z),$$

e assim

$$P'(z) = g(z) + (z - z^*)g'(z),$$

que implica em $P'(z^*) = g(z^*) \neq 0$. Portanto $m > 1$.$\blacksquare$

Para o caso em que o polinômio possui três raízes reais distintas, temos a condição:

$$a^2 + b^2 = 2^{\frac{4}{3}}$$

ou seja, $\Delta = 2^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}$, onde $\dfrac{\theta}{3} \in [-\pi, \pi]$. A partir da equação (2.33) obtemos:

$$D = \frac{4}{27}\left(1 - \cos\theta\right), \tag{2.49}$$

e assim, encontramos:

$$D \in \left(0; \frac{8}{27}\right). \tag{2.50}$$

Podemos resumir as relações entre o número de raízes de $P(z)$ e os valores de D da seguinte forma:

- $P(z)$ possui 1 única raiz real se:

$$D \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{27}, \infty\right);$$

- $P(z)$ possui 2 raízes reais distintas se:

$$D = 0 \quad ou \quad D = \frac{8}{27},$$

- $P(z)$ possui uma 3 raízes reais distintas se:

$$D \in \left(0, \frac{8}{27}\right).$$

Na figura 2.2 apresentamos a variação do número N de raízes reais distintas do polinômio $P(z)$ conforme a variação de D. Estudaremos, a seguir, as transformações trigonométricas em cada um dos casos acima.

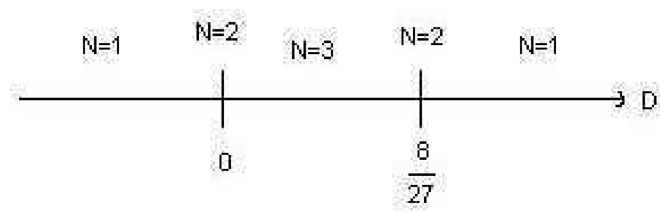

Figura 2.2: Número de Raízes de $P(z)$ conforme o valor de D.

a) $P(z)$ possui uma única raiz real $\left(D \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{27}, \infty\right)\right)$:

Vimos anteriormente que $P(z)$ não pode ter uma raiz com multiplicidade 3. Se, no entanto, z_1 possui multiplicidade 1, usamos uma "Integral Elíptica", através da transformação apresentada no próximo parágrafo. Uma vez que $P(z)$ é positivo somente para $z > z_1$, conforme podemos ver no gráfico da figura 2.3 (em que tomamos $D = -4$), usamos a transformação[17]:

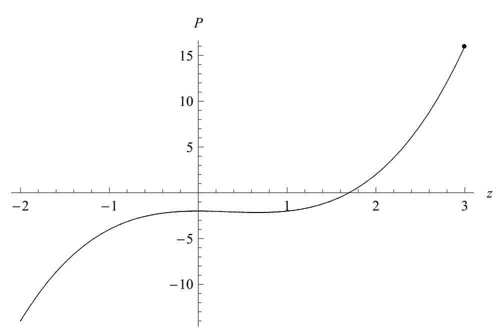

Figura 2.3: Aspecto do gráfico de $P(z)$ com uma única raiz real

$$\cos\varphi = \frac{\sigma^2 - (z - z_1)}{\sigma^2 + (z - z_1)}, \tag{2.51}$$

com:

$$\sigma^2 = [P'(z_1)]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.52}$$

Para transformar a integral:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3 - z^2 + \frac{D}{2}}}, \tag{2.53}$$

em

$$\frac{1}{\sigma} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{2.54}$$

com κ dado por:

$$\kappa = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{P''(z_1)}{[P'(z_1)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.55}$$

A integral (2.54) é dada por:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, \kappa), \tag{2.56}$$

onde $F(\varphi, \kappa)$ é chamada Integral Elíptica de Primeiro Tipo. Dessa forma, temos que:

$$x = \pm \frac{1}{\sigma m_\phi} F[\varphi, \kappa] = \pm \frac{1}{\sigma m_\phi} F\left[\arccos\left(\frac{\sigma^2 - (z - z_1)}{\sigma^2 + (z - z_1)}\right), \kappa\right]. \tag{2.57}$$

A inversa da função $F(z, \kappa)$ é a função Amplitude de Jacobi $\mathrm{am}(z, \kappa)$, definida como:

$$\mathrm{am}(z, \kappa) = \arcsin(\mathrm{sn}(z, \kappa)), \tag{2.58}$$

onde sn é a função Seno Elíptico de Jacobi.

Assim, podemos isolar z na equação (2.57), obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 - (z - z_1)}{\sigma^2 + (z - z_1)} &= \cos\left(\mathrm{am}\left[\pm \sigma m_\phi x; \kappa\right]\right) = \\ &\mathrm{cn}\left[\pm \sigma m_\phi x; \kappa\right] = \mathrm{cn}\left[\sigma m_\phi x; \kappa\right], \end{aligned} \tag{2.59}$$

a partir da qual obtemos:

$$z(x) = \frac{(z_1 - \sigma^2)\mathrm{cn}\left[\sigma m_\phi x; \kappa\right] + (z_1 + \sigma^2)}{1 + \mathrm{cn}\left[\sigma m_\phi x; \kappa\right]}. \tag{2.60}$$

Usando a equação (2.18) para $n = 2$, encontramos:

$$\phi(x) = \frac{3m_\phi^2}{2\lambda} \frac{(z_1 - \sigma^2)\text{cn}\,[\sigma m_\phi x; \kappa] + (z_1 + \sigma^2)}{1 + \text{cn}\,[\sigma m_\phi x; \kappa]}. \tag{2.61}$$

Os gráficos das soluções (2.61) possuem o aspecto do gráfico apresentado na figura 2.4, em que tomamos $D = -3$, e σ e κ são calculados através de (2.52) e (2.55).

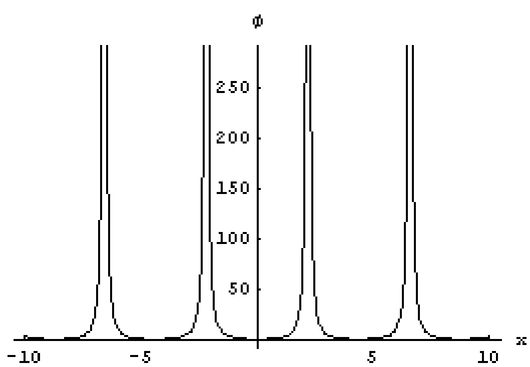

Figura 2.4: Gráfico da solução (2.61) para $D = -3$, $x \in (-10, 10)$.

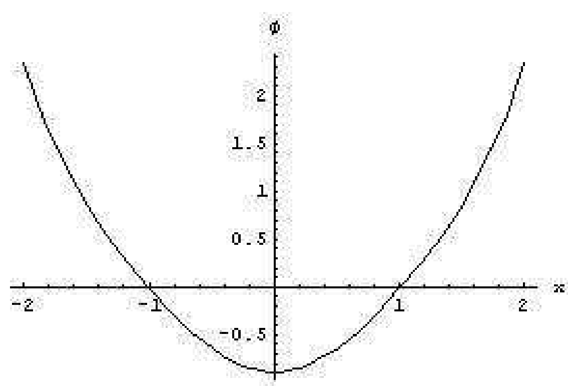

Figura 2.5: Gráfico da solução (2.61) para $D = -3$, $x \in (-2, 2)$.

Se, no entanto, $z \leq z_1$, o polinômio $P_3(z)$ é negativo e, a integral não é real.

b) $P(z)$ possui 2 raízes reais $\left(D = \frac{8}{27}\right)$:

O polinômio $P(z) = z^3 - z^2 + \dfrac{4}{27}$ possui as raízes $z = -\dfrac{1}{3}$ e $z = \dfrac{2}{3}$, é positivo para $z > -\frac{1}{3}$ e $z \neq \frac{2}{3}$ e pode ser escrito da forma:

$$P(z) = \left(z + \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{2}{3}\right)^2. \tag{2.62}$$

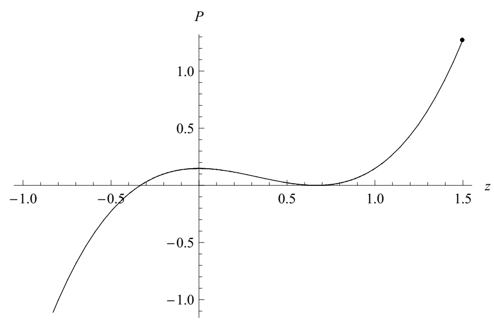

Figura 2.6: Gráfico de $P(z)$ com 2 raízes reais.

Assim, a integral primeira fica:

$$x = \pm \frac{1}{m_\phi} \int \frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)^2}}, \tag{2.63}$$

que fornece:

$$x = \frac{2}{\sqrt{-1}} \operatorname{arctan}\left(\frac{\sqrt{z+\frac{1}{3}}}{\sqrt{-1}}\right) = -2\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{z+\frac{1}{3}}\right), \tag{2.64}$$

dessa forma, a solução é:

$$z = -\frac{1}{3} + \operatorname{arctanh}^2\left(\frac{x}{2}\right). \tag{2.65}$$

e portanto,

$$\phi(x) = \frac{3m_\phi^2}{2\lambda}\left(-\frac{1}{3} + \operatorname{arctanh}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{2.66}$$

Da equação (2.64) segue que $x \in (0, \infty)$, porém, como a solução (2.66) é par e contínua em $x = 0$, podemos estender seu domínio para toda a reta real.

A figura 2.7 mostra o gráfico da equação (2.66) para $z_1 = -1/3$ e $z_2 = 2/3$:

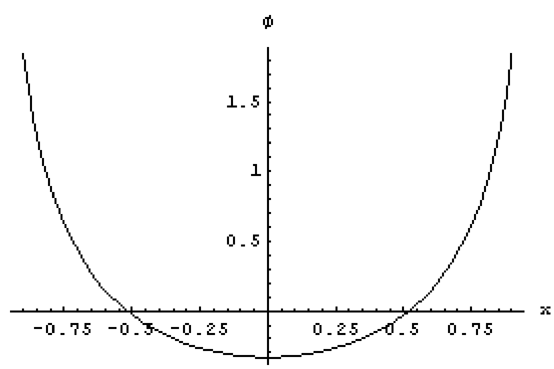

Figura 2.7: Gráfico da solução (2.66) para $D = 8/27$.

c) $P(z)$ possui 3 raízes reais $\left(D \in \left(0, \frac{8}{27}\right)\right)$:

Suponhamos, agora, que $P(z)$ possui 3 raízes reais, z_1, z_2 e z_3 satisfazendo:

$$z_1 > z_2 > z_3. \tag{2.67}$$

Vamos, também, definir os parâmetros σ e κ como:

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{z_1 - z_3}, \tag{2.68}$$

e

$$\kappa = \left(\sqrt{\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}\right). \tag{2.69}$$

Buscamos, então, transformações que levem a integral da equação (2.53) na Integral Elíptica de Primeiro Tipo:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa \sin^2 \phi}}. \tag{2.70}$$

Dividimos nossa análise em 2 casos, conforme os intervalos criados pelas raízes, como mostrado no gráfico abaixo:

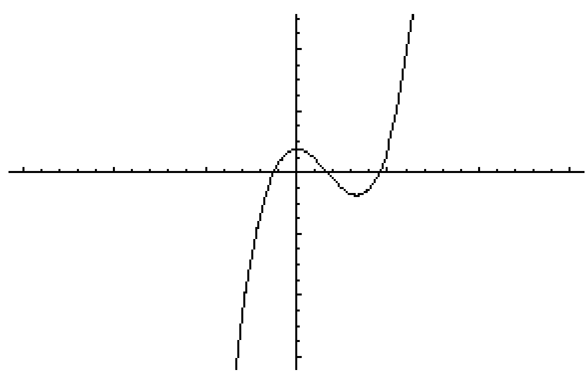

Figura 2.8: Aspecto do gráfico do polinômio $P(z) = z^3 - z^2 + D/2$ para $D \in \left(0; \frac{8}{27}\right)$.

Queremos estudar apenas os casos em que a integral (2.32) é real. Isto implica em $P(z) > 0$. Na análise abaixo vamos considerar vários casos onde esta condição é satisfeita.

Vemos, pelo gráfico da figura 2.8, que o polinômio é positivo somente nos intervalos (z_3, z_2) e (z_1, ∞). Analisaremos esses casos a seguir:

C1) $z_3 < z < z_2$**:**

Nesse caso usamos a transformação:

$$\sin^2 \varphi = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}, \tag{2.71}$$

e dessa forma, temos a solução:

$$z = z_3 + (z_2 - z_3)\,\mathrm{sn}^2\left[\sigma m_\phi x; \kappa\right], \tag{2.72}$$

e

$$\phi(x) = \frac{3m_\phi^2}{2\lambda}\left(z_3 + (z_2 - z_3)\,\mathrm{sn}^2\left[\sigma m_\phi x; \kappa\right]\right). \tag{2.73}$$

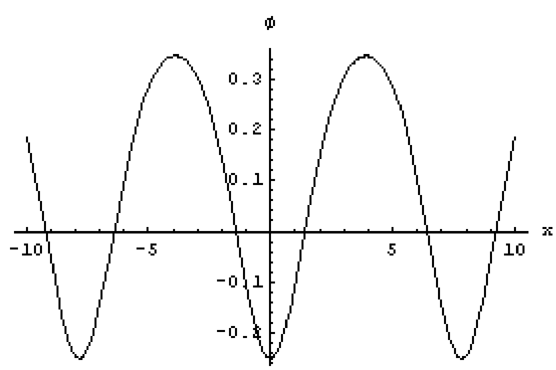

Figura 2.9: Gráfico da solução (2.73) para $D = 4/27$

C2) $z > z_1$ **:**

Utilizamos a transformação:

$$\sin^2\varphi = \frac{z - z_1}{z - z_2}. \tag{2.74}$$

E assim encontramos:

$$z = \frac{z_1 - z_2\,\mathrm{sn}^2\,[\sigma m_\phi x;\kappa]}{1 - \mathrm{sn}^2\,[\sigma m_\phi x;\kappa]}, \tag{2.75}$$

de onde segue-se

$$\phi = \frac{3m_\phi^2}{2\lambda}\frac{z_1 - z_2\,\mathrm{sn}^2\,[\sigma m_\phi x;\kappa]}{1 - \mathrm{sn}^2\,[\sigma m_\phi x;\kappa]}. \tag{2.76}$$

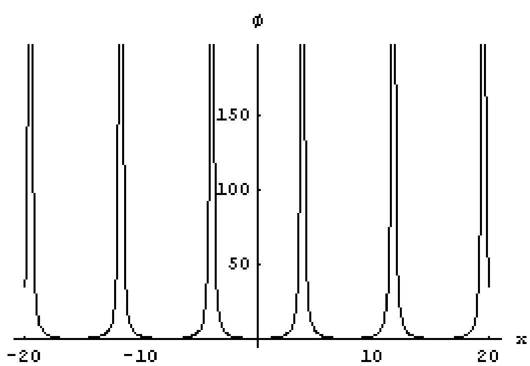

Figura 2.10: Gráfico da solução (2.76) para $D = 4/27$

2.2.2 O caso $n = 3$

Este caso foi estudado por Carrillo *et al*, nas referências [2, 3, 4]. Incluímos aqui por questão de completude do método e para comparação com as novas soluções obtidas e outros casos.

