

**Universidade Estadual de Campinas**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA  
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA**

# **Cosmologia e o Princípio de Maupertuis-Jacobi**

Luciana Aparecida Elias  
Doutorado em Matemática Aplicada

**Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa**

Campinas - Março de 2008

# Cosmologia e o Princípio de Maupertuis-Jacobi

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luciana Aparecida Elias** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de Março de 2008.



---

**Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

Prof. Dr. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor

Prof. Dr. Waldir Alves Rodrigues Júnior

Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin

Prof. Dr. Sandro Silva e Costa

Tese, apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática Aplicada.**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Elias, Luciana Aparecida

EL42c            Cosmologia e o princípio de Maupertuis-Jacobi/Luciana  
Aparecida Elias -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Alberto Vazquez Saa

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cosmologia. 2. Geodésica (Matemática). 3. Quintessência. I.  
Saa, Alberto Vazquez. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mca/imecc)

Título em inglês: Cosmology and the Maupertuis-Jacobi principle

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Cosmology. 2. Geodesics (Mathematics).  
3. Quintessence.

Área de concentração: Física-matemática

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

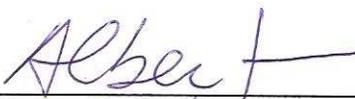
Banca examinadora: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Waldir Alves Rodrigues Júnior (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin (UFABC-Santo André)  
Prof. Dr. Sandro Silva e Costa (UFABC-Santo André)

Data da defesa: 14/03/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 14 de março de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



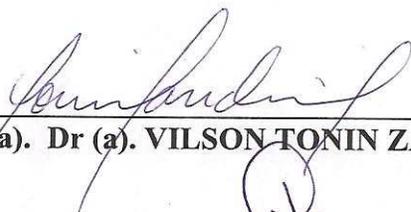
---

**Prof. (a). Dr (a). ALBERTO VAZQUEZ SAA**



---

**Prof. (a). Dr (a). SANDRO SILVA E COSTA**



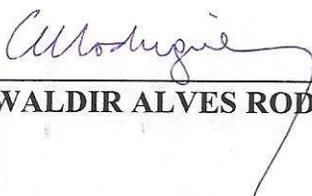
---

**Prof. (a). Dr (a). VILSON TONIN ZANCHIN**



---

**Prof. (a). Dr (a). PATRÍCIO ANÍBAL LETELIER SOTOMAYOR**



---

**Prof. (a) Dr. (a) WALDIR ALVES RODRIGUES JÚNIOR**

*Dedico este trabalho à minha mãe Elina, saudades eternas,  
ao meu pai José Elias - Zezão,  
aos meus queridos afilhados.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, para mim, criador e resposta da evolução e expansão do Universo.

A minha mãe, por ter me dado tanto amor, que nos momentos difíceis era com ele que eu contava.

A meu pai, o Zezão, pelo companheirismo e por dizer sempre que iria dar certo.

Meu querido, dedicado, paciente e sem igual orientador.

Aos Professores Ronaldo Alves Garcia, Genésio Lima dos Reis, João Carlos da Rocha Medrado e Marco Antônio Teixeira, por recomendarem-me ao programa.

Meus compadres, comadres e afilhados pela compreensão por tanta ausência.

À vovó Dirce, que por pouco não acompanhou o desfecho do trabalho, mas que foi muito importante em seu início.

Ao vovô Paulo, pelo mimo tão gostoso.

À vovó Nair, pelo carinho. E ao vovô Wiron, que, apesar de não ter conhecido, sempre foi uma verdade em minha vida.

Minha família, tios, tias, primos e primas por acreditarem sempre.

Minha família honorária, pelo mesmo motivo.

Meus amigos em Goiás: Goiânia, Aparecida de Goiânia, Rio Verde, Jataí.

Meus amigos em Minas Gerais: Frutal, Uberlândia, Uberaba, Santa Rita do Sapucaí.

Meus amigos do Distrito Federal: Brasília.

Meus amigos do Rio de Janeiro: Capital, Miguel Pereira.

Meus amigos de São Paulo: Capital, Sumaré, Osasco, Aparecida d'Oeste, São José do Rio Preto, Votuporanga, Barra Bonita, Lutécia.

Família Pereira Lima por tudo.

Meus amigos na Bahia: Salvador, Feira de Santana.

Minhas amigas em Mato Grosso do Sul: Dourados.

Minha amiga do Amazonas: Manaus

Meus amigos do Rio Grande do Sul: Espumoso, Colorado.

Aos amigos feitos em Campinas.

Meus amigos que estão fora e os que são de fora do Brasil.

À Fundação Educacional de Jataí e à Universidade Federal de Goiás pelas liberações oportunas.

Aos padres Camilo, José Del'Ácqua e José de Oliveira pelas bênçãos favoráveis.

# Resumo

Mostraremos que as equações de movimento de uma classe de modelos cosmológicos anisotrópicos envolvendo campos escalares com acoplamento não mínimo à gravitação são equivalentes ao fluxo geodésico em certas variedades estendidas munidas de uma métrica não-riemanniana, generalizando alguns trabalhos recentes e permitindo uma melhor classificação dinâmica do espaço de fase das soluções destes modelos cosmológicos. Essencialmente, as técnicas empregadas neste trabalho são uma generalização do conhecido Princípio de Maupertuis-Jacobi da Mecânica Clássica, o qual permite associar o fluxo geodésico de uma métrica particular (a métrica de Jacobi) às equações de movimento de um dado sistema mecânico, tipicamente Hamiltoniano. Mostraremos também que a abordagem geométrica baseada na métrica de Eisenhart da mecânica clássica pode ser generalizada de maneira análoga ao do Princípio de Maupertuis-Jacobi para o caso de equações cosmológicas, permitindo a introdução de um outro enfoque geométrico complementar àquele correspondente à generalização do Princípio de Maupertuis-Jacobi. Estes resultados são aplicados a modelos cosmológicos de quintessência atuais e resultados interessantes e promissores são obtidos.

# Abstract

We will show that the equations of motion for a class of non-minimally coupled anisotropic scalar-tensorial cosmological models are equivalent to the geodesic flux on certain augmented manifold endowed with a non-Riemannian metric. This result generalizes some recent ones and provides a better dynamical classification of the phase space of such cosmological models. The techniques employed in this work are, basically, a generalization of the well known Maupertuis-Jacobi Principle of Classical Mechanics, which allows us to associate the geodesic flux of a particular metric (the so called Jacobi Metric) to the equations of motion of a given mechanical system, typically a Hamiltonian one. We will show also that the classical geometrical approach based on the Eisenhart metric can be generalized in an analogous way for the cosmological case, leading to another complementary geometrical approach to that one corresponding to the generalization of the Maupertuis-Jacobi Principle. Such results are applied to certain quintessential cosmological models leading to some interesting and promising results.

# Sumário

Introdução	xvii
<b>1 Bases Geométricas da Relatividade Geral</b>	<b>1</b>
1.1 Espaço-tempo . . . . .	2
1.1.1 Definições preliminares . . . . .	2
1.1.2 Equivalência física entre campos tensoriais . . . . .	4
1.1.3 Estruturas geométricas básicas . . . . .	5
1.1.4 Alguns exemplos . . . . .	8
1.2 Estrutura causal . . . . .	12
1.2.1 Cone de luz . . . . .	12
1.2.2 Tipos causais . . . . .	14
1.3 Observadores e sistemas de referência . . . . .	20
1.3.1 Curvas no espaço-tempo . . . . .	20
1.3.2 Observadores . . . . .	21
1.3.3 Sistema de referência . . . . .	22
<b>2 Relatividade Geral e Cosmologia</b>	<b>23</b>
2.1 Modelos cosmológicos . . . . .	23
2.1.1 Princípio cosmológico . . . . .	24
2.1.2 Isometrias e vetores de Killing . . . . .	25
2.1.3 Espaços maximalmente simétricos e a métrica de Robertson-Walker . . . . .	25
2.2 Fótons, sinais de luz e <i>redshift</i> . . . . .	26

2.3	Quintessência e energia escura . . . . .	27
<b>3</b>	<b>O Princípio de Maupertuis-Jacobi e a Geometria de Eisenhart</b>	<b>31</b>
3.1	Princípio de Maupertuis-Jacobi . . . . .	31
3.2	A geometria de Eisenhart . . . . .	36
3.2.1	Trajetoórias . . . . .	39
3.2.2	Teorema de Hamilton-Jacobi . . . . .	40
3.2.3	Geodésicas minimais . . . . .	43
3.2.4	As equações Hamiltonianas e o espaço $S_{n+2}$ . . . . .	45
3.2.5	Potenciais independentes do tempo . . . . .	49
3.2.6	Princípio de Fermat estendido . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Modelos cosmológicos e o Princípio de Maupertuis-Jacobi</b>	<b>53</b>
4.1	Cosmologias multiescalares . . . . .	53
4.2	Análise dos pontos fixos . . . . .	56
4.2.1	Identificando os pontos fixos . . . . .	56
4.2.2	Qualificando os pontos fixos . . . . .	57
4.3	Estudo das trajetórias no espaço de fase . . . . .	60
4.4	Evolução das cosmologias multiescalares . . . . .	62
4.4.1	Primeiro caso . . . . .	63
4.4.2	Segundo caso . . . . .	65
4.4.3	Caso geral . . . . .	66
4.5	Aplicações . . . . .	67
4.5.1	O cone de aceleração . . . . .	67
4.5.2	Trajetoórias para potenciais exponenciais . . . . .	69
4.5.3	Comportamento assintótico de um potencial qualquer . . . . .	71
4.6	Caso com acoplamento não mínimo . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Cosmologias anisotrópicas</b>	<b>77</b>
5.1	Caso anisotrópico com acoplamento não mínimo . . . . .	78

<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Demonstração do Teorema de Hartman-Gröbman</b>	<b>91</b>
A.1	O Teorema . . . . .	91
A.2	A Demonstração . . . . .	92

# Introdução

A Cosmologia moderna nasce dos trabalhos de Einstein de 1915 que lançaram a Relatividade Geral. A partir destes trabalhos pôde-se, pela primeira vez, perscrutar nosso universo à luz do Método Científico. As primeiras décadas da Cosmologia moderna foram, contudo, de desenvolvimento muito lento. A maior parte dos trabalhos dessa fase eram altamente especulativos, causando um certo desconforto e acarretando descrédito em grande parte da comunidade científica. Esta situação alterou-se significativamente nos últimos anos, nos quais assistimos uma prodigiosa evolução da Cosmologia motivada, basicamente, por novos meios observacionais e de modelagem. Compreender o universo em larga escala se torna fascinante e ao mesmo tempo instigante pelos recursos empregados e pelas expectativas de se encontrar respostas definitivas para as mais antigas e profundas questões da Humanidade. Várias questões que até muito pouco pertenciam mais à metafísica do que à ciência podem, agora, ser analisadas de maneira racional. A partir de modelos que descrevem o universo visível atual, os cosmólogos podem inferir propriedades em outras épocas e de outras partes do universo, fazer algumas previsões e, inclusive, testá-las observacionalmente. Freedman e Turner [1], por exemplo, argumentam que entender a evolução do universo é algo que tem a ver com a expectativa de conhecer sua estrutura, sua expansão, sua composição, passando por sua idade e, principalmente, a descrição de sua dinâmica de movimento. É impossível não nos deslumbrarmos diante da eficácia das teorias físicas na descrição da Natureza, desde as mais diminutas escalas até o universo como um todo.

Seria um truísmo afirmar a importância da Matemática na construção e aplicação das teorias físicas, em particular da Cosmologia. Todas as grandes teorias físicas decorreram de ou implicaram em novidades matemáticas quase concomitantes. No caso paradigmático da

Mecânica Newtoniana, por exemplo, o desenvolvimento foi claramente conjunto. Contudo, o grande avanço científico do Século XX acarretou, de maneira quase inexorável, a disseminação de especialidades e especialistas. É praticamente impossível uma única pessoa acompanhar todos os desenvolvimentos relevantes em uma grande área como, por exemplo, a Física ou a Matemática. A imagem romântica do sábio universalista pertence, definitivamente, à história. A ciência moderna, em particular a Cosmologia é, basicamente, um empreendimento coletivo e necessariamente interdisciplinar. O trabalho aqui apresentado é uma tese de Matemática Aplicada motivado por problemas relevantes da Cosmologia moderna. As definições de Matemática Aplicada e Matemática Pura (assim como as de Física Teórica, Física Experimental, Física Matemática, etc...) estão quase sempre envoltas em alguma polêmica. Estas questões nada têm a ver com a Ciência em si, e são, de fato, quase sempre irrelevantes do ponto de vista científico, pertencendo mais ao campo da inevitável retórica inerente a qualquer atividade social do que às questões científicas fundamentais. Atribui-se a John W. Tukey a “definição” de Matemática Aplicada como sendo a *busca de soluções aproximadas para problemas exatos*, em contraposição à Matemática Pura, a qual envolveria, segundo ele, a *busca de soluções exatas para problemas aproximados*. Não é nossa intenção fazer qualquer juízo<sup>1</sup> de comparação entre as duas “formas” de Matemática, mas as definições de Tukey acomodam muito bem as atividades típicas desenvolvidas em Matemática Aplicada e Pura. O trabalho desta tese pertence indubitavelmente à primeira “forma” de Matemática. Como veremos, as contribuições originais desta tese envolvem uma reinterpretação geométrica das equações de certos modelos cosmológicos bastante gerais. Tal reinterpretação geométrica facilita e amplia a classificação qualitativa e quantitativa das possíveis soluções cosmológicas, algo essencial para a construção de modelos cosmológicos mais realistas e precisos e, portanto, menos “falseáveis” do ponto de vista do Método Científico.

A principal motivação dos trabalhos que resultaram nesta tese foram os resultados recentes de Townsend e Wohlfarth [3] mostrando que as equações de movimento de modelos cosmológicos isotrópicos e homogêneos envolvendo campos escalares podem ser encaradas como geodésicas

---

<sup>1</sup> A citação original: *Far better an approximate answer to the right question, which is often vague, than the exact answer to the wrong question, which can always be made precise*, [2].

em certos espaços de configuração estendidos. Estes resultados são curiosos e intrigantes já que estes espaços de configuração estendidos não possuem nenhuma relação direta com o espaço-tempo em que os modelos cosmológicos são geometricamente definidos originalmente. Deve-se dizer também que tais resultados não são tão novos, de fato. Conclusões semelhantes já haviam sido antecipadas em [4, 5, 6, 7]. Townsend e Wohlfarth, contudo, foram os primeiros a sugerir que esta reinterpretação geométrica das equações de movimento de certos modelos cosmológicos poderia auxiliar a classificação qualitativa e quantitativa da dinâmica de suas soluções. Nossa contribuição básica a este problema foi identificar que, por trás do procedimento usado por Townsend e Wohlfarth estava, de fato, uma idéia do Século XVIII (anterior, portanto ao fracionamento das Ciências Físicas e Matemáticas em suas especialidades atuais): o Princípio de Maupertuis-Jacobi da Mecânica Clássica. Isto permitiu a extensão dos resultados de Townsend e Wohlfarth para situações mais gerais e de maior relevância física, notadamente os casos anisotrópicos e envolvendo campos escalares com acoplamento não mínimo à gravitação.

O Princípio de Maupertuis-Jacobi da Mecânica Clássica [8] estabelece que a dinâmica de um dado sistema mecânico pode ser vista como movimentos geodésicos associados a uma variedade Riemanniana munida de uma métrica particular, a métrica de Jacobi. No caso de modelos cosmológicos, como veremos, esta métrica não será de assinatura euclidiana. Mostraremos como aplicar o Princípio de Maupertuis-Jacobi para as equações de movimento associadas a modelos cosmológicos com ação do tipo

$$S[g_{ij}, \phi^\alpha] = \int d^d x \sqrt{-g} \left( F(\phi) R - \frac{1}{2} g^{ij} G_{\alpha\beta} \partial_i \phi^\alpha \partial_j \phi^\beta - V(\phi) \right), \quad (0.0.1)$$

que correspondem a situações em que a gravidade é descrita por uma métrica  $g_{mn}$  acoplada, de maneira não mínima, a  $N$  campos escalares  $\phi^\alpha$  tomando valores num espaço alvo riemanniano  $\Sigma$ , com métrica  $G_{\alpha\beta}$ , e com potencial de auto-interação  $V$ . Em (0.0.1), os índices gregos  $\alpha, \beta = 1, \dots, N$  (os campos  $\phi^\alpha$  cobrem  $\Sigma$ ), enquanto que os índices latinos dizem respeito à dimensão do espaço-tempo e portanto variam entre  $0, \dots, d$ . A métrica do espaço-tempo é dada por  $g_{ij}$  e  $R$  é sua curvatura escalar usual. Modelos do tipo (0.0.1) são freqüentemente introduzidos para a descrição da recém-descoberta fase de expansão acelerada do universo. Nestes casos, os modelos com campos escalares são chamados de modelos de quintessência, e os campos escalares são identificados como os responsáveis pelos termos de energia escura nas equações

de Einstein. Além de possibilitar a introdução do acoplamento não mínimo através do termo  $F(\phi)$ , nossa abordagem permite também incluir as soluções anisotrópicas de (0.0.1). Convém lembrar que a estabilidade frente a perturbações anisotrópicas é essencial para que qualquer modelo cosmológico possa ser considerado físico. Os casos em que existem regiões do espaço de fase em que  $F(\phi) = 0$  merecem atenção especial, [9]. Veremos também que a interpretação das equações de movimento como fluxo geodésico permite ir além da simples análise da estabilidade linear de pontos fixos. A análise dos fluxos geodésicos associados às equações de movimento proporciona resultados complementares aos obtidos via o teorema de Hartman-Gröbman e, mais importante, permite inferir as bacias de atração dos pontos fixos.

Como todo tema clássico, o Princípio de Maupertuis-Jacobi tem uma vasta literatura física e matemática, tendo sido revisitado diversas vezes. Obviamente, está completamente fora de escopo uma revisão da história dos mais de 200 anos do Princípio. Contudo, as análises de L. P. Eisenhart nos anos de 1928 e 1929 são particularmente interessantes aos nossos propósitos. Essencialmente, Eisenhart questiona a unicidade do Princípio de Maupertuis-Jacobi. Em outras palavras, seria o fluxo geodésico associado à métrica de Jacobi a *única* interpretação geodésica possível das equações de um sistema mecânico? De maneira não surpreendente, a resposta é não. Eisenhart, porém, foi além e propôs uma nova métrica, chamada agora de métrica de Eisenhart, cujas geodésicas seriam equivalentes às equações de movimento de um dado sistema mecânico. O interessante da métrica de Eisenhart é que ela, em geral, está disponível nas situações em que a métrica de Jacobi não pode ser definida, e vice-versa. Pode-se, portanto, a partir da métrica de Eisenhart obter uma formulação geodésica para um sistema mecânico complementar à obtida via o Princípio de Maupertuis-Jacobi. Mostraremos também como a métrica de Eisenhart pode ser útil na análise dinâmica das soluções de modelos com ação do tipo (0.0.1).

Esta tese contém seis capítulos e um apêndice além desta introdução. Os capítulos 1 e 2 são introdutórios e foram incluídos para tornar o trabalho minimamente auto-contido. Ambos capítulos abordam os aspectos físicos e matemáticos elementares da Relatividade Geral. No capítulo 1 estão reunidas as definições das principais estruturas geométricas usadas ao longo da tese. Alguns poucos resultados são provados, muitos são simplesmente enunciados e o leitor

é remetido à literatura padrão da área para mais detalhes. O capítulo 2 contém uma sucinta introdução à Relatividade Geral visando a introdução de modelos cosmológicos. Uma vez mais, trata-se de material padrão, disponível em detalhes nas referências citadas ao longo do texto, com, talvez, a única exceção da seção (2.3), a qual trata de modelos de quintessência e energia escura, assuntos muito recentes que não possuem ainda uma exposição sistemática e didaticamente orientada.

O capítulo 3 devota-se à apresentação do Princípio de Maupertuis-Jacobi e do estudo dos fluxos geodésicos associados a determinadas equações de movimento, com as geodésicas da métrica de Eisenhart em destaque especial. Rigorosamente, trata-se também de material padrão, não original. Contudo, estes resultados são raramente expostos da maneira sistemática que nossas análises requerem.

Nossas contribuições originais são apresentadas nos capítulos 4 e 5. O último capítulo contém uma discussão dos resultados obtidos e possíveis desenvolvimentos futuros. O apêndice contém uma exposição de caráter introdutório ao teorema de Hartman-Gröbman necessário para a validação da análise de estabilidade linear usual.

# Capítulo 1

## Bases Geométricas da Relatividade

### Geral

Este capítulo reúne as definições matemáticas das principais estruturas físicas e geométricas usadas ao longo da tese. Alguns poucos resultados são provados, muitos são simplesmente enunciados. O leitor deve consultar [10, 11], nossas principais referências matemáticas, para maiores detalhes.

Um dos principais conceitos da Relatividade Geral e também de nosso estudo é o de espaço-tempo, [12, 13]. Intuitivamente, o espaço-tempo é a coleção de todos os eventos possíveis, passados e futuros associados a todos possíveis observadores. Tal conceito foi introduzido por Minkowski<sup>1</sup> em 1908 como uma maneira de unificar diversos resultados da Relatividade Especial. Várias definições matemáticas fazem-se necessárias para que possamos discutir sem ambigüidades o conceito de espaço-tempo, assim como também o conceito mais primitivo de evento. A maior parte de nossas aplicações envolverão espaços-tempos quadridimensionais (uma direção do tipo-tempo, três do tipo-espaço), mas, a menos que se diga o contrário, as definições deste capítulo são todas para o caso de dimensão arbitrária.

---

<sup>1</sup>Textualmente: *The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the experimental physics soil, and therein lies their strength. They are radical henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.* [14].

## 1.1 Espaço-tempo

A descrição intuitiva do espaço-tempo como uma coleção contínua e suave de eventos sugere a hipótese de que o espaço-tempo seja uma variedade diferenciável. Localmente, as propriedades de uma variedade suave são muito semelhantes às que fisicamente são esperadas da vizinhança de um dado evento no espaço-tempo, desde que singularidades não estejam presentes. Contudo, várias outras estruturas são necessárias para que possamos definir satisfatoriamente o espaço-tempo da Relatividade Geral.

### 1.1.1 Definições preliminares

**Definição 1.1.1** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  consiste em uma variedade diferenciável ( $C^\infty$ )  $M$ , conexa, de dimensão finita  $\geq 2$ , munida de um campo tensorial  $g$  (métrica) de assinatura lorentziana, ou pseudo-riemanniana,  $(-, +, \dots, +)$ , com tempo orientável.*

O espaço-tempo é o objeto fundamental da cosmologia, no qual é modelada a história passada e futura do universo. O objeto dinâmico fundamental é o tensor métrico  $g$ , responsável pela modelagem da interação gravitacional e que satisfaz as equações de Einstein, que serão brevemente discutidas no capítulo seguinte. A hipótese de  $M$  conexo é natural para efeitos cosmológicos, pois uma variedade com partes desconexas corresponderia a espaço-tempos com regiões desconexas, inacessíveis para qualquer tipo de análise. Pautados na segunda lei da termodinâmica, por exemplo, podemos distinguir a direção do futuro e do passado. A existências destas direções é garantida com a hipótese extra de tempo-orientável.

Duas definições mais são necessárias para um melhor entendimento da definição (1.1.1): a de campos tensoriais sobre  $M$ , dos quais  $g$  é um caso particular; e de orientabilidade temporal.

**Definição 1.1.2 (Campos tensoriais)** *Um campo tensorial do tipo  $(q, r)$  sobre  $M$  é uma aplicação linear que, para todos pontos  $p \in M$ , leva  $q$  elementos de  $T_p^*M$  e  $r$  elementos de  $T_pM$  em um número real.*

Adotamos a notação padrão, na qual  $T_pM$  e  $T_p^*M$  correspondem, respectivamente, aos espaços tangente e cotangente de  $M$  no ponto  $p$ .

**Definição 1.1.3 (Métrica lorentziana)** *Uma métrica lorentziana  $g$  de  $M$  é um campo tensorial simétrico suave do tipo  $(0, 2)$  sobre  $M$  tal que, para cada  $p \in M$ , a forma bilinear  $g|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  tem assinatura lorentziana  $(-, +, \dots, +)$ .*

**Definição 1.1.4 (Classificação de vetores)** *Em um espaço-tempo  $(M, g)$ , os elementos  $U \in T_p M$  podem ser classificados em três grupos:*

- $g(U, U) > 0$ ,  $U$  é dito tipo-espaço;
- $g(U, U) = 0$ ,  $U$  é dito tipo-luz (ou nulo);
- $g(U, U) < 0$ ,  $U$  é dito tipo-tempo.

Finalmente, a orientabilidade temporal pode ser definida adequadamente.

**Definição 1.1.5** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é tempo-orientável se  $M$  admite globalmente orientação por um campo vetorial tipo tempo.*

A última de nossas definições elementares é a seguinte.

**Definição 1.1.6** *Sejam  $(M, g)$  e  $(N, h)$  dois espaços-tempos. Dizemos que  $(N, h)$  contém  $(M, g)$  se  $M$  é uma subvariedade aberta de  $N$  de modo que  $h|_M = g$  e  $(M, g)$  tem a orientação espacial e temporal induzidas de  $(N, h)$ .*

A partir da definição (1.1.6), decorre o seguinte fato, útil para identificar eventuais casos em que  $M = N$ . Para a prova, veja [10].

**Proposição 1.1.7** *Suponhamos que  $(N, h)$  contém  $(M, g)$  mas, para toda geodésica  $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow N$  tal que  $(\lambda \mathcal{E}) \cap M \neq \emptyset$ ,  $\lambda \mathcal{E} \subset M$ . Então  $M = N$ .*

### 1.1.2 Equivalência física entre campos tensoriais

Existe uma relação de equivalência para campos tensoriais de modo que várias quantidades físicas são representadas por suas correspondentes classes. Esta relação de equivalência é herança direta de certas propriedades das aplicações atuando nos espaços lineares  $T_p M$  e  $T_p^* M$  em cada ponto  $p \in M$ . Para enunciá-la, portanto, basta relembrar algumas propriedades de espaços vetoriais de dimensão finita.

Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $\phi : V \rightarrow V^*$  um isomorfismo, onde  $V^*$  é o dual de  $V$ . Para  $r, s \in \mathbb{Z}$ , com  $r > 0, s \geq 0$  temos que  $\phi$  se estende de maneira única ao isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{T}_s^r(V) &\longrightarrow \mathcal{T}_{r+1}^{r-1}(V) \\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w^1 \cdots \otimes w^s) &\longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r-1} \otimes \phi(v_r) \otimes w^1 \cdots \otimes w^s, \end{aligned}$$

para todo  $v_1, \dots, v_r \in V$  e  $w^1 \dots w^s \in V^*$ . Existe um único isomorfismo  $\phi_s^r$  de modo que

$$\begin{aligned} \phi_s^r : \mathcal{T}_s^r(V) &\longrightarrow \mathcal{T}_{r+s}^0(V) \\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w^1 \cdots \otimes w^s) &\longmapsto \phi(v_1) \otimes \cdots \otimes \phi(v_r) \otimes \phi(w^1) \cdots \otimes \phi(w^s), \end{aligned}$$

onde  $r, s$  são inteiros não negativos. Tomando  $p, q$  nas mesmas condições que  $r, s$  com  $p + q = r + s$ , definimos uma relação de equivalência  $\sim$  de forma que

$$A \sim B \Leftrightarrow \phi_q^p(A) = \phi_s^r(B),$$

para todo  $A \in \mathcal{T}_q^p(V)$  e  $B \in \mathcal{T}_s^r(V)$ .

Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo de dimensão  $N$ . A métrica  $g$  induz o isomorfismo da forma

$$\begin{aligned} \phi_x : T_x M &\longrightarrow T_x^* M \\ (\phi_x v) w &= g(v, w), \end{aligned}$$

para todo  $v, w \in T_p M$ . Suponhamos  $r + s = p + q$ ,  $A \in \mathcal{T}_q^p(T_x M)$   $B \in \mathcal{T}_s^r(T_x M)$ , então

$$A \sim B \Leftrightarrow \phi_x^p(A) = \phi_x^r(B),$$

onde  $\phi_x^p(A)$  e  $\phi_x^r(B)$  são respectivamente isomorfismos induzidos por  $\phi_x$  de  $\mathcal{T}_q^p(T_x M)$  e  $\mathcal{T}_s^r(T_x M)$  sobre  $\mathcal{T}_{r+s}^0(T_x M)$ , lembrando que  $T_x M$  denota o espaço tangente de  $M$  no ponto  $x$ .

Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois campos tensoriais em  $\mathcal{U} \subset M$ .  $\mathbf{A}$  é *fisicamente equivalente* a  $\mathbf{B}$  (pela relação de equivalência imediatamente acima definida) se e somente se  $\mathbf{A}\mathbf{x} \sim \mathbf{B}\mathbf{x}$ ,  $\forall x \in \mathcal{U}$ . De maneira mais prática, dois campos tensoriais são fisicamente equivalentes se e somente se um é obtido através de uma variação adequada dos índices do outro.

### 1.1.3 Estruturas geométricas básicas

O desenvolvimento de geometrias distintas da euclidiana foi fundamental para a Relatividade Geral. Em [15, 16, 17], podemos encontrar exemplos didáticos destas geometrias, sendo que em [15] temos um modelo da primeira a ser estudada e aceita no meio científico do século dezenove, rompendo assim uma grande barreira na evolução do tema. É muito comum entre os físicos a utilização de todo o jargão da geometria riemanniana na Relatividade Geral. Esta atitude quase sempre é temerária. A hipótese do espaço-tempo ser uma variedade munida com uma métrica lorentziana e não riemanniana introduz uma série de dificuldades e invalida muitos resultados da geometria riemanniana. A chamada geometria lorentziana, [11], porém, guarda muitas semelhanças e analogias com sua predecessora, a riemanniana. Nesta subseção, introduziremos as principais estruturas geométricas básicas necessárias para formularmos a Relatividade Geral e, em seguida, alguns modelos cosmológicos.

**Definição 1.1.8 (Conexão)** *Uma conexão  $D$  em  $(M, g)$  é um mapa  $D : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ , para todo  $p \in M$ , ou  $(X, Y) = D_X Y$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

1.  $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$ ,
2.  $D_{(X+Y)}Z = D_X Z + D_Y Z$ ,
3.  $D_{(fX)}Y = fD_X Y$ ,
4.  $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y$ .

sendo  $f : M \rightarrow R$  uma função suave sobre  $M$  e  $X, Y, Z \in T_p M$ .

Claramente,  $D_X Y$  corresponde a uma derivada. Pode-se facilmente estender este conceito a campos tensoriais genéricos, permitindo a introdução do conceito de Conexão de Levi-Civita, conhecida também como conexão compatível com a métrica.

**Definição 1.1.9 (Conexão de Levi-Civita)** *A conexão de Levi-Civita  $D$  de  $(M, g)$  é aquela para a qual:*

1.  $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$  - simetria - para todos os campos de vetores  $X, Y \in T_p M$ .
2.  $D_X g = 0$ , - compatibilidade com a métrica- para todo  $X \in T_p M$ .

Nossas próximas definições contemplam a noção de curvatura do espaço-tempo  $(M, g)$ , intimamente ligada, na Relatividade Geral, à noção de campo gravitacional.

**Definição 1.1.10 (Curvatura)** *Seja  $D$  a conexão de Levi-Civita de  $(M, g)$ . O operador curvatura de  $(M, g)$  designa para cada par ordenado de campos vetoriais  $(X, Y)$  de  $T_p M$  um operador  $\mathbf{R}_{XY}$  de modo que  $T_p M \ni \mathbf{R}_{XY} Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z$ .*

O tensor curvatura  $\mathbf{R}$  de  $(M, g)$  é o campo tensorial  $(1, 3)$   $\mathbf{R}$  tal que  $\mathbf{R}(\omega, Z, X, Y) = \omega(\mathbf{R}_{XY} Z)$  para toda 1-forma  $\omega$  e para todos campos vetoriais  $X, Y, Z$ .

**Proposição 1.1.11** *Seja  $\hat{\mathbf{R}}$  o campo tensorial fisicamente equivalente a  $\mathbf{R}$  tal que*

$$\hat{\mathbf{R}}(W, Z, X, Y) = \mathbf{g}(R_{XY} Z, W).$$

*Tem-se:*

1.  $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}) = -\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Z})$
2.  $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 0$
3.  $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$

Tanto  $\mathbf{R}$  quanto  $\hat{\mathbf{R}}$  são relacionados em um espaço-tempo  $(M, g)$  com gradientes gravitacionais, cujos correspondentes newtonianos seriam as componentes de maré do tipo:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (1.1.1)$$

com  $\mu, \nu = 1, 2, 3$  e  $\phi$  sendo o potencial gravitacional Newtoniano. As derivadas de  $\mathbf{R}$ , por sua vez, estão relacionadas aos gradientes de maré. Veja [18].

O *tensor de Ricci* de um espaço-tempo  $(M, g)$  é a contração do tensor curvatura  $\mathbf{R}$ . Formalmente, temos:

**Definição 1.1.12** *Suponha que  $X, Y \in T_p M$ . com  $\{X_A\}$  uma base de  $T_p M$  e  $\{\omega^A\}$  a base de seu dual. Então o tensor de Ricci de  $X$  e  $Y$  é dado por*

$$Ric(X, Y) = \sum_{A=1}^n \mathbf{R}(\omega^A, X, X_A, Y) \quad (1.1.2)$$

A *curvatura escalar*  $S : M \rightarrow \mathbb{R}$  ou escalar de Ricci é dada pela contração dos campos tensoriais  $(1, 1)$  fisicamente equivalentes a *Ric*.

Usualmente, os cálculos em Relatividade Geral exigem representações explícitas da conexão de Levi-Civita e do tensor de curvatura em certas bases. Para fixar nossas notações, vamos considerar um espaço-tempo  $(M, g)$  quadridimensional,  $\omega^i$  uma base de uma 1-forma sobre  $M$ ,  $\mathbf{X}_i$  a base dual e  $D$  a conexão de Levi-Civita. As formas de conexão de  $\{\omega_j^i\}$  para  $\{\omega^i\}$  são caracterizadas por

$$D_{\mathbf{X}_i} \mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^4 \omega_j^k(X_i) X_k \quad (1.1.3)$$

para todo  $i, j = 1, \dots, 4$ . Se  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são campo de vetores sobre  $M$ ,  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \mathbf{X}(\omega^i \mathbf{Y}) + \sum_{j=1}^4 \omega_j^k(\mathbf{X}) \omega^j(\mathbf{Y}) \right\} \mathbf{X}_i. \quad (1.1.4)$$

As formas que caracterizam a curvatura para  $(M, g)$  são definidas por

$$\Omega_j^i = 2 \left( d\omega_j^i + \sum_{k=1}^4 \omega_k^i \wedge \omega_j^k \right), \quad (1.1.5)$$

para todo  $i = 1, \dots, 4$ . O tensor curvatura  $\mathbf{R}$  é calculado da seguinte maneira:

$$\mathbf{R} = \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{X}_i \otimes \omega^j \otimes \Omega_j^i \quad (1.1.6)$$

Se  $\omega^j$  é uma base ortonormal as formas da curvatura são unicamente determinadas pela pelas condições:

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^4 \omega_j^i \wedge \omega^j \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.1.7)$$

$$\omega_4^4 = 0, \quad \omega_\mu^4 = \omega_4^\mu, \quad \omega_\nu^\mu = -\omega_\mu^\nu \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (1.1.8)$$

### 1.1.4 Alguns exemplos

Apresentaremos nesta seção alguns exemplos básicos de espaços-tempos.

#### Espaço-tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski é o espaço-tempo da Relatividade Especial. É um espaço plano (tensor de curvatura nulo) cuja topologia é, simplesmente a do  $\mathbb{R}^4$ . Sua métrica, em coordenadas esféricas, é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.1.9)$$

O espaço-tempo de Minkowski é um exemplo elementar e fundamental de um espaço-tempo globalmente hiperbólico e portanto satisfaz todas as condições de causalidade que serão discutidas a seguir. Suas geodésicas são linhas retas, classificadas em tipo-tempo, tipo-luz (ou nula) ou tipo-espaço de acordo com a natureza dos seus vetores tangentes. Geodésicas do tipo-tempo ou do tipo-espaço podem ser parametrizadas pelo comprimento de arco calculado a partir de (1.1.9). Já as tipo-luz necessitam de parametrização especial [11].

#### Espaços-tempos estelares

Tipicamente, chamamos de espaços-tempos estelares àqueles correspondentes ao campo gravitacional de objetos compactos. Em particular, nestes casos, admitimos que a métrica é assintoticamente plana, o que fisicamente significa que para grandes distâncias do objeto, o

campo gravitacional não exerce influência significativa. Nosso primeiro exemplo de espaço-tempo curvo é o espaço-tempo de Schwarzschild, cuja métrica tem a seguinte expressão em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.10)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$  é a métrica sobre uma 2-esfera unitária e  $m$  é a massa do objeto situado na origem do sistema de coordenadas. Vamos exemplificar o estudo geométrico deste modelo de espaço-tempo. O comportamento das geodésicas na métrica de Schwarzschild é determinado pelos símbolos de Christoffel, [16, 17], não nulos para a métrica (1.1.10) acima. Escolhendo-se uma base coordenada, tem-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{Gm}{r^3}(r - 2Gm), & \Gamma_{rr}^r &= \frac{-Gm}{r(r - 2Gm)}, & \Gamma_{tr}^t &= \frac{Gm}{r(r - 2Gm)}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -(r - 2Gm), & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -(r - 2Gm)\sin^2\theta, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Veja a figura (1.1) que esquematiza a formação de um buraco negro através de um colapso gravitacional.

As expressões das equações geodésicas para a métrica de Schwarzschild são extensas, veja, por exemplo em [19]. Porém, o trabalho de resolvê-las é simplificado pelo alto grau de simetria da métrica. Outra peculiaridade da métrica de Schwarzschild é o teorema de Birkhoff, da primeira metade da década de vinte do século passado, [19], o qual garante que a métrica de Schwarzschild é a única solução das equações de Einstein no vácuo com simetria esférica e assintoticamente plana. O espaço-tempo de Schwarzschild é geodesicamente incompleto no sentido de que nem sempre existe uma geodésica entre dois pontos. Tem curvatura de Ricci nula, mas seu tensor curvatura não é nulo. Quando  $M \rightarrow 0$ , o espaço-tempo corresponde ao de Minkowski.

Outra solução estelar interessante é a obtida por Reissner-Nordström por volta de 1916. Também corresponde a uma solução assintoticamente plana, caracterizada por sua massa e carga elétrica. Esta métrica é dada em coordenadas esféricas por

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r d\Omega^2, \quad (1.1.12)$$

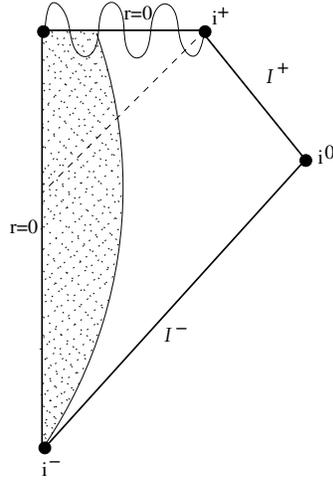


Figura 1.1: Formação de um buraco negro. A região pontilhada corresponde ao interior do corpo durante o colapso;  $r = 0$  na linha vertical, corresponde à linha mundo do centro do corpo;  $r = 0$  na horizontal corresponde singularidade de curvatura; linha tracejada, horizonte de eventos futuros. Os raios partem da região de  $I^-$  -infinito passado- para a região do colapso. Outros raios partem da região de colapso e vão para a região  $I^+$  - infinito futuro.

onde  $\Delta = 1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$  com  $m$  a massa do objeto,  $Q$  a carga elétrica total. Veja mais em [19, 20].

Em 1963, Kerr [19] obteve uma solução que generaliza a solução de Schwarzschild para o caso com rotação. Tais soluções também têm como características serem assintoticamente planas. Sua métrica é dada por:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Gm_r \theta}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2Gm_a r \text{sen}^2 \theta}{\rho} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\text{sen}^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \text{sen}^2 \theta] d\phi^2, \quad (1.1.13)$$

onde

$$\Delta(r) = r^2 - 2Gm_r + a^2 \quad (1.1.14)$$

e

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (1.1.15)$$

para  $a, m_r, m_{ar}$  parâmetros das possíveis soluções. Esta métrica pode também ser representada em coordenadas elípticas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= (r^2 + a^2)^{1/2} \text{sen}\theta \cos\phi \\ y &= (r^2 + a^2)^{1/2} \text{sen}\theta \text{sen}\phi z = r \cos\theta \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Veja a figura (1.2).

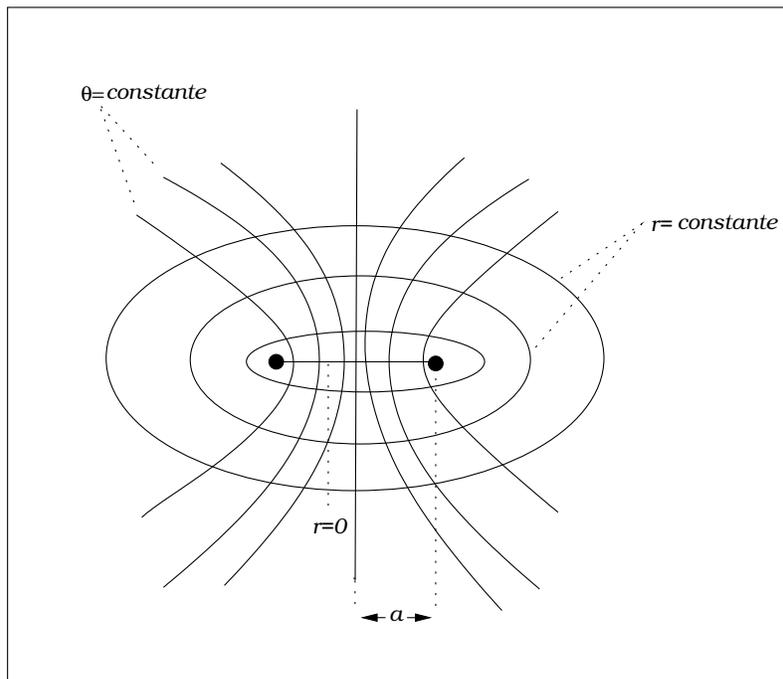


Figura 1.2: Coordenadas elípticas  $(r, \theta)$  usadas na métrica de Kerr.

## Espaços-tempos cosmológicos

Fisicamente, ao contrário do caso estelar, não há sentido em se afirmar que espaços-tempos cosmológicos sejam assintoticamente planos. Um exemplo de espaço-tempo cosmológico é o espaço-tempo de anti de-Sitter, o qual pode ser visto como uma imersão num espaço lorentziano de dimensão 5 dado, em coordenadas polares da seguinte forma:

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.1.17)$$

onde

$$\begin{aligned}
 u &= \alpha \operatorname{sen}(t') \cosh(\rho) \\
 v &= \alpha \cos(t') \cosh(\rho) \\
 x &= \alpha \operatorname{senh}(\rho) \cos(\theta) \\
 y &= \alpha \operatorname{senh}(\rho) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\
 z &= \alpha \operatorname{senh}(\rho) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi),
 \end{aligned}
 \tag{1.1.18}$$

As seções tipo-espaço têm a topologia do  $\mathbb{R}^3$  internas ao hiperbolóide

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2. \tag{1.1.19}$$

O infinito é dado por uma superfície tipo-tempo. O espaço-tempo de anti de-Sitter é um exemplo dos chamados espaços de Einstein, para os quais

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab},$$

com  $\Lambda$  constante.

## 1.2 Estrutura causal

De maneira informal, a estrutura causal de um espaço-tempo determina como seus eventos são encadeados em relações de causa e efeito. Uma das sutilezas da Relatividade Geral é que, dada sua generalidade, vários possíveis espaços-tempos não satisfazem propriedades mínimas necessárias para garantir uma das mais básicas propriedades das teorias físicas: a noção de causalidade, a qual garante que um efeito nunca pode preceder sua causa. O elemento básico da estrutura causal de um espaço-tempo  $(M, g)$  é a noção de cone de luz num dado ponto  $p \in M$ .

### 1.2.1 Cone de luz

O cone de luz é uma noção básica da Relatividade Especial. O espaço-tempo da Relatividade Especial, o chamado espaço de Minkowski, apresentado anteriormente, corresponde

simplesmente a  $(R^4, \eta)$ , sendo  $\eta$  o tensor métrico isotrópico e constante com componentes  $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ . O cone de luz em um ponto  $p$  do espaço de Minkowski corresponde à trajetória da frente de onda de um pulso de luz emitido em  $p$ . O vértice do cone é dado pela ocorrência do evento correspondente à emissão do pulso de luz. Uma representação pictórica é dada na figura (1.3), a parte inferior é atribuída ao passado e a parte superior ao futuro. Se

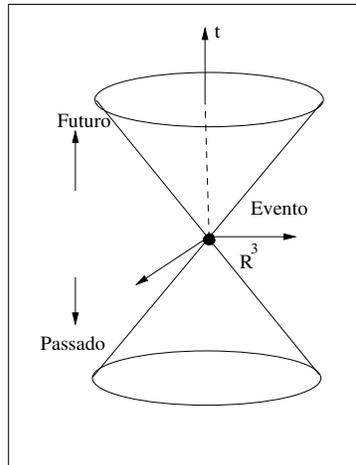


Figura 1.3: Representação de um cone de luz.

o espaço é medido em unidades de segundos-luz e o tempo em segundos, o cone tem ângulo de  $45^\circ$ , pois a luz viaja a uma distância de um segundo-luz em um segundo, no vácuo. Em Relatividade Especial, as linhas mundo de observadores físicos devem estar dentro do cone de luz. Uma das hipóteses fundamentais da Relatividade Especial é de que nada pode se propagar a uma velocidade maior que a da luz. Nenhum sinal, portanto, emitido no ponto  $p$  jamais chegará a algum ponto que esteja fora do cone de luz de  $p$ . De fato, todos os pontos que podem ter alguma conexão causal futura com  $p$  são aqueles incluídos no interior e na superfície de seu cone de luz futuro. Por outro lado, o ponto  $p$  só pode ter sido influenciado por pontos pertencentes ao interior e à superfície de seu cone de luz passado.

Dada a natureza homogênea e isotrópica do espaço-tempo de Minkowski, todos os cones de luz na Relatividade Especial são equivalentes. Na Relatividade Geral, os cones de luz são sempre definidos localmente (a partir de um ponto  $p$  do espaço-tempo) de maneira semelhante à Relatividade Especial, sempre com o auxílio de “pulsos” de luz. Contudo, em Relatividade Geral, por tratarmos em geral com espaços-tempos de curvatura não-nula, não há nenhuma

equivalência entre cones de luz em pontos diferentes do espaço-tempo. De maneira informal, dá-se o nome de estrutura causal à coleção de todos os cones de luz do espaço-tempo.

## 1.2.2 Tipos causais

Há muitas situações no campo da Física que envolvem um problema de valor inicial no qual, tipicamente, a pergunta é como será (ou onde estará) um dado sistema após um tempo  $t \geq t_0$ . Este tipo de questão pressupõe uma relação de causa e efeito. O sistema num instante  $t_1 > t_0$ , por exemplo, não pode ter influência no sistema no tempo  $t_0$ . Há quem diga que a causalidade é a propriedade mais cara aos físicos, [21]. Como veremos nesta seção, os espaço-tempos são classificados em vários tipos com respeito a sua estrutura causal e nem todos estes tipos garantem as condições necessárias para que um problema de valor inicial seja bem definido. Para introduzirmos estes tipos, alguns resultados preliminares são necessários.

**Lema 1.2.1** *Seja  $\tilde{q} \in \tilde{M}$ , onde  $\tilde{M}$  é uma variedade lorentziana e sejam  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0, 1] \rightarrow M$  duas curvas suaves tais que  $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = p_0$  e  $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{q}$ . Se  $\tilde{\mathbf{V}}_1(0), \tilde{\mathbf{V}}_2(0)$  são campos de vetores paralelos ao longo de  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_2$  com  $\tilde{\mathbf{V}}_1(0) = \tilde{\mathbf{V}}_2(0) = \tilde{\mathbf{v}}(0)$ , então  $\tilde{g}(\tilde{\mathbf{V}}_1(1), \tilde{\mathbf{V}}_2(1)) < 0$ .*

**Prova:** Sejam  $\gamma_1 = \pi \circ \tilde{\gamma}_1$  e  $\gamma_2 = \pi \circ \tilde{\gamma}_2$ , onde  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  é uma isometria local, os campos de vetores  $\mathbf{V}_1 = \pi(\tilde{\mathbf{V}}_1)$  e  $\mathbf{V}_2 = \pi(\tilde{\mathbf{V}}_2)$  são campos paralelos ao longo de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  respectivamente com  $\tilde{\mathbf{V}}_1(0) = \tilde{\mathbf{V}}_2(0) = \pi(\tilde{\mathbf{v}}_0) = v_0$  e teremos ainda  $g(\mathbf{V}_1(1), \mathbf{V}_2(1)) = g(\pi(\tilde{\mathbf{V}}_1(1)), \pi(\tilde{\mathbf{V}}_2(1))) = \tilde{g}(\tilde{\mathbf{V}}_1(1), \tilde{\mathbf{V}}_2(1))$ . Suponhamos agora que o último termo da igualdade acima seja não negativo. Então  $\tilde{\mathbf{V}}_1(1)$  e  $\tilde{\mathbf{V}}_2(1)$  são vetores tangentes tipo-tempo, deste modo  $\tilde{g}(\tilde{\mathbf{V}}_1(1), \tilde{\mathbf{V}}_2(1)) > 0$  sobre  $q = \pi(\tilde{q})$ . Temos ainda que, pelo menos, entre  $p_0$  e  $q$  e temos  $[\gamma_1] \neq [\gamma_2]$ . Pela construção de  $M$  sabe-se que  $\tilde{\gamma}_2(1) = [\gamma_2]$ . Logo  $[\tilde{\gamma}_1] \neq [\tilde{\gamma}_2]$ . Contradição! ■

**Teorema 1.2.2** *Suponha que a variedade  $(M, g)$  não é tempo-orientável. Então ela possui uma cobertura  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  tempo-orientável que é um espaço-tempo.*

**Prova:** Definamos  $\tilde{q} \in \tilde{M}$  de modo que uma dada curva suave  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  é tal que  $\sigma(0) = \tilde{p}_0, \sigma(1) = \tilde{q}$ , com  $\tilde{p}_0, \tilde{v}_0 \in \tilde{M}$  Seja  $\tilde{V}$  o único campo de vetores paralelos ao longo

de  $\sigma$  com  $\tilde{\mathbf{V}}(0) = \tilde{v}$ . Denotemos por  $F^+(\tilde{q}) = \{w \in T_{\tilde{q}}\tilde{M} : w \text{ tipo-tempo}, \tilde{g}(\tilde{\mathbf{V}}(1), w) < 0\}$ . pelo lema (1.2.1) a definição de  $F^+(\tilde{q})$  é independente da escolha de  $\sigma$ . Seja agora  $h$  uma métrica riemanniana definida positiva auxiliar para  $\tilde{M}$ . Vamos definir um campo de vetores tipo-tempo, não nulo em todos os pontos, contínuo  $\mathbf{X}$  sobre  $\tilde{M}$  pela escolha de  $\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{q}})$  para ser vetor em  $F^+(\tilde{q})$  que possui autovalor negativo de  $\tilde{g}$  com respeito a  $h$ . Isto é, encontramos uma função contínua  $\lambda : \tilde{M} \rightarrow (-\infty, 0)$  e um campo de vetores tipo-tempo contínuo  $\mathbf{X}$  sobre  $\tilde{M}$  satisfazendo  $\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{q}}) \in F^+(\tilde{q}), h(\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{q}}), \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{q}})) = 1$  e  $\tilde{g}(\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{q}}), v) = \lambda(\tilde{q})h(\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{q}}), v)$  para todo  $v \in T_{\tilde{q}}\tilde{M}$  e  $\tilde{q} \in \tilde{M}$ . ■

**Proposição 1.2.3** *Seja  $U$  uma vizinhança convexa normal de  $q$ . Então os pontos de  $U$  que podem pertencer a curvas tipo-tempo contidas em  $U$  são da forma  $\exp_q(v), v \in T_qM$ , tal que  $g(v) < 0$ .*

Em um espaço-tempo  $(M, g)$  um campo de vetores ao longo de uma curva sempre estará direcionado exclusivamente para o futuro ou para o passado, não sendo possível uma conversão contínua de um para o outro.

**Notação 1.2.4** *Denotaremos por  $p \ll q$  se existir uma curva suave tipo-tempo direcionada para o futuro que vai de  $p$  para  $q$ . E por  $p \leq q$  se  $p = q$  ou se existe uma curva suave não tipo-espaço de  $p$  para  $q$ .*

Assim, podemos definir:

**Definição 1.2.5** *O futuro cronológico  $I^+(p)$  de  $p$  é o conjunto  $I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$ . O futuro causal é o conjunto  $J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}$ .*

As definições de passado cronológico e passado causal são análogas e portanto podemos facilmente observar, através da topologia, que:

**Lema 1.2.6** *Se  $p$  é um ponto do espaço-tempo  $(M, g)$ , então  $I^+(p)$  e  $I^-(p)$  são conjuntos abertos.*

**Definição 1.2.7 (Cronológico)** *Os espaços-tempo que não contêm nenhuma curva tipo-tempo fechada, isto é,  $p$  não pertence a  $I^+(p)$  para todo  $p \in M$ , são ditos cronológicos.*

**Definição 1.2.8 (Causal)** *Os espaços-tempo que não contêm nenhuma curva fechada não tipo-espaço, isto é,  $p$  não pertence a  $J^+(p)$  para todo  $p \in M$ , são ditos causais.*

A proposição a seguir afirma que um espaço-tempo não compacto ou é causal ou é cronológico.

**Proposição 1.2.9** *Qualquer espaço-tempo  $(M, g)$  que contenha uma curva fechada tipo-tempo, não pode ser cronológico.*

**Prova:** Como os conjuntos da forma  $I^+(p)$  são abertos eles formam uma cobertura para  $M$ . Pela compacidade podemos extrair uma subcobertura finita  $\{I^+(p_1), I^+(p_2), \dots, I^+(p_k)\}$ . Desta forma  $p \in I^+(p_{i(1)})$  para algum  $i(1)$  com  $1 \leq i(1) \leq k$ . Desta forma  $p_{i(1)} \in I^+(p_{i(2)})$  para algum índice  $i(2)$  com  $1 \leq i(2) \leq k$ . Podemos assim construir uma seqüência infinita da forma  $\dots p_{i(3)} \ll p_{i(2)} \ll p_{i(1)} \ll p_1$ . Como  $k$  é finito existe apenas um número finito de  $p_{i(j)}$ 's distintos. Como vale a transitividade para  $\ll$ , segue-se que  $p_{i(n)} \in I^+(p_{i(n)})$  para algum  $p_{i(n)}$ . Desta forma  $(M, g)$  contém uma curva fechada tipo-tempo em torno de  $p_{i(n)}$ . ■

Duas métricas lorentzianas  $g_1$  e  $g_2$  são *fortemente causais* para  $M$  quando existe uma função suave  $\Omega : M \rightarrow (0, \infty)$  tal que  $g_1 = \Omega g_2$ . Desta forma  $g_1$  e  $g_2$  determinam o mesmo passado e o mesmo futuro.

**Definição 1.2.10 (Distinguishing)** *Um espaço-tempo é dito distinguishing se para todos os pontos  $p, q \in M$  tem-se que  $I^+(p) = I^+(q)$  ou  $I^-(p) = I^-(q)$  implica que  $p = q$ .*

Num espaço-tempo distinguishing pontos distintos possuem futuro e passado cronológico distintos.

