

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

**Spinors e Twistors  
no Modelo Paravetorial  
do Espaço-tempo:  
Uma Formulação via  
Álgebras de Clifford**

*Autor:* ROLDÃO DA ROCHA JR.  
*Orientador:* PROF. DR. JAYME VAZ JR.

Campinas, 06 de abril de 2001.



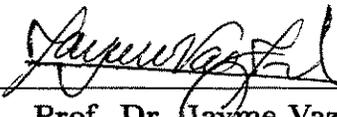
00115792

Financiamento FAPESP, processo 98/13510-5

**Spinors e Twistors  
no Modelo Paravetorial do Espaço-tempo:  
Uma Formulação via Álgebras de Clifford**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Roldão da Rocha Jr.** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06 de abril de 2001.

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.**  
**Orientador**

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
2. Prof. Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzun.
3. Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Rocha Jr., Roldão da

R582s Spinors e twistors no modelo paravetorial: uma formulação via álgebras de Clifford / Roldão da Rocha Jr. -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Jayme Vaz Jr.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Spinor, Teoria de. 2. Twistor, Teoria de. 3. Clifford, Álgebra de. 4. Mecânica quântica. 5. Lie, Álgebra de. I. Vaz Jr., Jayme. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 06 de abril de 2001 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



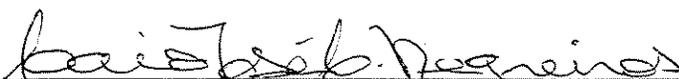
---

**Prof (a). Dr (a). JAYME VAZ JÚNIOR**



---

**Prof (a). Dr (a). GUILLERMO GERARDO CABRERA OYARZÚN**



---

**Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS**

A Deus, que tudo sabe, tudo pode e tudo é

Obrigado pela vida e por nos deixar existir, mesmo que provisoriamente, neste maravilhoso universo cheio de belezas e mais ainda de mistérios. Por enquanto, perdoe-nos a petulância e continue nos permitindo tentar desvendá-los. Admiro o tamanho do seu coração e sinto que ele é maior que o universo que você criou.

A Meus Pais

Por serem a causa direta da minha vida. Sou, graças a vocês. Agradeço pela minha educação, por todo o apoio, carinho, amor, dedicação e incentivo.

*Ainda que venças mil batalhas a maior vitória é sobre si mesmo.*

Sidarta Gautama, O Buda, séc.VI a. C.

# Agradecimentos

---

♡ Primeiramente agradeço à Adriana (te amo muito!), cujo amor, compreensão, alegria, incentivo, carinho, apoio, confiança, dedicação e espírito forte e feliz me serviram de motivação ao longo desses anos, sem os quais penso que seria (mais) difícil estudar física e matemática. A meu *Amorzinho* ♡♡ pela enorme paciência e união, pelos ombros que sempre se molham com minhas lágrimas e por todos os momentos compartilhados que, por serem assim, são vencidos em conjunto. ♡

Seria impossível listar todos os que merecem ser citados, portanto começo com um agradecimento geral a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão desta dissertação.

Devo agradecer ao meu orientador, professor Jayme, pela motivação, pela sua paciência infinita ao ensinar e pelo humor inabalável.

A meus amigos, não há palavras suficientes capazes de agradecer a vocês tudo que fizeram. Sem vocês não sou nada!

A minhas irmãs Cris e Ana e a todos os outros irmãos, que me ajudaram e me apoiaram de alguma maneira para que eu estivesse aqui, hoje.

Agradeço à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte financeiro, que viabilizou este projeto.

A todos os professores que tive desde que me entendo por gente: obrigado aos verdadeiros Mestres, que me ensinaram como fazer; a uma outra parte, que algo me ensinou. E ao restante, que me ensinou como não se deve fazer.

Agradeço ao Ricardo Mosna pelas discussões e sugestões concernentes a esta dissertação.

Ao Mestre Sim e a todos os que, como ele, buscam não só viver em um mundo melhor, mas procuram construí-lo diariamente.

## Resumo

Nesta dissertação o formalismo dos spinors e twistors de Penrose são formulados em termos das álgebras de Clifford. Para tal utilizamos o modelo paravetorial do espaço-tempo, onde um vetor do espaço-tempo é escrito em termos da soma de escalares e vetores da álgebra de Clifford do espaço euclideo tridimensional. Com isso construímos um formalismo que utiliza a menor estrutura algébrica capaz de descrever teorias físicas relativísticas, como as teorias eletromagnética e de Dirac. Os spinors são definidos algebricamente como elementos de um ideal lateral minimal da álgebra de Clifford. Utilizamos o teorema de periodicidade  $(1,1)$  das álgebras de Clifford para descrever de maneira linear, em termos da complexificação da álgebra de Clifford do espaço-tempo, as transformações conformes desse espaço-tempo. Os twistors aparecem como uma classe particular de spinors algébricos. Consideramos ainda algumas possíveis generalizações.

## Abstract

In this dissertation the Penrose theory of spinors and twistors is formulated from the point of view of the Clifford algebras. We use the paravector model of spacetime, where a spacetime vector is written as a sum of scalars and vectors of the Clifford algebra associated with the three-dimensional euclidean space. From this we construct a formalism that uses the least algebraic structure that describes relativistic physical theories, such as the electromagnetic and the Dirac ones. Spinors are defined algebraically as elements of a minimal lateral ideal of a Clifford algebra. We use the modulo  $(1,1)$  periodicity theorem of Clifford algebras to describe the conformal transformations as linear transformations, using the method of complexification of the spacetime Clifford algebra. Twistors are defined as a particular class of algebraic spinors. We consider some possible generalizations.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A teoria de Penrose: de spinors a twistors</b>	<b>5</b>
2.1	A geometria dos spinors . . . . .	5
2.1.1	A geometria das operações spinoriais . . . . .	11
2.1.2	A métrica e os vetores do espaço-tempo via vetores-spin . . . . .	13
2.1.3	Spinors de Weyl . . . . .	15
2.1.4	Spinors de Dirac . . . . .	17
2.1.5	Bandeiras Nulas . . . . .	18
2.2	Twistors . . . . .	20
2.2.1	Aspectos geométricos da álgebra dos twistors e congruências de Robinson . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Álgebras de Clifford</b>	<b>26</b>
3.1	Algumas definições úteis . . . . .	26
3.1.1	Produto tensorial . . . . .	27
3.2	Álgebra exterior . . . . .	27
3.2.1	Operações dentro da álgebra exterior . . . . .	29
3.3	A álgebra de Grassmann . . . . .	30
3.3.1	Isomorfismo de Hodge . . . . .	30
3.4	Ideais algébricos e idempotentes . . . . .	31
3.4.1	Ideais . . . . .	31
3.4.2	Idempotentes . . . . .	31
3.5	A álgebra exterior como quociente da álgebra tensorial . . . . .	32
3.6	Álgebras de Clifford (I) . . . . .	33
3.7	Álgebras de Clifford (II) . . . . .	34
3.8	Álgebras de Clifford (III) . . . . .	35
3.9	Classificação e representação das álgebras de Clifford . . . . .	37
3.9.1	Teoremas sobre a estrutura das álgebras de Clifford . . . . .	37
3.9.2	Representações . . . . .	41
3.9.3	A decomposição algébrica de Wedderburn . . . . .	41
3.9.4	A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,1}$ . . . . .	43
3.9.5	A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{1,0}$ . . . . .	43
3.9.6	A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,2}$ . . . . .	43
3.9.7	O isomorfismo $\mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1}$ . . . . .	44
3.9.8	Classificação das álgebras de Clifford. . . . .	44
3.10	Os grupos associados às álgebras de Clifford . . . . .	45

3.10.1	Transformações ortogonais e o teorema de Cartan-Dieudonné . . . .	45
3.10.2	O grupo de Clifford-Lipschitz . . . . .	47
3.10.3	Representação adjunta . . . . .	47
3.10.4	Representação adjunta contorcida . . . . .	49
3.11	Os grupos Pin e Spin . . . . .	50
3.11.1	O grupo Pin . . . . .	51
3.11.2	O grupo Spin . . . . .	51
3.11.3	Os grupos Pin e Spin reduzidos . . . . .	51
3.12	A álgebra de Lie dos grupos associados . . . . .	52
3.13	As três definições de spinors . . . . .	54
3.13.1	Spinors algébricos . . . . .	55
3.13.2	Spinors clássicos . . . . .	56
3.13.3	Spinors operatoriais . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Algumas álgebras de Clifford importantes</b>	<b>59</b>
4.1	A álgebra de Pauli $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . . . . .	59
4.1.1	O produto vetorial . . . . .	60
4.1.2	Representação de $\mathcal{Cl}_{3,0}$ : as matrizes de Pauli . . . . .	61
4.1.3	O operador $\nabla$ em $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . . . . .	62
4.1.4	Quatérnions . . . . .	63
4.1.5	Rotações espaciais . . . . .	64
4.1.6	Spinors de Pauli . . . . .	65
4.2	A álgebra do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}$ . . . . .	65
4.3	A álgebra de Dirac $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . . . . .	67
4.3.1	Representação padrão . . . . .	68
4.3.2	Representação de Weyl . . . . .	69
4.4	A álgebra $\mathcal{Cl}_{2,4}$ . . . . .	71
4.5	O isomorfismo $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . . . . .	72
4.5.1	A identificação $\gamma_\nu = E_\nu E_4$ . . . . .	72
4.5.2	A identificação $\gamma_\mu = iE_\mu$ . . . . .	74
4.5.3	Uma identificação útil para a definição dos twistors . . . . .	77
<b>5</b>	<b>O Modelo Paravetorial do Espaço-tempo</b>	<b>79</b>
5.1	A $\mathbb{C}$ -estrutura de $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . . . . .	79
5.2	Automorfismos paravetoriais . . . . .	80
5.3	Transformações de Lorentz . . . . .	81
5.3.1	Exemplo: velocidade própria . . . . .	84
5.4	A teoria de Dirac no modelo paravetorial de $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . . . . .	85
5.5	Eletromagnetismo no modelo paravetorial . . . . .	88
5.5.1	As equações de Maxwell em $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . . . . .	88
5.5.2	A força de Lorentz . . . . .	90
5.5.3	Soluções da expressão spinorial para a força de Lorentz . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Spinors e espaço-tempo</b>	<b>93</b>
6.1	Formulação algébrica . . . . .	93
6.1.1	Spinors de Weyl com o uso de $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . . . . .	93
6.1.2	Transformações spinoriais . . . . .	97
6.1.3	Spinors de Dirac . . . . .	98

6.1.4	Velocidade, paravetor spin e paravetor spin . . . . .	100
6.1.5	Vetores do espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{M}$ construídos como parave- tores da álgebra de Pauli a partir de spinors de Weyl em $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . . . . .	100
6.1.6	A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Transformações conformes e twistors</b>	<b>105</b>
7.1	Transformações de Möbius no plano . . . . .	105
7.2	A compactificação conforme . . . . .	106
7.3	Os paravetores de $\mathcal{Cl}_{4,1}$ na álgebra de Pauli . . . . .	107
7.4	Transformações de Möbius no espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathbb{M}$ . . . . .	109
7.4.1	Transformações conformes . . . . .	110
7.5	A álgebra de Lie do grupo conforme . . . . .	112
7.6	Twistors sob o ponto de vista multivetorial . . . . .	113
7.6.1	Representação do grupo de Poincaré na álgebra de Dirac . . . . .	116
7.6.2	Screws e mexors . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>120</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>122</b>

*Se as pessoas soubessem o quão duro eu tive que trabalhar para obter minha obra,  
ela definitivamente não pareceria tão grandiosa assim.*

Michelângelo

*Ando devagar porque já tive pressa, levo este sorriso porque já chorei demais. Hoje me  
sinto mais forte, mais feliz (quem sabe?)*

*Só levo a certeza de que muito pouco sei, nada sei ...*

*Sinto que seguir a vida seja simplesmente compreender a marcha, ir tocando em frente.*

*Como um velho boiadeiro levando a boiada*

*Vou tocando a vida pela longa estrada, eu vou. Estrada eu sou...*

Renato Teixeira

As álgebras de Clifford têm sua origem em 1878 [Cl78], resultado da unificação dos sistemas propostos por Hamilton [Ha53] e Grassmann [Ga44]. W. Clifford introduziu a estrutura quaterniônica (e seus produtos) dentro do formalismo da álgebra de Grassmann e obteve, dessa maneira, um sistema adaptado à descrição da geometria ortogonal de um espaço arbitrário de dimensão finita.

O formalismo das álgebras de Clifford tem importantes aplicações em física teórica, como na mecânica quântica relativística [He66][He97][Da98][Kr91], relatividade especial e geral [DL93], eletrodinâmica [Ba99], mecânica clássica [He90][Pa93], teorias de gauge [Ke91][CF93][Bo93], teoria quântica de campos [KV89][CF89] e cristalografia [AL96], além de outras. O formalismo da segunda quantização em teoria quântica de campos é formulado diretamente a partir das álgebras de Clifford<sup>1</sup>.

O objetivo dessa dissertação de mestrado é estudar as álgebras de Clifford e apresentar algumas de suas aplicações, dentre elas formular a teoria dos spinors e twistors de Penrose [Pe84] sob esse novo ponto de vista.

A teoria dos spinors foi desenvolvida de modo praticamente independente por físicos e matemáticos. De um lado, E. Cartan em 1913 escreveu um tratado sobre a teoria dos spinors [Ca66] após tê-los descoberto originalmente como entidades que carregam a representação dos grupos de rotações em um espaço de dimensão finita arbitrária, a partir de sua investigação sobre as representações lineares de grupos simples. Do outro lado os spinors foram introduzidos na física teórica com o intuito de se descrever a função de onda de sistemas quânticos com spin. Primeiramente, W. Pauli, em 1926, descreveu a função de onda de um elétron com spin por um spinor de duas componentes em sua teoria não-relativística. Mais tarde, em 1928, P. A. M. Dirac utilizou um spinor de quatro componentes para a descrição de sua teoria relativística. Com a crescente gama de

<sup>1</sup>Estamos nos referindo à álgebra de Clifford como sinônimo de uma álgebra de Clifford ortogonal, visto que existem as álgebras de Clifford simpléticas (que descrevem campos bosônicos) [Cr90].

aplicações dos spinors em teorias físicas, a teoria dos spinors foi formalizada por Infeld e van der Waerden, entre 1929 e 1933, mas seu formalismo não é simples de se aprender, mesmo atualmente. Os spinors são entidades fundamentais na física para se descrever a matéria, já que os léptons e os quarks são férmions de spin  $1/2$ . Do ponto de vista algébrico, os spinors são elementos de um ideal minimal lateral de uma álgebra de Clifford [Cw89][ER89], definição essa devida a C. Chevalley [Ch54].

A teoria dos twistors tem bastante interesse matemático [Lw84]. Originalmente tal teoria é baseada na generalização do conceito de spinors, a partir da construção de um espaço (espaço dos twistors), de onde a estrutura do espaço-tempo emerge de maneira secundária. Dessa maneira os twistors são considerados [Pe84] como entidades mais primitivas que os pontos do espaço-tempo e são usados diretamente na construção de alguns conceitos físicos, tais como *momentum*, momento angular, helicidade e campos associados a partículas sem massa [Be93][Be96]. Dada a dificuldade atual de se construir uma teoria de gravidade quântica com base na estrutura contínua do espaço-tempo, algumas alternativas se baseiam na discretização de sua estrutura [Co94]. Uma das motivações da formulação da teoria dos twistors é estudar a teoria das redes de spin (*spin networks*) sob outro aspecto, de modo a promover a discretização da estrutura do espaço-tempo [Pe87]. É no espaço dos twistors que há indícios de que a quantização da gravidade surja de maneira mais natural. Ainda nesse sentido, a formulação de uma teoria de gravidade quântica com base na geometria não-comutativa [Wi86b] e no formalismo dos twistors é prevista estar concluída já na próxima década [Sm00]. O espaço dos twistors também é usado para descrever os *instantons* [NZ83]. Na tentativa de uma formulação da gravidade quântica e de outras teorias, o formalismo dos twistors via álgebras de Clifford tem tido uma abordagem crescente [BH85][AO82][AS85][Cw91] nas duas últimas décadas. Outra aplicação possível da teoria dos twistors de Penrose é a supersimetria [Ho95][Wc98]. Juntamente com as álgebras de Clifford, o formalismo dos twistors tem-se mostrado apropriado para a descrição de teorias supersimétricas [LD92][Bk91a][Bk91b][Cs86][Wi86a]. Como caso particular, o formalismo clássico de Penrose descreve uma partícula de spin  $3/2$ , que, de acordo com a teoria superssimétrica é a superparceira do gráviton e é denominada *gravitino*. O formalismo dos twistors é atualmente usado no estudo da dinâmica relativística de partículas elementares [Be00] e no estudo de estados confinados [KA96].

Não temos o intuito direto de formular quaisquer das teorias físicas que podem ser formuladas a partir dos spinors e twistors. Nosso objetivo é descrever o spinor e o twistor como objetos matemáticos, do ponto de vista das álgebras de Clifford. Dentro desse formalismo, o twistor é descrito como um *spinor algébrico* (um elemento de um ideal à esquerda minimal de uma álgebra de Clifford), utilizando-se a representação do grupo conforme através da estrutura de periodicidade das álgebras de Clifford. De modo equivalente, o twistor descrito dessa maneira é um elemento do espaço de representação do grupo  $\text{Spin}_+(2,4)$ , que é recobrimento duplo do grupo<sup>2</sup>  $\text{SO}_+(2,4)$ .

O grupo  $\text{SO}_+(2,4)$ , que descreve rotações próprias ortócronas em  $\mathbb{R}^{2,4}$ , é o grupo de invariância dos invariantes bilineares [Lo96] da teoria de Dirac do elétron e é também o recobrimento duplo do grupo<sup>3</sup>  $\text{SConf}_+(1,3)$ , que é o maior grupo que preserva as equações de Maxwell, isto é, deixa invariante o cone de luz do espaço-tempo. O grupo  $\text{SO}_+(2,4)$  tem

<sup>2</sup>O recobrimento duplo do grupo  $\text{SO}_+(2,4)$  é o grupo  $\text{Spin}_+(2,4)$ . O uso da notação  $\text{Spin}_+(2,4)$  se deve ao uso dos paravetores (elementos do espaço  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$ ) na descrição de vetores do espaço quadrático  $\mathbb{R}^{2,4}$ , como ficará claro oportunamente.

<sup>3</sup>Esse grupo é a componente conexa com a identidade que preserva a estrutura temporal do cone de luz do grupo conforme  $\text{Conf}(1,3)$  do espaço-tempo. O estudo das representações projetivas do grupo das transformações conformes está ligado diretamente à teoria de supercordas.

como subgrupos o grupo de de Sitter restrito  $SO_+(4,1)$ , o grupo de anti-de Sitter restrito  $SO_+(2,3)$  e o grupo de Poincaré  $SO_+(1,3) \times T^4$ , que é descrito como o grupo próprio de Lorentz  $SO_+(1,3)$  acompanhado das translações espaço-temporais.

O twistor é também escrito [Ke97b] como a soma de um vetor nulo (tipo-luz) com o dual de um vetor  $\mathbf{x}$  do espaço-tempo multiplicado pelo mesmo vetor nulo. Visto dessa maneira, o twistor descreve a estrutura de um vetor  $\mathbf{x}$  que serve como “suporte” para um vetor tipo-luz [BH85][Pe66][Pe86]. Podemos generalizar o conceito do twistor, definindo novas entidades: os *screws* e os *mexors*. Os screws descrevem, de maneira semelhante, um vetor que “suporta” outro vetor, mas sem a restrição de que um dos dois vetores tenha que ser nulo. Obtemos tal generalização no cap.(7), sugerindo uma possível interpretação útil, importante para a descrição de movimentos em robótica, de entidades que simulam braços conjugados (articulações homocinéticas). Essa nova interpretação, embora tenha um certo desenvolvimento teórico, ainda não está sendo explorada do ponto de vista computacional. Os mecanismos relacionados ao suporte de um vetor por outro vetor estão sendo bastante estudados [Gu97][Ku99] por estarem relacionados ao estudo de movimentos ligados ao olho humano [He94a] e neurogeometria [PI80][TC90][He94b]. Já os mexors são entidades geométricas que descrevem um elétron com spin e suas interações.

Organizamos a dissertação da seguinte forma. No cap.(2) introduzimos a teoria clássica dos spinors e twistors segundo Penrose. Estabelecemos a relação entre as coordenadas (projetivas) de um spinor de duas componentes e a esfera de Riemann, através da projeção estereográfica. Descrevemos as transformações de Lorentz e sua relação com o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , que é o grupo das transformações lineares  $2 \times 2$  complexas com determinante unitário. Provamos que uma rotação espacial pode ser feita a partir da ação de matrizes spinoriais que são funções dos parâmetros de Cayley-Klein, utilizados em mecânica clássica [Go81]. Descrevemos vetores no espaço-tempo a partir de produtos de spinors de Weyl e descrevemos as entidades geométricas [Pe99] (pólo, bandeira, semiplano nulo) e as grandezas físicas (momentum, momento angular, helicidade, etc.) da teoria clássica de Penrose a partir dos 2-spinors. Descrevemos os twistors, as congruências de Robinson e as relações de incidência. Essas últimas são fundamentais no que se refere à descrição dos pontos no espaço-tempo como um conceito secundário, a partir da intersecção entre dois twistors.

No cap.(3) introduzimos a álgebra tensorial e subseqüentemente a álgebra exterior, seus (anti)automorfismos e a álgebra de Grassmann. As álgebras de Clifford são introduzidas de três maneiras distintas e são obtidas suas representações matriciais e sua classificação, com base no *teorema da periodicidade*. Introduzimos os grupos clássicos ortogonais, seus respectivos recobrimentos duplos (grupos Pin e Spin) e, com relação a esses últimos, damos exemplos particulares de suas álgebras de Lie. Damos as três definições de spinors, a saber, *clássica*, *algébrica* e *operatorial*, e discutimos a relação entre elas.

No cap.(4) tratamos de alguns casos particulares de álgebras de Clifford, tais como a álgebra de Pauli, a álgebra do espaço-tempo, a álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$  e  $\mathcal{Cl}_{2,4}$ . Introduzimos em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  o produto vetorial, os quatérnions, o operador nabla, e mostramos como esse último generaliza, dentro de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , as operações divergente, gradiente e rotacional. Construimos explicitamente as representações da álgebra de Pauli em termos das matrizes de Pauli e as representações padrão e de Weyl (chiral) da álgebra de Dirac. Além disso escrevemos explicitamente os spinors de Pauli como elementos de um ideal à esquerda de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  e vemos a correspondência entre essa formulação e o spinor de Pauli dentro da mecânica quântica.

No cap.(5) introduzimos os paravetores e construímos o modelo paravetorial do espaço-tempo. Formulamos as transformações de Lorentz e o eletromagnetismo utilizando somente a álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Escrevemos as equações de Maxwell de forma compacta, em uma única equação, utilizando o operador de Dirac (também chamado, no contexto paravetorial de *operador de Dirac-Cauchy-Fueter* [Gu97]) e construímos uma solução das mesmas no vácuo. Expressamos a força de Lorentz utilizando spinors e resolvemos tal equação do ponto de vista spinorial. São analisados alguns casos particulares da equação que expressa a força de Lorentz: para o caso em que o campo elétrico é nulo e o campo magnético é constante, o elétron descreve uma trajetória helicoidal (movimento *cyclotron*); para o caso em que o campo magnético é nulo e o campo elétrico é constante, o elétron descreve um movimento hiperbólico. Com respeito à teoria de Dirac, escrevemos a *equação de Dirac-Hestenes* utilizando elementos de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  para descrever a função de onda, que usualmente é descrita como um elemento do ideal  $(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f$  ( $f$  é um idempotente primitivo da álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ ), ou, de modo equivalente, como um vetor coluna do espaço  $\mathbb{C}^4$ . Devemos enfatizar que usamos o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ , que relaciona elementos da álgebra de Pauli às matrizes  $2 \times 2$  complexas. Isso não entra em contradição com a impossibilidade de se utilizar matrizes  $2 \times 2$  para a descrição do elétron relativisticamente, pois na teoria não-relativística a função de onda é representada por um vetor complexo bidimensional, com 4 parâmetros reais, e as matrizes somente agem pela esquerda. Na formulação apresentada no cap.(5), a função de onda é representada por uma matriz  $2 \times 2$  complexa, com 8 parâmetros reais, no qual a ação das matrizes é feita tanto pela direita quanto pela esquerda. Resolvemos a equação de Dirac na ausência de campos externos, chegando às quatro soluções de ondas planas.

No cap.(6) formulamos a teoria dos spinors de Weyl, incluindo as métricas spinoriais, a partir da álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , e também descrevemos o spinor de Dirac e as entidades geométricas e físicas da teoria de Penrose a partir desse formalismo. Procuramos enfatizar e comparar esse formalismo com o formalismo clássico, apresentado no cap.(2). Escrevemos a equação de Dirac na forma de duas equações que contêm spinors de Weyl, e posteriormente escrevêmo-las utilizando spinors de Pauli. Exemplificamos a construção dos spinors de Weyl na álgebra  $\mathcal{Cl}_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ , que é a soma de dois anéis quaterniônicos e vemos que essa álgebra de assinatura oposta não é tão natural quanto a álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  para a descrição de vetores em  $\mathbb{R}^{1,3}$ , embora o seja para a descrição de vetores em  $\mathbb{R}^4$ .

Finalmente no cap.(7) formulamos as transformações conformes a partir da ação do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$ . Definimos o twistor no contexto das álgebras de Clifford, como um tipo particular (que tem uma dependência intrínseca na posição) da classe de spinors algébricos em  $\mathbb{R}^{4,1}$ , ou seja, o twistor é definido como elemento particular de um ideal à esquerda de  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . De modo equivalente, o twistor é um spinor clássico em  $\mathbb{R}^{2,4}$ , ou seja, um elemento do espaço de representação do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$ . Com isso, os twistors e as transformações conformes são formulados exclusivamente a partir da álgebra de Dirac. Com essa nova definição dos twistors, reconduzimos o novo formalismo aos formalismos de Keller [Ke97b] e de Penrose [Pe99]. Estudamos a representação chiral do grupo de Poincaré dentro da álgebra de Dirac. Generalizamos o conceito de twistors, definindo novas entidades: os *screws* e os *mexors*. Damos ainda uma interpretação dos screws e descrevemos uma possível aplicação. As interpretações relativas aos screws e aos mexors estão fora do escopo desta dissertação.

# A teoria de Penrose: de spinors a twistors 2

---

*It has not yet become obvious to me that there's no real problem.  
I cannot define the real problem,  
therefore I suspect there's no real problem, but I'm not sure there's no real problem.*

Richard P. Feynman

*Não tem dó no peito, não tem jeito  
Não tem ninguém que mereça, não tem coração que esqueça  
Não tem pé não tem cabeça, não dá pé, não é direito  
Não foi nada  
Eu não fiz nada disso  
e você fez um bicho de sete cabeças.*

Zé Ramalho e Geraldo Azevedo, *Bicho de sete cabeças*, 1979.

Nesta seção introduzimos a descrição dos vetores a partir de spinors no espaço-tempo de Minkowski ( $\mathbb{M}$ ). Obtemos uma relação entre as coordenadas de um vetor que descreve eventos em  $\mathbb{M}$  e as coordenadas da projeção estereográfica de uma seção do cone de luz no plano de Argand-Gauss. Tais coordenadas são componentes de um *vetor-spin*. Vemos que tais vetores se transformam pela ação do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  e expressamos um vetor arbitrário de  $\mathbb{M}$  a partir de spinors. Vemos também a relação entre o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  e as transformações de Lorentz, e como a geometria do espaço está relacionada à mecânica quântica. Descrevemos os quatro tipos de spinors de Weyl e formulamos os conceitos geométricos (pólo, bandeira, semiplano nulo, etc.) da teoria de Penrose. Finalmente descrevemos a teoria dos twistors no espaço-tempo de Minkowski.

## 2.1 A geometria dos spinors

Um vetor  $U \in \mathbb{M}$  pode ser escrito como

$$U = Te_0 + Xe_1 + Ye_2 + Ze_3, \quad (2.1)$$

onde  $(T, X, Y, Z)$  são as *coordenadas* do vetor  $U$  e  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  formam uma base ortonormal para  $\mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ . *Vetores nulos* são definidos como aqueles cujas coordenadas satisfazem  $T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ . As *direções nulas* são as semi-retas em  $\mathbb{M}$  geradas por vetores nulos, que passam pela origem  $\mathcal{O}$  de um referencial arbitrário em  $\mathbb{M}$ .

O espaço cujos elementos são as direções nulas que apontam para o futuro (passado) serão denotados<sup>1</sup>  $\mathcal{S}^+$  ( $\mathcal{S}^-$ ). Esses espaços podem ser representados em coordenadas

---

<sup>1</sup>Esse espaço abstrato é caracterizado como sendo uma esfera de Riemann.

$(T, X, Y, Z)$  pelas intersecções  $\mathbb{E}^+$  ( $\mathbb{E}^-$ ) do cone de luz do futuro (passado) com os hiperplanos  $T = 1$  ( $T = -1$ ). No espaço euclidiano,  $\mathbb{E}^\pm$  é uma esfera com equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (2.2)$$

onde reservamos a notação  $(x, y, z)$  para coordenadas em  $\mathbb{E}^\pm$  [Pe84].

Mais geralmente, a direção de qualquer vetor nulo  $U \in \mathbb{M}$  com origem em  $\mathcal{O}$ , a menos que tal vetor nulo se encontre no plano definido pela equação  $T = 0$ , pode ser representada por dois pontos, que é resultante da intersecção de  $U$  (que está sobre a casca do cone de luz) e os hiperplanos definidos pelas equações  $T = \pm 1$ . A direção de  $U$  que aponta para o futuro é representada pelo ponto  $(X/\|T\|, Y/\|T\|, Z/\|T\|)$ . O interior de  $\mathbb{E}^+$  ( $\mathbb{E}^-$ ) representa o conjunto das direções tipo-tempo que apontam para o futuro (passado). O exterior dessas esferas representam direções tipo-espaço.

Considerando  $\mathbb{E}^+$ , ao fazermos uma projeção estereográfica de tal esfera sobre o plano de Argand-Gauss, obtemos uma representação dos números complexos mais o ponto no infinito, que corresponde ao pólo norte de  $\mathbb{E}^+$ .

Podemos substituir as coordenadas  $x, y, z$  em  $\mathbb{E}^+$  por um número complexo  $\beta$ . Por semelhança de triângulos,

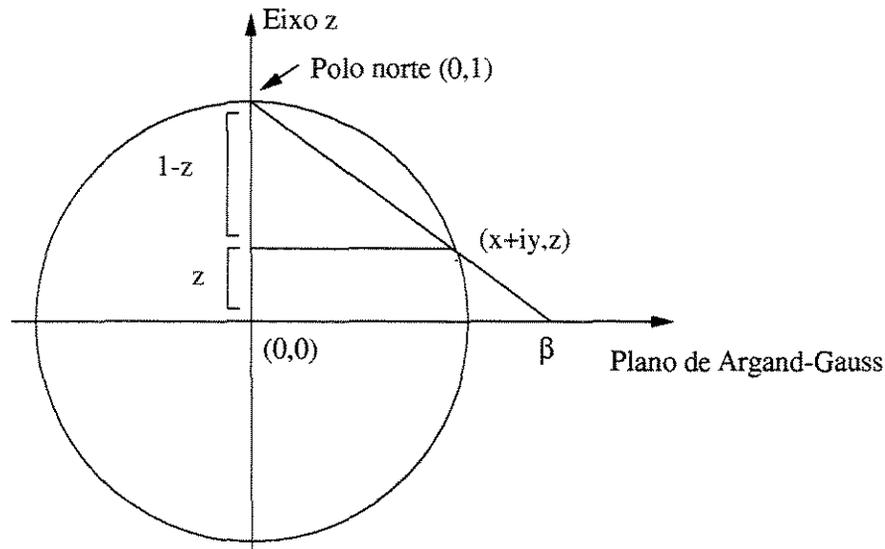


Figura 2.1: projeção estereográfica a partir do pólo norte no plano de Argand-Gauss.

temos a relação

$$\beta = \frac{x + iy}{1 - z}. \quad (2.3)$$

Apenas invertendo a relação anterior via  $\beta\bar{\beta} = \frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2}$ , obtemos

$$x = \frac{\beta + \bar{\beta}}{\beta\bar{\beta} + 1}, \quad y = \frac{\beta - \bar{\beta}}{i(\beta\bar{\beta} + 1)}, \quad z = \frac{\beta\bar{\beta} - 1}{\beta\bar{\beta} + 1}. \quad (2.4)$$

Podemos verificar a natureza conforme da projeção estereográfica diretamente, observando que o intervalo infinitesimal  $d\sigma^2$  sobre a esfera se relaciona ao intervalo  $d\beta d\bar{\beta}$  no plano de

Argand-Gauss por

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4d\beta d\bar{\beta}}{(\beta\bar{\beta} + 1)^2},$$

que segue diretamente da eq.(2.4).

**Observação:** Uma aplicação  $h : X \rightarrow Y$  é dita *conforme* se a diferencial  $dh(x)$  de  $h$  é da forma  $\rho(x)t$ , onde  $\rho(x) \in \mathbb{R}$  e  $t : X \rightarrow Y$  é um mapa ortogonal. Mais ainda,  $h$  preserva ângulos, isto é,

$$dh(x)(u) \cdot dh(x)(v) = (\rho(x))^2 u \cdot v, \quad \forall u, v \in X. \quad (2.5)$$

A correspondência entre os pontos de  $\mathbb{E}^+$  e o plano de Argand-Gauss é injetiva ao adicionarmos o ponto  $\beta = \infty$  ao plano complexo e o fizermos corresponder ao pólo norte, que tem coordenadas  $(1,0,0,1)$ . Mas se quisermos evitar o uso de tal ponto, torna-se conveniente associar aos pontos de  $\mathbb{E}^+$  não um número complexo  $\beta$ , mas um par deles<sup>2</sup>  $(\xi, \eta)$ , onde

$$\beta = \xi/\eta. \quad (2.6)$$

Os pares  $(\xi, \eta)$  e  $(\lambda\xi, \lambda\eta)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , representam o mesmo ponto em  $\mathbb{E}^+$  e por isso tais coordenadas são chamadas *projetivas*. Essa denominação se baseia na definição de que, sendo  $\mathbb{K}$  um corpo e denotando  $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ , o conjunto  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$  de espaços unidimensionais de  $\mathbb{K}^n$

$$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) = \{\mathbb{K}x \mid x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0\} \quad (2.7)$$

é chamado *espaço projetivo* de dimensão  $n - 1$  sobre  $\mathbb{K}$ .

**Observação:** Os elementos do espaço  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$  são chamados *pontos* do espaço projetivo. Além disso,  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$  pode ser definido como uma classe de equivalência  $[(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{K}^n - \{0\}$  com respeito à relação de equivalência

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} - \{0\} \text{ tal que } x_i = \alpha y_i; \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.8)$$

Dessa maneira linhas no espaço  $\mathbb{K}^n$  são representadas como pontos no espaço  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ .

O "ponto"  $\beta = \xi/\eta = \infty$  corresponde ao ponto de coordenadas  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . As equações (2.4) podem ser reescritas como

$$x = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}, \quad y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})}, \quad z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}. \quad (2.9)$$

O ponto  $P = (1, x, y, z)$  é um ponto arbitrário da secção transversal do cone de luz e representa uma direção nula que aponta para o futuro. Essa direção é representada por qualquer outro ponto da linha  $\mathcal{OP}$ . Em particular, tome o ponto  $R$  sobre  $\mathcal{OP}$  multiplicando  $P$  pelo fator  $(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})/\sqrt{2}$ . Tal escolha é feita para eliminar os denominadores das eqs.(2.9). Portanto  $R$  tem coordenadas

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}), & Y &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}), \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}), & T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}). \end{aligned}} \quad (2.10)$$

Ao contrário de  $P$ , o ponto  $R$  não é independente da mudança de escala real de  $(\xi, \eta)$ , a saber,  $(\xi, \eta) \rightarrow (r\xi, r\eta)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , embora seja independente da mudança de fase  $(\xi, \eta) \rightarrow (e^{i\theta}\xi, e^{i\theta}\eta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

<sup>2</sup>Com a condição de que ambos não sejam simultaneamente nulos.

Considere a seguinte transformação linear complexa:

$$\begin{aligned}\xi &\mapsto \tilde{\xi} = \alpha\xi + \mu\eta, \\ \eta &\mapsto \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta,\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde  $\alpha, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  são tais que  $\alpha\delta - \mu\gamma \neq 0$ . Tal transformação pode ser escrita como

$$\beta \mapsto f(\beta) = \frac{\alpha\beta + \mu}{\gamma\beta + \delta},\tag{2.12}$$

e é dita uma *transformação de Möbius*. Tal aplicação leva  $\mathbb{C} - \{-\delta/\gamma\}$  em  $\mathbb{C} - \{\alpha/\gamma\}$ . Além disso, se  $f(-\delta/\gamma) = \infty$  e  $f(\infty) = \alpha/\gamma$  então  $f$  é uma aplicação injetiva do plano complexo compactificado pelo ponto no infinito ( $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ).

Podemos ter uma visão mais intuitiva sobre as transformações de Möbius: imaginemos um observador situado em um ponto do espaço-tempo olhando para as estrelas. Suponhamos que ele trace a posição angular das estrelas sobre uma esfera. Se um segundo observador passasse pelo mesmo ponto no mesmo tempo, mas com uma velocidade relativa não-nula com relação ao primeiro observador, então, com os efeitos da aberração [Mi73], ele colocaria as estrelas em diferentes posições na esfera. Porém as diversas posições dos pontos sobre a esfera estão relacionados pelas *transformações de Möbius* (eq.(2.12)). Tais transformações formam o grupo que preserva a estrutura complexa da esfera de Riemann.

Assim o espaço dos raios de luz que passam por um ponto do espaço-tempo é, de modo natural, uma esfera de Riemann. O grupo restrito de Lorentz  $\mathcal{L}^+$  é um grupo de simetria fundamental da física do espaço-tempo e relaciona observadores com velocidades diferentes. O grupo  $\mathcal{L}^+$  é, por outro lado, o grupo de automorfismos da  $\mathbb{C}$ -variedade mais simples de uma dimensão, que é a esfera de Riemann.

Normalizamos a relação (2.11) através da *condição unimodular*:

$$\alpha\delta - \mu\gamma = 1.$$

As eqs.(2.11) sujeitas à condição unimodular são chamadas *transformações spinoriais*, onde  $\beta = \xi/\eta$  está relacionado aos vetores (nulos) de Minkowski através das eqs.(2.10). Essas equações implicam que

$$\beta = \frac{X + iY}{T - Z} = \frac{T - Z}{X - iY}.\tag{2.13}$$

Definimos a *matriz spinorial*  $\mathbf{A} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 1.\tag{2.14}$$

A última condição corresponde à condição de normalização. Em termos de  $\mathbf{A}$  as eqs.(2.11) tomam a forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Note que duas matrizes spinoriais  $\{\mathbf{A}, -\mathbf{A}\}$  dão origem à mesma transformação de  $\beta = \xi/\eta$ , embora definam duas transformações spinoriais distintas.

A eq.(2.10) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Dessa maneira vemos os efeitos da transformação spinorial, a menos de um fator  $1/\sqrt{2}$ , como:

$$\begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{T}+\tilde{Z} & \tilde{X}+i\tilde{Y} \\ \tilde{X}-i\tilde{Y} & \tilde{T}-\tilde{Z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix} \mathbf{A}^\dagger \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{A}^\dagger$  denota o hermiteano (C-conjugado transposto) de  $\mathbf{A}$ . Tal transformação sobre o ponto  $U = (T, X, Y, Z)$  é real e preserva a estrutura do cone de luz  $T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ , o que é facilmente visto devido à propriedade de produto de determinantes. Dessa maneira a relação acima define uma *transformação de Lorentz restrita*.

**Proposição 2.1** ▶ *Toda transformação spinorial (TS) corresponde a uma única transformação de Lorentz (TL) restrita, e cada TL corresponde a precisamente duas TSs, uma sendo o negativo da outra.* ◀

Com isso notamos que o grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  é o recobrimento duplo de  $\text{SO}_+(1, 3)$ , mais conhecido como *grupo de Lorentz restrito*  $\mathcal{L}^+$ .

**Proposição 2.2** ▶ *Toda TS unitária ( $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = 1$ ) corresponde a uma única rotação própria<sup>3</sup> de  $\mathbb{E}^+$ , e toda rotação própria de  $\mathbb{E}^+$  corresponde a exatamente duas TSs unitárias, uma sendo o negativo da outra.* ◀

Essa última proposição se baseia no grupo

$$\text{SU}(2) = \{\mathbf{A} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mid \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = 1 \text{ e } \det \mathbf{A} = 1\}, \quad (2.17)$$

que é o recobrimento duplo do grupo das rotações  $\text{SO}(3)$  em  $\mathbb{E}^+$ . De fato, a coordenada temporal  $T$  é invariante perante uma transformação spinorial unitária, já que o traço de uma matriz é sempre invariante sob transformações unitárias. Utilizando a parametrização das rotações via ângulos de Euler [Go81], qualquer transformação de  $\mathbb{E}^+$  pode ser viabilizada por meio de uma rotação de um ângulo  $\psi$  em torno do eixo  $z$ , seguida por uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo original  $y$  e finalmente por uma rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $z$ . Mostraremos que essas rotações elementares podem ser representadas por TSs unitárias. Segue-se daí que qualquer rotação própria de  $\mathbb{E}^+$  pode ser representada dessa maneira, já que o produto de matrizes unitárias resulta em uma matriz unitária.

A rotação de  $\mathbb{E}^+$  em torno do eixo  $z$  por um ângulo  $\psi$  surge naturalmente através da rotação do plano complexo de Argand-Gauss, pela origem, por um ângulo  $\psi$ . Isso é obtido pela transformação  $\tilde{\beta} = e^{i\psi} \beta$ , ou representando por TSs, escrevemos:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Agora dizemos que uma rotação de  $\mathbb{E}^+$  por um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $y$  é representado por

<sup>3</sup>Qualquer operação no espaço-tempo de Minkowski é dita *própria* se preserva orientação do espaço-tempo.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Facilmente se verifica que essa TS transforma o vetor de coordenadas  $(1, 0, 0, 1)$  no vetor  $(1, \sin \theta, 0, \cos \theta)$ . Por um argumento semelhante, podemos ver que a TS

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos \chi/2 & i \sin \chi/2 \\ i \sin \chi/2 & \cos \chi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

corresponde a uma rotação de um ângulo  $\chi$  em torno do eixo  $x$ . Com isso acabamos de demonstrar a proposição (2.2) e podemos exibir a matriz spinorial que corresponde a uma rotação pelos ângulos de Euler  $\theta, \phi, \psi$ :

$$\mathfrak{F}(\theta, \phi, \psi) = \pm \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\psi)/2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{i(\phi-\psi)/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Os elementos da matriz acima são os parâmetros de Cayley-Klein que aparecem em algumas formulações da mecânica clássica [Go81].

O grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  tem também uma representação projetiva, onde tal grupo age sobre a linha complexa projetiva consistindo de pontos  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbb{C}}$ , onde  $\overset{\circ}{\mathbb{C}}$  denota o grupo multiplicativo de  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{C} - \{0\}$ ) [FS90]. Em analogia com a geometria projetiva clássica, chamamos o par  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  as *coordenadas homogêneas do spinor projetivo*  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbb{C}}$ .

No caso em que  $\eta \neq 0$ , temos

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbb{C}}, \quad (2.22)$$

onde  $\beta$  já foi definido na eq.(2.3) e reescrito como  $\beta = \xi/\eta$ , como já descrito pela eq.(2.6). A eq.(2.22) define uma relação de equivalência  $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  entre os vetores-spin  $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ .

Na mecânica quântica, a função de onda  $|\psi\rangle$  de uma partícula de spin 1/2 é a superposição linear

$$|\psi\rangle = \xi |+\rangle + \eta |-\rangle, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}, \quad (2.23)$$

de dois vetores que formam a base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  dos autoestados de spin. Com a correspondência

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

vemos que

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Nesse sentido, os números complexos  $\xi$  e  $\eta$  podem ser vistos, respectivamente, como as amplitudes de probabilidade de se encontrar a partícula descrita pelo estado quântico  $|\psi\rangle$  nos estados  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ . Vemos que  $|\psi\rangle$  pode ser representado pelo ponto  $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  sobre a esfera de Riemann, e esse ponto corresponde à intersecção do eixo positivo do spin com a esfera, tomada a partir do centro.

### 2.1.1 A geometria das operações spinoriais

Para apresentarmos uma formulação como a de Penrose [Pe84], necessitamos primeiramente introduzir o conceito de *índice abstrato*. Segundo a notação que segue desse formalismo,  $k^A$  não denota as componentes do vetor  $k$ , mas um elemento de um espaço vetorial (ou módulo)  $V^A$ . Mais precisamente, qualquer elemento  $k \in V$ , onde  $V$  é um módulo, está associado a uma coleção infinita de cópias distintas  $k^A, k^B, k^C, k^D, \dots, k^{A_1}, k^{B_1}, k^{C_1}, k^{D_1}, \dots$ , do próprio elemento  $k$ . O módulo  $V \ni k$  deverá também ter infinitas cópias  $V^A, V^B, V^C, V^D, \dots, V^{A_1}, V^{B_1}, V^{C_1}, V^{D_1}, \dots$  separadas. Esses módulos são canonicamente isomorfos entre eles e ao módulo  $V$ .

Considerando o conjunto infinito de índices abstratos

$$\mathfrak{A} = \{A, B, C, D, \dots, A_1, B_1, C_1, D_1, \dots\}, \quad (2.26)$$

os elementos dos vários conjuntos  $V^A, V^B, V^C, V^D, \dots, V^{A_1}, V^{B_1}, V^{C_1}, V^{D_1}, \dots$  são simplesmente elementos de  $V \times \mathfrak{A}$ , onde, por exemplo,  $V^A = (V, A)$ , ou seja,  $k^A$  é um par  $(k, A)$ , com  $k \in V$  e  $A \in \mathfrak{A}$ . Cada índice abstrato é portanto responsável por armazenar o elemento  $k$  no “compartimento”  $A$ . Conseqüentemente, segundo essa notação, podemos escrever o produto tensorial (veja próximo capítulo) de dois elementos  $k^A$  e  $\eta^B$  como  $k^A \eta^B$  e temos a relação

$$k^A \eta^B = \eta^B k^A. \quad (2.27)$$

A não-comutatividade do produto tensorial se manifesta nessa notação como

$$k^A \eta^B \neq \eta^A k^B. \quad (2.28)$$

Definimos o *espaço-spin*  $\mathbb{G}^A$  com três operações básicas:

- *multiplicação por escalar*:  $\mathbb{C} \times \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}^A$  ( $\lambda \in \mathbb{C}, k^A \in \mathbb{G}^A \mapsto \lambda k^A \in \mathbb{G}^A$ ),
- *adição*:  $\mathbb{G}^A \times \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}^A$  ( $k^A, \omega^A \in \mathbb{G}^A \mapsto k^A + \omega^A \in \mathbb{G}^A$ ),
- *produto escalar*:  $\mathbb{G}^A \times \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{C}$  ( $k^A, \omega^A \in \mathbb{G}^A \mapsto \{k^A, \omega^A\} \in \mathbb{C}$ ).

Naturalmente definimos o *espaço-spin dual*  $\mathbb{G}_A$  de maneira análoga,  $\mathbb{G}_A \ni \pi_A : \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{C}$ . Dessa maneira,

$$k_A \omega^A \equiv \{k^A, \omega^A\} \in \mathbb{C}. \quad (2.29)$$

Com relação aos vetores nulos do espaço-tempo de Minkowski, Penrose propõe que a álgebra dos vetores nulos deve estar contida na álgebra dos spinors. Para tanto definimos o espaço-spin  $\mathbb{G}^{A'}$ , que diremos ser o *espaço sesquidual*<sup>4</sup> caracterizado pela  $\mathbb{C}$ -conjugação seguida pela transposição, onde usaremos a notação

$$\overline{k^A} \equiv \bar{k}^{A'} \in \mathbb{G}^{A'}. \quad (2.30)$$

<sup>4</sup>Isso significa dizer que existe um sesqui-isomorfismo entre espaços vetoriais  $\varrho : \mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}^{A'}$  satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} \varrho(k^A + \omega^A) &= \varrho(k^A) + \varrho(\omega^A), \\ \varrho(\lambda k^A) &= \bar{\lambda} \varrho(k^A), \quad \forall k^A, \omega^A \in \mathbb{G}^A, \quad \lambda \in \mathbb{C} \ (\bar{\lambda} \text{ é o } \mathbb{C}\text{-conjugado de } \lambda). \end{aligned}$$

Ao invés da notação  $\varrho(k^A)$ , denotaremos essa operação por  $\overline{k^A}$ , por estar de acordo com a notação do formalismo de Penrose.