A integral (2.17) reduz-se a:

$$x = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}\phi^4 - m_\phi^2\phi^2 + 2C_1}}. \tag{2.77}$$

Através da mudança de variável:

$$z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}m_\phi}\phi; \tag{2.78}$$

a integral (2.77) toma a forma:

$$x = \pm\frac{1}{m_\phi}\int \frac{d\phi}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{D}{2}}}, \tag{2.79}$$

onde $\dfrac{D}{2} = \dfrac{4C_1\lambda}{m_\phi^4}$.

Os pontos críticos de $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{D}{2}}}$ são $z = 0$ e $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nesses pontos $f(z)$ não está definida para $D = 0$ e $D = \frac{1}{2}$, respectivamente. Assim, dividiremos a análise da integral em três casos, $D \leq 0$, $0 < D < \frac{1}{2}$ e $D \geq \frac{1}{2}$.

a) $D \leq 0$**:**

Para que a integral (2.79) seja real impomos a condição:

$$z^4 - z^2 + \frac{D}{2} > 0, \tag{2.80}$$

que é satisfeita para

$$|z| > \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{2}} \tag{2.81}$$

A transformação:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2D}}}{\sqrt{2}z}\right), \tag{2.82}$$

leva a integral (2.79) a:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2\theta}}, \tag{2.83}$$

com:

$$\kappa^2 = \frac{-1+\sqrt{1-2D}}{2\sqrt{1-2D}}. \tag{2.84}$$

Dessa forma temos que:

$$x = \pm \frac{1}{m_\phi} F\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}{\sqrt{2}z}\right), \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-2D}}{2\sqrt{1-2D}}}\right). \tag{2.85}$$

Invertendo a função $F(\theta, \kappa)$, encontramos a função Amplitude de Jacobi am (θ, κ), e então:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}{\sqrt{2}z} &= \cos\left[\mathrm{am}\left(\pm m_\phi\,(x)\,; \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-2D}}{2\sqrt{1-2D}}}\right)\right] \equiv \\ &\equiv \mathrm{cn}\left(m_\phi\,(x)\,; \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-2D}}{2\sqrt{1-2D}}}\right),\end{aligned} \tag{2.86}$$

onde cn é a Função Elíptica de Jacobi do Tipo Co-seno. Assim,

$$z(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{cn}\left(m_\phi x; \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-2D}}{2\sqrt{1-2D}}}\right)}, \tag{2.87}$$

e portanto:

$$\phi(x) = \frac{m_\phi\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}{\sqrt{\lambda}\,\mathrm{cn}\left(m_\phi x; \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-2D}}{2\sqrt{1-2D}}}\right)}. \tag{2.88}$$

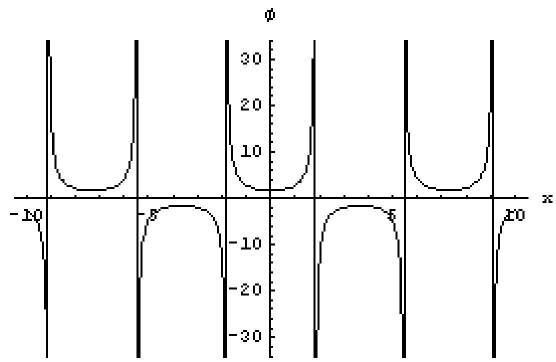

Figura 2.11: Gráfico da solução (2.88) para $D = -1$

b) $0 < D < \frac{1}{2}$

A condição $(z^4 - z^2 + \frac{D}{2}) > 0$ é satisfeita para:

$$|z| \geq \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{2}}, \tag{2.89}$$

ou

$$|z| \leq \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 2D}}{2}}. \tag{2.90}$$

No caso em que $|z| \geq \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{2}}$, a integral é dada por:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{D}{2}}} =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2D}}} F\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2D}}}{\sqrt{2}z}\right); \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{D}}\right], \tag{2.91}$$

e dessa forma, temos:

$$z = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2D}}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\text{sn}\left[\pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{2}} m_\phi x; \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{D}}\right]}, \tag{2.92}$$

então, o campo ϕ é dado por:

$$\phi(x) = \frac{m_\phi \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2D}}}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\text{sn}\left[\pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{2}} m_\phi x; \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2D}}{D}}\right]}. \tag{2.93}$$

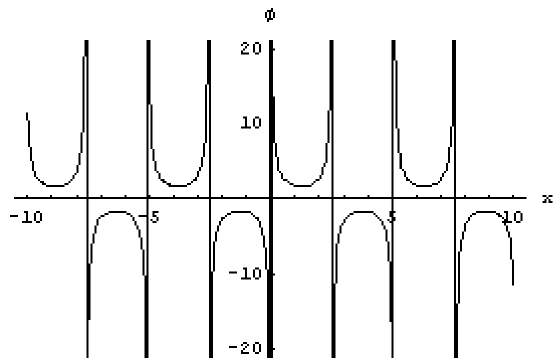

Figura 2.12: Gráfico da solução (2.93) para $D = -1$

No entanto, se $|z| \leq \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-2D}}{2}}$ a integral fica:

$$\int \frac{dz}{z^4 - z^2 + \frac{D}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}} F\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1-\sqrt{1-2D}}}\right); \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2D}}{D}}\right). \quad (2.94)$$

Assim, temos que:

$$F\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1-\sqrt{1-2D}}}\right); \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2D}}{D}}\right) =$$

$$= \pm \frac{m_\phi\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}{\sqrt{2}} x. \quad (2.95)$$

Resolvendo a equação (2.95), encontramos:

$$z = \pm \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}} \,\mathrm{sn}\left(\frac{m_\phi\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}{\sqrt{2}} x; \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2D}}{D}}\right), \quad (2.96)$$

e então:

$$\phi(x) = \pm \frac{m_\phi}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{2D}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}} \,\mathrm{sn}\left(\frac{m_\phi\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}{\sqrt{2}} x; \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2D}}{D}}\right) (2.97)$$

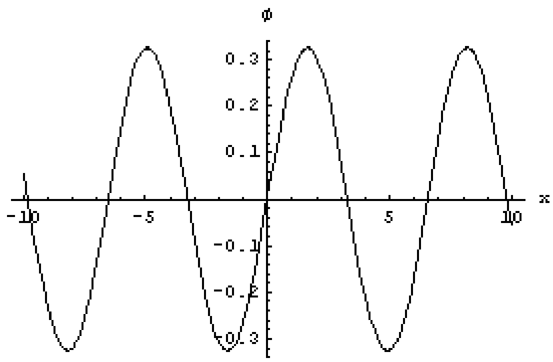

Figura 2.13: Gráfico da solução (2.97) para $D = 0.1$

c) $D \geq \frac{1}{2}$**:**

Neste caso, a condição $(z^4 - z^2 + \frac{D}{2}) > 0$ é satisfeita para todo $z \in \mathbb{R}$. Dessa forma a integral fica:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{D}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{2}{D}} F\left(2\arctan\left(\sqrt[4]{\frac{2}{D}}z\right); \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2D}}\right)\right), \quad (2.98)$$

a partir da qual obtemos:

$$F\left(2\arctan\left(\sqrt[4]{\frac{2}{D}}z\right); \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2D}}\right)\right) = \pm 2m_\phi \sqrt[4]{\frac{D}{2}}x, \quad (2.99)$$

e assim:

$$|\phi(x)| = \frac{m_\phi \sqrt[4]{2D}}{\sqrt{\lambda}} \left| \frac{\mathrm{sn}\left(\sqrt[4]{\frac{D}{2}}m_\phi x; \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2D}})\right) \mathrm{dn}\left(\sqrt[4]{\frac{D}{2}}m_\phi x; \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2D}})\right)}{\mathrm{cn}\left(\sqrt[4]{\frac{D}{2}}m_\phi x; \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2D}})\right)} \right| \quad (2.100)$$

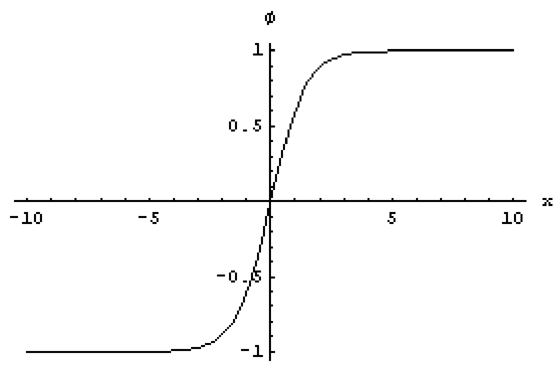

Figura 2.14: Gráfico da solução (2.100) para $D = 0.5$

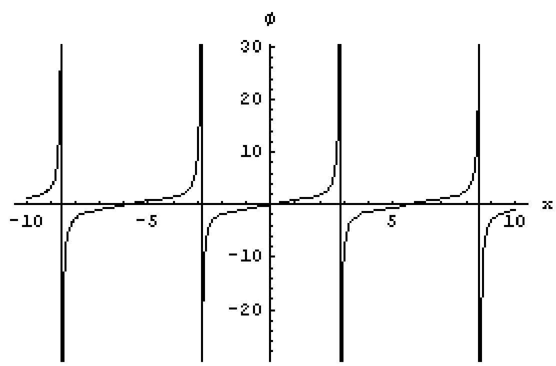

Figura 2.15: Gráfico da equação (2.100) para $D = 1$

A solução (2.100) é analítica somente para $D = 1/2$.

2.2.3 O caso $n = 5$

A integral (2.17) reduz-se, agora, a:

$$x = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\lambda}{3}\phi^6 - m_\phi^2\phi^2 + 2C_1}} = \pm\frac{1}{m_\phi}\int \frac{dz}{\sqrt{z^6 - z^2 + \frac{D}{2}}}. \tag{2.101}$$

A mudança de variável:

$$\tau = \frac{D}{2z^2}, \tag{2.102}$$

nos leva à:

$$x = \pm\frac{1}{2m_\phi}\int \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3 - \tau^2 + (\frac{D}{2})^2}}. \tag{2.103}$$

Podemos observar que esta integral é semelhante à que aparece em (2.32). A análise abaixo segue, então, os mesmos passos do caso $n = 3$, com algumas adaptações pelo fato de o coeficiente constante do polinômio ser estritamente positivo.

O Polinômio $P(\tau) = \tau^3 - \tau^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2$ possui as seguintes raízes:

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\Delta} + \frac{\Delta}{2}\right),$$

$$\tau_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{\Delta} - \frac{(1-\sqrt{3}i)\Delta}{4}\right)$$

e

$$\tau_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{\Delta} - \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\Delta}{4}\right).$$

Em que o parâmetro Δ é definido da forma:

$$\Delta = \left(8 - 27D^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27D^4 - 16D^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{2.104}$$

Nosso objetivo, agora, é encontrar condições sobre o parâmetro D para os quais o polinômio possua 1, 2, ou 3 raízes. Analisaremos inicialmente o caso em que $P(t)$ possui somente uma raiz real.

Se $P(\tau)$ possui uma única raiz real então essa raiz tem multiplicidade 1, pois caso tivesse multiplicidade 3 teríamos:

$$P(\tau) = \tau^3 - \tau^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = (\tau - \tau_1)^3 = \tau^3 + 3\tau_1^2\tau - 3\tau_1\tau^2 - \tau_1^3,$$

o que implicaria em τ_1 admitindo 2 valores distintos simultaneamente, $\tau_1 = 0$ e $\tau_1 = 1/3$. Portanto, se $P(\tau)$ possui uma única raiz real, essa tem multiplicidade 1.

Supondo que Δ é um parâmetro complexo, isto é, $\Delta = a + bi$, temos a seguintes condições para que as raízes sejam reais:

1. τ_1 é real se:

$$\left(-\frac{2}{a^2+b^2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

ou seja, se

$$b = 0 \tag{2.105}$$

ou

$$a^2 + b^2 = 4 \tag{2.106}$$

2. τ_2 é real se:

$$\left(b - \sqrt{3}a\right)\left(\frac{1}{a^2+b^2} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

ou seja, se

$$b = \sqrt{3}a \tag{2.107}$$

$$a^2 + b^2 = 4 \tag{2.108}$$

e

3. τ_3 é real se:

$$\left(b + \sqrt{3}a\right)\left(\frac{1}{a^2+b^2} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

ou seja, se

$$b = -\sqrt{3}a \tag{2.109}$$

ou

$$a^2 + b^2 = 4 \tag{2.110}$$

Agora, para que τ_1 seja a única raiz real, devemos ter $b = 0$, pois nesse caso temos $\Delta = a$ e:

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{a} + \frac{a}{2}\right), \tag{2.111}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{a} - \frac{(1-\sqrt{3}i)a}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \frac{1}{3}a - \frac{a}{4}\right] - i\sqrt{3}\left[\frac{1}{a} - \frac{a}{4}\right]\right), \tag{2.112}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{a} - \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)a}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \frac{1}{a} - \frac{a}{4}\right] + \sqrt{3}i\left[\frac{1}{a} - \frac{a}{4}\right]\right). \tag{2.113}$$

Dessa forma, para $a \neq 4$ temos que τ_1 é a única raiz real do polinômio. Se, no entanto, $a = 4$ temos:

$$\Delta = \left(8 - 27D^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27D^4 - 16D^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 4,$$

o que implica em D complexo. Então, não existe um valor real para D para o qual $\Delta = 4$.