**Definição 1.2.11** *Um subconjunto aberto  $U$  num espaço-tempo é dito causalmente convexo se uma curva não tipo-espaço intercepta  $U$  num conjunto não conexo.*

**Definição 1.2.12 (Causalmente simples)** *Um espaço-tempo distinguishing é causalmente simples se  $J^+(p)$  e  $J^-(p)$  são subconjuntos fechados de  $M$ , para todo  $p \in M$ .*

**Definição 1.2.13 (Causalmente contínuo)** *Um espaço-tempo é dito causalmente contínuo se a função  $p \rightarrow I^+(p)$  possui exterior contínuo.*

Isto significa que se  $p \in M$ , para cada compacto  $K \subset M - \overline{I^+(p)}$  existe uma vizinhança  $U(p)$  de  $p$  de modo que  $K \subset M - \overline{I^+(q)}$  para cada  $q \in U(p)$ .

A figura (1.4) mostra quando um espaço tempo é não causalmente contínuo. As linhas, que devem ser contínuas não "passam de uma região para outra" e portanto não há a relação  $\ll$ .

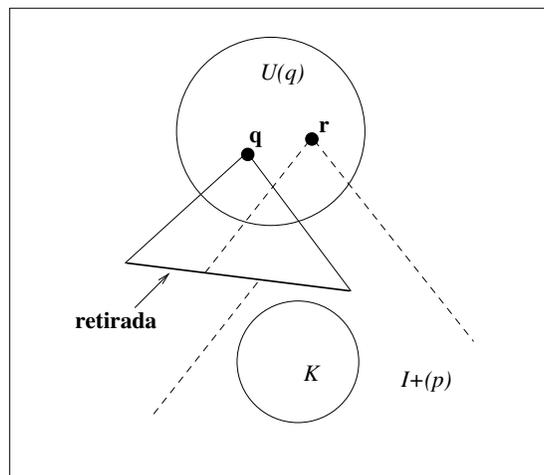


Figura 1.4: Veja que ao retirar a linha sugerida não podemos passar continuamente de uma região para outra.

**Definição 1.2.14** *Um conjunto aberto  $U$  num espaço-tempo é dito causalmente convexo se uma curva não tipo-espaço não intercepta  $U$  num conjunto descontínuo.*

**Definição 1.2.15 (Fortemente causal)** *O espaço-tempo é dito fortemente causal se existe uma vizinhança causalmente convexa tão pequena quanto se queira, para cada ponto  $p \in M$ .*

Se existe uma vizinhança com as características acima em um ponto  $p$ , mas não em todos dizemos que o espaço-tempo é fortemente causal em  $p$ .

**Definição 1.2.16** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva em  $M$ ,  $p$  é dito ponto final de  $\gamma$  correspondente a  $t = b$  se*

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t).$$

Se  $\gamma$  for não tipo-espaço direcionada para o futuro  $p$  como acima mencionado é dito um ponto final futuro de  $\gamma$ . Caso não exista este ponto a curva é dita *inestendível* para o futuro. Definição análoga pode ser feita para o passado. Se a curva é inestendível para o passado e para o futuro ela é dita inestendível somente.

Acerca das topologias finas envolvidas na variedade do espaço-tempo, podemos caracterizar como sendo  $C^0$ , para quando dadas duas métricas para  $M$  elas são fechadas para a variedade, possuem cones de luz fechados. As topologias  $C^1$  e  $C^2$  são caracterizadas pelos sistemas geodésicos e os tensores curvatura, respectivamente - [11].

**Definição 1.2.17 (Estavelmente causal)** *Um espaço-tempo é dito estavelmente causal se existe uma vizinhança fina  $U(g)$  de  $g$  do tipo  $C^0$  no espaço de todas as métricas lorentzianas sobre  $M$ ,  $Lor(M)$ , tal que cada  $g_1 \in U(g)$  é causal sobre pequenas perturbações  $C^0$ .*

Explicitamente, se  $A \subset M$ , definimos  $g_1 \leq_A g_2$  se para cada  $p \in A$  e  $v \in T_p M$  com  $v \neq 0$ ,  $g_1(v, v) \leq 0$  implica que  $g_2(v, v) \leq 0$ , e definimos  $g_1 <_A g_2$  se para cada  $p \in A$  e  $v \in T_p M$  com  $v \neq 0$ ,  $g_1(v, v) \leq 0$  implica que  $g_2(v, v) < 0$ , falar que  $g_1 < g_2$  significa que o cone de luz de  $g_1$  é menor que o cone de luz de  $g_2$ . Define-se então que  $(M, g)$  é estavelmente causal quando existe alguma métrica causal em  $g_1$ , onde  $g_1$  pertence ao conjunto das métricas lorentzianas definidas em  $M$  com  $g < g_1$ .

**Definição 1.2.18 (Globalmente hiperbólico)** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  fortemente causal é dito globalmente hiperbólico se para cada par de pontos  $p, q \in M$  o conjunto  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto.*

A figura (1.5) estabelece um resumo da gradação das intensidades das condições de causalidades estabelecidas neste trabalho, sendo que globalmente hiperbólico tem características mais restritivas. Em [11] há várias relações entre as condições de causalidade.

Uma superfície de Cauchy  $S$  é um subconjunto de  $M$  onde todas as curvas inextendíveis não tipo-espaço se interceptam exatamente uma vez.

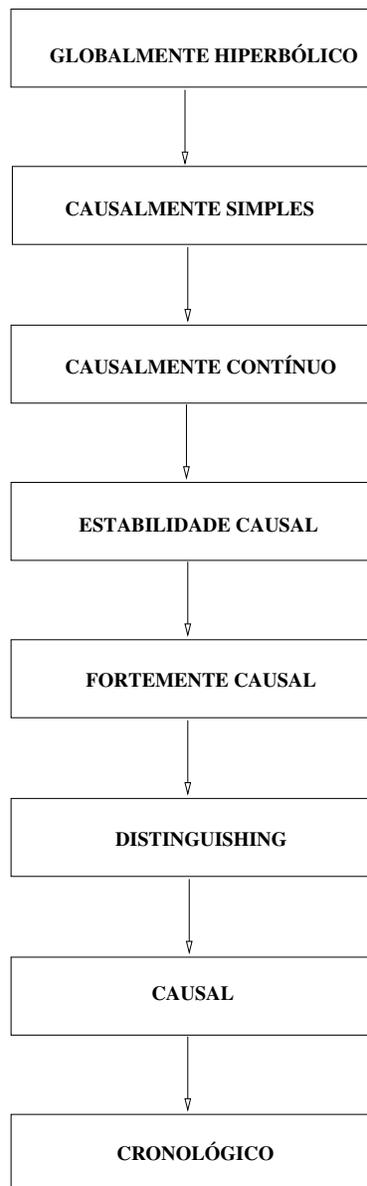


Figura 1.5: Quadro na ordem decrescente de restrição das condições de causalidade.

## 1.3 Observadores e sistemas de referência

### 1.3.1 Curvas no espaço-tempo

Em geometria lorentziana existem dois tipos de convergências para seqüências de curvas não tipo-espaço  $\{\gamma_n\}$ , sem que um seja mais forte que o outro. O primeiro utiliza o conceito de uma curva ser o limite de uma seqüência de curvas e o segundo utiliza a topologia  $C^0$  sobre curvas.

**Definição 1.3.1** *Uma curva  $\gamma$  é **curva limite** da seqüência de curvas  $\{\gamma_n\}$  se existe uma subseqüência  $\{\gamma_m\}$  tal que para todo  $p$  na imagem de  $\gamma$ , cada vizinhança de  $p$  não intercepta todos, mas um número infinito, de curvas da subseqüência  $\{\gamma_m\}$*

Lembramos ainda que, em geral, as seqüências de curvas não possuem limite, ou, mesmo quando possui, o limite não tem as mesmas características das curvas da seqüência. Mas, se o espaço-tempo for fortemente causal a curva limite de uma seqüência não tipo-espaço é não tipo-espaço. Em [11] vemos um bom estudo topológico sobre a estrutura e convergência das seqüências de curvas no espaço-tempo.

Agora vamos considerar o outro tipo de convergência.

**Definição 1.3.2** *Sejam  $\gamma$  e todas as curvas da seqüência  $\{\gamma_n\}$  definida no intervalo  $[a, b]$ . A seqüência  $\{\gamma_n\}$  converge para  $\gamma$  na topologia  $C^0$  sobre curvas se  $\gamma_n(a) \rightarrow \gamma(a)$  e  $\gamma_n(b) \rightarrow \gamma(b)$ , e dado qualquer aberto  $V$  que contenha  $\gamma$ , existe um inteiro  $N$  tal que  $\gamma_n \subset V$  para todo  $n \geq N$ .*

Comentamos anteriormente que não há a noção de uma convergência ser ou não mais forte que outra, mas, pode existir uma curva limite  $\gamma$  da seqüência  $\{\gamma_n\}$ , mas  $\{\gamma_n\}$  pode não convergir para ela na topologia  $C^0$ .

**Exemplo 1.3.3** *Sejam  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$  duas curvas tipo-tempo direcionadas para o futuro com  $\alpha([0, 1]) \cap \beta([0, 1]) \neq \emptyset$ . Defina:*

$$\gamma_n = \begin{cases} \alpha, & \text{se } n = 2m \\ \beta, & \text{se } n = 2m - 1. \end{cases}$$

Desta forma  $\{\gamma_n\}$  não converge nem para  $\alpha$  nem para  $\beta$  na topologia  $C^0$ . Entretanto, as subsequências  $\{\gamma_{2n}\}$  e  $\{\gamma_{2n-1}\}$  convergem para  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente na topologia  $C^0$ .

### 1.3.2 Observadores

Fisicamente, um observador corresponde a uma curva unitária tipo-tempo  $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ , direcionada para o futuro, onde cada  $\tau \in \mathcal{E}$  é chamado de *tempo próprio*.

Chamaremos ainda de velocidade o vetor tangente  $D_\gamma$  de  $\gamma$  e a aceleração de maneira intuitiva, como  $\dot{D}_\gamma$ . Um observador instantâneo é um par ordenado  $(v, \mathbf{V})$  onde  $v \in M$  e  $\mathbf{V}$  é um vetor unitário tipo-tempo voltado para o futuro no espaço tangente  $T_v M$  em  $v$ .

Suponha agora  $X \in T_z M$  como sendo um campo voltado para o futuro causal de forma que  $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$  é um observador e  $\gamma u = z$  e  $\gamma_* u = X$ . Existe uma única decomposição ortogonal  $X\mathbf{e} + \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{p} \in Z^\perp$  e  $\mathbf{e} = -g(X, Z)$ . Desta forma  $\mathbf{e} > 0$  e definimos  $\mathbf{p}/\mathbf{e}$  como sendo a *velocidade newtoniana* observada por  $(z, Z)$ . Destacamos duas características da velocidade newtoniana: ela nunca é maior que 1 e  $\gamma_* u$  é tipo-tempo e equivalente a velocidade newtoniana, porém menor que a velocidade da luz.

Chamaremos de *decomposição ortogonal associada* de  $T_z M$  a soma direta  $T_z M = (Z^\perp) \oplus (\text{span}Z)$  onde  $\text{span}Z$  é um subespaço de dimensão 1 que representa o eixo do tempo local. Seja, agora a projeção ortogonal  $p : T_z M \rightarrow R = Z^\perp$ . Definimos

$$h(X, Y) = g(pX, pY), \quad (1.3.20)$$

para todo  $X, Y \in T_z M$ . Temos que  $h$  é uma forma bilinear simétrica sobre  $T_z M$ . A ela daremos o nome de *tensor projeção* que é definido para cada observador instantâneo  $(z, Z)$ . Podemos listar as seguintes propriedades deste tensor:

1.  $h|_R = g|_z$ ;
2.  $h(Z, \cdot) = 0$ ;
3.  $h(X, \cdot) = g(X, \cdot) \Leftrightarrow g(X, Z) = 0$ ;
4. Se  $\tilde{h} = 3$  é um  $(1, 1)$  tensor fisicamente equivalente a  $h$  então  $\tilde{h}$  é uma contração;

5.  $\tilde{h} = p$ .

Seja  $(z, Z)$  um observador instantâneo. Definimos

$$\mathcal{O}^3 = \{\psi : T_z M \rightarrow T_z M \mid \psi Z = Z \text{ e } g(X, Y) = g(\psi X, \psi Y) \forall X, Y \in T_z M\}. \quad (1.3.21)$$

Cada um dos  $\psi$ 's em  $\mathcal{O}^3$  é linear e  $T_z M = R \oplus T$  é uma decomposição ortogonal associada de  $T_z M$ . Temos que  $\psi|_T = \text{id}$  e  $\psi$  é completamente determinado por  $\psi|_R$ . Logo  $\mathcal{O}^3$  é um isomorfismo para o grupo de automorfismos de  $R$  que preservam o produto interno definido positivo  $gz|_R$  de  $R$ , ou seja,  $\mathcal{O}^3$  é isomórfico ao grupo de rotação de  $\mathbb{R}^3$ . Para cada  $\psi \in \mathcal{O}^3$ , seja  $\phi_s^r : T_s^r(T_z M) \rightarrow T_s^r(T_z M)$  a única extensão de  $\phi$ , então  $T \in T_s^r(T_z M)$  é chamado *espacialmente isotrópico* para  $(z, Z)$  se e somente se  $\psi_s^r T = T$ , para todo  $\psi \in \mathcal{O}^3$ .

### 1.3.3 Sistema de referência

O sistema de observador é local e portanto para se ter mais informações sobre um conjunto de eventos, ou variedades, é necessário se obter uma associação, ou uma seqüência de observadores, que matematicamente chamamos de família de observadores.

**Definição 1.3.4** *Um sistema de referência  $\mathbf{Q}$  sobre um espaço-tempo  $M$  é um campo vetorial onde cada curva integral é um observador.*

Desta forma  $\mathbf{Q}$  é um sistema de referência se e somente se  $g(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = -1$ . As curvas integrais de  $\mathbf{Q}$  são chamadas de observadores em  $\mathbf{Q}$  e todos os observadores num referencial geodésico estão em queda livre, ou seja, sujeito apenas à gravidade. Além disso,  $\mathbf{Q}$  é *localmente sincronizável* que quer dizer que  $\omega \wedge d\omega = 0$ , onde,  $\omega$  é uma 1-forma fisicamente equivalente a  $\mathbf{Q}$ , [21]. Além destas vamos nominar algumas outras características de  $\mathbf{Q}$ . Se  $d\omega = 0$  ele é chamado de *tempo próprio localmente sincronizável*; se existem funções  $C^\infty$   $h, t$  sobre  $M$  tal que  $\omega = -hdt$  e  $h > 0$ ,  $\mathbf{Q}$  é chamado de *sincronizável*; se  $h$  e  $t$  ainda forem  $C^\infty$ , com  $\omega = -dt$  ele é chamado de *tempo próprio sincronizável*. A função  $t$  citada também recebe o respectivo nome de *função tempo* ou *função tempo próprio* se  $\mathbf{Q}$  for sincronizável e tempo próprio sincronizável.

# Capítulo 2

## Relatividade Geral e Cosmologia

Neste capítulo faremos uma brevíssima revisão dos modelos cosmológicos relativistas.

### 2.1 Modelos cosmológicos

Os modelos cosmológicos são caracterizados basicamente por suas simetrias e por seu conteúdo de matéria. Veremos, por exemplo, que os os modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) são baseados no espaço-tempo de seções espaciais maximalmente simétricas de Robertson-Walker e em um conteúdo de matéria do tipo fluido perfeito.

Os modelos cosmológicos relativísticos satisfazem as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1.1)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo,  $R_{\mu\nu}$  é tensor de Ricci,  $R$  é a curvatura escalar  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ,  $G$  é a constante gravitacional de Newton e  $\Lambda$  o termo conhecido como constante cosmológica. O conteúdo de matéria do modelo está presente no tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ .

A construção de um modelo cosmológico envolve, basicamente, encontrar uma solução para as equações de Einstein que descreve integralmente a evolução do universo. Neste caso, as equações de Einstein devem ser encaradas como sendo um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem para o campo de tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e como tal suas soluções são quase sempre não lineares e extremamente complicadas, de forma que através de duas soluções provavelmente não se encontra uma terceira.

Nas próximas seções faremos uma breve revisão dos principais pontos envolvidos na construção de modelos cosmológicos.

### 2.1.1 Princípio cosmológico

O princípio cosmológico, essencialmente, é um conjunto de hipóteses simplificadoras na construção de modelos cosmológicos. Essencialmente, corresponde a uma extensão do Princípio de Copérnico que estabelecia que a Terra não é um lugar especial no Cosmos. Em palavras, o Princípio Cosmológico pode ser enunciado como:

**Postulado 2.1.1 (Princípio Cosmológico)** *Para grandes escalas, o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico.*

Obviamente, estas hipóteses são consistentes com as observações atuais. Baseados nas hipóteses do Princípio Cosmológicos, lançamos mão dos modelos que oferecem menos problemas como as dificuldades físicas, matemáticas, lógicas e até históricas para fazermos uma análise satisfatória das questões cosmológicas. Muitas vezes, solucionar um dos problemas é aumentar a dificuldade em outro. Tornar um modelo de fácil entendimento matemático é torná-lo sem aplicabilidade às leis e aos experimentos da física. Torná-lo mais próximo do apurado em laboratórios e observações, pode-se obter um verdadeiro problema sem resolução no campo da matemática<sup>1</sup>.

Matematicamente, o Princípio Cosmológico afirma que todas as posições do universo são essencialmente equivalentes ou, em outras palavras, ele diz que todo observador comóvel com o fluido cósmico tem a mesma história. Dada uma variedade  $M$  dizemos que ela é isotrópica em torno de um ponto  $p$  se para qualquer par de vetores  $v, w \in T_p M$  existe uma isometria de  $M$  tal que leva  $w$  a um vetor paralelo a  $v$ . Isto significa que cada observador comóvel “enxerga” o mesmo em todas as direções. A homogeneidade é a afirmação de que a métrica é a mesma em toda a variedade, ou seja, dados dois pontos  $p, q \in M$  existe uma isometria que leva  $p$  em  $q$ . Se o espaço é isotrópico em todo lugar, ele é homogêneo. Mas uma variedade pode ser homogênea

---

<sup>1</sup> Uma das citações comumente associadas a Albert Einstein é esta: *As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, and as far as they are certain, they do not refer to reality*. Como Matemáticos Aplicados, porém, tentamos compatibilizar estes fatos com a idéia de Tukey citada na nota de rodapé 1 da Introdução.

sem ser isotrópica. Veja exemplo em [19]. Para prosseguirmos nesta discussão, necessitamos definir de maneira mais precisa o conceito de isometria.

### 2.1.2 Isometrias e vetores de Killing

Intuitivamente, uma isometria é um movimento que preserva determinadas propriedades de uma variedade. Em outras palavras, uma isometria corresponde a uma simetria de uma variedade. Tratando-se de variedades métricas, as simetrias que preservam a métrica (daí o nome “iso” metria) são de especial interesse. Os chamados vetores de Killing são os geradores das isometrias.

Um campo vetorial  $\mathbf{X}$  é chamado um campo de *Killing* se e somente se

$$g(D_{\mathbf{W}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{W}, D_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) = 0, \quad (2.1.2)$$

para todo  $\mathbf{W}, \mathbf{Z} \in T_x M$ , [10]. Numa base de coordenadas a equação (2.1.2) tem a forma

$$(\mathbf{Z}^b \mathbf{W}^a + \mathbf{W}^b \mathbf{Z}^a) D_a \mathbf{X}_b = 0, \quad (2.1.3)$$

para todo  $\mathbf{W}, \mathbf{Z} \in T_x M$ , de forma que todo campo vetorial de Killing  $\mathbf{X}$  satisfaz a chamada equação de Killing:

$$D_a \mathbf{X}_b + D_b \mathbf{X}_a = 0 \quad (2.1.4)$$

### 2.1.3 Espaços maximalmente simétricos e a métrica de Robertson-Walker

Um campo vetorial de Killing é completamente determinado a partir de um vetor  $K^\mu$  e seu gradiente  $\nabla_\mu K_\nu$  num dado ponto  $p$  de uma variedade  $M$ . Numa variedade de dimensão  $n$ , o vetor  $K^\mu$  tem  $n$  componentes independentes e o gradiente  $\nabla_\mu K_\nu$ , devido a equação de Killing (2.1.4), tem  $\frac{n(n-1)}{2}$  componentes independentes. Neste caso, temos que num espaço de dimensão  $n$  existem, no máximo,  $\frac{n(n+1)}{2}$  vetores de Killing independentes. A métrica que admite o número máximo de vetores independentes é chamada de maximalmente simétrica.

Desta forma, o espaço é homogêneo e isotrópico se ele admite o número máximo de vetores independentes de Killing e este espaço e a métrica são chamados de maximalmente simétricos. Estes espaços são unicamente determinados por uma curvatura constante e pelo números de autovalores do tensor métrico que são positivos ou negativos.

Podemos construir um espaço-tempo com seção espacial maximalmente simétrica como sendo  $\mathbf{R} \times \Sigma$ , onde  $\mathbf{R}$  representa o tempo e  $\Sigma$  uma variedade tridimensional maximalmente simétrica. Sua métrica será dada por

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)d\sigma^2, \quad (2.1.5)$$

onde  $t$  é uma coordenada tipo-tempo,  $S(t)$  é o fator escala e  $d\sigma^2$  é a métrica sobre  $\Sigma$  chamada de *Robertson-Walker*. Se  $r, \theta, \phi$  são coordenadas polares em  $\Sigma$  podemos escrever (2.1.5) da seguinte forma:

$$dt^2 = dt^2 - S^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi \right\}, \quad (2.1.6)$$

onde  $S(t)$  é o fator escalar e  $k \in \{-1, 0, +1\}$ , que determina a curvatura (negativa, nula ou positiva, respectivamente) de  $\Sigma$ .

## 2.2 Fótons, sinais de luz e *redshift*

Até hoje, toda observação astronômica envolve sinais luminosos. A caracterização da trajetória de raios de luz (ou, simplesmente, *fótons*) é essencial para que um modelo cosmológico possa acomodar qualquer observação astronômica. Vamos tomar, como exemplo, o caso da trajetória de fótons em um universo de de Sitter  $M$ . A trajetória de fóton padrão  $\lambda$  é dado por  $\lambda u = (u^{3/5}, 0, 3u^{1/5}, 0)$ , para todo  $u \in (0, \infty)$ . Qualquer outra trajetória de fótons pode ser obtida utilizando isometrias, reparametrizações e restrições. Veja mais em [10].

Suponha que exista um sinal de luz  $\lambda$  de  $x$  para  $z$ , com  $x, z \in M$ . A *razão de frequência cosmológica*  $\mathbf{r}$ , corresponde à razão entre a frequência do fóton emitido em  $x$  e a frequência do observado em  $z$ . Ao definirmos uma métrica para o espaço-tempo, esta vem acompanhada por um conjunto de escalas da geometria do espaço. Estas escalas  $S(t)$  que dependem do tempo serão chamadas de *fator escala*. Uma informação importante que o fator escala é responsável

é a observação dos deslocamentos e mudanças da frequência da luz emitida por uma fonte “distante”. Denotando como  $\nu_0$  a frequência observada em  $t = t_0$  e por  $\nu_1$  a frequência observada em  $t = t_1$ , temos que a razão de frequência será dada por:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{S(t_0)}{S(t_1)}. \quad (2.2.7)$$

Damos o nome de *redshift* à quantidade:

$$z = \frac{S(t_0)}{S(t_1)} - 1. \quad (2.2.8)$$

Se denotarmos por  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1$ , o comprimento de onda da luz em  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1$ , respectivamente, temos que:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \quad (2.2.9)$$

Então  $z > 0$ , pois,  $\lambda_0 > \lambda_1$  determinado por  $a(t_0) > a(t_1)$ , resultado da expansão do universo. É comum dizer que, se  $\lambda_0 < \lambda_1$ , temos que  $z = \textit{blueshift}$ , resultado da contração do universo. Este efeito de expansão ou contração é conhecido como *efeito Doppler cosmológico*. Veja mais detalhes em [23].

A luminosidade se apresenta como uma ferramenta bastante prática na obtenção de informações sobre a distância de um objeto fora de nossa galáxia. Veja que não estamos afirmando que esta seja a única forma de obtenção de informações sobre objetos cosmológicos.

A figura (2.1) é um modelo que nos mostra como, em qual região, recebemos um sinal (partículas) quando temos um passado causal bidimensional.

## 2.3 Quintessência e energia escura

Um dos resultados cosmológicos recentes mais excitantes foi a descoberta da expansão acelerada do universo. Os primeiros trabalhos que sugeriram que o universo vive uma fase de expansão acelerada têm já quase 10 anos [26]. Eram dados de *redshift*, e portanto de velocidades de afastamento, obtidos da observação de supernovas do tipo Ia, e compatíveis com especulações teóricas anteriores [27]. Estes dados foram confirmados por outras equipes [28] e foram corroborados, em 2002, pelos resultados obtidos das flutuações da radiação cósmica

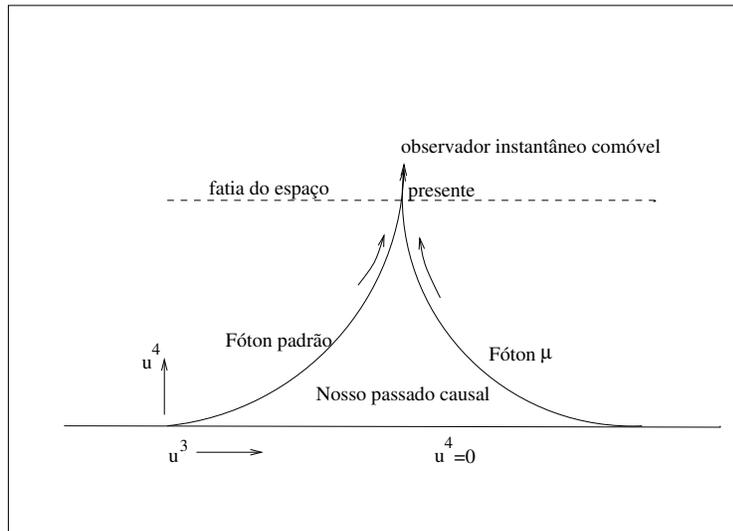


Figura 2.1: A região interna é determinada por  $3(u^4)^{1/3} \leq u^3 \leq 2u^3z$ .

de fundo de microondas [29]. A solidez destes resultados é tanta que o modelo padrão cosmológico passou a ser denominado  $\Lambda$ CDM. CDM (Cold dark matter) corresponde à matéria não luminosa aglomerada em galáxias, descrita como fluido perfeito, conhecida desde os anos 60 e essencial para a formação e evolução de estruturas. Esta matéria escura é responsável por aproximadamente 25% do conteúdo de energia do universo. Sabe-se que a matéria bariônica e a radiação cósmica de fundo, juntas, contribuem com 5% do conteúdo energético do universo. Os restantes 70% de energia correspondem à energia escura responsável pela expansão acelerada. Sua descrição mais simples é obtida com a inclusão da constante cosmológica  $\Lambda$  nas equações de Einstein. A natureza da componente em energia escura do universo é completamente desconhecida atualmente, e seu entendimento é dos mais importantes desafios da Cosmologia.

A descrição da energia escura em termos de uma constante cosmológica  $\Lambda$ , embora em concordância com os dados experimentais atuais, apresenta uma série de problemas conceituais e teóricos [30], destacando-se o problema do ajuste fino do valor de  $\Lambda$  nos instantes primordiais do universo e o problema da *coincidência cósmica*, que numa de suas formulações corresponde a perguntar por que a fase de expansão acelerada é tão recente (o problema *Why Now?*). Outro problema teórico importante envolvendo a constante cosmológica é a absurda diferença (120 ordens de magnitude) entre seu valor observado e as previsões baseadas em efeitos de vácuo

em teoria quântica de campos. Para uma revisão, veja em [31].