Vimos pelas eqs.(2.15) que o espaço  $\mathbb{M}$  munido com um sistema de coordenadas  $(T, X, Y, Z)$  pode ser escrito a partir das componentes do *vetor-spin*  $k$  ( $\xi = k^0, \eta = k^1$ ), onde  $\xi$  e  $\eta$  já foram definidas anteriormente. Com tais componentes, definimos as três operações básicas como

$$\lambda(k^0, k^1) = (\lambda k^0, \lambda k^1), \quad (2.31)$$

$$(k^0, k^1) + (\omega^0, \omega^1) = (k^0 + \omega^0, k^1 + \omega^1), \quad (2.32)$$

$$\{(k^0, k^1), (\omega^0, \omega^1)\} = k^0\omega^1 - k^1\omega^0. \quad (2.33)$$

### A base-spin

Com o produto escalar (bilinear, antissimétrico) definido pela eq.(2.33) obtemos a representação de um vetor-spin em termos das suas componentes. Escolhemos um par de vetores-spin  $o^A$  e  $\iota^A$  que satisfaçam à normalização:

$$\{o^A, \iota^A\} = o_A \iota^A = 1 = -\iota_A o^A = -\{\iota^A, o^A\}, \quad (2.34)$$

onde o par  $(o_A, \iota_A)$  é o par dual ao par  $(o^A, \iota^A)$ . Pela antissimetria do produto escalar, notamos que  $o_A o^A = \iota_A \iota^A = 0$ . Chamamos o par  $(o^A, \iota^A)$ , com a condição dada pela eq.(2.34), de *base-spin*. As componentes de  $k$  nessa base-spin são dadas por

$$k^0 = \{k^A, \iota^A\}, \quad k^1 = -\{k^A, o^A\}, \quad (2.35)$$

de modo que

$$k^A = k^0 o^A + k^1 \iota^A. \quad (2.36)$$

Definimos também um elemento antissimétrico

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{AB} \ni \epsilon_{AB} : \mathbb{G}^A &\rightarrow \mathbb{G}_B \\ k^A &\mapsto k_B = k^A \epsilon_{AB}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

responsável por levantar e abaixar índices abstratos, tal que

$$\{k^A, \omega^A\} = \epsilon_{AB} k^A \omega^B = k^0 \omega^1 - k^1 \omega^0 = -\{\omega^A, k^A\}. \quad (2.38)$$

Podemos escrever

$$\boxed{\epsilon_{AB} = o_A \iota_B - \iota_A o_B} \quad (2.39)$$

De fato, para qualquer base-spin que satisfaz a eq.(2.34), temos

$$\begin{aligned} k^A &= k^0 o^A + k^1 \iota^A = (o^A \iota^B - \iota^A o^B)(k^0 o_B + k^1 \iota_B) \\ &= \epsilon^{AB} k_B. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Neste ponto vemos uma das utilidades da notação de índice abstrato, pois  $\mathbb{G}_{AB}$  denota o produto tensorial  $\mathbb{G}_A \otimes \mathbb{G}_B$  (veja próximo capítulo). Definimos ainda o tensor dual  $\mathbb{G}^{AB} \ni \epsilon^{AB} : \mathbb{G}_B \rightarrow \mathbb{G}^A$ , que claramente satisfaz

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{CB} = \delta_A^C, \quad (2.41)$$

de onde obtemos o mapa  $\mathbb{G}^A \rightarrow \mathbb{G}_B \rightarrow \mathbb{G}^C$ . De maneira semelhante,

$$\epsilon_A^B = o_A \iota^B - \iota_A o^B. \quad (2.42)$$

Temos ainda

$$\{\kappa, \omega\} = k_B \omega^B = k_0 \omega^0 + k_1 \omega^1 = k^0 \omega^1 - \omega^0 k^1 \rightarrow \begin{cases} k_0 = -k^1 \\ k_1 = k^0 \end{cases} \quad (2.43)$$

**Lema** ► *Dados dois spinores  $k_A, \omega_A \in \mathbb{G}_A$  arbitrários tais que  $k_A \omega^A = 1$ , podemos escrever*

$$\boxed{\epsilon_{AB} = k_A \omega_B - \omega_A k_B} \quad \blacktriangleleft \quad (2.44)$$

**Prova:**

$$\begin{aligned} \epsilon_{AB} &= k_A \omega_B - \omega_A k_B = (k_0 \iota_A + k_1 o_A)(\omega_0 \iota_B + \omega_1 o_B) \\ &= (k_1 \omega_0 - k_0 \omega_1) o_A \iota_B - (k_1 \omega_0 - k_0 \omega_1) \iota_A o_B \\ &= o_A \iota_B - \iota_A o_B, \end{aligned} \quad (2.45)$$

de onde fica provada a equivalência com a eq.(2.39). □

### 2.1.2 A métrica e os vetores do espaço-tempo via vetores-spin

Estamos interessados em descrever vetores de  $\mathbb{M}$  sob o ponto de vista spinorial, via vetores-spin. Daqui em diante faremos uso dos índices latinos com o intuito de rotular elementos  $x^a$  de um espaço vetorial real. Isso pode ser feito com o agrupamento de índices  $A$  e  $A'$ . Com isso estabelecemos a equivalência de notação  $\{a, b, \dots\} = \{AA', BB', \dots\}$ . Definimos a *tétrade nula* ( $l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a$ )

$$\boxed{l^a = o^A o^{A'}, \quad n^a = \iota^A \iota^{A'}, \quad m^a = o^A \iota^{A'}, \quad \bar{m}^a = \iota^A o^{A'}} \quad (2.46)$$

e a métrica

$$\boxed{g_{ab} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'}} \quad (2.47)$$

verificando que os vetores da tétrade nula são vetores *nulos* com respeito a  $g_{ab}$ :

$$g_{ab} l^a l^b = l^a l_a = 0, \quad (2.48)$$

e do mesmo modo,

$$n^a n_a = m^a m_a = \bar{m}^a \bar{m}_a = 0. \quad (2.49)$$

Além disso podemos demonstrar que

$$l^a n_a = 1, \quad m^a \bar{m}_a = -1, \quad l^a m_a = l^a \bar{m}_a = n^a m_a = n^a \bar{m}_a = 0. \quad (2.50)$$

Também temos a relação

$$g_a^b \equiv g_{ac} g^{cb} = n_a l^b + l_a n^b - \bar{m}_a m^b - m_a \bar{m}^b. \quad (2.51)$$

É conveniente definirmos uma outra tétrade ( $t^a, x^a, y^a, z^a$ ) como sendo

$$\begin{aligned} t^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(l^a + n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} + \iota^A \iota^{A'}), \\ x^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(m^a + \bar{m}^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A \iota^{A'} + \iota^A o^{A'}), \\ y^a &= \frac{i}{\sqrt{2}}(m^a - \bar{m}^a) = \frac{i}{\sqrt{2}}(o^A \iota^{A'} - \iota^A o^{A'}), \\ z^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(l^a - n^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} - \iota^A \iota^{A'}). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Das relações (2.50), temos

$$\begin{aligned} t^a x_a &= t^a y_a = t^a z_a = x^a y_a = y^a z_a = z^a x_a = 0, \\ t^a t_a &= 1, \\ x^a x_a &= y^a y_a = z^a z_a = -1. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Com isso a métrica  $g_a^b$  em (2.51) tem a seguinte expressão:

$$g_a^b = t_a t^b - x_a x^b - y_a y^b - z_a z^b \quad (2.54)$$

Essa última relação identifica a téttrade  $(t^a, x^a, y^a, z^a)$  com a téttrade de Minkowski. Com seu uso, escrevemos

$$K^a = K^0 t^a + K^1 x^a + K^2 y^a + K^3 z^a. \quad (2.55)$$

Considerando a base-spin  $\{o^A, \iota^A\}$ , escrevemos  $K^a$  em termos dessa base

$$K^a = K^{00'} l^a + K^{01'} m^a + K^{10'} \bar{m}^a + K^{11'} n^a. \quad (2.56)$$

Comparando as duas últimas equações, obtemos:

$$K^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} K^0 + K^3 & K^1 + iK^2 \\ K^1 - iK^2 & K^0 - K^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{00'} & K^{01'} \\ K^{10'} & K^{11'} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

O vetor  $K^a$  pode então ser escrito como

$$K^a = \pm k^A \bar{k}^{A'}, \quad (2.58)$$

onde o sinal define um vetor nulo que aponta para o futuro (+) ou para o passado (-).  $K^a$  é obviamente real e nulo, pois  $K^a K_a = |k_A k^A|^2 = 0$ . Ao fazermos  $\xi = k^0, \eta = k^1$ , encontramos:

$$K^{00'} = \xi \bar{\xi}, \quad K^{01'} = \xi \bar{\eta}, \quad K^{10'} = \eta \bar{\xi}, \quad K^{11'} = \eta \bar{\eta}. \quad (2.59)$$

Portanto eq.(2.57) se reduz a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \bar{\xi} & \xi \bar{\eta} \\ \eta \bar{\xi} & \eta \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

onde pusemos  $T = K^0, X = K^1, Y = K^2, Z = K^3$ . Essa última é a própria relação (2.15). Conciliamos dessa maneira os spinors aos vetores do espaço-tempo, escrevendo estes em termos daqueles.

Torna-se útil definir *campos spin-vetoriais*. Essa generalização é análoga à generalização necessária para passar do conceito de vetor em um ponto para o conceito de um campo vetorial. Todas as regras que definem um espaço vetorial continuam válidas, só que agora o corpo dos escalares é substituído pelos *campos escalares*. Esses não formam um anel de divisão, mas um anel comutativo com unidade. Portanto campos spin-vetoriais não formam um espaço vetorial, mas um *módulo* sobre o anel dos campos escalares.

Podemos ainda generalizar o conceito de vetores-spin para *spinors generalizados*, que são representados por um elemento

$$\xi_{L\dots NU'\dots W'}^{A\dots DP'\dots R'} \in \mathbb{G}_{L\dots NU'\dots W'}^{A\dots DP'\dots R'}. \quad (2.61)$$

Dizemos que  $\xi_{L\dots NU'\dots W'}^{A\dots DP'\dots R'}$  é um *spinor de valência*  $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ , onde os conjuntos  $\{L\dots N\}$ ,  $\{U'\dots W'\}$ ,  $\{A\dots D\}$  e  $\{P'\dots R'\}$  têm respectivamente,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  e  $s$  elementos. Como caso particular, o vetor-spin  $V^A \in \mathbb{G}^A$  é de valência  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $U_{A'} \in \mathbb{G}_{A'}$  é de valência  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Os símbolos de Infeld-van der Waerden

Tais símbolos são usados para construímos uma base para o espaço  $V^a$  a partir de bases para  $\mathbb{G}^A$  e  $\mathbb{G}^{A'}$ . Considere  $\{f_{\mathbf{A}}^A\}$  uma base de  $\mathbb{G}^A$  e  $\{f_{\mathbf{A}'}^{A'}\}$  uma base de  $\mathbb{G}^{A'}$ , ou seja:

$$\{f_{\mathbf{A}}^A\} = \{f_0^A, f_1^A\}, \quad \text{onde } f_0^A = o^A \text{ e } f_1^A = \iota^A, \quad (2.62)$$

$$\{f_{\mathbf{A}'}^{A'}\} = \{f_{0'}^{A'}, f_{1'}^{A'}\}, \quad \text{onde } f_{0'}^{A'} = o^{A'} \text{ e } f_{1'}^{A'} = \iota^{A'}. \quad (2.63)$$

Agora considere  $\{e_{\mathbf{a}}^a\}$  uma base de  $V^a$ :

$$\{e_{\mathbf{a}}^a\} = \{e_0^a, e_1^a, e_2^a, e_3^a\} = \{l^a, m^a, \bar{m}^a, n^a\}. \quad (2.64)$$

Os símbolos de Infeld-van der Waerden  $\sigma_{\mathbf{a}}^{\mathbf{A}\mathbf{A}'}$  são definidos por

$$e_{\mathbf{a}}^a = \sigma_{\mathbf{a}}^{\mathbf{A}\mathbf{A}'} f_{\mathbf{A}}^A f_{\mathbf{A}'}^{A'}. \quad (2.65)$$

Dessa maneira podemos escrever um vetor  $K^a \in V^a$  em termos da base descrita acima.

$$K^a = K^{\mathbf{a}} e_{\mathbf{a}}^a = K^{\mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{a}}^{\mathbf{A}\mathbf{A}'} f_{\mathbf{A}}^A f_{\mathbf{A}'}^{A'}. \quad (2.66)$$

Portanto  $K^{\mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{a}}^{\mathbf{A}\mathbf{A}'}$  é a própria representação matricial (eq.(2.57)) de  $K^a$ . Podemos com isso identificar  $\sigma_{\mathbf{a}}^{\mathbf{A}\mathbf{A}'}$  com as matrizes de Pauli.

### 2.1.3 Spinors de Weyl

Uma vez desenvolvida a teoria dos vetores-spin<sup>5</sup>, torna-se necessário estudar tais entidades sob o ponto de vista da teoria de representação do grupo de Lorentz, ou melhor, do  $SL(2, \mathbb{C})$ , recobrimento duplo do grupo de Lorentz restrito  $\mathcal{L}^+ \simeq SO_+(1,3)$ .

#### Representações

Dados dois grupos  $G$  e  $H$ , dizemos que uma *representação* é uma aplicação  $f : G \rightarrow H$  que é um homomorfismo<sup>6</sup> de grupos, e  $H$  é um grupo de matrizes, de ordem  $n$ . Se  $V^n$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional, então dada uma base de  $V^n$ , elementos de  $H$  são transformações lineares que agem sobre  $V^n$ . O espaço vetorial  $V^n$  é dito um *espaço de representação* de  $G$  e elementos de  $V^n$  são ditos *elementos que carregam a representação de G*.

<sup>5</sup>A partir de agora denominaremos-os simplesmente *2-spinors*.

<sup>6</sup>O homomorfismo de grupos tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f(g)f(g') &= f(gg'), \quad \forall g, g' \in G, \\ f(id_G) &= id_H. \end{aligned}$$

Dizemos que duas representações  $\phi : G \rightarrow H$  e  $\varphi : G \rightarrow H$  são *equivalentes* se existir um isomorfismo  $\Phi : V^n \rightarrow V^n$  tal que  $\varphi(g) = \Phi \circ \phi(g) \circ \Phi^{-1}$ ,  $\forall g \in G$ . Em se tratando do espaço-spin, as transformações lineares com determinante unitário formam o grupo  $SL(2, \mathbb{C}) \ni \mathbf{A}$ . Existem duas representações de  $SL(2, \mathbb{C})$  que não são equivalentes. Definimos  $\rho(\mathbf{A})(z) = \mathbf{A}z$  e  $\bar{\rho}(\mathbf{A})(z) = \mathbf{A}^\dagger z$ . Essas duas representações seriam equivalentes se existisse um isomorfismo  $\alpha : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  tal que  $\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \alpha \circ \rho(\mathbf{A}) \circ \alpha^{-1}$ . Para isso seria preciso que existisse uma matriz complexa  $T$  de ordem 2 e inversível tal que  $\bar{\rho}(\mathbf{A})T = T\rho(\mathbf{A})$ . Mas essa última equação não tem solução para  $\mathbf{A} \in SL(2, \mathbb{C})$ , embora a tenha para  $\mathbf{A} \in SU(2)$ . Dessa maneira temos duas representações não-equivalentes de  $SL(2, \mathbb{C})$  denotadas por  $D^{(1/2,0)}$  e  $D^{(0,1/2)}$ . Os elementos do espaço que carrega essas representações são chamados *spinors de Weyl*.

### Spinors contravariantes apontuados (SCTA)

Tais spinores são elementos de um espaço bidimensional complexo, munido de uma métrica spinorial

$$\begin{aligned} G : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\zeta, \chi) &\mapsto G(\zeta, \chi) = \zeta^\dagger \mathbf{J} \chi, \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

O spinor  $\zeta$  é representado pelo vetor coluna

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Esse tipo de spinor carrega a representação  $D^{(1/2,0)}$  do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  e se transforma perante  $R \in SL(2, \mathbb{C})$  como

$$\zeta \mapsto R\zeta.$$

### Spinors covariantes apontuados (SCA)

Tais spinores são elementos do espaço bidimensional complexo dual  $\mathbb{C}_b^2$ , definido por

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_b^2 \ni \zeta_b : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \zeta_b(\chi) = \zeta_b \chi = G(\zeta, \chi) = \zeta^\dagger \mathbf{J} \chi \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\Rightarrow \zeta_b = \zeta^\dagger \mathbf{J}. \quad (2.71)$$

Portanto o spinor  $\zeta_b$  é representado por

$$\zeta_b = (\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta^2, -\zeta^1) \quad (2.72)$$

A fim de que a métrica spinorial fique invariante sob a ação da transformação  $R \in SL(2, \mathbb{C})$ , é necessário que

$$\zeta_b \mapsto \zeta_b R^{-1}, \quad R \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (2.73)$$

Esses dois tipos de spinors representam elementos de  $\mathbb{G}^A$  e  $\mathbb{G}_A$ , respectivamente.

### Spinors contravariantes pontuados (SCTP)

Tais spinors são elementos do espaço bidimensional complexo  $(\dot{\mathbb{C}}^2) \ni \dot{\zeta}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}^2$  munido com a métrica spinorial

$$\begin{aligned} \dot{G} : \dot{\mathbb{C}}^2 \times \dot{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\dot{\zeta}, \dot{\chi}) &\mapsto \dot{G}(\dot{\zeta}, \dot{\chi}) = \dot{\zeta} \mathbf{J} \dot{\chi}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Os SCTP são representados por

$$\dot{\zeta} = (\bar{\zeta}^{1'}, \bar{\zeta}^{2'}) \quad (2.75)$$

### Spinors covariantes pontuados (SCP)

Tais spinores são elementos do espaço bidimensional complexo dual  $\dot{\mathbb{C}}_b^2$ , definido por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{C}}_b^2 \ni \dot{\chi}_b : \dot{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \dot{\zeta} &\mapsto \dot{\zeta}(\dot{\chi}_b) = \dot{\zeta} \dot{\chi}_b = \dot{G}(\dot{\zeta}, \dot{\chi}) = \dot{\zeta} \mathbf{J} \dot{\chi}_b. \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\Rightarrow \dot{\chi}_b = \mathbf{J}(\dot{\chi})^\dagger, \quad (2.77)$$

e um SCP é representado por

$$\dot{\chi}_b = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_{1'} \\ \bar{\chi}_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\chi}^{2'} \\ -\bar{\chi}^{1'} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Claramente a lei de transformação dos spinors pontuados sob a ação de  $R \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  é

$$\dot{\zeta} \mapsto \dot{\zeta} R^\dagger; \quad \dot{\zeta}_b \mapsto (R^\dagger)^{-1} \dot{\zeta}_b. \quad (2.79)$$

Esse tipo de spinor carrega a representação  $D^{(0,1/2)}$  do grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Os spinors pontuados representam, respectivamente, elementos de  $\mathbb{G}^{A'}$  e  $\mathbb{G}_{A'}$ . Um quadro que resume os tipos de transformações de cada spinor de Weyl é apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} \zeta &\mapsto R\zeta \\ \zeta_b &\mapsto \zeta_b R^{-1} \\ \dot{\zeta} &\mapsto \dot{\zeta} R^\dagger \\ \dot{\zeta}_b &\mapsto (R^\dagger)^{-1} \dot{\zeta}_b \end{aligned} \quad (2.80)$$

#### 2.1.4 Spinors de Dirac

A partir dos 2-spinors, definimos os 4-*spinors de Dirac* (também chamados *bispinors* ou simplesmente *spinors de Dirac*) como elementos de  $\mathbb{G}^A \oplus \mathbb{G}_{A'}$ . Os spinors de Dirac classicamente são vistos como vetores do espaço quadridimensional complexo  $\mathbb{C}^4$  equipado com a métrica spinorial

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\psi_1, \psi_2) &\mapsto \mathcal{G}(\psi_1, \psi_2) = \psi_1^\dagger (\mathbf{J}_d) \psi_2, \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde o spinor  $\psi$  é definido como

$$\mathbb{C}^2 \oplus (\mathbb{C}^2)_b \ni \psi = \zeta + \dot{\chi}_b = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \bar{\chi}_{1'} \\ \bar{\chi}_{2'} \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Na base canônica de  $\mathbb{C}^4$  a matriz  $\mathbf{J}_d$  é a representação de  $\mathcal{G}$

$$\mathbf{J}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & 0 \\ 0 & \mathbf{J} \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz simplética definida pela eq.(2.68).

Os spinors de Dirac carregam a representação  $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$  do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Sob a condição

$$\mathcal{G}(\psi_1, \psi_2) = \mathcal{G}(\rho(R)\psi_1, \rho(R)\psi_2), \quad (2.84)$$

que requer que a métrica spinorial  $\mathcal{G}$  seja invariante perante a ação da representação de  $R$ , obtemos a importante relação:

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & (R^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \quad R \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (2.85)$$

### 2.1.5 Bandeiras Nulas

Vimos como associar um vetor nulo que aponta para o futuro  $K^a$  com o vetor-spin  $\kappa^A$ , que tem coordenadas  $(\xi, \eta)$ . Pela eq.(2.59),  $(\xi, \eta)$  servem também como coordenadas para  $K^a$ , e as transformações  $\xi \mapsto \xi e^{i\theta}$ ,  $\eta \mapsto \eta e^{i\theta}$  deixam  $K^a$  invariante. É proposta uma estrutura mais rica com o intuito de reduzir essa redundância a uma simples ambigüidade no sinal. Tal estrutura é composta pelo vetor nulo  $K^a$ , chamado *pólo* e por um semiplano nulo<sup>7</sup> (*flagplane*) e é chamada de bandeira (*flagpole*).

Podemos passar de um spinor  $k^A$ , representado como um SCTA por duas componentes  $k^1$  e  $k^2$  a um objeto geométrico, a bandeira.

Vimos que podemos definir um vetor nulo que aponta para o futuro (ou pólo) pela eq.(2.58):

$$x^a = \frac{1}{\sqrt{2}} X^{AA'} = k^A \bar{k}^{A'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \bar{k}^{1'} & k^1 \bar{k}^{2'} \\ k^2 \bar{k}^{1'} & k^2 \bar{k}^{2'} \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

O vetor  $x^a$  é dilatado por  $\rho^2$  ao multiplicarmos  $k^A$  por  $\lambda = \rho e^{i\theta}$ . Contudo o vetor  $x^a$  não muda de direção e independe da escolha do ângulo  $\theta$ . Daí dizemos que o vetor nulo  $x^a$  é unicamente determinado pelo spinor  $k^A$ . Mas o spinor  $k^A$  não é unicamente determinado pelo vetor  $x^a$ , que corresponde a uma família de spinors. Eles formam um espaço projetivo e diferem um do outro por um fator de fase  $e^{i\theta}$ .

Definimos um bivector real antissimétrico, denominado *momento*

$$F^{ab} = F^{ABA'B'} = k^A k^B \epsilon^{A'B'} + \epsilon^{AB} \bar{k}^{A'} \bar{k}^{B'} \quad (2.87)$$

<sup>7</sup>Um semiplano nulo é um semiplano tangente ao cone de luz, ou seja, é um semiplano tangente ao cone cuja intersecção é o vetor  $K^a$ .

Para vermos que  $F^{ab} = -F^{ba}$  (e conseqüentemente que  $F^{ab}$  tem seis componentes) basta trocar  $A$  com  $B$  e  $A'$  com  $B'$ , e notar a troca de sinal no lado direito da eq.(2.87). O bivector  $F^{ab}$  é real e determina um semiplano tangente ao cone de luz ao longo do vetor  $x^a = k^A \bar{k}^{A'}$ .

Tomamos uma base-spin como sendo  $\{k^A, \omega^A\}$ , com  $k_A \omega^A = 1$ . Portanto podemos escrever  $\epsilon^{AB} = k^A \omega^B - \omega^B k^A$ , como já o fizemos no Lema da subsec.(2.1.2) (eq.(2.44)).

É simples caracterizarmos a quantidade  $F^{ab}$  como sendo o momento, pois

$$\begin{aligned} F^{ab} &= F^{ABA'B'} = k^A k^B (\bar{k}^{A'} \bar{\omega}^{B'} - \bar{\omega}^{A'} \bar{k}^{B'}) + (k^A \omega^B - \omega^A k^B) \bar{k}^{A'} \bar{k}^{B'} \\ &= k^A \bar{k}^{A'} (k^B \bar{\omega}^{B'} - \omega^B \bar{k}^{B'}) + (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}) k^B \bar{k}^{B'} \\ &= X^{AA'} Y^{BB'} - Y^{AA'} X^{BB'} \\ &= x^a y^b - y^a x^b. \end{aligned} \quad (2.88)$$

O spinor de valência  $\binom{2}{0}$   $F^{ab}$  representa um bivector formado por dois vetores  $x^a, y^a \in \mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathbb{M}$ . Obviamente o pólo  $x^a$  é o próprio vetor real nulo da bandeira, determinado unicamente pelo spinor  $o^A$ . O segundo vetor,

$$y^a = Y^{AA'} = (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}), \quad (2.89)$$

é também determinado por  $k^A$ , mas não unicamente, já que o par  $(k^A, \omega^A)$  não é o único possível na construção de  $\epsilon^{AB}$ . Com efeito, qualquer spinor do tipo

$$\omega_0^A = \omega^A + \lambda k^A, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.90)$$

satisfaz  $k_A \omega_0^A = 1$ . Com essa liberdade o vetor  $y^a$  se transforma em

$$y_0^a = y^a + (\lambda + \bar{\lambda}) x^a. \quad (2.91)$$

Relacionamos cada valor real de  $(\lambda + \bar{\lambda})$  a uma família de vetores  $y_0^a$ , todos eles coplanares. Esta é a bandeira, segundo Penrose.

**Proposição 2.3** ► *O vetor  $y^a$  é ortogonal ao vetor nulo  $x^a$ .* ◀

De fato

$$\begin{aligned} x^a \cdot y^a &= x_a y^a = -\frac{1}{2} X_{AA'} Y^{AA'} \\ &= -\frac{1}{2} k_A \bar{k}_{A'} (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}) = 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

**Proposição 2.4** ► *O vetor  $y^a$  é tipo-espaço e unitário.* ◀

De fato

$$\begin{aligned} y^a \cdot y^a &= y_a y^a = \frac{1}{2} (k_A \bar{\omega}_{A'} + \omega_A \bar{k}_{A'}) (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}) \\ &= \frac{1}{2} (k_A \omega^A) (\bar{\omega}_{A'} \bar{k}^{A'}) + \frac{1}{2} (\omega_A k^A) (\bar{k}_{A'} \bar{\omega}^{A'}) \\ &= \frac{1}{2} (1)(-1) + \frac{1}{2} (-1)(1) = -1. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ao multiplicarmos o spinor  $k^A$  por  $e^{i\theta}$ , o vetor  $y^a$  roda em torno do pólo por um ângulo de  $2\theta$ :

$$\begin{aligned} y_{rot}^a &= Y_{rot}^{AA'} = e^{2i\theta} k^A \bar{\omega}^{A'} + e^{-2i\theta} \omega^A \bar{k}^{A'} \\ &= \cos 2\theta (k^A \bar{\omega}^{A'} + \omega^A \bar{k}^{A'}) + \sin 2\theta (ik^A \bar{\omega}^{A'} - i\omega^A \bar{k}^{A'}) \\ &= y^a \cos 2\theta + z^a \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.94)$$

**Proposição 2.5** ► *O vetor  $z^a = i(k^A \bar{\omega}^{A'} - \omega^A \bar{k}^{A'})$  é tipo-espaço, unitário, ortogonal ao vetor  $x^a$ , ortogonal a  $y^a$  e, juntamente com este último, forma uma base que constitui a “ponta do pólo”. [Mi73] ◀*

## 2.2 Twistors

Um *twistor* é definido como sendo um par  $(\omega^A, \pi_{A'})$  constituído por spinors de Weyl, que satisfazem à relação

$$\omega^A = iX^{AA'} \pi_{A'}, \quad (2.95)$$

onde  $X^{AA'}$  é a representação das coordenadas de um ponto  $U = (T, X, Y, Z)$ , dada pela eq.(2.15), ou seja,

$$X^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

Portanto a eq.(2.95) pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{1'} \\ \pi_{2'} \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

Dizemos que o twistor  $(\omega^A, \pi_{A'})$  é *incidente no ponto U* se satisfizer a relação (2.95). O twistor pode ser introduzido a partir da chamada *equação do twistor*:

$$\boxed{\nabla_{A'}^{(A} \omega^{B)} = \frac{1}{2} (\nabla_{A'}^A \omega^B + \nabla_{A'}^B \omega^A) = 0} \quad (2.98)$$

Considere a expressão

$$\nabla_{A'}^A \nabla_{B'}^{(B} \omega^{C)}, \quad (2.99)$$

onde  $\omega^C$  é solução da equação do twistor. Tal equação é antissimétrica em relação aos índices  $BC$ . Dado que  $\mathbb{M}$  tem curvatura zero, as derivadas parciais em relação a diferentes coordenadas comutam, e a eq.(2.98) também é antissimétrica em  $AC$ . Portanto tal expressão é totalmente antissimétrica em  $ABC$  e assim deve ser nula. Então,  $\nabla_{B'}^B \omega^C$  é constante, e, já que essa expressão é antissimétrica em  $BC$ , ela deverá ser um múltiplo constante de  $\varepsilon^{BC}$ , digamos  $-i\pi_{B'} \varepsilon^{BC}$ , para algum spinor constante  $\pi_{B'}$ . A adição do fator  $i$  será útil no decorrer deste capítulo. Portanto,

$$\nabla_{BA'} \omega^C = -i\varepsilon_B^C \pi_{A'}. \quad (2.100)$$

Ao integrarmos a equação acima obtemos  $\omega^C = X^{BA'} (-i\varepsilon_B^C \pi_{A'}) + \text{constante}$ . Dessa maneira obtemos

$$\boxed{\begin{aligned} \omega^A &= \overset{\circ}{\omega}^A - iX^{AA'} \overset{\circ}{\pi}_{A'} \\ \pi_{A'} &= \overset{\circ}{\pi}_{A'} \end{aligned}} \quad (2.101)$$

onde  $\overset{\circ}{\omega}^A$  e  $\overset{\circ}{\pi}_{A'}$  são campos spinoriais constantes cujos valores coincidem com os de  $\omega^A$  e  $\pi_{A'}$  na origem  $\mathcal{O}$ . As soluções  $\omega^A$  da eq.(2.98) são determinadas completamente pelas quatro C-componentes de  $\omega^A$  e  $\pi_{A'}$  em um referencial-spin  $\{o^A, \iota^A\}$  em  $\mathcal{O}$ . Essas soluções são elementos de um C-espaço vetorial quadridimensional  $\mathbb{T}^\alpha$  chamado *espaço-twistor*. Tais elementos são chamados  $\binom{1}{0}$ -twistors e serão denotados por

$$\mathbf{Z}^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'}) \longleftrightarrow (\omega^A(\mathcal{O}), \pi_{A'}(\mathcal{O})) = (\overset{\circ}{\omega}^A, \overset{\circ}{\pi}_{A'}), \quad (2.102)$$

já que o campo spinorial  $\omega^A$  é determinado por  $\overset{\circ}{\omega}^A$  e  $\overset{\circ}{\pi}_{A'}$  e só depende da posição  $x^a = X^{AA'}$ . Tal correspondência não é invariante por transformações de Poincaré, já que ela depende da escolha de uma origem  $\mathcal{O}$ . Podemos escrever  $\mathbb{T}^\alpha = \mathbb{G}^A[\mathcal{O}] \oplus \mathbb{G}_{A'}[\mathcal{O}]$ . O twistor  $\mathbf{Z}^\alpha$  é dito *incidente* no ponto  $U \in \mathbb{M}$  se as componentes de  $\mathbf{Z}^\alpha$  satisfazem a eq.(2.97).

O twistor representa as quatro componentes do *momentum*  $p^a$  e as seis componentes do momento angular  $M^{ab}$  de uma partícula sem massa. Tais entidades são definidas abaixo, em termos dos spinors de Weyl:

$$p^a = p^{AA'} = \bar{\pi}^A \pi^{A'} \quad (p^0 > 0), \quad (2.103)$$

$$M^{ab} = M^{AA'BB'} = i\omega^{(A}\bar{\pi}^{B)}\epsilon^{A'B'} - i\epsilon^{AB}\bar{\omega}^{(A'}\pi^{B')}. \quad (2.104)$$

Da primeira das duas expressões acima vemos que o momentum  $p^a$  é nulo e aponta para o futuro.

Consideramos um sistema clássico com momentum  $p^a$  e momento angular  $M^{ab}$  em relação a algum referencial. Ao denotarmos por  $Q$  um ponto no espaço-tempo,  $x^a$  representa as coordenadas do vetor-posição do ponto  $Q$  em relação a uma origem  $\mathcal{O}$  de um outro referencial arbitrário. O momento angular relativo ao ponto  $Q$  será, então

$$M^{ab}(Q) = M^{ab} - x^a p^b + x^b p^a. \quad (2.105)$$

Já o momentum  $p^a$  não se altera perante mudança de referencial:

$$p^a(Q) = p^a. \quad (2.106)$$

Vemos então que as eqs.(2.101) são motivadas diretamente pelas expressões acima, já que, ao definirmos

$$\omega^A(Q) = \omega^A - iX^{AA'}\pi_{A'}, \quad (2.107)$$

$$\pi_{A'}(Q) = \pi_{A'}, \quad (2.108)$$

o momentum e o momento angular se comportam como descritos pelas eqs.(2.105, 2.106). De fato,

$$M^{ab}(Q) = \frac{i}{2}(\omega^A\bar{\pi}^B + \omega^B\bar{\pi}^A)\epsilon^{A'B'} - \frac{i}{2}\epsilon^{AB}(\bar{\omega}^{A'}\pi^{B'} + \bar{\omega}^{B'}\pi^{A'}). \quad (2.109)$$

Então

$$\begin{aligned} M^{ab}(Q) &= \frac{i}{2}[(\omega^A - iX^{AA'}\pi_{A'})\bar{\pi}^B + (\omega^B - iX^{BB'}\pi_{B'})\bar{\pi}^A]\epsilon^{A'B'} \\ &\quad - \frac{i}{2}\epsilon^{AB}[(\bar{\omega}^{A'} + iX^{AA'}\bar{\pi}_A)\pi^{B'} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\omega}^{B'} + iX^{BB'} \bar{\pi}_B) \pi^{A'}] \\
= & M^{ab} + \frac{1}{2} X^{AA'} \pi_{A'} \bar{\pi}^B \epsilon^{A'B'} + \frac{1}{2} X^{BB'} \pi_{B'} \bar{\pi}^A \epsilon^{A'B'} + \frac{1}{2} \epsilon^{AB} X^{AA'} \bar{\pi}_A \pi^{B'} + \frac{1}{2} \epsilon^{AB} X^{BB'} \bar{\pi}_B \pi^{A'} \\
= & M^{ab} - X^{AA'} \pi^{B'} \bar{\pi}^B + X^{BB'} \bar{\pi}^A \pi^{A'} \\
= & M^{ab} - x^a p^b + x^b p^a.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Daqui em diante usaremos a notação

$$\mathbf{Z}^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'}) = (\mathbf{Z}^0, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}^3), \tag{2.111}$$

onde, de acordo com essa convenção, escrevemos

$$\mathbf{Z}^0 = \omega^0(\mathcal{O}), \quad \mathbf{Z}^1 = \omega^1(\mathcal{O}), \quad \mathbf{Z}^2 = \pi_{0'}(\mathcal{O}), \quad \mathbf{Z}^3 = \pi_{1'}(\mathcal{O}). \tag{2.112}$$

Naturalmente associado a  $\mathbb{T}^\alpha$  está o seu *espaço-twistor dual*  $\mathbb{T}_\alpha$  e o produto interno no espaço dos twistors é definido como:

$$h(\mathbf{Z}^\alpha, \mathbf{W}^\alpha) = \mathbf{Z}^0 \bar{\mathbf{W}}^2 + \mathbf{Z}^1 \bar{\mathbf{W}}^3 + \mathbf{Z}^2 \bar{\mathbf{W}}^0 + \mathbf{Z}^3 \bar{\mathbf{W}}^1 = \bar{\mathbf{W}}_\alpha \mathbf{Z}^\alpha \tag{2.113}$$

onde definimos  $\bar{\mathbf{W}}_\alpha$  de modo que

$$\bar{\mathbf{W}}_0 = \bar{\mathbf{W}}^2, \quad \bar{\mathbf{W}}_1 = \bar{\mathbf{W}}^3, \quad \bar{\mathbf{W}}_2 = \bar{\mathbf{W}}^0, \quad \bar{\mathbf{W}}_3 = \bar{\mathbf{W}}^1. \tag{2.114}$$

O grupo de isometria do produto acima é o  $SU(2,2)$ , onde esse último grupo é definido por:

$$SU(2,2) = \{U \in SL(4, \mathbb{C}) \mid U^\dagger A U = A\}, \quad A = \text{diag}(1, 1, -1, -1), \tag{2.115}$$

que obviamente tem assinatura  $(+ + - -)$ .

De fato, podemos escrever

$$h(\mathbf{Z}^\alpha, \mathbf{W}^\alpha) = (\mathbf{Z}^0, \mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{W}}^0 \\ \bar{\mathbf{W}}^1 \\ \bar{\mathbf{W}}^2 \\ \bar{\mathbf{W}}^3 \end{pmatrix}, \tag{2.116}$$

e os autovalores da matriz acima,  $\{\pm 1\}$  têm ambos multiplicidade algébrica dois.

Desse modo,

$$\bar{\mathbf{Z}}_\alpha = (\bar{\pi}_{A'}, \bar{\omega}^A) = (\bar{\pi}_A, \bar{\omega}^{A'}). \tag{2.117}$$

Note que  $\bar{\mathbf{Z}}_\alpha \mathbf{Z}^\alpha = 0$ , para todo twistor  $\mathbf{Z}^\alpha$  incidente em um ponto do espaço-tempo, ou seja, que satisfaz a relação (2.95). De fato,

$$\bar{\mathbf{Z}}_\alpha \mathbf{Z}^\alpha = \mathbf{Z}^0 \bar{\mathbf{Z}}_0 + \mathbf{Z}^1 \bar{\mathbf{Z}}_1 + \mathbf{Z}^2 \bar{\mathbf{Z}}_2 + \mathbf{Z}^3 \bar{\mathbf{Z}}_3 = \bar{\pi}_A \omega^A + \bar{\omega}^{A'} \pi_{A'} = \bar{\pi}_A (iX^{AA'} \pi_{A'}) - iX^{AA'} \bar{\pi}_A \pi_{A'} = 0 \tag{2.118}$$

Escrevendo  $\bar{\mathbf{W}}_\alpha = (\bar{\mu}^A, \bar{\lambda}_{A'})$ , exigimos que tal produto seja invariante para todo ponto de  $\mathbb{M}$ :

$$\lambda_A \omega^A + \mu^{A'} \pi_{A'} = \bar{\lambda}_A \bar{\omega}^A + \bar{\mu}^{A'} \bar{\pi}_{A'}. \tag{2.119}$$

Substituindo a eq.(2.101) nessa última, podemos ver que

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \overset{\circ}{\lambda}_A, \\ \mu^{A'} &= \overset{\circ}{\mu}^{A'} + iX^{AA'} \overset{\circ}{\lambda}_A.\end{aligned}\quad (2.120)$$

Daí podemos verificar que o campo  $\mu^{A'}$  satisfaz a equação conjugada do twistor

$$\boxed{\nabla_A^{(A'} \mu^{B')} = 0} \quad (2.121)$$

Definimos a *helicidade* de um twistor  $\mathbf{Z}^\alpha$  pela expressão

$$s \equiv \frac{1}{2} \mathbf{Z}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = \frac{1}{2} (\omega^A \bar{\pi}_A + \pi_{A'} \bar{\omega}^{A'}). \quad (2.122)$$

(De maneira equivalente podemos definir  $s = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{W}}^\alpha \mathbf{W}_\alpha$ ). A *helicidade* é real e dizemos que  $\mathbf{Z}^\alpha$  (ou  $\mathbf{W}_\alpha$ ) é *nulo* se  $s = 0$ , *de orientação positiva* (*helicidade dextrógira*) se  $s > 0$  ou *de orientação negativa* (*helicidade levógira*) se  $s < 0$ . Portanto  $\mathbb{T}^\alpha$  é dividido em três classes de equivalência  $\mathbb{T}^0$ ,  $\mathbb{T}^+$  e  $\mathbb{T}^-$  correspondendo respectivamente às três possibilidades de valores da *helicidade*. O mesmo vale para  $\mathbb{T}_\alpha$ .

### 2.2.1 Aspectos geométricos da álgebra dos twistors e congruências de Robinson

Nesta seção explicitamos o significado geométrico de um twistor, considerando um twistor  $\binom{1}{0}$  nulo, ou seja,

$$\mathbf{Z}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = 0. \quad (2.123)$$

Analisamos um twistor particular  $\mathbf{Z}^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ , com  $\pi_{A'} \neq 0$ . Queremos determinar o lugar geométrico  $\mathbf{Z}$  dos pontos de  $\mathbb{M}$  nos quais  $\omega^A = 0$ . Nesse lugar geométrico, denominado *raio*, o vetor posição  $x^a = X^{AA'}$  deve satisfazer, pela eq.(2.101),

$$iX^{AA'} \overset{\circ}{\pi}_{A'} = \overset{\circ}{\omega}^A. \quad (2.124)$$

Devemos assumir que os spinors  $\omega^A$  e  $\bar{\pi}^A$  não sejam proporcionais entre si em  $\mathcal{O}$ . Uma solução da equação acima é dada por

$$x^a = (i \overset{\circ}{\omega}^{B'} \pi_{B'})^{-1} \overset{\circ}{\omega}^A \overset{\circ}{\omega}^{A'}. \quad (2.125)$$

O vetor  $x^a$  é real, pela eq.(2.125). As demais soluções da eq.(2.125) acima devem ser tais que suas diferenças aniquilem  $\pi_{A'}$ . Já que  $x^a$  é real, os termos das demais soluções deverão ser múltiplos reais de  $\bar{\pi}^A \pi^{A'} = p^a$ . Portanto a solução geral da eq.(2.124) tem a forma

$$x^a = (i \overset{\circ}{\omega}^{B'} \pi_{B'})^{-1} \overset{\circ}{\omega}^A \overset{\circ}{\omega}^{A'} + h \bar{\pi}^A \pi^{A'}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (2.126)$$

O campo vetorial de  $x^a$  determina uma *linha nula*  $\mathbf{Z}$  na direção da bandeira definida pelo spinor  $\bar{\pi}^A$ . Tal linha passa pelo ponto  $Q$ , dado por  $h = 0$  em (2.126) cujo deslocamento em relação a  $\mathcal{O}$  é ao longo da bandeira  $\overset{\circ}{\omega}^A$ . Daí  $Q$  se encontra na superfície do cone de luz com vértice em  $\mathcal{O}$ .

No caso em que  $\pi_{A'} = 0$  não existe um lugar geométrico finito  $\mathbf{Z}$ , de acordo com a eq.(2.124). Se  $\overset{\circ}{\omega}^A \neq 0$  (no caso em que  $\overset{\circ}{\omega}^A = 0$ , então  $\mathbf{Z} \equiv 0$ ),  $\mathbf{Z}$  é o gerador do cone de luz no infinito [Pe86].

Se  $\mathbf{Z}^\alpha$  não for nulo, podemos descrever seu lugar geométrico. Considere um raio  $\mathbf{X}$  que passa por  $\mathcal{O}$  na direção de  $\omega^A(\mathcal{O})$ . O raio  $\mathbf{X}$  pode ser representado pelo twistor

$$\mathbf{X}^\alpha \longleftrightarrow (0, \bar{\omega}_{A'}(\mathcal{O})). \quad (2.127)$$

Com isso, a direção da bandeira associada a  $\omega^A$  é caracterizada pela condição  $\mathbf{X}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = 0$ . Como a origem é arbitrária, então em qualquer ponto a direção da bandeira associada a  $\omega^A$  é a direção do raio  $\mathbf{X}$  através do ponto descrito pelo twistor  $\mathbf{X}^\alpha$  sujeito às condições

$$\mathbf{X}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = 0, \quad \mathbf{X}^\alpha \bar{\mathbf{X}}_\alpha = 0. \quad (2.128)$$

Assim as bandeiras do campo spinorial  $\bar{\omega}$  apontam ao longo dos raios dados pela eq.(2.128), que descreve a chamada *congruência de Robinson* [Pe66].

Escolhemos um twistor particular  $\mathbf{Z}^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$  com  $\mathbf{Z}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = 2s$  dado por

$$\mathbf{Z}^\alpha = (0, s, 0, 1), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.129)$$

A eq.(2.101) para o campo spinorial  $\omega$  é dada por

$$\begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.130)$$

Esse é um caso bem particular de uma congruência de Robinson.

Considere dois vetores  $x^a = X^{AA'}$  e  $w^a = W^{AA'}$  associados, respectivamente aos twistors  $\mathbf{Z}^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$  e  $\mathbf{W}^\alpha = (\mu^A, \lambda_{A'})$ . Os raios  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{W}$  se encontram em um ponto  $P$  tal que os vetores  $x^a$  e  $w^a$  se interceptam. Nesse ponto, obviamente  $X^{AA'} = W^{AA'}$ . Além disso, os raios  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{W}$  são os lugares geométricos tais que

$$\begin{aligned} \omega^A &= iX^{AA'} \pi_{A'}, \\ \mu^A &= iX^{AA'} \lambda_{A'}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Tomando o conjugado transposto da primeira das equações acima,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{A'} &= -iX^{AA'} \bar{\pi}_A, \\ iX^{AA'} \lambda_{A'} &= \mu^A. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Multiplicando as equações acima obtemos

$$\bar{\omega}^{A'} \lambda_{A'} = -\bar{\pi}_A \mu^A \Rightarrow \bar{\omega}^{A'} \lambda_{A'} + \bar{\pi}_A \mu^A = 0. \quad (2.133)$$

Mas esse resultado se traduz por  $\mathbf{X}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = \mathbf{Z}^\alpha \bar{\mathbf{X}}_\alpha = 0$ , em se tratando de vetores que satisfazem a eq.(2.131). Portanto *uma condição necessária e suficiente para que dois vetores se interceptem é que seus twistors associados satisfaçam as relações:*

$$\mathbf{X}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha = \mathbf{Z}^\alpha \bar{\mathbf{X}}_\alpha = 0. \quad (2.134)$$

Tal condição é chamada *incidência de vetores*.

Daí segue-se que um ponto  $P$  do espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{M}$  é caracterizado pela intersecção de dois twistors.

Tal como visto até agora, o espaço dos twistors está relacionado com o espaço-tempo por uma correspondência que representa os raios de luz no espaço-tempo como pontos no espaço de twistors, inicialmente o espaço dos raios de luz.

Podemos pensar em um ponto arbitrário do espaço-tempo como sendo a origem de um cone de luz, e tal ponto é representado por todos os raios de luz que o atravessam e formam a “hipercasca cônica”. Twistors nulos descrevem de modo apropriado os raios de luz em  $M$  e um ponto no espaço-tempo se torna uma esfera de Riemann no espaço dos twistors.

O espaço de twistors  $T^\alpha$  tem oito dimensões reais [Pe66]. Ao considerarmos os raios de luz como linhas de universo de fótons, também leva-se em conta a energia do fóton e sua helicidade, que pode ser dextrógira ou levógira. Isso é mais complicado que simples raios de luz, mas a vantagem é que obtemos um espaço projetivo complexo de três dimensões (seis dimensões reais),  $\mathbb{CP}^3$ , que é o *espaço projetivo dos twistors* (PT).