Para que τ_2 seja a única raiz real, devemos ter $b = \sqrt{3}a$ e nesse caso:

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{a(1+\sqrt{3}i)} + \frac{a(1+\sqrt{3}i)}{2}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[\left(1 + \tfrac{1}{2a} + \tfrac{a}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{3}i}{2}\left(a - \tfrac{1}{a}\right)\right], \tag{2.114}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{a(1+\sqrt{3}i)} - \frac{(1-\sqrt{3}i)a(1+\sqrt{3}i)}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - a - \frac{1}{a}\right), \tag{2.115}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{\Delta} - \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\Delta}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{2a} + \frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)\right]. \tag{2.116}$$

Nesse caso, τ_2 é a única raiz real a menos que $a = 1$, ou seja, $\Delta = 1 + \sqrt{3}i$, que implica em:

$$D = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}, \tag{2.117}$$

e para esses valores o polinômio $P(\tau)$ possui como raízes:

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \tau_2 = -\frac{1}{3}.$$

Para que τ_3 seja a única raiz real devemos ter $\Delta = a(1-\sqrt{3}i)$, que implica em:

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{a(1-\sqrt{3}i)} + \frac{a(1-\sqrt{3}a)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{2a} + \frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)\right), \tag{2.118}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{a(1-\sqrt{3}i)} - \frac{(1-\sqrt{3}i)(a(1-\sqrt{3}i))}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{2a} + \frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right], \tag{2.119}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}i}{a(1-\sqrt{3}i)} - \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(a(1-\sqrt{3}i)\right)}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - a - \frac{1}{a}\right). \tag{2.120}$$

Então, nesse caso, τ_3 é a única raiz real a menos que $a = 1$, caso em que as raízes são:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \tau_3 = -\frac{1}{3}.$$

Vamos analisar, agora, o caso em que o polinômio possui três raízes reais distintas. Temos a condição:

$$a^2 + b^2 = 4.$$

Daí podemos escrever, $\Delta = 2e^{i\frac{\theta}{3}}$, onde $\dfrac{\theta}{3} \in [-\pi, \pi]$. Substituindo essa expressão na equação (2.33) e levando em conta a condição acima, encontramos, após alguma manipulação algébrica que as três raízes são reais e distintas se:

$$D = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\left(1 - \cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.121}$$

O intervalo é aberto, pois seus pontos extremos correspondem a $\cos\theta = -1$, que por sua vez, corresponde ao caso em que $P(\tau)$ tem raízes múltiplas.

Usando as equações (2.121) e (2.117), encontramos:

$$D \in \left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}; \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \quad D \neq 0. \tag{2.122}$$

Para encontrar as condições sobre D que garantem que $P(\tau)$ possui duas raízes reais, basta resolver a equação:

$$(\tau - \tau_1)^2(\tau - \tau_2) = \tau^3 - \tau^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2. \tag{2.123}$$

Expandindo o primeiro membro e comparando os termos em potências iguais de τ encontramos o sistema:

$$\begin{cases} 2\tau_1 + \tau_2 = 1 \\ \tau_1\left(\tau_1 + 2\tau_2\right) = 0 \\ -\tau_1^2\tau_2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\tau_1 = 0 \quad \text{e} \quad \tau_2 = 1,$$

correspondente ao caso em que $D = 0$ e

$$\tau_1 = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \tau_2 = -\frac{1}{3},$$

correspondente ao caso em que $D = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Podemos resumir as relações entre o número de raízes de $P(\tau)$ e os valores de D da seguinte forma:

R1):$P(\tau)$ possui uma única raiz real (com multiplicidade 1) se:

$$D \in \left(-\infty, -\frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}, \infty\right),$$

R2): $P(\tau)$ possui 2 raízes reais distintas se:

$$D = 0 \quad \text{ou} \quad D = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}},$$

R3): $P(\tau)$ possui 3 raízes reais distintas se:

$$D \in \left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{4}{3\sqrt{3}}\right).$$

De posse desses resultados podemos analisar as soluções do modelo $\lambda\phi^6$.

Caso R1)

a) $\tau \geq \tau_1$ para $P(\tau) > 0$:

$$\tau(x) = \frac{(\tau_1 - \sigma^2)\ \mathrm{cn}\left[2\sigma m_\phi x; \kappa\right] + (\tau_1 + \sigma^2)}{1 + \mathrm{cn}\left[2\sigma m_\phi x; \kappa\right]}, \tag{2.124}$$

com $\sigma = \sqrt[4]{3\tau_1^2 - 2\tau_1}$ e $\kappa = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{3\tau_1}{\sqrt{3\tau_1^2 - 2\tau_1}}$ e dessa forma, temos a solução:

$$\phi(x) = \pm\left[\left(\frac{3m_\phi^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{D}{2} \frac{1 + \mathrm{cn}\left[2\sigma m_\phi x; \kappa\right]}{(\tau_1 - \sigma^2)\ \mathrm{cn}\left[2\sigma m_\phi x; \kappa\right] + (\tau_1 + \sigma^2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.125}$$

Nas figuras a seguir mostramos o gráfico da solução positiva (2.125) para $D = \pm 0.8$.

Caso R2):

Nesse $P(\tau)$ possui duas raízes reais distintas e a solução $\tau(x)$ é:

$$\tau(x) = -\frac{1}{3} + \tanh^2(m_\phi x), \tag{2.126}$$

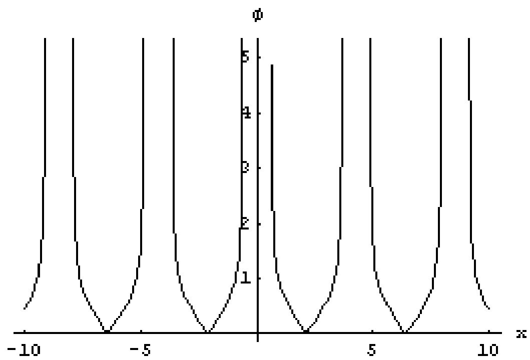

Figura 2.16: Gráfico da solução (2.125) para $D = 0.8$

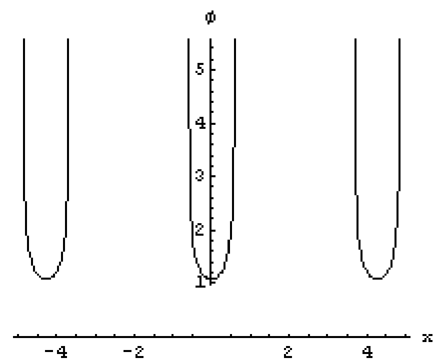

Figura 2.17: Gráfico da solução (2.125) para $D = -0.8$

e a solução $\phi(x)$ é dada por:

$$\phi(x) = \left[\left(\frac{3m_\phi^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{D}{2} \frac{1}{-\frac{1}{3} + \tanh^2(m_\phi(x))} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.127}$$

Apresentamos os gráficos da solução (2.127) para $D > 0$ e $D < 0$ respectivamente:

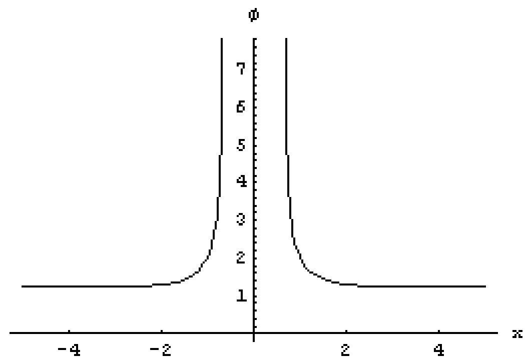

Figura 2.18: Gráfico da solução (2.125) para $D = 4/(3\sqrt{3})$

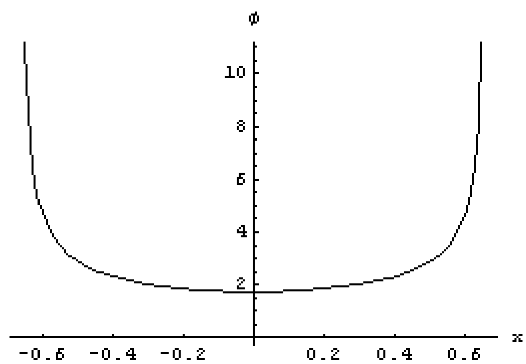

Figura 2.19: Gráfico da solução (2.125) para $D = -4/(3\sqrt{3})$

Caso R3:

Se $P(\tau)$ possui 3 raízes reais distintas $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$, temos :

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\tau_1 - \tau_3},$$

e

$$\kappa = \sqrt{\frac{\tau_2 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_3}}.$$

a) Se $\tau_3 < \tau < \tau_2$,

$$\tau(x) = \tau_3 + (\tau_2 - \tau_3)\,\mathrm{sn}^2\left[2\sigma m_\phi x; \kappa\right], \tag{2.128}$$

e

$$\phi(x) = \pm\left[\left(\frac{3m_\phi^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{D}{2}\frac{1}{\tau_3 + (\tau_2 - \tau_3)\,\mathrm{sn}^2\left[2\sigma m_\phi x;\kappa\right]}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.129)$$

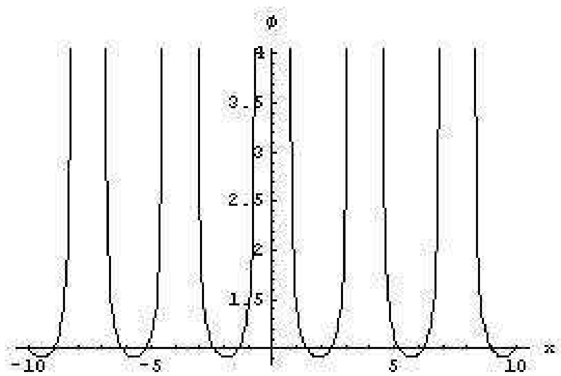

Figura 2.20: Gráfico da solução (2.129) para $D = 0.5$

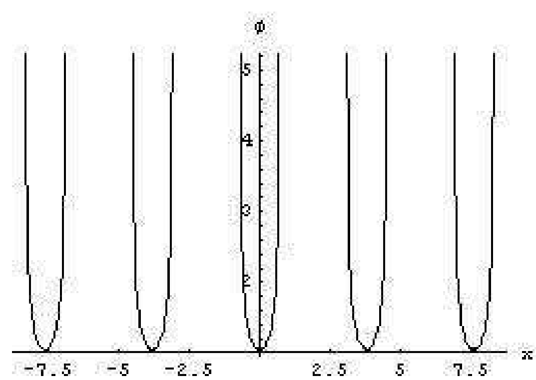

Figura 2.21: Gráfico da solução (2.129) para $D = -0.5$

A solução (2.129) é real se $\tau_3 < 0$, ou seja, a menor raiz do polinômio $P(\tau)$ deve ser negativa.

b) Se $\tau > \tau_1$:

$$\tau(x) = \frac{\tau_1 - \tau_2 \operatorname{sn}^2[2\sigma m_\phi x]}{1 - \operatorname{sn}^2[2\sigma m_\phi x]} \tag{2.130}$$

e

$$\phi(x) = \pm \left[\left(\frac{3m_\phi^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{D}{2} \frac{1 - \operatorname{sn}^2[2\sigma m_\phi x]}{\tau_1 - \tau_2 \operatorname{sn}^2[2\sigma m_\phi x]} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.131}$$

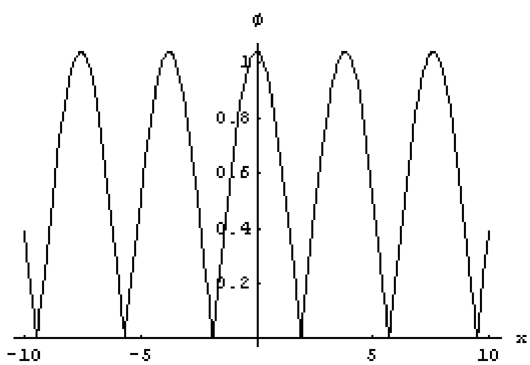

Figura 2.22: Gráfico da solução (2.131) para $D = 0.5$

Notamos que a solução (2.131) não está definida para $D < 0$.

Mostramos que para os modelos $\lambda\phi^{n+1}$, algumas soluções exatas podem ser encontradas através do formalismo da Integral Primeira, para os casos em que $n = 2$, $n = 3$ e $n = 5$. Esse formalismo, no entanto, fornece um número grande de soluções singulares e ainda outras com um grande número (até mesmo um número infinito) de intervalos onde a solução não é real. Isto não implica, porém, que as soluções singulares não sejam úteis. Elas podem perfeitamente ser utilizadas como poços de potencial para a equação de Schrödinger, bem como satisfazer condições de fronteira dentro de seus intervalos de definição, sendo portanto permitidas em Teoria de Campos em domínios limitados. No entanto, são obtidas também algumas soluções regulares.