A homogeneidade do fluido associado à constante cosmológica também apresenta alguns problemas. Nenhum tipo de flutuação é permitido na descrição da energia escura em termos de uma constante cosmológica, uma situação muito difícil de ser justificada fisicamente. Questionamentos sobre possíveis flutuações no fluido da energia escura levam naturalmente a uma descrição baseada num campo. Há, inclusive, especulações sobre a viabilidade de unificar num único campo energia e matéria escura, e, talvez, até mesmo o mecanismo responsável pela inflação primordial [32]. Campos escalares são os candidatos mais simples para descrever a energia escura. Modelos minimamente acoplados, com lagrangiana do tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - V(\phi) \right\}, \quad (2.3.10)$$

podem descrever, se o potencial  $V(\phi)$  for adequado, situações experimentalmente compatíveis com um cenário de uma constante cosmológica pequena. Modelos deste tipo para a descrição da fase de expansão acelerada do universo, recebem o nome de modelos de quintessência. A questão mais relevante, foco de diversos estudos atualmente, é encontrar previsões das teorias do tipo (2.3.10) que **não** concordem com as obtidas da descrição via constante cosmológica. Estas previsões, contrastadas com os dados experimentais, podem ser usadas para se eliminar candidatos à descrição da energia escura. A análise dinâmica das soluções de (2.3.12) tem papel primordial nestes estudos.

Uma quantidade importante no estudo dos modelos de energia escura é a razão  $w$  entre a pressão  $p$  e a energia  $\rho$  associados ao campo  $\phi$  (o campo de quintessência). Para modelos minimamente acoplados como (2.3.10), admitindo-se homogeneidade e isotropia, tem-se

$$w(t) = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (2.3.11)$$

Neste caso, claramente,  $w$  é limitada inferiormente,  $w \geq -1$ .

Vários grupos de pesquisa estão investigando modelos de quintessência alternativos aos minimamente acoplados que exibam fases para as quais  $w \leq -1$ . A questão da estabilidade destes modelos é muito delicada. Os modelos baseados em campos do tipo *phantom*, por exemplo, apresentam diversas instabilidades clássicas e quânticas, [33], inviabilizando a construção de qualquer modelo realista. Fluidos para os quais  $w < -1$  não respeitam nenhuma das condições

de energia normalmente aceitas como razoáveis. Porém, podem-se construir modelos livres de instabilidades a partir de campos de quintessência com acoplamento não mínimo, como, por exemplo,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{F(\phi)R - \partial_a \phi \partial^a \phi - 2V(\phi)\}, \quad (2.3.12)$$

com  $F(\phi) = 1 - \xi \phi^2$  e  $\xi < 0$ . O caso de um potencial exponencial  $V(\phi) = \exp(-\sigma\phi)$  tem sido estudados atualmente, [33].

Consideremos agora uma perturbação  $\delta\varphi$  de  $\varphi$  governada por:

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} + (c_s^2 k^2 + a^2 V''(\varphi))\delta\varphi = -\frac{1}{2}\dot{h}_k \varphi, \quad (2.3.13)$$

onde o ponto indica a derivada com relação ao tempo conforme,  $V''(\varphi)$  é a segunda derivada com respeito a  $\varphi$  e  $h_k$  é o  $k$ -ésimo termo de Fourier da perturbação métrica, com  $\dot{h}_k \neq 0$ ,  $\dot{\varphi} \neq 0$ , fazendo com que os termos do segundo membro não se anulem, ou seja,  $\varphi$  não pode ser suavemente distribuídos. Mesmo que  $\delta\varphi$  seja nulo inicialmente, o termo do lado direito de (2.3.13) assegura que as perturbações crescem. Uma outra conseqüência do crescimento causado pelo termo  $\dot{h}_k$ , tida até como mais importante, é que as perturbações em  $\varphi$  observadas hoje são indepêndentes nas condições iniciais de  $\delta\varphi$ , [34]. Temos também que  $\delta\rho/\rho$  é da mesma ordem que as perturbações em outras componentes de energia.

# Capítulo 3

## O Princípio de Maupertuis-Jacobi e a Geometria de Eisenhart

Neste capítulo, apresentaremos as duas principais abordagens para a descrição geodésica das equações de movimento de sistemas dinâmicos: o princípio de Maupertuis-Jacobi e a geometria de Eisenhart. Nossas principais referências são [36, 37, 38].

### 3.1 Princípio de Maupertuis-Jacobi

Consideremos inicialmente o sistema mecânico correspondente a uma partícula de massa unitária sujeita a se mover sobre uma variedade riemanniana  $M$ . A lagrangiana associada a este problema tem a forma:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q), \quad (3.1.1)$$

onde  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$  e  $g_{ij}$  é a métrica de  $M$ . As equações de Euler-Lagrange para a lagrangiana acima são da forma:

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = -g^{ij} \partial_j V(q), \quad (3.1.2)$$

onde  $\Gamma_{jk}^i$  é a conexão de Levi-Civita para a métrica  $g_{ij}$ . A hamiltoniana do sistema é dada por

$$H(q, p) = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j + V(q), \quad (3.1.3)$$

com  $p_i = g_{ij}\dot{q}^j$ . Ela é denominada de *energia total*. Para  $H(q, p) = h = \text{constante}$ , as trajetórias no espaço de fase  $2N$ -dimensional  $(q^i, p_j)$  estão confinadas na hipersuperfície

$$h = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j + V(q).$$

A região onde são admitidas as trajetórias no espaço de configuração é dada por

$$\mathcal{D}_h = \{q \in \mathcal{M} : V(q) \leq h\}, \quad (3.1.4)$$

com as características dadas em (4.6.104) no capítulo seguinte.

Dada uma superfície de dimensão  $2n - 1$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  denotada por  $M^{2n-1}$  As trajetórias de fase das equações canônicas:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}. \quad (3.1.5)$$

que começam sobre a superfície  $M^{2n-1}$  jazem inteiramente em  $M^{2n-1}$ . As curvas restritas a esta hipersuperfície satisfazem um princípio variacional particular, [8].

**Teorema 3.1.1** *Se a função hamiltoniana  $H = H(p, q)$  não depende do tempo, então as trajetórias das equações (3.1.5) estão sobre a superfície  $M^{2n-1}$ . As projeções  $H(p, q) = h$  são extremos da integral  $\int pdq$  na classe de curvas que estão sobre a superfície e conectam o sub-espaço  $q = q_0$  a  $q = q_1$ .*

**Prova:** Suponha que a função hamiltoniana  $H(p, q)$  não dependa do tempo. Então  $H(p, q)$  é uma primeira integral das equações de Hamilton (3.1.5). Projetamos a superfície  $H(p, q) = h$  de um espaço de fase estendido  $\{(p, q, t)\}$  para o espaço  $\{(p, q)\}$ , obtendo assim uma  $M^{2n-1}$ . As trajetórias de fase de (3.1.5) iniciadas sobre a superfície  $M^{2n-1}$  jazem inteiramente nela. ■

**Corolário 3.1.2** *Entre todas as curvas  $q = \gamma(t)$  que conectam  $q_0$  a  $q_1$  sobre o plano  $q$  e parametrizada de modo que a função hamiltoniana tem valor fixo  $H(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q) = h$ , a trajetória das equações de (3.1.5) é extremo da integral da “ação reduzida”*

$$\int_{\gamma} pdq = \int_{\gamma} p\dot{q}d\tau = \int_{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tau)\dot{q}(\tau)d\tau. \quad (3.1.6)$$

**Prova:** Considere agora a projeção sobre o  $q$ -espaço de extremo inteiramente contido sobre a superfície acima mencionada. Estas curvas conectam os pontos  $q = q_0$  e  $q = q_1$ . Se  $\gamma$  é outra curva que liga tais pontos, sendo projeção de uma curva  $\hat{\gamma} \subset M^{2n-1}$ . Parametrizando  $\gamma$  por  $\tau$ ,  $a \leq \tau \leq b$ ,  $\gamma(a) = q_0, \gamma(b) = q_1$ . Veja esquema em (3.1). Então todos os pontos  $q$  de  $\gamma$  possui vetor velocidade dado por  $\dot{q}d\gamma(\tau)/d\tau$  e o momento correspondente é dado por  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ . Se o parâmetro  $\tau$  é tal que  $H(p, q) = h$ , então obtemos uma curva  $\hat{\gamma} : q = \gamma(\tau), p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  sobre a superfície. Logo, segue o resultado. ■

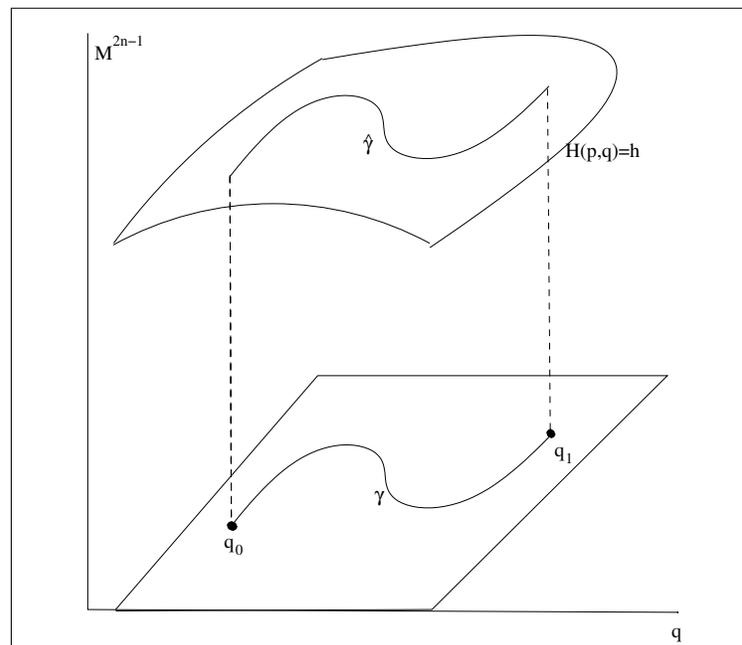


Figura 3.1: Curvas não-mínimas

O movimento de um sistema mecânico é completamente determinado pelo princípio da ação mínima resolvendo as equações de movimento que seguem do princípio. Podemos encontrar a forma do caminho e a posição sobre ele em função do tempo.

Se o problema é mais restrito, como determinar as trajetórias para as hamiltonianas que não dependem do tempo explicitamente, tal que a energia do sistema é conservada e:

$$H(p, q) = E = cte. \quad (3.1.7)$$

De acordo com o princípio da ação mínima a variação da ação para dados das coordenadas

espaciais e tempo inicial e final ( $t_0$  e  $t$ ) é zero. Se, de qualquer modo, há variação do tempo final, as coordenadas espaciais iniciais e finais permanecem fixas, temos

$$\delta S = -H\delta t. \quad (3.1.8)$$

Comparamos somente aqueles movimentos virtuais do sistema que satisfazem a lei de conservação de energia. Para tais caminhos, fazemos  $H = E$  em (3.1.8) temos

$$\delta S + E\delta t = 0. \quad (3.1.9)$$

É interessante notar que as equações de Hamilton podem ser formalmente derivadas da condição de ação mínima na forma

$$S = \int (\sum_t p_i dq_i - H dt). \quad (3.1.10)$$

Ou seja,

$$\int \sum_t p_i dq_i - E(t - t_0) = E\delta t. \quad (3.1.11)$$

Fazendo

$$\int \sum_t p_i dq_i = S_0 \quad (3.1.12)$$

e substituindo em (3.1.9) temos

$$\delta S_0 = 0.$$

Portanto a ação tem um mínimo com respeito a todos os caminhos que satisfazem a lei de conservação de energia e passa pelo ponto final em algum instante. Pelo princípio variacional, o momento (e portanto o integrando completo) em (3.1.12) deve ser expresso em termos das coordenadas  $q$  e de suas diferenciais  $dq$ . Para tanto, usamos a definição de momento:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(q, \frac{dq}{dt}) \quad (3.1.13)$$

e a lei de conservação de energia:

$$E(q, \frac{dq}{dt}) = E. \quad (3.1.14)$$

Expressando a diferencial  $dt$  em termos das coordenadas  $q$  por (3.1.14) e substituindo em (3.1.13) temos o momento em termos de  $q$  e  $dq$ , com  $E$  um parâmetro. O princípio variacional obtido determina o caminho do sistema e é usualmente chamado de *princípio de Maupertuis*.

**Teorema 3.1.3** *Um ponto de massa confinada a uma variedade riemanniana move-se ao longo de uma linha geodésica.*

**Prova:** Admita que

$$H = L = T = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (3.1.15)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2T = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (3.1.16)$$

Portanto, para garantir um valor fixo de  $H = h$ , o parâmetro deve ser escolhido proporcional a comprimento  $d\tau = ds/\sqrt{2h}$ . A ação integral reduzida é então igual a

$$\int_{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\tau = \int_{\gamma} \sqrt{2h} ds = \sqrt{2h} \int_{\gamma} ds. \quad (3.1.17)$$

Portanto, teremos os extremos da variedade dada. ■

Podemos, então enunciar:

**Teorema 3.1.4 (O Princípio de Maupertuis-Jacobi)** *Em uma região do espaço onde  $V(q) < h$ , definimos uma métrica riemanniana pela fórmula*

$$d\rho = \sqrt{h - V(q)} ds. \quad (3.1.18)$$

*Então as trajetórias do sistema com energia cinética  $T = \frac{1}{2}(ds/dt)^2$ , energia potencial  $V(q)$  e energia total  $h$  serão geodésicas da métrica  $d\rho$ .*

**Prova:** Tomemos  $L = T - V$ ,  $H = T + V$  e  $(\partial L/\partial \dot{q})\dot{q} = 2T = (ds/d\tau)^2 = 2(h - V)$ . Para  $H = h$  o parâmetro  $\tau$  deve ser proporcional ao comprimento  $d\tau = ds/\sqrt{2(h - V)}$ . A ação integral reduzida será, então igual a

$$\int_{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\tau = \int_{\gamma} \sqrt{2(h - V)} ds = \sqrt{2} \int_{\gamma} d\rho. \quad (3.1.19)$$

Pelo teorema (3.1.15) as trajetórias são geodésicas na métrica  $d\rho$ . ■

O caso crítico onde  $V(q) = h$  terá solução com a geometria de Eisenhart que discutiremos a seguir.

As aplicações do princípio de Maupertuis-Jacobi para equações de campos obtidos por Hilbert-Einstein como ações têm uma vasta bibliografia. Os casos não homogêneos e não isotrópicos foram considerados em [6, 7]. As aplicações envolvendo espaços diferenciais distintos no lugar de variedades diferenciáveis foram discutidos em [5]. Em [40] apresenta-se uma proposta de classificação das trajetórias cosmológicas. Veja outros detalhes em [41].

## 3.2 A geometria de Eisenhart

A geometria de Eisenhart proporciona uma interpretação geodésica das equações de movimento de um sistema mecânico alternativa à interpretação geodésica usual baseada no princípio de Maupertuis-Jacobi. Fazendo referência ao artigo de Eisenhart, [36], Szydlowski em [37] indica algumas vantagens em se tomar este caminho:

- i) As equações de movimento são equivalentes a um conjunto de geodésicas em uma variedade suave sem fronteira.
- ii) A identificação dos sistemas de trajetórias com geodésicas na geometria de Eisenhart é bijetiva, em contraste com o caso das geodésicas da métrica de Jacobi, onde nem todo movimento geodésico sobre um espaço de Jacobi corresponde a um movimento físico do sistema.
- iii) Maior facilidade para identificação das dinâmicas dos modelos originais.
- iv) Possibilidade de relação entre a estrutura quociente  $M_E/G_{u^0}$ , onde  $G_{u^0}$  é o grupo de translação com respeito a variável temporal  $u^0$  e  $M_E$  é o conjunto das variedades obtidas por pelo sistema das equações de Jacobi e as variedades obtidas pelo sistema de Eisenhart.

**Proposição 3.2.1 (Princípio de Eisenhart)** *Existe uma correspondência biunívoca entre as trajetórias  $q^i(t)$  do sistema*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q), \quad (3.2.20)$$

onde  $\dot{q}^i$  com  $i, j = 1, \dots, n$  são diferenciações com relação ao tempo  $t$  e o potencial  $V(q) \in C^\infty$  e as geodésicas da métrica

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j + \frac{1}{2(V(q) + b)} du^2, \quad (3.2.21)$$

onde  $b$  é uma constante e a relação do tempo “fictício”  $u$  e a coordenada de tempo  $t$  é dada por

$$\frac{du}{dt} = 2(V(q) + b).$$

A seguir apresentaremos o desenvolvimento obtido por Eisenhart em [36] para a proposição deste resultado.

Consideremos um sistema dinâmico conservativo de  $n$  graus de liberdade associado a um potencial independente do tempo. Denotemos por  $q^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  as variáveis independentes que indicam posição e  $t = q^{n+1}$ , a energia cinética  $E$  é da forma

$$E = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad (3.2.22)$$

onde  $\alpha, \beta = 1, \dots, n + 1$  e o ponto indica a diferenciação pelo tempo usual. A função lagrangeana  $L$  é dada por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - V(q). \quad (3.2.23)$$

Quando esta expressão é substituída nas equações de Lagrange dadas por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (3.2.24)$$

temos as equações diferenciais das trajetórias do movimento

$$g_{ij} \ddot{q}^j + [jk, i] \dot{q}^j \dot{q}^k + \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial g_{in+1}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jn+1}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial g_{in+1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^i} (g_{n+1, n+1} - 2V) = 0, \quad (3.2.25)$$

onde  $[jk, i]$  são os símbolos de Christoffel de primeira espécie dados por

$$[jk, i] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right). \quad (3.2.26)$$

Se

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (3.2.27)$$

então

$$p_i = g_{ij} \dot{q}^j + g_{in+1}. \quad (3.2.28)$$

Para os sistemas pretendidos devemos ter  $g_{ij} \neq 0$ . desta forma define-se:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \quad (3.2.29)$$

onde cada  $\delta$  é o delta de Kronecker definido por:

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Segue-se de (3.2.28) que

$$\dot{q}^j = p_i g^{ij} - g^{ij} g_{in+1}. \quad (3.2.30)$$

A função hamiltoniana  $H$  correspondente é uma função de  $q^i$ ,  $p_i$  e  $t$  onde substituímos os valores de  $\dot{q}^j$  em

$$H = p_i \dot{q}^i - L. \quad (3.2.31)$$

Desta forma, obtemos

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} (p_i p_j - 2 p_i g_{jn+1} + g_{in+1} g_{jn+1}) + V - \frac{1}{2} g_{n+1n+1}. \quad (3.2.32)$$

Diferenciando (3.2.31) com relação a  $\dot{q}^j$ , em consequência de (3.2.27), temos

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^j} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}. \quad (3.2.33)$$

Pelas equações (3.2.24) e (3.2.30) podemos, finalmente escrever a forma hamiltoniana

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp^i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}. \quad (3.2.34)$$

### 3.2.1 Trajetórias

Considere um sistema dinâmico do tipo de (3.2.28) e um espaço riemanniano de dimensão  $n + 2$  chamado de  $S_{n+2}$  para o qual a métrica está convenientemente definida por

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j + 2g_{in+1}dq^i dt + A dt^2 + 2B dt du, \quad (3.2.35)$$

onde  $g_{ij}$  e  $g_{in+1}$  são funções de  $q$  e  $t$ , para um dado sistema dinâmico,  $A = A(q^i, t)$  e  $B = \text{const.}$  Sua forma condensada é dada por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dq^\alpha dq^\beta, \quad (3.2.36)$$

onde  $q^{n+1} = t$ ,  $q^{n+2} = u$  e  $\alpha, \beta = 1, \dots, n + 2$ .

Pela definição de curvas integrais, temos:

$$g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{dq^\tau} \frac{dq^\beta}{dq^\tau} = c, \quad c = \text{constante.} \quad (3.2.37)$$

A geodésica é minimal se e somente se  $c = 0$ . Suponhamos que  $c \neq 0$ , da equação acima obtemos:

$$\begin{aligned} g_{ij} \frac{d^2 q^j}{ds^2} + [jk, i] \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} + \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial g_{in+1}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jn+1}}{\partial q^i} \right) \frac{dq^j}{ds} \frac{dt}{ds} + \\ + \left( \frac{\partial g_{in+1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial q^i} \right) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + g_{in+1} \frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

para  $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ;

$$B \frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \quad (3.2.39)$$

para  $\alpha = n + 1$ ; e

$$\begin{aligned} g_{jn+1} \frac{d^2 q^j}{ds^2} + A \frac{d^2 t}{ds^2} + B \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kn+1}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jn+1}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial t} \right) \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} + \\ + \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{dq^i}{ds} \frac{dt}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

para  $\alpha = n + 2$ .

Supondo  $B = 1$ , temos  $\frac{dt}{ds} = a$ , com  $a = \text{constante}$  não nula, logo,  $t = as$  a equação (3.2.38) se torna

$$g_{ij} \ddot{q}^j + [jk, i] \dot{q}^i \dot{q}^j + \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial g_{in+1}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jn+1}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial g_{in+1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial q^i} = 0, \quad (3.2.41)$$

Fazendo  $A = g_{n+1n+1} - 2V$  e comparando (3.2.41) com (3.2.25) vemos que elas são equivalentes. Pela definição de  $a$  e da métrica, ao longo de alguma geodésica, não-minimal,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2a^2} - L, \quad (3.2.42)$$

onde

$$L = \frac{1}{2} (-g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - 2g_{in+1}\dot{q}^i - g_{n+1n+1} + 2V).$$

Logo,

$$u = \frac{1}{2} \frac{t}{a^2} - \int L dt + b, \quad (3.2.43)$$

onde  $b$  é a constante arbitrária. Para cada subconjunto finito dos reais, com  $a \neq 0$  e  $b$  pertencendo a ele, existe um sistema de geodésicas não-minimais de  $S_{n+2}$  que estão em correspondência biunívoca com as trajetórias obtidas pelo sistema dinâmico dado, com as mesmas expressões de  $q^i = q^i(t)$ .

Para geodésicas minimais temos  $\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$ , e sem perda de generalidade admitimos que  $\tau = t$ . Pela equação (3.2.43) obtemos

$$u = - \int L dt + b. \quad (3.2.44)$$

O princípio de Hamilton diz que o movimento de um sistema conservativo entre os tempos  $t_1$  e  $t_2$  tal que a integral curvilínea  $\mathcal{I} = \int L dt$  é um extremo com respeito à trajetória. Desta forma, estabelece-se uma relação entre  $u$  de (3.2.43).

### 3.2.2 Teorema de Hamilton-Jacobi

Admitindo que  $\bar{g}$  e  $g$  denotam os respectivos determinantes de  $g_{\alpha\beta}$  e  $g_{ij}$ , temos que

$$\bar{g} = -B^2 g. \quad (3.2.45)$$

Definimos  $\bar{g}^{ij}$  em (3.2.29) portanto,

$$\bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta, \quad (3.2.46)$$

e, ainda tomando  $B = 1$ , obtemos de (3.2.35):

$$\begin{aligned} \bar{g}^{ij} &= g^{ij}, & \bar{g}^{in+1} &= \bar{g}^{n+1n+1} = 0, & \bar{g}^{in+2} &= -g_{jn+1}g^{ij}, \\ \bar{g}^{n+1n+2} &= 1, & \bar{g}^{n+2n+2} &= g_{in+1}g_{jn+1}g^{ij} - A. \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Pela teoria geral das geodésicas no espaço riemanniano, fundamentalmente dada pela forma condensada da métrica, (3.2.36), se  $\varphi$  é solução da equação diferencial

$$\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\beta} = 1, \quad (3.2.48)$$

as trajetórias ortogonais da hipersuperfície  $\varphi = \text{constante}$  são geodésicas não-minimais e com isto  $\partial\varphi/\partial q^\alpha$  são componentes covariantes da normal a estas hipersuperfícies e portanto ao longo desta normal  $dq^\alpha/ds$  e  $\bar{g}^{\alpha\beta}\partial\varphi/\partial q^\beta$  são proporcionais cuja constante de proporcionalidade é 1, logo, em geral teremos:

$$\frac{dq^\alpha}{ds} = \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\beta}. \quad (3.2.49)$$

Para os valores em (3.2.47) e  $\alpha = n + 1$ , temos

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}. \quad (3.2.50)$$

Comparando (3.2.50) com o fato de que  $\frac{dt}{ds} = a$ , temos que as geodésicas para cada  $a$  dado são as trajetórias ortogonais das hipersuperfícies  $\varphi = a(u + \psi) = \text{constante}$ , onde  $\psi$  não é uma função de  $u$ . Substituindo em (3.2.48), temos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}g^{ij} \left( \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \frac{\partial\psi}{\partial q^j} - 2g_{jn+1} + \frac{\partial\psi}{\partial q^i} g_{in+1} g_{jn+1} \right) + V - \frac{1}{2}g_{n+1n+1} = \frac{1}{2a^2}. \quad (3.2.51)$$

Se pusermos

$$\varphi = a(u + W) + \frac{t}{2a}, \quad (3.2.52)$$

então  $W$  que é solução da equação homogênea associada a (3.2.51) não depende de  $a$  e pode ser escrita da forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H \left( q, \frac{\partial W}{\partial q}, t \right) = 0, \quad (3.2.53)$$

que é a *equação diferencial parcial hamiltoniana* do sistema dinâmico dado.

Ao tomarmos uma solução completa, para todos os índices, de (3.2.53) e substituímos em (3.2.48), teremos após diferenciarmos por  $a$  e por cada constante arbitrária  $a^i$ :

$$\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^\beta \partial a} = 0, \quad \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^\beta \partial a^i} = 0, \quad (3.2.54)$$

As hipersuperfícies ortogonais a  $\varphi$  dadas por  $\frac{\partial\varphi}{\partial a} = \text{constante}$  e  $\frac{\partial\varphi}{\partial a^i} = \text{constante}$  são obtidas para cada uma das  $n + 1$  famílias de soluções e estas têm a forma:

$$\begin{cases} u + W + \frac{t}{2a^2} = b \\ \frac{\partial W}{\partial a^i} = b_i \end{cases}, \quad (3.2.55)$$

com  $b$  e  $b_i$ 's constantes arbitrárias. Logo, suas soluções são geodésicas não-minimais de  $S_{n+2}$  em forma finita. Se atribuirmos valores em particular para  $a$  e  $b$  na primeira equação de (3.2.55) nós encontramos um conjunto de geodésicas em  $S_{n+2}$  correspondentes às trajetórias dinâmicas e tais geodésicas são ortogonais às hipersuperfícies

$$a(u + W) + \frac{t}{2a} = \text{constante}.$$

Desta forma, obtemos o seguinte resultado chamado de teorema de Hamilton-Jacobi:

**Teorema 3.2.2** *Se  $W$  é uma solução completa da equação homogênea associada a (3.2.52) envolvendo  $n$  constantes de movimento arbitrárias independentes entre si, a segunda equação de (3.2.55), quando resolvida para  $q^i = q^i(t)$ ,  $a^i$  e  $b_i$ , define todas as trajetórias dinâmicas do dado sistema.*

Supondo que exista tal solução  $W$  para a equação (3.2.53) expandida, ou seja, sem que tenha sido feita a troca de  $p_i$  por  $\frac{\partial W}{\partial q^i}$  obtendo assim a equação:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial q^i} \frac{\partial W}{\partial q^j} - 2g_{jn+1} \frac{\partial W}{\partial q^i} + g_{in+1} g_{jn+1} \right) + V - \frac{1}{2} g_{n+1n+1} = 0, \quad (3.2.56)$$

de modo que também seja solução da segunda equação de (3.2.55). Vamos diferenciar tais identidades por  $a^i$  e  $t$  respectivamente, obtendo assim:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial a^i \partial t} g^{jk} \left( \frac{\partial W}{\partial q^k} - g_{kn+1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial a^i \partial t} + \dot{q}^j \frac{\partial^2 W}{\partial a^i \partial q^j} = 0 \end{cases}. \quad (3.2.57)$$

Dos conjuntos de equações acima obtemos

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a^i \partial q^j} \left[ \dot{q}^j - g^{jk} \left( \frac{\partial W}{\partial q^k} - g_{kn+1} \right) \right] = 0. \quad (3.2.58)$$

Como o determinante de  $\frac{\partial^2 W}{\partial a^i \partial q^j}$  é diferente de zero, pois se não fosse existiria algum  $\partial W / \partial a^i$  que não dependeria dos  $q$ 's, o que não ocorre por conta dos  $a$ 's não se associarem aditivamente, teremos

$$\dot{q}^j = g^{jk} \left( \frac{\partial W}{\partial q^k} - g_{kn+1} \right). \quad (3.2.59)$$

Para

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad (3.2.60)$$

as equações (3.2.59) se equivalem às equações (3.2.30) e serão o primeiro conjunto das equações da hamiltoniana dado em (3.2.34). Ao diferenciarmos (3.2.60) com relação a  $t$ , o resultado equivale ao segundo conjunto de equações de (3.2.34). Em [42] vemos um exemplo da aplicação do princípio de Hamilton-Jacobi em domínios curvos.