O espaço projetivo PT é definido [Jo76] como o conjunto das classes de equivalência dos elementos de  $T^\alpha$  sob a ação do grupo multiplicativo  $\overset{\circ}{C}$  (anteriormente definido no cap.(2))

$$PT \simeq T^\alpha / \overset{\circ}{C} \simeq \mathbb{CP}^3. \quad (2.135)$$

O espaço PT tem um subespaço  $PT^0$  de cinco dimensões, que o divide na parte  $PT^+$  de helicidade dextrógira e outra de helicidade levógira  $PT^-$ , já vistas no parágrafo que segue à eq.(2.122).

A correspondência entre o espaço-tempo ( $M$ ) e os espaço dos twistors é dada pela seguinte tabela

Espaço-tempo $M$	Espaço dos twistors nulos $PT^0$
Ponto	Esfera de Riemann
Raio de luz (linhas nulas)	Pontos

A esfera de Riemann descrita na tabela acima é rigorosamente  $\mathbb{CP}^1$ , a variedade de linhas complexas que passam pela origem em  $PT^0$ , que no entanto é difeomorfa [Ri93] à esfera de Riemann.

*To those who do not know mathematics it is difficult to get across a real feeling as to the beauty, the deepest beauty, of nature. I really think that two cultures separate people who have and people who have not had this experience of understanding mathematics well enough to appreciate nature once. (...)*

*If you want to learn about nature, to appreciate nature, it is necessary to understand the language that she speaks in.*

Richard P. Feynmann, em *The Character of Physical Law*, 1965.

## 3.1 Algumas definições úteis

Considere um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita  $n$  sobre um corpo<sup>1</sup>  $\mathbb{F}$ . Escolha arbitrariamente uma base  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n\}$  para  $V$ . Dessa maneira, podemos escrever um elemento genérico  $\mathbf{v} \in V$  como  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ , onde está implícita a convenção da somatória de Einstein.

A todo espaço vetorial  $V$  está naturalmente associado o *espaço dual* de  $V$ , denotado por  $V^*$ . Esse espaço é o conjunto dos funcionais lineares  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{F}$  (também denominados *covetores*). Podemos ver que o espaço  $V^*$  é de fato um espaço vetorial, ao definirmos a soma de covetores através de  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v})$  e a multiplicação por escalar através de  $(a\alpha)(\mathbf{v}) = a(\alpha(\mathbf{v}))$ ,  $a \in \mathbb{F}$ .

Defina os covetores  $\mathbf{e}^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) como

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{quando } i = j, \\ 0, & \text{quando } i \neq j. \end{cases}$$

Segue-se que os covetores  $\{\mathbf{e}^i\}$  formam uma base para  $V^*$ . As coordenadas de um covetor arbitrário  $\alpha$  nessa base são dadas pelo valor de  $\alpha$  na base  $\{\mathbf{e}^i\}$  de  $V$ . De fato, dado  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ ,  $\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \alpha(\mathbf{e}_i) = v^i \alpha_i$ . A base  $B^* = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{e}^n\}$  é chamada de *base dual* de  $B$ . É simples notar que  $\dim V^* = \dim V$ . Esse fato sugere um isomorfismo entre os espaços  $V$  e  $V^*$ . Definimos uma aplicação linear, denominada *correlação*  $\tau : V \rightarrow V^*$ , que por sua vez define de modo natural um funcional bilinear  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v})(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

A correlação  $\tau : V \rightarrow V^*$  não é um isomorfismo canônico entre  $V$  e  $V^*$ , já que essa aplicação depende da escolha de bases em  $V$  e  $V^*$ . A correlação  $\tau$  é dita *não-degenerada* se

<sup>1</sup>Usaremos o recurso de complexificação de espaços vetoriais, e quando o espaço  $V$  for sobre  $\mathbb{C}$ , denotaremos  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ , sendo  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

$\ker \tau = \{0\}$ . Pelo Teorema do núcleo e da imagem<sup>2</sup>, se  $\ker \tau = \{0\}$ , então  $\tau$  é isomorfismo entre  $V$  e  $V^*$ .

### 3.1.1 Produto tensorial

Dados os covetores  $\alpha^{\nu_j} \in V^*$  e os vetores  $\mathbf{v}_{\mu_j} \in V$ , definimos um *tensor do tipo*  $\binom{0}{k}$  como

$$\begin{aligned} \alpha^{\nu_1} \otimes \alpha^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\nu_k} : V \times V \times \cdots \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha^{\nu_1} \otimes \alpha^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\nu_k})(\mathbf{v}_{\mu_1}, \mathbf{v}_{\mu_2}, \dots, \mathbf{v}_{\mu_k}) &\mapsto \alpha^{\nu_1}(\mathbf{v}_{\mu_1})\alpha^{\nu_2}(\mathbf{v}_{\mu_2}) \cdots \alpha^{\nu_k}(\mathbf{v}_{\mu_k}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

O espaço definido pelo produto tensorial de covetores é também um espaço vetorial, denotado por  $T_q(V) = (V)^{\otimes q}$ , onde  $(V)^{\otimes q}$  denota o produto de  $q$ -termos, do tipo  $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ .

Também definimos um tensor do tipo  $\binom{k}{0}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\nu_1} \otimes \mathbf{v}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\nu_k} : V^* \times V^* \times \cdots \times V^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_{\nu_1} \otimes \mathbf{v}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\nu_k})(\alpha^{\mu_1}, \alpha^{\mu_2}, \dots, \alpha^{\mu_k}) &\mapsto \alpha^{\mu_1}(\mathbf{v}_{\nu_1})\alpha^{\mu_2}(\mathbf{v}_{\nu_2}) \cdots \alpha^{\mu_k}(\mathbf{v}_{\nu_k}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

É claro que podemos considerar um caso mais geral, generalizando para um produto tensorial de um número arbitrário de covetores e vetores, onde o espaço em questão é o  $T_q^p(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ . Um elemento arbitrário  $T \in T_q^p(V)$  pode ser escrito na forma

$$T = T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \mathbf{e}^{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \mathbf{e}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_q},$$

onde  $T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} = T(\mathbf{e}^{\mu_1}, \mathbf{e}^{\mu_2}, \dots, \mathbf{e}^{\mu_p}, \mathbf{e}_{\nu_1}, \mathbf{e}_{\nu_2}, \dots, \mathbf{e}_{\nu_q})$ .

Dada uma permutação  $\sigma$ , definimos o operador  $\mathcal{ALT}$ , denominado *alternador*, da seguinte maneira:

$$\mathcal{ALT}(X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \otimes X_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes X_{\sigma(p-1)} \otimes X_{\sigma(p)}, \quad (3.3)$$

onde  $S_p$  é o *grupo simétrico* formado pelo conjunto de todas as permutações e  $\varepsilon(\sigma)$  vale  $+1(-1)$  se a permutação  $\sigma$  for par (ímpar). O alternador definido dessa maneira é um operador de projeção ( $\mathcal{ALT}^2 = \mathcal{ALT}$ ). Um  $k$ -covetor é um elemento  $\Psi_k$  tal que  $\Psi_k = \mathcal{ALT}(\Psi_k)$ .

## 3.2 Álgebra exterior

Dados  $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k \in V^*$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ , definimos o *produto exterior*  $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} \alpha^1(\mathbf{v}_1) & \alpha^1(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha^1(\mathbf{v}_k) \\ \alpha^2(\mathbf{v}_1) & \alpha^2(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha^2(\mathbf{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(\mathbf{v}_1) & \alpha^k(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha^k(\mathbf{v}_k) \end{vmatrix}$$

<sup>2</sup>Esse teorema enuncia o seguinte: sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita e considere uma aplicação linear  $f : V \rightarrow W$ , então  $\text{rank } f + \dim \ker f = \dim V$ . Também prova-se que  $f$  é injetiva  $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$ . Como corolário do teorema,  $f$  é injetiva  $\Leftrightarrow$  é sobrejetiva, portanto é um isomorfismo entre  $V$  e  $W$ .

O conjunto dos funcionais  $k$ -lineares alternados formam um espaço vetorial  $\Lambda^k(V)$  e seus elementos serão ditos  $k$ -covetores. Denotaremos também  $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$  e  $\Lambda^1(V) = V^*$ .

Definimos produtos de  $p$ -covetores simples como

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^m) \wedge (\beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^l) = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^m \wedge \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^l. \quad (3.4)$$

Note que, se  $\alpha^k \in \Lambda^k(V)$  e  $\beta^m \in \Lambda^m(V)$ , então

$$\alpha^k \wedge \beta^m = (-1)^{mk} \beta^m \wedge \alpha^k. \quad (3.5)$$

Uma base para o espaço  $\Lambda^k(V)$  é da forma  $\{e^{\mu_1} \wedge e^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e^{\mu_k}\}$  e o número de elementos distintos consiste na combinação de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ , que é dada por  $\binom{n}{k}$ . Dado  $a \in \Lambda^k(V)$ , tal elemento pode ser escrito como

$$a = \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k} a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} e^{\mu_1} \wedge e^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e^{\mu_k}. \quad (3.6)$$

A dimensão de  $\Lambda^k(V)$  é dada por

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = \dim \Lambda^{n-k}(V). \quad (3.7)$$

Pela definição de produto exterior podemos ver que o produto exterior de  $m$  covetores se anula sempre que  $m > n$ .

Isso mostra que o único espaço  $\Lambda^k(V)$  se  $k > n$  é o espaço trivial. Em particular,  $\dim \Lambda^n(V) = \binom{n}{n} = 1$  e os elementos de  $\Lambda^n(V)$  são denominados *pseudoescalares*, enquanto que os  $k$ -covetores também recebem o nome de  $k$ -formas, quando o espaço vetorial em questão for o espaço tangente a uma variedade.

Ao efetuarmos a multiplicação exterior entre 1-formas, obtemos 2-formas, 3-formas, ...,  $k$ -formas ( $1 \leq k \leq n$ ), e assim sucessivamente, dependendo do número de vezes que efetuamos o produto exterior (o mesmo vale para os vetores). Cada  $k$ -forma pertence a um espaço vetorial  $\Lambda^k(V)$ . Além disso a álgebra  $(\Lambda^k(V), \wedge)$  não é fechada em relação ao produto exterior. Utilizando a eq.(3.4), ao considerarmos  $\Psi_k \in \Lambda^k(V)$  e  $\Psi_m \in \Lambda^m(V)$ , vemos que  $\Psi_k \wedge \Psi_m \in \Lambda^{m+k}(V)$ . Para contornarmos essa situação não desejada, definimos

$$\Lambda^*(V) = \Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V) \quad (3.8)$$

Em muitos casos estamos interessados em trabalhar com formas diferenciais em variedades. Considere uma variedade  $M$  e  $\{x^i\}$  coordenadas locais definidas em um aberto  $U \subseteq M$ . Dada uma base  $\{e_i\}$  de vetores unitários do espaço tangente  $V$  e a correspondente base dual  $\{e^i\}$ ,  $e^i = dx^i$  e  $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  temos  $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$ . Podemos escrever uma multiforma diferencial  $\Psi \in \Lambda^*(V)$  como

$$\Psi = a + a_i dx^i + a_{ij} dx^i \wedge dx^j + a_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \cdots + p dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (3.9)$$

É possível definir de maneira similar [Rz93] a álgebra  $\Lambda(V)$ , onde consideramos vetores ao invés de covetores.

**Definição ►** O par  $(\Lambda^*(V), \wedge)$  é denominado **álgebra exterior** do espaço vetorial  $V^*$ . De maneira análoga pode ser definida a álgebra exterior  $\Lambda(V)$ , onde passamos a considerar o produto exterior de vetores. ◀

Finalmente,  $\dim \Lambda^*(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

### 3.2.1 Operações dentro da álgebra exterior

Nesta seção tratamos da álgebra  $\Lambda^*(V)$  dos multivetores, mas o desenvolvimento é análogo para o caso da álgebra  $\Lambda(V)$  dos multivetores e definimos as operações dentro da álgebra exterior a seguir:

- **Projeção:**

$$\langle \rangle_k: \Lambda^*(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$$

de modo que  $\langle \Psi \rangle_k$  é a parte  $k$ -covetorial do multivetor  $\Psi$ .

- **Reversão:**

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)^\sim = \alpha_k \wedge \alpha_{k-1} \wedge \cdots \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_1 = (-1)^{k(k-1)/2} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k.$$

- **Involução graduada:**

Dado um multivetor  $\Psi$ , a ação da involução graduada no multivetor  $\Psi$  é denotada por  $\widehat{\Psi}_k = \#(\Psi_k) = (-1)^k \Psi_k$ . Este automorfismo é usado para definirmos uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação em  $\Lambda^*(V)$ . Os  $\mathbb{Z}_2$ -subespaços homogêneos consistem na soma de todos os  $\mathbb{Z}$ -subespaços de grau par e ímpar, onde o grau do subespaço se refere ao autovalor  $\pm 1$  do operador  $\#$ , já que os  $\mathbb{Z}$ -subespaços homogêneos são autoespaços do operador  $\#$ .

- **Conjugação:**

Esta operação é definida como sendo a composição da reversão com a involução graduada, e é denotada por  $\widetilde{\Psi} = \#(\widetilde{\Psi}) = \widehat{\widetilde{\Psi}}$ .

- **Contração:**

No começo deste capítulo vimos a aplicação linear  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Com a introdução da álgebra exterior, o funcional linear  $\alpha$  é visto como uma aplicação de  $\Lambda^1(V) = V^*$  em  $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ . Podemos generalizar esse conceito, introduzindo uma operação denominada *contração à esquerda* pelo vetor  $\mathbf{v}$ , que age sobre  $\omega \in \Lambda^k(V)$  e resulta em um elemento de  $\Lambda^{k-1}(V)$ , da seguinte maneira:

$$(\mathbf{v} \lrcorner \omega)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}). \quad (3.10)$$

No caso em que  $k = 1$ , a definição se reduz a  $\mathbf{v} \lrcorner \alpha = \alpha(\mathbf{v})$ . Para  $a \in \mathbb{R}$ , temos  $\mathbf{v} \lrcorner a = 0$ . A definição dada acima não é útil do ponto de vista computacional. Vamos considerar a contração de  $\alpha \wedge \beta$  por um vetor  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} \lrcorner (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{u}) = (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\alpha(\mathbf{v})\beta - \beta(\mathbf{v})\alpha)(\mathbf{u}) = ((\mathbf{v} \lrcorner \alpha)\beta - (\mathbf{v} \lrcorner \beta)\alpha)(\mathbf{u}).$$

A generalização dessa equação para multivetores  $\Psi$  e  $\Phi$  arbitrários é dada pela *regra de Leibniz graduada*:

$$\mathbf{v} \lrcorner (\Psi \wedge \Phi) = (\mathbf{v} \lrcorner \Psi) \wedge \Phi + (\# \Psi) \wedge (\mathbf{v} \lrcorner \Phi) \quad (3.11)$$

A definição de *contração à direita* é feita de maneira semelhante:

$$(\omega \lrcorner \mathbf{v})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}) \quad (3.12)$$

e a *regra de Leibniz graduada para a contração à direita* é expressa como

$$(\Psi \wedge \Phi) \lrcorner \mathbf{v} = \Psi \wedge (\Phi \lrcorner \mathbf{v}) + (\Psi \lrcorner \mathbf{v}) \wedge (\# \Phi) \quad (3.13)$$

A contração à esquerda se relaciona com a contração à direita por:

$$\boxed{\mathbf{v} \rfloor \Psi = -(\# \Psi) \lfloor \mathbf{v}} \quad (3.14)$$

onde  $\Psi \in \Lambda^*(V)$  é um multivetor genérico.

Podemos não somente nos restringir à contração por vetores, mas por  $k$ -vetores (ou de modo mais geral, por multivetores, estendendo-se o caso dos  $k$ -vetores por linearidade). Dado um  $k$ -vetor  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$ , definimos

$$\boxed{(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) \rfloor = \mathbf{v}_1 \rfloor \mathbf{v}_2 \rfloor \cdots \mathbf{v}_k \rfloor}$$

e

$$\boxed{\lfloor (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = \lfloor \mathbf{v}_1 \lfloor \mathbf{v}_2 \cdots \lfloor \mathbf{v}_k} \quad (3.15)$$

Essa definição é natural de maneira que o operador  $\lfloor$  seja o dual do operador  $\wedge$ . Segue-se que a contração de um  $q$ -vetor por um  $p$ -vetor se anula para  $p > q$ . A mesma generalização pode ser feita para multivetores.

### 3.3 A álgebra de Grassmann

Primeiramente é preciso definir a extensão do funcional bilinear simétrico não-degenerado (ou métrica)  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , o que é equivalente a estender a correlação  $\tau : V \rightarrow V^*$ . Definimos a extensão dessa correlação como uma aplicação  $\tau : \Lambda_k(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$  dada por

$$\tau(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = \tau(\mathbf{v}_1) \wedge \tau(\mathbf{v}_2) \wedge \cdots \wedge \tau(\mathbf{v}_k). \quad (3.16)$$

A partir disso, definimos a extensão de  $g$  dada por  $G_k : \Lambda_k(V) \times \Lambda_k(V) \rightarrow \mathbb{R}$  para o caso de  $k$ -vetores simples como

$$G_k(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_k \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_1) \rfloor \tau(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k). \quad (3.17)$$

Dados  $\Psi_k \in \Lambda^k(V)$  e  $\Phi_m \in \Lambda^m(V)$ , definimos a métrica  $G$  em  $\Lambda(V)$  impondo que ela seja diagonal nos subespaços homogêneos  $\Lambda^i(V)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), ou seja,  $G(\Psi_k, \Phi_m) = 0$ , se  $k \neq m$ . Escrevemos, dados  $\Psi$  e  $\Phi \in \Lambda(V)$ ,

$$G(\Psi, \Phi) = \sum_{p=0}^n G_p(\Phi_p, \Psi_p).$$

**Definição** ► A álgebra exterior  $(\Lambda(V), \wedge)$  munida com a extensão  $G$  para todo  $\Lambda(V)$  é a **álgebra de Grassmann** do espaço vetorial  $V$ , que denotaremos por  $G(V)$ . ◀

**Observação:** podemos fazer todo o desenvolvimento acima para covetores, fazendo as extensões de  $g^{-1} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tau^{-1} : V^* \rightarrow V$ . Nesse caso,  $g^{-1} : V^* \rightarrow V^* \rightarrow \mathbb{R}$  não é a inversa da forma bilinear  $g$ .

#### 3.3.1 Isomorfismo de Hodge

Vimos na seção (3.1) que os espaços vetoriais  $\Lambda^k(V)$  e  $\Lambda^{n-k}(V)$  têm a mesma dimensão. Não existe, entretanto, nenhum isomorfismo canônico entre esses espaços. O *isomorfismo de Hodge* está definido dentro do contexto da álgebra de Grassmann, pois precisamos necessariamente de uma correlação em  $V$ .

Seja o pseudoescalar  $\eta$  definido por  $\eta = |\det \tau|^{1/2} \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$ , onde  $\det \tau$  é dado implicitamente por

$$\tau(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = \tau(\mathbf{e}_1) \wedge \tau(\mathbf{e}_2) \wedge \cdots \wedge \tau(\mathbf{e}_n) = (\det \tau) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n. \quad (3.18)$$

Tal isomorfismo dado pelo *operador dual de Hodge*  $\star : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$  é definido por

$$\begin{aligned} \star 1 &= \eta, \\ \star \psi &= \tau^{-1}(\tilde{\psi}) \lrcorner \eta, \end{aligned}$$

onde  $\psi$  é um multivetor arbitrário. Uma outra definição para o isomorfismo de Hodge é dada por

$$\alpha \wedge \star \beta = G^{-1}(\alpha, \beta) \eta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^*(V) \quad (3.19)$$

Podemos mostrar que tal definição equivale à definição anterior.

## 3.4 Ideais algébricos e idempotentes

### 3.4.1 Ideais

Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra. Um subespaço vetorial  $I_L \subset \mathcal{A}$  é chamado um *ideal à esquerda* de  $\mathcal{A}$  se  $\mathcal{A}I_L \subset I_L$ . Analogamente, a um conjunto  $I_R \subset \mathcal{A}$  denominamos *ideal à direita* de  $\mathcal{A}$  se  $I_R\mathcal{A} \subset I_R$ . Um conjunto  $I \subset \mathcal{A}$  é um *ideal bilateral* (ou simplesmente *ideal*) de  $\mathcal{A}$  se  $\mathcal{A}I\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ . Obviamente ideais são subálgebras. Um elemento não-nulo  $a \in \mathcal{A}$  é dito *nilpotente* se  $a^k = 0$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Dizemos que uma álgebra ou ideal é nilpotente quando todos seus elementos são nilpotentes. Segue, portanto, que todo ideal nilpotente de  $\mathcal{A}$  está contido em um único ideal nilpotente maximal, chamado de *radical*. Uma álgebra é *semi-simples* se seu radical for nulo.

Uma álgebra é dita *simples* se seus únicos ideais são os triviais, desde que  $\mathcal{A}$  não seja unidimensional e nilpotente. Enunciamos uma série de teoremas, cuja demonstração está em [BT87] a fim de encaminharmos o teorema da decomposição de Wedderburn.

**Teorema 3.1** ▶ *Uma álgebra é semi-simples se, e somente se, é simples ou soma direta de álgebras simples.* ◀

**Teorema 3.2** ▶ *Uma álgebra  $\mathcal{A}$  associativa sobre  $\mathbb{R}$  é simples se, e somente se,  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{D} \otimes M$ , onde  $\mathcal{D} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  e  $M$  é uma álgebra de matrizes sobre  $\mathbb{R}$ .* ◀

As únicas álgebras reais de divisão associativas são  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  [Re90].

### 3.4.2 Idempotentes

Em uma álgebra  $\mathcal{A}$ , um elemento  $f$  é dito um *idempotente* se  $f^2 = f$  e  $f \neq 0$ . Em uma álgebra de divisão  $\mathcal{A}$  o único idempotente é a unidade, pois se  $f \neq 0$  e  $f^2 = f$ , multiplicando ambos os lados por  $f^{-1}$  obtemos  $f = 1_{\mathcal{A}}$ . Se não existirem idempotentes  $f_1$  e  $f_2$  tais que  $f_1 f_2 = 0$  e  $f = f_1 + f_2$ , dizemos que  $f$  é um idempotente *primitivo*.

**Proposição 3.1** ▶ *Todo idempotente não primitivo pode ser escrito como soma de idempotentes primitivos ortogonais.* ◀

**Proposição 3.2** ▶ *O idempotente  $f$  é primitivo se, e somente se,  $f$  é o único idempotente em  $f\mathcal{A}f$ .* ◀

O estudo dos idempotentes nas álgebras de Clifford são de suma importância, já que os spinors algébricos são os ideais minimais laterais de  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ , construídos a partir de idempotentes primitivos.

**Proposição 3.3** ▶ *Sejam uma base ortonormal de  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$  e  $r_i$  os números de Radon-Hurwitz dados pela tabela abaixo*

$j$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r_j$	0	1	2	2	3	3	3	3

com a relação de recorrência  $r_{j+8} = r_j + 4$ . Existem  $k = q - r_{q-p}$  elementos  $e_{I_1}, \dots, e_{I_k}$  tais que  $e_{I_j}^2 = 1$  e todos esses elementos comutam entre si. Então os elementos da forma

$$\frac{1}{2}(1 \pm e_{I_1}) \frac{1}{2}(1 \pm e_{I_2}) \dots \frac{1}{2}(1 \pm e_{I_k}), \quad (3.20)$$

são idempotentes primitivos ortogonais entre si cuja soma é igual a 1. Mais ainda, todo idempotente primitivo em  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$  é da forma acima. ◀

### 3.5 A álgebra exterior como quociente da álgebra tensorial

Seja agora  $I$  um ideal de  $T(V)$ , a álgebra dos tensores covariantes, consistindo das somas de termos da forma  $a \otimes x \otimes x \otimes b$ , onde  $x \in V$  e  $a, b \in T(V)$ . Definimos a álgebra exterior  $\Lambda(V)$  por

$$\Lambda(V) = T(V)/I \quad (3.21)$$

Elementos em  $\Lambda(V)$  são classes de equivalência de elementos em  $T(V)$ , onde a relação de equivalência é definida por  $a \sim b$ , se  $a = b + c$ , para algum  $c \in I$ . A estrutura de espaço vetorial de  $\Lambda(V)$  é definida por

$$[a] + \lambda[b] = [a + \lambda b], \quad a, b \in T(V), \lambda \in \mathbb{F},$$

e a multiplicação, que é denotada por  $\wedge$  é dada por

$$[a] \wedge [b] = [a \otimes b].$$

Se  $x, y \in V$ , então

$$\begin{aligned} x \otimes y &= \frac{1}{2} [(x \otimes y - y \otimes x) + (x + y) \otimes (x + y) - x \otimes x - y \otimes y] \\ &= x \wedge y + \frac{1}{2} \{(x + y) \otimes (x + y) - x \otimes x - y \otimes y\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O termo entre chaves está em  $I$ . Portanto  $x \otimes y \sim x \wedge y$  ou  $[x \otimes y] = [x \wedge y]$  e  $[x] \wedge [y] = [x \wedge y]$ .

Pela definição do ideal  $I$ , ele é justamente o núcleo do alternador  $\mathcal{ALT}$  e portanto  $[a] = [\mathcal{ALT} a]$ . A generalização desse resultado para multivetores pode ser obtido por indução finita [BT87]:

**Teorema 3.3** ▶  $x \otimes \omega \sim x \wedge \omega$ , para  $x \in V$  e  $\omega \in \Lambda^*(V)$ . ◀

### 3.6 Álgebras de Clifford (I)

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  munido de um funcional bilinear simétrico não-degenerado  $g$ . Sejam  $\mathcal{A}$  uma álgebra associativa com unidade  $1_{\mathcal{A}}$  e  $\gamma : V \rightarrow \mathcal{A}$  uma aplicação linear.

**Definição** ► O par  $(\mathcal{A}, \gamma)$  é uma **álgebra de Clifford (AC)** para o espaço quadrático  $(V, g)$  quando  $\mathcal{A}$  é gerada como uma álgebra por  $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$  e  $\{a1_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathbb{R}\}$  e  $\gamma$  satisfaz, para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,

$$\boxed{\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{u}, \mathbf{v})1_{\mathcal{A}}} \blacktriangleleft \quad (3.23)$$

Considere uma base ortonormal  $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de  $V$ . Dentro da AC  $(\mathcal{A}, \gamma)$  para  $(V, g)$ , temos

$$\gamma(\mathbf{e}_i)\gamma(\mathbf{e}_j) + \gamma(\mathbf{e}_j)\gamma(\mathbf{e}_i) = 0 \quad (i \neq j)$$

e

$$(\gamma(\mathbf{e}_i))^2 = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)1_{\mathcal{A}}.$$

Podemos ver que, sendo  $\mathcal{A}$  gerada por  $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$  e  $\{a1_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathbb{R}\}$ , então ela é gerada pelos produtos

$$\mathcal{A} = \text{span}\{\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n} \mid \mu_i = 0, 1\},$$

onde denotamos  $\gamma(\mathbf{e}_1)^0 \dots \gamma(\mathbf{e}_n)^0 = 1_{\mathcal{A}}$ . O número de elementos da forma  $\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}$  com  $\mu_i = 0, 1$  é  $2^n$ . Assim a máxima dimensão de uma AC é  $2^n$ .

**Definição** ► Uma álgebra de Clifford  $(\mathcal{A}, \gamma)$  para o espaço quadrático  $(V, g)$  é dita uma **álgebra de Clifford universal** se, para cada álgebra de Clifford  $(\mathcal{B}, \rho)$  para  $(V, g)$ , existir um homomorfismo  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , tal que  $\rho = \phi \circ \gamma$  e  $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ . Denotaremos uma AC universal para  $(V, g)$  por  $\mathcal{Cl}(V, g)$ . ◀

Uma definição equivalente à definição acima é

**Definição'** ► Uma álgebra de Clifford para o espaço quadrático  $\mathbb{R}^{p,q}$  é universal se ela é gerada como álgebra pelos geradores de  $\mathbb{R}^{p,q}$ , mas não por um subespaço de  $\mathbb{R}^{p,q}$ . ◀

**Teorema 3.4** ► A álgebra de Clifford  $(\mathcal{A}, \gamma)$  para o espaço quadrático  $(V, g)$  é universal quando  $\dim \mathcal{A} = 2^n$ , onde  $n = \dim V$ . ◀

**Prova:** Consideremos uma base ortonormal  $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de  $V$ . Para a AC  $(\mathcal{A}, \gamma)$ , temos  $\gamma(\mathbf{e}_i)\gamma(\mathbf{e}_j) + \gamma(\mathbf{e}_j)\gamma(\mathbf{e}_i) = 0$  para  $(i \neq j)$  e  $(\gamma(\mathbf{e}_i))^2 = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)1_{\mathcal{A}}$ . Nesse caso o conjunto  $\{\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n} \mid \mu_i = 0, 1\}$  não apenas gera  $\mathcal{A}$  como é uma base de  $\mathcal{A}$ , com a hipótese de que  $\dim \mathcal{A} = 2^n$ . Seja agora  $(\mathcal{B}, \rho)$  uma AC arbitrária. Temos então  $\rho(\mathbf{e}_i)\rho(\mathbf{e}_j) + \rho(\mathbf{e}_j)\rho(\mathbf{e}_i) = 0$ ,  $(i \neq j)$  e  $(\rho(\mathbf{e}_i))^2 = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)1_{\mathcal{A}}$  e o conjunto  $\{\rho(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\rho(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\rho(\mathbf{e}_n)^{\mu_n} \mid \mu_i = 0, 1\}$  gera  $\mathcal{B}$ . Definimos uma aplicação linear  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que

$$\phi(\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}) = \rho(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\rho(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\rho(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}.$$

Vemos então que  $\phi$  definido dessa maneira é um homomorfismo de álgebras, satisfazendo  $\phi(\mathbf{e}_i)\phi(\mathbf{e}_j) + \phi(\mathbf{e}_j)\phi(\mathbf{e}_i) = 2g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)1_{\mathcal{B}}$ . Pela definição, a AC  $(\mathcal{A}, \gamma)$  é portanto uma AC universal  $\mathcal{Cl}(V, g)$ .

□

**Lema** ► Defina o centro de  $Cl_{p,q}$ , a álgebra de Clifford associada ao espaço  $\mathbb{R}^{p,q}$  como

$$\text{Cen}(Cl_{p,q}) = \{a \in Cl_{p,q} \mid ax = xa, \forall x \in Cl_{p,q}\} \quad (3.24)$$

Se  $n = \dim \mathbb{R}^{p,q}$  for par, então  $\text{Cen}(Cl_{p,q}) = \Lambda_0(\mathbb{R}^{p,q})$  e se  $n$  for ímpar então  $\text{Cen}(Cl_{p,q}) = \Lambda_0(\mathbb{R}^{p,q}) \oplus \Lambda_n(\mathbb{R}^{p,q})$ . ◀

Note que aqui usamos a notação  $\Lambda_0(\mathbb{R}^{p,q})$  e  $\Lambda_n(\mathbb{R}^{p,q})$  referentes respectivamente ao espaço dos escalares e pseudoescalares. Em se tratando de uma AC universal, existe um isomorfismo que não é canônico, enquanto espaços vetoriais, entre  $\Lambda(\mathbb{R}^{p,q})$  e  $Cl_{p,q}$ . Entretanto, uma vez definido uma base ortonormal faz sentido falar em  $k$ -vetores que pertencem ao espaço  $\Lambda_k(\mathbb{R}^{p,q})$ . Veremos isso com mais detalhes mais adiante, nas eqs.(3.29-3.35).

Para determinar se um sistema ortonormal gera uma AC universal, temos o [Sn97]

**Teorema 3.5 (Marcel Riesz)** ► Uma base ortonormal  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  gera uma álgebra de dimensão  $2^n$  a menos que o pseudoescalar  $e_1 e_2 \dots e_n$  seja um múltiplo escalar da identidade. (Para as ACs reais o caso excepcional ocorre quando  $\eta = e_{12\dots n} = \pm I$ . Para as ACs complexas, o caso excepcional ocorre quando  $\eta = \pm I$  ou  $\pm iI$ ). ◀

Como exemplo desse teorema, seja  $W$  o subespaço vetorial de  $\Lambda(\mathbb{R}^{5,0})$  dado por  $W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{5,0} \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^{5,0})$ . Defina um produto  $\diamond$  em  $W$  através de

$$a \diamond b = \langle ab(1 + e_{12345}) \rangle_{0 \oplus 1 \oplus 2}. \quad (3.25)$$

É possível mostrar que  $e_1 \diamond e_2 \diamond e_3 \diamond e_4 \diamond e_5 = 1$ .

A classe das possíveis ACs não universais é restringida pelo seguinte

**Teorema 3.6** ► Se a álgebra de Clifford gerada por uma base ortonormal  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  não é universal, então  $n$  é ímpar. Além disso, se a álgebra de Clifford for real e não for universal, então  $p - q - 1$  é um múltiplo inteiro de 4. ◀

### 3.7 Álgebras de Clifford (II)

Assumimos que o espaço vetorial  $V$  tenha uma métrica  $g$ . Seja  $J$  o ideal de  $T(V)$  que consiste na soma dos termos da forma  $a \otimes \{x \otimes x - g(x, x)\} \otimes b$  tais que  $a, b \in T(V), x \in V$ . Então a AC associada a  $V$  é denotada por  $C_\diamond(V, g)$  e definida por

$$C_\diamond(V, g) = T(V)/J \quad (3.26)$$

O produto será denotado por  $\vee$ , satisfazendo  $[a] \vee [b] = [a \otimes b]$ . Se  $x, y \in V$ , então

$$\begin{aligned} x \otimes y &= \frac{1}{2} \{(x+y) \otimes (x+y) - g(x+y, x+y) - x \otimes x + g(x, x) - y \otimes y + g(y, y)\} \\ &\quad + x \wedge y + g(x, y). \end{aligned} \quad (3.27)$$

O termo dentro das chaves está em  $J$  e portanto

$$x \otimes y \sim x \wedge y + g(x, y) \quad (3.28)$$

Mais geralmente, para  $\omega$  uma  $p$ -forma e  $x \in V$ , prova-se [BT87] que

**Teorema 3.7** ▶  $x \otimes \omega \sim x \wedge \omega + x^\sharp \lrcorner \omega$ , onde  $x^\sharp = \tau(x)$  ( $\tau : V \rightarrow V^*$  é a correlação em  $V$ ). ◀

O produto  $\vee$  é introduzido no espaço das formas exteriores que transformam tal espaço em uma álgebra  $\mathcal{Cl}(V, g)$ , onde  $\mathcal{Cl}(V, g) = C_\circ(V, g)$ . Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são multiformas exteriores, definimos

$$[\omega_1] \vee [\omega_2] = [\omega_1 \vee \omega_2],$$

já que  $[\omega_1] \vee [\omega_2] = [\omega_1 \otimes \omega_2]$ . Assim falamos que

$$x\omega \equiv x \vee \omega = x \wedge \omega + x^\sharp \lrcorner \omega, \quad (3.29)$$

onde, de agora em diante, o produto  $\vee$  é indicado por justaposição. A álgebra quociente  $C_\circ(V, g) = T(V)/J$  é uma AC. De fato, verificamos que

$$\mathbf{v} \vee \mathbf{u} + \mathbf{u} \vee \mathbf{v} = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

De uma maneira semelhante podemos demonstrar que

$$\omega x = \omega \wedge x + \omega \lrcorner x^\sharp. \quad (3.30)$$

Ora, sabemos que, se  $\omega \in \Lambda^p(V)$ , então  $\omega \wedge x = (-1)^p x \wedge \omega$  e que  $\omega \lrcorner x^\sharp = -(-1)^p x^\sharp \lrcorner \omega$ . Segue-se disso que

$$\omega x = (-1)^p x \wedge \omega - (-1)^p x^\sharp \lrcorner \omega. \quad (3.31)$$

Comparando agora as eqs. (3.30) e (3.31), obtemos

$$x \wedge \omega = \frac{1}{2}(x\omega + (-1)^p \omega x), \quad (3.32)$$

$$x^\sharp \lrcorner \omega = \frac{1}{2}(x\omega - (-1)^p \omega x). \quad (3.33)$$

Para um multivetor arbitrário  $\Psi \in \Lambda^*(V)$  essas expressões se tornam

$$x \wedge \Psi = \frac{1}{2}(x\Psi + (\# \Psi)x) \quad (3.34)$$

e

$$x^\sharp \lrcorner \Psi = \frac{1}{2}(x\Psi - (\# \Psi)x) \quad (3.35)$$

Essas duas expressões relacionam a álgebra de Grassmann à álgebra de Clifford. De fato, se  $\{e_i\}$  é uma base ortogonal,

$$e_{i_1} \dots e_{i_k} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}. \quad (3.36)$$

### 3.8 Álgebras de Clifford (III)

Vamos agora exibir uma outra construção das ACs via *operadores de criação e aniquilação*<sup>3</sup> [Oz86].

<sup>3</sup>Esta denominação foi herdada do formalismo de segunda quantização por motivos que ficarão óbvios no decorrer desta seção, especificamente relativos às eqs.(3.39), (3.40) e (3.42).

Considere um vetor  $\mathbf{v} \in V$  e um multivetor  $\phi \in \Lambda(V)$ . Seja o espaço dos endomorfismos<sup>4</sup> de  $\Lambda(V)$  em  $\Lambda(V)$ , denotado por  $\text{End}(\Lambda(V))$ . Definimos o *operador de criação*  $\mathbf{E} : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$  como

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{v})(\phi) = \mathbf{v} \wedge \phi} \quad (3.37)$$

É claro que  $\mathbf{E}(\mathbf{v}) : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$ .

Definimos o *operador de aniquilação*  $\mathbf{I} : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$  como

$$\boxed{\mathbf{I}(\alpha)(\Psi) = \alpha \lrcorner \Psi} \quad (3.38)$$

Podemos ver que os operadores  $\mathbf{E}$  anticomutam, pois

$$(\mathbf{E}(\mathbf{u})\mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{u}))(\phi) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \phi + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \wedge \phi = 0. \quad (3.39)$$

Isso é válido para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \phi \in \Lambda(V)$ .

Podemos construir de maneira semelhante as relações de comutação entre os operadores de aniquilação, a saber

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}(\alpha)\mathbf{I}(\beta) + \mathbf{I}(\beta)\mathbf{I}(\alpha))(\Psi) &= (\alpha \lrcorner \beta \lrcorner + \beta \lrcorner \alpha \lrcorner)(\Psi) = ((\alpha \wedge \beta) \lrcorner + (\beta \wedge \alpha) \lrcorner)(\Psi) \\ &= (\alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha) \lrcorner \Psi = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ainda podemos chegar a uma relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação utilizando a regra de Leibniz graduada para a contração à esquerda:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\alpha)\mathbf{E}(\mathbf{v})\Psi &= \alpha \lrcorner (\mathbf{v} \wedge \Psi) = (\alpha \lrcorner \mathbf{v})\Psi - \mathbf{v} \wedge (\alpha \lrcorner \Psi) \\ &= \alpha(\mathbf{v})\Psi - \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{I}(\alpha)\Psi. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Já que isso é válido para um multivetor  $\Psi$  arbitrário, chegamos à seguinte relação:

$$\boxed{\mathbf{I}(\alpha)\mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{I}(\alpha) = \alpha(\mathbf{v})} \quad (3.42)$$

Seja o espaço vetorial  $V$  munido de uma correlação simétrica  $\sharp : V \rightarrow V^*$ . Dados os operadores  $\mathbf{E} : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$  e  $\mathbf{I} \circ \sharp : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$ , definimos o operador  $\gamma : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$  como

$$\boxed{\gamma = \mathbf{E} + \mathbf{I} \circ \sharp} \quad (3.43)$$

Com essas definições enunciamos o

**Teorema 3.8** ► *A aplicação  $\gamma$  é uma aplicação de Clifford, ou seja,*

$$\boxed{\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \quad \blacktriangleleft \quad (3.44)$$

**Prova:** Usando as relações de comutação (3.39) e (3.40)

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) &= [\mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{I}(\mathbf{v}^\sharp)][[\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{I}(\mathbf{u}^\sharp)]] \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{I}(\mathbf{u}^\sharp) + \mathbf{I}(\mathbf{v}^\sharp)\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{I}(\mathbf{v}^\sharp)\mathbf{I}(\mathbf{u}^\sharp). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Um endomorfismo é um homomorfismo de um espaço nele mesmo.

Portanto

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) &= [\mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{E}(\mathbf{u})\mathbf{E}(\mathbf{v})] + [\mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{I}(\mathbf{u}^\sharp) + \mathbf{I}(\mathbf{u}^\sharp)\mathbf{E}(\mathbf{v})] \\ &\quad + [\mathbf{I}(\mathbf{v}^\sharp)\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{E}(\mathbf{u})\mathbf{I}(\mathbf{v}^\sharp)] + [\mathbf{I}(\mathbf{v}^\sharp)\mathbf{I}(\mathbf{u}^\sharp) + \mathbf{I}(\mathbf{u}^\sharp)\mathbf{I}(\mathbf{v}^\sharp)] \\ &= \mathbf{v}^\sharp(\mathbf{u}) + \mathbf{u}^\sharp(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{u}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

□

### 3.9 Classificação e representação das álgebras de Clifford

#### 3.9.1 Teoremas sobre a estrutura das álgebras de Clifford

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . A sua complexificação  $V_{\mathbb{C}}$  é o espaço dos elementos da forma  $\mathbf{v} + i\mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$  e  $i$  é a unidade imaginária. O espaço  $V_{\mathbb{C}}$  é um espaço vetorial com soma e multiplicação por um escalar complexo  $(a + ib)$  definidas respectivamente por

$$(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{u}_1) + (\mathbf{v}_2 + i\mathbf{u}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + i(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$$

$$(a + ib)(\mathbf{v} + i\mathbf{u}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{u}) + i(b\mathbf{v} + a\mathbf{u})$$

A dimensão de  $V_{\mathbb{C}}$  é  $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$  sobre  $\mathbb{C}$  e  $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n$  sobre  $\mathbb{R}$ . A partir daí vemos que

$$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V.$$

Já a extensão  $g_{\mathbb{C}}$  de  $g$  é definida como

$$g_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 + i\mathbf{u}_2) = g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - g(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + i(g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2) + g(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)).$$

**Teorema 3.9** ► *Sejam  $(V, g)$  um espaço quadrático sobre  $\mathbb{R}$  e  $\mathcal{Cl}(V, g)$  a sua AC real. Considere a AC complexa  $\mathcal{Cl}(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$  para o espaço quadrático complexificado  $(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ . Então*

$$\boxed{\mathcal{Cl}(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) \simeq \mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g)}$$

onde  $\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g) = \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(V, g)$  denota a complexificação de  $\mathcal{Cl}(V, g)$ . ◀

**Prova:** A complexificação  $\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g) = \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(V, g)$  é uma álgebra com produto dado por

$$(a \otimes \psi)(a' \otimes \psi') = aa' \otimes \psi\psi', \quad \forall a, a' \in \mathbb{C}, \quad \forall \psi, \psi' \in \mathcal{Cl}(V, g).$$

Uma vez que  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(V, g) = 2^{\dim V}$ , a dimensão da álgebra  $\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g)$  sobre  $\mathbb{R}$  dada por  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(V, g) = 2 \cdot 2^{\dim V}$ . Se  $\gamma$  denota a aplicação de Clifford  $\gamma: V \rightarrow \mathcal{Cl}(V, g)$ , definimos a aplicação  $\Gamma: V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g)$  como a aplicação linear em  $\mathbb{C}$

$$\Gamma = 1 \otimes \gamma.$$

Portanto para  $a \otimes \mathbf{v} \in \mathbb{C} \otimes V = V_{\mathbb{C}}$  temos

$$\Gamma(a \otimes \mathbf{v}) = a \otimes \mathbf{v},$$

onde fica subentendido que  $\mathbf{v} = \gamma(\mathbf{v})$ . Essa aplicação  $\Gamma$  é uma aplicação de Clifford; com efeito,

$$(\Gamma(1 \otimes \mathbf{v}))^2 = (1 \otimes \mathbf{v})(1 \otimes \mathbf{v}) = 1 \otimes g(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Por outro lado, se  $\mathcal{Cl}(V, g)$  é a AC para  $(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ , ela é universal e portanto existe um homomorfismo

$$\phi : \mathcal{Cl}(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g).$$

A dimensão de  $\mathcal{Cl}(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$  é  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Cl}(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) = 2^{\dim V}$  ou  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) = 2 \cdot 2^{\dim V}$ . Como  $\dim \mathcal{Cl}(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) = \dim \mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(V, g)$ , temos que  $\phi$  é um isomorfismo.

□

Esse teorema mostra que, para uma completa descrição das ACs, basta estudarmos a estrutura das ACs reais. A estrutura das ACs complexas é obtida via complexificação.

Seja agora uma métrica  $g$  em  $\mathbb{R}^n$  de assinatura  $(p, q)$ , com  $p + q = n$ , de modo que se  $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é uma base ortonormal, temos, para  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ ,

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v^1)^2 + \dots + (v^p)^2 - (v^{p+1})^2 - \dots - (v^n)^2. \quad (3.45)$$

Denotaremos esse espaço quadrático por  $\mathbb{R}^{p,q}$  e a correspondente AC por  $\mathcal{Cl}_{p,q}$ , com  $p+q = n$ ,

$$\mathcal{Cl}_{p,q} = \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q}).$$

**Teorema 3.10** ▶ *Seja  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  a álgebra de Clifford do espaço quadrático  $\mathbb{R}^n$ . Temos então os isomorfismos*

$$\mathcal{Cl}_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{Cl}_{q+2,p} \simeq \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}, \quad (3.47)$$

$$\mathcal{Cl}_{q,p+2} \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}, \quad (3.48)$$

onde  $p > 0$  ou  $q > 0$ . ◀

**Prova:** Seja  $V$  um espaço bidimensional onde está definida a forma bilinear simétrica  $g_V$  tal que, em termos de uma base ortonormal  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ , temos, para  $\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \in V$

$$g_V = \lambda_1 (u^1)^2 + \lambda_2 (u^2)^2, \quad \lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1,$$

onde escolhemos os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  conforme o caso considerado:  $V = \mathbb{R}^{2,0}$ ,  $\mathbb{R}^{1,1}$  ou  $\mathbb{R}^{0,2}$ . Com isso, podemos definir uma aplicação linear  $\Gamma : \mathbb{R}^{p,q} \oplus V \rightarrow \mathcal{Cl}(V, g_V) \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}$  através de:

$$\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes 1, \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q},$$

onde subentendemos que  $\mathbf{f}_1 = \rho(\mathbf{f}_1)$ ,  $\mathbf{f}_2 = \rho(\mathbf{f}_2)$ ,  $\mathbf{u} = \rho(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{v} = \gamma(\mathbf{v})$ , onde  $\rho$  e  $\gamma$  são as aplicações de Clifford  $\rho : V \rightarrow \mathcal{Cl}(V, g_V)$  e  $\gamma : \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathcal{Cl}_{p,q}$ . Vamos mostrar que  $\Gamma$  também é uma aplicação de Clifford.

$$\begin{aligned} (\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{u}))^2 &= (\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes 1)(\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes 1) \\ &= (\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2)^2 \otimes (\mathbf{v})^2 + (\mathbf{u} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{u})^2 \otimes 1. \end{aligned}$$

Podemos calcular o termo  $\mathbf{u} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{u}$  lembrando que  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  é ortogonal, de modo que  $\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_1$ . Nesse caso

$$\mathbf{u} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2) + (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2)\mathbf{u} = 2\mathbf{u} \wedge \mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 = 0,$$

uma vez que  $\mathbf{u} \in V$  é da forma  $\mathbf{u} = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$ . Usando este resultado e que

$$(\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2)^2 = -(\mathbf{f}_1)^2(\mathbf{f}_2)^2 = -\lambda_1\lambda_2,$$

encontramos para  $(\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{u}))^2$  que

$$\begin{aligned} (\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{u}))^2 &= -\lambda_1\lambda_2 \otimes g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + g_V(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \otimes 1 \\ &= [\lambda_1(u^1)^2 + \lambda_2(u^2)^2 - \lambda_1\lambda_2[(v^1)^2 + \dots + (v^p)^2 - (v^{p+1})^2 - \dots - (v^n)^2]]1 \otimes 1. \end{aligned}$$

A aplicação  $\Gamma$  é portanto uma aplicação de Clifford  $\Gamma : \mathbb{R}^{p,q} \oplus V \rightarrow \mathcal{Cl}(W, g_W)$ , onde  $W$  é um espaço  $(n+2)$ -dimensional equipado com um funcional bilinear simétrico  $g_W$  dado por

$$g_W(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \lambda_1(u^1)^2 + \lambda_2(u^2)^2 - \lambda_1\lambda_2[(v^1)^2 + \dots + (v^p)^2 - (v^{p+1})^2 - \dots - (v^n)^2],$$

onde  $\mathbf{w} = u^1\mathbf{f}_1 + u^2\mathbf{f}_2 + v^i\mathbf{e}_i$ .