Capítulo 3

Cálculo de Flutuações no Modelo $\lambda\phi^{n+1}$

3.1 Equações das Flutuações

Iniciamos com a Lagrangeana para o campo clássico ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{n+1}\phi^{n+1}, \tag{3.1}$$

com n assumindo valores inteiros positivos e $\phi = \phi(\bar{x}, t)$. A partir dessa Lagrangeana encontramos a equação:

$$-\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi - \lambda\phi^n = 0. \tag{3.2}$$

Com a assinatura $(+---)$, podemos escrever a equação 3.2 em dimensão $(1+1)$ da forma:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + m^2\phi - \lambda\phi^n = 0. \tag{3.3}$$

O problema consiste em resolver o equação (3.3) de forma que ϕ seja decomposto em uma solução estática $\phi_0(x)$ e uma flutuação quântica $\eta(x,t)$. Dessa forma:

$$\phi(x,t) = \phi_0(x,t) + \eta(x,t). \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3) e separando as equações para ϕ_0 e η encontramos:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + m^2\phi - \lambda\phi_0^n = 0, \tag{3.5}$$

e

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \left(m^2 - \lambda n\phi_0^{n-1}\right)\eta - \lambda\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\phi_0^{n-k}\eta^k = 0. \tag{3.6}$$

Soluções para a equação (3.5) são dadas pelo método da Integral Primeira. Nosso interesse, agora, é resolver a equação (3.6), e para isso dividiremos a análise em dois casos:

3.2 O Caso Linear

Admitindo que η é uma perturbação pequena, ou seja, que $\eta = \epsilon\xi$, então, na equação (3.6), temos que:

$$(m^2 - \lambda n \phi_0^{n-1}) >> \lambda \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \phi_0^{n-k} \eta^{k-1}. \tag{3.7}$$

Dessa forma encontramos a equação para ξ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \left(m^2 - \lambda n \phi_0^{n-1}\right) \xi = 0. \tag{3.8}$$

Podemos supor que ξ possui soluções estacionárias da forma:

$$\xi(x,t) = e^{i\omega t} \psi(x,t), \tag{3.9}$$

e assim, encontramos a seguinte equação para ψ:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(m^2 + \omega^2 - \lambda n \phi_0^{n-1}\right) \psi = 0. \tag{3.10}$$

Podemos definir o parâmetro E da forma:

$$\frac{E}{2} = m^2 + \omega^2, \tag{3.11}$$

e assim, a equação (3.10) fica:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{E}{2} - \lambda n \phi_0^{n-1}\right) \psi = 0, \tag{3.12}$$

que pode ser interpretada como uma equação do tipo Schrödinger para um potencial da forma ϕ_0^{n-1}. O problema consiste então em, conhecida uma solução estática ϕ_0 da equação (3.5), encontrar uma solução geral da equação (3.12).

Para o modelo $\lambda\phi^4$, correspondendo ao caso $n = 3$, a equação (3.12) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\,\psi(\alpha)}{d\alpha^2} = \left(6\,l^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha, l) - \frac{(1+l)}{2}\,E\right) \psi(\alpha), \tag{3.13}$$

aqui usamos a seguinte solução para ϕ:

$$\phi_0 = \pm \frac{m\sqrt{2D}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{m\,x}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}, l\right), \tag{3.14}$$

com l definido como

$$l = \frac{D}{1-D+\sqrt{1-2D}}. \tag{3.15}$$

e α dado por:

$$\alpha = \frac{m\,x}{\sqrt{1+l}}.$$

A equação (3.13) é conhecida na literatura como Equação de Lamé, e é dada por

$$\frac{d^2\,\Lambda(\alpha)}{d\alpha^2} = \big(s(s+1)\,k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha,k)+C\big)\;\Lambda(\alpha), \tag{3.16}$$

onde s é um número real positivo, k^2 é o parâmetro da função elíptica de Jacobi sn, e C é uma constante arbitrária. Dessa forma, comparando (3.13) com (3.16) obtemos, $s=2$ and $C = -\dfrac{(1+l)}{2}\,E$. As soluções da equação foram fartamente estudadas [18]. Assim, usando os resultados dados nessa referência e lembrando que $\eta(x,t) = \epsilon e^{iwt}\,\psi(x)$, para $s=2$, obtemos as seguintes flutuações e autovalores para η [1]:

$$(1)\quad \eta_l(x,t) = \epsilon\exp(i\sqrt{\frac{3}{1+l}}mt)\mathrm{sn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}},l)\mathrm{cn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}},l)$$

$$\text{para}\quad w_1^2 = \left(\frac{3}{1+l}\right)m^2, \tag{3.17}$$

$$(2)\quad \eta_l(x,t) = \epsilon\exp(i\sqrt{\frac{3l}{1+l}}mt)\mathrm{sn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}},l)\,\mathrm{dn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}},l)$$

$$\text{para}\qquad w_2^2 = \left(\frac{3\,l}{1+l}\right)\,m^2, \tag{3.18}$$

$$(3)\quad \eta_l(x,t) = \epsilon\mathrm{cn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}},l)\,\mathrm{dn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}},l)\qquad \text{para}\qquad w_3^2 = 0, \tag{3.19}$$

$$(4)\quad \eta_l(x,t) = \epsilon\exp(iw_4t)\left(\mathrm{sn}^2(\frac{mx}{\sqrt{1+l}},l) - \frac{1+l+\sqrt{l^2-l+1}}{3l}\right)$$

[1] Para $s=2$ a equação de Lamé possui 5 autovalores distintos, e portanto, 5 auto-funções [32].

$$\text{para} \qquad w_4^2 = \left(\frac{1+l-2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}\right) m^2, \tag{3.20}$$

$$(5) \quad \eta_l(x,t) = \epsilon \exp(iw_5 t) \left(\mathrm{sn}^2(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l) - \frac{1+l-\sqrt{l^2-l+1}}{3l}\right)$$

$$\text{para} \qquad w_5^2 = \left(\frac{1+l+2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}\right) m^2. \tag{3.21}$$

Analisaremos agora o caso não-linear.

3.3 O Caso Não-Linear

Efetuamos, na equação (3.6), a mudança de variável dependente:

$$\eta(x,t) = \frac{\Phi_x(x,t)}{\Phi(x,t)^{n-2}}, \tag{3.22}$$

em que $\Phi_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Substituindo (3.22) em (3.6) encontramos:

$$\Phi^2\Phi_{xxx} + (6-3n)\Phi\Phi_x\Phi_{xx} + (n-1)(n-2)\Phi_x^3 - (n-1)(n-2)\Phi_x\Phi_t^2 +$$

$$+(n-2)\Phi\Phi_x\Phi_{tt} + (n-4)\Phi\Phi_t\Phi_{xt} - \Phi^2\Phi_{xtt} + m^2\Phi^2\Phi_x +$$

$$-\lambda \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \phi_0^{n-k}\Phi^{n-k}\Phi_x^k = 0. \tag{3.23}$$

O método consiste, agora, em expandir Φ numa série de potências de um parâmetro γ pequeno da forma:

$$\Phi(x,t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x,t)\gamma^j = 1 + \gamma f_1 + \gamma^2 f_2 + ... \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) em (3.23), agrupando os termos em potências de γ e igualando termo a termo a zero, encontramos a equação para f_1:

$$f_{1,xxx} - f_{1,xtt} + \left(m^2 - \lambda n \phi_0^{n-1}\right) f_{1,x} = 0. \tag{3.25}$$

Podemos efetuar a mudança de variável:

$$\xi = f_{1,x}, \tag{3.26}$$

e escrever a equação para ξ:

$$\xi_{1,xx} - \xi_{1,tt} + \left(m^2 - \lambda n \phi_0^{n-1}\right)\xi = 0. \tag{3.27}$$

Podemos notar que essa é uma equação idêntica àquela obtida no caso linear.

Para f_2 a equação obtida é:

$$\begin{gathered} f_{2,xxx} - f_{2,xtt} + \left(m^2 - \lambda n \phi_0^{n-1}\right) f_{2,x} = \\ -\left((6-3n)f_{1,xx} - (n-2)f_{1,tt}\right) f_{1,x} + \\ -(2n-4)f_{1,t}f_{1,xt} - \frac{\lambda n(n-1)}{2}\phi_0^{n-1} f_{1,x}^2. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Aplicaremos esse método ao modelo $\lambda\phi^4$, ou seja, para $n = 3$, no qual a equação 3.23 se reduz a:

$$\begin{gathered} -\Phi_{xtt}\Phi^2 + 2\Phi\Phi_{xt}\Phi_t + \Phi\Phi_x\Phi_{tt} - 2\Phi_x\Phi_t^2 + \Phi_{xxx}\Phi^2 \\ -3\Phi\Phi_x\Phi_{xx} + (2-\lambda)\Phi_x^3 + m^2\Phi_x\Phi^2 - 3\lambda\phi_0^2\Phi_x\Phi^2 - 3\lambda\phi_0\Phi_x^2\Phi = 0. \end{gathered} \tag{3.29}$$

Dessa forma, as equações para f_1 e f_2 são dadas por:

$$-f_{1,xtt} + f_{1,xxx} + (m^2 - 3\,\lambda\,\phi_0^2)\, f_{1,x} = 0, \tag{3.30}$$

$$\begin{gathered} -f_{2,xtt} + f_{2,xxx} + (m^2 - 3\lambda\phi_0^2) f_{2,x} = \\ (3f_{1,xx} - f_{1,tt})f_{1,x} - 2f_{1,t}f_{1,xt} - 3\lambda\phi_0^2 f_{1,x}^2. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Uma solução da a equação (3.5) para $n = 3$ é:

$$\phi_0 = \pm \frac{m\sqrt{2c}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{m\,x}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-2D}}, l\right), \tag{3.32}$$

de forma que a equação para $\xi = f_{1,x}$ fica:

$$-\xi_{tt} + \xi_{xx} + (m^2 - 3\,\lambda\,\phi_0^2)\,\xi = 0, \tag{3.33}$$

que é uma equação do tipo Lamé, e a equação para f_2:

$$-f_{2,xtt} + f_{2,xxx} + (m^2 - 3\lambda\phi_0^2) f_{2,x} =$$

$$(3f_{1,xx} - f_{1,tt})f_{1,x} - 2f_{1,t}f_{1,xt} - 3\lambda\phi_0^2 f_{1,x}^2. \tag{3.34}$$

Notamos que a equação (3.33) é idêntica à equação (3.6), que corresponde ao caso linear. Resolvendo a equação para ξ encontramos as seguintes soluções f_1:

$$(1)\quad f_1(x,t) = -\frac{\sqrt{1+l}}{m\,l}\,\exp(i\sqrt{\frac{3}{1+l}}\,m\,t)\,\mathrm{dn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}},l),$$
$$\text{para}\qquad w_1^2 = \left(\frac{3}{1+l}\right)m^2. \tag{3.35}$$

$$(2)\quad f_1(x,t) = -\frac{\sqrt{1+l}}{m}\,\exp(i\sqrt{\frac{3\,l}{1+l}}\,m\,t)\,\mathrm{cn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}},l),$$
$$\text{para}\qquad w_2^2 = \left(\frac{3\,l}{1+l}\right)m^2. \tag{3.36}$$

$$(3)\quad f_1(x) = \frac{\sqrt{1+l}}{m}\,\mathrm{sn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}},l)\qquad \text{para}\qquad w_3^2 = 0. \tag{3.37}$$

$$(4)\quad f_1(x,t) = \exp(i\sqrt{\frac{1+l-2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}}mt)\Bigg(\frac{\sqrt{1+l}}{l\,m}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}-$$
$$E(\mathrm{am}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}},l),l)) - \frac{(1+l+\sqrt{l^2-l+1})\,x}{3l}\Bigg),$$
$$\text{para}\qquad w_4^2 = \left(\frac{1+l-2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}\right)m^2. \tag{3.38}$$

$$(5)\quad f_1(x,t) = \exp(i\sqrt{\frac{1+l+2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}}mt)\Bigg(\frac{\sqrt{1+l}}{l\,m}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}-$$
$$E(\mathrm{am}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}},l),l)) - \frac{(1+l-\sqrt{l^2-l+1})\,x}{3l}\Bigg),$$
$$\text{para}\qquad w_5^2 = \left(\frac{1+l+2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}\right)m^2. \tag{3.39}$$

Nessas soluções todas as constantes de integração foram tomadas iguas a zero.

Devido a complexidade da equação para f_2 consideraremos somente as contribuições em f_1.

$$(1)\quad \eta_l(x,t) = \gamma \frac{\exp(i\sqrt{\frac{3}{1+l}}\, m\, t)\,\mathrm{sn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)\,\mathrm{cn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)}{1-\gamma\frac{\sqrt{1+l}}{m\, l}\,\exp(i\sqrt{\frac{3}{1+l}}\, m\, t)\,\mathrm{dn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)}, \tag{3.40}$$

$$(2)\quad \eta_l(x,t) = \gamma \frac{\exp(i\sqrt{\frac{3\,l}{1+l}}\, m\, t)\,\mathrm{sn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)\,\mathrm{dn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)}{1-\gamma\frac{\sqrt{1+l}}{m}\,\exp(i\sqrt{\frac{3\,l}{1+l}}\, m\, t)\,\mathrm{cn}(\frac{m\,x}{\sqrt{1+l}}, l)}, \tag{3.41}$$

$$(3)\quad \eta_l(x) = \gamma \frac{\mathrm{cn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)\,\mathrm{dn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)}{1-\gamma\frac{\sqrt{1+l}}{m}\,\mathrm{sn}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l)}, \tag{3.42}$$

$$(4)\ \eta_l(x,t) = \gamma \frac{\exp(i\sqrt{\frac{1+l-2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}}mt)\left(\mathrm{sn}^2(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l) - \frac{1+l+\sqrt{l^2-l+1}}{3l}\right)}{1+\gamma\exp(i\sqrt{\frac{1+l-2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}}mt)\left(\frac{x(2-l-\sqrt{l^2-l+1})}{3l} - \frac{\sqrt{1+l}}{ml}E(\mathrm{am}(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l), l)\right)}, \tag{3.43}$$

$$(5)\ \eta_l(x,t) = \gamma \frac{\exp(i\sqrt{\frac{1+l+2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}}mt)\left(\mathrm{sn}^2(\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l) - \frac{1+l-\sqrt{l^2-l+1}}{3l}\right)}{1+\gamma\exp(i\sqrt{\frac{1+l+2\sqrt{l^2-l+1}}{1+l}}mt)\left(\frac{x(2-l+\sqrt{l^2-l+1})}{3l} - \frac{\sqrt{1+l}}{ml}E(\mathrm{am}\frac{mx}{\sqrt{1+l}}, l), l)\right)}. \tag{3.44}$$

Observamos que, em primeira aproximação, as flutuações linerares e não-lineares correspondentes coincidem se $\gamma = \epsilon$. Nesse caso, temos que a flutuação linear é, de fato, uma aproximação da flutuação não-linear.

Impondo condições de contorno de Dirichlet sobre o campo ϕ, confinado numa caixa de tamanho L pode-se mostrar que a seguinte condição deve ser satisfeita [3]:

$$mL = 4\sqrt{1+l}K(l), \tag{3.45}$$

em que $4K(l)$ é o período da função elíptica de Jacobi $\mathrm{sn}(u, l)$ [17].