### 3.2.3 Geodésicas minimais

Seja  $N$  uma variedade riemanniana, cuja métrica é  $g_0$ , submetida às seguintes condições:

- (i) todas as geodésicas em  $N$  podem ser estendidas de modo a serem definidas em todo espaço;
- (ii) o par  $(N, g_0)$  é uma variedade completa no sentido que toda seqüência de Cauchy converge;
- (iii) dados dois pontos  $p, q \in N$ , existe um segmento geodésico suave  $c \in \Omega_{p,q}$  com o tamanho do segmento dado por  $L_0(c)$  e  $L_0(c) = g_0(p, q)$ , onde  $\Omega_{p,q}$  denota o conjunto das partes suaves da curva de  $p$  a  $q$  em  $N$ ,

Pelo terceiro item acima, vemos que o segmento realiza distância, portanto ele é chamado de *minimal*. Podemos ver uma maior explicação em [11].

Tomando o determinante de  $g_{\alpha\beta}$  em (3.2.35) para  $B = 1$  como sendo  $-g$ , temos ainda que a forma (3.2.35) é indefinida e portanto a equação diferencial

$$\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\beta} = 0 \quad (3.2.61)$$

admite soluções reais. Suponhamos que  $\varphi$  é uma tal solução e consideremos o sistema de coordenadas

$$\frac{dq^\alpha}{d\tau} = \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\beta}, \quad (3.2.62)$$

onde  $\tau$  é um parâmetro. Diferenciando a equação acima com respeito a  $\tau$  obtemos

$$\frac{d^2q^\alpha}{d\tau^2} = \left[ \bar{g}^{\alpha\beta} \varphi, \beta\gamma - \bar{g}^{\delta\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\beta} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \delta \end{array} \right\} \right] \frac{dq^\gamma}{d\tau}, \quad (3.2.63)$$

onde  $\varphi, \beta\gamma$  é a segunda derivada covariante de  $\varphi$  com respeito a forma (3.2.36) e  $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \delta \end{array} \right\}$  são os símbolos de Cristoffel de segunda espécie formados com relação a (3.2.36) de forma que

$$g_{\alpha\beta} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \delta \end{array} \right\} = [\gamma\delta, \beta].$$

Comparando a derivada covariante com a equação (3.2.61) temos:

$$\bar{g}^{\delta\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial q^\alpha} \varphi, \beta\gamma = 0. \quad (3.2.64)$$

Como  $\varphi, \beta\gamma = \varphi, \gamma\beta$  a equação acima se reduz a

$$\frac{d^2q^\alpha}{d\tau^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \delta \end{array} \right\} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = 0, \quad (3.2.65)$$

que equivale a (3.2.37). De (3.2.61) e (3.2.62) temos:

$$g_{\delta\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.2.66)$$

Conseqüentemente as curvas integrais das equações (3.2.62) são minimais tomadas na esfera  $S_{n+2}$ . Já no espaço da forma fundamental (3.2.35), sem perda de generalidade, para  $\tau = t$  tais resultados são aplicados como na seção (3.2.1). Para as formas (3.2.62) para  $\alpha = n + 1$  e (3.2.47), temos  $\varphi = u + W$  onde  $W$  e  $u$  são independentes entre si. Substituindo esta expressão em (3.2.61) temos que  $W$  é solução de

$$\frac{dq^i}{dt} = g^{ij} \left( \frac{\partial W}{\partial q^j} - g_{jn+1} \right) \quad (3.2.67)$$

e

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} - g^{ij} g_{in+1} \left( \frac{\partial W}{\partial q^j} - g_{jn+1} \right) + 2V - g_{n+1n+1}. \quad (3.2.68)$$

Comparando  $V$  da última equação e da equação (3.2.56) temos:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial t} - g^{ij} \left( \frac{\partial W}{\partial q^j} - g_{jn+1} \right) \frac{\partial W}{\partial q^i} = -\frac{dW}{dt}. \quad (3.2.69)$$

Seja  $W$  uma solução completa de (3.2.56) onde as dadas  $n$ 's constantes arbitrárias  $a^i$ , são não aditivas. Se tomarmos as equações

$$\frac{\partial W}{\partial a^i} = b_i, \quad u + W = b, \quad (3.2.70)$$

onde cada  $b$  e  $b_i$  é constante, mostramos que resolvendo as primeiras  $n$ 's equações para cada  $q(a^i, b_i, t)$ , as equações como (3.2.67) mantêm a mesma forma. Comparando com (3.2.69) temos que as equações (3.2.70) definem geodésicas minimais onde as primeiras  $n$ 's soluções são suas trajetórias.

### 3.2.4 As equações Hamiltonianas e o espaço $S_{n+2}$

Vamos estabelecer a relação entre as transformações das equações hamiltonianas (3.2.34) e as transformações de contato ou transformações canônicas do espaço riemanniano de dimensão  $n + 1$ , dado por  $S_{n+2}$ , com a forma fundamental (3.2.35).

Para uma curva qualquer não-minimal em  $S_{n+2}$  com a forma fundamental (3.2.36) colocamos

$$P_\alpha = g_{\alpha\beta} \frac{dq^\beta}{ds}. \quad (3.2.71)$$

Então, segundo a notação dada em (3.2.46), temos

$$\frac{dq^\beta}{ds} = \bar{g}^{\beta\alpha} P_\alpha. \quad (3.2.72)$$

e, conseqüentemente,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dq^\beta}{ds} = \bar{g}^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta. \quad (3.2.73)$$

Além disso, também de (3.2.36), temos

$$ds = P_\alpha dq^\alpha. \quad (3.2.74)$$

Se pusermos

$$C = \sqrt{\bar{g}^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta}, \quad (3.2.75)$$

segue-se de (3.2.73) e (3.2.36) que  $C = 1$ . Pela equação (3.2.71) e em conseqüência de (3.2.37), por uma geodésica não-minimal, tem-se

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \frac{dq^\beta}{ds} \frac{dq^\gamma}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}^{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} P_\beta P_\gamma, \quad (3.2.76)$$

logo as geodésicas não-minimais são definidas pelas equações

$$\frac{dq^\alpha}{ds} = \frac{\partial C}{\partial P_\alpha}, \quad \frac{\partial P_\alpha}{ds} = -\frac{\partial C}{\partial q^\alpha}. \quad (3.2.77)$$

Se  $\varphi^\alpha$  e  $\psi_\alpha$  são funções das  $2n + 4$  quantidades  $q^\alpha$  e  $P_\alpha$ , tais que

$$\psi_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta} = P_\beta, \quad \psi_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial P_\beta} = 0, \quad (3.2.78)$$

então as equações

$$q'^\alpha = \varphi^\alpha, \quad P'_\alpha = \psi_\alpha, \quad (3.2.79)$$

definem uma transformação homogênea de contato (canônica), para a qual a condição

$$P'_\alpha dq'^\alpha = P_\beta dq^\beta \quad (3.2.80)$$

é satisfeita para valores arbitrários dos diferenciais  $dq^\alpha$  e  $dP_\alpha$ . As condições (3.2.78) são tão necessárias quanto suficientes e delas seguem-se que funções  $\varphi^\alpha$  e  $\psi_\alpha$  são homogêneas nos  $P$ 's de graus zero e um respectivamente. Além disso, quando os  $P$ 's são eliminados do primeiro grupo de equações de (3.2.79) resultam-se equações independentes da forma

$$F_\sigma(q^\alpha, q'^\beta) = 0 \quad \text{com } \sigma = 1, \dots, p. \quad (3.2.81)$$

Além disso, teremos as relações

$$P_\alpha = \lambda^\alpha \frac{\partial F_\sigma}{\partial q^\alpha} \quad P'_\alpha = -\lambda^\alpha \frac{\partial F_\sigma}{\partial q'^\alpha}, \quad (3.2.82)$$

onde  $\lambda$ 's são parâmetros. Reciprocamente, se os  $F_\sigma$ 's são quaisquer funções tais que na eliminação dos  $\lambda$ 's de (3.2.82) as equações resultantes e a equação (3.2.81) admitem solução única, então  $q'^\alpha = q'^\alpha(q^\alpha)$  e  $P'_\alpha = P'_\alpha(P_\alpha)$ .

As equações (3.2.77) nas quais  $C$  é homogêneo de grau um nos  $P$ 's seguem que as geodésicas não-minimais são as trajetórias de um grupo contínuo  $G_1$  de transformações canônicas. Além disso, quando as equações (3.2.79) são aplicadas em (3.2.77), elas se transformam em

$$\frac{dq'^{\alpha}}{ds} = \frac{\partial C'}{\partial P'_{\alpha}}, \quad \frac{dP'_{\alpha}}{ds} = -\frac{\partial P'_{\alpha}}{\partial q'^{\alpha}}, \quad (3.2.83)$$

onde  $C'$  é a transformada de  $C$ .

Para a forma (3.2.35), onde  $B = 1$  e  $A = g_{n+1n+1} - 2V$ , as equações (3.2.71) são dadas por

$$\begin{aligned} P_i &= (g_{ij}\dot{q}^j + g_{in+1})\frac{dt}{ds}, \\ P_{n+1} &= (g_{in+1}\dot{q}^i + g_{n+1n+1} - 2V)P_{n+2} + \frac{du}{ds}, \\ P_{n+2} &= \frac{dt}{ds}. \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

Como conseqüência de (3.2.47) e de (3.2.75) temos

$$C^2 = g^{ij}(P_i P_j - g_{in+1} P_j P_{n+2} + g_{in+1} g_{jn+1}) + 2P_{n+1} P_{n+2} 2V - g_{n+1n+1}. \quad (3.2.85)$$

De (3.2.84) e (3.2.27) temos

$$P_i = p_i P_{n+2}, \quad (3.2.86)$$

logo

$$C^2 = 2P_{n+2}^2 H + 2P_{n+1} P_{n+2}. \quad (3.2.87)$$

Por  $C = 1$ , e as equações (3.2.77), (3.2.86) reduzem-se à equação abaixo por conta da equivalência entre (3.2.84) e (3.2.34).

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{ds} &= P_{n+2} \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dt}{ds} &= P_{n+2}, & \frac{du}{ds} &= 2P_{n+2} H + P_{n+1} \\ \frac{dp_i}{ds} &= -P_{n+2} \frac{\partial H}{\partial q^i}, & \frac{dP_{n+1}}{ds} &= -P_{n+2}^2 \frac{\partial H}{\partial t}, & \frac{dP_{n+2}}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.88)$$

Considerando agora as transformações canônicas tais que a equação do primeiro grupo de (3.2.79) para  $\alpha = n + 2$  é da forma

$$u' = u + f, \quad (3.2.89)$$

onde  $f$  e as funções das outras equações de ambos os conjuntos não dependem de  $u$ . A primeira equação de (3.2.78), colocando  $\beta = n + 2$  nos fornece que  $P'_{n+2} = P_{n+2}$ . Como as trajetórias

dinâmicas correspondem às geodésicas para cada valor de  $a$  em

$$\frac{dt}{ds} = a,$$

para  $a = 1$  teremos  $P_{n+2} = 1$ ,

$$p_i dq^i + P_{n+1} dt = P'_i dq'^i + P'_{n+1} dt' + df. \quad (3.2.90)$$

e

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} - H. \quad (3.2.91)$$

As equações correspondentes a (3.2.81), utilizando  $P_{n+1}$  acima são

$$u' - u - F_1 = 0, \quad \text{com } F_2 = \dots = F_r = 0 \text{ e } r \geq 1, \quad (3.2.92)$$

as funções  $F$  não dependem de  $u'$  ou  $u$  e para  $\alpha = n + 2$  faz com que  $1 = -\lambda^1$  em (3.2.82) e esta equação tem as seguintes correspondentes:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q^i} + \lambda^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial q^i}, & P_{n+1} &= \frac{\partial F_1}{\partial t} + \lambda^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial t} \\ P'_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial q'^i} - \lambda^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial q'^i}, & P'_{n+1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial t'} - \lambda^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial t'} \end{aligned} \quad \text{com } \sigma = 2, \dots, r. \quad (3.2.93)$$

Uma transformação canônica estará bem definida em (3.2.92) quando ao se eliminar os  $\lambda$ 's de (3.2.93) as funções  $F$  são as equações resultantes e  $F_2 = \dots = F_r = 0$  podem ser resolvidas por  $q^i, t, p_i, P_{n+1}$  como funções de  $q'^i, t', p'_i, P'_{n+1}$ . Por exemplo, supondo que  $P'_{n+1}$  resolve (3.2.91). O resultado é escrito da forma

$$P'_{n+1} + K(q'^i, t', p'_i) = 0. \quad (3.2.94)$$

E teremos também

$$\frac{\partial C'}{\partial q'^i} - \frac{\partial C'}{\partial P'^i_{n+1}} \frac{\partial K}{\partial q'^i} = 0, \quad \frac{\partial C'}{\partial P'_i} - \frac{\partial C'}{\partial P'^i_{n+1}} \frac{\partial K}{\partial P'_i} = 0.$$

Destas identidades teremos que a equivalente da equação (3.2.94) será

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{ds} &= \frac{\partial C'}{\partial P'_{n+1}}, & \frac{dP'_{n+1}}{ds} &= -\frac{\partial C'}{\partial t'}, \\ \frac{dq'^i}{dt'} &= \frac{\partial K}{\partial P'_i}, & \frac{dP'_i}{t'} &= -\frac{\partial K}{\partial q'^i}. \end{aligned} \quad (3.2.95)$$

Estas transformações equivalem às transformações canônicas gerais do espaço  $S_{n+2}$  e também são as equivalentes hamiltonianas dadas em (3.2.34).

### 3.2.5 Potenciais independentes do tempo

As equações (3.2.34), quando nem os sistemas dinâmicos, nem os potenciais de energia  $V$  dependem do tempo, são dadas por:

$$g_{ij}\ddot{q}^j + [jk, i]\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0, \quad (3.2.96)$$

cuja primeira integral é dada por

$$\frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + V = E, \quad (3.2.97)$$

onde  $E$  é uma constante de energia. Neste caso a forma fundamental para  $S_{n+2}$  é dada por

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j + Adu^2, \quad (3.2.98)$$

com  $A$  independente de  $u$  por definição. As geodésicas não-minimais deste espaço são dadas trocando  $t$  por  $u$  em (3.2.38), (3.2.39) e (3.2.40) e fazendo  $u = B = 0$  nas equações (3.2.98), obtendo assim

$$g_{ij}\frac{d^2q^j}{ds^2} + [jk, i]\frac{dq^j}{ds}\frac{dq^k}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial q^i}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0 \quad (3.2.99)$$

e

$$A\frac{du}{ds} = a, \quad \text{onde } a = \text{constante}. \quad (3.2.100)$$

Para cada valor de  $a \neq 0$  definimos um parâmetro  $t$  dado por

$$t = as. \quad (3.2.101)$$

Desta forma, as equações (3.2.99) e (3.2.100) serão dadas, respectivamente, em termos da variável independente  $t$  por

$$g_{ij}\ddot{q}^j + [jk, i]\dot{q}^j\dot{q}^k - \frac{1}{2}\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q^i} = 0 \quad (3.2.102)$$

e

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{A}. \quad (3.2.103)$$

Se  $t$  é identificado como tempo e  $A$  é definido como

$$\frac{1}{2A} = V + b, \quad \text{onde } b = \text{constante} \quad (3.2.104)$$

então (3.2.102) equivale a (3.2.96). De (3.2.98), (3.2.101) e (3.2.103), teremos ainda

$$\frac{1}{a^2} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{A} = 2(E + b). \quad (3.2.105)$$

Se  $|E|$  é limitado superiormente, então a constante  $a$  estabelece uma relação entre uma geodésica e a constante de energia  $E$  para a trajetória correspondente. Desta forma, as geodésicas não-minimais de  $S_{n+2}$  são dadas por

$$q^i = f^i(t), \quad u = 2 \int V dt + 2bt, \quad (3.2.106)$$

onde as  $n$ 's primeiras equações são soluções de (3.2.96) e como consequência, de (3.2.97). Estas últimas podem ser escritas da forma

$$u = -2 \int T dt + 2(E + b)t, \quad (3.2.107)$$

que mostra a relação entre as coordenadas  $u$  e a ação.

O determinante da forma (3.2.98) é  $Ag$ , onde  $g = \det g_{ij}$ . Desta forma, teremos:

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij}, \quad \bar{g}^{in+1} = 0, \quad \bar{g}^{n+1n+1} = \frac{1}{A} = 2(V + b), \quad (3.2.108)$$

para  $q^{n+1} = u$  e  $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n+1\}$ . Teremos, ainda que

$$g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \frac{\partial \varphi}{\partial q^j} + 2(V + b) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 = 1. \quad (3.2.109)$$

As equações equivalentes a (3.2.49) para  $\alpha = n+1$  são dadas por

$$\frac{du}{ds} = 2(V + b) \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

e por

$$\varphi = a(u + \psi), \quad (3.2.110)$$

com  $\psi$  independente de  $u$  e solução de

$$g_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \frac{\partial \psi}{\partial q^j} + 2(V + b) = \frac{1}{a^2}. \quad (3.2.111)$$

As geodésicas de  $S_{n+2}$  são dadas por

$$u + \psi + a \frac{\partial \psi}{\partial a} = c, \quad \frac{\partial \psi}{\partial a^\sigma} = c_\sigma, \quad (3.2.112)$$

onde  $a^\sigma$  são as  $n - 1$  constantes além de  $a$  dadas por uma solução, não linearmente dependentes entre si e os  $c$ 's constantes arbitrárias.

De (3.2.105) temos que podemos escrever (3.2.111) da seguinte forma

$$g^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \frac{\partial \psi}{\partial q^j} = 2(E - V). \quad (3.2.113)$$

### 3.2.6 Princípio de Fermat estendido

A métrica de Jacobi é degenerada no bordo  $E - V(q) = 0$  do espaço onde ocorre o movimento. Trata-se de uma singularidade métrica. Ao ocorrer tal singularidade o obstáculo principal é a instabilidade. Pode-se considerar a métrica de Jacobi

$$g_J = 2E - V(q)g \quad (3.2.114)$$

como a métrica induzida pelo mergulho num espaço euclidiano plano cuja métrica é dada por

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j + (q^{n+1})^2 - (q^{n+2})^2 \quad (3.2.115)$$

onde,

$$\begin{aligned} q^i &= p^i \sqrt{2E - V(q)} \\ q^{n+1} &= \frac{1}{2}(r^2 - 1) \sqrt{2E - V(q)} \\ q^{n+2} &= \frac{1}{2}(r^2 + 1) \sqrt{2E - V(q)} \\ r^2 &= g_{ij} p^i p^j. \end{aligned}$$

A geometria de Jacobi é agora realizada pelo cone nulo

$$g_{ij} q^i q^j + (q^{n+1})^2 - (q^{n+2})^2 = 0, \quad (3.2.116)$$

com o vértice do cone sendo o início do bordo singular dado por  $\partial D$  na métrica de Jacobi.

Por outro lado, existe uma descrição consistente do cálculo de quantidades geométricas e funcionais invariantes da métrica no vértice. Para elucidar este fato vamos admitir que o cone é um espaço plano exceto no vértice, onde sua curvatura é singular. Obviamente, calculando por meios comuns da geometria riemanniana não se pode descobrir o tipo de cada singularidade, se são removíveis ou não. Outros meios devem ser utilizados para se obter tais respostas, [38].

Consideremos o espaço  $\mathcal{M}$  com métrica de Eisenhart, dada por  $g_E$ , para um sistema mecânico indefinido simples e seja  $g_E$  estacionária com respeito ao vetor de Killing tipo-tempo  $Y$  e  $\mathcal{M}$  admite uma divisão global em espaço-tempo  $U \times \mathbb{R}$  adaptada a  $Y$ . Esta divisão se daria, por exemplo, da forma  $(q_1, \dots, q_n, t)$  com  $(q_1, \dots, q_n, t) \in U$ , um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $Y = \partial/\partial u$ . A propriedade de Killing de  $Y$  dada pelo fato de que os coeficientes da métrica de  $\mathcal{M}$  não dependem da variável de tempo  $t$ . A existência do vetor de Killing pode ser utilizado para construir um espaço quociente  $\mathcal{M}_E/G_u$ , onde  $G_u$  é um grupo de simetria gerado pelo vetor de Killing. A métrica sobre  $\mathcal{M}_E/G_u$  é estabelecida pelo teorema a seguir. Ele se apresenta como uma extensão tipo-tempo do princípio de Fermat em relatividade geral.

**Teorema 3.2.3** *Seja  $(\mathcal{M}, g)$  um espaço-tempo estacionário com uma assinatura lorentziana  $(-, +, +, +)$  então o problema as geodésicas sobre o espaço-tempo  $(n + 1)$ -dimensional*

$$\delta \left( \int ds_{n+1}^2 \right) = 0 \quad (3.2.117)$$

*pode ser reduzido ao problema das geodésicas sobre o espaço-tempo  $n$ -dimensional fictício conformemente semelhante ao espaço espaço riemanniano com a métrica*

$$d\bar{l}^2 = \frac{1 + hg_{00}}{-g_{00}} dl^2 \quad \delta \left( \int d\bar{l}_n^2 \right) = 0, \quad (3.2.118)$$

*onde  $dl^2 = g_{ij}dq^i dq^j$   $q = g_{00}du^2 + dl^2$  - métrica do espaço-tempo  $h = \text{constante}$ ;  $h > 0$  para geodésica tipo-tempo,  $h < 0$  para geodésica tipo-espaço e  $h = 0$  para geodésica nula.*

# Capítulo 4

## Modelos cosmológicos e o Princípio de Maupertuis-Jacobi

Neste capítulo apresentamos os recentes resultados de Townsend e Wohlfarth, [3], re-interpretando geometricamente as equações de movimento de certos modelos cosmológicos. Mostraremos que estes resultados decorrem, de fato, de uma generalização do princípio de Maupertuis-Jacobi, o que permite sua extensão para o caso de modelos cosmológicos mais gerais.

### 4.1 Cosmologias multiescalares

Uma generalização possível dos modelos de quintessência discutidos na seção (2.3) corresponde aos modelos multiescalares, conhecidos na Física também como modelos sigma não-lineares. Estes modelos consistem em  $N$  campos escalares  $\phi^\alpha$ ,  $\phi^\alpha : M \rightarrow \Sigma$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , que tomam valores numa variedade riemanniana  $\Sigma$  e possui métrica  $G_{\alpha\beta}$ . Supondo um potencial de auto-interação  $V(\phi^\alpha)$  para os campos escalares, temos a seguinte ação para o caso minimamente acoplado:

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{mn} G_{\alpha\beta}(\phi) \partial_m \phi^\alpha \partial_n \phi^\beta - V(\phi) \right), \quad (4.1.1)$$

O principal resultado de Townsend e Wohlfarth, [3], o qual reproduziremos a seguir, foi mostrar que as equações de movimento obtidas a partir de (4.1.1) com as hipóteses de isotropia e

homogeneidade do espaço-tempo e correspondem às geodésicas num espaço de dimensão  $(N+1)$  cuja assinatura de Lorentz é  $(1, N)$ . Tais geodésicas são tipo-tempo se  $V > 0$ , tipo-luz ou nulo se  $V = 0$  e tipo-espaço se  $V < 0$ .

Sobre a ação acima, estamos interessados em soluções onde as geodésicas ou elementos de linha tenham a métrica de *FLRW* para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico cujas coordenadas padrão são:

$$ds^2 = -dt^2 + S(t)^2 d\Sigma_k^2, \quad (4.1.2)$$

onde  $S(t)$  é fator escala e  $\Sigma_k$  representa as seções espaciais  $(d-1)$ -dimensional de curvatura constante  $k$ .

Se  $\partial_t S > 0$ , o universo está em expansão e se  $\partial_t^2 S > 0$ , a expansão é acelerada [3]. Todas as trajetórias para cosmologias *flat* podem ser determinadas explicitamente. Em particular, para o caso  $N = 1$  com potencial exponencial do tipo

$$V = V_0 e^{-2a\varphi}, \quad (4.1.3)$$

identificam-se valores **críticos** e **hipercríticos**, pelos quais o conjunto das trajetórias passam por uma mudança qualitativa, que explicitaremos mais adiante, onde a constante de acoplamento é dada por  $a$ . Os referidos valores são dados, respectivamente, por:

$$\alpha_c = \sqrt{\frac{2}{d-2}} \quad \text{e} \quad \alpha_h = \sqrt{\frac{2(d-1)}{d-2}}. \quad (4.1.4)$$

Abaixo do valor crítico, ( $a < \alpha_c$ ), o universo tende assintoticamente a uma fase de expansão acelerada. Acima deste valor, existem somente fases de aceleração transitória. Este capítulo, tal como o artigo de Townsend e Wohlfarth, objetiva determinar características das cosmologias com potenciais escalares mais gerais.

Vamos admitir que

$$(D_t^2 \phi)^\alpha := \partial_t^2 \phi^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial_t \phi^\beta \partial_t \phi^\gamma, \quad (4.1.5)$$

onde  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  é a conexão de Levi-Civita para a métrica  $G$  do espaço e

$$a_\alpha(\phi) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |V|}{\partial \phi^\alpha}, \quad (4.1.6)$$

chamada de *função característica* do potencial  $V$ , a partir da qual, temos a 1-forma do espaço dual ao campo de vetores  $\mathbf{a}$ . Os campos escalares obedecem as equações:

$$D_t^2\phi + (d-1)H\partial_t\phi = 2V\mathbf{a}, \quad (4.1.7)$$

onde  $H = \partial_t S/S$  correspondem ao parâmetro de Hubble. A restrição, ou vínculo de energia, de Friedmann é dada por

$$S^2[|\partial_t\phi|^2 + 2V - (d-1)\alpha_c^{-2}H^2] = (d-1)\alpha_c^{-2}k, \quad (4.1.8)$$

onde a norma  $|\partial_t\phi|$  é a induzida pela métrica do espaço, dada por  $|\partial_t\phi|^2 = \partial_t\phi \cdot \partial_t\phi = G_{\alpha\beta}\partial_t\phi^\alpha\partial_t\phi^\beta$ . A equação da aceleração é obtida diferenciando (4.1.8) e substituindo a equação de campo escalar (4.1.7) e tem a forma:

$$\partial_t^2 S = \frac{2S}{d-1}[\alpha_c^2 V - |\partial_t\phi|^2], \quad (4.1.9)$$

onde  $\alpha_c$  é dado em (4.1.4). Vemos que a aceleração ocorre somente quando  $V > 0$ .

Tomemos agora uma nova coordenada do tempo de forma que

$$d\tau = |V|^{\frac{1}{2}}dt. \quad (4.1.10)$$

Supondo

$$S(t) = e^{\beta(\tau)}, \quad (4.1.11)$$

A nova condição de expansão é dada por  $\dot{\beta} > 0$  e a nova condição de aceleração é dada por

$$\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}(\mathbf{a} \cdot \dot{\phi}) > 0, \quad (4.1.12)$$

com os pontos representando a diferenciação em  $\tau$ . A nova equação do campo escalar é dada por:

$$D_\tau^2\phi = (\mathbf{a} \cdot \dot{\phi})\dot{\phi} - (d-1)\dot{\beta}\dot{\phi} + 2 \cdot \text{sign } V \mathbf{a}, \quad (4.1.13)$$

a nova restrição de Friedmann é dada por:

$$e^{2\beta(\tau)}|V| \left[ |\dot{\phi}|^2 - (d-1)\alpha_c^{-2}\dot{\beta}^2 + 2 \cdot \text{sign } V \right] = (d-1)\alpha_c^{-2}k, \quad (4.1.14)$$

Portanto, a equação de aceleração é dada por

$$\ddot{\beta} = -\frac{2}{d-1}|\dot{\phi}|^2 - \dot{\beta}^2 + \dot{\beta}(\mathbf{a} \cdot \dot{\phi}) + \frac{2\alpha_c^2}{d-1} \cdot \text{sign } V, \quad (4.1.15)$$

e a condição (4.1.12) pode ser reescrita da forma:

$$|\dot{\phi}|^2 < \alpha_c^2 \cdot \text{sign } V, \quad (4.1.16)$$

satisfeito se e somente se  $V > 0$

## 4.2 Análise dos pontos fixos

Daremos o nome de pontos fixos àquelas soluções do sistema dinâmico formado pelas equações (4.1.13) e (4.1.15) ao serem submetidas à nova restrição de Friedmann, (4.1.14), e para as quais

$$\ddot{\beta} = 0 \quad \text{e} \quad D_\tau^2 \phi = \mathbf{0}. \quad (4.2.17)$$

Admitir a existência de pontos fixos, requer uma linearização onde, se necessário, faremos uso do Teorema de Hartman-Gröbman apresentado mais formalmente no apêndice (A).