Portanto:

$$(i) \text{ se } V = \mathbb{R}^{2,0} \text{ temos } W = \mathbb{R}^{q+2,p};$$

$$(ii) \text{ se } V = \mathbb{R}^{1,1} \text{ temos } W = \mathbb{R}^{p+1,q+1};$$

$$(iii) \text{ se } V = \mathbb{R}^{0,2} \text{ temos } W = \mathbb{R}^{p,q+2}.$$

Os isomorfismos seguem agora da universalidade da álgebra de Clifford. □

**Observação:** O isomorfismo dado pela eq.(3.46), chamado **teorema da periodicidade**

$$\boxed{\mathcal{Cl}_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}} \quad (3.49)$$

é de importância fundamental para o que vamos estudar, já que pretendemos caracterizar os *twistors* em termos da representação do grupo conforme dentro das ACs.

Havíamos definido anteriormente as três operações básicas<sup>5</sup> das ACs. Redefinimos a notação de tais antiautomorfismos, sugerindo uma nova notação: para a **reversão**,  $\alpha_1$  e para a **conjugação**,  $\alpha_{-1}$ , de modo que podemos unificar as 2 operações na notação  $\alpha_\epsilon$ , ( $\epsilon = \pm 1$ ). Com essa nova notação, enunciamos [Ma89] a generalização:

**Teorema 3.11 (Periodicidade generalizado)** ▶ *O Teorema da periodicidade (3.46) se generaliza em seus antiautomorfismos como*

$$\boxed{(\mathcal{Cl}_{p+1,q+1}, \alpha_\epsilon) \simeq (\mathcal{Cl}_{p,q}, \alpha_{-\epsilon}) \otimes (\mathcal{Cl}_{1,1}, \alpha_\epsilon).} \quad \blacktriangleleft$$

**Prova:** Os conjuntos  $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $\{\mathbf{f}_j\}$  são geradores das álgebras  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  e  $\mathcal{Cl}_{1,1}$ , respectivamente. Tome  $D = \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2, 1 \otimes \mathbf{f}_j\}$  um conjunto de geradores para  $\mathcal{Cl}_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q} \otimes \mathcal{Cl}_{1,1}$ . Considere agora a aplicação  $(\alpha_{-\epsilon} \otimes \alpha_\epsilon)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) = \alpha_{-\epsilon}(\mathbf{e}_i) \otimes \alpha_\epsilon(\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) = \epsilon(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2)$ . Também  $(\alpha_{-\epsilon} \otimes \alpha_\epsilon)(1 \otimes \mathbf{f}_j) = \alpha_{-\epsilon}(1) \otimes \alpha_\epsilon(\mathbf{f}_j) = \epsilon(1 \otimes \mathbf{f}_j)$ . Portanto os geradores são multiplicados por  $\epsilon$ , o que prova o teorema.

<sup>5</sup>Reversão, involução graduada e conjugação.

□

Tal teorema será muito útil na descrição das transformações conformes utilizando-se apenas a álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ , que pode ser representada matricialmente por matrizes  $2 \times 2$  com entradas em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . No que se segue, as operações que agem sobre os elementos da AC em uma álgebra de dimensão maior podem ser conduzidas a operações sobre álgebras de dimensão menor.

Apenas combinando os isomorfismos acima, podemos obter outros. Por exemplo, usando a eq.(3.46), obtemos

$$\mathcal{Cl}_{p,p} \simeq \otimes^p \mathcal{Cl}_{1,1}. \quad (3.50)$$

Podemos também através deste observar que

$$\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{p,p} \otimes \mathcal{Cl}_{0,q-p} \quad (q > p), \quad \mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{q,q} \otimes \mathcal{Cl}_{0,p-q} \quad (p > q). \quad (3.51)$$

Segue-se ainda que

$$\mathcal{Cl}_{0,4} \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0}, \quad \mathcal{Cl}_{0,8} \simeq \mathcal{Cl}_{0,4} \otimes \mathcal{Cl}_{4,0}, \quad \mathcal{Cl}_{2,2} \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{1,1} \quad (3.52)$$

Desses isomorfismos segue-se ainda que

$$\mathcal{Cl}_{0,4} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q+4}, \quad \mathcal{Cl}_{0,8} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q+8}. \quad (3.53)$$

Construiremos explicitamente agora o isomorfismo

$$\mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1}. \quad (3.54)$$

Os elementos de  $\mathcal{Cl}_{2,0}$  são da forma

$$\mathcal{Cl}_{2,0} \ni a_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2,$$

onde  $(\mathbf{e}_1)^2 = 1$  e  $(\mathbf{e}_2)^2 = 1$ . Por outro lado, os elementos de  $\mathcal{Cl}_{1,1}$  são da forma

$$\mathcal{Cl}_{1,1} \ni b_0 + b_1 \mathbf{f}_1 + b_2 \mathbf{f}_2 + b_{12} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2,$$

onde  $(\mathbf{f}_1)^2 = 1$  e  $(\mathbf{f}_2)^2 = -1$ . Não é difícil vermos que a aplicação linear  $\phi : \mathcal{Cl}_{2,0} \rightarrow \mathcal{Cl}_{1,1}$  definida por

$$\phi(1) = 1, \quad \phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1, \quad \phi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2, \quad \phi(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_2,$$

é um isomorfismo algébrico.

Combinando esse último isomorfismo aos outros isomorfismos vistos anteriormente, mostramos que

$$\boxed{\mathcal{Cl}_{p+1,q} \simeq \mathcal{Cl}_{q+1,p}} \quad (3.55)$$

**Teorema 3.12** ► *Seja  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  a AC associada ao espaço quadrático  $\mathbb{R}^{p,q}$  e  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ = \{\phi \in \mathcal{Cl}(V, g) \mid \phi = \# \phi\}$  a sua sub-álgebra par. Então*

$$\boxed{\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{q,p-1} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q-1} \simeq \mathcal{Cl}_{q,p}^+} \blacktriangleleft \quad (3.56)$$

**Prova:** Seja  $\{\mathbf{e}_i \mathbf{f}_k\}$ ,  $(i = 1, \dots, p; k = 1, \dots, q)$  uma base ortonormal de  $V$  de modo que  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  é gerada por 1 e  $\{\mathbf{e}_i \mathbf{f}_k\}$ , tal que  $(\mathbf{e}_1)^2 = 1$  e  $(\mathbf{f}_k)^2 = -1$ ,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = 0$  ( $i \neq$

$j)$ ,  $\mathbf{f}_k \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_l \mathbf{f}_k = 0$  ( $k \neq l$ ) e  $\mathbf{e}_i \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k \mathbf{e}_i = 0$  ( $i, j = 1, \dots, p; k, l = 1, \dots, q$ ). O espaço  $\Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q})$  consiste nos elementos da forma  $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j (i \neq j), \mathbf{f}_k \mathbf{f}_l (k \neq l), \mathbf{e}_i \mathbf{f}_k\}$ . Portanto temos mais elementos que geram  $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$  do que é realmente necessário. Por exemplo, todos os 2-vetores do tipo  $\{\mathbf{f}_k \mathbf{f}_l (k \neq l)\}$  podem ser escritos em termos dos 2-vetores do tipo  $\{\mathbf{e}_i \mathbf{f}_k\}$  uma vez que  $(\mathbf{e}_i \mathbf{f}_k)(\mathbf{e}_i \mathbf{f}_l) = -(\mathbf{e}_i)^2 \mathbf{f}_k \mathbf{f}_l = -\mathbf{f}_k \mathbf{f}_l$  ( $k \neq l$ ). Escolhendo um vetor arbitrariamente, digamos,  $\mathbf{e}_1$ , vemos que o conjunto  $\{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_1 \mathbf{f}_k\}$  ( $m = 2, \dots, p; k = 1, \dots, q$ ) gera todo  $\Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q})$  e portanto gera a sub-álgebra par. Escrevemos esses geradores na forma  $\xi_a = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{a+1}$  para  $a = 1, \dots, p-1$  e  $\zeta_b = \mathbf{e}_1 \mathbf{f}_b$  para  $b = 1, \dots, q$ . Não é difícil vermos que  $(\xi_a)^2 = -(\mathbf{e}_1)^2 (\mathbf{e}_{a+1})^2 = -1$ ,  $(\zeta_b)^2 = (-\mathbf{e}_1)^2 (\mathbf{f}_b)^2 = 1$  e que  $\xi_a \xi_b + \xi_b \xi_a = 0$  ( $a \neq c$ ),  $\zeta_b \zeta_d + \zeta_d \zeta_b = 0$  ( $b \neq d$ ) e que  $\xi_a \zeta_b + \zeta_b \xi_a = 0$ . As quantidades  $\{\xi_a, \zeta_b\}$  ( $b = 1, \dots, q; a = 1, \dots, p-1$ ) são portanto geradores de uma AC associada a um espaço quadrático  $\mathbb{R}^{q,p-1}$ , ou seja,  $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \simeq \mathcal{C}\ell_{q,p-1}$ . Os demais isomorfismos do teorema seguem do uso do isomorfismo dado pelas eqs.(3.46, 3.47). □

### 3.9.2 Representações

**Definição** ► Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra real e  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ . Uma aplicação linear  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  satisfazendo  $\rho(1_{\mathcal{A}}) = 1_V$  e  $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ ,  $\forall a, b \in \mathcal{A}$ , é chamada uma  $\mathbb{K}$ -representação de  $\mathcal{A}$ . O espaço vetorial  $V$  é chamado de *espaço de representação* de  $\mathcal{A}$ . ◀

Se  $V_1$  e  $V_2$  carregam representações  $\rho_1$  e  $\rho_2$  respectivamente, dizemos que tais representações são *equivalentes* se existir um  $\mathbb{K}$ -isomorfismo  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\rho_1(a)} & \rho_1(a)x \\ \phi \downarrow & & \phi \downarrow \\ \phi(x) & \xrightarrow{\rho_2(a)} & \rho_2(a)\phi(x) = \phi(\rho_1(a)x) \end{array}$$

isto é,  $\rho_2(a) = \phi \circ \rho_1(a) \circ \phi^{-1}$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$ . A idéia é obviamente a mesma por detrás da representação de grupos discutida na subsec.(2.1.3).

Uma representação é dita *irredutível* se nenhum subespaço não-trivial de  $V$  é invariante. No caso em que  $V$  pode ser decomposto como soma direta de subespaços invariantes por  $\rho$ , dizemos que  $\rho$  é *reduzível*. Nesse caso podemos induzir uma representação sobre cada um desses espaços.

Abaixo enunciamos dois teoremas que, de certa forma, completam essa sintética descrição das representações das álgebras.

**Teorema 3.13** ► *Todas as representações irredutíveis de uma álgebra simples são equivalentes.* ◀

**Teorema 3.14** ► *Representações irredutíveis de uma álgebra semi-simples são equivalentes se, e somente se, seus núcleos coincidem.* ◀

### 3.9.3 A decomposição algébrica de Wedderburn

Nesta seção apenas enunciaremos algumas proposições e teoremas que serão importantes na construção de representações em capítulos futuros. A álgebra das matrizes quadradas de ordem  $n$  sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  será denotada por  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ .

Considere  $\mathcal{E}_{ij} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  a matriz com todas as entradas nulas exceto a entrada  $ij$ , que tem valor 1, ou seja,  $(\mathcal{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ . O conjunto  $\{\mathcal{E}_{ij}, \text{ com } i, j = 1, \dots, n\}$  é base de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  e  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ .

**Proposição 3.4** ▶ (i)  $\mathcal{E}_{kl}\mathcal{E}_{ij} = \delta_{il}\mathcal{E}_{jk}$ , (ii)  $\sum_i \mathcal{E}_{ii} = 1$ . ◀

**Proposição 3.5** ▶ Se  $A = \sum_{rs} \mathcal{A}_{rs}\mathcal{E}_{rs}$ , então  $A_{ij} = \sum_r \mathcal{E}_{ri}A\mathcal{E}_{jr}$ . ◀

**Proposição 3.6** ▶  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  é álgebra simples. ◀

Denotando  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  por  $\mathcal{A}$ , escrevemos  $\mathcal{A} = \bigoplus_{ij} \mathcal{A}_{ij}$ , enquanto espaços vetoriais, onde

$$\mathcal{A}_{ij} \equiv \{\lambda\mathcal{E}_{ij} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

são isomorfos como espaços vetoriais. Também  $\mathcal{A}_{ij}^2 = \delta_{ij}\mathcal{A}_{ij}$ , já que  $\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{ij} = \delta_{ij}\mathcal{E}_{ij}$ , o que faz com que  $\mathcal{A}_{ij}$  só não seja trivial para  $i = j$ .

**Proposição 3.7** ▶ As álgebras de divisão  $\mathcal{A}_{ii}$  são isomorfas entre si. ◀

**Proposição 3.8** ▶ (i) Para  $1 \leq i \leq n$ , os  $\mathcal{A}_{ii}$  geram todos os  $\mathcal{A}_{ij}$ , pois  $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{E}_{ii}A\mathcal{E}_{jj}$ .

(ii)  $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{E}_{jj} = \mathcal{E}_{ii}\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$ .

(iii)  $\mathcal{A}_{kl}\mathcal{A}_{ij} = \delta_{il}\mathcal{A}_{jk}$ . ◀

**Proposição 3.9** ▶ Dados  $f_i$  idempotentes primitivos ortogonais tais que  $f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1$ , ao definirmos  $\mathcal{A}_{ij} = f_i A f_j$ , os  $\mathcal{A}_{ij}$  satisfazem (iii) da proposição acima. ◀

Como cada idempotente  $f_i$  é primitivo, segue que  $f_i$  é o único idempotente em  $f_i A f_j$ . Com isso,

$$\mathcal{E}_{ii} = f_i, \quad \forall i. \quad (3.57)$$

Se a álgebra real é simples, então  $\mathcal{A} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$ , onde  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{M}$  são subálgebras de  $\mathcal{A}$ , onde  $\mathcal{D}$  é isomorfa a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  e  $\mathcal{M}$  uma álgebra de matrizes. Portanto toda álgebra simples é da forma  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ , com  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ . Podemos ver [BT87] que  $\mathcal{D}$  comuta com  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A} = \mathcal{D}\mathcal{M}$ ; enunciamos a

**Teorema 3.15 (Decomposição de Wedderburn):** ▶ A aplicação  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$ , definida por  $\phi(A) = \sum_{ij} \mathcal{A}_{ij} \otimes \mathcal{E}_{ij}$  é isomorfismo de álgebras. Conseqüentemente  $\mathcal{A} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$ . ◀

Como as únicas álgebras de divisão sobre  $\mathbb{R}$  são  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , temos finalmente a

**Proposição 3.10** ▶ Se  $\mathcal{A}$  é álgebra simples sobre  $\mathbb{R}$ , então  $\mathcal{A} \simeq \mathbb{K} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ . Assim,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K}), \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{H} \quad \blacktriangleleft \quad (3.58)$$

O caso de álgebras simples sobre  $\mathbb{C}$  segue imediatamente. Se  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  denota  $\mathcal{B}$  com os escalares restritos a  $\mathbb{R}$ , então  $\mathcal{B} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . Logo a proposição anterior nos dá  $\mathcal{B} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ , com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ . Mas

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \text{e} \quad \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{M}(2, \mathbb{R}). \quad (3.59)$$

Sendo  $\mathcal{B}$  simples por hipótese, o segundo caso acima não pode ocorrer. De acordo com o isomorfismo  $\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$ , temos a seguinte:

**Proposição 3.11** ▶ Se  $\mathcal{A}$  é álgebra simples sobre  $\mathbb{C}$ , então  $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ . Assim,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{C}). \quad \blacktriangleleft$$

### 3.9.4 A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,1}$

Seja  $\mathbf{e}$  um vetor unitário tal que  $g(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = -1$ , um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{0,1}$  pode ser escrito como

$$\mathcal{Cl}_{0,1} \ni \psi = a + b\mathbf{e}, \quad (3.60)$$

com  $\mathbf{e}^2 = -1$ .

Esta álgebra é isomorfa à álgebra  $\mathbb{C}$ , ou seja, o conjunto dos pares  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  com multiplicação dada por

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

O isomorfismo  $\rho : \mathcal{Cl}_{0,1} \rightarrow \mathbb{C}$  é dado por

$$\rho(1) = (1, 0), \quad \rho(\mathbf{e}) = (0, 1) = i.$$

Portanto,

$$\boxed{\mathcal{Cl}_{0,1} \simeq \mathbb{C}} \quad (3.61)$$

### 3.9.5 A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{1,0}$

Seja  $\mathbf{e}$  um vetor unitário tal que  $g(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 1$ , um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{1,0}$  pode ser escrito como

$$\mathcal{Cl}_{1,0} \ni \psi = a + b\mathbf{e}, \quad (3.62)$$

com  $\mathbf{e}^2 = 1$ . Tome a base de  $\mathcal{Cl}_{1,0}$  como sendo  $\{1, \mathbf{e}\}$ . Sejam  $P_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e})$  e  $P_2 = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e})$  dois idempotentes. Vemos que  $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ . Obviamente  $\{P_1, P_2\}$  é uma nova base. Assim  $P_1$  e  $P_2$  geram separadamente subálgebras ortogonais unidimensionais, onde cada uma é isomorfa ao corpo  $\mathbb{R}$ . Portanto

$$\boxed{\mathcal{Cl}_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} \quad (3.63)$$

### 3.9.6 A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,2}$

Considere o espaço quadrático  $\mathbb{R}^{0,2}$  e uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  tal que

$$g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -1, \quad g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0.$$

Um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{0,2}$  é da forma

$$\mathcal{Cl}_{0,2} \ni \psi = a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (3.64)$$

e

$$(\mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_2)^2 = -1, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0. \quad (3.65)$$

Portanto

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1 \quad (3.66)$$

Construímos um isomorfismo  $\rho : \mathcal{Cl}_{0,2} \rightarrow \mathbb{H}$ , definindo

$$\rho(1) = 1, \quad \rho(\mathbf{e}_1) = i, \quad \rho(\mathbf{e}_2) = j, \quad \rho(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = k, \quad (3.67)$$

onde  $i, j$  e  $k$  são unidades quaterniônicas e satisfazem às seguintes igualdades:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i \quad \text{e} \quad ki = -ik = j. \quad (3.68)$$

Portanto

$$\boxed{\mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathbb{H}} \quad (3.69)$$

### 3.9.7 O isomorfismo $Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1}$

Vimos anteriormente que  $Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1}$ . Desse modo consideraremos apenas o espaço quadrático  $\mathbb{R}^{2,0}$ . Considere uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  tal que

$$g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \quad g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0.$$

Um elemento arbitrário de  $Cl_{2,0}$  é da forma

$$Cl_{2,0} \ni \psi = a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (3.70)$$

e

$$(\mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_2)^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0. \quad (3.71)$$

Portanto

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1. \quad (3.72)$$

Seja  $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$  a álgebra das matrizes reais  $2 \times 2$ . O conjunto de matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

são geradores de  $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ . Definimos  $\rho : Cl_{2,0} \rightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$  como a aplicação linear

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira  $\rho$  é um isomorfismo algébrico, de modo que

$$\boxed{Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{R})} \quad (3.73)$$

### 3.9.8 Classificação das álgebras de Clifford.

Estabelecidos os isomorfismos acima, podemos, com a ajuda dos teoremas já vistos, classificar todas as ACs. Tal procedimento pode ser visto na literatura padrão [Sn97] e apenas exibiremos os isomorfismos mais importantes.

$$\mathcal{M}(m, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(mn, \mathbb{R}), \quad Cl_{p,p} \simeq \mathcal{M}(2p, \mathbb{R}), \quad (3.74)$$

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{R}), \quad Cl_{3,0} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}, \quad (3.75)$$

$$Cl_{0,4} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H}) \simeq Cl_{4,0}, \quad (3.76)$$

$$Cl_{0,8} \simeq \mathcal{M}(16, \mathbb{R}), \quad (3.77)$$

A eq.(3.77) implica, juntamente com a eq.(3.46) (o teorema da periodicidade) que

$$\boxed{Cl_{p,q+8} \simeq Cl_{p,q} \otimes \mathcal{M}(16, \mathbb{R})} \quad (3.78)$$

A tabela abaixo mostra a classificação de todas as ACs a partir dos isomorfismos estudados e do teorema da periodicidade:

$p - q \bmod 8$	0	1	2	3
$Cl_{p,q}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})^{\oplus 2}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{C})$
$p - q \bmod 8$	4	5	6	7
$Cl_{p,q}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{R})^{\oplus 2}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{C})$

onde  $\lfloor n/2 \rfloor$  denota a parte inteira de  $n/2$  e  $\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})^{\oplus 2}$  denota a soma direta  $\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$ .

Com relação ao caso complexo, a classificação pode ser obtida através do recurso de complexificação. Denotamos  $\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q} = Cl_{\mathbb{C}}(n)$ , onde  $n = p + q$ . Então,

$$Cl_{\mathbb{C}}(2k) = \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}), \quad (3.79)$$

$$Cl_{\mathbb{C}}(2k + 1) = \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}). \quad (3.80)$$

Portanto, todas as álgebras de Clifford podem ser construídas a partir das álgebras

$$Cl_{1,0}, \quad Cl_{0,1}, \quad Cl_{0,2} \quad \text{e} \quad Cl_{1,1}$$

### 3.10 Os grupos associados às álgebras de Clifford

#### 3.10.1 Transformações ortogonais e o teorema de Cartan-Dieudonné

##### Transformações ortogonais

Seja  $g$  uma forma bilinear simétrica no espaço vetorial  $V$ . Uma aplicação linear  $T : V \rightarrow V$  é dita uma *isometria* ou uma *transformação ortogonal* se

$$g(T(\mathbf{v}), T(\mathbf{u})) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V, \quad (3.81)$$

Tais isometrias têm a propriedade de que  $(\det T)^2 = 1$ ; quando  $\det T = 1$  elas são denominadas *rotações*, enquanto que, se  $(\det T) = -1$ , são chamadas de *reflexões*. O conjunto das isometrias formam o *grupo ortogonal*  $O(p, q)$  para  $V = \mathbb{R}^{p,q}$ . O sub-grupo de  $O(p, q)$  formado pelas rotações é chamado *grupo ortogonal especial*  $SO(p, q)$ .

##### As componentes do grupo ortogonal

Dado um grupo  $G$ , um subconjunto conexo que não está contido em nenhum outro subconjunto conexo maior é chamado *componente conexa* do grupo  $G$ .

Os grupos ortogonais  $O(p, q)$  com  $p \neq 0$  ou  $q \neq 0$  possuem 4 componentes. De fato, seja uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}\}$  de  $\mathbb{R}^{p,q}$  de modo que em termos dessa base a métrica  $g$  pode ser representada pela matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

onde  $1_p$  e  $1_q$  denotam as matrizes identidades de ordem  $p$  e  $q$  respectivamente. Representando  $T$  através da matriz

$$T = \begin{pmatrix} A_p & B_{p,q} \\ C_{q,p} & D_q \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

a condição  $T^T G T = G$  implica em

$$A_p^T A_p - C_{p,q}^T C_{q,p} = 1_p, \quad D_q^T D_q - B_{q,p}^T B_{p,q} = 1_q, \quad A_p^T B_{p,q} = C_{p,q}^T D_q. \quad (3.84)$$

Não é difícil ver que as matrizes  $A_p$  e  $D_q$  satisfazem  $\det A_p \neq 0$  e  $\det D_q \neq 0$ . Podemos então dividir as transformações ortogonais  $T \in O(p, q)$  em quatro classes:

$$\begin{aligned} (i) \quad O_+^\uparrow(p, q) &: \det A_p > 0, \det D_q > 0, \\ (ii) \quad O_-^\uparrow(p, q) &: \det A_p > 0, \det D_q < 0, \\ (iii) \quad O_+^\downarrow(p, q) &: \det A_p < 0, \det D_q < 0, \\ (iv) \quad O_-^\downarrow(p, q) &: \det A_p < 0, \det D_q > 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Não é difícil vermos que

$$SO_+(p, q) = SO^\uparrow(p, q) = SO_+^\uparrow(p, q) = O_+(p, q) \cap O^\uparrow(p, q). \quad (3.86)$$

### Simetrias ortogonais e reflexões

Considere a decomposição de  $V$  em dois subespaços ortogonais  $V = U \oplus U^\perp$ , onde  $U$  é um subespaço não-isotrópico de  $V$ , ou seja,  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0 \forall \mathbf{v} \in U$ . Definimos a *simetria ortogonal*  $S_U$  com relação a  $U$  como

$$S_U(\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) = -\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp, \quad \forall \mathbf{v} \in U, \mathbf{u}_\perp \in U^\perp. \quad (3.87)$$

Claramente  $S_U = -id_U + id_{U^\perp}$ , onde  $id$  denota o operador identidade. Assim,

$$\boxed{\det S_U = (-1)^{\dim U}} \quad (3.88)$$

Escolhemos um vetor  $\mathbf{u} \in V$  tal que  $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$  e consideramos  $U$  o subespaço gerado por  $\mathbf{u}$ . Podemos escrever um vetor  $\mathbf{v} \in V$  na forma  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$  onde  $g(\mathbf{v}_\perp, \mathbf{u}) = 0$ . Basta tomar

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \frac{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u}. \quad (3.89)$$

Dessa maneira vemos que

$$\mathbf{v}_\parallel = \frac{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u}. \quad (3.90)$$

Substituindo a decomposição acima para cálculo de  $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$  obtemos:

$$S_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2 \frac{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u}. \quad (3.91)$$

Pela eq.(3.88), vemos que  $S_{\mathbf{u}}$  é uma reflexão, que ocorre no hiperplano ortogonal ao vetor  $\mathbf{u}$ .

Quaisquer dois vetores não-nulos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  ( $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$ ) de mesmo comprimento podem ser relacionados através de no máximo duas reflexões. Esse resultado é visto como um caso particular do

**Teorema 3.16 (Cartan-Dieudonné (versão fraca))** ► *Qualquer transformação ortogonal  $T$  em um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita pode ser expressa como o produto de simetrias (reflexões) com relação a hiperplanos não-isotrópicos<sup>6</sup>. ◀ [Ca66]*

<sup>6</sup>A “versão forte” do teorema de Cartan-Dieudonné diz que “se  $\dim V = n$ , então  $T$  pode ser expresso como o produto de no máximo  $n$  simetrias, ou seja,  $O(p, q) = \{S_{\mathbf{v}_1} S_{\mathbf{v}_2} \dots S_{\mathbf{v}_k}, \mathbf{v}_j \in V, Q(\mathbf{v}_j) \neq 0, k \leq n\}$ .”

Da definição da álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  sabemos que  $\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v} = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ . Portanto  $\mathbf{u}^2 = g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  e podemos interpretar a quantidade  $\mathbf{u}/g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  como

$$\mathbf{u}^{-1} = \frac{\mathbf{u}}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}, \quad (3.92)$$

onde  $\mathbf{u}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{-1} = 1$ . A eq.(3.91) pode ser reescrita como

$$S_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})}\mathbf{u} = \mathbf{v} - (\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v})\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{v} - \mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}, \quad (3.93)$$

ou seja,

$$S_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1} = \widehat{\mathbf{u}}\mathbf{v}\widehat{\mathbf{u}}^{-1} \quad (3.94)$$

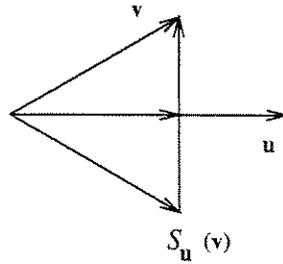


Figura 3.1: reflexão do vetor  $\mathbf{v}$  no subespaço gerado pelo vetor  $\mathbf{u}$ .

### 3.10.2 O grupo de Clifford-Lipschitz

Dentre os vários grupos que podemos definir dentro de uma álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{p,q}$ , definimos primeiramente o *grupo dos elementos inversíveis (ou regulares)*  $\mathcal{Cl}_{p,q}^*$ ,

$$\mathcal{Cl}_{p,q}^* = \{a \in \mathcal{Cl}_{p,q} \mid \exists a^{-1}\} \quad (3.95)$$

Outro grupo de interesse é o chamado *grupo de Clifford-Lipschitz*

$$\Gamma_{p,q} = \{a \in \mathcal{Cl}_{p,q}^* \mid a\mathbf{v}a^{-1} \in V, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}\} \quad (3.96)$$

### 3.10.3 Representação adjunta

Definimos a *representação adjunta* ou *representação vetor*  $\sigma : \Gamma_{p,q} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{Cl}_{p,q})$  definida<sup>7</sup> por

$$\sigma(a)(x) = axa^{-1} \quad (3.97)$$

Sejam  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V = \mathbb{R}^{p,q}$  tais que

$$\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v} = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (3.98)$$

Então vemos que

$$2g(\sigma(a)\mathbf{v}, \sigma(a)\mathbf{u}) = \sigma(a)\mathbf{v}\sigma(a)\mathbf{u} + \sigma(a)\mathbf{u}\sigma(a)\mathbf{v} = a\mathbf{v}\mathbf{u}a^{-1} + a\mathbf{u}\mathbf{v}a^{-1} = 2g(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (3.99)$$

<sup>7</sup>A notação  $\text{Aut}$  significa o conjunto dos automorfismos, que são isomorfismos do grupo nele mesmo.

Já que  $\sigma(a)$  satisfaz

$$g(\sigma(a)\mathbf{v}, \sigma(a)\mathbf{u}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (3.100)$$

então  $\sigma(a) \in O(p, q)$ , onde  $O(p, q)$  denota o grupo das transformações ortogonais de  $\mathbb{R}^{p, q}$ . Além disso,  $\sigma$  é um homomorfismo de grupos, já que

$$\sigma(ab)(\mathbf{v}) = ab\mathbf{v}(ab)^{-1} = ab\mathbf{v}b^{-1}a^{-1} = \sigma(a)\sigma(b)(\mathbf{v}). \quad (3.101)$$

Já vimos (eq.(3.18)) que o determinante de uma transformação linear  $T$  pode ser definido implicitamente através de  $T(\mathbf{e}_1) \wedge \cdots \wedge T(\mathbf{e}_n) = (\det T) \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$ , onde  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é uma base de  $V = \mathbb{R}^{p, q}$ . Portanto

$$\sigma(a)(\mathbf{e}_1) \wedge \cdots \wedge \sigma(a)(\mathbf{e}_n) = (\det \sigma(a)) \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n. \quad (3.102)$$

Por outro lado para vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  temos:

$$\begin{aligned} \sigma(a)(\mathbf{v}) \wedge \sigma(a)(\mathbf{u}) &= (ava^{-1}) \wedge (aua^{-1}) = \frac{1}{2}(ava^{-1}aua^{-1} - au a^{-1}ava^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}a(\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v})a^{-1} = a(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})a^{-1} = \sigma(a)(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.103)$$

de modo que para a eq.(3.102) segue-se que

$$a(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n)a^{-1} = (\det \sigma(a))(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n). \quad (3.104)$$

Para calcularmos o lado esquerdo da equação acima vamos omitir a prova da

**Proposição 3.12** ► *Dados  $\Upsilon_p \in \Lambda_p(V)$ ,  $\Xi^q \in \Lambda^q(V)$ , então*

$$\boxed{\Upsilon_p[\Xi^q = (-1)^{q(p+1)}\Xi^q]\Upsilon_p} \blacktriangleleft \quad (3.105)$$

Para simplificar, tomamos  $a = a_p \in \Lambda_p(V)$ , uma vez que o resultado para um multivetor arbitrário segue por linearidade. Já que  $\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$  é um pseudoescalar a relação

$$a_p(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = a_p^\sharp(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n). \quad (3.106)$$

Usando a proposição (3.12) concluímos que

$$a_p^\sharp(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = (-1)^{p(n+1)}(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n)[a_p^\sharp] \quad (3.107)$$

ou seja,

$$a_p(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = (-1)^{p(n+1)}(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n)a_p. \quad (3.108)$$

Portanto se  $n$  é ímpar temos

$$a(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n)a, \quad (3.109)$$

que por sua vez na eq.(3.102) resulta em

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = (\det \sigma(a))(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n), \quad (3.110)$$

ou seja,

$$(\det \sigma(a)) = 1. \quad (3.111)$$

Por outro lado, se  $n$  for par, então  $n + 1$  é ímpar, e da eq.(3.108), podemos concluir que

$$a_p(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = (-1)^p(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n)a_p \quad (3.112)$$

Portanto para  $n$  par temos

$$\det \sigma(a) = 1, \quad \text{para } a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$$

$$\det \sigma(a) = -1, \quad \text{se } a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-.$$

Com isso,

$$\begin{cases} \sigma(\Gamma_{p,q}) = O(p,q), & n = 2k \ (k \in \mathbb{N}) \\ \sigma(\Gamma_{p,q}) = SO(p,q), & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (3.113)$$

### 3.10.4 Representação adjunta contorcida

Considere a representação  $\hat{\sigma}$  do grupo de Clifford definida por

$$\hat{\sigma}(a)(\mathbf{v}) = \hat{a}\mathbf{v}a^{-1} \quad (3.114)$$

e denominada *representação adjunta contorcida*<sup>8</sup>. Definimos o grupo de Clifford-Lipschitz contorcido  $\hat{\Gamma}_{p,q}$  como

$$\hat{\Gamma}_{p,q} = \{a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^* \mid \hat{a}\mathbf{v}a^{-1} \in V, \forall \mathbf{v} = \mathbb{R}^{p,q}\} \quad (3.115)$$

É fácil vermos que  $\hat{\Gamma}_{p,q}$  é o conjunto dos elementos de  $\Gamma_{p,q}$  que têm paridade definida.

Os resultados obtidos para  $\sigma$  podem facilmente ser adaptados para  $\hat{\sigma}$ . Notemos que o análogo da eq.(3.103) para  $\hat{\sigma}$  é

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(a_p)(\mathbf{v}_1) \wedge \cdots \wedge \hat{\sigma}(a_p)(\mathbf{v}_k) &= (-1)^{p(k-1)} \hat{\sigma}(a_p)(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k). \\ &= (-1)^{pk} \sigma(a_p)(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Usando-se agora a eq.(3.108) segue-se que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(a_p)(\mathbf{e}_1) \wedge \cdots \wedge \hat{\sigma}(a_p)(\mathbf{e}_n) &= (-1)^{np} a_p(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) a_p^{-1} \\ &= (-1)^{np} (-1)^{p(n+1)} \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n, \end{aligned} \quad (3.117)$$

de modo que

$$\hat{\sigma}(a_p)(\mathbf{e}_1) \wedge \cdots \wedge \hat{\sigma}(a_p)(\mathbf{e}_n) = (-1)^p(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n). \quad (3.118)$$

Com isso, da eq.(3.102) podemos concluir que

$$\det \hat{\sigma}(a_p) = (-1)^p. \quad (3.119)$$

Notamos que  $\det \hat{\sigma}(a_p)$  não depende de  $n$  como ocorre com  $\det \sigma(a_p)$ . Como  $\det \hat{\sigma}(a_p) = \pm 1$ , temos

$$\hat{\sigma}(\Gamma_{p,q}) = O(p,q). \quad (3.120)$$

<sup>8</sup> "Twisted adjoint representation".

Porém ao definirmos

$$\Gamma_{p,q}^+ = \Gamma_{p,q} \cap \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \quad (3.121)$$

então

$$\widehat{\sigma}(\Gamma_{p,q}^+) = \text{SO}(p, q) \quad (3.122)$$

A aplicação  $\widehat{\sigma}$  é um homomorfismo e ela é também sobrejetora. Na seção anterior mostramos que uma reflexão no hiperplano ortogonal a um vetor  $\mathbf{u}$  é dada por  $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \widehat{\mathbf{u}}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}$ . Portanto

$$\widehat{\sigma}(\mathbf{u}) = S_{\mathbf{u}} \quad (3.123)$$

Evidentemente  $\mathbf{u} \in \Gamma_{p,q}$ . Agora, segundo o teorema de Cartan-Dieudonné, qualquer transformação ortogonal  $T \in \text{O}(p, q)$  pode ser expressa como o produto de um número finito de reflexões do tipo  $S_{\mathbf{u}} = \widehat{\sigma}(\mathbf{u})$ . Portanto existe um número finito de vetores  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  tal que qualquer transformação ortogonal pode ser escrita na forma

$$\widehat{\sigma}(\mathbf{u}_1) \dots \widehat{\sigma}(\mathbf{u}_k) = \widehat{\sigma}(\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k), \quad (3.124)$$

e obviamente  $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k \in \Gamma_{p,q}$ , o que mostra que  $\widehat{\sigma}$  é sobrejetora.

Isso serve para termos uma outra caracterização equivalente do grupo de Clifford-Lipschitz, como o grupo consistindo do produto de todos os vetores não-nulos de  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ :

$$\widehat{\Gamma}_{p,q} = \{a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^* \mid a = \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{p,q}, g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) \neq 0\} \quad (3.125)$$

A decomposição  $a = \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k$  não é única. Além disso,

$$\begin{array}{l} k \text{ é ímpar} \iff \text{reflexão} \\ k \text{ é par} \iff \text{rotação} \end{array}$$

Podemos ainda mostrar que  $\ker \sigma = \mathbb{R}^*$ , onde  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ .

### 3.11 Os grupos Pin e Spin

Para descrever as transformações ortogonais não precisamos de todo o  $\Gamma_{p,q}$ , mas de um subgrupo desse.

A norma de um multivetor é escrita como

$$N(a) = |a|^2 = \langle \bar{a}a \rangle_0, \quad a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}. \quad (3.126)$$

Uma outra definição possível para uma norma em  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$  é

$$N^\circ(a) = \langle \bar{a}a \rangle_0. \quad (3.127)$$

Essas duas normas se relacionam por

$$N^\circ(a_p) = (-1)^p N(a_p). \quad (3.128)$$

Verifica-se que  $N$  e  $N^\circ$  são homomorfismos  $N, N^\circ : \widehat{\Gamma}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ . Com essas normas podemos normalizar os elementos de  $\widehat{\Gamma}_{p,q}$  obtendo subgrupos cujos núcleos são menores.

### 3.11.1 O grupo Pin

O grupo  $\text{Pin}(p, q)$  é definido como

$$\text{Pin}(p, q) = \{a \in \widehat{\Gamma}_{p,q} \mid N(a) = \pm 1\} \quad (3.129)$$

Dessa definição temos que

$$\widehat{\sigma} : \text{Pin}(p, q) \rightarrow \text{O}(p, q), \quad (3.130)$$

com

$$\ker \widehat{\sigma}|_{\text{Pin}(p,q)} = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2. \quad (3.131)$$

Com o uso da norma  $N^\circ$  podemos ainda definir o grupo  $\text{Pin}^\circ(p, q)$  como

$$\text{Pin}^\circ(p, q) = \{a \in \widehat{\Gamma}_{p,q} \mid N^\circ(a) = \pm 1\} \quad (3.132)$$

Da eq.(3.128) vemos que  $N^\circ(a) = N(a)$  se  $a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ . Como consequência,

$$\text{Pin}(p, q) \cap \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = \text{Pin}^\circ(p, q) \cap \mathcal{C}\ell_{p,q}^+. \quad (3.133)$$

### 3.11.2 O grupo Spin

O grupo  $\text{Spin}(p, q)$  é definido como

$$\text{Spin}(p, q) = \{a \in \widehat{\Gamma}_{p,q}^+ \mid N(a) = \pm 1\} \quad (3.134)$$

Dessa definição temos que

$$\widehat{\sigma} : \text{Spin}(p, q) \rightarrow \text{SO}(p, q) \quad (3.135)$$

com

$$\ker \widehat{\sigma}|_{\text{Spin}(p,q)} = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2. \quad (3.136)$$

É imediato que

$$\text{Spin}(p, q) = \text{Pin}(p, q) \cap \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \quad (3.137)$$

e da eq.(3.133) segue que

$$\text{Spin}(p, q) = \text{Spin}^\circ(p, q). \quad (3.138)$$

### 3.11.3 Os grupos Pin e Spin reduzidos

Podemos ainda definir os subgrupos  $\text{Pin}_+(p, q)$  e  $\text{Pin}_+^\circ(p, q)$  como

$$\text{Pin}_+(p, q) = \{a \in \widehat{\Gamma}_{p,q} \mid N(a) = 1\} \quad (3.139)$$

e

$$\text{Pin}_+^\circ(p, q) = \{a \in \widehat{\Gamma}_{p,q} \mid N^\circ(a) = 1\} \quad (3.140)$$

além de um outro subgrupo  $\text{Spin}_+(p, q)$  como

$$\text{Spin}_+(p, q) = \{a \in \widehat{\Gamma}_{p,q}^+ \mid N(a) = 1\} \quad (3.141)$$

Seja  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}$ . Da eq.(3.123) sabemos que  $\widehat{\sigma}(\mathbf{v}) = S_{\mathbf{v}}$  é uma reflexão no hiperplano ortogonal a  $\mathbf{v}$ . Por outro lado  $N(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^2 = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  e se  $N(\mathbf{v}) = 1$  então  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$ . Portanto os elementos de  $\text{Pin}_+(p, q)$  são tais que  $\widehat{\sigma}(a)$  consiste no produto de reflexões em hiperplanos ortogonais a vetores do tipo  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$ . Se  $T(a)$  é a matriz representando essa transformação ortogonal, isso significa que  $\det D_q$  não pode mudar de sinal nessa transformação. Assim

$$\widehat{\sigma}(\text{Pin}_+(p, q)) = \text{O}_+(p, q). \quad (3.142)$$

Por outro lado,  $N^\circ(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}^2 = -g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ , de modo que  $N(\mathbf{v}) = 1$  implica que  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -1$ . Portanto os elementos de  $\text{Pin}_+(p, q)$  são tais que  $\widehat{\sigma}(a)$  consiste no produto de reflexões em hiperplanos ortogonais a vetores do tipo  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -1$ . Nesse caso para a matriz  $T(a)$  é o  $\det A_p$  que não muda de sinal. Conseqüentemente,

$$\widehat{\sigma}(\text{Spin}_+(p, q)) = \text{SO}_+(p, q). \quad (3.143)$$

O núcleo das aplicações (3.142, 3.143) é  $\mathbb{Z}_2$ . Nesse caso dizemos que, por exemplo, o grupo  $\text{Spin}_+(p, q)$  é o *recobrimento duplo* de  $\text{SO}_+(p, q)$ . Podemos escrever que

$$\begin{array}{l} \text{Pin}_+(p, q)/\mathbb{Z}_2 = \text{O}_+(p, q) \\ \text{Spin}_+(p, q)/\mathbb{Z}_2 = \text{SO}_+(p, q) \end{array} \quad (3.144)$$

Como conseqüência imediata do assunto discutido nessa seção temos o

**Teorema 3.17** ► *Seja  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  a AC de  $\mathbb{R}^{p,q}$  e  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$  sua subálgebra par. Então se  $n = p + q \leq 5$  temos*

$$\text{Spin}_+(p, q) = \{R \in \mathcal{Cl}_{p,q}^+ \mid R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1\} \blacktriangleleft$$

### 3.12 A álgebra de Lie dos grupos associados

Grupos de Lie podem ser vistos como variedades munidas de uma estrutura de grupo, onde as operações do grupo são diferenciáveis. Não entraremos em detalhes sobre os conceitos ligados aos grupos de Lie [Ri93][La97][Sa00], pois o que nos interessa neste capítulo é estudar as álgebras de Clifford e todos os conceitos relativos a esse formalismo. Entretanto, como as álgebras de Lie aparecem dentro das álgebras de Clifford, uma pequena discussão se faz oportuna.

Os grupos definidos nas seções anteriores são grupos de Lie, e a álgebra de Lie desses grupos pode ser identificada com um subespaço de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  e o colchete de Lie é dado pelo comutador

$$[a, b] = ab - ba, \quad (3.145)$$

para  $a, b$  elementos desse subespaço em questão.

Considerando  $\mathcal{Cl}_{p,q}^*$  o grupo dos elementos inversíveis (eq.(3.95)), definimos a função

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{Cl}_{p,q} &\rightarrow \mathcal{Cl}_{p,q}^* \\ a &\mapsto \exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.146)$$

O espaço vetorial  $V = \mathcal{Cl}_{p,q}$  com produto definido pela eq.(3.145) pode ser identificado com a álgebra de Lie de  $\mathcal{Cl}_{p,q}^*$ .

Como exemplo vamos considerar o grupo de Clifford-Lipschitz  $\Gamma_{p,q}$ . Esse grupo é um subgrupo de Lie do grupo de Lie  $\mathcal{C}\ell_{p,q}^*$  e sua álgebra de Lie é um subespaço vetorial de  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ . Suponha que  $X$  seja um elemento da álgebra de Lie de  $\Gamma_{p,q}$ . Então  $\exp(tX)$  é um elemento de  $\Gamma_{p,q}$ , ou seja,

$$f(t) = \text{Ad } \exp(tX)(\mathbf{v}) \equiv \exp(tX) \mathbf{v} \exp(-tX) \in \mathbb{R}^{p,q}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}. \quad (3.147)$$

Definindo

$$(\text{ad}(X))(\mathbf{v}) = [X, \mathbf{v}] = X\mathbf{v} - \mathbf{v}X. \quad (3.148)$$

e usando o conhecido resultado da teoria de grupos [Cr90].

$$\text{Ad}(\exp(tX)) = \exp(\text{ad}(tX)), \quad (3.149)$$

temos que  $f(t) \in \mathbb{R}^{p,q}$  se, e somente se,

$$\text{ad}(X)(\mathbf{v}) = [X, \mathbf{v}] = X\mathbf{v} - \mathbf{v}X \in \mathbb{R}^{p,q}. \quad (3.150)$$

Prova-se [Va99] que  $X$ , um elemento da álgebra de Lie de  $\Gamma_{p,q}$ , pode ser escrito como um elemento

$$X \in \text{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q}) \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}). \quad (3.151)$$

Desse modo,  $\exp(tX) \in \Gamma_{p,q}$ .

Em relação ao grupo  $\text{Spin}_+(p, q)$ , se  $R \in \text{Spin}(p, q)$ , então  $\hat{R} = R$ , e, para  $R = \exp(tX)$ ,  $X$  deve ser da forma  $X = a + B$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $B \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q})$ . Além disso, a condição  $R\tilde{R} = 1$  implica que  $1 = \exp(t\tilde{X})\exp(tX) = \exp(2ta)$ , ou seja,  $a = 0$ . Com isso, concluímos que

$$\text{Spin}_+(p, q) \ni R = \exp(tB), \quad B \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}). \quad (3.152)$$

A álgebra de Lie do grupo  $\text{Spin}_+(p, q)$  consiste no espaço vetorial dos bivectores munido do produto, que é o comutador.

Se  $B$  e  $C$  são bivectores, então

$$BC = \langle BC \rangle_0 + \langle BC \rangle_2 + \langle BC \rangle_4, \quad (3.153)$$

e já que  $\tilde{B} = -B$  e  $\tilde{C} = -C$ ,

$$\widetilde{BC} = \tilde{C}\tilde{B} = CB. \quad (3.154)$$

Aplicando a reversão na eq.(3.153),

$$CB = \langle BC \rangle_0 - \langle BC \rangle_2 + \langle BC \rangle_4, \quad (3.155)$$

subtraímos essa última equação da eq.(3.153) e obtemos

$$BC - CB = [B, C] = 2 \langle BC \rangle_2. \quad (3.156)$$

O comutador de bivectores é um bivector e a álgebra  $(\Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}), [ , ])$  é a álgebra de Lie do grupo  $\text{Spin}_+(p, q)$

**Exemplo: a álgebra de Lie de Spin(3,0)**

Considere as quantidades

$$L_1 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{23}, \quad L_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{31}, \quad L_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{12}. \quad (3.157)$$

Esses bivectores satisfazem

$$L_1 = [L_2, L_3], \quad L_2 = [L_3, L_1], \quad L_3 = [L_1, L_2], \quad (3.158)$$

ou seja, a álgebra de Lie de Spin(3,0) é isomorfa à álgebra de Lie do grupo SU(2). Provamos o isomorfismo entre esses dois grupos no cap.(4).