Se impusermos as mesmas condições para as flutuações η (com o mesmo tipo de confinamento), vemos que o mesmo $l = l(L)$ obtido da relação acima deve ser usado para η. Podemos notar também que, quando η é confinado, as únicas flutuações lineares e não-lineares consistentes satisfazendo a condição (3.45) são as dadas por (3.17), (3.18), (3.40) e (3.41).

Capítulo 4

Soluções para Estrelas Esféricas

Em Astrofísica Estelar, um problema de grande importância é o que diz respeito à dinâmica dos gases, em especial o problema da configuração de equilíbrio hidrostático de uma estrela esférica. Esse problema foi exaustivamente estudado por Lord Kelvin (1862)[19], Lane (1869-70)[9], Emden (1907)[10] e Fowler (1914-1931)[20, 21, 22, 23], e posteriormente por Chandrasekhar [24].

Em 1870 J.H. Lane (1819-1880) publicou, no "*American Journal of Science 50*" um trabalho entitulado "**On the Theoretical Temperature of the Sun**", em que estudou a estrutura interna do Sol. Nesse trabalho, Lane considerou o Sol como uma esfera gasosa, e usou a lei segundo a qual um corpo gasoso se contrai ao perder calor. Considerando que o calor gerado pela contração é maior que o calor necessário para produzir essa contração, Lane concluiu que se a estrela for descrita como uma esfera de gás ideal, sua temperatura aumenta com a contração. Resultados semelhantes foram encontrados em 1872 por August Ritter. Em 1907, baseando-se no trabalho de Lane de 1870, apresentou, em seu livro "**Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme**" ("Gas balls: Applications of the mechanical heat theory to cosmological and meteorological problems"), um modelo no qual a evolução de uma estrela é descrita pela contração de uma esfera de gás ideal. Nesse mesmo modelo introduziu o conceito de gás politrópico, além de deduzir a lei de equilíbrio radioativo de partículas indistingüíveis. Ao descrever a contração da estrela, Emden retomou as idéias de Lane, motivo pelo qual a equação central do modelo é conhecida em Astrofísica como Equação de Lane-Emden[25]. A seguir apresentamos o modelo mais usado para descrever esse problema.

Numa estrela, as principais forças atuantes são a força gravitacional, que impele a matéria estelar para o interior, e a força devida ao gradiente de pressão, que age na direção oposta à gravidade. A resultante dessas duas forças é dada pela lei de Newton:

$$\rho \ddot{r} = -\frac{dP}{dr} - \frac{Gm(r)\rho}{r^2}, \tag{4.1}$$

onde ρ é densidade da estrela, r é o raio da região estelar considerada, $\ddot{r}$ é a segunda derivada em relação ao tempo do raio, P é a pressão, $m(r)$ é a massa contida na esfera de raio r e G é a constante de gravitação.

Na condição de "Equilíbrio Estático", $\ddot{r} = 0$ e

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2}. \tag{4.2}$$

Isolando $m(r)$ e derivando em relação a r, obtemos:

$$\frac{dm}{dr} = -\frac{r^2}{G\rho}\frac{d^2P}{dr^2} - \left(\frac{2r}{G\rho} - \frac{r^2}{G\rho^2}\frac{d\rho}{dr}\right)\frac{dP}{dr}; \tag{4.3}$$

A partir da simetria esférica do problema, podemos expressar a derivada da massa $m(r)$ em termos da densidade ρ da forma:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) em (4.3) obtemos a equação para a pressão P:

$$\frac{d^2P}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\right)P = -4\pi G\rho^2 \tag{4.5}$$

Para resolver a equação (4.5) precisamos de uma equação que relacione P e ρ. Vamos supor que a estrela é constituida de um gás do tipo politropo, ou seja, que é regido pela equação de estado:

$$P = k\rho^{\gamma} = k\rho^{\frac{n+1}{n}}, \tag{4.6}$$

em que n é chamado índice do politropo e k é uma constante. Por conveniência, definimos a grandeza θ da seguinte maneira:

$$\rho = \alpha\theta^n, \tag{4.7}$$

e assim a equação de estado do politropo toma a forma:

$$P = k\alpha^{\frac{n+1}{n}}\theta^{n+1}. \tag{4.8}$$

Substituindo (4.7) e (4.8) em (4.5) encontramos a equação:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)+\lambda\theta^n=0, \tag{4.9}$$

com $\lambda=\dfrac{4\pi G\alpha^2}{k(n+1)\alpha^{\frac{n+1}{n}}}$. Essa equação é a chamada Equação de Lane-Emden com Simetria Esférica mencionada no Capítulo 1. Essa equação foi exaustivamente estudada por Chandrasekhar, que obteve uma solução regular em $r=0$ para o caso $n=5$[24].

É possível, ao invés da equação de estado de um gás politrópico, tomar a equação de estado de um gás logotrópico, que é[26]

$$P=k\log\rho. \tag{4.10}$$

Substituindo a equação (4.10) em (4.5) obtemos:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\rho}\left(r^2\frac{d\rho}{dr}\right)-\frac{2}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2=\lambda\rho^3, \tag{4.11}$$

com $\lambda\equiv-\dfrac{4\pi G}{k}$.

Efetuando a mudança de variável:

$$\rho=\theta^{-1}, \tag{4.12}$$

obtemos a equação:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=-\lambda\theta^{-1}, \tag{4.13}$$

que é equivalente à equação obtida para um gás politrópico com $n=-1$. Esse resultado permite definir o regime logotrópico como o limite do regime politrópico quando $n\to-1$, ou equivalentemente, quando $\gamma\to 0$.

Buscamos uma solução da equação (4.13) da forma:

$$\theta=Ar^\beta, \tag{4.14}$$

cuja substituição direta na equação (4.13) fornece:

$$\beta=1, \tag{4.15}$$

e

$$A=\sqrt{\frac{4\pi G}{2k}}, \tag{4.16}$$

e portanto

$$\theta = \sqrt{\frac{4\pi G}{2k}} r, \tag{4.17}$$

ou seja,

$$\rho = \sqrt{\frac{2k}{4\pi G}} \frac{1}{r}. \tag{4.18}$$

A solução (4.18) descreve uma estrela cuja densidade é infinita na origem e zero no infinito. Tal solução, claramente, não é fisicamente válida para pequenos valores de r.

4.1 Solução em r^β

Nesta seção nos concentramos em obter algumas soluções da equação:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\theta}{dr}\right) + \lambda\theta^n = 0. \tag{4.19}$$

que, conforme mencionado no Capítulo 1, descreve a densidade de uma estrela politrópica esférica. Aqui buscamos uma solução da forma:

$$\theta(r) = Kr^\beta, \tag{4.20}$$

com K e β constantes a serem determinadas.
Substituindo (4.20) em (4.9) encontramos:

$$K\beta(\beta - 1)r^\beta + \lambda K^n r^{n\beta+2} = 0, \tag{4.21}$$

a partir da qual escrevemos as equações de K e β:

$$\beta(\beta + 1) + \lambda K^{n-1}, \tag{4.22}$$

e

$$\beta = \beta n + 2. \tag{4.23}$$

Resolvendo as equações (4.22) e (4.23) encontarmos os valores de β e K:

$$\beta = \frac{2}{1-n}, n \neq 1 \tag{4.24}$$

e

$$K = \left[+ \frac{1}{\lambda}\left(\frac{6 - 2n}{(n-1)^2}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{4.25}$$

Assim, uma solução da equação (4.9) da forma (4.20) é dada por:

$$\theta_n(r) = \left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{6-2n}{(n-1)^2}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} r^{\frac{2}{1-n}}. \tag{4.26}$$

A solução (4.26) nos dá uma classe de soluções singulares na origem e é válida para $n > 1$. Na próxima subseção estudaremos alguma soluções regulares, em especial o caso $n = 5$[24].

4.1.1 Soluções Regulares em $r = 0$

Nessa seção, buscaremos soluções para a equação de Lane-Emden-Fowler com simetria esférica que sejam regulares em $r = 0$.

• **O Caso** $n = 0$

Neste caso a equação (4.19) reduz-se a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) + \lambda = 0, \tag{4.27}$$

cuja solução é:

$$\theta_0 = -\frac{\lambda r^2}{6} - C_1 r^{-1} + C_2. \tag{4.28}$$

Para que a solução (4.28) seja regular em $r = 0$, devemos ter $C_1 = 0$, de forma que:

$$\theta_0 = -\frac{\lambda r^2}{6} + C_2. \tag{4.29}$$

em que C_2 é uma constante arbitrária.

• **O Caso** $n = 1$

Nesse caso a equação (4.19) toma a forma:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr} + \lambda\theta = 0, \tag{4.30}$$

com solução

$$\theta_1(r) = C_1\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{r} + C_2\frac{e^{\sqrt{\lambda}r}}{r}, \tag{4.31}$$

se $\lambda > 0$ e

$$\theta_1(r) = C_1\frac{\cos\left(\sqrt{-\lambda}r\right)}{r} + C_2\frac{\sin\left(\sqrt{-\lambda}r\right)}{r}, \tag{4.32}$$

se $\lambda < 0$. Somente o caso em que $\lambda < 0$ possui solução regular na origem, dada por:

$$\theta_1(r) = C_2 \frac{\sin\left(\sqrt{-\lambda} r\right)}{r}, \tag{4.33}$$

com C_2 constante.

O caso $n = 5$

A equação (4.19) nos dá para $n = 5$:

$$\theta_5(r) = \left(\frac{1}{4\lambda_\theta}\right)^{\frac{1}{4}} r^{\frac{-1}{2}}. \tag{4.34}$$

Vamos agora, buscar uma nova solução escrita na forma:

$$\theta = \theta_5(r) Z(r), \tag{4.35}$$

onde $Z(r)$ é uma função a ser determinada. Substituindo (4.35) em (4.26) e efetuando a mudança de variável:

$$\tau = \log\left(\frac{1}{r}\right), \tag{4.36}$$

obtemos a equação:

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} - \frac{1}{4} Z = -\frac{1}{4} Z^5. \tag{4.37}$$

A integral primeira da equação (4.37) é:

$$\tau + C_2 = \pm \int \frac{dZ}{\sqrt{-\frac{Z^6}{12} + \frac{Z^2}{4} + \frac{C_1}{2}}}. \tag{4.38}$$

Para o caso em que $C_1 = 0$ temos:

$$\tau + C_2 = \pm \int \frac{dZ}{\sqrt{-\frac{Z^6}{12} + \frac{Z^2}{4}}}. \tag{4.39}$$

Efetuando a mudança de variável:

$$\eta = Z^{-2}, \tag{4.40}$$

obtemos:

$$\tau + C_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{3\eta^2 - 1}} = \pm \frac{1}{2} \log\left|\sqrt{3}\eta + \sqrt{3\eta^2 - 1}\right|. \tag{4.41}$$

Usando a equação (4.40), e o fato de $\tau = \log\left(\frac{1}{r}\right)$ podemos escrever o resultado (4.41) em termos de Z, obtendo:

$$\frac{k}{r} = \frac{Z}{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{3 - Z^4}}}, \tag{4.42}$$

em que k é uma constante arbitrária.

Podemos isolar a variável Z na equação (4.42) obtendo assim:

$$Z = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}k}\sqrt{r}}{\sqrt{r^2 + k^2}}. \tag{4.43}$$

Agora, usando o fato que:

$$Z = (4\lambda)^{\frac{1}{4}}\sqrt{r}\theta, \tag{4.44}$$

obtemos a expressão para o campo θ:

$$\theta(r) = \frac{k}{\sqrt{r^2 + \frac{\lambda k^4}{3}}}. \tag{4.45}$$

Figura 4.1: Gráfico da solução (4.45) com $k = 1$ e $\lambda = 3$.

Esta é a solução encontrada por Chandrasekhar [24] para um fluido politrópico com equação de estado dada por:

$$P = k\rho^{\frac{6}{5}}. \tag{4.46}$$

É interessante observar que se procuramos soluções da equação (4.19) da forma:

$$\theta(r) = \frac{k}{(a + br^2)^m}, \tag{4.47}$$

encontramos que, necessariamente, $n = 5$ e $m = 1/2$ levando exatamente à solução (4.45) acima.

Com efeito, substituindo (4.47) em (4.19) obtemos:

$$2kbm\left(\frac{-3a + b(2m-1)r^2}{(a+br^2)^{m+2}}\right) + \lambda\frac{k^n}{(a+br^2)^{mn}} = 0, \tag{4.48}$$

que pode ser escrita da forma:

$$2kbm\left(-3a + b(2m-1)r^2\right) = -\lambda k^n\left(a+br^2\right)^{m+2-nm}. \tag{4.49}$$

Para que a equação (4.49) seja consistente, devemos ter:

$$2m - 1 = 0, \tag{4.50}$$

e

$$m + 2 - mn = 0, \tag{4.51}$$

o que nos fornece, $m = 1/2$ e $n = 5$.

Assim, temos:

$$\theta_{5_{reg}}(r) = \frac{k}{\left(a+br^2\right)^{1/2}}. \tag{4.52}$$

Substituindo (4.52) em (4.19), para $n = 5$, obtemos as constantes $a = \dfrac{\lambda k^4}{3}$ e $b = 1$ e assim:

$$\theta_{5_{reg}}(r) = \frac{k}{\left(\frac{\lambda k^4}{3} + r^2\right)^{1/2}}. \tag{4.53}$$

4.1.2 Soluções Singulares na Origem

Efetuando a mudança de variável:

$$\omega = 2C_1 Z^{-2}, \tag{4.54}$$

e substituindo em (4.38) obtemos:

$$\tau + C_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega^3 + \omega^2 + \frac{E}{2}}}, \tag{4.55}$$

onde $E = \dfrac{8C_1}{3}$.

Aqui, como no caso unidimensional, analisaremos os casos em que $P(\omega) = \omega^3 + \omega^2 + \frac{E}{2}$ possui 1, 2 ou 3 raízes reais. Aqui, como no caso unidimensional, tomaremos $C_2 = 0$.