### 4.2.1 Identificando os pontos fixos

Identificar os pontos fixos destes sistemas é parte do estudo proposto para o trabalho que trata da análise quantitativa e qualitativa das soluções e, diante dela, fazer a comparação com modelos realísticos. Dado  $D_\tau^2 \phi = 0$ , a equação (4.1.13) produz a expressão:

$$\dot{\phi} = c\mathbf{a} \Rightarrow |\dot{\phi}|^2 = c^2|\mathbf{a}|^2, \quad \mathbf{a} \cdot \dot{\phi} = c|\mathbf{a}|^2. \quad (4.2.18)$$

onde  $c$  é raiz da equação

$$|\mathbf{a}|^2 c^2 - (d-1)c\dot{\beta} + 2\text{sign } V = 0. \quad (4.2.19)$$

Com  $\ddot{\beta} = 0$  em (4.1.15), obtemos:

$$\left(\dot{\beta} - |\mathbf{a}|^2 c\right) \left(\dot{\beta} - \alpha_c^2 c\right) = 0. \quad (4.2.20)$$

Para  $\dot{\beta} = \alpha_c^2 c$  temos de (4.2.19) que

$$c^2 = \frac{2\text{sign } V}{\alpha_h^2 - |\mathbf{a}|^2} \quad (4.2.21)$$

e portanto

$$\omega\dot{\phi} = \pm\mathbf{a}; \quad \omega\dot{\beta} = \pm\alpha_c^2, \quad (4.2.22)$$

com  $\omega$  convenientemente definido por:

$$\omega = \sqrt{\frac{|\mathbf{a}|^2 - \alpha_h^2}{2}}, \quad (4.2.23)$$

e onde  $\alpha_h$  é a constante hipercrítica dada em (4.1.4). Vemos que a equação (4.2.21) foi determinada admitindo que

$$V > 0 \text{ e } |\mathbf{a}| < \alpha_h, \quad (4.2.24)$$

donde obtemos

$$|\dot{\phi}^2| - (d-1)\alpha_c^{-2}\dot{\beta}^2 + 2 \cdot \text{sign } V = 0, \quad (4.2.25)$$

que é a restrição de Friedmann para  $k = 0$ . Condição suficiente.

Para  $\dot{\beta} = |\mathbf{a}|^2 c$ , que também foi calculado para  $V > 0$  e  $|\mathbf{a}| < \alpha_h$ , obtemos de (4.2.19) que

$$c^2 = \frac{\alpha_c^2}{|\mathbf{a}|^2} \text{sign } V, \quad (4.2.26)$$

e daí que

$$\dot{\phi} = \pm \left( \frac{\alpha_c}{|\mathbf{a}|} \right) \mathbf{a}, \quad \dot{\beta} = \pm \alpha_c |\mathbf{a}|. \quad (4.2.27)$$

Com a condição suficiente de que  $k \neq 0$ , deduzimos que a restrição de Friedmann para este caso é dada por:

$$\alpha_c^{-2} k = e^{2\beta} |V| (\alpha_c^2 - |\mathbf{a}|^2). \quad (4.2.28)$$

Desta forma, teremos que  $k > 0$  para  $|\mathbf{a}| < \alpha_c$  e  $k < 0$  para  $|\mathbf{a}| > \alpha_c$ . O caso onde  $|\dot{\phi}| = \alpha_c$  não é analisado, pois, estes pontos fixos correspondem a cosmologias de aceleração nula.

## 4.2.2 Qualificando os pontos fixos

A identificação de pontos fixos para campos multi-escalares segue o mesmo esquema da análise para o caso de campo escalar unitário. Ao assumirmos que  $\dot{\beta}$  é constante e que  $\dot{\phi}$  é covariantemente constante, segue-se de (4.2.19, 4.2.18) que  $\mathbf{a}$  é covariantemente constante também. Temos que o campo multiescalar é dado pelo potencial equivalente a (4.1.3) para o caso

$$V = V_0 e^{-2\mathbf{a}\phi}, \quad (4.2.29)$$

de modo que  $a\varphi = \mathbf{a}\phi$  e teremos este potencial totalmente definido pelas novas coordenadas associadas dadas, de forma que:

$$G_{\alpha\beta}d\phi^\alpha d\phi^\beta = d\varphi^2 + \widehat{G}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\chi)d\chi^{\widehat{\alpha}}d\chi^{\widehat{\beta}}, \quad (4.2.30)$$

onde  $\widehat{G}$  é a métrica do espaço de dimensão  $N - 1$ , ortogonal à direção  $\varphi$ , cujas coordenadas são dadas por  $\chi$ . As equações de campo são dadas por:

$$\begin{aligned} D_\tau^2\chi &= \mathbf{a}\dot{\varphi}\dot{\chi} - (d-1)\dot{\beta}\dot{\chi}, \\ \ddot{\varphi} &= \mathbf{a}\dot{\beta}\dot{\varphi} + 2a \cdot \text{sign } V. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

A restrição de Friedmann é dada da forma:

$$\alpha_c^2[|\dot{\chi}|^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\text{sign } V_0] - (d-1)\dot{\beta}^2 = k(d-1)e^{2(\mathbf{a}\phi-\beta)}|V_0|^{-1}. \quad (4.2.32)$$

A equação acima confirma o fato da aceleração ser dada em termos de  $\ddot{\beta}$ . Supondo que o espaço alvo reduzido é *flat*, então as equações de campos escalares e de aceleração definem um sistema dinâmico autônomo dado por:

$$S = \begin{cases} \ddot{\varphi} = \mathbf{a}\dot{\varphi}^2 - (d-1)\dot{\beta}\dot{\varphi} + 2a \cdot \text{sign } V \\ \ddot{\beta} = -\frac{2}{(d-1)}[\dot{\varphi}^2 + |\dot{\chi}|^2 - \alpha_c^2 \cdot \text{sign } V] - \dot{\beta}^2 + \mathbf{a}\dot{\beta}\dot{\varphi} \\ \ddot{\chi} = \mathbf{a}\dot{\varphi}\dot{\chi} - (d-1)\dot{\beta}\dot{\chi} \end{cases} \quad (4.2.33)$$

Se tomarmos  $\dot{\chi} = 0$ , o sistema é análogo ao sistema de campo escalar unitário. Porém, para  $\dot{\chi} \neq 0$  não existem novos pontos fixos, ou seja, iremos analisar os mesmos pontos fixos. Se o espaço for não *flat*, então à última equação do sistema acima deve-se acrescentar um termo de conexão que depende de  $\chi$ . Tal termo não afeta a estabilidade dos pontos fixos com  $\dot{\chi}$ , e, portanto, podemos admitir que o espaço é *flat*. Sem perda de generalidade vamos supor que  $N = 2$ . Desta forma, temos um sistema dinâmico autônomo para as três variáveis, que ao linearizarmos em torno do ponto fixo com  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$  e  $\dot{\beta} = \dot{\beta}_0$ , fornece as seguintes novas variáveis:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + x, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0 + y, \quad \dot{\chi} = z. \quad (4.2.34)$$

Logo, de (4.2.33) teremos:

$$\dot{U} = \begin{pmatrix} 2a\dot{\varphi}_0 - (d-1)\dot{\beta}_0 & -(d-1)\dot{\varphi}_0 & 0 \\ a\dot{\beta}_0 - 4(d-1)^{-1}\dot{\varphi}_0 & a\dot{\varphi}_0 - 2\dot{\beta}_0 & 0 \\ 0 & 0 & a\dot{\varphi}_0 - (d-1)\dot{\beta}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.2.35)$$

Vamos denotar o sistema acima na forma  $\dot{U} = MU$ , para  $(x, y, z) = U^T$ . Os autovalores da matriz  $M$  classificam qualitativamente os pontos fixos do sistema.

Para  $k = 0$ , temos que

$$\omega\dot{\varphi}_0 = \pm a; \quad \omega\dot{\beta}_0 = \pm \alpha_c^2. \quad (4.2.36)$$

Os autovalores de  $M$  são dados por

$$\pm 2\omega^{-1}(a^2 - \alpha_c^2), \quad \pm \omega^{-1}(a^2 - \alpha_h^2), \quad \pm \omega^{-1}(a^2 - \alpha_h^2). \quad (4.2.37)$$

Para  $k = 0$ , as trajetórias são ramos do hiperbolóide definido pelo caso. Como o universo está em expansão, vamos tomar os autovalores reais e negativos que correspondem ao maior ramo deste hiperbolóide. O nó é estável para  $a < \alpha_c$ . Para  $\alpha_c < a < \alpha_h$  o nó é um ponto de sela, com um autovalor real negativo e dois reais positivos. Já para todos os autovalores positivos, o sistema é instável.

Para o caso onde  $V < 0$  podemos ter  $a > \alpha_h$ , cujo o ponto fixo é um nó instável. As trajetórias obtidas através de  $k = -1$  iniciam-se neste ponto fixo instável e terminam no ponto fixo estável no ramo do hiperbolóide onde  $k = 0$ . Como  $\dot{\beta} < 0$ , para este ponto fixo, seria como se houvesse uma singularidade devida ao *big crunch*, veja detalhes sobre este tema em [44].

Para  $k \neq 0$ , temos que

$$\omega\dot{\varphi}_0 = \pm \alpha_c; \quad \omega\dot{\beta}_0 = \pm \alpha_c a. \quad (4.2.38)$$

Os autovalores de  $M$  são dados por

$$\pm \frac{\alpha_c}{2} \left[ -(d-2)a \pm \sqrt{16 - (d-2)(10-d)a^2} \right], \quad \mp 2a/\alpha_c. \quad (4.2.39)$$

Para  $a < \alpha_c$  todos os autovalores são reais com sinais contrários e o ponto é de sela. Para  $a > \alpha_c$  todos os autovalores são negativos e  $d \geq 10$  ou  $d \leq 9$ ,

$$a \geq \bar{a} \equiv \frac{4}{\sqrt{(d-2)(10-d)}}; \quad (4.2.40)$$

para  $d \leq 9$  e  $a > \bar{a}$ , os autovalores são dois complexos com parte real negativa e um real negativo e o nó é estável com as trajetórias formando uma espiral no plano  $xy$ . Para qualquer  $d$  e  $k \neq 0$  o ponto fixo é um ponto de sela instável se  $a < \alpha_c$  e estável para  $a > \alpha_c$ . Esta estabilidade é do tipo nó ou espiral. Para  $d \geq 10$  é sempre do tipo nó, mas se  $d = 10$  torna-se uma espiral em  $a = \alpha_h$ . Para  $d < 9$  ele torna-se uma espiral para  $a = \bar{a} < \alpha_h$ .

Vamos atentar para o fato de que para  $d = 11$  não existe potencial escalar possível, mesmo em  $d = 10$  existe potencial escalar positivo, porém não existe solução para ponto fixo em  $a > \alpha_h$ .

### 4.3 Estudo das trajetórias no espaço de fase

Nesta seção vamos apresentar uma classificação das trajetórias no espaço de fase. A menos que se diga ao contrário, nesta seção consideramos  $\dot{\chi} \equiv 0$ .

1.  $V > 0$

(a)  $k = 0$

- i. para  $a > \alpha_h$  tem-se o limite assintótico usual: o campo  $\phi$  tende ao mínimo do potencial  $V$ ;
- ii. para  $a < \alpha_h$  as trajetórias aproximam-se das soluções para ponto fixo para  $k = 0$  as quais:
  - A.  $a < \alpha_c$  são aceleradas;
  - B.  $a > \alpha_c$  são desaceleradas.

(b)  $k = -1$ . As trajetórias se aproximam das trajetórias dos pontos fixos com  $k = 0$ . Mais especificamente, para  $a < \alpha_c$  estão elas contidas entre uma solução das trajetórias em  $k = 0$  e uma solução de ponto fixo também em  $k = 0$ . Para  $a > \bar{a}$  as trajetórias são atratoras espirais em torno de um ponto com aceleração nula e portanto ela comanda uma infinita oscilação entre aceleração e desaceleração.

(c)  $k = 1$ . As trajetórias são determinadas pelas suas separatrizes do caso instável do pontos fixos  $k = 1$ . Também há o colapso em  $a > \alpha_c$  para o qual as trajetórias

“convergem” para o *big crunch*.

## 2. $V < 0$

- (a) Campo escalar unitário. Vamos apresentar brevemente uma solução para este caso. O espaço anti-de Sitter é a solução das equações de Einstein para a constante cosmológica negativa. Neste modelo tem-se  $V = V_0 < 0 \Rightarrow a = 0$ . Fazendo

$$\dot{\varphi} = x, \quad \dot{\beta} = y, \quad (4.3.41)$$

temos as equações

$$\dot{x} = -(d-1)xy, \quad \dot{y} = - \left[ y^2 + \lambda^2 = \frac{2x^2}{d-1} \right] \quad (4.3.42)$$

onde

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{(d-1)(d-2)}}.$$

determinando assim:

$$[x^2 - 2\lambda^{-2}y^2 - 2] = Cx^{2/(d-1)} \quad (4.3.43)$$

com  $C$  constante. As curvas, para cada  $C$  são:

- i.  $C > 0$ , como as trajetórias onde  $k = +1$ ;
- ii.  $C < 0$ , como as trajetórias onde  $k = -1$ ;
- iii.  $C = 0$ , hiperbolóide como nas trajetórias onde  $k = 0$
- iv.  $C = -\infty$ , curvas onde  $\dot{y} = -[y^2 + \lambda^2] \Rightarrow e^\beta = S_0 \cos \lambda\tau$ .

A restrição de Friedmann implica que  $k = -1$  e portanto

$$ds^2 = -dt^2 + S_0^2 \cos^2(\alpha_c t / |S_0|) d\Sigma_{-1}^2, \quad (4.3.44)$$

que é a métrica de um espaço anti-de Sitter.

- (b) Campo multiescalar. Neste caso, devido ao termo de aceleração  $|\dot{\chi}|^2$  e à restrição de Friedmann, as trajetórias do espaço de fase com  $\dot{\chi}$  dependerão da redução da métrica ao espaço, mas, contanto que não existam novos pontos fixos, espera-se que haja um outro comportamento, por conta desta métrica ser independente. Supondo

que o espaço seja *flat*, assim como o espaço reduzido, as trajetórias para  $k = 0$  encontram-se num hiperbolóide do espaço de fase que separam as trajetórias para  $k = +1$  e  $k = -1$  válido para qualquer sinal de  $V$ . Tomando  $V > 0$  temos de (4.1.16) que a aceleração ocorre sempre que a trajetória do plano de fase penetra na região da hipersfera

$$|\dot{\phi}| = \alpha_c, \quad (4.3.45)$$

válido para  $k$  igual ou diferente de zero. Os modelos exponenciais com soluções cosmológicas sempre aceleradas são aqueles onde o ponto fixo encontra-se no interior ou na fronteira da esfera de aceleração, como acontecem quando  $a \leq \alpha_c$ . Para os outros valores de  $a$ , qualquer aceleração é, no máximo temporária, mesmo assim, somente uma parte das trajetórias passam sempre por esta aceleração. Quanto mais escalares há no campo, mais liberdade temos para evitar as esferas de aceleração. A figura (4.1) nos mostra um modelo com um campo 2-escalar e um potencial exponencial positivo.

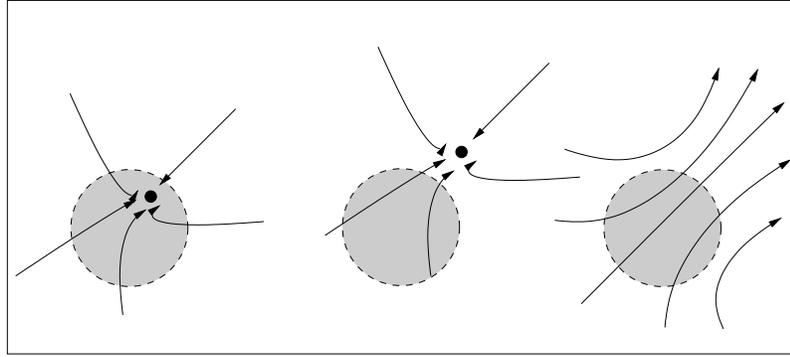


Figura 4.1: Estudo da estabilidade dos nós em cosmologias com  $k = 0$ , respectivamente para  $a < \alpha_c$ ,  $\alpha_c < a < \alpha_h$ ,  $a > \alpha_h$  e  $\dot{\chi} = 0$ . O último caso, válido para  $V < 0$  também. Extraída de [3].

## 4.4 Evolução das cosmologias multiescalares

Tomando

$$(d-1)\beta = \alpha_h \gamma, \quad (4.4.46)$$

onde  $\gamma$  é uma variável independente, a restrição de Friedmann será escrita da forma:

$$(\partial_t \gamma)^2 - |\partial_t \phi|^2 + k\alpha_c^{-2}(d-1)e^{-2\beta} = 2V \quad (4.4.47)$$

e a equação de campo escalar dada por:

$$D_t^2 \phi + \alpha_h (\partial_t \gamma) \partial_t \phi - 2V \mathbf{a} = 0. \quad (4.4.48)$$

Portanto, a equação de aceleração será da forma:

$$\partial_t^2 \gamma + \frac{2}{\alpha_h} |\partial_t \phi|^2 + \frac{\alpha_c}{\sqrt{d-1}} [(\partial_t \gamma)^2 - 2V] = 0. \quad (4.4.49)$$

Comparando (4.4.47) com (4.4.48), temos:

$$D_t^2 \phi + \alpha_h (\partial_t \gamma) \partial_t \phi + \mathbf{a} [|\partial_t \phi|^2 - (\partial_t \gamma)^2] = k \alpha_c^{-2} (d-1) e^{-2\beta} \mathbf{a}. \quad (4.4.50)$$

Comparando (4.4.47) com (4.4.49), temos:

$$\partial_t^2 \gamma + \alpha_h |\partial_t \phi|^2 = k \alpha_c^{-2} \alpha_h e^{-2\beta}. \quad (4.4.51)$$

Em [45] vemos uma aplicação das oscilações como modelos de cosmologias de campos escalares.

Dividiremos a análise em três casos:

#### 4.4.1 Primeiro caso

Considerando  $V = 0$ ,  $k$  arbitrário e  $(N + 1)$  variáveis, denote por

$$\Phi^\mu = (\gamma, \phi^\alpha) \quad (4.4.52)$$

as funções das trajetórias cosmológicas num espaço estendido. Deste modo, a restrição de Friedmann será dada por:

$$G_{\mu\nu} \partial_t \Phi^\mu \partial_t \Phi^\nu = k \alpha_c^{-2} (d-1) e^{-2\beta} \quad (4.4.53)$$

onde

$$G_{\mu\nu} \partial_t \Phi^\mu \partial_t \Phi^\nu = -d\gamma^2 + G_{\alpha\beta} d\phi^\alpha d\phi^\beta \quad (4.4.54)$$

é uma métrica com assinatura de Lorentz no espaço estendido. Eliminando  $|\partial_t \phi|^2$  de (4.4.51) utilizando Friedmann, obtemos:

$$\partial_t^2 \gamma + \alpha_h (\partial_t \gamma)^2 = -k \alpha_c^{-2} (d-2) \alpha_h e^{-2\beta}. \quad (4.4.55)$$

Tomando (4.4.55) com (4.4.50) temos:

$$D_t^2 \Phi^\mu + \alpha_h (\partial_t \gamma) \partial_t \Phi^\mu = k \alpha_c^{-2} (d-2) \alpha_h e^{-2\beta} G^{\mu\nu} \partial_\nu \gamma. \quad (4.4.56)$$

Como  $k = 0$ , a equação determina uma geodésica numa parametrização não afim. Para uma nova variável tempo obtemos:

$$D_{t'}^2 \Phi^\mu = k \alpha_c^{-2} (d-2) \alpha_h e^{2(d-2)\beta} G^{\mu\nu} \partial_\nu \gamma, \quad (4.4.57)$$

onde

$$dt' = e^{-\alpha_h \gamma} dt. \quad (4.4.58)$$

Como no caso  $k = 0$ , (4.4.57) é equação de uma geodésica parametrizada afim.

Apesar das trajetórias cosmológicas no espaço estendido não serem uma geodésica para  $k = 0$ , elas podem ser vistas como projeção de uma geodésica num espaço de dimensão  $(n+2)$ , chamado de espaço duplamente estendido que é fibrado pelas hipersuperfícies isométricas ao espaço estendido. Sejam

$$\Psi^A = (\Phi^\mu, \Psi^*) \quad (4.4.59)$$

$N+2$  coordenadas. Tome

$$G_{AB} d\Psi^A d\Psi^B = G_{\mu\nu} d\Psi^\mu d\Psi^\nu + G_{**} (d\Psi^*)^2, \quad (4.4.60)$$

onde  $G_{**} = -k \alpha_c^{-2} e^{-2(d-2)\beta}$ . A equação de projeção é dada por

$$\partial_{t'} \Psi^* = (d-1)^{\frac{1}{2}} e^{2(d-2)\beta}. \quad (4.4.61)$$

Desta forma, a restrição de Friedmann fica da forma:

$$G_{AB} \partial_{t'} \Psi^A \partial_{t'} \Psi^B = 0 \quad (4.4.62)$$

e fornece junto com as equações de campos escalares e aceleração uma equivalência à equação geodésica dada por (4.4.57) a seguinte equação:

$$D_{t'}^2 \Phi^A = 0. \quad (4.4.63)$$

Portanto as trajetórias cosmológicas para  $V = 0$  são geodésicas nulas no espaço duplamente estendido. Se  $k < 0$  a métrica do espaço tem assinatura lorentziana, mas se  $k > 0$ , não. Como

$\Psi^*$  não é constante, o movimento restrito a uma hipersuperfície unitária de constante  $\Psi^*$ , pois a projeção do movimento sobre uma tal hipersuperfície não é uma geodésica. Tais argumentos não são válidos para  $k = 0$ , pois as projeções são geodésicas.

#### 4.4.2 Segundo caso

Considerando  $k = 0$  e  $V$  arbitrário, a restrição de Friedmann é escrita da forma:

$$G_{\mu\nu}\partial_t\Psi^\mu\partial_t\Phi^\nu = -2V. \quad (4.4.64)$$

Logo as trajetórias neste espaço são tipo-tempo para  $V > 0$ , nulo para  $V = 0$  e tipo-espaço para  $V < 0$ . As trajetórias são geodésicas nulas quando  $V = 0$ . Quando  $V \neq 0$  as trajetórias não são geodésicas maximais com respeito à métrica  $G_{\mu\nu}$ , mas são geodésicas com na métrica conforme dada por:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \Omega^2 G_{\mu\nu}, \quad (4.4.65)$$

onde o fator conforme é dado por

$$\Omega = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|V|}e^{\alpha_h\gamma} & \text{para } V \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\alpha_h\gamma} & \text{para } V = 0. \end{cases} \quad (4.4.66)$$

Para  $k = 0$  temos que as equações (4.4.51) e (4.4.50) são equivalentes a

$$\tilde{D}_t^2\Phi^\mu \equiv \partial_t^2\Phi^\mu + \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu\partial_t\Phi^\nu\partial_t\Phi^\rho = f\partial_t\Phi^\mu, \quad (4.4.67)$$

onde  $\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu$  é a conexão de Levi-Civita para  $\tilde{G}_{\mu\nu}$  e

$$f = \alpha_h\partial_t\gamma - 2\mathbf{a} \cdot \partial_t\phi \quad (4.4.68)$$

é a equação das geodésicas cuja parametrização não é afim. A partir da equação

$$f = \partial_t\Phi^\mu\partial_\mu\log(2\Omega^2e^{-\alpha_h\gamma}), \quad (4.4.69)$$

deduzimos que as geodésicas com parametrização é afim, por um nova coordenada  $\tilde{t}$  para a qual

$$d\hat{t} = (2\Omega^2 e^{-\alpha_h \gamma}) dt. \quad (4.4.70)$$

Portanto,

$$\tilde{D}_{\hat{t}}^2 \Phi^\mu = 0. \quad (4.4.71)$$

A restrição de Friedmann é dada, agora, na forma

$$\tilde{G}_{\mu\nu} \partial_{\hat{t}} \Phi^\mu \partial_{\hat{t}} \Phi^\nu = \begin{cases} -\text{sign } V, & \text{se } V \neq 0 \\ 0, & \text{se } V = 0 \end{cases}. \quad (4.4.72)$$

A relação entre  $t'$  e  $\hat{t}$  estabelece-se da forma

$$d\hat{t} = 2\Omega^2 dt'. \quad (4.4.73)$$

O fato justifica-se por conta do parâmetro afim de uma geodésica nula que é afetado pelo reescalonamento conforme da métrica  $\tilde{G}$ . A curva nula que é geodésica na métrica  $G$ , também é na métrica  $\tilde{G}$ . Mas, as trajetórias no espaço estendido quando  $V \neq 0$  são geodésicas com respeito a uma única métrica conformemente equivalente a  $G$  que é  $\tilde{G}$ .

### 4.4.3 Caso geral

Vamos agora considerar o caso arbitrário onde  $k$  e  $V$  são quaisquer. A equação das curvas equivalentemente como em (4.4.71) é dada na forma:

$$\tilde{D}_{\hat{t}}^2 \Phi^\nu = \begin{cases} -\frac{1}{4} k \alpha_c^{-2} (d-1) e^{-2\beta} |V|^{-1} \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\nu (\log e^{2\beta} |V|), & \text{se } V \neq 0 \\ -\frac{1}{4} k \alpha_c^{-2} (d-1) e^{-2\beta} \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\nu (\log e^{2\beta}), & \text{se } V = 0 \end{cases}. \quad (4.4.74)$$

Porém ela não representa uma geodésica quando  $k \neq 0$ , neste caso, ela representa a projeção de uma geodésica num espaço duplamente estendido com respeito à métrica conformemente reescalada dada por:

$$\tilde{G}_{AB} = \Omega^2 G_{AB}. \quad (4.4.75)$$

Com  $\Omega$  como em (4.4.66) e  $G_{AB}$  como em (4.4.60). Comparando (4.4.73) e (4.4.74) com (4.4.62) obtemos, respectivamente:

$$\partial_{\dot{t}}\Psi^* = \begin{cases} (d-1)^{\frac{1}{2}}e^{-2\beta}|V|^{-1}, & \text{se } V \neq 0 \\ (d-1)^{\frac{1}{2}}e^{-2\beta}, & \text{se } V = 0 \end{cases} \quad (4.4.76)$$

e

$$\tilde{D}_{\dot{t}}^2\Psi^A = 0. \quad (4.4.77)$$

A restrição de Friedmann é dada por:

$$\tilde{G}_{AB}\partial_{\dot{t}}\Psi^A\partial_{\dot{t}}\Psi^B = \begin{cases} -\text{sign } V, & \text{se } V \neq 0 \\ 0, & \text{se } V = 0. \end{cases} \quad (4.4.78)$$

Logo a trajetória cosmológica é uma geodésica num espaço duplamente estendido, que é tipo-tempo se  $V > 0$ , nulo para  $V = 0$  e tipo-espaço para  $V < 0$ .

## 4.5 Aplicações

Vamos efetuar três aplicações do formalismo desenvolvido até aqui.