**A álgebra de Lie de Spin<sub>+</sub>(1,3)**

Considere uma base ortonormal  $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  para a álgebra do espaço-tempo  $\mathcal{Cl}_{1,3}$ . Existem seis geradores para essa álgebra, já que o número de geradores é o próprio número dos bivectores de  $\mathcal{Cl}_{1,3}$ . Definimos os geradores  $\{J_i, L_i\}$  da álgebra de Lie como:

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2}\gamma_{i0}, \\ L_i &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\gamma_{jk}, \end{aligned} \quad (3.159)$$

onde  $\epsilon^{ijk}$  é o símbolo de permutação de Levi-Civita, definido por

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } \varepsilon(\sigma) = 1, \\ -1, & \text{se } \varepsilon(\sigma) = -1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.160)$$

e  $\varepsilon(\sigma)$  é o *operador sinal da permutação*, já definido na subsec.(3.1.1).

Com essas definições provamos as relações de comutação [Br64] entre os geradores:

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= -\epsilon^{ijk}L_k, \\ [J_i, J_j] &= -\epsilon^{ijk}L_k, \\ [J_i, L_j] &= -\epsilon^{ijk}J_k. \end{aligned} \quad (3.161)$$

**3.13 As três definições de spinors**

Na seção (2.2) vimos que o grupo SU(2), associado às transformações do vetor-spin, é recobrimento duplo do grupo ortogonal especial SO(3), ou seja,  $SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$ . O espaço de representação do SU(2) é o  $\mathbb{C}^2$ . Tais elementos de  $\mathbb{C}^2$  são ditos *spinors*, e dentro da nossa subsequente classificação, os próprios *spinors clássicos* (também conhecidos como *spinors de Pauli*), para esse caso.

Provaremos na subseção (4.1.5) que o grupo SU(2) é isomorfo ao grupo Spin(3), de onde concluimos que  $\mathbb{C}^2$  é o espaço de representação do grupo Spin(3). Os grupos Spin estão naturalmente definidos dentro de uma AC, como vimos na seção anterior, e, no caso do grupo Spin(3), dentro de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Dizemos ainda que Spin(3) é a *representação de spin 1/2* do grupo de rotações espaciais (em  $\mathbb{R}^3$ ) e o grupo SO(3) é a *representação de spin 1* dessas rotações, com Spin(3)  $\simeq$  SU(2) e Spin(3)/ $\mathbb{Z}_2 \simeq$  SO(3). Não somente nos restringindo a  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , iremos definir o spinor clássico como entidades que carregam uma

representação irredutível do grupo Spin, que é recobrimento duplo do grupo ortogonal especial e, portanto, a representação de spin 1/2 do grupo de rotações em um espaço munido de uma métrica.

Também será usada uma outra definição para o spinor, a *algébrica*, onde um spinor é um elemento de um ideal minimal lateral de uma álgebra de Clifford. A representação da álgebra de Clifford obtida dessa maneira será chamada de *representação spinorial*. De fato, ainda nesse exemplo envolvendo  $\mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ , esse ideal é isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ , de onde sugere-se essa outra definição.

Além das definições denominadas clássica e algébrica, existe ainda a que chamaremos *operatorial*. Discutiremos<sup>9</sup> cada uma delas separadamente, devido à sua importância ao desenvolvimento da teoria.

### 3.13.1 Spinors algébricos

**Definição** ► Um elemento de um ideal lateral minimal de uma álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}(V, g)$  é dito um **spinor algébrico** se  $\mathcal{Cl}(V, g)$  for uma álgebra simples e um **semi-spinor algébrico** se  $\mathcal{Cl}(V, g)$  for semi-simples e não-simples. ◀

Identificamos os spinors algébricos segundo a classificação das ACs discutidas na seção (3.10). Para uma AC simples temos  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(N, \mathbb{K})$  e um ideal à esquerda minimal de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  é isomorfo a  $\mathbb{K}^N$ . No caso em que consideramos uma AC semi-simples, temos  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(N, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}(N, \mathbb{K})$  e um ideal à esquerda minimal de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  é isomorfo a  $\mathbb{K}^N$ . Semi-spinors algébricos são classificados de acordo com esse isomorfismo, ou seja, como elementos de  $\mathbb{K}^N$ . Nesse caso a soma de semi-spinors algébricos é chamada um spinor algébrico<sup>10</sup>. Para uma AC semi-simples um spinor algébrico é classificado como um elemento de  $\mathbb{K}^N \oplus \mathbb{K}^N$ .

De acordo com a classificação das AC, podemos classificar os spinors algébricos:

- **$p - q = 0, 2 \pmod{8}$** . Neste caso temos  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$ . Um spinor algébrico é um elemento de um ideal à esquerda minimal isomorfo a  $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$ .

- **$p - q = 4, 6 \pmod{8}$** . Temos  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$ . O espaço de spinors algébricos é isomorfo a  $\mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$ .

- **$p - q = 3, 7 \pmod{8}$** . Neste caso temos  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{C})$ . Um spinor algébrico é um elemento de um ideal à esquerda minimal isomorfo a  $\mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$ . A condição  $p - q = 3, 7 \pmod{8}$  só acontece se  $n = p + q$  for ímpar. Nesse caso o pseudoescalar  $I$  pertence ao centro de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  e satisfaz  $I^2 = -1$ , definindo assim uma  $\mathbb{C}$ -estrutura.

- **$p - q = 5 \pmod{8}$** . Quando esta condição ocorre  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  é semi-simples, onde  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$ , portanto temos semi-spinors algébricos. O espaço dos semi-spinors algébricos é isomorfo a  $\mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$  e conseqüentemente o espaço dos spinors algébricos é o  $\mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}} \oplus \mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$ . Para  $p - q = 5 \pmod{8}$  o pseudoescalar  $I$  pertence ao centro de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  e é tal que  $I^2 = 1$ . Assim, podemos escrever  $\mathcal{Cl}_{p,q} = +\mathcal{Cl}_{p,q} \oplus -\mathcal{Cl}_{p,q}$ , com  $\pm \mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$ .

- **$p - q = 1 \pmod{8}$** . Nesta condição  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  é semi-simples e temos o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$ . Portanto temos semi-spinors algébricos. O espaço dos semi-spinors algébricos é isomorfo a  $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$ . Então o espaço dos spinors algébricos é isomorfo a  $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \oplus \mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$ . Para  $p - q = 1 \pmod{8}$ , o pseudoescalar  $I$  pertence ao centro de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$

<sup>9</sup>Optamos por enfatizar as ACs reais, pois o caso complexo é trivialmente obtido a partir delas.

<sup>10</sup>Neste caso, o ideal não é minimal.

e é tal que  $I^2 = 1$ . Neste caso, também é possível escrever  $\mathcal{Cl}_{p,q} = +\mathcal{Cl}_{p,q} \oplus -\mathcal{Cl}_{p,q}$ , com  $\pm\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$ .

### 3.13.2 Spinors clássicos

**Definição** ► Seja  $\mathbb{R}^{p,q}$  um espaço quadrático,  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  a AC desse espaço e  $\text{Spin}_+(p, q)$  o grupo spin associado a  $\mathcal{Cl}_{p,q}$ . Um elemento do espaço de representação irredutível de  $\text{Spin}_+(p, q)$  é dito um **spinor clássico**<sup>11</sup>. ◀

Novamente de acordo com a classificação das ACs, podemos classificar os spinors clássicos:

- **$p - q = 1, 7 \pmod{8}$** . Neste caso temos  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{p,q-1} = \mathcal{Cl}_{p',q'}$ , com  $p' - q' = p - q + 1 = 0, 2 \pmod{8}$ , ou seja  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}, \mathbb{R})$ . Um spinor clássico é um elemento isomorfo a  $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}}$ .

- **$p - q = 2, 6 \pmod{8}$** . Temos  $p' - q' = p - q + 1 = 3, 7 \pmod{8}$ , de modo que  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{C})$ . Um spinor clássico é um elemento de  $\mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$ . O pseudoescalar  $I$  define uma estrutura complexa no espaço dos spinors clássicos e temos duas representações irredutíveis não-equivalentes: uma com  $I = i \in \mathbb{C}$  e a outra com  $I = -i$ . Os spinors clássicos que correspondem a essas duas estruturas são conjugados.

- **$p - q = 3, 5 \pmod{8}$** . Aqui  $p' - q' = 4, 6 \pmod{8}$  e assim temos a relação  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$ . Um spinor clássico é um elemento  $\mathbb{H}^{2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}}$ .

- **$p - q = 4 \pmod{8}$** . Quando essa condição ocorre,  $p' - q' = 5 \pmod{8}$ . A sub-álgebra par é semi-simples e portanto estabelecemos o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$ . Temos duas representações não-equivalentes de  $\text{Spin}_+(p, q)$ . Um spinor clássico é um elemento de  $\mathbb{H}^{2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}}$ . Assim, podemos escrever  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ = +\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \oplus -\mathcal{Cl}_{p,q}^+$ .

- **$p - q = 0 \pmod{8}$** . Nesta condição,  $p' - q' = 1 \pmod{8}$ . A sub-álgebra par  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$  é semi-simples, onde  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}, \mathbb{R})$ , portanto temos duas representações não-equivalentes de  $\text{Spin}_+(p, q)$ . O espaço  $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}}$  é o espaço dos semi-spinors clássicos. Como no caso anterior, é possível escrever  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ = +\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \oplus -\mathcal{Cl}_{p,q}^+$ .

**Observação:** a definição de spinor algébrico em  $\mathbb{R}^{q,p-1}$  é equivalente à definição de um spinor clássico em  $\mathbb{R}^{p,q}$ , já que, com base na eq.(3.56), a saber

$$\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{q,p-1}, \quad (3.162)$$

uma representação irredutível de  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$  é obtida a partir de uma representação irredutível de  $\mathcal{Cl}_{q,p-1}$ . Daí concluímos que um spinor clássico em  $\mathbb{R}^{p,q}$  é um spinor algébrico em  $\mathbb{R}^{q,p-1}$ .

### 3.13.3 Spinors operatoriais

Dada uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada como  $\mathcal{Cl}_{p,q}$ , podemos usar sua sub-álgebra par  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$  como um espaço de representação de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$ . Definimos uma representação  $\rho : \mathcal{Cl}_{p,q} \rightarrow \text{End}(\mathcal{Cl}_{p,q}^+)$ , que será denominada *representação graduada irredutível* (RGI).

<sup>11</sup>Essa denominação não é padrão. Estamos utilizando-a para enfatizar que se trata da definição usual encontrada sobretudo em livros de física.

Escrevemos um multivetor  $a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$  como  $a = a_+ + a_-$ , onde

$$a_{\pm} = \frac{1}{2}(a \pm \hat{a}). \quad (3.163)$$

Considere agora  $\rho = \rho_+ + \rho_-$  de modo que

$$\rho(a) = \rho_+(a_+) + \rho_-(a_-).$$

Para  $a_- \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-$  temos  $a_- \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-$  para  $\phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ , ou seja,

$$\rho_+(a_+)(\phi) = a_+ \phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+. \quad (3.164)$$

Tome agora um elemento ímpar  $\varsigma$  e defina

$$\rho_-(a_-)(\phi) = a_- \phi \varsigma, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+. \quad (3.165)$$

Se escolhermos  $\varsigma$  de modo que

$$\varsigma^2 = 1, \quad \varsigma \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-, \quad (3.166)$$

$\rho = \rho_+ + \rho_-$  é uma representação de  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \rho(ab) &= \rho(a_+ b_+ + a_+ b_- + a_- b_+ + a_- b_-) \\ &= \rho_+(a_+ b_+) + \rho_-(a_+ b_-) + \rho_-(a_- b_+) + \rho_+(a_- b_-). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos as relações

$$\begin{aligned} \rho_+(a_+ b_+)(\phi) &= a_+ b_+ \phi = \rho_+(a_+) \rho_+(b_+)(\phi), \\ \rho_+(a_+ b_-)(\phi) &= a_+ b_- \phi \varsigma = \rho_+(a_+) \rho_-(b_-)(\phi), \\ \rho_-(a_- b_+)(\phi) &= a_- b_+ \phi \varsigma = \rho_-(a_-) \rho_-(b_+)(\phi), \\ \rho_-(a_- b_-)(\phi) &= a_- b_- \phi \varsigma^2 = a_- b_- \phi = \rho_-(a_-) \rho_-(b_-)(\phi), \end{aligned}$$

e, portanto

$$\boxed{\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)} \quad (3.167)$$

A definição da RGI depende da existência de um elemento ímpar tal que  $\varsigma^2 = 1$ . Nos casos  $\mathcal{C}\ell_{0,1} \simeq \mathbb{C}$  e  $\mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ , esse elemento não existe. Para saber se  $\rho$  é redutível, siga o seguinte raciocínio: suponha que exista um elemento  $\varpi_1 \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$  tal que

$$(\varpi_1)^2 = 1, \quad \varpi_1 \varsigma = \varsigma \varpi_1. \quad (3.168)$$

Assim podemos escrever  $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = {}_+ \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \oplus {}_- \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ , onde

$$\pm \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \frac{1}{2}(1 \pm \varpi_1), \quad (3.169)$$

de modo que, para  $\phi_{\pm} \in \pm \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ , temos

$$\phi_{\pm} \varpi_1 = \pm \phi_{\pm}. \quad (3.170)$$

Cada um dos espaços  $\pm \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$  é invariante pela ação de  $\rho$ , como pode ser visto diretamente a partir da eq.(3.168). Além disso esses subespaços são subálgebras de  $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ .

Se existir um outro elemento par  $\varpi_2$  tal que  $(\varpi_2)^2 = 1$ ,  $\varpi_2\varpi_1 = \varpi_1\varpi_2$  e  $\varpi_2\varsigma = \varsigma\varpi_2$ , então os subespaços  $\pm\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$  não carregam uma representação irredutível. Definimos, pois, outros quatro subespaços

$$\pm\pm\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = \pm\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \frac{1}{2}(1 \pm \varpi_1) \frac{1}{2}(1 \pm \varpi_2), \quad (3.171)$$

cada um invariante pela ação de  $\rho$ . Podemos então continuar com essa construção se tivermos um outro elemento par  $\varpi_3$  tal que  $(\varpi_3)^2 = 1$ ,  $\varpi_3\varpi_1 = \varpi_1\varpi_3$ ,  $\varpi_3\varpi_2 = \varpi_2\varpi_3$  e  $\varpi_3\varsigma = \varsigma\varpi_3$ . Construimos, agora, oito subespaços invariantes.

Quando não existirem mais elementos pares satisfazendo essas condições, temos então uma *representação irredutível*. O espaço que carrega tal representação será denominado *álgebra spinorial*, que é uma sub-álgebra da sub-álgebra par e em alguns casos ela mesma pode ser a própria sub-álgebra par.

**Definição ►** Um elemento do espaço de representação graduada irredutível de  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$  é denominado um **spinor operatorial**. ◀

Na verdade existem ainda outras subálgebras de Clifford que podem ser utilizadas como espaço de representação. O estudo dessas subálgebras e a completa classificação dos espaços operatoriais definidos em termos de subálgebras tem sido objeto de estudo atual [Mo00].

# Algumas álgebras de Clifford importantes 4

*Ich will wissen, wie Gott die Welt geschafft hat.  
Für diese oder jene Erscheinung interessiere ich nicht.  
Ich will Seine Gedanken wissen, das Übergebliebene ist ein Detail.<sup>1</sup>*

Albert Einstein

## 4.1 A álgebra de Pauli $\mathcal{Cl}_{3,0}$

Considere o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  e uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . A álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , também chamada *álgebra de Pauli* é gerada por  $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , tal que

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Um elemento genérico de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  pode ser escrito como:

$$\psi = a + a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 + a^{12} \mathbf{e}_{12} + a^{13} \mathbf{e}_{13} + a^{23} \mathbf{e}_{23} + p \mathbf{e}_{123}, \quad \{a, a^i, a^{ij}, p\} \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

É possível também escrever

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad (4.3)$$

onde  $\psi_\mu = \langle \psi \rangle_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) e  $\langle \rangle_\mu$  é o operador que projeta um multivetor arbitrário na sua parte  $\mu$ -vetorial, conforme descrito na seção (3.2). Em se tratando de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , os 3 (anti)automorfismos aplicados sobre um multivetor  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  arbitrário, são escritos como:

$$\hat{\psi} = \psi_0 - \psi_1 + \psi_2 - \psi_3, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\psi} = \psi_0 + \psi_1 - \psi_2 - \psi_3, \quad (4.5)$$

$$\bar{\psi} = \psi_0 - \psi_1 - \psi_2 + \psi_3. \quad (4.6)$$

Além disso definimos a norma de  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  como já feito na seção (3.12), a saber,

$$N(\psi) = \langle \psi \tilde{\psi} \rangle_0. \quad (4.7)$$

Através da involução graduada escrevemos  $\mathcal{Cl}_{3,0} = \mathcal{Cl}_{3,0}^+ \oplus \mathcal{Cl}_{3,0}^-$ , com

$$\mathcal{Cl}_{3,0}^\pm = \{\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0} \mid \hat{\psi} = \pm \psi\}. \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>“Eu desejo saber como Deus criou o mundo. Não me interessa esse ou aquele fenômeno. Eu quero conhecer Seus pensamentos, o resto é mero detalhe.”

$\mathcal{Cl}_{3,0}^+$  é a subálgebra par de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  e seus elementos<sup>2</sup> são da forma

$$\mathcal{Cl}_{3,0}^+ \ni \varphi_+ = a + a^{ij} \mathbf{e}_{ij}. \quad (4.9)$$

Dados dois vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , escrevemos, pela definição da álgebra de Clifford,

$$\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u} = 2g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Então, o produto geométrico de 2 vetores é escrito como

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u})$ .

#### 4.1.1 O produto vetorial

Considere o produto exterior

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u^i \mathbf{e}_i \wedge v^j \mathbf{e}_j) = (v_1 u_2 - u_1 v_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (v_2 u_3 - v_3 u_2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + (v_3 u_1 - v_1 u_3) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3. \quad (4.12)$$

Vemos que as componentes do produto acima são as mesmas do *produto vetorial* usual, mas o elemento acima é um bivector, um elemento de  $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ , que não muda de sinal perante uma *inversão espacial*<sup>3</sup>. Queremos caracterizar o produto vetorial  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  entre dois vetores de  $\mathbb{R}^3$  como um *vetor* de  $\mathbb{R}^3$  e, como tal, deve mudar de sinal perante uma inversão espacial. Não podemos dizer que o produto exterior é o produto vetorial. No entanto, para relacionarmos esses dois produtos, usamos o *operador dual de Hodge*, que foi definido na subseção (3.3.1), a saber,

$$\star \psi = \tilde{\psi} \mathcal{J} \quad (4.13)$$

onde o pseudoescalar

$$\mathcal{J} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \quad (4.14)$$

satisfaz  $\mathcal{J}^2 = -1$ . Dessa maneira,

$$\star \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \star \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \star \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

Portanto

$$\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (v_2 u_3 - v_3 u_2) \mathbf{e}_1 + (v_3 u_1 - v_1 u_3) \mathbf{e}_2 + (v_1 u_2 - u_1 v_2) \mathbf{e}_3. \quad (4.15)$$

Sob uma inversão espacial o vetor  $\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$  muda de sinal e, com essa motivação, definimos o produto vetorial

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \mathcal{J} \quad (4.16)$$

Logo, segundo a definição acima,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é um vetor, ao contrário do produto vetorial cujo resultado é um pseudovetor. Quantidades físicas que não trocam de sinal perante uma inversão espacial devem ser, portanto, descritas por bivectores.

<sup>2</sup>Tais elementos, se satisfizerem a relação  $N(\varphi_+) = \varphi_+ \tilde{\varphi}_+ = 1$  são chamados de *rottores*, e, por definição, pertencem ao grupo  $\text{Spin}_+(3)$ .

<sup>3</sup>Definimos uma reversão espacial como uma inversão de sentido dos vetores  $\mathbf{e}_i$  da base.

### 4.1.2 Representação de $\mathcal{Cl}_{3,0}$ : as matrizes de Pauli

Já sabemos que existe um isomorfismo  $\rho : \mathcal{Cl}_{3,0} \rightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$  e queremos obter uma representação matricial para os multivetores de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Seguimos as regras para tal obtenção [BT87][Va99]:

i) Escolher um conjunto de  $N$  idempotentes primitivos ortogonais  $f^A$  ( $A = 1, \dots, N$ ) de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  tais que  $\sum_A f^A = 1$  e dentre esses um idempotente particular.

ii) Escolher elementos  $\{\mathcal{E}_{A1}\}$  e  $\{\mathcal{E}_{1A}\}$  tais que  $f_1 = \mathcal{E}_{1A}\mathcal{E}_{A1}$  e  $f_B\mathcal{E}_{A1} = \delta_{AB}\mathcal{E}_{A1}$  e  $\mathcal{E}_{1A}f_B = \delta_{AB}\mathcal{E}_{1A}$ .

iii) Definir uma base para  $\mathcal{M}(N, \mathbb{K})$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , através de  $\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E}_{A1}\mathcal{E}_{1B}$ . A representação matricial dos geradores  $\gamma_i = \gamma(\mathbf{e}_i)$  de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  é dada por

$$(\gamma_i)_{AB} = \sum_C \mathcal{E}_{CA}\gamma_i\mathcal{E}_{BC}. \quad (4.17)$$

Para o caso de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , escolhemos dois idempotentes primitivos<sup>4</sup>

$$f_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3), \quad f_2 = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e}_3). \quad (4.18)$$

As condições  $f_2\mathcal{E}_{11} = \mathcal{E}_{11}f_2 = 0$  e  $f_1\mathcal{E}_{11} = \mathcal{E}_{11}f_1 = \mathcal{E}_{11}$  são satisfeitas para  $\mathcal{E}_{11}$  da forma  $(a + b\mathcal{J})(1 + \mathbf{e}_3)$ . Além disso  $\mathcal{E}_{11}\mathcal{E}_{11} = \mathcal{E}_{11}$ , de modo que uma solução é dada por  $a = 1/2$  e  $b = 0$ . Portanto

$$\mathcal{E}_{11} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3). \quad (4.19)$$

As condições  $f_1\mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}_{21}f_2 = 0$  e  $f_2\mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}_{21}f_1 = \mathcal{E}_{21}$  são satisfeitas para  $\mathcal{E}_{21} = (a'\mathbf{e}_1 + b'\mathbf{e}_2)(1 + \mathbf{e}_3)$ . Já as condições  $f_2\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_{12}f_1 = 0$  e  $f_1\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_{12}f_2 = \mathcal{E}_{12}$  são satisfeitas para  $\mathcal{E}_{12} = (a''\mathbf{e}_1 + b''\mathbf{e}_2)(1 - \mathbf{e}_3)$ . A condição  $\mathbf{e}_{12}\mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}_{11}$  implica que  $a'b'' = a''b'$  e  $a'a'' + b'b'' = 1/4$ . Uma solução é dada por  $b' = b'' = 0$  e  $a' = a'' = 1/2$ . Assim temos

$$\mathcal{E}_{12} = \mathbf{e}_1 \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e}_3), \quad \mathcal{E}_{21} = \mathbf{e}_1 \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3). \quad (4.20)$$

Da relação  $\mathcal{E}_{22} = \mathcal{E}_{21}\mathcal{E}_{12}$ , encontramos que

$$\mathcal{E}_{22} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e}_3). \quad (4.21)$$

Invertendo as equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22}, & \mathbf{e}_3 &= \mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{22}, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{21}, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 &= \mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{12}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathcal{J}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = i\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = i\mathcal{E}_{21} - i\mathcal{E}_{12}. \quad (4.22)$$

Portanto a representação matricial  $\rho : \mathbf{e}_i \mapsto \rho(\mathbf{e}_i) = \sigma_i$  dos vetores  $\mathbf{e}_i$  é dada por:

$$\rho(\mathbf{e}_1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{e}_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{e}_3) = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

<sup>4</sup>A escolha mais arbitrária seria  $f_{\pm} = \frac{1}{2}(1 + u)$ , com  $u^2 = 1$ , mas como  $u$  pode ser obtido a partir de uma rotação de  $\mathbf{e}_3$ , a escolha é, de fato, geral.

que são as *matrizes de Pauli*. Segundo essa representação, um multivetor  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  é levado em uma matriz  $\Psi = \rho(\psi)$ . Se  $\psi$  é dado pela eq.(4.2) então  $\Psi$  é dado por

$$\Psi = \begin{pmatrix} (a + a^3) + i(a^{12} + p) & (a^1 + a^{13}) + i(a^{23} - a^2) \\ (a^1 - a^{13}) + i(a^{23} + a^2) & (a - a^3) + i(p - a^{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Em termos dos (anti)automorfismos de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , obtemos a correspondência

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi} = \begin{pmatrix} z_4^* & -z_2^* \\ -z_3^* & z_1^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} z_4 & -z_3 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Além disso um elemento de  $\mathcal{Cl}_{3,0}^+$  é representado por

$$\rho(\varphi_+) = \Phi_+ = \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}, \quad w_1, w_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.26)$$

#### 4.1.3 O operador $\nabla$ em $\mathcal{Cl}_{3,0}$

Considere o espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , onde para cada ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$  temos  $\mathbb{E}^3|_{\mathbf{x}} \simeq \mathbb{R}^3$ . Ao invés de tratarmos as coordenadas de um multivetor constantes, podemos definir um campo multivetorial  $A = A(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ , cuja forma geral é

$$A = a(\mathbf{x}) + a^1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + a^2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + a^3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3 + a^{12}(\mathbf{x})\mathbf{e}_{12} + a^{13}(\mathbf{x})\mathbf{e}_{13} + a^{23}(\mathbf{x})\mathbf{e}_{23} + p(\mathbf{x})\mathbf{e}_{123}. \quad (4.27)$$

Definimos o operador nabla  $\nabla : \mathcal{Cl}_{3,0} \rightarrow \mathcal{Cl}_{3,0}$  que age sobre um campo multivetorial  $A(\mathbf{x})$  através da equação

$$\nabla A(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} A(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} A(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} A(\mathbf{x}). \quad (4.28)$$

Analisamos primeiramente o caso particular de um campo escalar  $\Lambda^0(\mathbb{R}^3) \ni \phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso,

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \text{grad } \phi(\mathbf{x}), \quad (4.29)$$

que é o próprio gradiente de  $\phi(\mathbf{x})$ .

Tomamos agora outro caso particular, o de um campo vetorial  $\Lambda_0(\mathbb{R}^3) \ni \Omega : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que tem a forma

$$\Omega(\mathbf{x}) = \Omega^1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \Omega^2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + \Omega^3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3. \quad (4.30)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla \Omega(\mathbf{x}) &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\Omega^1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \Omega^2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + \Omega^3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (\Omega^1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \Omega^2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + \Omega^3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3) \\ &\quad + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\Omega^1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \Omega^2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + \Omega^3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3) \\ &= \nabla \cdot \Omega(\mathbf{x}) + \nabla \wedge \Omega(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$\nabla \cdot \Omega(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Omega^1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega^2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial \Omega^3(\mathbf{x})}{\partial x_3} \quad (4.32)$$

é o divergente do campo vetorial  $\Omega(\mathbf{x}) \in \Lambda_1(\mathbb{R}^3)$ . Além disso, a parte que envolve o produto exterior, a saber,

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \Omega(\mathbf{x}) &= \left( \frac{\partial \Omega^2(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega^1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial \Omega^1(\mathbf{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial \Omega^3(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left( \frac{\partial \Omega^3(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega^2(\mathbf{x})}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (4.33)$$

pode ser relacionada ao rotacional<sup>5</sup> como

$$\nabla \times \Omega(\mathbf{x}) = \star(\nabla \wedge \Omega(\mathbf{x})) = \text{curl } \Omega(\mathbf{x}), \quad (4.34)$$

que é identificado como sendo o *rotacional* de  $\Omega(\mathbf{x})$ .

Utilizando o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ , temos a correspondência

$$\nabla \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

#### 4.1.4 Quatérnions

O anel dos quatérnions  $\mathbb{H}$  é constituído por elementos da forma

$$q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q}, \quad (4.36)$$

onde  $q_\mu \in \mathbb{R}$  e  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  são as *unidades quaterniônicas* e satisfazem

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \quad (4.37)$$

Chamamos  $q_0 = \text{Re}(q)$  a *parte real* de  $q$  e  $\mathbf{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = \text{Pu}(q)$  sua *parte quaterniônica pura*.

Já vimos que

$$\mathcal{Cl}_{3,0}^+ \ni \varphi_+ = a + a^{12} \mathbf{e}_{12} + a^{13} \mathbf{e}_{13} + a^{23} \mathbf{e}_{23}, \quad (4.38)$$

e que

$$\boxed{\mathbb{H} \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}^+} \quad (4.39)$$

Introduzindo a notação

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \quad (4.40)$$

construímos explicitamente o isomorfismo  $\zeta : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{Cl}_{3,0}^+$ , dado por

$$\zeta(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, \quad \zeta(\mathbf{j}) = \mathbf{j}, \quad \zeta(\mathbf{k}) = \mathbf{k}. \quad (4.41)$$

Os bivectores  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  satisfazem às mesmas regras que as unidades quaterniônicas  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

Podemos ainda escrever  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  da forma

$$\psi = (a + \mathcal{I}p) + (a^{12} - \mathcal{I}a^3) \mathbf{e}_{12} + (a^{23} - \mathcal{I}a^1) \mathbf{e}_{23} + (-a^{13} - \mathcal{I}a^2) \mathbf{e}_{31}, \quad (4.42)$$

o que nos permite verificar de modo explícito que

$$\boxed{\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}} \quad (4.43)$$

e que, portanto,  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ , que é uma relação clássica entre as álgebras de divisão sobre  $\mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>Já que  $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ , como já visto no início desta seção.

### 4.1.5 Rotações espaciais

Considere um vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  e o vetor  $\mathbf{v}'$  obtido de  $\mathbf{v}$  a partir de uma rotação arbitrária. O produto geométrico entre os dois vetores se escreve como

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathcal{I}(\mathbf{v}' \times \mathbf{v}). \quad (4.44)$$

Podemos definir ângulos entre vetores usando os produtos escalar e vetorial de vetores, a saber,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} &= |\mathbf{v}'||\mathbf{v}| \cos \theta, \\ \mathbf{v}' \times \mathbf{v} &= |\mathbf{v}' \times \mathbf{v}| \hat{\mathbf{w}} = |\mathbf{v}'||\mathbf{v}| \sin \theta \hat{\mathbf{w}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde  $\hat{\mathbf{w}}$  é o vetor unitário normal ao plano determinado pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$ . Utilizando as três equações acima temos

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = |\mathbf{v}'||\mathbf{v}|(\cos \theta + \mathcal{I}\hat{\mathbf{w}} \sin \theta) = \exp(\mathcal{I}\hat{\mathbf{w}}\theta). \quad (4.46)$$

Multiplicando a equação acima à direita por  $\mathbf{v}$  obtemos

$$\mathbf{v}' = \exp(\mathcal{I}\hat{\mathbf{w}}\theta)\mathbf{v}, \quad (4.47)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{v}' = \exp(\mathcal{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2) \mathbf{v} \exp(-\mathcal{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2). \quad (4.48)$$

Portanto uma rotação de um vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  no plano cujo vetor normal é  $\hat{\mathbf{w}}$  (e direção  $\mathbf{w}$ ) por um ângulo  $\theta$  é dada pela eq.(4.48) acima.

Já que  $\mathcal{I}$  é o pseudoescalar de  $\mathcal{C}\ell_{3,0}$  e  $\hat{\mathbf{w}}$  é um vetor, então o produto  $\mathcal{I}\hat{\mathbf{w}}$  é um bivector. Com isso definimos a rotação de um multivetor por um ângulo  $\theta$  no plano cuja normal é  $\hat{\mathbf{w}}$  como

$$\boxed{\psi' = \exp(\mathcal{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2) \psi \exp(-\mathcal{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2)} \quad (4.49)$$

Escrevemos  $R = \exp(\mathbf{B})$ , onde  $\mathbf{B} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ . Com essa motivação definimos o grupo

$$\boxed{\text{Spin}(3) = \{R \in \mathcal{C}\ell_{3,0}^+ \mid \tilde{R}R = 1\}} \quad (4.50)$$

Vemos que as rotações realizadas por  $R$  e  $-R$  têm a mesma imagem, o que faz com que o grupo  $\text{Spin}(3)$  seja o recobrimento duplo de  $\text{SO}(3)$ . A partir do isomorfismo  $\mathcal{C}\ell_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ , podemos ver que  $\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$ , onde

$$\boxed{\text{SU}(2) = \{s \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \mid s^\dagger s = I, \det s = 1\}} \quad (4.51)$$

De fato, usando as relações (4.26), vemos que a condição  $R\tilde{R} = 1$  para  $R \in \mathcal{C}\ell_{3,0}^+$  se traduz em termos de  $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$  por

$$R\tilde{R} = 1 \iff \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

ou seja,

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = \det \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} = 1. \quad (4.53)$$

### 4.1.6 Spinors de Pauli

Um *spinor de Pauli*, segundo o ponto de vista que denominamos clássico no cap.(3), é um elemento de  $\mathbb{C}^2$ , que carrega a representação de  $SU(2)$ , da forma

$$\varrho = \begin{pmatrix} \varsigma_1 + i\varrho_1 \\ \varsigma_2 + i\varrho_2 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

onde  $\varsigma_{\mathcal{J}}, \varrho_{\mathcal{J}} \in \mathbb{R}$ , ( $\mathcal{J} = 1, 2$ ). Definimos o spinor de Pauli, do ponto de vista algébrico, como um elemento do ideal à esquerda  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_+$ , considerando o idempotente  $|1\rangle \equiv f_+ = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3)$ . O conjunto  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 f_+\}$  é uma base para o ideal  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_+$ , já que um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  pode ser escrito como

$$\psi f_+ = [(a + a^3) + \mathfrak{I}(a^{12} + a^{123})]f_+ + [(a^1 + a^{13}) + \mathfrak{I}(a^2 + a^{23})]\mathbf{e}_1 f_+. \quad (4.55)$$

Ao identificarmos<sup>6</sup>

$$|1\rangle = f_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \mathbf{e}_1 f_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

podemos escrever o spinor algébrico de Pauli como

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{3,0}f_+ \ni \psi f_+ &= (\varsigma_1 + i\varrho_1)|1\rangle + (\varsigma_2 + i\varrho_2)|2\rangle \\ &= \psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle \simeq \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

com  $\varrho_1 = a^{12} + a^{123}$ ,  $\varrho_2 = a^2 + a^{23}$ ,  $\varsigma_1 = a + a^3$  e  $\varsigma_2 = a^1 + a^{13}$ , o que nos reconduz à definição clássica dos spinors de Pauli. Essa última notação é utilizada em livros de mecânica quântica.

## 4.2 A álgebra do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}$

Considere uma base ortonormal  $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  do espaço-tempo  $\mathbb{R}^{1,3}$ , o qual pode ser identificado com o espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{M}$ . A importância do estudo da álgebra  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  se baseia na vastidão de suas aplicações em teorias físicas relativísticas.

Expressamos a ortonormalidade dos elementos da base como

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \eta_{\mu\nu}, \quad (4.58)$$

onde  $\eta_{ii} = -1$ ,  $\eta_{00} = 1$  e  $\eta_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ , ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ). Um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  é escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{1,3} \ni \Upsilon &= c + c^0 \gamma_0 + c^1 \gamma_1 + c^2 \gamma_2 + c^3 \gamma_3 + c^{01} \gamma_{01} + c^{02} \gamma_{02} + c^{03} \gamma_{03} + c^{12} \gamma_{12} + c^{13} \gamma_{13} \\ &\quad + c^{23} \gamma_{23} + c^{012} \gamma_{012} + c^{013} \gamma_{013} + c^{023} \gamma_{023} + c^{123} \gamma_{123} + c^{0123} \gamma_{0123}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

O 4-vetor  $\gamma_{0123}$  é denotado por  $\gamma_5$  e satisfaz  $(\gamma_5)^2 = -1$ , além de anticomutar com os vetores ( $\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu$ ). Pela tabela de classificação das álgebras de Clifford (subseção (3.9.8)) sabemos que  $\mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ . A fim de obtermos uma representação de  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  em termos de matrizes com entradas quaterniônicas, faremos uso do idempotente primitivo  $f = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)$ . O ideal minimal à esquerda da álgebra  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  é escrito como  $I_{1,3} = \mathcal{Cl}_{1,3}f$ .

<sup>6</sup>Os vetores  $|1\rangle, |2\rangle$  são os próprios autoestados de spin  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  vistos na subseção (2.2.1).

Um elemento de  $I_{1,3}$  é da forma

$$I_{1,3} \ni \Xi = (a^1 + a^2\gamma_{23} + a^3\gamma_{31} + a^4\gamma_{12})f + (a^5 + a^6\gamma_{23} + a^7\gamma_{31} + a^8\gamma_{12})\gamma_5 f, \quad (4.60)$$

onde

$$\begin{aligned} a^1 &= c + c^0, & a^2 &= c^{23} + c^{023}, \\ a^3 &= -c^{13} - c^{013}, & a^4 &= c^{12} + c^{012}, \\ a^5 &= -c^{123} + c^{0123}, & a^6 &= c^1 - c^{01}, \\ a^7 &= c^2 - c^{02}, & a^8 &= c^3 - c^{03}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ao denotarmos

$$\boxed{i_\circ = \gamma_{23}, \quad j_\circ = \gamma_{31}, \quad k_\circ = \gamma_{12}} \quad (4.62)$$

podemos ver que  $\{i_\circ, j_\circ, k_\circ\}$  satisfazem as propriedades das unidades quaterniônicas e conseguimos escrever

$$\mathcal{Cl}_{1,3}f = I_{1,3} \ni \Xi = (a^1 + a^2i_\circ + a^3j_\circ + a^4k_\circ)f + (a^5 + a^6i_\circ + a^7j_\circ + a^8k_\circ)\gamma_5 f. \quad (4.63)$$

Dizemos que o conjunto  $\{1, \gamma_5\}f$  forma uma base para o ideal  $I_{1,3}$ . Pelas regras em [BT87], podemos escrever

$$\gamma_\mu = f\gamma_\mu f + f\gamma_\mu\gamma_5 f - f\gamma_5\gamma_\mu f - f\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 f. \quad (4.64)$$

Obtemos, pois, a representação matricial dos vetores ortonormais  $\gamma_\mu$ :

$$\boxed{\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{k} & 0 \end{pmatrix}} \quad (4.65)$$

Dessa maneira,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com essas representações, é possível escrever  $\Upsilon \in \mathcal{Cl}_{1,3}$  como

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} (c + c^0) + (c^{23} + c^{023})i & (-c^{123} - c^{0123}) + (c^1 + c^{01})i + \\ + (-c^{13} - c^{013})j + (c^{12} + c^{012})\mathfrak{k} & (c^2 + c^{02})j + (c^3 + c^{03})\mathfrak{k} \\ (-c^{123} + c^{0123}) + (c^1 - c^{01})i & (c - c^0) + (c^{23} - c^{023})i + \\ + (c^2 - c^{02})j + (c^3 - c^{03})\mathfrak{k} & (-c^{13} + c^{013})j + (c^{12} - c^{012})\mathfrak{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Em termos da reversão, a representação matricial de  $\Upsilon$  fica

$$\tilde{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 & -\bar{q}_3 \\ -\bar{q}_2 & \bar{q}_4 \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

onde  $\bar{q}$  simboliza a *conjugação quaterniônica*<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Dado  $\mathbb{H} \ni q = q_0 + \mathbf{q}$  a conjugação quaterniônica inverte o sinal da parte pura do quaternion  $q$ , e é dada por  $\bar{q} = q_0 - \mathbf{q}$ . Podemos ainda notar pelo isomorfismo da eq.(4.39) que  $\bar{q}$  é a própria conjugação em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ .

Casos particulares dos grupos Pin e Spin, definidos no cap.(3), na AC do espaço-tempo  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  são dados por:

$$\text{Pin}_+(1, 3) = \{R \in \mathcal{Cl}_{1,3} \mid R\tilde{R} = 1\} \quad (4.68)$$

e

$$\text{Spin}_+(1, 3) = \{R \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+ \mid R\tilde{R} = 1\} \quad (4.69)$$

Como caso particular do isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{q,p+1}^+$ , para  $p = 3$  e  $q = 0$ , temos a correspondência:

			$\mathcal{Cl}_{3,0}$	$\simeq$	$\mathcal{Cl}_{1,3}^+$			
C	I	R	$k$ -vetores			R	I	C
+	+	+	0		0	+	+	+
-	-	+	1		2	-	+	-
-	+	-	2		2	-	+	-
+	-	-	3		4	+	+	+

onde C denota a conjugação, I a involução graduada e R a reversão.

Na tabela acima está implícito o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{1,3}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}$ , dado pela aplicação  $\rho : \mathcal{Cl}_{1,3}^+ \rightarrow \mathcal{Cl}_{3,0}$

$$\rho(\gamma_i) = \mathbf{e}_i = \gamma_i \gamma_0 \quad (4.70)$$

Dado um vetor  $\mathbf{x} = x^\mu \gamma_\mu$  de  $\mathbb{R}^{1,3}$ , pelo isomorfismo acima vemos que

$$\mathbf{x} \gamma_0 = x^\mu \gamma_\mu \gamma_0 = x^0 + x^i \gamma_i \gamma_0 = x^0 + x^i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3. \quad (4.71)$$

Com isso é imediato mostrar que  $\mathbf{e}_{kj} = -\gamma_{kj}$  e  $\mathbf{e}_{kjl} = \gamma_{0kjl}$ . Dizemos que um vetor de  $\mathbb{R}^{1,3}$  é isomorfo a um *paravetor* [Ma89][Po95] de  $\mathbb{R}^3$ , que é definido como sendo um elemento do espaço vetorial  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ .

Com base na tabela acima podemos ver que a norma  $s\bar{s}$  para  $s \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+$  é equivalente à norma  $\sigma\bar{\sigma}$  para  $\sigma \in \mathcal{Cl}_{3,0}$ , onde  $\sigma = \rho(s)$ , de modo que podemos definir o grupo

$$\mathcal{Spin}_+(1, 3) = \{s \in \mathcal{Cl}_{3,0} \mid s\bar{s} = 1\} \quad (4.72)$$

Note que em (4.69) temos a reversão, enquanto em (4.72) temos a conjugação.

### 4.3 A álgebra de Dirac $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$

A álgebra de Clifford usual encontrada nos textos de mecânica quântica relativística não é a álgebra de Clifford do espaço-tempo  $\mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ , mas a sua complexificação  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ , a chamada *álgebra de Dirac*. Nesta seção obteremos a *representação de Weyl* e a *representação padrão* da álgebra de Dirac. Denotaremos  $\mathbb{C} \otimes \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  uma base para  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$  e reservaremos, a partir desta seção, a notação  $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  ( $\gamma_\mu \equiv \gamma(e_\mu)$ ) para a representação matricial dos vetores  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ , diferindo da notação da seção anterior. Considere a base ortonormal  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Pela tabela de classificação das ACs (subseção (3.9.8)), vemos que  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ . Assim devemos obter quatro idempotentes primitivos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  tais que  $1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ . De acordo com a proposição (3.3), basta obter dois elementos  $e_{I_1}, e_{I_2}$  de  $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$  que comutem entre si e que, multiplicados por eles mesmos dão a unidade.

## 4.3.1 Representação padrão

Para esta representação tomamos  $e_{I_1} = e_0$  e  $e_{I_2} = ie_1e_2$ . Assim

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_1e_2), \\ P_2 &= \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 - ie_1e_2), \\ P_3 &= \frac{1}{2}(1 - e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_1e_2), \\ P_4 &= \frac{1}{2}(1 - e_0)\frac{1}{2}(1 - ie_1e_2). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Esses quatro idempotentes primitivos são similares. De fato,

$$e_{13}P_1(e_{13})^{-1} = P_2, \quad e_{30}P_1(e_{30})^{-1} = P_3, \quad e_{10}P_1(e_{10})^{-1} = P_4. \quad (4.74)$$

Assim  $e_{13}P_1 \subset P_2\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_1$ ,  $e_{30}P_1 \subset P_3\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_1$  e  $e_{10}P_1 \subset P_4\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_1$ , e colocamos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11} &= P_1, \\ \mathcal{E}_{21} &= -e_{13}P_1, \\ \mathcal{E}_{31} &= e_{30}P_1, \\ \mathcal{E}_{41} &= e_{10}P_1. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Com a restrição de que  $\mathcal{E}_{1j} \subset P_1\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_j$  e  $\mathcal{E}_{1j}\mathcal{E}_{j1} = P_1$ , podemos estabelecer que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11} &= P_1, \\ \mathcal{E}_{12} &= e_{13}P_2, \\ \mathcal{E}_{13} &= e_{30}P_3, \\ \mathcal{E}_{14} &= e_{10}P_4. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Os demais  $\mathcal{E}_{ij}$  estão tabelados abaixo:

$\mathcal{E}_{ij}$				
	$P_1$	$-e_{13}P_2$	$e_{30}P_3$	$e_{10}P_4$
	$e_{13}P_1$	$P_2$	$e_{10}P_3$	$-e_{30}P_4$
	$e_{30}P_1$	$e_{10}P_2$	$P_3$	$e_{13}P_4$
	$e_{10}P_1$	$e_{03}P_2$	$-e_{13}P_3$	$P_4$

Das identidades (4.73) podemos obter explicitamente as representações matriciais de  $e_\mu$ , que serão denotadas por  $\gamma_\mu \equiv \gamma(e_\mu)$ .

(i)  $e_0 = P_1 + P_2 - P_3 - P_4 = \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{33} - \mathcal{E}_{44}$ . Então,

$$\gamma(e_0) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

(ii)  $e_{10} = e_{10}P_1 + e_{10}P_2 + e_{10}P_3 + e_{10}P_4 = \mathcal{E}_{41} + \mathcal{E}_{32} + \mathcal{E}_{23} + \mathcal{E}_{14}$ . Portanto

$$\gamma(e_{10}) = \gamma_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma(e_1) = \gamma_1 &= \gamma_{10}\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

(iii)  $e_{30} = e_{30}P_1 + e_{30}P_2 + e_{30}P_3 + e_{30}P_4 = \mathcal{E}_{31} - \mathcal{E}_{42} + \mathcal{E}_{13} - \mathcal{E}_{24}$ . Portanto

$$\gamma(e_{30}) = \gamma_{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_3 = -\gamma_0\gamma_{03} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

(iv)  $P_1 + P_3 - P_2 - P_4 = ie_1e_2 \implies e_2 = ie_0(e_{01}P_1 + e_{01}P_3 - e_{01}P_2 - e_{01}P_4) = ie_0(\mathcal{E}_{14} + \mathcal{E}_{32} - \mathcal{E}_{23} - \mathcal{E}_{41})$ . Segue-se daí que

$$\gamma_2 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

A representação padrão das matrizes de Dirac é dada então por

$$\boxed{\gamma(e_0) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_k) = \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}} \quad (4.83)$$

### 4.3.2 Representação de Weyl

Para esta representação tomamos  $e_{I_1} = e_5 = e_{0123}$  e  $e_{I_2} = ie_1e_2$ .

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + e_5) \frac{1}{2}(1 + ie_1e_2),$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{2}(1 + e_5)\frac{1}{2}(1 - ie_1e_2), \\
P_3 &= \frac{1}{2}(1 - e_5)\frac{1}{2}(1 + ie_1e_2), \\
P_4 &= \frac{1}{2}(1 - e_5)\frac{1}{2}(1 - ie_1e_2).
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Também no caso da representação de Weyl esses quatro idempotentes primitivos são similares. De fato,

$$e_0P_1e_0^{-1} = P_3, \quad e_1P_1e_1^{-1} = P_4, \quad e_{01}P_1(e_{01})^{-1} = P_2. \tag{4.85}$$

Mais geralmente podemos dizer que todos os idempotentes primitivos são similares em uma álgebra simples. Assim  $e_0P_1 \subset P_3\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_1$ ,  $e_1P_1 \subset P_4\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_1$ ,  $e_{01}P_1 \subset P_2\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_1$  e estabelecemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{11} &= P_1, \\
\mathcal{E}_{21} &= e_{01}P_1, \\
\mathcal{E}_{31} &= e_0P_1, \\
\mathcal{E}_{41} &= e_1P_1.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Com a restrição de que  $\mathcal{E}_{1j} \subset P_1\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P_j$  e  $\mathcal{E}_{1j}\mathcal{E}_{j1} = P_1$ , podemos estabelecer que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{11} &= P_1, \\
\mathcal{E}_{12} &= e_{01}P_2, \\
\mathcal{E}_{13} &= e_0P_3, \\
\mathcal{E}_{14} &= -e_1P_4.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

As outras entradas matriciais  $\mathcal{E}_{ij}$  estão tabeladas abaixo:

$\mathcal{E}_{ij}$				
	$P_1$	$e_{01}P_2$	$e_0P_3$	$-e_1P_4$
	$e_{01}P_1$	$P_2$	$-e_1P_3$	$e_0P_4$
	$e_0P_1$	$e_1P_2$	$P_3$	$-e_{01}P_4$
	$e_1P_1$	$e_0P_2$	$e_{10}P_3$	$P_4$

Obtemos abaixo explicitamente as representações matriciais de  $e_\mu$ , que serão denotadas por  $\gamma_\mu \equiv \gamma(e_\mu)$ .