As raízes de $P(\omega)$ são dadas por:

$$\omega_1 = -\frac{1}{3}\left\{1 - \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\Delta} - \frac{\Delta}{2^{\frac{2}{3}}}\right\} \tag{4.56}$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{3}\left\{1 + \frac{(1+\sqrt{3}i)}{2^{\frac{1}{3}}\Delta} + \frac{(1-\sqrt{3}i)\Delta}{2^{\frac{5}{3}}}\right\} \tag{4.57}$$

e

$$\omega_3 = -\frac{1}{3}\left\{1 + \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2^{\frac{1}{3}}\Delta} + \frac{(1+\sqrt{3}i)\Delta}{2^{\frac{5}{3}}}\right\} \tag{4.58}$$

em que Δ é dado por

$$\Delta = \left(-4 - 27E + 3\sqrt{3}\sqrt{8E + 27E^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{4.59}$$

Seguindo o mesmo raciocínio mostrado para o caso unidimensional, encontramos as condições sobre E para que $P(\omega)$ tenha $1, 2$ ou 3 raízes reais distintas:

- Uma única raiz real se $E \in \left(-\infty, -\frac{8}{27}\right) \cup (0, \infty)$,
- Duas raízes reais se $E = 0$ ou $E = -\frac{8}{27}$,
- Três raízes reais se $E \in \left(-\frac{8}{27}, 0\right)$.

Caso 1: $P(\omega)$ possui somente uma raiz real ω_1:

Nesse caso a raiz ω_1 possui multiplicidade 1. Para que o polinômio $P(\omega)$ seja positivo, devemos ter $\omega \geq \omega_1$.

A solução $\omega(\tau)$ é dada por:

$$\omega(\tau) = \frac{(\omega_1 + \sigma^2)\mathrm{cn}\left[\sqrt{3}\sigma\tau; \kappa\right] - (-\omega_1 + \sigma^2)}{1 + \mathrm{cn}\left[\sqrt{3}\sigma\tau; \kappa\right]}; \tag{4.60}$$

$$Z(r) = \pm\left(\frac{2C_1\left(1 + \mathrm{cn}\left[\sqrt{3}\sigma\log r; \kappa\right]\right)}{(\omega_1 + \sigma^2) - (-\omega_1 + \sigma^2)\mathrm{cn}\left[\sqrt{3}\sigma\log r; \kappa\right]}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.61}$$

e portanto,

$$\theta(r) = \pm \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{2C_1\big(1+\mathrm{cn}\left[\sqrt{3}\sigma\log r;\kappa\right]\big)}{(\omega_1+\sigma^2)+(\omega_1-\sigma^2)\mathrm{cn}\left[\sqrt{3}\sigma\log r;\kappa\right]}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.62}$$

Para $E > 0$ a solução apresenta intervalos em que ela não é uma função real. Para exemplificar tomemos $E = 1$. Para esse valor encontramos $\omega_1 = -1.2971$, $\sigma = 1.2515$ e $\kappa = 0.9805$. Os intervalos onde a solução não é real podem ser calculados da seguinte maneira:

A solução $\theta(r)$ não é real se

$$(\omega_1+\sigma^2)+(\omega_1-\sigma^2)\mathrm{cn}\left(\sqrt{3}\sigma\log r;\kappa\right) < 0. \tag{4.63}$$

Podemos, ainda, verificar a oscilação da solução através do cálculo de suas raízes, isto é, os pontos em que $\theta(r) = 0$. Esses pontos são dados por:

$$r = e^{\frac{F((2k+1)\pi,\kappa)}{\sqrt{3}\sigma}}, \tag{4.64}$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Na figura 4.2 tomamos a constante $\frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt[4]{4\lambda}} = 1$.

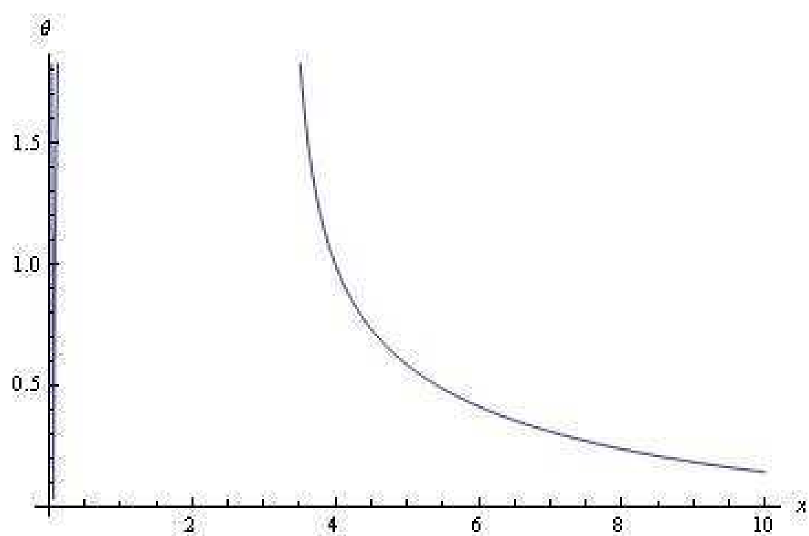

Figura 4.2: Gráfico da solução (4.62) para $E = 1$, $r \in (0, 10)$.

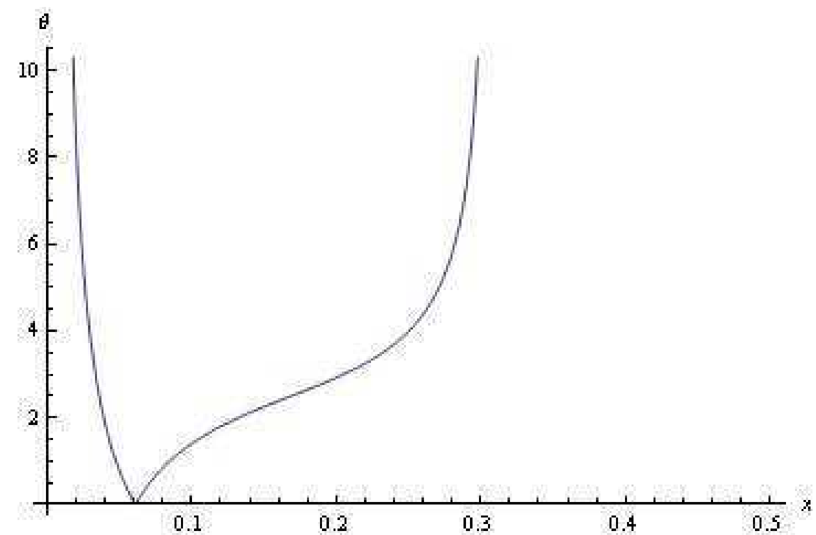

Figura 4.3: Gráfico da solução (4.62) para $E = 1$, $r \in (0, \frac{1}{2})$.

Caso 2: $P(\omega)$ **possui** 2 **raízes reais:**

Nesse caso a integral primeira pode ser escrita da forma:

$$\tau = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{(\omega-\frac{1}{3})(\omega+\frac{2}{3})^2}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{\omega-\frac{1}{3}}\right), \tag{4.65}$$

assim, temos:

$$\omega = \frac{1}{3}+\tan^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right) \tag{4.66}$$

e portanto, a solução θ é

$$\theta(r) = \pm\frac{\sqrt{C_1}}{(\lambda)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+\tan^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\log r)\right)}}. \tag{4.67}$$

Esta função apresenta o mesmo comportamento oscilatório que a solução anterior, com raízes dadas pelos pontos em que $\frac{\sqrt{3}}{2}\log r = \pm(\frac{(2k+1)\pi}{2})$, com $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ Abaixo mostramos o comportamento da solução (4.67) para dois intervalos em diferentes escalas.

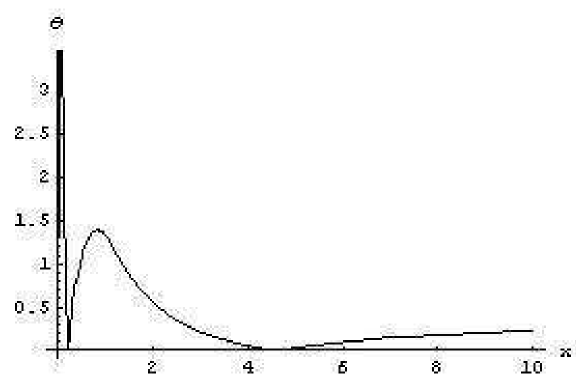

Figura 4.4: Gráfico da solução (4.67) para duas raízes reais distintas, $r \in (0, 10)$.

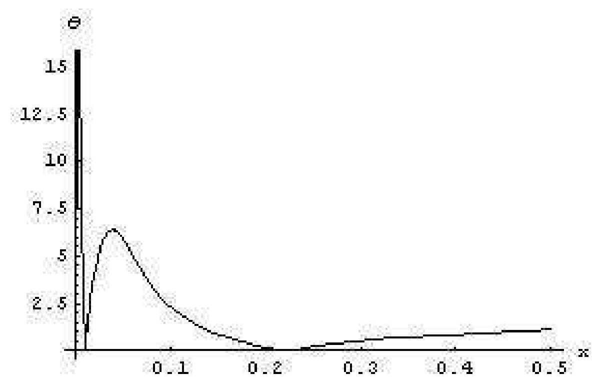

Figura 4.5: Gráfico da solução (4.67) para duas raízes reais distintas, $r \in (0, \frac{1}{2})$.

Caso 3: $P(\omega)$ possui 3 raízes reais distintas:

Novamente, as soluções são reais somente se $\omega_3 < \omega < \omega_2$ ou $\omega > \omega_1$.

Se $\omega_3 < \omega < \omega_2$:

$$Z(r) = \pm \left[2C_1 \frac{1}{\omega_3 + (\omega_2 - \omega_3)\,\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{3}\sigma \log r; \kappa\right]} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.68}$$

e

$$\theta(r) = \pm \left(\frac{1}{4\lambda_\phi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[2C_1 \frac{1}{\omega_3 + (\omega_2 - \omega_3)\,\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{3}\sigma \log r; \kappa\right]} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.69}$$

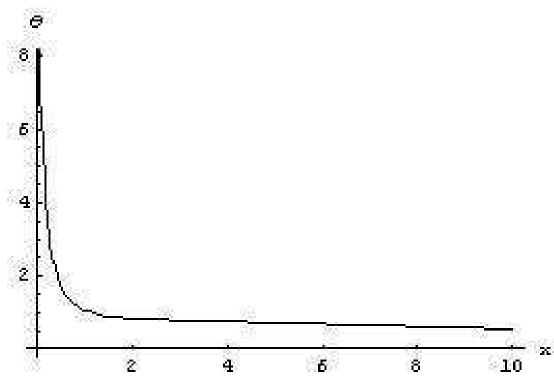

Figura 4.6: Gráfico da solução (4.69) para $E = -4/27$, $r \in (0, 10)$.

Se $\omega > \omega_1$:

$$Z(r) = \pm \left[2C_1 \frac{1 - \mathrm{sn}^2\left[\sqrt{3}\sigma \log r; \kappa\right]}{\omega_1 - \mathrm{sn}^2\left[\sqrt{3}\sigma \log r; \kappa\right]\omega_2} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.70}$$

e

$$\theta(r) = \pm \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[2C_1 \frac{\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{3}\sigma \log r; \kappa\right]}{\omega_1 - \omega_2 \mathrm{sn}^2\left[\sqrt{3}\sigma \log r; \kappa\right]} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.71}$$

As figuras 4.7 e 4.8 mostram o gráfico de (4.71), o primeiro para pequenos valores de r e o segundo para valores distantes da origem. Essa solução é regular exceto na origem $r = 0$. Esta solução tem também o comportamento oscilatório das soluções anteriores.

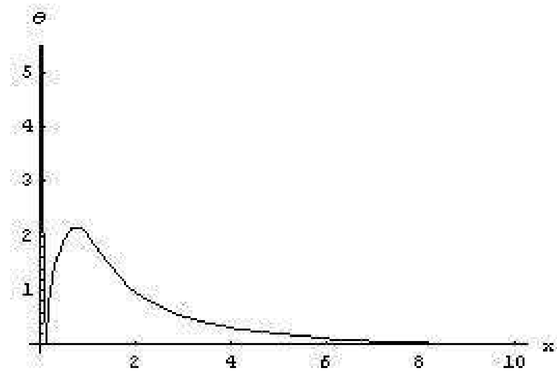

Figura 4.7: Gráfico da solução (4.71) para $E = -4/27$, $r \in (0, 10)$.

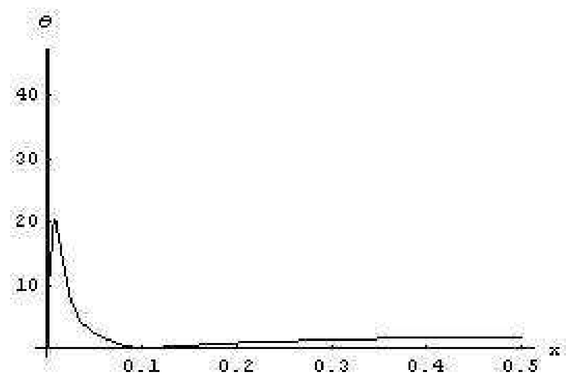

Figura 4.8: Gráfico da solução (4.71) para $E = -4/27$, $r \in (0, \frac{1}{2})$.

4.2 Um Caso Particular Com $D \neq 0$

Na seção anterior mostramos algumas soluções da equação de Lane-Emden-Fowler 4.19 para $n = 5$, com $D \neq 0$ que podem ser expressas em termos das funções elípticas sn e cn. Neste seção apresentaremos uma solução dessa equação em termos de funções elementares.

Lembramos que uma solução de (4.19) para $n = 5$ com $D \neq 0$ é dada por:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt[4]{4\lambda}\sqrt{r}} Z, \tag{4.72}$$

em que Z é uma função a ser determinada. Tomamos também a mudança de variável independente:

$$\tau = -log\ r. \tag{4.73}$$

Dessa forma, a equação para Z fica:

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} = \frac{1}{4}Z\left(1 - Z^4\right), \tag{4.74}$$

que pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2 = -\frac{Z^6}{12} + \frac{Z^2}{4} + \frac{C_1}{2}. \tag{4.75}$$

Analisando o polinômio:

$$P(Z) = -\frac{Z^6}{12} + \frac{Z^2}{4} + \frac{C_1}{2}, \tag{4.76}$$

constatamos que, se existirem raízes múltiplas, elas devem assumir os valores $Z = 0$, $Z = \pm 1$ e $Z = \pm i$, que correspondem respectivamente a $C_1 = 0$, $C_1 = -\frac{1}{3}$ e $C_1 = \frac{1}{3}$. O caso $Z = 0$ fornece a solução encontrada por Chandrasekhar, o caso $Z = \pm 1$ corresponde à equação:

$$\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{12}(Z^2 - 1)^2(Z^2 + 2), \tag{4.77}$$

que implica em uma solução cuja derivada não admite valores reais.