### 4.5.1 O cone de aceleração

Até aqui nós tivemos um entendimento geométrico para a aceleração dada primeiramente em (4.1.16). Assumindo que somente  $V > 0$  ocorre quando se trata de um movimento acelerado, a restrição de Friedmann pode ser escrita por:

$$\dot{\gamma}^2 = |\dot{\phi}|^2 + 2 - k\alpha_c^{-2}(d-1)V^{-1}e^{-2\beta}. \quad (4.5.79)$$

Supondo

$$G_{\mu\nu}^{acc}d\Phi^\mu d\Phi^\nu = -\frac{1}{d-1}d\gamma^2 + G_{\alpha\beta}d\phi^\alpha d\phi^\beta, \quad (4.5.80)$$

uma métrica da aceleração de um espaço estendido -relembrando o sentido geométrico dado anteriormente- cujo correspondente reescalonado conformemente é dado por

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{acc} = \Omega^2 G_{\mu\nu}^{acc} \quad (4.5.81)$$

e a relação entre as variáveis temporais é dada por

$$d\hat{t} = \sqrt{2}\Omega d\tau. \quad (4.5.82)$$

Daí, tem-se que

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{acc} \partial_t \Phi^\mu \partial_t \Phi^\nu = \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^{acc} \dot{\Phi}^\mu \dot{\Phi}^\nu = \frac{1}{2} |\dot{\Phi}|^2 - \frac{1}{2(d-1)} \dot{\gamma}^2. \quad (4.5.83)$$

Comparando (4.5.79) e (4.5.83), temos que

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{acc} \partial_t \Phi^\mu \partial_t \Phi^\nu = \frac{1}{\alpha_h^2} \left[ |\dot{\phi}|^2 - \alpha_c^2 \right] + \frac{k}{2\alpha_c^2 V} e^{-2\beta}. \quad (4.5.84)$$

Para  $k = 0$ , como  $|\dot{\Phi}|^2 < \alpha_c^2$  de (4.1.16), temos que

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{acc} \partial_t \Phi^\mu \partial_t \Phi^\nu < 0. \quad (4.5.85)$$

A interpretação geométrica é que, neste caso, o universo correspondente à trajetória geodésica tipo-tempo é acelerado quando seu vetor tangente se encontra no interior do subcone de luz definido pela métrica da aceleração do espaço estendido. Para  $k \neq 0$ , a métrica da aceleração do espaço duplamente estendido é dada por:

$$\begin{aligned} G_{AB}^{acc} d\Psi^A D\Psi^B &= G_{\mu\nu}^{acc} d\Phi^\mu d\Phi^\nu + \frac{1}{(d-1)} G_{**} (d\Psi^*)^2 \\ &= G_{\alpha\beta} d\phi^\alpha d\phi^\beta + \frac{1}{(d-1)} \left[ -d\gamma^2 - k\alpha_c^{-2} e^{-2(d-2)\beta} (d\Psi^*)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.5.86)$$

Comparando a equação acima com (4.4.76), temos que

$$\tilde{G}_{AB}^{acc} \partial_t \Psi^A \partial_t \Psi^B = \frac{1}{\alpha_h^2} \left[ |\dot{\phi}|^2 - \alpha_c^2 \right], \quad (4.5.87)$$

onde  $\tilde{G}_{AB}^{acc} = \Omega^2 G_{AB}^{acc}$  é a métrica da aceleração conformemente reescalada. Portanto a condição para a aceleração é que

$$\tilde{G}_{AB}^{acc} \partial_t \Psi^A \partial_t \Psi^B < 0. \quad (4.5.88)$$

Neste caso, o universo é acelerado quando a tangente às suas trajetórias no espaço duplamente estendido permanece inteiramente contidas no subcone de aceleração do cone de luz.

## 4.5.2 Trajetórias para potenciais exponenciais

Agora vamos discutir como cosmologias vindas de um potencial exponencial da forma de (4.2.29) adaptam-se na nova estrutura geométrica. Ainda assumindo que o espaço é *flat*, portanto o espaço estendido também é *flat* e a métrica conforme  $\tilde{G}$  também é *flat*, cujo o fator conforme é dado por  $\Omega$  é aproximadamente  $e^{\alpha_h \gamma - \mathbf{a} \cdot \phi}$ , ou seja,

$$\Omega \propto e^{\alpha_h \gamma - \mathbf{a} \cdot \phi}, \quad (4.5.89)$$

logo,

$$\partial_\mu \Omega \propto (\alpha_h, \mathbf{a}). \quad (4.5.90)$$

O primeiro passo é determinar as trajetórias no espaço estendido que são associadas aos pontos fixos. Possibilitado pela adequação às hipóteses do teorema de Hartman-Gröbman.

Para  $k = 0$ , a função linear

$$J(\Phi) = a^2 \gamma - \alpha_h \mathbf{a} \cdot \phi \quad (4.5.91)$$

é independente do tempo, logo,  $\dot{J} = 0 = \dot{\Phi}^\mu \partial_\mu J$ . Portanto,  $\dot{\Phi}$  é um vetor tangente aos hiperplanos de  $J$  constante. Para  $N = 1$  há somente uma direção a qual é determinada pelo gradiente de  $\Omega$ . Logo  $\dot{\Phi}^\mu \propto G^{\mu\nu} \partial_\nu \Omega \propto (\alpha_h, a)$ , para  $N$  qualquer segue o mesmo raciocínio, mas

$$\dot{\Phi}^\mu = \pm \omega^{-1} (\alpha_h, a^\alpha). \quad (4.5.92)$$

Para  $k \neq 0$ , a função linear

$$K(\Phi) = \alpha_c^2 \gamma - \alpha_h \mathbf{a} \cdot \phi, \quad (4.5.93)$$

também é independente do tempo. Como as superfícies de  $K$  constante são hiperplanos, as trajetórias dos pontos fixos são retas cujo vetor diretor é dado por

$$\dot{\Phi}^\mu = \pm (\sqrt{(d-1)a}, \frac{\alpha_c}{a} \mathbf{a}). \quad (4.5.94)$$

A geodésica determinada pela equação acima é uma geratriz do cone de aceleração, ou seja, uma trajetória reta está inteiramente contida no cone de aceleração contínua, não limitada. Se permanece fora,  $a > \alpha_c$ , então corresponde a um universo de desaceleração contínua. Se no primeiro caso ele ainda permanecer fora do cone de luz, com  $a > \alpha_h$  a geodésica corresponde

ao ponto fixo para  $k = 0$  e  $V < 0$ . Notemos que uma vez dado o valor do vetor constante  $\mathbf{a}$ , efetiva-se uma transformação de Lorentz para uma trajetória reta de  $k = 0$  no espaço estendido. Desta forma, uma linha tipo-tempo só pode ser tomada sobre outra tipo-tempo, o mesmo ocorrendo com a tipo-espaço. Uma tipo-tempo não pode ser tomada sobre uma tipo-espaço ou vice-versa, nem mesmo qualquer combinação com trajetórias nulas.

Como poderíamos supor, as geodésicas obtidas em cosmologias para  $k = 0$  não são retas. As soluções obtidas por lugares dominados pela energia cinética são geodésicas cujos vetores tangentes são dados por  $\partial_{i\phi}$  cujo módulo é maior que os demais. Logo, podemos afirmar que as geodésicas partem das direções nulas pelo fato de que as cosmologias para  $k = 0$  possuem geodésicas nulas quando  $V = 0$ . Para  $V > 0$ , pelo fato do potencial ser mais significativo, as geodésicas sobre cones tipo-tempo aproximam-se de uma reta também tipo-tempo correspondentes às soluções do ponto fixo se  $a < \alpha_h$ . Por outro lado, se  $a \geq \alpha_h$ , então as geodésicas aproximam-se de uma geodésica reta nula. Para o caso onde o campo escalar é unitário podemos visualizar na figura (4.2).

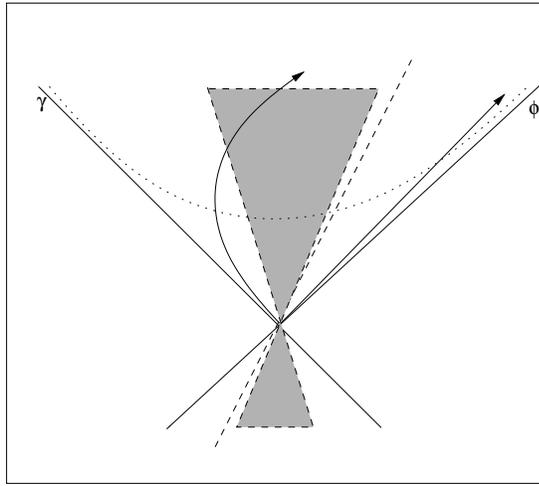


Figura 4.2: Evolução do caso geral para  $k = 0$  supondo o espaço estendido. Plano  $\{\gamma, \phi\}$  e  $V$  um potencial exponencial positivo com funções características constantes satisfazendo  $\alpha_c < a < \alpha_h$ . A linha tracejada fora do cone de aceleração é a solução do ponto fixo para o caso de desaceleração. As geodésicas que partiram da direção nula, no período dominado pela energia cinética vão assintoticamente na direção do ponto fixo; a geodésica inclinada à esquerda passa por um período de aceleração quando seu vetor tangente é tal que a curva permanece no cone de aceleração. (Extraída de [3].)

Já sabemos que para  $k \neq 0$  as trajetórias cosmológicas não são geodésicas no espaço duplamente estendidos e sim projeção de tais geodésicas. O vetor tangente a estas geodésicas correspondentes ao ponto fixo para  $k \neq 0$  é da forma:

$$\partial_t \Psi^A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\Omega} \left( \sqrt{(d-1)a}, \frac{\alpha_c}{a} \mathbf{a}, \pm \sqrt{(d-1)} V_0^{-\frac{1}{2}} e^{\mathbf{a} \cdot \phi + (d-3)\beta} \right), \quad (4.5.95)$$

onde a última entrada foi obtida através de (4.4.76). Como este vetor tangente não é constante com  $(N+2)$  entradas, então a solução do ponto fixo não é uma reta no espaço duplamente estendido, pois sua métrica não é *flat* e nem conformemente *flat*. Portanto, de (4.2.28) temos que

$$\tilde{G}_{AB}^{acc} \partial_t \Psi^A \partial_t \Psi^B = \frac{1}{2} [\alpha_c^2 - a^2 - k\alpha_c^{-2} |V|^{-1} e^{-2\beta}], \quad (4.5.96)$$

confirmando o fato de que as cosmologias dadas através dos pontos fixos para  $k \neq 0$  têm aceleração nula.

### 4.5.3 Comportamento assintótico de um potencial qualquer

Vamos novamente admitir que as cosmologias são *flats* com potenciais positivos. Os campos escalares devem ser tais que  $\phi \rightarrow \phi_0$  assintoticamente. As funções características do potencial são tais que

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{\phi \rightarrow \phi_0} \mathbf{a}(\phi), \quad (4.5.97)$$

ou seja constantes. O valor absoluto  $a_0 = |\mathbf{a}_0|$  determina o comportamento assintótico. Comparando os expoentes críticos e hiper-críticos podemos afirmar que se  $a_0 < \alpha_c$ , então haverá fase acelerada assintótica, cuja trajetória se aproxima de um campo atrator acelerado. Tais modelos são obtidos quando  $V$  tem um limite inferior estritamente positivo, sendo que a maioria deles tendem a zero ou tem um mínimo em zero; se  $\alpha_c < a_0 < \alpha_h$ , há uma desaceleração assintótica correspondente à existência de um campo atrator do mesmo tipo. Nestes dois casos as geodésicas são tipo-tempo; se  $a_0 > \alpha_h$  as geodésicas tipo-tempo assintotam as trajetórias nulas que também são desaceleradas.

A seguir alguns exemplos com potenciais unitários:

**Exemplo 4.5.1** *Para*

$$V = 1/\varphi^n, \quad (4.5.98)$$

possui ampla aplicação em modelos de quintessência, [25]. Com  $\varphi_0 = \infty$  temos que  $a_0 = 0$  e portanto uma aceleração assintótica. Como esperado, o potencial tende a zero.

**Exemplo 4.5.2** Para

$$V = \varphi^{2m} e^{-2a\varphi}, \quad (4.5.99)$$

onde se  $\phi \rightarrow \infty$  teremos  $a = a_0$ . Desta forma, o comportamento assintótico é o mesmo como seria no modelo potencial exponencial com constante de acoplamento  $a$ .

**Exemplo 4.5.3** Para

$$V = \varphi^{2n} + \lambda, \quad (4.5.100)$$

onde  $n$  é um inteiro positivo e

$$a = -\frac{n\phi^{2n-1}}{\varphi^{2n} + \lambda}, \quad (4.5.101)$$

suponhamos, numa aceleração assintótica, que exista uma vizinhança  $\delta$  do mínimo, que é a origem, do potencial tal que o campo escalar permaneça em  $\delta$ . De (4.5.101), temos que  $a \rightarrow 0$  com  $\phi \rightarrow 0$  para qualquer  $\lambda > 0$ , o que implica na aceleração assintótica devido à constante cosmológica em vigor,  $\lambda$ . Considerando o limite  $\lambda \rightarrow 0$  no caso onde  $a_0 = \infty > \alpha_h$ , implica que a trajetória é nula e portanto, há uma desaceleração assintótica.

## 4.6 Caso com acoplamento não mínimo

Esta seção é baseada no primeiro artigo publicado para a composição deste trabalho, [46]. O princípio de Maupertuis-Jacobi (3.1) em mecânica clássica estabelece que as dinâmicas de um dado sistema podem ser vistas como um movimento geodésico associado a uma variedade riemanniana.

Em (3.2.23) vimos a forma da lagrangeana de um sistema com grau de liberdade  $N$ . As equações de Euler-Lagrange desta lagrangeana podem ser escritas da forma

$$\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = -g^{\alpha\beta} \partial_\beta V(q), \quad (4.6.102)$$

onde  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  é a conexão de Levi-Civita para a métrica  $g_{\alpha\beta}$ . A hamiltoniana de (3.2.23) é descrita por

$$H(q, p) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + V(q), \quad (4.6.103)$$

onde  $p_\alpha = g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta$ . Para uma energia fixa  $E$ , as trajetórias no espaço de fase  $2N$ -dimensional  $(q^\alpha; p_\beta)$  estão inteiramente contidas na hipersuperfície  $E = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(q)p^\alpha p^\beta + V(q)$ .

Seja

$$\mathcal{D}_E = \{q \in \mathcal{M} : V(q) \leq E\} \quad (4.6.104)$$

a região onde ficam as trajetórias no espaço, onde, se houver, o bordo pode ser escrito da forma:

$$\partial\mathcal{D}_E = \{q \in \mathcal{M} : V(q) = E\}. \quad (4.6.105)$$

Veja que nenhuma característica topológica é atribuída ao bordo. Se o potencial não tem pontos críticos no bordo, com  $V \neq 0$ , então  $\partial\mathcal{D}$  é uma subvariedade de  $\mathcal{M}$  de dimensão  $N - 1$ . Se a trajetória alcança o bordo  $\partial\mathcal{D}$  em um ponto  $q_0$  sua velocidade se anula neste ponto e a trajetória se aproxima ou se afasta de  $q_0$  perpendicularmente ao bordo. Em particular, não há trajetória que pertença ao bordo.

As equações de movimento dadas em (4.6.102) são equivalentes às geodésicas da geometria riemanniana sobre  $\mathcal{M}$  definida pela métrica de Jacobi:

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(q) = 2(E - V(q))g_{\alpha\beta}(q), \quad (4.6.106)$$

cujas equações geodésicas são dadas por:

$$\hat{\nabla}_u u = \frac{d^2 q^\alpha}{ds^2} + \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{ds} \frac{dq^\gamma}{ds} = 0 \quad (4.6.107)$$

onde  $u = \frac{dq^\alpha}{ds}$  é o vetor tangente ao longo da geodésica e  $\hat{\nabla}$  e  $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  são respectivamente a derivada covariante e a conexão de Levi-Civita da métrica  $\hat{g}_{\alpha\beta}$  e o parâmetro  $s$  se relaciona com  $t$  da seguinte forma:

$$\frac{ds}{dt} = 2(E - V(q)). \quad (4.6.108)$$

Campos escalares não minimamente acoplados são muito comuns em cosmologia. Em particular, eles têm sido muito utilizados na descrição de quintessência. A ação a seguir é uma forma generalizada da ação desenvolvida em (4.1.1).

Seja  $\phi^\alpha$  um campo de escalares onde os valores são tomados sobre um espaço riemanniano com uma métrica dada por  $G_{\alpha\beta}$ . Vamos tomar a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (F(\phi)R - g^{ij}G_{\alpha\beta}(\phi)\partial_i\phi^\alpha\partial_j\phi^\beta - 2V(\phi)), \quad (4.6.109)$$

onde os índices gregos superiores pertencem a  $\{1, \dots, N\}$ ,  $N$  a dimensão do espaço; os índices embaixo vão de 1 a 4, onde 4 é a dimensão do espaço-tempo e  $g_{ij}$  sua métrica;  $R$  é a curvatura escalar. Para  $R = R_a^a$ , obtivemos  $R = 6\dot{H} + 12H^2$ , com  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . A integração por partes da ação (4.6.109) nos dá o seguinte lagrangiano

$$L(a, \dot{a}, \phi_\alpha, \dot{\phi}^\alpha) = a^3(-6H^2F - 6H\dot{\phi}^\alpha\partial_\alpha F + G_{\alpha\beta}(\phi)\dot{\phi}^\alpha\dot{\phi}^\beta - 2V(\phi)), \quad (4.6.110)$$

onde o sistema possui  $N + 1$  configurações de  $(a, \phi_\alpha)$  cuja a métrica lorentziana é dada da seguinte forma:

$$G_{AB}(a, \phi^\alpha) = \left( \begin{array}{cc|cc} -6aF & & & -3a^2\partial_\beta F \\ \hline & & & \\ \hline -3a^2\partial_\beta F & & & a^3G_{\alpha\beta} \end{array} \right). \quad (4.6.111)$$

Pela métrica acima, temos que a lagrangeana pode ser obtida por

$$L(\phi_A, \dot{\phi}^A) = G_{AB}(\phi)\dot{\phi}^A\dot{\phi}^B - 2V_{eff}(\phi^A), \quad (4.6.112)$$

onde  $A \in \{0, \dots, N\}$ ,  $\dot{\phi}^A = (a, \phi^\alpha)$  e  $V_{eff}(\phi^A) = a^3V(\phi^\alpha)$ , similar à lagrangeana dada em (3.2.23), portanto,  $\det G_{AB} \neq 0$ .

Considerando o princípio de Maupertuis-Jacobi temos que todas as soluções de Euler-Lagrange de (4.6.109), são também soluções de Euler-Lagrange de (4.6.110), o contrário não ocorre. Desta forma, as soluções de (4.6.109) correspondem ao um subconjunto de soluções de (4.6.110) que podem ser obtidas através da hamiltoniana associada a ela dada por:

$$\begin{aligned} H(\phi_A, \pi_A) &= G^{AB}\pi_A\pi_B + 2V_{eff}(\phi) = \\ &= a^3(-6H^2F - 6H\dot{\phi}^\alpha\partial_\alpha F + G_{\alpha\beta}(\phi)\dot{\phi}^\alpha\dot{\phi}^\beta + 2V(\phi)), \end{aligned} \quad (4.6.113)$$

que é constante. Tome  $H(\phi_A, \pi_A) = E$ , as equações de Euler-Lagrange de (4.6.109) implica que  $E = 0$ . Este caso, que é chamado de *energia restrita*, está de acordo com as soluções que se esperam das dinâmicas de (4.6.110).

Verificaremos agora como se apresenta a métrica através das energias restritas de acordo com  $V$ . Para  $V = 0$ , as equações de Euler-Lagrange de (4.6.109) são dadas pelas geodésicas de (4.6.111), logo

$$G_{AB} = -2a^3V(\phi), \quad (4.6.114)$$

onde as geodésicas são do tipo nulo. Para  $V < 0$  introduzimos a métrica

$$\widehat{G}_{AB} = 2VG_{AB}, \quad (4.6.115)$$

e obtemos as mesmas conclusões ao se repetir os mesmos procedimentos utilizados para o princípio de Maupertuis-Jacobi clássico e vemos que as geodésicas são tipo-espaço. Para  $V > 0$ , introduzimos a métrica

$$\widehat{G}_{AB} = -2VG_{AB}, \quad (4.6.116)$$

também repetindo os mesmos argumentos anteriores, temos que as geodésicas são tipo-tempo, porém a métrica (4.6.111) não é definida positiva, não podendo assim se obter da energia restrita uma região dinamicamente admissível  $\mathcal{D}$  do espaço configurado. Pela assinatura lorentziana da métrica (4.6.111) a região  $\mathcal{D}$  não terá bordo ou fronteira.

O esquema abaixo apresenta um resumo das métricas para as geodésicas do modelo cosmológico dado pela ação (4.6.109)

$$\widehat{G}_{AB} = \begin{cases} G_{AB}, & \text{se } V = 0 \\ 2|V|G_{AB}, & \text{se } V \neq 0 \end{cases}, \quad (4.6.117)$$

com  $G_{AB}$  dado em (4.6.111).

Uma primeira constatação é que modelos cosmológicos do tipo de (4.6.109) correspondem a equações geodésicas da métrica lorentziana dada em (4.6.117) podendo assim se obter informações sobre as dinâmicas cosmológicas da geometria associada à métrica como levantadas nas seções anteriores deste capítulo. O estudo das singularidades dinâmicas podem também direcionar tais pesquisas no intuito de saber o que evitar se este for o objetivo da pesquisa. A hipótese de que  $\det G_{AB} \neq 0$  neste trabalho tem o objetivo de evitar tais singularidades. Para  $N = 1$  e  $G_{\alpha\beta} = 1$ , teremos

$$\det G_{AB} = -6a^4(F(\phi) + \frac{3}{2}(F'(\phi))^2) \quad (4.6.118)$$

e encontrar uma raiz da equação acima é encontrar alguma inevitável singularidade, podendo assim, fornecer modelos cosmológicos não físicos.

Para escapar de tais momentâneos transtornos, podemos colocar

$$F(\phi) + \frac{3}{2}(F'(\phi))^2 = 1 \quad (4.6.119)$$

para o acoplamento conforme e assim poderemos sempre empregar o princípio de Maupertuis-Jacobi.

# Capítulo 5

## Cosmologias anisotrópicas

Foi comentada na Introdução deste trabalho a aplicabilidade dos sistemas dinâmicos no estudo qualitativo dos modelos cosmológicos realísticos. Após discorrermos sobre a cosmografia, a cosmologia e o trabalho de Townsend e Wohlfarth, sugerimos, como em [47], uma extensão do estudo desenvolvido por esta dupla em [3] incluindo aí campos escalares com acoplamento não mínimo e a aplicação do princípio de Maupertuis-Jacobi.

Basicamente, o princípio de Maupertuis-Jacobi dado no teorema (3.1.4) estabelece que as dinâmicas de um dado sistema podem ser vistas como um movimento geodésico associado a uma variedade riemanniana. Sua aplicação tem sido muito utilizada em equações de campos obtidos das ações de Einstein-Hilbert como dadas em (4.6.109). O caso não-homogêneo e anisotrópico foi considerado em [6, 7, 39]. Aplicações envolvendo espaços diferenciais distintos no lugar de variedades diferenciáveis foram discutidas em [5].

Vimos que Townsend e Wohlfarth considera modelos cosmológicos não-minimamente acoplados com campo escalares  $N$ -dimensional  $\phi^\alpha$  que tomam valores num espaço alvo (pseudo) riemanniano, cuja a métrica é  $G_{\alpha\beta}$ . A ação correspondente é dada por

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} (R - g^{ij} G_{\alpha\beta}(\phi) \partial_i \phi^\alpha \partial_j \phi^\beta - 2V(\phi)), \quad (5.0.1)$$

onde  $R$  é a curvatura escalar padrão do espaço-tempo  $D$ -dimensional cuja a métrica é dada por  $g_{ij}$ . Considerando a métrica  $FLRW$  homogênea e isotrópica dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma_\kappa^2, \quad (5.0.2)$$

onde  $\Sigma_\kappa$  representa as seções espaciais  $(D - 1)$ -dimensionais de curvatura constante igual a  $\kappa$ , eles afirmam que as equações de movimento associadas a (5.0.1) de fato correspondem a geodésicas em certos espaços estendidos.

## 5.1 Caso anisotrópico com acoplamento não mínimo

Os campos escalares com acoplamento não mínimo têm sido bastante utilizados em cosmologia, principalmente no estudo de quintessência, ver, por exemplo, [33, 45, 48, 49].

A ação considerada é a mesma (4.6.109), dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (F(\phi)R - g^{ij}G_{\alpha\beta}(\phi)\partial_i\phi^\alpha\partial_j\phi^\beta - 2V(\phi)). \quad (5.1.3)$$

Integrando-a por partes, obtemos  $R = 6\dot{H} + 12H^2 + \frac{6k}{a^2}$  com  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  e o lagrangiano:

$$L(a, \dot{a}, \phi_\alpha, \dot{\phi}^\alpha) = a^3 \left( -6H^2F(\phi) - 6H\dot{\phi}^\alpha\partial_\alpha F(\phi) + G_{\alpha\beta}(\phi)\dot{\phi}^\alpha\dot{\phi}^\beta + 6\kappa\frac{F(\phi)}{a^2} - 2V(\phi) \right), \quad (5.1.4)$$

no espaço de configuração  $N + 1$ -dimensional estendido por  $(a, \phi^\alpha)$ . A saber que para

$$S = \int d^Dx \sqrt{-g} (F(\phi)R - g^{ij}G_{\alpha\beta}(\phi)\partial_i\phi^\alpha\partial_j\phi^\beta - 2V(\phi)) \quad (5.1.5)$$

teremos que

$$R = 2(D - 1)\dot{H} + D(D - 1)H^2 + (D - 1) \times (D - 2)\frac{\kappa}{a^2}.$$

Introduzindo a métrica lorentziana dada por

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} -6aF & -3a^2\partial_\beta F \\ -3a^2\partial_\alpha F & a^3G_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (5.1.6)$$

sobre o espaço de configuração e  $A, B \in \{1, \dots, N + 1\}$ . O lagrangeano dado por (5.1.4) será dado por

$$L(\phi^A, \dot{\phi}^A) = G_{AB}\dot{\phi}^A\dot{\phi}^B - 2V_{eff}(\phi^A) \quad (5.1.7)$$

onde  $\phi^A = (a, \phi^\alpha)$  e  $V_{eff} = a^3V(\phi) - \kappa aF(\phi)$ .

A partir dos estudos introduzidos no capítulo anterior, temos que o hamiltoniano associado a (5.1.4) é da forma

$$H(\phi^A, \pi_A) = G^{AB}\pi_A\pi_B + 2V_{eff}(\phi^A), \quad (5.1.8)$$

que é uma constante de movimento, onde  $\pi_A = G_{AB}\dot{\phi}^B$ . Por outro lado, as equações de Euler-Lagrange de (5.1.3) faz com que  $H = 0$  (energia restrita).