(i)  $e_0 = e_0P_1 + e_0P_2 + e_0P_3 + e_0P_4 = \mathcal{E}_{31} + \mathcal{E}_{42} + \mathcal{E}_{13} + \mathcal{E}_{24}$ . Logo

$$\gamma(e_0) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.88}$$

(ii)  $e_1 = e_1P_1 + e_1P_2 + e_1P_3 + e_1P_4 = \mathcal{E}_{41} + \mathcal{E}_{32} - \mathcal{E}_{23} - \mathcal{E}_{14}$ . Portanto

$$\gamma(e_1) = \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

(iii)  $ie_5 = P_1 + P_2 - P_3 - P_4 \Rightarrow e_5 = -i(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = -i(\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{33} - \mathcal{E}_{44})$ .  
Daí,

$$\gamma(e_5) = \gamma_5 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_2 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

(iv)  $ie_1e_2 = P_1 + P_3 - P_2 - P_4 \Rightarrow e_2 = i(e_1P_1 + e_1P_3 - e_1P_2 - e_1P_4) = i(\mathcal{E}_{14} - \mathcal{E}_{32} - \mathcal{E}_{23} + \mathcal{E}_{41})$ . Segue-se daí que

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Da igualdade  $e_5 = e_{0123}$ , vemos que  $e_3 = -e_{012}e_5$ . Matricialmente podemos mostrar que

$$\gamma(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

A representação de Weyl das matrizes de Dirac é dada por

$$\gamma(e_0) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_k) = \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

#### 4.4 A álgebra $\mathcal{Cl}_{2,4}$

Considere agora a álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{2,4}$ . Seja  $\{\varepsilon_{\check{A}}\}$  ( $\check{A} = 0, 1, \dots, 5$ ) uma base para o espaço  $\mathbb{R}^{2,4}$ , com  $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_5^2 = 1$  e  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \varepsilon_4^2 = -1$ . Considere também o espaço  $\mathbb{R}^{4,1}$ , com uma base ortonormal  $\{E_A\}$  ( $A = 0, 1, \dots, 4$ ), onde  $E_0^2 = -1$  e  $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_4^2 = 1$ . Como caso particular das definições de grupos Pin e Spin no cap.(3), apresentamos os grupos:

$$\text{Pin}_+(2,4) = \{Q \in \mathcal{Cl}_{2,4} \mid Q\tilde{Q} = 1\} \quad (4.93)$$

e

$$\text{Spin}_+(2,4) = \{Q \in \mathcal{Cl}_{2,4}^+ \mid Q\tilde{Q} = 1\} \quad (4.94)$$

Além disso, definimos:

$$\mathfrak{Spin}_+(2,4) = \{D \in \mathcal{Cl}_{4,1} \mid D\bar{D} = 1\} \quad (4.95)$$

O grupo  $\text{Spin}_+(2, 4)$  é definido a partir do teorema (3.12). No presente caso onde  $p = 2$  e  $q = 4$ ,

$$\mathcal{Cl}_{2,4}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}. \quad (4.96)$$

#### 4.5 O isomorfismo $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$

Queremos descrever as transformações conformes no espaço-tempo utilizando para isso a álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . Para isso explicitamos três isomorfismos importantes entre  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  e  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$  nas três subseções que se seguem. Estudaremos esta álgebra mais detalhadamente, pois definiremos os *twistors* como spinors algébricos em  $\mathbb{R}^{4,1}$  ou, de modo equivalente, spinors clássicos em  $\mathbb{R}^{2,4}$ , que são elementos do espaço de representação do grupo  $\text{Spin}_+(2, 4)$  que é definido, pela eq.(4.95), em  $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ , ou seja, na álgebra de Dirac.

##### 4.5.1 A identificação $\gamma_\nu = E_\nu E_4$

Em se tratando do isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ , com  $\gamma_\nu = E_\nu E_4$  ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) e  $i = E_{01234}$ , podemos mostrar que

$$E_0 = -i\gamma_{123}, \quad E_1 = -i\gamma_{023}, \quad E_2 = i\gamma_{013}, \quad E_3 = -i\gamma_{012}, \quad E_4 = -i\gamma_{0123}. \quad (4.97)$$

Um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  pode ser escrito como:

$$Z = H + H^A E_A + H^{AB} E_{AB} + H^{ABC} E_{ABC} + H^{ABCD} E_{ABCD} + H^{01234} E_{01234}, \quad (4.98)$$

que pode ser reescrito na forma

$$Z = B + B^\mu \gamma_\mu + B^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + B^{\mu\nu\sigma} \gamma_{\mu\nu\sigma} + B^{0123} \gamma_{0123},$$

onde

$$\begin{aligned} B &= H + iH^{01234}, & B^0 &= H^{04} - iH^{123}, & B^1 &= H^{14} - iH^{023}, \\ B^2 &= H^{24} + iH^{013}, & B^3 &= H^{34} - iH^{012}, & B^{12} &= -H^{12} + iH^{034}, \\ B^{13} &= -H^{13} - iH^{024}, & B^{23} &= -H^{23} + iH^{014}, & B^{01} &= -H^{01} - iH^{234}, \\ B^{02} &= -H^{02} + iH^{134}, & B^{03} &= -H^{03} - iH^{124}, & B^{012} &= -H^{0124} - iH^3, \\ B^{013} &= -H^{0134} + iH^2, & B^{023} &= -H^{0234} - iH^1, & B^{123} &= -H^{1234} - iH^0, \\ B^{0123} &= H^{0123} - iH^4. \end{aligned}$$

Com essas identificações podemos relacionar os (anti-)automorfismos de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  com os de  $\mathcal{Cl}_{1,3}$ , a saber,

$$\widehat{\mathcal{Cl}}_{4,1} \simeq \mathbb{C}^* \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}, \quad (4.99)$$

$$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \overline{\mathcal{Cl}}_{1,3}, \quad (4.100)$$

$$\overline{\mathcal{Cl}}_{4,1} \simeq \mathbb{C}^* \otimes \overline{\mathcal{Cl}}_{1,3}, \quad (4.101)$$

$$\mathcal{Cl}_{4,1}^* \equiv E_4 \widetilde{\mathcal{Cl}}_{4,1} E_4 \simeq \mathbb{C} \otimes \widetilde{\mathcal{Cl}}_{1,3}, \quad (4.102)$$

$$\mathcal{Cl}_{4,1}^{\Delta} \equiv E_4 \mathcal{Cl}_{4,1} E_4 \simeq \mathbb{C} \otimes \widehat{\mathcal{Cl}}_{1,3}. \quad (4.103)$$

Usando a representação padrão para as matrizes  $\gamma_{\mu}$  obtemos

$$\varrho(Z) \equiv \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} z_{11} &= (H + H^{04} + H^{034} - H^3) + i(H^{01234} - H^{123} + H^{12} + H^{0124}), \\ z_{12} &= (-H^{13} - H^{0134} + H^{014} - H^1) + i(-H^{024} + H^2 + H^{23} + H^{0234}), \\ z_{13} &= (H^{03} - H^{34} + H^4 + H^0) + i(H^{124} + H^{012} + H^{0123} - H^{1234}), \\ z_{14} &= (H^{01} - H^{14} + H^{134} - H^{013}) + i(H^{234} + H^{023} - H^{02} + H^{24}), \\ z_{21} &= (H^{13} + H^{0134} + H^{014} - H^1) + i(H^{024} - H^2 + H^{23} + H^{0234}), \\ z_{22} &= (H + H^{04} - H^{034} + H^3) + i(H^{01234} - H^{123} - H^{12} - H^{0124}), \\ z_{23} &= (H^{03} - H^{34} + H^4 + H^0) + i(H^{124} + H^{012} + H^{0123} - H^{1234}), \\ z_{24} &= (-H^{03} + H^{34} + H^4 + H^0) + i(-H^{124} - H^{012} + H^{0123} - H^{1234}), \\ z_{31} &= (H^{03} + H^{34} + H^4 - H^0) + i(H^{124} - H^{012} + H^{0123} + H^{1234}), \\ z_{32} &= (H^{01} + H^{14} - H^{134} + H^{013}) + i(H^{234} - H^{023} - H^{02} - H^{24}), \\ z_{33} &= (H - H^{04} + H^{034} + H^3) + i(H^{01234} + H^{123} + H^{12} - H^{0124}), \\ z_{34} &= (-H^{13} + H^{0134} + H^{014} + H^1) + i(-H^{024} - H^2 + H^{23} - H^{0234}), \\ z_{41} &= (H^{01} + H^{14} + H^{134} - H^{013}) + i(H^{234} - H^{023} + H^{02} + H^{24}), \\ z_{42} &= (-H^{03} - H^{34} + H^4 - H^0) + i(-H^{124} + H^{012} + H^{0123} + H^{1234}), \\ z_{43} &= (H^{13} - H^{0134} + H^{014} + H^1) + i(H^{024} + H^2 + H^{23} - H^{0234}), \\ z_{44} &= (H - H^{04} - H^{034} - H^3) + i(H^{01234} + H^{123} - H^{12} + H^{0124}). \end{aligned}$$

Com essas expressões, relacionamos abaixo as operações matriciais aos (anti)automorfismos de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$ :

### 1. Conjugação:

$$\varrho(\bar{Z}) \equiv \bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} z_{33}^* & z_{43}^* & -z_{13}^* & -z_{23}^* \\ z_{34}^* & z_{44}^* & -z_{14}^* & -z_{24}^* \\ -z_{31}^* & -z_{41}^* & z_{11}^* & z_{21}^* \\ -z_{32}^* & -z_{42}^* & z_{12}^* & z_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_4^{\dagger} & -\phi_2^{\dagger} \\ -\phi_3^{\dagger} & \phi_1^{\dagger} \end{pmatrix},$$

onde  $\dagger$  denota conjugação hermiteana.

A relação  $\bar{Z}Z = 1$  em  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  se traduz em  $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$  por  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z} = 1$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{\dagger} & \phi_3^{\dagger} \\ \phi_2^{\dagger} & \phi_4^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1^{\dagger} & \phi_3^{\dagger} \\ \phi_2^{\dagger} & \phi_4^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o que significa que  $\mathbf{Z} \in \text{Sp}(2, \mathbb{C})$  [AM67]. Dessa relação, que podemos escrever na forma  $\mathbf{Z}^{\dagger} \mathbf{J} \mathbf{Z} = \mathbf{J}$ , segue-se que  $(\det \mathbf{Z})^2 = 1$ , pois  $\det \mathbf{J} = 1$ , e daí

$$\det \mathbf{Z} = \pm 1. \quad (4.104)$$

Entretanto essas duas possibilidades não podem ser realizadas no caso simplético como o podem no caso ortogonal. É bem sabido [Po95] que, se  $\mathbf{Z} \in \text{Sp}(n, \mathbb{K})$ , então  $\det \mathbf{Z} = 1$ . Logo, a eq.(4.104) não admite a solução  $\det \mathbf{Z} = -1$  e vale somente a relação

$$\boxed{\det \mathbf{Z} = 1} \quad (4.105)$$

### 2. Reversão:

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} z_{44} & -z_{34} & z_{24} & -z_{14} \\ -z_{43} & z_{33} & -z_{23} & z_{13} \\ z_{42} & -z_{32} & z_{22} & -z_{12} \\ -z_{41} & z_{31} & -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{adj}(\phi_4) & \text{adj}(\phi_2) \\ \text{adj}(\phi_3) & \text{adj}(\phi_1) \end{pmatrix},$$

onde  $\text{adj}(\phi) = (\det \phi) \phi^{-1}$ ,  $\forall \phi \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ .

### 3. Involução graduada:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} z_{22}^* & -z_{21}^* & -z_{24}^* & z_{23}^* \\ -z_{12}^* & z_{11}^* & z_{14}^* & -z_{13}^* \\ -z_{42}^* & z_{41}^* & z_{44}^* & -z_{43}^* \\ z_{32}^* & -z_{31}^* & -z_{34}^* & z_{33}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cof}(\phi_1)^* & -\text{cof}(\phi_2)^* \\ -\text{cof}(\phi_3)^* & \text{cof}(\phi_4)^* \end{pmatrix},$$

onde

$$\text{cof} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

### 4. $\mathbf{Z}^\bullet = E_4 \tilde{\mathbf{Z}} E_4$ :

$$\mathbf{Z}^\bullet = \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} & z_{42} & -z_{32} \\ -z_{21} & z_{11} & -z_{41} & z_{31} \\ z_{24} & -z_{41} & z_{44} & -z_{34} \\ -z_{23} & z_{13} & -z_{43} & z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{adj}(\phi_1) & \text{adj}(\phi_3) \\ \text{adj}(\phi_2) & \text{adj}(\phi_4) \end{pmatrix}.$$

### 5. $\mathbf{Z}^\Delta = E_4 \mathbf{Z} E_4 = \widetilde{E_4 \tilde{\mathbf{Z}} E_4} = \widetilde{\mathbf{Z}^\bullet}$ :

$$\mathbf{Z}^\Delta = \begin{pmatrix} z_{33} & z_{34} & z_{31} & z_{32} \\ z_{43} & z_{44} & z_{41} & z_{42} \\ z_{13} & z_{14} & z_{11} & z_{12} \\ z_{23} & z_{24} & z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_4 & \phi_3 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix}.$$

Fizemos os cálculos acima para a representação padrão. Para a representação de Weyl, embora os coeficientes  $z_{\mu\nu}$  da matriz  $\mathbf{Z}$  sejam diferentes, todas as relações descritas pelas itens (1)-(5) acima são também satisfeitas. O mesmo ocorre para todas as outras possíveis representações.

#### 4.5.2 A identificação $\gamma_\mu = iE_\mu$

Com esta outra identificação escrevemos explicitamente, com  $i = E_{01234}$ , a correspondência entre a base  $\{E_A\}$  de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  e os elementos da álgebra de Dirac:

$$E_0 = -i\gamma_0, \quad E_1 = -i\gamma_1, \quad E_2 = -i\gamma_2, \quad E_3 = -i\gamma_3, \quad E_4 = -i\gamma_{0123}. \quad (4.106)$$

Novamente um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  pode ser escrito como:

$$Z = H + H^A E_A + H^{AB} E_{AB} + H^{ABC} E_{ABC} + H^{ABCD} E_{ABCD} + H^{01234} E_{01234}, \quad (4.107)$$

que pode ser reescrito na forma

$$Z = B + B^\mu \gamma_\mu + B^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + B^{\mu\nu\sigma} \gamma_{\mu\nu\sigma} + B^{0123} \gamma_{0123},$$

onde

$$\begin{aligned} B &= H + iH^{01234}, & B^0 &= -H^{1234} - iH^0, & B^1 &= -H^{0234} - iH^1, \\ B^2 &= H^{0134} + iH^2, & B^3 &= -H^{0124} - iH^3, & B^{12} &= -H^{12} + iH^{034}, \\ B^{13} &= -H^{13} - iH^{024}, & B^{23} &= -H^{23} + iH^{014}, & B^{01} &= -H^{01} - iH^{234}, \\ B^{02} &= -H^{02} + iH^{134}, & B^{03} &= -H^{03} - iH^{124}, & B^{012} &= -H^{34} + iH^{012}, \\ B^{013} &= H^{24} + iH^{013}, & B^{023} &= -H^{14} + iH^{023}, & B^{123} &= -H^{04} + iH^{123}, \\ B^{0123} &= H^{0123} - iH^4. \end{aligned}$$

Com essas identificações concluímos que

$$\widehat{\mathcal{Cl}}_{4,1} \simeq \mathbb{C}^* \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}, \quad (4.108)$$

$$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \widetilde{\mathcal{Cl}}_{1,3}, \quad (4.109)$$

$$\overline{\mathcal{Cl}}_{4,1} \simeq \mathbb{C}^* \otimes \overline{\mathcal{Cl}}_{1,3}, \quad (4.110)$$

$$\mathcal{Cl}_{4,1}^\bullet \equiv E_4 \widetilde{\mathcal{Cl}}_{4,1} E_4 \simeq \mathbb{C} \otimes \overline{\mathcal{Cl}}_{1,3}, \quad (4.111)$$

$$\mathcal{Cl}_{4,1}^\Delta \equiv E_4 \mathcal{Cl}_{4,1} E_4 \simeq \mathbb{C} \otimes \widehat{\mathcal{Cl}}_{1,3}. \quad (4.112)$$

No presente caso notamos a diferença advinda do uso de outro isomorfismo diferente daquele utilizado na subseção anterior. As relações acima diferem daquelas pela troca da involução graduada pela reversão em  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  e vice-versa. Usando novamente a representação padrão para as matrizes  $\gamma_\mu$ , obtemos a representação matricial de  $Z \in \mathcal{Cl}_{4,1}$  seguindo o isomorfismo desta seção.

$$\varrho(Z) \equiv \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
z_{11} &= (H - H^{1234} + H^{034} + H^{012}) + i(H^{01234} - H^0 + H^{12} + H^{34}), \\
z_{12} &= (-H^{13} + H^{24} + H^{014} + H^{023}) + i(-H^{024} + H^{013} + H^{23} + H^{14}), \\
z_{13} &= (H^{03} - H^{0124} + H^4 - H^{123}) + i(H^{124} + H^3 + H^{0123} - H^{04}), \\
z_{14} &= (H^{01} + H^{0234} - H^{134} + H^2) + i(H^{234} + H^1 - H^{02} + H^{0134}), \\
z_{21} &= (H^{13} - H^{24} + H^{014} + H^{023}) + i(H^{024} - H^{013} + H^{23} + H^{14}), \\
z_{22} &= (H - H^{1234} - H^{034} - H^{012}) + i(H^{01234} - H^0 - H^{12} - H^{34}), \\
z_{23} &= (H^{01} + H^{0234} + H^{134} - H^2) + i(H^{234} + H^1 + H^{02} - H^{0134}), \\
z_{24} &= (-H^{03} - H^{0124} + H^4 + H^{123}) + i(-H^{124} - H^3 + H^{0123} + H^{04}), \\
z_{31} &= (H^{03} - H^{0124} + H^4 + H^{123}) + i(H^{124} - H^3 + H^{0123} + H^{04}), \\
z_{32} &= (H^{01} - H^{0234} - H^{134} - H^2) + i(H^{234} - H^1 - H^{02} - H^{0134}), \\
z_{33} &= (H + H^{1234} + H^{034} - H^{012}) + i(H^{01234} + H^0 + H^{12} - H^{34}), \\
z_{34} &= (-H^{13} - H^{24} + H^{014} - H^{023}) + i(-H^{024} - H^{013} + H^{23} - H^{14}), \\
z_{41} &= (H^{01} - H^{0234} + H^{134} + H^2) + i(H^{234} - H^1 + H^{02} + H^{0134}), \\
z_{42} &= (-H^{03} + H^{0124} + H^4 + H^{123}) + i(-H^{124} + H^3 + H^{0123} + H^{04}), \\
z_{43} &= (H^{13} + H^{24} + H^{014} - H^{023}) + i(H^{024} + H^{013} + H^{23} - H^{14}), \\
z_{44} &= (H + H^{1234} - H^{034} + H^{012}) + i(H^{01234} + H^0 - H^{12} + H^{34}).
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Com essas expressões podemos expressar em termos de operações matriciais as operações em termos de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$ :

### 1. Conjugação:

$$\rho(\bar{Z}) \equiv \bar{Z} = \begin{pmatrix} z_{11}^* & z_{21}^* & -z_{31}^* & -z_{41}^* \\ z_{12}^* & z_{22}^* & -z_{32}^* & -z_{42}^* \\ -z_{13}^* & -z_{23}^* & z_{33}^* & z_{43}^* \\ -z_{14}^* & -z_{24}^* & z_{34}^* & z_{44}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger & -\phi_3^\dagger \\ -\phi_2^\dagger & \phi_4^\dagger \end{pmatrix}.$$

A relação  $\bar{Z}Z = 1$  em  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  se traduz em  $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$  por  $\bar{Z}Z = 1$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger & \phi_3^\dagger \\ \phi_2^\dagger & \phi_4^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger & \phi_3^\dagger \\ \phi_2^\dagger & \phi_4^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

o que significa que  $Z \in U(2,2)$ . Portanto provamos o resultado  $\mathbb{S}pin_+(2,4) \subset U(2,2)$ . Entretanto, vimos pela eq.(4.105) que  $\det Z = 1$ . Como uma transformação unitária não altera o determinante, então  $\det Z = 1$  e portanto  $Z \in SU(2,2)$ , ou seja,  $\mathbb{S}pin_+(2,4) \subset SU(2,2)$ . Outra maneira de se ver que  $\mathbb{S}pin_+(2,4) \subset SU(2,2)$  é que, da relação  $\mathbb{S}pin_+(2,4) \subset U(2,2)$ , temos duas possibilidades: ou  $\mathbb{S}pin_+(2,4) \subset SU(2,2)$ , ou  $\mathbb{S}pin_+(2,4) \subset U(2,2)$  (com o determinante de sua representação  $\rho : \mathbb{S}pin_+(2,4) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{2,4})$  unitário e negativo). Como  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$  é a componente conexa com a identidade do grupo  $\mathbb{S}pin(2,4)$ , então  $\mathbb{S}pin_+(2,4) \subset SU(2,2)$ .

Vimos pela eq.(3.152) que a álgebra de Lie do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$  é gerada pelos bivectores. Pela eq.(3.7) a dimensão do espaço dos bivectores de  $\mathcal{Cl}_{p,q}$  é  $n(n-1)/2$ , onde  $n = p + q$  é a dimensão do espaço quadrático  $\mathbb{R}^{p,q}$ . Portanto o grupo  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$  tem dimensão igual a 15. Sabemos também que a dimensão do grupo clássico  $SU(2,2)$  é 15, pois a dimensão

de  $SU(n,n)$  é  $(2n)^2 - 1$ . Da igualdade  $\mathfrak{Spin}_+(2,4) \subset SU(2,2)$  e da propriedade que ambos os grupos têm a mesma dimensão, estabelecemos o resultado

$$\boxed{\mathfrak{Spin}_+(2,4) \simeq SU(2,2)} \quad (4.114)$$

Podemos então expressar, pelo resultado acima, o grupo  $SU(2,2)$  dentro da álgebra de Clifford, como

$$\boxed{SU(2,2) = \{Z \in \mathcal{Cl}_{4,1} \mid Z\bar{Z} = 1\}} \quad (4.115)$$

onde  $Z$  é a representação matricial dos elementos do grupo  $\mathfrak{Spin}_+(2,4) \simeq SU(2,2)$ .

### 2.Reversão:

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} z_{44} & -z_{34} & z_{24} & -z_{14} \\ -z_{43} & z_{33} & -z_{23} & z_{13} \\ z_{42} & -z_{32} & z_{22} & -z_{12} \\ -z_{41} & z_{31} & -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{adj}(\phi_4) & \text{adj}(\phi_2) \\ \text{adj}(\phi_3) & \text{adj}(\phi_1) \end{pmatrix},$$

onde  $\text{adj}(\psi) = (\det \psi)\psi^{-1}$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ .

### 3.Involução graduada:

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} z_{22}^* & -z_{21}^* & -z_{24}^* & z_{23}^* \\ -z_{12}^* & z_{11}^* & z_{14}^* & -z_{13}^* \\ -z_{42}^* & z_{41}^* & z_{44}^* & -z_{43}^* \\ z_{32}^* & -z_{31}^* & -z_{34}^* & z_{33}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cof}(\phi_1)^* & -\text{cof}(\phi_2)^* \\ -\text{cof}(\phi_3)^* & \text{cof}(\phi_4)^* \end{pmatrix},$$

onde

$$\text{cof} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

### 4. $Z^\bullet = E_4 \tilde{Z} E_4$ :

$$Z^\bullet = \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} & z_{42} & -z_{32} \\ -z_{21} & z_{11} & -z_{41} & z_{31} \\ z_{24} & -z_{41} & z_{44} & -z_{34} \\ -z_{23} & z_{13} & -z_{43} & z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{adj}(\phi_1) & \text{adj}(\phi_3) \\ \text{adj}(\phi_2) & \text{adj}(\phi_4) \end{pmatrix}.$$

### 5. $Z^\Delta = E_4 Z E_4 = \widetilde{E_4 \tilde{Z} E_4} = \widetilde{Z^\bullet}$ :

$$Z^\Delta = \begin{pmatrix} z_{33} & z_{34} & z_{31} & z_{32} \\ z_{43} & z_{44} & z_{41} & z_{42} \\ z_{13} & z_{14} & z_{11} & z_{12} \\ z_{23} & z_{24} & z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_4 & \phi_3 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.5.3 Uma identificação útil para a definição dos twistors

$$E_0 = i\gamma_0, \quad E_1 = \gamma_{10}, \quad E_2 = \gamma_{20}, \quad E_3 = \gamma_{30}, \quad E_4 = \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_{123}. \quad (4.116)$$

Um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{1,4}$  pode ser escrito como:

$$Z = H + H^A E_A + H^{AB} E_{AB} + H^{ABC} E_{ABC} + H^{ABCD} E_{ABCD} + H^{01234} E_{01234}, \quad (4.117)$$

$Z$  pode ser reescrito na forma

$$Z = B + B^\mu \gamma_\mu + B^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + B^{\mu\nu\sigma} \gamma_{\mu\nu\sigma} + B^{0123} \gamma_{0123},$$

$$\begin{aligned} B &= H + iH^{01234}, & B^0 &= H^{1234} - iH^0, & B^1 &= H^{234} + iH^{01}, \\ B^2 &= H^{134} + iH^{02}, & B^3 &= -H^{124} + iH^{03}, & B^{12} &= -H^{12} + iH^{034}, \\ B^{13} &= -H^{13} - iH^{024}, & B^{23} &= -H^{23} + iH^{014}, & B^{01} &= H^1 + iH^{014}, \\ B^{02} &= -H^2 - iH^{0134}, & B^{03} &= -H^3 + iH^{0124}, & B^{012} &= -H^{34} + iH^{012}, \\ B^{013} &= H_{24} + iH^{013}, & B^{023} &= -H^{14} + iH^{023}, & B^{123} &= -H^4 - iH^{0123}, \\ B^{0123} &= H^{123} + iH^{04}. \end{aligned}$$

Esse isomorfismo é de interesse singular na descrição do twistor, pois é apropriado para passarmos de uma formulação a outra, como veremos com detalhes no cap.(7).

# O Modelo Paravetorial do Espaço-tempo 5

*I have not failed. I have found ten thousands ways that did not work.*

Benjamim Franklin

Neste capítulo iremos introduzir o conceito de paramultivetores [Ba00], em particular os paravetores, que são a soma de escalares e vetores. O objetivo do estudo dos paravetores é reduzir a dimensão da álgebra para formular a teoria em questão. A principal vantagem de uma formulação “minimalista” é que não introduzimos redundâncias através do uso de elementos algébricos que não são estritamente imprescindíveis à formulação de teorias como a mecânica quântica relativística e o eletromagnetismo. Um *paravetor* é definido como sendo um elemento de  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathcal{Cl}_{p,q}$ , onde  $p + q = n$  é a dimensão do espaço. Estudaremos o caso em que  $n = 3$ , onde  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  é a álgebra de Pauli. Mostraremos como um elemento arbitrário  $\psi$  de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  pode ser escrito como um paravetor complexo e usaremos esse elemento para estudarmos alguns aspectos da física no espaço-tempo.

As transformações de Lorentz, que descrevem matematicamente as mudanças de referenciais na teoria da relatividade especial (ou mais precisamente as transformações entre os eventos descritos por vetores do espaço-tempo de Minkowski ( $\mathbb{M}$ )), são descritas por transformações-spin dos paravetores, pelo isomorfismo  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \simeq \text{Spin}_+(1, 3)$ .

## 5.1 A $\mathbb{C}$ -estrutura de $\mathcal{Cl}_{3,0}$

Escolha uma base ortonormal para  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  como sendo  $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{123}\}$ . O pseudoescalar  $\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \equiv \mathcal{I}$  satisfaz  $\mathcal{I}^2 = -1$ , além de pertencer ao centro de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Portanto  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  é isomorfa a uma álgebra com metade do número de elementos sobre  $\mathbb{C}$  onde  $\mathcal{I}$  faz o papel da unidade imaginária.

Portanto, com essa  $\mathbb{C}$ -estrutura, todo bivector em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  pode ser escrito como um vetor imaginário, por exemplo,

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = \mathcal{I} \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mathcal{I}. \quad (5.1)$$

Esse é o próprio operador dual de Hodge e uma  $\mathbb{C}$ -base para  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  é dada por  $\mathbb{C} \otimes \{1, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2\}$ , onde utilizamos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{Cl}_{3,0} &\rightarrow \mathcal{Cl}_{1,3}^+ \\ \mathbf{e}_i &\mapsto \rho(\mathbf{e}_i) = \gamma_i \gamma_0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

já descrito em detalhes no cap.(4). Também vimos que

$$\mathbf{e}_{ij} = -\gamma_{ij}, \quad \mathbf{e}_{jkl} = \gamma_0 \gamma_{jkl}. \quad (5.3)$$

*Parabivectores* e *paratrivectores* também são introduzidos em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  e definidos respectivamente como elementos de  $\Lambda_1(\mathbb{R}^3) \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$  e  $\Lambda_2(\mathbb{R}^3) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^3)$  e, com as igualdades (5.3), podemos ver que bivectores de  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  correspondem a parabivectores de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ .

Um elemento  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  é a soma de um escalar  $p_0$  e um vetor  $\mathbf{p}$ , ambos em geral ser complexos.

$$\psi = p_0 + \mathbf{p}. \quad (5.4)$$

onde  $p_0 = \text{Re}(p_0) + \text{Im}(p_0)$  e  $\mathbf{p} = \text{Re}(\mathbf{p}) + \text{Im}(\mathbf{p})$ . Além disso,  $\text{Re}(p_0) = \langle \psi \rangle_0$ ,  $\text{Im}(p_0) = \langle \psi \rangle_3$ ,  $\text{Re}(\mathbf{p}) = \langle \psi \rangle_1$  e  $\text{Im}(\mathbf{p}) = \langle \psi \rangle_2$ . Dizemos que  $\psi$  é um  $\mathbb{C}$ -paravetor.

Alguns paravetores utilizados em teorias físicas são, por exemplo, o paravetor velocidade  $u = \gamma + \mathbf{u}$  ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ ), o paravetor momentum relativístico  $p = E + \mathbf{p}$  ( $E$  é a energia da partícula), o paravetor densidade de corrente  $j = \rho + \mathbf{j}$  ( $\rho$  é a densidade de carga elétrica e  $\mathbf{j}$  é a densidade de corrente) e o paravetor potencial eletromagnético  $A = \phi + \mathbf{A}$  ( $\phi$  é o potencial elétrico e  $\mathbf{A}$  é o potencial eletromagnético). Um exemplo importante de paravetor é o campo eletromagnético  $\mathcal{F} = \mathbf{E} + \mathcal{I}\mathbf{B}$ , onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico e  $\mathbf{B}$  é o campo magnético.

## 5.2 Automorfismos paravetoriais

Conjugação: reverte o sinal da parte vetorial de  $\psi$ :

$$\psi = p_0 + \mathbf{p} \rightarrow \bar{\psi} = p_0 - \mathbf{p}. \quad (5.5)$$

No caso paravetorial a conjugação é chamada de *reversão espacial*. Qualquer elemento de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  pode ser escrito como

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi + \bar{\psi}) + \frac{1}{2}(\psi - \bar{\psi}) \equiv \langle \psi \rangle_0 + \langle \psi \rangle_1 \quad (5.6)$$

onde  $\langle \psi \rangle_0$  e  $\langle \psi \rangle_1$  são respectivamente as partes escalar e vetorial de  $\psi$ , que podem ser vistas como extensões dos produtos escalar e vetorial

$$\begin{aligned} \langle \psi \phi \rangle_0 &= \frac{1}{2}(\psi \phi + \bar{\psi} \bar{\phi}), \\ \langle \psi \phi \rangle_1 &= \frac{1}{2}(\psi \phi - \bar{\psi} \bar{\phi}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Daí segue que um multivetor  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  é escalar se e somente se  $\psi = \bar{\psi}$ .

C-conjugação: é a reversão em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Se  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  é escrito na base paravetorial  $\{\mathbf{e}_0 \equiv 1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  a C-conjugação é obtida tomando-se o C-conjugado de cada coeficiente

$$\psi = \psi^\mu \mathbf{e}_\mu \rightarrow \tilde{\psi} = \psi^{\mu*} \mathbf{e}_\mu, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (5.8)$$

A C-conjugação é usada para decompor multivetores em partes real (Re) e imaginária (Im):

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi + \tilde{\psi}) + \frac{1}{2}(\psi - \tilde{\psi}) \equiv \text{Re}(\psi) + \text{Im}(\psi). \quad (5.9)$$

A composição da C-conjugação com a conjugação resulta na

**Involução graduada:** decompõe um multivetor em partes par e ímpar:

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi + \widehat{\psi}) + \frac{1}{2}(\psi - \widehat{\psi}) \equiv \langle \psi \rangle_+ + \langle \psi \rangle_- \quad (5.10)$$

A norma de um paravetor é dado pela forma quadrática

$$\psi\bar{\psi} = (p_0 + \mathbf{p})(p_0 - \mathbf{p}) = p_0^2 - \mathbf{p}^2. \quad (5.11)$$

Ora, a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  define a norma de um vetor da mesma maneira, o que nos leva a concluir de maneira natural que vetores de  $\mathbb{M}$  na relatividade especial podem ser representados por paravetores reais de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Tal métrica é dada por:

$$\eta_{\mu\nu} = \langle \mathbf{e}_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu \rangle_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } \mu = \nu = 0, \\ -1, & \text{se } \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu. \end{array} \right\} \quad (5.12)$$

onde

$$\{\mathbf{e}_\mu\} = \{\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}. \quad (5.13)$$

No referencial do observador, a componente temporal de um vetor em  $\mathbb{M}$  é representada por um escalar e as componentes espaciais por um vetor do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Mas nem todos os escalares de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  são componentes temporais de vetores em  $\mathbb{M}$ , podendo ser também invariantes de Lorentz<sup>1</sup>. Um evento  $x$  no espaço-tempo pode ser, então, descrito como

$$x = x^0 + x^i \mathbf{e}_i. \quad (5.14)$$

### 5.3 Transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz (TLs) relacionam diferentes sistemas inerciais e podem ser interpretadas no sentido *ativas*, descrevendo rotações dos vetores em  $\mathbb{M}$  ou *passivas*, que descrevem rotações dos sistemas inerciais. O grupo de Lorentz é responsável pelas rotações de vetores em  $\mathbb{M}$ . Tal grupo possui 6 parâmetros e descreve rotação espacial e *boosts* (rotações hiperbólicas).

Já vimos (eq.(3.144)) que  $\mathbb{S}\text{pin}_+(1, 3)/\mathbb{Z}_2 \simeq \text{SO}_+(1, 3)$ , ou seja,

$$v' = Rv \longleftrightarrow v' = \mathcal{R}v\tilde{\mathcal{R}} = (-\mathcal{R})v(-\tilde{\mathcal{R}}), \quad (5.15)$$

onde  $R \in \text{SO}_+(1, 3)$ ,  $\mathcal{R} \in \mathbb{S}\text{pin}_+(1, 3)$ ,  $v \in \mathbb{R}^{1,3}$  e  $v$  é a representação matricial do vetor  $v$ . O grupo  $\mathbb{S}\text{pin}_+(1, 3)$  já foi definido anteriormente pela eq.(4.72) e provaremos na subsec.(6.1.2) que  $\mathbb{S}\text{pin}_+(1, 3) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Fisicamente somente a velocidade relativa e a orientação do sistema observado em relação ao observador são significativas.

Transformações de Lorentz no modelo paravetorial [Ba95a] tomam a forma de transformações spinoriais que agem nos vetores da base da seguinte maneira:

$$\mathbf{e}_\mu \rightarrow \mathbf{u}_\mu = L\mathbf{e}_\mu\tilde{L}, \quad L \in \mathbb{S}\text{pin}_+(1, 3) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C}). \quad (5.16)$$

<sup>1</sup>Por exemplo, o produto  $mc$  da massa  $m$  de uma partícula pela velocidade da luz  $c$  é a componente temporal do *momentum* no espaço-tempo e simultaneamente a norma  $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$ , que é invariante por transformações de Lorentz. Além disso,  $p^\mu p_\mu = p\bar{p}$  é levado (vide próxima seção) em  $Lp\bar{p}\tilde{L} = p\bar{p}L\tilde{L} = p\bar{p}$ , ou seja, permanece invariante perante transformações de Lorentz. Já as componentes, por exemplo  $p^\mu$ , são levadas em  $Lp^\mu\tilde{L}$  e portanto não são invariantes de Lorentz.

onde  $L$  dá o movimento e a orientação do sistema do objeto com relação ao observador. A base paravetorial  $\{\mathbf{u}_\mu\}$  representa um sistema inercial com *velocidade própria*<sup>2</sup>

$$\mathbf{u}_0 = L\tilde{L} \quad (5.17)$$

em relação ao observador. Um vetor  $v \in \mathbb{M}$  pode ser expandido em termos de ambas as bases:

$$v = v^\mu \mathbf{e}_\mu = v'^\nu \mathbf{u}_\nu. \quad (5.18)$$

Em termos de componentes, escrevemos  $\mathbf{u}_\nu = \mathcal{L}_\nu^\mu \mathbf{e}_\mu$ , de onde se conclui, juntamente com a condição  $L\tilde{L} = 1$  que  $\mathcal{L}_\nu^\mu \mathcal{L}_\lambda^\nu = \delta_\lambda^\mu$ . As matrizes  $\mathcal{L}_\nu^\mu$  formam o grupo  $\text{SO}_+(1, 3)$  das rotações em  $\mathbb{M}$ , cujo recobrimento duplo é o grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

De um modo geral, um paravetor  $p \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{p,q}$  se transforma como

$$p \mapsto p' = Lp\tilde{L}. \quad (5.19)$$

Toda TL *própria*<sup>3</sup> é *unimodular*, ou seja,  $L\tilde{L} = 1$ . Dessa maneira,  $\tilde{L} = L^{-1}$  e a transformação inversa da eq.(5.15) é dada por

$$v = \tilde{L}v'\hat{L}. \quad (5.20)$$

Escrevemos

$$L = \exp(\mathbf{W}), \quad (5.21)$$

onde  $\mathbf{W} = \mathbf{w} - \mathcal{I}\theta$ ,  $\mathbf{w}, \theta \in \Lambda_1(\mathbb{R}^3)$ . Em uma transformação ativa, se  $\mathbf{w} = 0$ ,  $L$  descreve uma rotação espacial no plano determinado pelo bivetor  $\mathcal{I}\theta$  por um ângulo  $\theta$ . Por outro lado, se  $\theta = 0$ , então  $L$  é um *boost* do objeto com *fator de rapidez*  $\mathbf{w}$ . Em outras palavras, se  $L$  é real ( $L = \tilde{L}$ )  $L$  representa um *boost*  $B$ , onde

$$B = \exp(\mathbf{w}/2) = \cosh(w/2) + \hat{\mathbf{w}} \sinh(w/2). \quad (5.22)$$

Se  $L$  é par ( $L = \hat{L}$ ), representa uma rotação:

$$R = \exp(-i\theta/2) = \cos \theta/2 - i\hat{\theta} \sin \theta/2. \quad (5.23)$$

Considere a base paravetorial<sup>4</sup>  $\{\mathbf{e}_\mu\} = \{\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  em repouso em relação a um observador  $\mathcal{S}$  e que se move com velocidade  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_3$  com respeito ao observador  $\mathcal{S}'$ . Tal sistema inercial é visto por  $\mathcal{S}'$  como  $\mathbf{u}_\mu = L\mathbf{e}_\mu\tilde{L}$ . Se a transformação  $L$  tem a forma  $L = B = \exp(\mathbf{e}_3\hat{\mathbf{w}}/2)$  e  $L$  comuta com  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3$  enquanto anticomuta com  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= B\mathbf{e}_0B = \gamma(1 + v\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_0 = \gamma(\mathbf{e}_0 + v\mathbf{e}_3), \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= B\mathbf{e}_3B = \gamma(1 + v\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = \gamma(\mathbf{e}_3 + v\mathbf{e}_0). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Toda transformação  $L$  pode ser escrita como o produto  $BR$  de um *boost*  $B = (L\tilde{L})^{1/2}$  e uma rotação  $R = \tilde{B}L$ .

<sup>2</sup>A velocidade própria é definida como sendo a derivada da posição (parametrizada pelo comprimento de arco) em relação ao comprimento de arco, que é relacionado ao chamado *tempo próprio* da partícula.

<sup>3</sup>Uma transformação de Lorentz se diz *própria* se ela relaciona sistemas inerciais que possuem a mesma orientação.

<sup>4</sup>Tal base constitui um sistema inercial.

Pela linearidade das TLs, podemos decompor um vetor  $v \in \mathbb{M}$  em partes que comutam ( $v_0 + \mathbf{v}_{||}$ ) e anticomutam ( $\mathbf{v}_\perp \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$ ) com a direção  $\hat{\mathbf{w}}$  do *boost*  $B$  ou do eixo  $\hat{\theta}$  da rotação  $R$ . A parte espacial  $\mathbf{v}_{||}$  é paralela a  $\hat{\mathbf{w}}$  ou  $\hat{\theta}$ . Assim,

$$BpB = B^2(p_0 + \mathbf{v}_{||}) + \mathbf{v}_\perp, \quad (5.25)$$

$$Rp\tilde{R} = (p_0 + \mathbf{v}_{||}) + R^2\mathbf{v}_\perp, \quad (5.26)$$

onde, por exemplo,

$$R^2\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_\perp \cos \theta + \hat{\theta} \times \mathbf{v}_\perp \sin \theta. \quad (5.27)$$

representa um sistema inercial com velocidade própria  $\mathbf{u}_0 = L\tilde{L}$  com relação ao observador.

Com relação aos paravetores, eles podem ser formados pelo produto de dois paravetores como

$$\langle p\bar{q} \rangle_{1\oplus 2} = \frac{1}{2}(p\bar{q} - q\bar{p}), \quad (5.28)$$

Além disso, o quadrado de qualquer paravetor é um escalar. De fato,

$$(\langle p\bar{q} \rangle_{1\oplus 2})^2 = \frac{1}{4}(p\bar{q} - q\bar{p})^2 = \frac{1}{4}(p\bar{q} + q\bar{p})^2 - p\bar{p}q\bar{q} = (\langle p\bar{q} \rangle_0)^2 - p\bar{p}q\bar{q}. \quad (5.29)$$

Cabe notar ainda que um paravetor  $\mathcal{V} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{1,3})$  sofre uma transformação de Lorentz da seguinte maneira:

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}' = L\mathcal{V}\tilde{L}. \quad (5.30)$$

Com efeito, pela eq.(5.19), a transformação de um paravetor é dada por

$$\begin{aligned} \langle p\bar{q} \rangle_{1\oplus 2} = \frac{1}{2}(p\bar{q} - q\bar{p}) &\mapsto \frac{1}{2}(Lp\tilde{L}(\overline{Lq\tilde{L}}) - Lq\tilde{L}(\overline{Lp\tilde{L}})) \\ &\mapsto \frac{1}{2}(Lp\bar{q}\tilde{L} - Lq\bar{p}\tilde{L}) = L\frac{1}{2}(p\bar{q} - q\bar{p})\tilde{L} \\ &\mapsto L\langle p\bar{q} \rangle_{1\oplus 2}\tilde{L}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

### Expressão explícita para o boost

Já vimos que o paravetor momentum relativístico  $p$  é dado pela expressão  $p = E + \mathbf{p}$ . Pela eq.(5.17), a velocidade própria  $\mathbf{u}$  da partícula é obtida a partir de um *boost*  $L$ :

$$\mathbf{u} = Le_0\tilde{L} = L\tilde{L}. \quad (5.32)$$

Com isso o paravetor momentum pode ser expresso como

$$p = E + \mathbf{p} = m\mathbf{u} = mL\tilde{L}. \quad (5.33)$$

Vimos pela eq.(5.21) que um *boost* pode ser expresso como a exponencial de um vetor, e como tal, podemos expressá-lo como

$$L = a + \mathbf{b}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{b} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3. \quad (5.34)$$

Daí segue-se que

$$mL\tilde{L} = a^2 + \mathbf{b}^2 + 2a\mathbf{b} = E + \mathbf{p}, \quad (5.35)$$

de onde, igualando-se as partes escalar e vetorial, obtemos:

$$\begin{aligned} E &= m(a^2 + \mathbf{b}^2), \\ \mathbf{p} &= 2m\mathbf{a}\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Do sistema acima concluímos que  $a = \frac{E \pm m}{2m}$  e  $\mathbf{b} = \frac{\sqrt{2m} \mathbf{p}}{\sqrt{E \pm m}}$ . Descartamos o sinal negativo, pois podemos mostrar que no referencial em repouso essa escolha não reconduz ao limite usual para partícula parada. Portanto

$$L = \frac{E + m + \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E + m)}}. \tag{5.37}$$

Podemos levar um referencial em repouso a um outro referencial mediante o *boost* descrito acima.

### 5.3.1 Exemplo: velocidade própria

Dada uma partícula, ao considerarmos seu sistema inercial, sua velocidade própria é dada por<sup>5</sup>  $u_{rep} = 1$ . Em outro sistema inercial, a velocidade  $u = Lu_{rep}\tilde{L} = L\tilde{L}$ . Se  $L$  é escrita como o produto de um *boost* e uma rotação espacial,  $L = BR$ , então  $u$  é independente da rotação:

$$u = L\tilde{L} = B^2, \tag{5.38}$$

de onde segue que  $B = u^{1/2}$ .

Pela eq.(5.38) e pela condição de unimodularidade de  $L$ , o produto  $u\bar{u} = u_{rep}\bar{u}_{rep} = 1$  é invariante por TLs, e  $u$  é um paravetor unimodular  $u^{-1} = \bar{u}$ . Já que a velocidade própria  $u$  de um objeto é o vetor tangente  $u \equiv dx/d\tau$  da *linha de universo*  $x(\tau)$ , sua parte escalar  $\gamma$  dá a taxa relativa entre os relógios do observador e da partícula:

$$\langle u \rangle_0 = \gamma = \frac{dt}{d\tau}, \tag{5.39}$$

e sua parte vetorial está relacionada à *velocidade coordenada*  $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{x}/dt$  por

$$\langle u \rangle_1 = \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \gamma\mathbf{v}. \tag{5.40}$$

Combinando as duas últimas equações podemos ver que

$$u = \gamma(1 + \mathbf{v}) \implies u\bar{u} = \gamma^2(1 - \mathbf{v}^2) = 1 \tag{5.41}$$

$$\implies \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}} \tag{5.42}$$

Para mostrarmos que  $d\tau$  é o intervalo de tempo no referencial da partícula, escrevemos

$$d\tau = \langle \bar{u}ud\tau \rangle_0 = \langle \bar{u}dx \rangle_0. \tag{5.43}$$

<sup>5</sup>Para um sistema inercial com origem na partícula, a mesma estará em repouso.

### 5.4 A teoria de Dirac no modelo paravetorial de $\mathcal{Cl}_{3,0}$

Na álgebra do espaço-tempo  $\mathcal{Cl}_{1,3}$ , podemos reformular a equação de Dirac<sup>6</sup>

$$\boxed{\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)\psi = (i\partial - eA)\psi = m\psi, \quad \psi \in \mathbb{C}^4} \quad (5.44)$$

a fim de que somente precisaremos usar a álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ .

Primeiramente escrevemos um elemento  $\Psi \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+$  como

$$\mathcal{Cl}_{1,3}^+ \ni \Psi = c + c^{01}\gamma_{01} + c^{02}\gamma_{02} + c^{03}\gamma_{03} + c^{12}\gamma_{12} + c^{13}\gamma_{13} + c^{23}\gamma_{23} + c^{0123}\gamma_{0123}. \quad (5.45)$$

Utilizando a representação padrão obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\Psi) &= \begin{pmatrix} c - ic^{12} & c^{13} - ic^{23} & -c^{03} + i^{0123} & -c^{01} + ic^{02} \\ -c^{13} - ic^{23} & c + ic^{12} & -c^{01} - ic^{02} & c^{03} + i^{0123} \\ -c^{03} + i^{0123} & -c^{01} + ic^{02} & c - ic^{12} & c^{13} - ic^{23} \\ -c^{01} - ic^{02} & c^{03} + i^{0123} & -c^{13} - ic^{23} & c + ic^{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_1 & -\phi_2^* & \phi_3 & \phi_4^* \\ \phi_2 & \phi_1^* & \phi_4 & -\phi_3^* \\ \phi_3 & \phi_4^* & \phi_1 & -\phi_2^* \\ \phi_4 & -\phi_3^* & \phi_2 & \phi_1^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Dizemos que o *spinor de Dirac*  $\psi$  é um elemento do ideal à esquerda  $(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f$ , onde<sup>7</sup>  $f = \frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})$ . Escrevemos

$$\psi = \Phi \frac{1}{2}(1 + i\gamma_{12}) \in (\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f, \quad (5.47)$$

onde  $\Phi = \Phi \frac{1}{2}(1 + \gamma_0) \in \mathcal{Cl}_{1,3}(1 + \gamma_0)$  é duas vezes a parte real de  $\psi$ . Portanto, usando a representação matricial obtemos

$$(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f \ni \psi \simeq \mathbb{C} \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \mathbb{C} \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4, \quad (5.48)$$

donde vemos a correspondência direta entre  $\psi$  e o spinor de Dirac usual. Além disso,  $4 \operatorname{Re}(i\Phi) = \Psi\gamma_2\gamma_1$ . Podemos ainda decompor o spinor  $\Phi \in \mathcal{Cl}_{1,3}(1 + \gamma_0)$  em partes par e ímpar

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 = (\Phi_0 + \Phi_1)\frac{1}{2}(1 + \gamma_0) = \frac{1}{2}(\Phi_0 + \Phi_1\gamma_0) + \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_0\gamma_0), \quad (5.49)$$

<sup>6</sup>Será considerado a constante de Planck  $\hbar = 1$  e a velocidade da luz  $c = 1$ .

<sup>7</sup>Escolhemos, por convenção, expressar  $f = \frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_{12})$  usando a representação de Dirac. Poderíamos igualmente ter escolhido  $f = \frac{1}{4}(1 + i\gamma_5)(1 + i\gamma_{12})$ , utilizando a representação de Weyl. Essa opção se deve ao fato de que ambos os idempotentes com suas respectivas representações dão origem, ao multiplicarem pela direita um elemento de  $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ , a uma matriz isomorfa a um vetor coluna.

de onde concluímos que  $\Phi_0 = \Phi_1\gamma_0$  e  $\Phi_1 = \Phi_0\gamma_0 = \Psi$ . Tomando a parte real em  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$  da eq.(5.44) obtemos

$$\partial\Phi\gamma_2\gamma_1 - eA\Phi = m\Phi, \quad (5.50)$$

que por sua vez se decompõe em parte par e ímpar, respectivamente:

$$\begin{aligned} \partial\Phi_0\gamma_{21} - eA\Phi_0 &= m\Phi_1, \\ \partial\Phi_1\gamma_{21} - eA\Phi_1 &= m\Phi_0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Portanto escrevemos a *equação de Dirac-Hestenes*, usando  $\Phi_1 = \Phi_0\gamma_0$  ou  $\Phi_0 = \Phi_1\gamma_0$  como

$$\boxed{\partial\Psi\gamma_{21} - eA\Psi = m\Psi\gamma_0 \quad \Psi \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+} \quad (5.52)$$

A vantagem de utilizarmos essa equação é que não há mais distinção entre operadores e spinors; todos os elementos da equação são multivetores de  $\mathcal{Cl}_{1,3}^+$ .

Para facilitar a notação escrevemos de outra forma

$$\begin{aligned} \Psi &= c + c^1\gamma_{01} + c^2\gamma_{02} + c^3\gamma_{03} + b^1\gamma_{23} + b^2\gamma_{31} + b^3\gamma_{12} + b^0\gamma_{0123}, \quad (c, b, c^\mu, b^\mu \in \mathbb{R}) \\ &= c^0 + c^k\gamma_{k0} - b^k\mathcal{J}\mathbf{e}_k + b^0\mathcal{J}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde  $\mathcal{J} = \mathbf{e}_{123} = \gamma_{0123}$ . Dessa maneira, dado o potencial vetorial eletromagnético  $A = A^\mu\gamma_\mu$ , podemos notar que  $\gamma_0 A = A^0 + A^k\gamma_{0k} = A^0 - A^k\mathbf{e}_k$ . Escrevendo  $\mathbf{A} = A^k\mathbf{e}_k$ , temos que

$$A = A^0 - \mathbf{A}. \quad (5.54)$$

Multiplicando agora a eq.(5.52) por  $\gamma_0$  à esquerda,

$$\gamma_0\partial\Psi\gamma_{21} - e\gamma_0 A\Psi = m\gamma_0\Psi\gamma_0, \quad (5.55)$$

e utilizando a notação acima, escrevemos

$$(\partial^0 - \partial^k\mathbf{e}_k)\Psi\mathcal{J}\mathbf{e}_3 - e(A^0 - \mathbf{A})\Psi = m\gamma_0\Psi\gamma_0, \quad \Psi \in \mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{Cl}_{1,3}^+. \quad (5.56)$$

Mas  $\gamma_0\Psi\gamma_0$  é o *operador de paridade*, o qual denotaremos por  $\Psi^P = \gamma_0\Psi\gamma_0 = \hat{\Psi}$ , onde subentende-se que a involução graduada age sobre elementos de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Desse modo,

$$\Psi = c^0 - c^k\gamma_{k0} + b^k\mathcal{J}\mathbf{e}_k - b^0\mathcal{J}, \quad (5.57)$$

Denotando  $\partial^0 = \partial_t$  e  $\phi \equiv A^0$ , a eq.(5.56) é reescrita como

$$(\partial_t - \partial^k\mathbf{e}_k)\Psi\mathcal{J}\mathbf{e}_3 - e(\phi - \mathbf{A})\Psi = m\hat{\Psi}, \quad \Psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}, \quad (5.58)$$

que ainda pode ser escrita como

$$\boxed{\mathcal{D}\Psi \equiv \partial_t\Psi + \nabla\Psi = [e(\mathbf{A} - \phi)\Psi - m\hat{\Psi}]\mathcal{J}\mathbf{e}_3, \quad \Psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}.} \quad (5.59)$$

A equação acima é a **equação de Dirac para o elétron escrita em termos da álgebra de Pauli** ( $\mathcal{Cl}_{3,0}$ ). Isso não entra em contradição com a impossibilidade de se utilizar matrizes  $2 \times 2$  para a descrição do elétron relativisticamente, pois na teoria não-relativística a função de onda é representada por um vetor bidimensional complexo, com 4 parâmetros reais, e as matrizes somente agem pela esquerda. Na formulação apresentada

nesta seção,  $\psi$  é representado por uma matriz  $2 \times 2$  complexa, com 8 parâmetros reais, no qual a ação das matrizes é feita tanto pela direita quanto pela esquerda.

O elemento  $\Psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  pode ser interpretado como uma composição de três operações: dilatação, dualidade e transformação de Lorentz (na verdade  $R$  não é uma TL, mas gera uma TL). De fato, para  $\Psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$ ,  $\Psi\bar{\Psi}$  é da forma  $a + ib = \rho e^{i\beta}$ ,  $\rho > 0$ , e com isso temos que

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\beta/2} R, \quad (5.60)$$

onde  $R\bar{R} = 1$ . Conseqüentemente,  $R \in \mathcal{Spin}_+(1,3)$  e  $R$  gera uma transformação de Lorentz.

### A solução de ondas planas da equação de Dirac na álgebra de Pauli

A equação de Dirac no formalismo das álgebras de Clifford (eq.(5.59)), na ausência de campos externos é escrita como

$$\partial_t \Psi + \nabla \Psi = -m \hat{\Psi} \mathcal{I} e_3, \quad \Psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}, \quad (5.61)$$

Já que a eq.(5.61) é invariante perante transformações de Lorentz, podemos facilitar sua resolução, resolvendo-a para um referencial parado e depois aplicando o *boost*  $L$ . Na álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , a ação do operador momentum  $\mathfrak{p}$  sobre a função de onda  $\Psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  é dada por

$$\mathfrak{p} \Psi = \nabla \Psi \mathcal{I} e_3. \quad (5.62)$$

O autovalor do operador  $\mathfrak{p}$  é o vetor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  e, no referencial parado,  $\mathbf{p} = 0$ . A eq.(5.61) fica portanto

$$\partial_t \Psi = -m \hat{\Psi} \mathcal{I} e_3 \quad (5.63)$$

Considere a solução da equação acima da forma

$$\Psi = \Psi_0 \exp(-\mathcal{I} e_3 \omega). \quad (5.64)$$

Substituindo essa solução na eq.(5.63) obtemos

$$\Psi_0 \omega = m \hat{\Psi}_0. \quad (5.65)$$

Segue-se daí que, no caso de multivetores com graduação par, temos a relação  $\Psi_0 = \hat{\Psi}_0$  e nessas condições  $\omega = m$ . Para multivetores com graduação ímpar, temos  $\Psi_0 = -\hat{\Psi}_0$  e conseqüentemente  $\omega = -m$ .

Primeiramente analisamos multivetores pares de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , que podem ser escalares ou bivectores. Para  $\Psi_0 = \text{escalar}$ , temos a solução:

$$\Psi = \exp(-\mathcal{I} e_3 m t). \quad (5.66)$$

Para  $\Psi_0 = \text{bivector}$ , temos três possibilidades:  $\Psi_0 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ ,  $\Psi_0 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3$  e  $\Psi_0 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  (chegamos ao caso geral por linearidade). Temos a igualdade  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathcal{I} e_3 = \exp(\mathcal{I} e_3 \pi/2)$ , o que mostra que a escolha  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  só acrescenta um fator de fase à função de onda. A escolha  $\Psi_0 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  pode ser obtida a partir da igualdade  $-(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ , e essa escolha só acrescenta um fator de fase à próxima escolha,  $\Psi_0 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3$ . Portanto a segunda solução da eq.(5.63) é dada por

$$\Psi = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \exp(-\mathcal{I} e_3 m t). \quad (5.67)$$

As duas soluções acima apresentadas são soluções de frequência positiva, ou seja, soluções que descrevem partículas, a primeira com spin pra cima e a segunda com spin pra baixo. Para obtermos as outras duas soluções analisamos multivetores ímpares de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , que podem ser vetores ou pseudoescalares (trivetores). Para  $\Psi_0 =$  pseudoescalar, temos a solução

$$\Psi = \mathcal{J} \exp(\mathcal{J}e_3 mt). \quad (5.68)$$

Para obtermos a última solução analisamos o caso onde  $\Psi_0 =$  vetor. Neste caso podemos obter a solução multiplicando a eq.(5.68) por  $e_1 e_2$ ,  $e_2 e_3$  ou  $e_1 e_3$ , já que o caso geral é obtido por linearidade. Pelos mesmos motivos citados no parágrafo que segue a eq.(5.66), todas as escolhas com exceção de  $e_1 e_3$  são redundantes, no sentido que a escolha de uma delas somente acrescenta um fator de fase à função de onda  $\Psi$ . Com a escolha  $e_1 e_3$ , temos a igualdade  $e_1 e_3 \mathcal{J} = e_2$ . Portanto a última solução da eq.(5.63) é dada por

$$\Psi = e_2 \exp(\mathcal{J}e_3 mt). \quad (5.69)$$

Uma solução geral da eq.(5.63) é dada pela combinação linear das quatro soluções obtidas, abaixo listadas:

$$\begin{array}{l} \Psi^{(+\uparrow)} = \exp(-\mathcal{J}e_3 mt) \\ \Psi^{(+\downarrow)} = e_1 e_3 \exp(-\mathcal{J}e_3 mt) \\ \Psi^{(-\uparrow)} = \mathcal{J} \exp(\mathcal{J}e_3 mt) \\ \Psi^{(-\downarrow)} = e_2 \exp(\mathcal{J}e_3 mt) \end{array} \quad (5.70)$$

Vale notar ainda que a solução geral  $\Psi$  é dada a menos de um fator de fase  $\Psi \mapsto \Psi \exp(\alpha \mathcal{J}e_3)$ . A solução geral é dada pela combinação linear das soluções acima com coeficientes complexos da forma  $(c + d\mathcal{J}e_3)$  (com  $c$  e  $d$  reais) multiplicando as funções pela direita. A combinação linear à esquerda não é permitida, já que o operador  $\nabla$  não comuta com tal possibilidade. Para uma partícula com momentum  $\mathbf{p}$  obtemos soluções aplicando o boost  $L = L(\mathbf{p})$ , já obtido na subsubsec.(5.3), eq.(5.37)

$$\begin{array}{l} \Psi^{(+\uparrow)} = L(\mathbf{p}) \exp[-\mathcal{J}e_3 (Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})] \\ \Psi^{(+\downarrow)} = L(\mathbf{p}) e_1 e_3 \exp[-\mathcal{J}e_3 (Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})] \\ \Psi^{(-\uparrow)} = L(\mathbf{p}) \mathcal{J} \exp[\mathcal{J}e_3 (Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})] \\ \Psi^{(-\downarrow)} = L(\mathbf{p}) e_2 \exp[\mathcal{J}e_3 (Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})] \end{array} \quad (5.71)$$

## 5.5 Eletromagnetismo no modelo paravetorial

### 5.5.1 As equações de Maxwell em $\mathcal{Cl}_{3,0}$

Utilizamos o operador  $\mathcal{D}$  definido na seção anterior

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla. \quad (5.72)$$

O paravetor  $\mathcal{F}$  e o paravetor  $\mathcal{J}$  por são definidos:

$$\begin{array}{l} \mathcal{F} = \mathbf{E} + \mathcal{J}\mathbf{B} = \mathbf{E} + \star\mathbf{B}, \\ \mathcal{J} = \rho - \mathbf{J}, \end{array} \quad (5.73)$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são, respectivamente, os campos elétrico e magnético, e  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  são as densidades de carga e corrente elétricas, respectivamente.

Definido dessa maneira, o campo eletromagnético  $\mathcal{F} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^3) \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$  é um paravetor de  $\mathcal{C}\ell_{3,0}$ , cujas partes real ( $\mathbf{E}$ ) e imaginária ( $\mathbf{B}$ ) são diferentes para observadores distintos. Em particular o campo eletromagnético  $\mathcal{F}$  no referencial  $\mathcal{S}$  é transformado em

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' = L\mathcal{F}\bar{L} = (\mathbf{u}_0)^{1/2}\mathcal{F}\bar{\mathbf{u}}_0^{1/2} = \mathcal{F}_{\parallel} + \mathbf{u}_0\mathcal{F}_{\perp} \quad (5.74)$$

no referencial  $\mathcal{S}'$  em relação ao qual o  $\mathcal{S}$  se movimenta com velocidade própria  $\mathbf{u}_0$ . A componente  $\mathcal{F}_{\parallel} = (\mathcal{F} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0)\hat{\mathbf{u}}_0$  é a parte do campo paralela à direção espacial de  $\mathbf{u}_0$  e  $\mathcal{F}_{\perp} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_{\parallel}$  é a parte perpendicular. A grandeza  $\mathcal{F}^2 = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + 2\mathcal{J}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  é invariante perante transformações de Lorentz pelo teorema (5.1).

Afirmamos que as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\boxed{\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{J}} \quad (5.75)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) (\mathbf{E} + \mathcal{J}\mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E}) + \mathcal{J} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathcal{J}(\nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{B}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E} + \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right) + \mathcal{J} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) + \mathcal{J}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ &= \rho - \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Comparando as partes  $\mu$ -vetoriais, ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), obtemos as equações de Maxwell

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0} \quad (5.77)$$

### As equações de Maxwell no vácuo

A eq.(5.75), quando  $\mathcal{J} = 0$  pode ser escrita como  $\mathcal{D}\mathcal{F} = 0$ . Em termos do paravetor potencial eletromagnético, dado pela eq.(5.54) ( $A = A^0 - \mathbf{A}$ ), a relação  $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{D}}A$  nos dá a equação de onda para  $A$ :

$$\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}A = (\partial_t^2 - \nabla^2)A = 0, \quad (5.78)$$

onde a condição de Lorentz  $\langle \bar{\mathcal{D}}A \rangle_0 = 0$  é imposta. Suponha que o paravetor  $A$  dependa da posição através do produto escalar

$$\langle \bar{k}x \rangle_0 = k^\lambda x^\mu \langle \bar{\mathbf{e}}_\lambda \mathbf{e}_\mu \rangle_0 = k^\lambda x^\mu \eta_{\lambda\mu} = k_\mu x^\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad (5.79)$$

onde  $k = \omega + \mathbf{k}$  é o paravetor de onda. O paravetor potencial  $A$  assume o mesmo valor em todos os pontos da hipersuperfície  $\langle \bar{k}x \rangle_0 = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Em um dado tempo  $t$ , o potencial  $A$  é o mesmo em toda a superfície espacial  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = a$ .

Durante um intervalo de tempo  $dt$ , toda superfície constante move uma distância  $dx$  perpendicular à superfície e paralela a  $\mathbf{k}$  por uma quantidade que satisfaz  $\omega dt = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}$ . Daí  $d\mathbf{x} = \mathbf{k}^{-1}\omega dt$ . A velocidade  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{k}^{-1}\omega$  é chamada *velocidade de fase da onda*.

Escrevemos o campo  $\mathcal{F}$  como

$$\mathcal{F} = \mathcal{D}\bar{A}(\langle \bar{k}x \rangle_0) = (\mathcal{D} \langle \bar{k}x \rangle_0)\bar{A}'(\langle \bar{k}x \rangle_0) = k\bar{A}'(\langle \bar{k}x \rangle_0), \quad (5.80)$$

onde  $A'$  indica a derivada de  $A$  em relação ao argumento escalar. De maneira semelhante obtemos

$$D\bar{D}A(\langle \bar{k}x \rangle_0) = k\bar{k}A''(\langle \bar{k}x \rangle_0). \quad (5.81)$$

A eq.(5.78) nos diz que a equação acima desaparece. Então, a menos que  $A'' = 0$  em todo o espaço, então

$$k\bar{k} = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0. \quad (5.82)$$

Qualquer função  $A$  de  $\langle \bar{k}x \rangle_0$ , onde  $k$  é qualquer vetor nulo constante é solução da eq.(5.78). Mais geralmente, já que a eq.(5.78) é linear, qualquer superposição de soluções com diferentes valores de  $k = \omega(1 + \hat{\mathbf{k}})$  é solução.

### 5.5.2 A força de Lorentz

Na álgebra de Pauli, a força de Lorentz sobre um elétron com velocidade própria  $v$  pode ser expressa como

$$\dot{p} = \text{Re}(e\mathcal{F}v) \quad (5.83)$$

onde  $e$  é a carga do elétron e  $p$  é o paravetor *momentum* relativístico  $p = mv$ . A equação de movimento (5.83) é mais simples de resolver na forma spinorial, que surge quando o paravetor momentum  $p$  é expresso em termos de rotores  $R(\tau) \in \mathbb{S}\text{pin}_+(1,3) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C})$  que dependem do tempo próprio<sup>8</sup>:

$$p = mR\bar{R} \quad (5.84)$$

O elemento  $R(\tau)$  é o spinor que (participa) da forma spinorial da transformação de Lorentz e é chamado *autospinor* [Ba97] do elétron. A motivação disso é que  $R$  pode ser interpretado como um spinor de Dirac unitário, pois na eq.(5.60), se  $\beta = 0$  e  $\rho = 1$ , então  $\Psi = R$ .

O momentum escrito na forma (5.84) está relacionado à velocidade própria do elétron, via eq.(5.17) por

$$v = Re_0\bar{R} = R\bar{R} = p/m. \quad (5.85)$$

Da condição unimodular  $R\bar{R} = 1$ , necessária para que  $R \in \mathbb{S}\text{pin}_+(1,3)$ , o autospinor  $R$  satisfaz à equação

$$\dot{R} = \frac{1}{2}\Omega R, \quad (5.86)$$

onde o paravetor  $\Omega \equiv 2\dot{R}\bar{R}$  dá a taxa de rotação do elétron no espaço-tempo. Podemos ver que  $\Omega$  é de fato um paravetor, partindo da condição  $R\bar{R} = 1$ :

$$R\bar{R} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}R\bar{R} = \dot{R}\bar{R} + R\dot{\bar{R}} = \frac{1}{2}(\Omega + \bar{\Omega}) = 0 \quad (5.87)$$

o que implica que  $\bar{\Omega} = -\Omega$ . Com isso, as partes escalar e pseudoescalar de  $\Omega$  desaparecem, e  $\Omega$  é um paravetor.

Tomando a derivada de  $p$  em relação a  $\tau$  e substituindo na eq.(5.86), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= m\dot{R}\bar{R} + mR\dot{\bar{R}} = m \text{Re}(\Omega\dot{R}\bar{R}) \\ &= \text{Re}(\Omega p). \end{aligned} \quad (5.88)$$

<sup>8</sup>Daqui em diante omitiremos o tempo próprio como argumento do spinor  $R$ , mas tendo sempre em mente que  $R = R(\tau)$ .

Para o caso particular que  $\Omega$  é um vetor imaginário puro ( $\Omega = -i\vec{\omega}$ ), a equação acima descreve uma rotação pura a uma taxa angular  $\omega = d\theta/dt$ . De fato,

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \text{Re}(\Omega p) = \text{Re}(-i\vec{\omega} p) = \text{Re}(-i\vec{\omega} \wedge p) \\ &= \vec{\omega} \times p,\end{aligned}\quad (5.89)$$

que é a forma usual vista em mecânica clássica [Go81].

A eq.(5.88) acima tem a mesma forma que a eq.(5.83) e, comparando as duas equações, vemos que a taxa de rotação do elétron sob a ação do campo  $\mathcal{F}$  é

$$\Omega = \frac{e\mathcal{F}}{m}.\quad (5.90)$$

Isso também indica que a eq.(5.83) que expressa a força de Lorentz pode ser escrita na sua forma spinorial

$$\boxed{\dot{R} = \frac{e}{2m}\mathcal{F}R}\quad (5.91)$$

### 5.5.3 Soluções da expressão spinorial para a força de Lorentz

As grandezas  $\mathcal{F}^2, \Omega^2 \in \Lambda_1(\mathbb{R}^3) \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$  são invariantes por transformações de Lorentz, pela eq.(5.29). Pela expressão  $\mathcal{F}^2 = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + 2\mathbf{J}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ , vemos que a invariância de  $\mathcal{F}^2$  implica simultaneamente na invariância de  $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$  e  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  de modo independente. Além disso, se  $\text{Re}(\Omega^2) > 0$ , a rotação descrita por  $\Omega$  é em um plano tipo-tempo e, se  $\text{Re}(\Omega^2) < 0$ , então a rotação descrita por  $\Omega$  é em um plano tipo-espaço.

#### O caso $\mathcal{F} = \mathbf{E}$

Considerando o campo eletromagnético  $\mathcal{F}$  independente da posição, a eq.(5.83) é integrada:

$$R(\tau) = \exp\left(\frac{e}{2m}\mathcal{F}\tau\right)R(0).\quad (5.92)$$

No caso em que  $\mathbf{B} = 0$  ( $\mathcal{F} = \mathbf{E}$ ), e um elétron solto a partir do repouso ( $R(0) = 1$ ) experimenta um campo constante em seu referencial:

$$\mathcal{F}_{\tau ep} = \tilde{R}\mathcal{F}R = \mathcal{F},\quad (5.93)$$

já que  $R = \exp(e\mathcal{F}\tau/2m)$  comuta com  $\mathcal{F}$ . A velocidade própria  $u$  do elétron no referencial de um observador é

$$u = R\tilde{R} = \exp(\mathbf{a}\tau),\quad (5.94)$$

onde  $\mathbf{a} = (e/m)\mathcal{F}$ , e, integrando a equação acima, obtemos a posição  $r(\tau)$  do elétron. Ao tomarmos a condição inicial  $r(0) = \mathbf{a}^{-1}$ , então

$$r(\tau) = \mathbf{a}^{-1}\exp(\mathbf{a}\tau).\quad (5.95)$$

Com essa solução, temos

$$-r\bar{r} = \mathbf{r}^2 - t^2 = a^{-2},\quad (5.96)$$

onde  $a = |\mathbf{a}|$ . A equação é de uma hipérbole, e podemos parametrizar

$$(r, t) = (\cosh \tau, \sinh \tau).\quad (5.97)$$

O movimento do elétron é dito *hiperbólico*.

**O caso  $\mathcal{F} = i\mathbf{B}$** 

No caso em que  $\mathcal{F} = i\mathbf{B}$  for constante, a transformação de Lorentz regida por  $R$  é uma rotação espacial, e velocidade do elétron roda com uma velocidade angular  $\vec{\omega} = -e\mathbf{B}/m$ :

$$u(\tau) = e^{(-i\vec{\omega}\tau/2)} u(0) e^{(-i\vec{\omega}\tau/2)}. \quad (5.98)$$

Já que a norma do vetor não muda perante uma rotação espacial, a velocidade e portanto a energia do elétron imerso no campo magnético são constantes. O movimento do elétron descreve uma hélice e é chamado *movimento cyclotron*, com a componente  $\mathbf{v}_{\parallel}$  da velocidade  $\mathbf{v}$  paralela a  $\mathbf{B}$  constante e a componente  $\mathbf{v}_{\perp}$  perpendicular roda em um círculo:

$$\mathbf{v}(t) = e^{(-i\vec{\omega}t/2\gamma)} u(0) e^{(i\vec{\omega}t/2\gamma)} = \mathbf{v}_{\parallel}(0) + e^{(-i\vec{\omega}t/\gamma)} \mathbf{v}_{\perp}(0), \quad (5.99)$$

onde  $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{u}^2} = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ .

A velocidade angular  $\vec{\omega}$  (e portanto o período  $T = 2R/\omega$ ) é independente da velocidade e conseqüentemente partículas com maiores energias seguem uma órbita de raio maior. A trajetória  $\mathbf{r}(t)$  é calculada, integrando-se a eq.(5.98):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_c + \mathbf{v}_{\parallel}(0)t + e^{-i\vec{\omega}t/\gamma} \mathbf{r}_0, \quad (5.100)$$

onde  $\mathbf{r}_0 = -\gamma\vec{\omega}^{-1} \times \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{r}_c + \mathbf{v}_{\parallel}(0)t$  é o centro da órbita e  $\mathbf{r}_c$  é a posição centro da hélice.

No caso em que  $\mathcal{F}^2 = 0$ , a eq.(5.92) pode ser escrita como

$$R(\tau) = \left(1 + \frac{e}{2m} \mathcal{F}\tau\right) R(0). \quad (5.101)$$

No caso em que a direção do campo  $\mathcal{F}$  é constante, podemos escrever

$$\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}_0 f(\tau), \quad (5.102)$$

onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é suficientemente bem-comportada. A eq.(5.91) pode ser integrada, resultando em

$$R(\tau) = \exp(\mathcal{F}_0 y/2) R_0, \quad (5.103)$$

onde  $y = (e/m) \int_0^\tau f(\tau') d\tau'$ .

Outros exemplos mais elaborados podem ser encontrados em [BY99]

*Sometimes, when I ponder about the great consequences  
that results from the small things ...  
I'm tempted to think ... that there's no small things.*

Bruce Barton

O objetivo deste capítulo é formular o modelo paravetorial sob o ponto de vista dos spinors algébricos, de modo a descrever todo o formalismo clássico dos spinors somente utilizando a álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Também veremos como os spinors e seus respectivos espaços simpléticos decorrem da álgebra  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  do espaço. Toda a teoria de Penrose será formulada a partir de spinors algébricos de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , que são elementos de ideais à esquerda minimais de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  [FC90].

## 6.1 Formulação algébrica

De agora em diante faremos uso da seguinte notação:

$$\begin{cases} \hat{\psi} & \Rightarrow \text{involução graduada,} \\ \tilde{\psi} & \Rightarrow \text{reversão,} \\ \underline{\psi} & \Rightarrow \text{conjugação.} \end{cases}$$

A diferença em relação à notação usada até o momento está na conjugação. Isso é para efeitos de comparação com a teoria clássica descrita no cap.(2), já que lá denotamos  $\bar{\psi}$  como conjugação complexa.

### 6.1.1 Spinors de Weyl com o uso de $\mathcal{Cl}_{3,0}$

Definimos os idempotentes  $f_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{e}_3)$ . Tais idempotentes satisfazem  $f_+f_- = f_-f_+ = 0$  e  $f_{\pm}^2 = f_{\pm}$ . Utilizando a representação matricial vemos que

$$f_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1f_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1f_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Podemos construir o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_+ \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}^+f_+$ . Matricialmente este isomorfismo é simples de se ver, já que

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{3,0}^+f_+ \ni \phi_+f_+ &= \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} f_+ \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ w_2 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} w_1 & w_3 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Cl}_{3,0}f_+. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Com isso podemos escrever  $\mathcal{K} = \psi f_+$ , com  $\psi = s + b^{12}\mathbf{e}_{12} + b^{13}\mathbf{e}_{13} + b^{23}\mathbf{e}_{23} \in \mathcal{Cl}_{3,0}^+$ . Segue-se a definição do

- Spinor contravariante apontado (SCTA)

$$\boxed{\mathcal{K} = \psi f_+} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \psi f_+ &= (s + b^{12} \mathbf{e}_{123})(f_+) + (b^{13} + b^{23} \mathbf{e}_{123})(\mathbf{e}_1 f_+) \\ &= k^1(f_+) + k^2(\mathbf{e}_1 f_+), \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde  $k^1 = s + b^{12} \mathbf{e}_{123}$  e  $k^2 = b^{13} + b^{23} \mathbf{e}_{123}$ . Optamos por escrever os spinors de tal maneira que suas componentes comutam com a base  $\{f_+, \mathbf{e}_1 f_+\}$  do espaço dos spinors algébricos. Portanto todas as componentes serão escritas como um elemento do centro<sup>1</sup> de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , a saber  $a + b \mathbf{e}_{123}$ .

A partir de  $\mathcal{K}$ , construiremos os outros três tipos de spinors, primeiramente o

- Spinor covariante apontado (SCA)

$$\boxed{\mathcal{K}^* = \mathbf{e}_1 \mathcal{K}} \quad (6.5)$$

de onde se conclui que

$$\mathcal{K}^* = \mathbf{e}_1(k_1 f_+ + k_2 \mathbf{e}_1 f_+) = \mathbf{e}_1(f_- k^1 + f_- (-\mathbf{e}_1) k^2) = (-k^2) f_+ + (k^1)(f_+ \mathbf{e}_1). \quad (6.6)$$

Como  $\mathcal{K}^* \in f_+ \mathcal{Cl}_{3,0}$ , podemos escrever  $\mathcal{K}^* = k_1(f_+) + k_2(f_+ \mathbf{e}_1)$ . Dessa maneira, temos a relação

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= -k^2 \\ k_2 &= k^1 \end{aligned}} \quad (6.7)$$

Note que essas relações são as mesmas que obtivemos anteriormente com o tratamento clássico (eqs.(2.43, 2.72)) Dados  $\mathcal{K}^* \in f_+ \mathcal{Cl}_{3,0}$  e  $\mathcal{Cl}_{3,0} f_+ \ni \eta = \eta^1 f_+ + \eta^2 \mathbf{e}_1 f_+$ , definimos a *métrica spinorial* associada ao idempotente  $f_+$ :

$$\begin{aligned} G_{f_+} : f_+ \mathcal{Cl}_{3,0} \times \mathcal{Cl}_{3,0} f_+ &\rightarrow f_+ \mathcal{Cl}_{3,0} f_+ \simeq \mathbb{C} f_+ \\ (\mathcal{K}, \eta) &\mapsto \mathcal{K}^* \eta = (-k^2 f_+ + k^1 f_+ \mathbf{e}_1)(\eta^1 f_+ + \eta^2 \mathbf{e}_1 f_+), \end{aligned} \quad (6.8)$$

o que resulta em

$$\boxed{G_{f_+}(\mathcal{K}, \eta) = \mathcal{K}^* \eta = (-k^2 \eta^1 + k^1 \eta^2)(f_+)} \quad (6.9)$$

Essa definição coincide com a definição clássica, eq.(2.33), onde o produto escalar tem componentes mistas e antissimétricas, já que  $f_+$  faz o papel de unidade da álgebra  $f_+ \mathcal{Cl}_{3,0} f_+ \simeq \mathbb{C}$ .

Também a partir de  $\mathcal{K}$ , definimos o

<sup>1</sup>O centro de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  é definido como  $\text{Cen}(\mathcal{Cl}_{3,0}) = \{\phi \in \mathcal{Cl}_{3,0} \mid \phi a = a \phi, \forall a \in \mathcal{Cl}_{3,0}\} = \mathcal{Cl}_s \oplus \mathcal{Cl}_p$ , a soma direta de pseudoescalares e escalares, característica de toda álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{p,q}$ , com  $p+q$  ímpar, segundo o lema do cap.(3).

- Spinor contravariante pontuado (SCTP)

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}} = \mathbf{e}_1 \tilde{\mathcal{K}}} \quad (6.10)$$

de onde

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}} &= \mathbf{e}_1(k^1 f_+ + k^2 \mathbf{e}_1 f_+) \tilde{\phantom{\mathcal{K}}} = \mathbf{e}_1(f_+ \tilde{k}^1 + f_+ \mathbf{e}_1 \tilde{k}^2) = \tilde{k}^1(\mathbf{e}_1 f_+) + \tilde{k}^2 f_- \\ &= \tilde{k}^1(f_- \mathbf{e}_1) + \tilde{k}^2(f_-). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mas  $\bar{\mathcal{K}} \in f_- \mathcal{Cl}_{3,0}$ , de modo que escrevemos  $\bar{\mathcal{K}} = \bar{k}^{1'}(f_- \mathbf{e}_1) + \bar{k}^{2'}(f_-)$  e chegamos à relação

$$\begin{aligned} \bar{k}^{1'} &= \tilde{k}^1, \\ \bar{k}^{2'} &= \tilde{k}^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Além disso<sup>2</sup>,  $k^{\mathbf{A}} = (a + b\mathbf{e}_{123}) \tilde{\phantom{\mathcal{K}}} = (a + b\mathbf{e}_{321}) = a - b\mathbf{e}_{123}$ , o que sugere a notação<sup>3</sup>

$$\tilde{k}^{\mathbf{A}} = \overline{k^{\mathbf{A}}}. \quad (6.13)$$

Finalmente, construímos o

- Spinor covariante pontuado (SCP)

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}}^* = (\mathbf{e}_1 \bar{\mathcal{K}})} \quad (6.14)$$

de onde podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}^* &= (\mathbf{e}_1 \bar{\mathcal{K}}) = -(\bar{\mathcal{K}})\mathbf{e}_1 = -\bar{k}^{1'}(f_- \mathbf{e}_1) + \bar{k}^{2'}(f_-)\mathbf{e}_1 = -(-\mathbf{e}_1 f_+ \bar{k}^{1'} + f_+ \bar{k}^{2'})\mathbf{e}_1 \\ &= \bar{k}^{1'} f_- - \bar{k}^{2'} f_+ \mathbf{e}_1 \\ &= (-\bar{k}^{2'}) (\mathbf{e}_1 f_-) + (\bar{k}^{1'}) (f_-). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Como  $\bar{\mathcal{K}}^* \in \mathcal{Cl}_{3,0} f_-$ , podemos escrever  $\bar{\mathcal{K}}^* = (\bar{k}_{1'}) (\mathbf{e}_1 f_-) + (\bar{k}_{2'}) (f_-)$ . Portanto chegamos à relação

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{k}_{1'} &= -\bar{k}^{2'} \\ \bar{k}_{2'} &= \bar{k}^{1'} \end{aligned}} \quad (6.16)$$

Essas equações são as mesmas obtidas classicamente (eq.(2.78)). Dados  $\bar{\mathcal{K}} \in f_- \mathcal{Cl}_{3,0}$  e  $\mathcal{Cl}_{3,0} f_- \ni \eta^* = \bar{\eta}^{2'} \mathbf{e}_1 f_+ + \bar{\eta}^{1'} f_-$ , definimos a *métrica spinorial* associada ao idempotente  $f_-$ :

$$\begin{aligned} G_{f_-} : f_- \mathcal{Cl}_{3,0} \times \mathcal{Cl}_{3,0} f_- &\rightarrow f_- \mathcal{Cl}_{3,0} f_- \simeq \mathbb{C} f_- \\ (\bar{\mathcal{K}}, \bar{\eta}^*) &\mapsto \bar{\mathcal{K}} \bar{\eta}^* = (\bar{k}^{1'} f_- \mathbf{e}_1 + \bar{k}^{2'} f_-)(-\bar{\eta}^{2'} \mathbf{e}_1 f_- + \bar{\eta}^{1'} f_-), \end{aligned} \quad (6.17)$$

<sup>2</sup>  $\mathbf{A} = 1, 2$ .

<sup>3</sup> Denotando  $\mathcal{Cl}_s$  o espaço dos escalares e  $\mathcal{Cl}_p$  o espaço dos pseudoescalares, temos o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_s \oplus \mathcal{Cl}_p \simeq \mathbb{C}$ , já que  $(\mathbf{e}_{123}^2 = -1)$ . A notação  $k^{\mathbf{A}} = \overline{k^{\mathbf{A}}}$  então é evidente, pois ao denotarmos  $\mathbf{e}_{123}$  por  $\mathcal{J}$ , que faz o papel da unidade imaginária de  $\mathbb{C}$ , a operação de reversão em  $\mathcal{Cl}_s \oplus \mathcal{Cl}_p$  é equivalente à operação de  $\mathbb{C}$ -conjugação.

o que resulta em

$$G_{f_-} = \bar{\mathcal{K}}\bar{\eta}^* = (\bar{\eta}^1 \bar{k}^{2'} - \bar{\eta}^{2'} \bar{k}^1) f_- \quad (6.18)$$

As expressões para os quatro tipos de spinores de Weyl, como elementos de um ideal lateral de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  são listadas abaixo:

- Spinor contravariante apontuado (SCTA):

$$\mathcal{K} = k^1(f_+) + k^2(\mathbf{e}_1 f_+) \in \mathcal{Cl}_{3,0} f_+ \quad (6.19)$$

- Spinor covariante apontuado (SCA):

$$\mathcal{K}^* = \mathbf{e}_1 \mathcal{K} = k_1(f_+) + k_2(f_+ \mathbf{e}_1) \in f_+ \mathcal{Cl}_{3,0} \quad (6.20)$$

- Spinor contravariante pontuado (SCTP):

$$\bar{\mathcal{K}} = \mathbf{e}_1 \bar{\mathcal{K}} = \bar{k}^{1'}(f_- \mathbf{e}_1) + \bar{k}^{2'}(f_-) \in f_- \mathcal{Cl}_{3,0} \quad (6.21)$$

- Spinor covariante pontuado (SCP):

$$\bar{\mathcal{K}}^* = -(\bar{\mathcal{K}})\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1 \bar{\mathcal{K}}) = \bar{k}_{1'}(\mathbf{e}_1 f_-) + \bar{k}_{2'}(f_-) \in \mathcal{Cl}_{3,0} f_- \quad (6.22)$$

Com as operações assim definidas, o seguinte diagrama ilustra como passamos de um ideal ao outro em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ :

$\mathcal{K}$	$\xrightarrow{*}$	$\mathcal{K}^*$	$\xrightarrow{\hat{\phantom{a}}}$	$\bar{\mathcal{K}}$	$\xrightarrow{*}$	$\bar{\mathcal{K}}^* = \hat{\mathcal{K}}$
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
<i>contravariante apontuado</i>		<i>covariante apontuado</i>		<i>contravariante pontuado</i>		<i>covariante pontuado</i>
$\mathcal{Cl}_{3,0} f_+$		$f_+ \mathcal{Cl}_{3,0}$		$f_- \mathcal{Cl}_{3,0}$		$\mathcal{Cl}_{3,0} f_-$

Temos, pois, a seguinte correspondência entre o formalismo desenvolvido neste capítulo e o de Penrose:

$$\mathbb{G}^A \longleftrightarrow \mathcal{Cl}_{3,0} f_+, \quad \mathbb{G}_A \longleftrightarrow f_+ \mathcal{Cl}_{3,0}, \quad \mathbb{G}^{A'} \longleftrightarrow f_- \mathcal{Cl}_{3,0}, \quad \mathbb{G}_{A'} \longleftrightarrow \mathcal{Cl}_{3,0} f_- \quad (6.23)$$

### 6.1.2 Transformações spinoriais

Considere agora um elemento arbitrário  $R \in \mathcal{Cl}_{3,0}$ :

$$R = s + v^i \mathbf{e}_i + b^{ij} \mathbf{e}_{ij} + p \mathbf{e}_{123} = \alpha + \beta \mathbf{e}_{12} + \gamma \mathbf{e}_{13} + \delta \mathbf{e}_{23}, \quad (6.24)$$

onde  $\alpha = s + p \mathbf{e}_{123}$ ,  $\beta = b^{12} - v^3 \mathbf{e}_{123}$ ,  $\gamma = b^{13} + v^2 \mathbf{e}_{123}$ , e  $\delta = b^{23} - v^1 \mathbf{e}_{123}$ . Sob a ação de  $R$ , um SCTA  $\mathcal{K}$  se comporta como

$$R\mathcal{K} = R(\psi f_+) = k^1(Rf_+) + k^2(R\mathbf{e}_1 f_+),$$

onde denotamos:

$$\begin{aligned} Rf_+ &= (\alpha + \beta \mathbf{e}_{123})f_+ + (\gamma + \delta \mathbf{e}_{123})(\mathbf{e}_1 f_+), \\ R\mathbf{e}_1 f_+ &= (\alpha - \beta \mathbf{e}_{123})f_+ + (-\gamma + \delta \mathbf{e}_{123})(\mathbf{e}_1 f_+). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Uma representação matricial  $\rho : \mathcal{Cl}_{3,0} \rightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$  de  $R$  é dada por

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Segue-se daí que

$$\det \rho(R) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2. \quad (6.27)$$

Sob os (anti)automorfismos de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , respectivamente a involução graduada, a reversão e a conjugação, o multivetor  $R \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  se transforma como:

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} \mathbf{e}_{12} + \bar{\gamma} \mathbf{e}_{13} + \bar{\delta} \mathbf{e}_{23}, \\ \check{R} &= \bar{\alpha} - \bar{\beta} \mathbf{e}_{12} - \bar{\gamma} \mathbf{e}_{13} - \bar{\delta} \mathbf{e}_{23}, \\ \underline{R} &= \alpha - \beta \mathbf{e}_{12} - \gamma \mathbf{e}_{13} - \delta \mathbf{e}_{23}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Temos portanto a relação

$$R\underline{R} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \det \rho(R) \quad (6.29)$$

Dessa maneira, dado  $R \in \mathcal{Cl}_{3,0}$ , ao exigirmos que  $R \in \mathcal{Spin}_+(1, 3)$  (o que significa que  $R\underline{R} = 1$ ), podemos ver da relação acima que  $\det \rho(R) = 1$  e  $R \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Acabamos de estabelecer o isomorfismo

$$\boxed{\mathcal{Spin}_+(1, 3) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C})} \quad (6.30)$$

Da condição  $R\underline{R} = 1$  segue-se que  $\underline{R} = R^{-1}$ . Temos, portanto, as seguintes leis de transformação satisfeitas pelos spinors de Weyl conforme nosso formalismo:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\longmapsto R\mathcal{K}, \\ \mathcal{K}^* &\longmapsto \mathbf{e}_1(\underline{R\mathcal{K}}) = \mathbf{e}_1 \check{\mathcal{K}} R = \mathcal{K}^* R^{-1}, \\ \bar{\mathcal{K}} &\longmapsto \mathbf{e}_1(\widehat{R\mathcal{K}}) = \mathbf{e}_1 \check{\mathcal{K}} \hat{R} = \bar{\mathcal{K}}(\hat{R}) = \bar{\mathcal{K}}(\hat{R})^{-1}, \\ \mathcal{K}^* &\longmapsto (\widehat{R\mathcal{K}}) = \hat{R} \bar{\mathcal{K}}^*, \end{aligned} \quad (6.31)$$

o que nos permite representar

$$\begin{array}{l} \mathcal{K} \mapsto R\mathcal{K} \\ \mathcal{K}^* \mapsto \mathcal{K}^*R^{-1} \\ \bar{\mathcal{K}} \mapsto \bar{\mathcal{K}}(\hat{R})^{-1} \\ \bar{\mathcal{K}}^* \mapsto \hat{R}\bar{\mathcal{K}}^* \end{array} \quad (6.32)$$

Desse modo provamos que as transformações dos SCTA, SCA, SCTP e SCP obedecem às mesmas regras que a versão clássica apresentada na seção (2.3). De fato, segundo a representação (4.25), vemos que

$$\rho(\hat{R}) = [\rho(R)^\dagger]^{-1}, \quad (6.33)$$

de onde segue as expressões (2.80). Levando em conta a representação matricial dos quatro tipos de spinors, temos a correspondência:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} k^1 & 0 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\mathcal{K}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{k}^{1'} & \bar{k}^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{k}_{2'} & \bar{k}_{1'} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K}^* \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -k^2 & k^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\mathcal{K}}^* \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \bar{k}_{1'} \\ 0 & \bar{k}_{2'} \end{pmatrix}. \end{array} \quad (6.34)$$

Portanto para escrevermos os quatro tipos de spinors de Weyl (e posteriormente o spinor de Dirac) basta considerarmos o ideal  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_+$  e, usando o produto de Clifford à direita e à esquerda pelo elemento  $e_1$ , obtemos os outros ideais ( $f_+\mathcal{Cl}_{3,0}$ ,  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_-$ ,  $f_-\mathcal{Cl}_{3,0}$ ), cujos elementos são os outros três tipos de spinors de Weyl.

### 6.1.3 Spinors de Dirac

Vimos no cap.(2) que um spinor de Dirac  $\psi$  é um elemento do espaço  $\mathbb{G}^A \oplus \mathbb{G}_{A'}$ , segundo o formalismo de Penrose. O spinor de Dirac tem oito dimensões (quatro  $\mathbb{C}$ -componentes), o mesmo número de dimensões que um multivetor arbitrário da álgebra  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Isso nos sugere que o spinor de Dirac é um multivetor de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . Em nosso formalismo, o spinor de Dirac  $\psi$  é um elemento do espaço  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_+ \oplus \mathcal{Cl}_{3,0}f_- \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{3,0} \ni \psi &= \psi(f_+ + f_-) = \psi f_+ + \psi e_1 f_+ e_1 \\ &= \mathcal{K} + \mathcal{L}e_1, \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde

$$\mathcal{K} = \psi f_+ \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \psi(e_1 f_+). \quad (6.36)$$

#### A equação de Dirac em termos dos spinors de Weyl

Podemos reconduzir a equação de Dirac (5.59) escrita na álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  a duas equações de Weyl, escritas em termos dos spinors de Weyl. Posteriormente escrevemos essas como expressões em termos dos spinors de Pauli. Para simplificar, consideramos a eq.(5.59) sem campos externos, que pode ser escrita como

$$(\partial_t + \nabla)\psi \mathcal{I}e_3 = m\hat{\psi}, \quad \psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}. \quad (6.37)$$

Além disso fazemos a decomposição  $\psi = \psi f_+ + \psi f_-$ , onde  $f_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{e}_3)$ . Escrevemos

$$\begin{aligned}\xi &= \psi f_+ \in \mathcal{Cl}_{3,0}f_+ \\ \hat{\eta} &= \psi f_- \in \mathcal{Cl}_{3,0}f_-\end{aligned}\quad (6.38)$$

já que  $\widehat{f_+} = f_-$ . A correspondência com a notação utilizada na subseção anterior é dada por  $\xi = \mathcal{K}$  e  $\hat{\eta} = \mathcal{L}\mathbf{e}_1$ . Segue-se daí que

$$(\partial_t + \nabla)(\xi + \hat{\eta})\mathcal{I}\mathbf{e}_3 = m(\hat{\xi} + \eta), \quad (6.39)$$

e conseqüentemente

$$(\partial_t + \nabla)\xi\mathcal{I} - (\partial_t + \nabla)\hat{\eta}\mathcal{I} = m\hat{\xi} + m\eta, \quad (6.40)$$

onde usamos  $\xi\mathbf{e}_3 = \xi$  e  $\hat{\eta}\mathbf{e}_3 = -\hat{\eta}$ , pois  $\xi \in \mathcal{Cl}_{3,0}f_+$  e  $\hat{\eta} \in \mathcal{Cl}_{3,0}f_-$ .