Resta ainda o caso $Z = \pm i$, que corresponde à equação:

$$\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{12}(Z^2 + 1)^2(2 - Z^2). \tag{4.78}$$

Efetuando a mudança de variável dependente $Z = \tan\phi$ obtemos a equação:

$$\left(\sec^2\phi\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{12}\left(\tan^2\phi + 1\right)^2\left(2 - \tan^2\phi\right), \tag{4.79}$$

que simplificada fica:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \pm\frac{1}{\sqrt{12}}\frac{\sqrt{2 - 3\sin^2\phi}}{\cos\phi}, \tag{4.80}$$

cuja solução é:

$$\phi = \pm\sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\right), \tag{4.81}$$

e como $\phi = \arctan Z$, temos:

$$Z = \pm\tan\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{\tau}{2}\right)\right]. \tag{4.82}$$

Usando a igualdade:

$$\tan(\arcsin\ x) = \tan\left(\arccos\ \sqrt{1-x^2}\right) = \tan\left(\arctan\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.83}$$

válida para $-1 < x < 1$, encontramos:

$$Z(\tau) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}}, \tag{4.84}$$

então, $Z(r)$ é:

$$Z(r) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\log r\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{1}{2}\log r\right)}}, \tag{4.85}$$

e finalmente

$$\theta(r) = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4\lambda}}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\log r\right)}{\sqrt{3r-2r\sin^2\left(\frac{1}{2}\log r\right)}}. \tag{4.86}$$

Essa solução não é regular na origem, porém vai a zero no infinito. A figura mostra o gráfico de (4.86). Tomamos $\lambda = 1$.

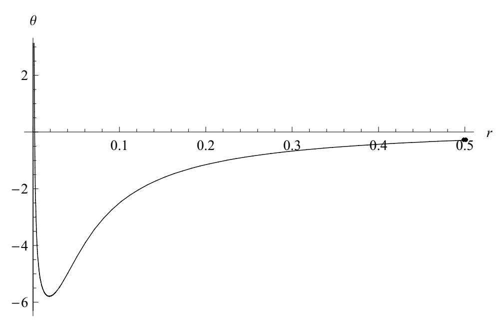

Figura 4.9: Gráfico da solução (4.86) para $r \in (0, \frac{1}{2})$.

Finalmente podemos verificar, das várias soluções acima para o caso de uma estrela esfericamente simétrica e em equilíbrio hidrostático que, sua densidade $\rho(r) = \alpha(\theta(r))^5$, $\alpha = cte$ tem também um comportamento oscilatório. Ou seja, estas estrelas têm grandes variações de densidade em suas regiões mais centrais e poucas oscilações perto da sua superfície. É preciso, no entanto, notar que este modelo é válido para regiões não muito próximas do centro uma vez que todas elas têm um fator $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

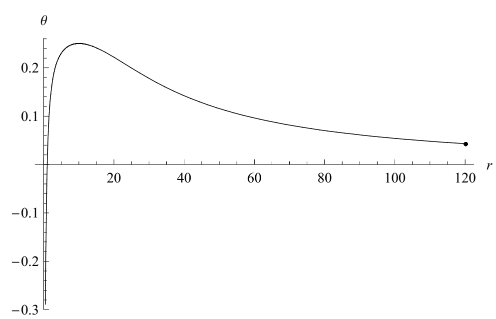

Figura 4.10: Gráfico da solução (4.86) para $r \in (\frac{1}{2}, 120)$.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

No Capítulo 2 apresentamos algumas soluções estáticas para a Equação de Lane-Emden-Fowler unidimensional, isto é, soluções da equação

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + m_\phi^2\phi - \lambda\phi^n = 0,$$

para os casos $n = 2$, 3 e 5 através do método da Integral Primeira. Esse método fornece soluções escritas em termos das Funções Elípticas de Jacobi sn e cn. Nese capítulo também encontramos condições sobre a constante de integração da integral primeira para as quais as soluções obtidas são regulares no domínio real.

Boa parte das soluções que encontramos, possuem singularidades ou ainda intervalos nos quais não estão definidas. No entanto, essas soluções são contínuas em seus intevalos de definição, de forma que é possível usá-las para descrever campos confinados impondo-se condições de fronteira adequadas.

Uma vez que essas soluções surgem no estudo de Campos Clássicos Interagentes com Lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_{int} = g\phi^2\chi^2,$$

é interessante encontrar soluções da equação diferencial linear obtida para o campo χ. Nessa equação, ϕ aparece como um potencial, de forma que χ pode ser interpretado como um campo de prova sujeito a um potencial $V(\phi)$.

No Capítulo 3, desenvolvemos um método perturbativo, adaptado do Método de Hirota, cuja formulação original supõe $\eta = \beta\frac{\Phi_x(x,t)}{\Phi(x,t)}$, para calcular as flutuações sobre o campo clássico ϕ. Esse método depende fortemente da solução de uma equação linear em que ϕ também aparece como um potencial. Encontramos, para o modelo $\lambda\phi^4$, para o qual, uma solução ϕ, regular em $\mathbb{R}$, é conhecida, as expressões explícitas, em primeira ordem, das flutuações lineares e não-lineares. A partir dos resultados obtidos nesse capítulo, escrevemos um trabalho já submetido para publicação[27]:

No Capítulo 4 estudamos a equação de Lane-Emden-Fowler, no contexto da Astrofísica Estelar, nesse caso conhecida como equação de Lane-Emden. Através do método da Integral Primeira, obtivemosuma série se soluções singulares na origem, e constatamos que o método fornece somente uma solução regular na origem, já conhecida na literatura, a saber, a solução de Chandrasekhar[24].

Algumas perspectivas para o desenvolvimento posterior deste trabalho são:

1. A solução completa do Problema de Campos Clássicos Interagentes requer a solução do sistema de equações

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m_\phi \phi - \lambda \phi^n = 0,$$

   e

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + (2g\phi^2 - m_\chi^2)\chi = 0,$$

   que não pode ser resolvido pelo formalismo da Integral Primeira. Acreditamos que há um vasto campo de pesquisa nesse problema, uma vez que métodos gerais não podem ser aplicados..

2. Para o caso hiperelíptico, a integral primeira pode ser expressa em termos de um certo tipo de função especial denominada Função "Θ de Abel"[16], cujo estudo está além dos interesses deste trabalho. Um estudo mais aprofundado de como se aplicar essa função ao problema dos campos clássicos pode levar a novas soluções para $n \geq 5$. Uma expansão em série de funções para a integral hiperelíptica (2.30) é conhecida [28],[29], porém não encontramos um modo de inverter essa série. Acreditamos que esse problema também pode ser estudado no futuro.

3. No caso de dimensão $(1+1)$, a equação para χ pode ser interpretada como uma equação do tipo Schrödinger, para a qual existem muitos métodos perturbativos de solução[30, 31]. Nenhum desses métodos, porém, é eficiente para resolver o problema dos campos interagentes. Um outro ramo interessante de pesquisa é a busca de Métodos Perturbativos para esse tipo de equação. Também a implementação de métodos semelhantes ao Método de Hirota torna viável a resolução de número maior de modelos.

4. Para contornar o problema das soluções da Equação de Lane-Emden (dimensão 3) singulares na origem, pode-se usar um modelo de estrela composta por dois ou mais politropos, em que cada politropo ocupa uma camada da estrela. O problema central é estabelecer as condições de fronteira razoáveis na junção das camadas.

5. Por fim, consideramos realmente promissor a busca de novos métodos para a solução da Equação de Lane-Emden-Fowler, ou mesmo novas transformaçãoes envolvendo as variáveis da equação.

Apêndice A - Integrais e Funções Elípticas

Ao longo deste trabalho utilizamos as chamadas integrais elípticas[17, 32] do primeiro tipo e algumas de suas propriedades. Neste apêndice apresentaremos de forma mais rigorosa esse tipo de integral, bem como alguns resultados importantes, cujas demonstrações encontram-se, por exemplo, em[33].

Definição 1: *Toda integral da forma*

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx, \tag{A1}$$

onde R é uma função racional e $P(x)$ é um polinômio de terceiro ou quarto graus é denominada Integral Elíptica de Jacobi, ou simplesmente Integral Elíptica.

Teorema 1: *Toda integral elíptica pode ser expressa como uma combinação linear das seguintes integrais*:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}, \tag{A2}$$

$$\int \frac{\sqrt{1-\kappa^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \tag{A3}$$

$$\int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}, \tag{A4}$$

as quais são chamadas respectivamente Integrais Elípticas de Primeiro, Segundo e Terceiro Tipos na Forma Normal de Legendre. O número κ é denominado Módulo da Integral Elíptica e n é chamado Parâmetro da Integral de Terceiro Tipo.

As integrais elípticas são, algumas vezes, expressas em termos de $\sin\varphi$, e nesse caso, dizemos que estão escritas na "Forma Trigonométrica". Esse resultado é expresso no seguinte teorema:

Teorema 2 (Forma Trigonométrica): *Através da substituição* $x = \sin\varphi$ *as integrais elípticas podem ser expressas, respectivamente, da forma*:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-\kappa^2\sin^2\varphi\right)}}, \tag{A5}$$

$$\int \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\ \ d\varphi, \tag{A6}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\left(1+n\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}} \tag{A7}$$

No caso em que as integrais elípticas estão definidas entre 0 e $\dfrac{\pi}{2}$, dizemos tratarem-se de "Integrais Elípticas Completas". Na literatura, as integrais elípticas são expressas através dos símbolos F, E e K, conforme apresentado a seguir.

Notação: *Definimos as funções* $F(\varphi,\kappa)$, $E(\varphi,\kappa)$ *e* $\Pi(\varphi,n,\kappa)$ *da forma*:

$$F(\varphi,\kappa) = \int_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\tau}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-\kappa^2x^2)}}, \tag{A8}$$

$$E(\varphi,\kappa) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\tau}\ \ d\tau = \int_0^{\sin\varphi} \frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx, \tag{A9}$$

$$\Pi(\varphi,n,\kappa) = \int_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\left(1+n\sin^2\tau\right)\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\tau}} =$$

$$= \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)\,(1-\kappa^2x^2)}}. \tag{A10}$$

As "Integrais Elípticas Completas"do primeiro, segundo e terceiro tipos são definidas, respectivamente, como:

$$K(\kappa) = F\left(\frac{\pi}{2},\kappa\right) \tag{A11}$$

$$E(\kappa) = E\left(\frac{\pi}{2},\kappa\right), \tag{A12}$$

$$\Pi(n,\kappa) = \Pi(\frac{\pi}{2},n,\kappa). \tag{A13}$$

Teorema 3: *São válidas as seguintes relações envolvendo as integrais elípticas*

$$F\left(-\varphi,\kappa\right) = -F\left(\varphi,\kappa\right), \tag{A14}$$

$$E\left(-\varphi,\kappa\right)=-E\left(\varphi,\kappa\right), \tag{A15}$$

$$F\left(\alpha\pi\pm\varphi,\kappa\right)=2\alpha K\left(\kappa\right)\pm F\left(\varphi,\kappa\right), \tag{A16}$$

$$E\left(\alpha\pi\pm\varphi,\kappa\right)=2\alpha E\left(\kappa\right)\pm E\left(\varphi,\kappa\right), \tag{A17}$$

onde α é um número real qualquer.

Definição 2: *Definimos a função "Amplitude de Jacobi"como a Inversa de* $F(\varphi,\kappa)$ *e representamos da forma* $\mathrm{am}(\varphi,\kappa)$, *ou seja, se*

$$u=F\left(\varphi,\kappa\right)=\int_0^{\varphi}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\tau}}, \tag{A18}$$

então

$$\varphi=\mathrm{am}(u). \tag{A19}$$

A partir da definição amplitude, podemos definir as "Funções Trigonométricas Elípticas" sn, cn, e dn.

Definição 3: A*s funções "Seno Elíptico", "Cosseno Elíptico"e "Delta"são definidas, respectivamente, da forma:*

$$\mathrm{sn}(u)=\sin\varphi=\sin\mathrm{am}(u), \tag{A20}$$

$$\mathrm{cn}(u)=\cos\varphi=\cos\mathrm{am}(u), \tag{A21}$$

$$\mathrm{dn}(u)=\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\kappa^2\mathrm{sn}^2(u)}. \tag{A22}$$

Definição 4: *Para* $k^2<1$ *definimos o "Módulo Complementar"* κ' *da forma*

$$\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}. \tag{A23}$$

Definição 5 : *Definimos as funções* $K'(\kappa)$ *e* $E'(\kappa)$ *como*

$$K'(\kappa)=K(\kappa'), \tag{A24}$$

e

$$E'(\kappa)=E(\kappa'). \tag{A25}$$

Períodos e Zeros das Funções Elípticas

As funções $\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(u)$ e $\mathrm{dn}(u)$ são periódicas satisfazendo:

$$\mathrm{sn}(u + [4mK(\kappa) + 2niK'(\kappa)]) = \mathrm{sn}(u), \tag{A26}$$

$$\mathrm{cn}(u + [4mK(\kappa) + 2n(K(\kappa) + iK'(\kappa))]) = \mathrm{sn}(u), \tag{A27}$$

$$\mathrm{dn}(u + [2mK(\kappa) + 4niK'(\kappa)]) = \mathrm{dn}(u), \tag{A28}$$

com n inteiro.

Uma vez que as funções apresentadas ao longo do texto possuem domínio real, tomamos somente a parte real do período, ou seja, nos importamos somente com o estudo da função $K(\kappa)$.