A métrica dada em (5.1.6) é bastante para afirmar que  $\det G_{AB} \neq 0$ . Como exemplo, podemos tomar  $N = 1 = G_{\alpha\beta}$ , desta forma, teremos

$$\det G_{AB} = -6a^4(F(\phi) + \frac{3}{2}(F'(\phi))^2). \quad (5.1.9)$$

Como os pontos de singularidades não são objetos de nossa pesquisa, vamos admitir que  $\det G_{AB} \neq 0$ . O lagrangeano dado em (5.1.7) é desenvolvido a partir do princípio de Maupertuis-Jacobi e para  $V_{eff} = 0$  suas equações de Euler-Lagrange já correspondem às geodésicas tipo-tempo de (5.1.6); para  $V_{eff} \neq 0$ , introduzimos a (pseudo)métrica de Jacobi

$$\widehat{G}_{AB} = 2|V_{eff}|G_{AB} \quad (5.1.10)$$

e de acordo com o princípio de Maupertuis-Jacobi, as equações de Euler-Lagrange de (5.1.7) correspondem às geodésicas de (5.1.10) pela reparametrização por  $s$ , como sugerido em (4.6.108). Da energia restrita podemos ainda obter:

$$\widehat{G}_{AB} \frac{d\phi^A}{ds} \frac{d\phi^B}{ds} = -\frac{V_{eff}}{|V_{eff}|}, \quad (5.1.11)$$

implica que as geodésicas são tipo-tempo ou tipo-espaco para os respectivos  $V_{eff} > 0$  e  $V_{eff} < 0$ . Como uns dos objetivos da pesquisa, vamos apresentar nesta seção a análise dos modelos cosmológicos não isotrópicos. Ainda tomando a ação (5.1.3), vamos considerar uma métrica de Bianchi I,  $D$ -dimensional dada por

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^{D-1} a_i^2(t)dx^i, \quad (5.1.12)$$

cuja curvatura escalar é dada por

$$R = 2 \left( \sum_{i=1}^{D-1} (\dot{H}_i + H_i^2) + \sum_{i=1, j>i}^{D-1} H_i H_j \right), \quad (5.1.13)$$

com  $H_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i}$ . Efetuando novamente a integração por partes de (5.1.3), obtemos o seguinte lagrangeano:

$$L = \left( \prod_{i=1}^{D-1} a_i \right) \left( -2F(\phi) \sum_{i=1, j>i}^{D-1} H_i H_j - 2 \left( \sum_{i=1}^{D-1} H_i \right) \dot{\phi}^\alpha \partial_\alpha F(\phi) + G_{\alpha\beta}(\phi) \dot{\phi}^\alpha \dot{\phi}^\beta - 2V(\phi) \right) \quad (5.1.14)$$

sobre o espaço de configuração  $(N + D - 1)$ -dimensional, estendido para  $(a_i, \phi_\alpha)$ . Para  $D = 4$ , introduzimos a seguinte métrica:

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 F & -a_2 F & -a_2 a_3 \partial_\beta F \\ -a_3 F & 0 & -a_1 F & -a_1 a_3 \partial_\beta F \\ -a_2 F & -a_1 F & 0 & -a_1 a_2 \partial_\beta F \\ -a_2 a_3 \partial_\alpha F & -a_1 a_3 \partial_\alpha F & -a_1 a_2 \partial_\alpha F & a_1 a_2 a_3 G_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (5.1.15)$$

sobre o espaço de configuração, onde  $A, B \in \{1, \dots, N + 3\}$ . O lagrangeano dado em (5.1.14) pode ser comparado com o dado em (5.1.7), pondo  $\phi^A = (a_1, a_2, a_3, \phi^\alpha)$  e

$$V_{eff}(\phi^A) = a_1 a_2 a_3 V(\phi^\alpha). \quad (5.1.16)$$

A assinatura da métrica é dada por  $(3, N)$ . A análise geométrica e dinâmica depende de  $\det G_{AB}$ . Para  $N = 1 = G_{\alpha\beta}$ , temos que

$$\det G_{AB} = -2(a_1 a_2 a_3 F(\phi))^2 \left( F(\phi) + \frac{3}{2}(F'(\phi))^2 \right). \quad (5.1.17)$$

A análise da singularidade para modelos isotrópicos passa também pela análise de  $F(\phi) = 0$ . O caso onde a singularidade é não isotrópica é descrito em [50].

A análise dinâmica possibilita descartar grande número de classes de modelos cosmológicos que não são viáveis do ponto de vista teórico e/ou realístico. Este último deve exibir, como mencionado no corpo deste trabalho, um comportamento dinâmico onde se possa fazer uma análise qualitativa destes modelos. Aqui a inviabilidade ocorre quando  $\det G_{AB} = 0$ , mas, outras análises podem ser feitas para este caso. Geometricamente, tais singularidades implicam que nenhuma geodésica pode ser estendida além dos pontos singulares e poderiam ser comparadas com um tipo de singularidade associada a um modelo cosmológico no futuro isotrópico ou não isotrópico. A identificação de tais singularidades na análise dinâmica é consideravelmente mais

simples que na aproximação geométrica. Para campos escalares múltiplos, a análise dinâmica é bem mais trabalhosa e aproximação geométrica no presente pode ser até mesmo mais aplicável.

A análise dinâmica mais comum é a classificação da estabilidade de uma dada solução. Os pontos fixos assintoticamente estáveis de de Sitter são particularmente relevantes para descrever a fase do universo recente em expansão acelerada. Estes pontos fixos correspondem a limites isotrópicos tais que  $\phi^\alpha$  e  $H$  são constantes,  $\phi^A(s) = (a_0 e^{Ht(s)}, \phi_0^\alpha)$ . A análise geométrica apresentada aqui pode ser utilizada na identificação de tais pontos. Para tanto, vamos considerar a equação geodésica de desvio que controla a tendência local das geodésicas numa mesma vizinhança de convergirem ou divergirem para cada ordem

$$\dot{\phi}^A \nabla_A \dot{\phi}^B \nabla_B n^D = R_{ABC}^D n^A \dot{\phi}^B \dot{\phi}^C, \quad (5.1.18)$$

onde  $R_{ABC}^D$  é o tensor curvatura da métrica de Jacobi e  $n^A$  é um vetor ortogonal a  $\dot{\phi}^A$  apontando para a direção do desvio. Para  $N = 1 = G$ , com  $V_{eff}(\phi) > 0$ , a geodésica correspondente ao ponto fixo de de Sitter tem  $\dot{\phi}^A = ((a_0 H / 2V_{eff}) e^{Ht}, 0)$ . O único componente não nulo de (5.1.18) implica que

$$\ddot{n}(s) = -R_{121}^2 n(s) (\dot{\phi}^{(1)})^2. \quad (5.1.19)$$

A estabilidade da solução de de Sitter requer que o vetor  $n(s)$  seja limitado para  $s \rightarrow \infty$  e, como  $R_{121}^2$  não pode ser negativo, não é necessário procurar pontos fixos em regiões onde  $R_{121}^2 < 0$ . Neste caso, teremos

$$R_{121}^2 = \frac{3aF}{2V_{eff}} \left( \frac{\square V_{eff}}{V_{eff}} - \frac{\partial_a V_{eff} \partial^a V_{eff}}{V_{eff}^2} - \frac{FF'' - \frac{1}{2}(F')^2}{a^3(F(\phi) + \frac{3}{2}(F'(\phi))^2)^2} \right). \quad (5.1.20)$$

Para  $F = 1$ , temos

$$R_{121}^2 = \frac{3V''(\phi_0)}{2a^5 V^2(\phi_0)},$$

sobre o ponto fixo  $\phi_0$  com a hipótese de estabilidade  $V''(\phi_0) > 0$  satisfeita. Os casos onde  $R_{121}^2 > 0$  e  $R_{121}^2 < 0$  são discutidos a partir do fato das regiões possuírem ou não pontos fixos de De Sitter, respectivamente. Diante do exposto, vemos que de fato este trabalho oferece mais uma possibilidade de análise de casos anisotrópicos.

# Capítulo 6

## Considerações finais

Neste trabalho, analisamos alguns resultados recentes sobre a interpretação geodésica das equações de movimento de certos modelos cosmológicos à luz do Princípio de Maupertuis-Jacobi e da chamada geometria de Eisenhart. Nossos estudos permitiram a extensão destas interpretações geodésicas para uma classe de modelos cosmológicos muito maior do que a original que nos serviu de motivação. Do ponto de vista matemático, nossos resultados enriquecem a discussão sobre singularidades da métrica de Jacobi e suas implicações dinâmicas. Por exemplo, a métrica de Jacobi é singular no bordo da região acessível no espaço de configuração, ver equação (4.6.104). No entanto, esta singularidade parece não ter nenhuma implicação dinâmica. Foi proposta uma interpretação destas bordas como fronteiras de sistemas do tipo bilhares [51]. Este é um tema de caráter matemático que poderia ser explorado daqui por diante.

Do ponto de vista físico, a abordagem geodésica se destaca como uma alternativa viável da classificação dinâmica usual. Uma possível aplicação deste trabalho que se encontra já em andamento, é a análise geodésica dos resultados apresentados em [52], validados após a aplicação do Teorema de Hartman-Gröbman, apresentado no apêndice A.

# Referências Bibliográficas

- [1] WENDY L. FREEDMAN E MICHAEL S. TURNER *Colloquium: Measuring and Understanding the Universe* Reviews of Modern Physics, 75, 2003.
- [2] J. W. TUKEY, *The Future of Data Analysis*, Annals of Mathematical Statistics, 1962.
- [3] P. K. TOWNSEND E M. N. R. WOHLFARTH, *Cosmology as Geodesics Motion*, class. Quantum Gravitation **21** 5375, 2004.
- [4] L. SMOLIN E C. SOO, *The Chern-Simons Invariant as the Natural Time Variable for Classical and Quantum Cosmology*, Nucl. Phys. B449, 289 1995.
- [5] M. SZYDLOWSKI, M. HELLER E W. SASIN, *Geometry of Spaces With the Jacobi Metric* J.Math. Phys. 37, 346, 1996.
- [6] J. GREENSITE, *Field Theory as Free Fall* Class. Quantum Grav. 13, 1339, 1996.
- [7] A. CARLINI E J. GREENSITE, *The Mass Shell of the Universe*, Phys. Rev. D55, 3514, 1997.
- [8] V.I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1980.
- [9] L. RAUL ABRAMO, LEON BRENIG E EDGARD GUNZIG, *On the Nonminimally Singularities of gravity in the Presence of Nonminimally Coupled Scalar Fields*, Phys. Rev. D67, 027301, 2003.
- [10] RAINER K. SACHS E HUNG-HSI WU, *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, Berkeley, 1977.

- [11] JOHN K. BEEM E PAUL E. M. EHRLICH, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, New York, 1981.
- [12] ANTÔNIO BERNAL E MIGUEL SANCHEZ, *Liebnizian, Galilean and Newtonian Structures of Spacetime*, Journal Mathematics Physics 44, 1129, 2003.
- [13] EDWIN F. TAYLOR E JOHN A. WHEELER, *Spacetime Physics*, W.H.Freeman and Company, São Francisco, 1966.
- [14] MICHAEL V. BERRY, *Principles of Cosmology and Gravitation*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1993.
- [15] JOÃO LUCAS MARQUES BARBOSA, *Geometria Hiperbólica*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1994.
- [16] MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO, *Introdução à Geometria Riemanniana*, Editora Impa, Rio de Janeiro, 1988.
- [17] KETI TENENBLAT, *Introdução à Geometria Diferencial*, Editora UnB, Brasília, 1988.
- [18] ALBERTO SAA, *A Third Order Curvature Invariant in Static Spacetimes*, Class.Quantum Gravity, 24, 2929, 2007.
- [19] SEAN M. CARROLL, *Spacetime and Geometry*, Pearson Education, San Francisco, 2004.
- [20] FÁBIO DADAM, *Oscilações de Buracos Negros*, Dissertação de Mestrado. IMECC-UNICAMP. 2005.
- [21] FRANCISCO S. N. LOBO, *Nature of Time and Causality in Physics*, arXiv:0710.0428v1, capítulo a ser publicado em 'Psychology of Time', Elsevier Publishers, Editora Simon Grondin.
- [22] HÉLIO V. FAGUNDES, *Modelos Cosmológicos e a Aceleração do Universo*, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 24, no. 2. 2002.
- [23] STEVEN WEINBERG, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 1972.

- [24] GEORGE F.R. ELLIS E HENK VAN ELST, *Cosmological Models*, Cargèse Lectures, 2000.
- [25] P. J. E. PEEBLES E B. RATRA, *The Cosmological Constant and Energy Dark*, Rev. Mod. Phys 75 559. 2003.
- [26] A.G. RIESS, *et al.*, Astron. J. 116, 1009, 1998, astr-ph/9805201; S. PERLMUTTER *et al.*, Astrophys. J. 517, 565, 1999, astro-ph/9812133.
- [27] J.P. OSTRIKER E P. J. STEINHART, *New Light and Dark Matter* Nature 377, 600, 1995.
- [28] N. BAHCALL, J.P. OSTRIKER, S. PERLMUTTER E PAUL J. STEINHART, Science 284, 1481, 1999; site da *Supernovae Cosmology Project*, <http://panisse.lbl.gov/>.
- [29] WILKINSON MICROWAVE ANISITROPY PROBE, site da Nasa <http://map.gsfc.nasa.gov>.
- [30] STEVEN WEINBERG Rev. Mod. Phys., 1, 1989. STEVEN WEINBERG, *The Cosmological Constant Problems*, astro-ph/0005265.
- [31] I. BUCHBINDER, S.D. ODINTSOV E I. SHAPIRO, *Effective Action in Quabtum Gravity*, IOP Publishing , Bristol, 1992.
- [32] SEAN CARROLL *The Cosmological Constant*, Living Rev. Relativity 4, 1, 2001. Disponível em <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1>.
- [33] F.C. CARVALHO E ALBERTO SAA, *Nonminimal Coupling, Exponential Potentials and the  $w < -1$  Regime of Dark Energy* Physics Review D70, 087302, 2004.
- [34] PAUL J. STEINHART, *A Quintessencial Introduction to Dark Energy*, The Search for Dark Matter and Dark Energy in the Universe, Editora C. Frenk, G. Kalmus, N. Smith and S. White 2003.
- [35] URBANO FRANÇA, *Dark Energy, Curvature and Cosmic Coincidence* arXiv:astro-ph/0509177v4, 2006.
- [36] LUTHER PFAHLER EISENHART, *Dynamical Trajectories and Geodesics*, The Annals of Mathematics, Vol. 30, 1928-1929.

- [37] MAREK SZYDLOWSKI, *The General Relativity in the Einsenhart Geometry*, Chaos, Solitons and Fractals 11, p. 685-695. 2000.
- [38] MAREK SZYDLOWSKI, *The Einsenhart Geometry as an Alternative Description of Dynamics in Terms of Geodesics*, General Relativity and Gravitation. Vol. 30 No. 6, 1998.
- [39] L. SMOLIN E C. SOO, *The Chern-Simons Invariant as the Natural Time variable for Classical and Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. 22, 737, 2005.
- [40] QI GUO E RONG-GEN CAI, *Classification of Cosmological Trajectories*, arXiv:gr-qc/0504033 v2. 2005.
- [41] L. D. LANDAU E E. M. LIFSHITZ, *Mechanics*, Pergamon, Moscou, 1994.
- [42] KOSTAS SKENDERIS E PAUL K. TOWNSEND, *Hamilton-Jacobi Method for Curved Domain Walls and Cosmologies*, Physical Review D 75, 2006.
- [43] MANOELITO M. DE SOUZA, *Dynamics and Causality Constraints*, Brazilian Journal of Physics, Vol. 32, 2002.
- [44] J.G. RUSSO E P.K. TOWNSEND *Cosmology as Relativistic Particle Mechanics from Big Crunch to Big Bang*, ECM-PF volume 89, 2005.
- [45] VALERIO FARAONI, *Coupled Oscillators as Models of Phantom and Scalar Field Cosmologies*, Physics Review D69, 123520, 2004.
- [46] LUCIANA A. ELIAS E ALBERTO SAA, *Non-Minimally Coupled Cosmology as Geodesic Motion*, Proceedings of Science IC2006 039 arXiv:gr-qc/0702037, 2006.
- [47] LUCIANA A. ELIAS E ALBERTO SAA, *Homogeneous Cosmologies and the Maupertuis-Jacobi Principle*, Physical Review D 75, 2007.
- [48] E. GUNZIG *Superinflation, Quintessence, and Nonsingular Cosmologies*, Physical Review D63, 067301, 2001.
- [49] VALERIO FARAONI *Inflation and Quintessence with Nonminimal Coupling*, Physical Review D62, 023504, 2000.

- [50] L.R. ABRAMO, L. BRENING, E. GUNZIG E A. SAA *Singularities of Gravity in the Presence of Nonminimally Coupled Scalar Fields*, Physical Review D67, 027301, 2003.
- [51] ALBERTO SAA, *On the Viability of Local Criterie for Chaos*, Annals Physics, 314, 508, 2004.
- [52] VALERIO FARAONI, *Phase Space Geometry in Scalar-Tensor Theories*, Annals Physics, 317, 366, 2005.
- [53] CARMEN CHICONE, *Ordinary Differential Equations with Applications*, 1<sup>a</sup> edição. Springer Verlag.

# Apêndice A

## Demonstração do Teorema de Hartman-Gröbman

Como dissemos no corpo do trabalho, este teorema garante que o estudo dos pontos fixos para o desenvolvimento do trabalho é pertinente<sup>1</sup>.

### A.1 O Teorema

Nesta seção vamos enunciá-lo com clareza para que, no decorrer da demonstração, sejam explícitas as ferramentas e hipóteses para sua prova.

**Teorema A.1.1 (Hartman-Gröbman)** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo  $\mathcal{C}^1$  com  $f(0) = 0$  um ponto fixo hiperbólico, com  $A = Df_0$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $0$  e um homeomorfismo  $h$  de  $U$  para alguma outra vizinhança de  $0$ , tal que  $A \circ h = h \circ f$ , para todo  $z$  suficientemente perto de  $0$ . Em outras palavras,  $f^n = h^{-1} \circ A^n \circ h$  perto de  $0$ , então existe uma composição tal que, uma função não linear perto de um ponto fixo é linear nesta vizinhança.*

---

<sup>1</sup> A demonstração apresentada aqui segue as linhas de [53].

## A.2 A Demonstração

Primeiramente vamos enunciar o seguinte lema:

**Lema A.2.1** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Suponha que  $L : E \rightarrow E$  é linear com  $\|L\| < a < 1$  e  $G : E \rightarrow E$  é um isomorfismo que satisfaz  $\|G^{-1}\| \leq a < 1$ . Então, para  $I =$  identidade,  $I + L$  e  $I + G$  são isomorfismos que satisfazem  $\|(I + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$  e  $\|(I + G)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$ .*

**Prova do lema:** Seja  $y \in E$  e tome  $x \in E$  de modo que  $(I + L)x = y$ , ou seja,  $x = y - Lx$ . A função  $x \mapsto \mu(x) = y - Lx$  é uma contração, pois,

$$\begin{aligned} \|\mu(x_1) - \mu(x_2)\| &= \|y - Lx_1 - y + Lx_2\| \\ &= \|L(x_1 - x_2)\| \\ &\leq \|L\| \cdot \|x_1 - x_2\| \\ &< a\|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Uma contração num espaço de Banach tem ponto fixo  $x$ . Logo, se  $\|y\| = 1$ , temos que  $\|x\| \leq \|y\| + \|Lx\| \leq 1 + a\|x\|$ , logo  $\|x\| \leq 1 \frac{1}{1-a}$  e também  $(I + L)^{-1}y = x$ . Logo,

$$\|(I + L)^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1} \|(I + L)^{-1}y\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

Ver a parte de  $G$  ■

Seja  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ , onde  $E^s$  e  $E^u$  são respectivamente auto-espacos estáveis e instáveis de uma matriz hiperbólica  $A$ . Tome  $A^s = A|_{E^s}$  e  $A^u = A|_{E^u}$  com uma adequada escolha de norma de forma a podermos assumir que  $\|A^s\| \leq a < 1$  e  $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$ . Seja agora  $C_b^0(\mathbb{R}^n)$  o conjunto das funções contínuas limitadas de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  que formam um espaço de Banach. Então

$$C_b^0(\mathbb{R}^n) = C_b^0(E^s) \oplus C_b^0(E^u),$$

tal que  $w = w^s + w^u$ , onde  $w^s(z) \in E^s$  e  $w^u(z) \in E^u$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ . Em tempo, definamos  $w = \max(\|w^s\|, \|w^u\|)$ .

**Definição A.2.2** *Uma função  $L : E \rightarrow E$  é lipschitziana se existe  $k < \infty$  tal que*

$$\|Lz_1 - Lz_2\| \leq k\|z_1 - z_2\| \forall z_1, z_2 \in E.$$

**Teorema A.2.3** *Se  $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$  com constante de Lipschitz  $k < \epsilon = (1 - a)/\|A^{-1}\|$  para alguma matriz hiperbólica  $A$ , então  $A + \phi_1$  e  $A + \phi_2$  são conjugadas sobre  $\mathbb{R}^n$ .*

**Prova:** Devemos encontrar um difeomorfismo  $h$  tal que  $h \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ h$  de modo que  $h = I + w$  para algum  $w \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ . Desta forma, teremos:

$$\begin{aligned}
 h \circ (A + \phi_1) &= (A + \phi_2) \circ h \\
 \Leftrightarrow (I + w) \circ (A + \phi_1) &= (A + \phi_2) \circ (I + w) \\
 \Leftrightarrow A + \phi_1 + w \circ (A + \phi_1) &= A + A \circ w + \phi_2 \circ (I + w) \\
 \Leftrightarrow \phi_1 - \phi_2 \circ (I + w) &= A \circ w - w \circ (A + \phi_1)
 \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

Desta expressão tiramos  $L(w) = Aw - w(A + \phi_1)$ , que podemos reescrever

$$L(w) = A(w - A^{-1}w(A + \phi_1)).$$

Devemos, agora mostrar que  $A^{-1}L$  é inversível e portanto teremos que  $L$  é inversível. De posse deste resultado teremos:

$$Pw := L^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + w)) = w. \tag{A.2.2}$$

Para  $w = w^s + w^u$ . Considerando a restrição de  $A^{-1}L$  a  $C_b^0(E^s(\mathbb{R}^n))$  que equivale à restrição de  $I - G$ , onde

$$\begin{aligned}
 G : C_b^0(E^s(\mathbb{R}^n)) &\rightarrow C_b^0(E^s(\mathbb{R}^n)) \\
 w^s &\mapsto A^{-1}w^s(A + \phi_1).
 \end{aligned} \tag{A.2.3}$$

Vamos mostrar que  $G$  é inversível. Para tanto, vamos verificar que

$$z \mapsto (A + \phi_1)(z) \tag{A.2.4}$$

é um homeomorfismo. Se

$$(A + \phi_1)z_1 = (A + \phi_1)z_2,$$

então

$$\epsilon \|z_1 - z_2\| \geq \|\phi_1(z_1) - \phi_2(z_2)\| = \|Az_1 - Az_2\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|z_1 - z_2\|,$$

logo  $\epsilon < \|A^{-1}\|^{-1}$ . Portanto,  $z_1 = z_2$  e com isto (A.2.4) é injetiva. Encontrar  $z$  tal que  $(A + \phi_1)(z) = w$  é equivalente a encontrar um ponto fixo de

$$z \mapsto A^{-1}w - A^{-1}\phi_1(z), \quad (\text{A.2.5})$$

como  $\|A^{-1}\|\epsilon < 1$ , (A.2.5) é uma contração e, portanto, tem um ponto fixo. Logo, (A.2.4) é sobrejetiva. De volta à função (A.2.3) temos que ela é inversível e sua inversa é dada por:

$$G^{-1} : w^s \mapsto A^{-1}w^s(A + \phi_1)^{-1} \quad (\text{A.2.6})$$

Por (A.2.1), temos que

$$w^s \mapsto A^{-1}L(w^s) = (I - G)(w^s) \quad (\text{A.2.7})$$

é inversível e

$$\|(I - G)^{-1}\| < \frac{1}{1 - a} \quad (\text{A.2.8})$$

Tomando  $w^s$  tal que  $\sup_x |w^s(x)| = 1$ , teremos que  $\|G^{-1}\|$ , então

$$|Aw^s(A + \phi_1)^{-1}(y)| \leq |Aw^s(\bar{y})| \leq a|w^s(\bar{y})| \leq a, \quad (\text{A.2.9})$$

pois  $\|A|E^s\| \leq a$ . Logo

$$L = A \circ (I - G) \quad (\text{A.2.10})$$

$$L^{-1} = (I - G)^{-1} \circ A^{-1}, \quad (\text{A.2.11})$$

obtendo assim,

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - a}. \quad (\text{A.2.12})$$

onde  $\|L^{-1}\|$  é restrito a  $C_b^0(E^s(\mathbb{R}^n))$

Agora consideremos  $A^{-1}L$  restrito a  $C_b^0(E^u(\mathbb{R}^n))E^u$  dada pela função

$$w^u \mapsto w^u - A^{-1}w^u(A + \phi_1). \quad (\text{A.2.13})$$

A expressão acima decorre da primeira parte do lema (A.2.1) e tem norma menor ou igual a  $\frac{1}{1 - a}$ . Novamente definindo

$$Pw = L^{-1}(\phi_1 - \phi_2(I + w)), \quad (\text{A.2.14})$$

desta forma teremos,

$$\|Pu_1 - Pu_2\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|\phi_2(I + u_1) - \phi_2(I + u_2)\| \quad (\text{A.2.15})$$

$$\leq \|L^{-1}\| \cdot k \cdot \|u_1 - u_2\|. \quad (\text{A.2.16})$$

Mas,  $\|L^{-1}\| \cdot k < \|L^{-1}\| \cdot \epsilon \leq 1$ , então  $P$  é uma contração e tem um ponto fixo  $u$  e portanto  $h$  por causa da unicidade de pontos fixos.

Vamos agora mostrar que  $h = I + w$  é um homeomorfismo. Existem  $w, v$  tais que

$$(I + w) \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2)(I + w) \quad (\text{A.2.17})$$

$$(I + v) \circ (A + \phi_2) = (A + \phi_1)(I + v). \quad (\text{A.2.18})$$

Portanto obtemos

$$(I + w) \circ (I + v) \circ (A + \phi_2) = (I + w) \circ (A + \phi_1)(I + v) = (A + \phi_2) \circ (I + w) \circ (I + v). \quad (\text{A.2.19})$$

Pela unicidade e simetria de  $u$  respectivamente obtemos que

$$(I + w) \circ (I + v) = I \quad (\text{A.2.20})$$

$$(I + v) \circ (I + w) = I. \quad (\text{A.2.21})$$

Logo  $h$  é um homeomorfismo. ■

Agora vamos efetivamente demonstrar o teorema de Hartman-Gröbman. Fazendo  $f(z) = Az + \psi(z)$ , onde  $A = Df_0$ ,  $\psi(0) = 0$  e  $D\psi_0 = 0$ . Assuma também que  $D\psi_x$  é pequeno para  $x$  perto de 0. Seja

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } |t| \geq 1 \\ 1, & \text{para } |t| \leq 1/2 \end{cases}.$$

Tome  $\alpha$  como sendo uma função monótona e suave nos intervalos  $[-1, -1/2]$  e  $[1/2, 1]$  tal que exista  $k > 1$ , com  $|\alpha'(t)| \leq k$ , p° todo  $t$ . Para  $e > 0$  fixo, escreva  $g(z) = Az + \alpha(\|z\|/e)\psi(z)$ . Se  $\|z\| \leq e/2$  então  $g(z) = f(z)$ , mas se  $\|z\| \geq e$  então  $g(z) = Az$ . Como  $A$  é conjugado a  $g$  logo ele “deforma” continuamente com  $f$  quando  $e \rightarrow \infty$ .

Tome  $\epsilon > 0$  tal que  $\|D\psi_x\| \leq \epsilon/2k$  sempre que  $\|x\| \leq \epsilon$ . Escreva  $\phi(z) = \alpha(\|z\|/e)\psi(z)$ .

Então

$$\begin{aligned} \|\phi(z_1) - \phi(z_2)\| &\leq \|(\alpha(\|z_1\|/e) - \alpha(\|z_2\|/e))\psi(z_1)\| + \\ &+ \|(\alpha(\|z_2\|/e) - \alpha(\|z_1\|/e))\psi(z_2)\| \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

$$\begin{aligned} &\leq k\|\psi(z_1)\| \cdot |(\|z_1\| - \|z_2\|)/e| + \|D\psi_x\| \cdot \|z_1 - z_2\| \\ &\leq k(\epsilon/2k)\|z_1\| \cdot \|z_1 - z_2\|/e + (\epsilon/2k)\|z_1 - z_2\| \\ &\leq \epsilon\|z_1 - z_2\|, \end{aligned} \quad (\text{A.2.23})$$

onde a segunda desigualdade segue do Teorema do Valor Médio com  $x$  um ponto do segmento  $z_1z_2$ , assumindo que estes dois pontos pertencem a bola aberta  $B_e(0)$ . Se somente  $z_1 \in B_e(0)$  então a segunda parcela de (A.2.22) se anula e segue o resultado. Caso nenhum dos pontos pertençam à bola então  $\phi(z_i) = 0$  para  $i = 1, 2$ . O resultado segue do teorema (A.2.3). ■