Os zeros das funções $\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(u)$ e $\mathrm{dn}(u)$ são dados por:

$$\mathrm{sn}(u) = 0$$

se

$$u = 2mK(\kappa) + 2niK'(\kappa), \tag{A29}$$

$$\mathrm{cn}(u) = 0$$

se

$$u = (2m + 1)K(\kappa) + 2niK'(\kappa) \tag{A30}$$

e

$$\mathrm{dn}(u) = 0$$

se

$$u = 2mK + 4niK'. \tag{A31}$$

Apêndice B - Transformações Trigonométricas

Nos Capítulos 2 e 4 utilizamos algumas transformações trigonométricas[17] para conduzir a integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}, \tag{B01}$$

à integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{B02}$$

em que $P_3(z)$ é um polinômio de grau 3 e $P_3(z) > 0$ na região de integração.

As transformações dependem do número de raízes reais distintas de $P_3(z)$, que pode ser 1, 2 ou 3. Se o polinômio possui uma única raiz real com multiplicidade 3, ou duas raízes reais iguais, a integral (B01) reduz-se a uma integral elementar, como mostrado a seguir. Nos demais casos a integral é dada em termos da integral elíptica do primeiro tipo $F(\varphi, \kappa)$. Tomaremos, sem perda de generalidade, $P_3(z)$ tal que o coeficiente de z^3 é igual a 1.

Se $P_3(z)$ possui somente uma raiz real com multiplicidade 3, então

$$P_3(z) = (z - z_1)^3, \tag{B03}$$

e a integral (B01) toma a forma:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}} = -\frac{2}{\sqrt{z - z_1}}. \tag{B04}$$

Se $P_3(z)$ possui duas raízes reais distintas, então podemos escrever:

$$P_3(z) = (z - z_1)(z - z_2)^2, \tag{B05}$$

e a integral (B01) nos dá:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}} = \frac{2}{\sqrt{z_1 - z_2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{z - z_1}}{\sqrt{z_1 - z_2}}\right), \tag{B06}$$

se $z_1 > z_2$ e

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}} = \frac{2}{\sqrt{z_2 - z_1}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{z - z_1}}{\sqrt{z_2 - z_1}}\right), \tag{B07}$$

se $z_1 < z_2$.

Se $P_3(z)$ possui um única raiz real z_1, com multiplicidade 1, podemos escrever

$$P_3(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2), \tag{B08}$$

onde z_2 é uma raiz complexa e $\bar{z}_2$ é seu complexo conjugado.

Tomamos, agora, as seguintes transformações:

$$\cos\varphi = \frac{\sigma^2 + z_1 - z}{\sigma^2 - z_1 + z}, \tag{B09}$$

se $z \geq z_1$ e

$$\cos\varphi = \frac{\sigma^2 - z_1 + z}{\sigma^2 + z_1 - z}, \tag{B10}$$

se $z \leq z_1$.

Substituindo as equações (B09) e (B10) em (B08) obtemos:

$$\begin{aligned} P_3(\varphi) = \pm \frac{\sigma^2(1 - \cos\varphi)}{(1 + \cos\varphi)^3} \times \\ \times[2\left(\sigma^4 + (z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_2)\right) + 2\left(-\sigma^4 + (z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_2)\right)\cos\varphi + \\ + \left(-\sigma^4 + \sigma^2(2z_1 - (z_2 + \bar{z}_2)) - (z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_2)\right)\sin^2\varphi], \end{aligned} \tag{B11}$$

onde o sinal $(+)$ corresponde a (B09) e o sinal $(-)$ a (B10).

A idéia, agora, é encontrar um valor de σ para o qual o termo em $\cos\varphi$ seja identicamente nulo. De fato, esse valor é dado por:

$$\sigma^4 = (z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_2), \tag{B12}$$

que é exatamente igual a $P_3'(z_1)$. Dessa forma, definimos o parâmetro σ como:

$$\sigma^2 = \sqrt{P_3'(z_1)}. \tag{B13}$$

Substituindo (B11) na integral, levando em conta (B09), (B10) e (B13), após algumas manipulações, obtemos:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}} = \frac{1}{\sigma} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2\sigma^2 - 2z_1 + z_2 + \bar{z}_2}{4\sigma^2} \sin^2 \varphi}}. \tag{B14}$$

Esta é uma Integral Elíptica de módulo κ, dado por

$$\kappa^2 = \frac{2\sigma^2 - 2z_1 + z_2 + \bar{z}_2}{4\sigma^2}, \tag{B15}$$

que é exatamente a expressão:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{P''(z_1)}{\sqrt{P'(z_1)}}. \tag{B16}$$

Assim, o módulo pode ser escrito como:

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{P''(z_1)}{\sqrt{P'(z_1)}}. \tag{B17}$$

Para o caso em que $P_3(z)$ possui 3 raízes reais distintas z_1, z_2 e z_3, satisfazendo:

$$z_1 > z_2 > z_3,$$

temos

$$P_3(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3), \tag{B18}$$

para a qual temos as seguintes transformações:

$$\sin^2 \varphi = \frac{z - z_3}{z - z_2}, \tag{B19}$$

para $z \leq z_3$,

$$\sin^2 \varphi = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}, \tag{B20}$$

para $z_3 \leq z \leq z_2$,

$$\sin^2 \varphi = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, \tag{B21}$$

para $z_2 \leq z \leq z_1$, e

$$\sin^2 \varphi = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{B22}$$

para $z \geq z_1$.

Para qualquer uma das 4 transformações, obtemos a integral:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}} = \frac{2}{\sqrt{z_1 - z_3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \sin^2 \varphi}}, \tag{B23}$$

a partir da qual podemos definir σ e κ:

$$\sigma = \frac{\sqrt{z_1 - z_3}}{2}, \tag{B24}$$

e

$$\kappa = \sqrt{\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}. \tag{B25}$$

As transformações acima são válidas para os valores restritos a $\sin^2 x \in [0, 1]$ e $\cos x \in [-1, 1]$.

Apêndice C - Algoritmos do *Mathematica*$^{©}$

Neste apêndice, mostramos alguns comandos do software *Mathematica*$^{©}$ utilizados para gerar os gráficos apresentados no texto.

Analisamos a integral:

$$x = \pm \frac{1}{m_\phi} \int \frac{dz}{\sqrt{z^3 - z^2 + \frac{D}{2}}}, \tag{C01}$$

bem como suas raízes e utilizamos o software com os seguintes comandos:

```
b=
d=
pol=z^{3} + b z^{2} + (d/2)
Roots[pol == 0, z]
Out[]:={{z->z1},{z->z2},{z->z3}}
h1=Head{z1}
h2=Head{z2}
h3=Head{z3}
```

Se somente um dos três valores h1, h2 e h3 é real (comando Head), então esse valor é denotado por h e

```
h=
S = Sqrt[Sqrt[3 h^{2} - 2 h]]
K = 0.5 - 0.25*((3 h)/(Sqrt[3 h^{2} - 2 h]))
fi = Sqrt[(d/2)(((t1-S^{2})JacobiCN[S x,K]
 + (t1 + S^{2})))/(1+JacobiCN[S x, K])]
Plot[fi, {x, x1, x2}, AxesLabel -> {x, \[Phi]}, AxesLabel -> {0, 0}]
```

Se, no entanto, os três valores são reais:

```
z1=Max[h1,h2,h3]
z3=Min[h1,h2,h3]
```

```
z2= other case
S = 0.5  Sqrt[z1 - z3]
K=Sqrt[((z2 - z3)/(z1 - z3))]
fi1 = (z3 + (z2-z3) JacobiSN[S x, K])^{2}
Plot[fi1, {x, x1, x2}, AxesLabel -> {x, \[Phi]},
 AxesLabel -> {0, 0}]

fi2 = (z1-z2 (JacobiSN[S x, K])^{2})/(1-(JacobiSN[S x, K])^{2})
Plot[fi1, {x, x1, x2}, AxesLabel -> {x, \[Phi]},
AxesLabel -> {0, 0}]
```

Referências Bibliográficas

[1] **Campos, S. D., Maia Jr., A.** - *Lightning Stars: Anomalous Photoproduction in Neutron Stars via Parametric Resonance Mechanism* - astro-ph/0506714;

[2] **Carrillo, J. A. E., Maia Jr., A.** - *Energy Levels of Classical Interacting Fields in a Finite Domain in 1+1 Dimension* - J.Phys. **A33** (2000) 2081-2096, hep-th/9905171;

[3] **Carrillo, J. A. E., Maia Jr., A.** - *Energy Levels of Interacting Fields in a Box*, Int.J.Theor.Phys. **38** (1999) 2185-2196, hep-th/9905158;

[4] **Carrillo, J. A. E., Maia Jr., A.** - *Jacobi Elliptic Solutions of $\lambda\phi^4$ Theory in a Finite Domain*, Int.J.Mod.Phys. **A15** (2000) 2645-2660, hep-th/9905151;

[5] **Rebouças, M.J., Lima, J.A.S.** - *Time-dependent, Finite, Rotating Universe* - J. Math. Phys., **22**(11), 1981, pp 2699-2703;

[6] **Sasakura, N.** - *A de-Sitter thick domain wall solution by elliptic functions*, JHEP 0202 (2002) 026, hep-th/0201130;

[7] **Harpaz, A** - *Stellar Evolution* - A. K. Peters Ltd., 1994;

[8] **Zwillinger, D.** - *Handbook of Differential Equations* - Cap. II - Look-Up Technique - pp 166-167, Academic Press, Inc., New York, 1972;

[9] **Lane, I.J.H.** - *On the Theoretical Temprature of the Sun Under the Hypothesis of a Gaseous Mass Maintaining its Volume by its Internal Heat and Depending on the Laws of Gases Known to Terrestrial Experiment* - Amer.J.Sci. and Arts. **4** (1869-70), pp 57-74;

[10] **Emden, R.** - *Gaskugeln, Anwendungen der Mechanischen Warmen-Theorie auf Kosmologie und Meteorologische Probleme*, B.G. Teubner, Leipzig, Germany, 1907, Chap. XII;

[11] **Wong, J.S.W.** - *On the Generalized Emden-Fowler Equation* - SIAM Review, **Vol. 17**, No. 2. (Apr., 1975), pp. 339-360;

[12] **Wong, J.S.W.** - *Nonoscillation Theorems for Second Order Nonlinear Differential Equations* - Proceedings of the American Mathematical Society, **Vol. 127**, No. 5. (May, 1999), pp. 1387-1395;

[13] **Wong, J.S.W.** - *Some Stability Conditions for* $x" + a(t)x2n - 1 = 0$ - SIAM Journal on Applied Mathematics, **Vol. 15**, No. 4. (Jul., 1967), pp. 889-892;

[14] **Wong, J.S.W.** - *On Existence of Oscillatory Solutions for a Second Order Sublinear Differential Equation* - Proceedings of the American Mathematical Society, **Vol. 92**, No. 3. (Nov., 1984), pp. 367-371;

[15] **Berkovich, L.M.** - *The Generalized Emden-Fowler Equation* - Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, 1997, **V.1**, 155-163;

[16] **Baker, H.F.** - *An Introduction to the Theory of Multiply Periodic Functions* - Cambridge University Press (1907) - Chap. 01, 02;

[17] **Abramowitz, M.** e **Stegun, I.A.** - *Handbook of Mathematical Functions* -3rd ed. - Cap. 17 - "Elliptic Integrals- pag 597-Dover Publications, Inc., New York, 1998;

[18] **Arscott, F.M.** - *Periodic Differential Equations* - Pergamon, Oxford, (1964);

[19] **W. Thompson (L. Kelvin)** - *On the Convective Equilibrium of Temperature in the Atmosphere* - Manchester Philos. Soc. Proc. **2** (1860-62), pp. 170-176; reprint, Math. and Phys. Papers by Lord Kelvin, **3** (1890,pp. 255-260);

[20] **Fowler, R.H.** - *The Form Near Infinity of Real, Continuous Solutions of a certain Differential Equation of the Second Order* - Quart. J. Math. **45**(1914),pp.289-350;

[21] **Fowler, R.H.** - *The Solution of Emden's and Similar Differential Equations*, Monthly Notices Roy. Astro. Soc. **91**(1930), pp.63-91;

[22] **Fowler, R.H.** - *Some Results on the Form Near Infinity of Real Continous Solutions of a Certain Type of Second Order Differential Equation*, Proc. Lonndon. Math. Soc., **13** (1914), pp.341-371;

[23] **Fowler, R.H.** - *Further Studies of Emden's and Similar Differential Equations*, Quart. J. Math. **2**(1931), pp. 259-288;

[24] **Chandrasekhar, S.** - *An Introduction to the Study of Stellar Structure* - Cap. 04 - "Polytropic and Isothermal Gas Spheres- pp 84-182 - Dover Books - 1967;

[25] **Bassalo, J.M.F.** - *Nascimentos da Física* - Rev. Bras. Ens. Fis., **vol 21**, no 1, 1999, pp 162-171;

[26] **Chavanis, P. H., Sire, C.** - *Logotropic Distributions* - Physica A, **375**, 140 (2007) - cond-mat/0610410;

[27] **Gama, M.C., Carrillo, J.A. E., Maia Jr., A.** - *Small Fluctuations in $\lambda\phi^n$ Theory ina Finit Domain: An Hirota's Method Approach* - submetido ao "International Journal of Modern Physics"(2008)- hep-th 08070269;

[28] **Codaccioni, J.P., Constantinescu, F.** - *Taylor Series for the Dirac Function on Perturbed Surfaces with Applications to Mechanics* - Math. Methods Appl. Sci. , **vol. 7**, 1985, pp 416-425;

[29] **Caboz, R., Loiseau, J. F.** - *Lien entre Périeode et Hauteur Normalisée à L'intérieur du Puits de Potentiel Pour L'oscillateur Anharmonique* - C.R. Acad. Sci. Paris, **v. 296**, 1983, pp. 1753-1756;

[30] **Nayfeh, Ali H.** - **Perturbation Methods** - Wiley-Interscience, NY, 1973;

[31] **Nayfeh, Ali H.** - **Problems in Perturbation** - Wiley-Interscience, NY, 1985;

[32] **Gradshteyn, I. S. ; Ryzhik, I. M.** - *Table of Integrals, Series and Products* - 8-9-Special Functions-8.1-Elliptic Integrals and Functions - pag 904-921 - Academic Press - 1980,

[33] **Byrd, P. F., Friedman, M.D.** - *Handbook os Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1971.