Separando os termos que estão em  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_+$  e em  $\mathcal{Cl}_{3,0}f_-$  obtemos duas equações:

$$(\partial_t + \nabla)\xi\mathcal{I} = m\eta, \quad (6.41)$$

$$-(\partial_t + \nabla)\hat{\eta}\mathcal{I} = m\hat{\xi}. \quad (6.42)$$

Tomando a involução graduada na última equação, obtemos o análogo da equação de Dirac em termos de spinors de Weyl [Gr97]:

$$\begin{aligned}(\partial_t + \nabla)\xi\mathcal{I} &= m\eta \\ (\partial_t - \nabla)\hat{\eta}\mathcal{I} &= m\hat{\xi}\end{aligned}\quad (6.43)$$

A título de comparação, vamos escrever também a decomposição da equação de Dirac em termos dos spinors de Pauli. Já vimos no cap.(4) que podemos escrever um multivetor  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  como

$$\begin{aligned}\mathcal{Cl}_{3,0} \ni \psi &= a + a^i \mathbf{e}_i + a^{ij} \mathbf{e}_{ij} + p\mathbf{e}_{123} \\ &= a + a^{12} \mathbf{e}_{12} + a^{23} \mathbf{e}_{23} + a^{13} \mathbf{e}_{13} + (a^3 + a^1 \mathbf{e}_{13} + a^2 \mathbf{e}_{23} + p\mathbf{e}_{12})\mathbf{e}_3 \\ &= \phi + \chi\mathbf{e}_3, \quad \phi, \chi \in \mathcal{Cl}_{3,0}^+\end{aligned}\quad (6.44)$$

e substituir na eq.(6.37):

$$(\partial_t + \nabla)(\phi + \chi\mathbf{e}_3)\mathcal{I}\mathbf{e}_3 = m(\phi - \chi\mathbf{e}_3), \quad (6.45)$$

a qual podemos separar em partes par e ímpar:

$$\begin{aligned}\partial_t \phi \mathcal{I} \mathbf{e}_3 + \nabla \chi \mathcal{I} &= m \phi \\ \partial_t \chi \mathcal{I} \mathbf{e}_3 + \nabla \phi \mathcal{I} &= -m \chi\end{aligned}\quad (6.46)$$

que é a expressão da equação de Dirac em termos de spinors de Pauli.

### 6.1.4 Velocidade, paravetor spin e paravetor spin

Ao tomarmos um elemento  $\psi \in \mathbb{S}\text{pin}_+(1,3) \simeq \text{SL}(2,\mathbb{C})$ ,  $\psi$  pode ser visto como uma transformação de Lorentz, e  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{L}$  são obtidos via essa classe de transformações dos vetores  $\{f_+, \mathbf{e}_1 f_+\}$ .

Definimos os paravetores

$$u = \frac{1}{2}(\psi\tilde{\psi}) = \frac{1}{2}(\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} + \mathcal{L}\tilde{\mathcal{L}}), \quad (6.47)$$

$$s = \frac{1}{2}(\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}). \quad (6.48)$$

Dada a semelhança com a definição (5.38) do cap.(5), identificamos  $u$  (a menos de um fator  $1/2$ ) com a *velocidade própria* e  $s$  com o *paravetor-spin*. Além disso temos a relação

$$\psi\psi = -\mathcal{K}\mathbf{e}_1\mathcal{L} + \mathcal{L}\mathbf{e}_1\mathcal{K}. \quad (6.49)$$

Definimos ainda o *parabivector-spin*  $\mathfrak{X}$  como

$$\mathfrak{X} = \psi\mathbf{e}_{12}\psi = i\psi\mathbf{e}_3\psi, \quad (6.50)$$

que está relacionado ao paravetor-spin por

$$s = i\mathfrak{X}u. \quad (6.51)$$

### 6.1.5 Vetores do espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{M}$ construídos como paravetores da álgebra de Pauli a partir de spinors de Weyl em $\mathcal{C}\ell_{3,0}$

Definimos um paravetor genérico  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{v} \equiv \mathcal{K}\mathbf{e}_1\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}}$ . Sob as relações (6.3),(6.10), obtemos

$$\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} k^1\bar{k}^{1'} & k^1\bar{k}^{2'} \\ k^2\bar{k}^{1'} & k^2\bar{k}^{2'} \end{pmatrix}. \quad (6.52)$$

Dados  $\mathcal{C}\ell_{3,0}f_+ \ni \mathcal{K} = k^1f_+ + k^2\mathbf{e}_1f_+$  e  $\bar{\mathcal{K}} = \bar{k}^{1'}(f_-\mathbf{e}_1) + \bar{k}^{2'}(f_-)$ , temos explicitamente que

$$\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}\mathbf{e}_1\bar{\mathcal{K}} = k^1\bar{k}^{1'}f_+ + k^1\bar{k}^{2'}f_+\mathbf{e}_1 + k^2\bar{k}^{1'}f_-\mathbf{e}_1 + k^2\bar{k}^{2'}f_- \quad (6.53)$$

o que nos reconduz imediatamente, mediante a representação (6.1), à eq.(6.52). Temos, com isso, a seguinte correspondência:

$$f_+ \longleftrightarrow o^A o^{A'}, \quad f_+\mathbf{e}_1 \longleftrightarrow o^A i^{A'}, \quad f_-\mathbf{e}_1 \longleftrightarrow i^A o^{A'}, \quad f_- \longleftrightarrow i^A i^{A'} \quad (6.54)$$

Tais idempotentes da álgebra do espaço  $\mathcal{C}\ell_{3,0}$ , construídos a partir dos vetores<sup>4</sup>  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$ , se identificam pelas relações acima com tétrede nula definida na seção (2.1) e dada pela eq.(2.46). Dessa maneira, construímos a tétrede nula do espaço-tempo de Minkowski utilizando os spinors, só que desta vez com o uso da álgebra de Clifford do espaço.

<sup>4</sup>Esses vetores têm como representação particular as matrizes de Pauli.

Afirmamos que um paravetor  $\mathfrak{a} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  pode ser escrito como

$$\boxed{\mathfrak{a} = 2\mathcal{K}\mathbf{e}_1\bar{\mathcal{K}} = 2\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}}} \quad (6.55)$$

De fato, dado um spinor operatorial  $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}^+$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = 2\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} &= 2\psi f_+ f_+ \tilde{\psi} = 2\psi f_+ \tilde{\psi} = \psi(1 + \mathbf{e}_3)\tilde{\psi} \\ &= \psi\tilde{\psi} + \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi} \\ &= \mathfrak{a}^0 + \mathfrak{a}^i \mathbf{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6.56)$$

O paravetor  $\mathfrak{a}$  assim definido aponta para o futuro, já que

$$\mathbb{R} \ni \psi\tilde{\psi} = \mathfrak{a}^0 = (a + b\mathbf{e}_{12} + c\mathbf{e}_{13} + d\mathbf{e}_{23})(a - b\mathbf{e}_{12} - c\mathbf{e}_{13} - d\mathbf{e}_{23}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0. \quad (6.57)$$

Além disso, já que  $(\mathfrak{a}^i)^2 = (\psi\tilde{\psi})^2 = (\mathfrak{a}^0)^2$ , o paravetor  $\mathfrak{a}$  é nulo ( $\mathfrak{a}^2 = (\mathfrak{a}^0)^2 - (\mathfrak{a}^i)^2 = 0$ ).

A última igualdade da eq.(6.56) vem do resultado [Va97] que podemos escrever um vetor de  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}, \quad (6.58)$$

que resulta do vetor de referência  $\mathbf{e}_3$  a partir de uma rotação e uma dilatação. Identificamos a expressão acima, multiplicada pelo fator  $\hbar/2$ , com a densidade de spin.

Queremos obter a métrica do espaço-tempo a partir dos spinors, como feito no cap.(2). De acordo com a eq.(6.53), escrevemos dois paravetores  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{b}$  como

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= k^1 \bar{k}^{1'} f_+ + k^1 \bar{k}^{2'} f_+ \mathbf{e}_1 + k^2 \bar{k}^{1'} f_- \mathbf{e}_1 + k^2 \bar{k}^{2'} f_- = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}^i \mathbf{e}_i, \\ \mathfrak{b} &= r^1 \bar{r}^{1'} f_+ + r^1 \bar{r}^{2'} f_+ \mathbf{e}_1 + r^2 \bar{r}^{1'} f_- \mathbf{e}_1 + r^2 \bar{r}^{2'} f_- = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}^i \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (6.59)$$

e suas respectivas conjugações

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \widehat{k^1 \bar{k}^{1'}} f_- - \widehat{k^1 \bar{k}^{2'}} \mathbf{e}_1 f_- - \widehat{k^2 \bar{k}^{1'}} \mathbf{e}_1 f_+ + \widehat{k^2 \bar{k}^{2'}} f_+ = \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{a}^i \mathbf{e}_i, \\ \mathfrak{b} &= \widehat{r^1 \bar{r}^{1'}} f_- - \widehat{r^1 \bar{r}^{2'}} \mathbf{e}_1 f_- - \widehat{r^2 \bar{r}^{1'}} \mathbf{e}_1 f_+ + \widehat{r^2 \bar{r}^{2'}} f_+ = \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{b}^i \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Obtemos daí a relação de Clifford para os paravetores:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\hat{\mathfrak{b}} + \hat{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} &= (k^1 \bar{k}^{1'} r^2 \bar{r}^{2'} + k^1 \bar{k}^{2'} r^2 \bar{r}^{1'} + k^2 \bar{k}^{1'} r^1 \bar{r}^{2'} + k^2 \bar{k}^{2'} r^1 \bar{r}^{1'}) \\ &= 2(\mathfrak{a}^0 \mathfrak{b}^0 - \mathfrak{a}^i \mathfrak{b}_i) = 2g(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Com isso a formulação dos paravetores a partir dos spinors de Weyl em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  é con-zidente com o formalismo clássico.

A partir de paravetores tipo-luz obtidos a partir dos geradores  $\{f_+, f_-, \mathbf{e}_1 f_+, \mathbf{e}_1 f_-\}$  dos quatro ideais laterais de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , é possível reobter a téttrade ortonormal  $\{\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  do espaço dos paravetores. Para isso definimos uma base de paravetores tipo-luz  $\{\pi^\mu\}$ :

$$\begin{aligned} \pi^0 &= f_+ \widetilde{f_+} = f_+, \\ \pi^1 &= f_- \widetilde{f_-} = f_-, \\ \pi^2 &= \mathbf{e}_1 f_+ \widetilde{f_+} = \mathbf{e}_1 f_+ \\ \pi^3 &= f_+ \widetilde{\mathbf{e}_1 f_+} = \mathbf{e}_1 f_- \end{aligned} \quad (6.62)$$

A tetrade ortonormal é obtida a partir da base de paravetores  $\{\pi^\mu\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \pi^0 + \pi^1, \\ \mathbf{e}_1 &= \pi^2 - \pi^3, \\ \mathbf{e}_2 &= \pi^3 - \pi^2, \\ \mathbf{e}_3 &= \pi^0 - \pi^1, \end{aligned} \quad (6.63)$$

já que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= f_+ + f_-, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 f_+ + \mathbf{e}_1 f_-, \\ \mathbf{e}_2 &= -\mathcal{J}(\mathbf{e}_1 f_- - \mathbf{e}_1 f_+), \\ \mathbf{e}_3 &= f_+ - f_-. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Já obtivemos a tetrade do espaço de Minkowski ( $\mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ ) e a tetrade do espaço dos paravetores ( $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ ), juntamente com a métrica desse espaço. Para completamente obtermos o formalismo de Penrose sob o ponto de vista das álgebras de Clifford, falta os conceitos de *pólo* e de *bandeira*, os quais desenvolvemos a seguir.

Pela eq.(6.56), podemos ver imediatamente que o paravetor  $\mathfrak{a}$  gerado pelo SCTA  $\mathcal{K}$  é nulo. De fato,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a} = 4\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} \left( \mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} \right) = 4\mathcal{K}\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{K}}\tilde{\mathcal{K}}) = 0. \quad (6.65)$$

Portanto o paravetor  $\mathfrak{a} = 2\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}}$  é o **pólo** associado a uma geratriz do cone de luz. Em termos da eq.(6.36)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} &= \mathbf{u} + \mathbf{s} = \psi f_+ \tilde{\psi}, \\ \mathcal{L}\tilde{\mathcal{K}} &= \mathbf{u} - \mathbf{s} = \psi f_- \tilde{\psi} \end{aligned}} \quad (6.66)$$

Além disso podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{L}\tilde{\mathcal{K}} &= \psi \mathbf{e}_1 \tilde{\psi}, \\ \mathcal{K}\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L}\tilde{\mathcal{K}} &= \psi \mathbf{e}_{31} \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Definimos os vetores  $\mathfrak{c}$  e  $\mathfrak{d}$  como

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= \mathcal{K}\tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{L}\tilde{\mathcal{K}} = \psi \mathbf{e}_1 \tilde{\psi}, \\ \mathfrak{d} &= -\mathcal{J} \mathcal{K}\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L}\tilde{\mathcal{K}} = \psi \mathbf{e}_{31} \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Os paravetores  $\mathfrak{c}$  e  $\mathfrak{d}$  são ortogonais a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{s}$ . O paravetor formado por  $\mathfrak{c}$  e o pólo  $\mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}} = \mathbf{u} + \mathbf{s}$  é a **bandeira**:

$$\mathfrak{c}(\mathbf{u} + \mathbf{s}) = \psi(\mathbf{e}_1 f_-) \tilde{\psi}. \quad (6.69)$$

### 6.1.6 A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

Considere o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  e uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . A álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{0,3}$ , é gerada pela base  $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , tal que

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -\delta_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6.70)$$

Em particular  $\mathbf{e}^2 = -1$ .

Utilizando o mesmo raciocínio feito em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , primeiramente reduzimos as dimensões redundantes do formalismo, provando a

**Proposição** ►  $\mathcal{Cl}_{0,3}f_+ = \mathcal{Cl}_{0,3}^+f_+$ , onde  $f_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{J})$ . ◀

**Prova:** O ideal à esquerda  $\mathcal{Cl}_{0,3}f_+$  é isomorfo a  $\mathbb{H}$ , enquanto álgebras. Além disso, escrevendo um elemento arbitrário de  $\mathcal{Cl}_{0,3}$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{0,3} \ni A &= a^0 + a^k \epsilon_k + b^1 \epsilon_{23} + b^2 \epsilon_{31} + b^3 \epsilon_{12} + b^0 \epsilon_{123} \\ &= a^0 + a^k \epsilon_k - b^k \epsilon_k \epsilon_{123} + b^0 \epsilon_{123}, \end{aligned} \quad (6.71)$$

vemos que

$$\begin{aligned} Af_+ &= [(a^0 + b^0) + (a^k - b^k) \epsilon_k] f_+ \\ &= [(a^0 + b^0) + (a^k - b^k) \epsilon_k \epsilon_{123}] f_+ \end{aligned} \quad (6.72)$$

Portanto, dado  $Af_+ \in \mathcal{Cl}_{0,3}f_+$ , escrevendo  $A' = (a^0 + b^0) + (a^k - b^k) \epsilon_k \epsilon_{123}$ , vemos que  $A' \in \mathcal{Cl}_{0,3}^+$  e que  $Af_+ = A'f_+$ . Isso mostra que  $\mathcal{Cl}_{0,3}f_+ \subset \mathcal{Cl}_{0,3}^+f_+$ . A outra inclusão segue imediatamente. □

Considere um elemento par  $Q \in \mathcal{Cl}_{0,3}^+$

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{0,3}^+ \ni Q &= a + b\epsilon_{12} + c\epsilon_{13} + d\epsilon_{23} \\ &= (a + b\epsilon_{12}) + \epsilon_{13}(c - d\epsilon_{12}) \\ &= k^1 + \epsilon_{13}k^2. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Outra possibilidade de escrevermos os spinors de Weyl é considerar a álgebra  $\mathcal{Cl}_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ , onde podemos expressar um spinor  $\mathcal{K} = Qf_+ \in \mathcal{Cl}_{0,3}f_+$  como

- Spinor contravariante apontado (SCTA)

$$\mathcal{K} = (k^1 f_+ + \epsilon_{13} k^2 f_+) \quad (6.74)$$

Também definimos o

- Spinor contravariante pontuado (SCTP)

$$\mathcal{K} = (f_+ \bar{k}^1 - f_+ \bar{k}^2 \epsilon_{13}) \quad (6.75)$$

Multiplicando o conjugado de  $\mathcal{K}$  à esquerda por  $\epsilon_{13}$ , obtemos

$$\epsilon_{13} \mathcal{K} = \epsilon_{13} (f_+ \bar{k}^1 + f_+ \bar{k}^2 \epsilon_{31}) = f_+ k^1 \epsilon_{13} + f_+ k^2, \quad (6.76)$$

que multiplicado por outro spinor  $\eta \in \mathcal{Cl}_{0,3}f_+$

$$\epsilon_{13} \mathcal{K} \eta = k^1 \bar{\eta}^1 \epsilon_{13} f_+ - k^1 \eta^2 f_+ + k^2 \eta^1 f_+ + k^2 \bar{\eta}^2 \epsilon_{13} f_+, \quad (6.77)$$

podemos obter a métrica spinorial em  $\mathcal{Cl}_{0,3}$ :

$$\mathcal{G} = 2 \langle (\epsilon_{13} \mathcal{K}) \eta \rangle_0 = (k^2 \eta^1 - k^1 \eta^2) f_+ \quad (6.78)$$

Considere agora a aplicação  $\sigma : \mathcal{Cl}_{0,3}^+ \rightarrow \mathcal{Cl}_{0,3}^+$  definida pela expressão

$$\sigma(Q) = \epsilon_{32} \overline{Q} \epsilon_{23}, \quad (6.79)$$

onde  $\overline{Q} = \widehat{Q}$ . A aplicação  $\sigma$  leva um módulo à direita em um módulo à esquerda. De fato,

$$\begin{aligned} \sigma(k^1 + \epsilon_{13} k^2) &= \sigma(a + b\epsilon_{12} + c\epsilon_{13} + d\epsilon_{23}) \\ &= \epsilon_{32}(a + b\epsilon_{12} + c\epsilon_{13} + d\epsilon_{23})\epsilon_{23} \\ &= (a + b\epsilon_{12}) + (c - d\epsilon_{12})\epsilon_{13} \\ &= k^1 + k^2 \epsilon_{13}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Para um spinor  $\mathcal{Cl}_{0,3} \ni \mathcal{K} = Qf_+$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma(\psi) = \sigma(Qf_+) &= \epsilon_{32}(\overline{Qf_+})\epsilon_{23} = \epsilon_{32}(f_+ \overline{Q}\epsilon_{23}) \\ &= f_+ \epsilon_{32} \overline{Q} \epsilon_{23} = f_+ \sigma(Q) \\ &= f_+(k^1 + k^2 \epsilon_{13}). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Dessa maneira,

$$\sigma(\mathcal{K})\epsilon_{13} = f_+(k^1 \epsilon_{13} - k^2) = f_+(-k^2 + k^1 \epsilon_{13}) = \mathcal{K}^*. \quad (6.82)$$

Daí definimos de outra maneira a *métrica spinorial*:

$$G(\psi, \phi) = \langle \sigma(\psi)\epsilon_{13}\phi \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}[\sigma(\psi)\epsilon_{13}\phi + \epsilon_{21}\sigma(\psi)\epsilon_{13}\phi\epsilon_{12}] \quad (6.83)$$

Entretanto a álgebra  $\mathcal{Cl}_{0,3}$  não é tão natural para a descrição de uma métrica do espaço-tempo de Minkowski quanto  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ . De fato, ela é adequada para o espaço-tempo euclidiano  $\mathbb{R}^4$ , visto que, para  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ ,

$$\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + \vec{u}^2, \quad u_0 \in \mathbb{R}, \quad \vec{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (6.84)$$

Além disso  $\mathcal{Cl}_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  é uma álgebra semi-simples, e o anel  $\mathbb{H}$  não é comutativo, sendo preciso discernir o produto pela esquerda e pela direita em  $\mathbb{H}$ . Além disso provamos que existe uma aplicação  $\sigma$  que passa de um módulo a outro.

*Ich kann es nun einmal nicht lassen, in diesem Drama von Mathematik und Physik - die sich im Dunkeln befruchteten aber von Angesicht von Angesicht so gerne einander verkennen und verleugnen - die Rolle des (wie ich genügsam erfuhr, oft unerwünschten) Boten zu spielen.*<sup>1</sup>

Hermann Weyl

*(...) die Unbergrenztheit des Raumes ist eine größere empirische Gewißheit als irgend eine äußere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keinesweg.*<sup>2</sup>

Bernhard Riemann, *die Habilitationsvortrag, 1854.*

O objetivo principal deste capítulo é descrever as transformações conformes no espaço-tempo de Minkowski ( $\mathbb{M}$ ) a partir da ação de elementos do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$  sobre paravetores do espaço  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$  e caracterizar os twistors como uma classe especial de spinors algébricos em  $\mathbb{R}^{4,1}$  (elementos de um ideal minimal à esquerda de  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ ), ou de modo equivalente spinors clássicos em  $\mathbb{R}^{2,4}$  (elementos do espaço de representação irredutível do grupo<sup>3</sup>  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$ ). Com isso descrevemos as transformações conformes e os twistors inteiramente através da álgebra de Dirac e apresentamos sua versão multivetorial. Finalmente discutimos algumas generalizações do conceito de twistor como os mexors e os screws.

## 7.1 Transformações de Möbius no plano

Vimos no cap.(2) que rotações na esfera de Riemann podem ser associadas a rotações no plano de Argand-Gauss, que é isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , e portanto a álgebra dos números complexos  $\mathcal{Cl}_{0,1} \simeq \mathbb{C}$  é apropriada para se descrever rotações em  $\mathbb{R}^2$ .

No cap.(3) demonstramos o teorema da periodicidade das ACs, que diz que  $\mathcal{Cl}_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}$ . Utilizando tal teorema, vemos que as transformações de Lorentz no espaço-tempo, geradas a partir da ação de elementos do grupo  $\mathbb{S}pin_+(1,3)$  (que são elementos particulares da álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ ), estão associadas diretamente às transformações de Möbius no plano, já que

$$\mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{0,1} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{0,1}. \quad (7.1)$$

<sup>1</sup> "Eu não posso deixar de assumir, no drama entre a matemática e a física - que de noite se fertilizam, e quando estão face a face se degladiam e se atacam - o papel (embora muitas vezes mal-sucedido) de mediador."

<sup>2</sup> "A falta de limites do espaço é uma sabedoria empírica maior do que qualquer outra experiência exterior. Mas não se pode dizer, de maneira nenhuma, que daí decorre a infinitude."

<sup>3</sup>O grupo  $\mathbb{S}pin_+(2,4)$  é o recobrimento quádruplo do grupo conforme  $SConf_+(1,3)$ , que é o grupo das transformações conformes ortócronas do espaço-tempo.

As transformações conformes no plano são descritas com o auxílio da álgebra  $\mathcal{Cl}_{1,1}$ .

Com base no último isomorfismo dado pela eq.(7.1), podemos representar um paravetor  $\alpha$  de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  por um elemento de  $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ :

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \ni \alpha = \begin{pmatrix} z & \lambda \\ \mu & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

com  $z \in \mathbb{C}$ .

Considere agora um elemento do grupo  $\mathbb{S}pin_+(1, 3) = \{\phi \in \mathcal{Cl}_{3,0} \mid \phi\bar{\phi} = 1\}$ . De acordo com o teorema 3.11 (periodicidade generalizado), que diz que a reversão de uma matriz que representa um elemento de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  é acompanhada da conjugação de cada uma das suas entradas (que são números complexos), podemos representar:

$$\widetilde{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

A rotação de um paravetor  $\alpha \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$  pode ser efetuada mediante a transformação  $\alpha \mapsto \alpha' = \eta\alpha\tilde{\eta}$  para  $\eta \in \mathbb{S}pin_+(1, 3)$ . Em termos das representações matriciais, a rotação é representada por

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \lambda \\ \mu & \bar{z} \end{pmatrix} \widetilde{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \lambda \\ \mu & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Tomando  $\mu = 1$  e  $\lambda = z\bar{z}$ , vemos que o paravetor  $\alpha$  é mapeado em

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & z\bar{z} \\ 1 & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} z' & z'\bar{z}' \\ 1 & \bar{z}' \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

onde  $z' = \frac{az+c}{bz+d}$  e  $\mathbb{R} \ni \omega = |bz+d|^2$ .

O mapa descrito pela equação da matriz (7.5) é a própria ação da matriz spinorial  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , já descrita pela eq.(2.14). Vemos que esse formalismo das transformações de Möbius no plano, construído a partir do teorema da periodicidade generalizado, reconduz ao formalismo clássico descrito no cap.(2) e pode ser generalizado para a descrição das transformações conformes no espaço-tempo de Minkowski.

## 7.2 A compactificação conforme

Dado o espaço quadrático  $\mathbb{R}^{p,q}$ , considere o mapa injetivo [Cr90]

$$\begin{aligned} \kappa: \mathbb{R}^{p,q} &\rightarrow \mathbb{R}^{p+1,q+1} \\ x &\mapsto \kappa(x) = (x, x \cdot x, 1) = (x, \lambda, \mu) \end{aligned} \quad (7.6)$$

A imagem de  $\mathbb{R}^{p,q}$  é um subconjunto da quádrlica  $Q$  em  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ , que é descrita pela equação

$$x \cdot x - \lambda\mu = 0, \quad (7.7)$$

o chamado *absoluto de Klein*. O mapa  $\kappa$  induz um mapa injetivo da quádrlica  $Q$  no espaço projetivo  $\Sigma(\mathbb{R}^{p+1,q+1})$ , onde  $\Sigma(\mathbb{R}^{p+1,q+1})$  é o conjunto de todas as retas que passam pela origem de  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ . A quádrlica  $Q$  é compacta e é definida como sendo a *compactificação conforme*  $\widetilde{\mathbb{R}^{p,q}}$  do espaço quadrático  $\mathbb{R}^{p,q}$ .

A quádrlica  $Q \approx \widehat{\mathbb{R}^{p,q}}$  é homeomorfa ao hipertoro  $(S^p \times S^q)/\mathbb{Z}_2$  [BF98]. No caso particular, onde  $p = 0$  e  $q = n$ , a quádrlica é homeomorfa à esfera  $S^n$ , que é a compactificação de  $\mathbb{R}^n$  mediante o acréscimo do ponto no infinito.

Existe também um mapa injetivo

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1} \\ v &\mapsto s(v) = \begin{pmatrix} v & v\bar{v} \\ 1 & \bar{v} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Enunciamos o

**Teorema 7.1** ▶ (i) o mapa  $\kappa : \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ ;  $x \mapsto (x, x \cdot x, 1)$ , é uma isometria.

(ii) o mapa  $\pi : Q \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ ;  $(x, \lambda, \mu) \mapsto x/\mu$  definido onde  $\lambda \neq 0$  é conforme.

(iii) se  $U : \mathbb{R}^{p+1,q+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1,q+1}$  é um mapa ortogonal, então o mapa  $\Omega = \pi \circ U \circ \kappa : \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$  é conforme. ◀

Para a demonstração do teorema (7.1) vide [Po95]. Os mapas do tipo  $\Omega$  levam esferas conformes em esferas conformes<sup>4</sup>. Pela afirmação (iii) do teorema 7.1 vemos que  $U$  e  $-U$  induzem a mesma transformação conforme em  $\mathbb{R}^{p,q}$ . O grupo conforme é definido como:

$$\text{Conf}(p, q) \simeq O(p+1, q+1)/\mathbb{Z}_2 \quad (7.9)$$

Já vimos na sec.(3.11) que  $O(p+1, q+1)$  tem quatro componentes. Então o grupo  $\text{Conf}(p, q)$  possui quatro ou duas componentes, dependendo de onde o elemento  $-id_{\mathbb{R}^{p+1,q+1}}$  estiver. Se tal elemento estiver na componente conexa com a identidade (que é o caso em que  $p$  e  $q$  são ímpares)  $p+1$  e  $q+1$  são pares e o grupo  $\text{Conf}(p, q)$  tem quatro componentes. Caso contrário ele só possui duas componentes. Para demonstração dessas afirmações, vide [Cr90].

Em se tratando das transformações conformes no espaço-tempo  $\mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathbb{M}$ , o grupo  $\text{Conf}(1,3)$  possui 4 componentes. A componente de  $\text{Conf}(1,3)$  conexa com a identidade, denotada por  $\text{Conf}_+(1,3)$  é conhecida como *grupo de Möbius de  $\mathbb{R}^{1,3}$* . Além disso a componente conexa com a identidade que preserva a estrutura temporal do cone de luz futuro é denotada por  $\text{SConf}_+(1,3)$ .

As transformações de Möbius são composições de rotações, translações, dilatações e transversões [Ma89].

**Teorema 7.2 (Liouville)** ▶ *Todas as transformações de Möbius são conformes.* ◀

### 7.3 Os paravetores de $\mathcal{Cl}_{4,1}$ na álgebra de Pauli

Considere o conjunto  $\{\varepsilon_{\check{A}}\}$ , ( $\check{A} = 0, 1, \dots, 5$ ) dos geradores de  $\mathbb{R}^{2,4}$  que satisfazem as relações:

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_5^2 = 1, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \varepsilon_4^2 = -1, \quad \varepsilon_{\check{A}} \cdot \varepsilon_{\check{B}} = 0 \quad (\check{A} \neq \check{B}). \quad (7.10)$$

<sup>4</sup>Esferas conformes podem ser *quase-esferas* ou hiperplanos, onde uma quase-esfera é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^{p,q}$  definida pela equação  $a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0$ , onde  $a, c \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}^{p,q}$ . Uma quase-esfera é uma esfera, no caso em que a forma quadrática  $x \cdot x$  em  $\mathbb{R}^{p,q}$  é positiva definida e  $a \neq 0$  e um plano, no caso em que  $a = 0$ .

Considere também o espaço  $\mathbb{R}^{4,1}$ , com uma base  $\{E_A\}$  ( $A = 0, 1, \dots, 4$ ), onde

$$E_0^2 = -1, \quad E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_4^2 = 1, \quad E_A \cdot E_B = 0 \quad (A \neq B). \quad (7.11)$$

Podemos obter os  $\{E_A\}$  a partir dos  $\{\varepsilon_A\}$ , definindo o isomorfismo

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{Cl}_{4,1} &\rightarrow \Lambda_2(\mathbb{R}^{2,4}) \\ E_A &\mapsto \xi(E_A) = \varepsilon_A \varepsilon_5. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Os  $\{E_A\}$  definidos acima satisfazem as relações (7.11).

Dado um vetor  $\alpha = \alpha^A \varepsilon_A \in \mathbb{R}^{2,4}$ , obtemos um paravetor de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$ , que pertence ao espaço  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$ , da seguinte maneira:

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1} \ni \mathfrak{b} = \alpha \varepsilon_5 = \alpha^A E_A + \alpha^5. \quad (7.13)$$

Definimos ainda o bivetor  $\mathcal{Q} = E_4 E_0 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{4,1})$ .

Temos o intuito de descrever os paravetores de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  com base na álgebra de Pauli. Pelo teorema da periodicidade para as álgebras de Clifford, temos o isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{3,0}$  e portanto podemos expressar um elemento de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  como uma matriz  $2 \times 2$  com entradas em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ .

Definimos o isomorfismo

$$E_i \mapsto \vartheta(E_i) = E_i E_0 E_4 \equiv \mathbf{e}_i. \quad (7.14)$$

Vemos facilmente que  $\mathbf{e}_i^2 = 1$  e que  $E_i = \mathbf{e}_i E_4 E_0$ . Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} E_4 &= E_+ + E_-, \\ E_0 &= E_+ - E_-, \end{aligned} \quad (7.15)$$

onde definimos  $E_{\pm} = \frac{1}{2}(E_4 \pm E_0)$ . Daí,

$$\mathfrak{b} = \alpha^5 + (\alpha^0 + \alpha^4)E_+ + (\alpha^4 - \alpha^0)E_- + \alpha^i \mathbf{e}_i \mathcal{Q}. \quad (7.16)$$

A partir das relações  $E_4^2 = 1$  e  $E_0^2 = -1$ , podemos representar  $E_4$  e  $E_0$  por:

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Como consequência disso também escrevemos

$$E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

e

$$\boxed{\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \alpha^5 + \alpha^i \mathbf{e}_i & \alpha^4 - \alpha^0 \\ \alpha^0 + \alpha^4 & \alpha^5 - \alpha^i \mathbf{e}_i \end{pmatrix}} \quad (7.19)$$

O vetor  $\alpha \in \mathbb{R}^{2,4}$  está no absoluto de Klein, ou seja,  $\alpha^2 = 0$ . Além disso temos a correspondência

$$\alpha^2 = 0 \leftrightarrow \mathfrak{b} \bar{\mathfrak{b}} = 0, \quad (7.20)$$

já que  $\alpha\alpha = \alpha^2 = \alpha\varepsilon_5^2\alpha = \alpha\varepsilon_5\varepsilon_5\alpha = \bar{b}b$ .

Definimos

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha^4 - \alpha^0, \\ \mu &= \alpha^4 + \alpha^0.\end{aligned}\tag{7.21}$$

Utilizando a representação matricial de  $\bar{b}b$ , o elemento  $(\bar{b}b)_{11}$  da matriz é dado por

$$(\bar{b}b)_{11} = x\bar{x} - \lambda\mu = 0,\tag{7.22}$$

onde  $x \equiv (\alpha^5 + \alpha^i e_i)$  é paravetor de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$  ( $x \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ ). Ao escolhermos  $\mu = 1$ , fixamos conseqüentemente  $\lambda = x\bar{x} \in \mathbb{R}$ . Essa escolha corresponde à passagem para o espaço projetivo como descrito na sec.(7.2). Portanto um paravetor  $b \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$  pode ser representado como:

$$b = \begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x\bar{x} \\ 1 & \bar{x} \end{pmatrix}.\tag{7.23}$$

Da eq.(7.22) obtemos

$$\begin{aligned}(\alpha^5 + \alpha^i e_i)(\alpha^5 - \alpha^i e_i) &= (\alpha^4 - \alpha^0)(\alpha^4 + \alpha^0) \\ \Rightarrow (\alpha^5)^2 - (\alpha^i e_i)(\alpha^j e_j) &= (\alpha^4)^2 - (\alpha^0)^2,\end{aligned}\tag{7.24}$$

de onde concluímos que

$$\boxed{(\alpha^5)^2 + (\alpha^0)^2 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2 - (\alpha^3)^2 - (\alpha^4)^2 = 0}\tag{7.25}$$

que é a própria equação que descreve o absoluto de Klein (eq.(7.7)).

#### 7.4 Transformações de Möbius no espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathbb{M}$

A matriz  $g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  pertence ao grupo  $\mathbb{S}pin_+(2, 4)$  se, e somente se, suas entradas  $a, b, c, d \in \mathcal{Cl}_{3,0}$  obedecem às seguintes condições:

- (i)  $a\bar{a}, b\bar{b}, c\bar{c}, d\bar{d} \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $a\bar{b}, c\bar{d} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ ,
- (iii)  $av\bar{c} + c\bar{v}a, cv\bar{d} + d\bar{v}c \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ ,
- (iv)  $av\bar{d} + c\bar{v}b \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \quad \forall v \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ ,
- (v)  $a\bar{c} = c\bar{a}, b\bar{d} = d\bar{b}$ ,
- (vi)  $a\bar{d} - c\bar{b} = 1$ .

As condições (i), (ii), (iii), (iv) são equivalentes à condição de que  $\hat{\sigma}(g)(b) = gb\bar{g} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}, \forall b \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$ , onde  $\hat{\sigma} : \mathbb{S}pin_+(2, 4) \rightarrow \mathbb{SO}_+(2, 4)$  é a representação adjunta contorcida. De fato,

$$\begin{aligned}gb\bar{g} &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax\bar{d} + \lambda a\bar{b} + \mu c\bar{d} + c\bar{x}\bar{b} & ax\bar{c} + \lambda a\bar{a} + \mu c\bar{c} + b\bar{x}\bar{a} \\ bx\bar{d} + \lambda b\bar{b} + \mu d\bar{d} + d\bar{x}\bar{b} & bx\bar{c} + \lambda b\bar{a} + \mu d\bar{b} + d\bar{x}\bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & \lambda' \\ \mu' & \bar{w} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{7.27}$$

onde essa última igualdade (considerando  $w \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$  e  $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ ) vem da exigência de que  $g \in \mathbb{S}pin_+(2, 4)$ , ou seja,  $g\bar{g} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$ . Para que isso aconteça, as condições (i), (ii), (iii) e (iv) devem ser satisfeitas.

As condições (v), (vi) expressam o fato que  $g\bar{g} = 1$ , já que, para  $g \in \mathbb{S}pin_+(2, 4)$ , temos que

$$g\bar{g} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a\bar{d} - c\bar{b} & a\bar{c} - c\bar{a} \\ b\bar{d} - d\bar{b} & d\bar{a} - b\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

#### 7.4.1 Transformações conformes

Vimos na sec.(7.3) que podemos representar um paravetor de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  como

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1} \ni \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x & x\bar{x} \\ 1 & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \bar{x} \end{pmatrix}, \quad (7.29)$$

onde  $x \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$  é paravetor de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ .

Considere agora um elemento do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2, 4) = \{g \in \mathcal{Cl}_{4,1} \mid g\bar{g} = 1\}$ . Podemos representá-lo por um elemento  $g \in \mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{3,0}$ , ou seja,  $g$  pode ser representado pelas matrizes  $2 \times 2$  com entradas em  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , da forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathcal{Cl}_{3,0}. \quad (7.30)$$

A rotação de um paravetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$  pode ser efetuada mediante a representação adjunta contorcida,  $\hat{\sigma} : \mathbb{S}pin_+(2, 4) \rightarrow SO_+(2, 4)$ , definida no cap.(3) por  $\hat{\sigma}(g)(\mathbf{b}) = g\mathbf{b}\bar{g}^{-1} = g\mathbf{b}\bar{g}$  para  $g \in \mathbb{S}pin_+(2, 4)$ . Em termos das representações matriciais, a ação do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2, 4)$  é representada por:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Fixando-se  $\mu = 1$ , o paravetor  $\mathbf{b}$  é mapeado em

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x\bar{x} \\ 1 & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} x' & x'\bar{x}' \\ 1 & \bar{x}' \end{pmatrix}, \quad (7.32)$$

onde

$$x' = (ax + c)(bx + d)^{-1}, \quad (7.33)$$

$$\mathbb{R} \ni \Delta = (bx + d)\overline{(bx + d)}. \quad (7.34)$$

A transformação (7.33) é conforme [He91].

Nesse sentido, as transformações conformes no espaço-tempo são rotações em  $\mathbb{R}^{2,4}$ , resultantes da ação do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2, 4)$  através da representação adjunta contorcida.

Devido ao isomorfismo

$$\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{C}), \quad (7.35)$$

podemos representar elementos do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2, 4)$  como elementos particulares da álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . No que se segue, denotamos  $x \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$  um paravetor. Expressamos as transformações conformes a partir da ação de elementos do grupo  $\mathbb{S}pin_+(2, 4)$  nas correspondentes matrizes listadas abaixo:

- **Translação:**  $x \mapsto x + h$ ,  $h \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

- **Dilatação:**  $x \mapsto \rho x$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\rho} \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

- **Rotação:**  $x \mapsto \mathfrak{g}x\hat{\mathfrak{g}}^{-1}$ ,  $\mathfrak{g} \in \mathbb{S}\text{pin}_+(1, 3)$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{g} & 0 \\ 0 & \hat{\mathfrak{g}} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

- **Inversão:**  $x \mapsto -\bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

- **Transversão:**  $x \mapsto x + x(hx + 1)^{-1} = \frac{x + x\bar{x}h}{1 + 2x \cdot h + x\bar{x}h\bar{h}}$ ,  $h \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

A transversão é a composição de uma inversão seguida de uma translação e novamente de uma inversão e, a partir dela, vemos a utilidade de se trabalhar com a compactificação conforme  $\widehat{\mathbb{R}^{1,3}}$  de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . De fato, o ponto  $x = -\bar{h}/h\bar{h}$  é levado no infinito pela transversão, o que faz com que  $\mathbb{R}^{2,4}$  tenha que ser compacto, para uma descrição satisfatória da teoria das transformações conformes.

O grupo  $\text{SConf}_+(1,3)$  é coberto quadruplamente pelo grupo  $\text{SU}(2,2)$ , onde a identidade do grupo conforme  $\text{id}_{\text{SConf}_+(1,3)}$  corresponde às seguintes matrizes em  $\text{SU}(2,2) \simeq \mathbb{S}\text{pin}_+(2,4)$ :

$$\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i_2 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i_2 & 0 \\ 0 & -i_2 \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

O elemento  $1_2$  simboliza a matriz identidade  $2 \times 2$ ; o elemento  $i_2$  representa a matriz diagonal com entradas imaginárias puras  $i$ .

Dessa maneira, os elementos do grupo  $\mathbb{S}\text{pin}_+(2,4)$  dão origem às transformações de Möbius ortócronas. No caso do espaço-tempo, existem os isomorfismos [Po95][Cr90]:

$$\text{Conf}(1,3) \simeq \text{O}(2,4)/\mathbb{Z}_2 \simeq \text{Pin}(2,4)/\{\pm 1, \pm i\}, \quad (7.42)$$

e, conseqüentemente,

$$\text{SConf}_+(1,3) \simeq \text{SO}_+(2,4)/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{S}\text{pin}_+(2,4)/\{\pm 1, \pm i\}. \quad (7.43)$$

A seqüência de homomorfismos

$$\mathbb{S}\text{pin}_+(2,4) \xrightarrow{2-1} \text{SO}_+(2,4) \xrightarrow{2-1} \text{SConf}_+(1,3) \quad (7.44)$$

é construída explicitamente em [Kl74][La97].

Em geral o grupo conforme  $\text{Conf}(1,3)$  age sobre  $\mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ , que por sua vez é imerso no cone de luz de  $\mathbb{R}^{2,4}$ . Esse cone de luz é a própria quádrlica  $Q$ , definida na sec.(7.1), quando  $p = 2$  e  $q = 4$ . O aumento de duas dimensões no espaço faz com que o grupo conforme, que age de modo não-linear em  $\mathbb{R}^{1,3}$ , aja linearmente em  $\mathbb{R}^{2,4}$  pela ação do grupo  $\mathbb{S}\text{pin}_+(2,4)$ .

Vale ressaltar que essa ação é feita a partir de elementos da álgebra de Dirac, devido ao isomorfismo dado pela eq.(7.35).

## 7.5 A álgebra de Lie do grupo conforme

Vimos na sec.(3.12) que a álgebra de Lie do grupo  $\text{Spin}_+(p,q)$  é gerada pelos bivectores. No caso do espaço  $\mathbb{R}^{2,4}$  a álgebra de Lie do grupo  $\text{Spin}_+(2,4)$  é gerada pelo espaço de bivectores que possui quinze dimensões. Podemos então associar esses bivectores aos geradores do grupo conforme do espaço-tempo de Minkowski  $\text{Conf}(1,3)$ , já que o grupo conforme possui quinze parâmetros. Vimos na subsubsec.(4.5.2) e na subsec.(7.3) que

$$E_0 = -i\gamma_0, \quad E_1 = -i\gamma_1, \quad E_2 = -i\gamma_2, \quad E_3 = -i\gamma_3, \quad E_4 = -i\gamma_{0123}, \quad (7.45)$$

e que

$$E_A = \varepsilon_A \varepsilon_5, \quad (7.46)$$

onde  $\{\varepsilon_A\}$  ( $A = 0, \dots, 5$ ) é base de  $\mathbb{R}^{2,4}$ ,  $\{E_A\}$  ( $A = 0, \dots, 4$ ) é base de  $\mathbb{R}^{4,1}$  e  $\{\gamma_\mu\}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) é base de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Definimos então os geradores do grupo conforme  $\text{Conf}(1,3)$  como bivectores do espaço  $\Lambda_2(\mathbb{R}^{2,4})$ :

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{i}{2}(\varepsilon_\mu \varepsilon_5 + \varepsilon_\mu \varepsilon_4), \\ K_\mu &= -\frac{i}{2}(\varepsilon_\mu \varepsilon_5 - \varepsilon_\mu \varepsilon_4), \\ D &= -\frac{1}{2}\varepsilon_4 \varepsilon_5, \\ M_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\varepsilon_\nu \varepsilon_\mu. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Das relações (7.45) e (7.46), os geradores de  $\text{Conf}(1,3)$  são expressos a partir dos vetores  $\{\gamma_\mu\}$  de  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{1}{2}(\gamma_\mu + i\gamma_\mu \gamma_5), \\ K_\mu &= -\frac{1}{2}(\gamma_\mu - i\gamma_\mu \gamma_5), \\ D &= \frac{1}{2}i\gamma_5, \\ M_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\gamma_\nu \wedge \gamma_\mu). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Podemos verificar que os geradores acima definidos satisfazem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [K_\mu, K_\nu] &= 0, & [M_{\mu\nu}, D] &= 0, \\ [M_{\mu\nu}, P_\lambda] &= -(g_{\mu\lambda}P_\nu - g_{\nu\lambda}P_\mu), \\ [M_{\mu\nu}, K_\lambda] &= -(g_{\mu\lambda}K_\nu - g_{\nu\lambda}K_\mu), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\sigma\rho}] &= g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}, \\ [P_\mu, K_\nu] &= 2(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}), \\ [P_\mu, D] &= P_\mu, \\ [K_\mu, D] &= -K_\mu. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Vale observar que as relações de comutação permanecem invariantes perante as substituições  $P_\mu \mapsto -K_\mu$ ,  $K_\mu \mapsto -P_\mu$  e  $D \mapsto -D$ .

## 7.6 Twistors sob o ponto de vista multivetorial

A construção do twistor de acordo com J. Keller [Ke97] se utiliza dos projetores<sup>5</sup>  $\mathbb{P}_{\mathcal{X}} = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)$  ( $\mathcal{X} = \mathcal{R}, \mathcal{L}$ ) e do elemento  $T_{\mathbf{x}} = 1 + \gamma_5 \mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{x} = x^\mu \gamma_\mu$ . Segundo a formulação de Keller [Ke97], temos a

**Definição** ► O *twistor de referência*  $\eta_{\mathbf{x}}$ , associado com o vetor posição  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,3}$  e um spinor covariante pontuado de Weyl (que é escrito como a projeção de orientação negativa de um spinor de Dirac  $\omega \in \mathbb{C}^4$ )  $\Pi = \mathbb{P}_{\mathcal{L}}\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}$  é dado por

$$\boxed{\eta_{\mathbf{x}} = T_{\mathbf{x}}\mathbb{P}_{\mathcal{L}}\omega = (1 + \gamma_5 \mathbf{x})\mathbb{P}_{\mathcal{L}}\omega = (1 + \gamma_5 \mathbf{x})\Pi} \blacktriangleleft \quad (7.50)$$

Para vermos a coerência dessa definição com o formalismo original de Penrose, utilizamos a representação matricial de Weyl para os multivetores usados na definição do twistor de referência:

$$\eta_{\mathbf{x}} = (1 + \gamma_5 \mathbf{x})\Pi = \left[ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i_2 & 0 \\ 0 & i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{x} \\ \vec{x}^c & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (7.51)$$

onde as entradas de cada uma das matrizes acima devem ser vistas como matrizes  $2 \times 2$ ,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

é a representação do vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  em termos de matrizes, já vista no cap.(2), e  $\vec{x}^c$  é a reversão espacial (conjugação quaterniônica) da representação  $\vec{x}$  do vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$ . Portanto

$$\boxed{\eta_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -i\vec{x}\xi \\ \xi \end{pmatrix}} \quad (7.53)$$

que é a própria definição de Penrose dos twistors. O sinal é diferente, devido à utilização da representação de Weyl

$$\gamma(e_0) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_k) = \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (7.54)$$

construída na subsec.(4.3.2). Keller utiliza a representação de Weyl com os vetores do espaço com sinal trocado

$$\gamma(e_0) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_k) = \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

Se utilizarmos essa representação vemos, de fato, que

$$\boxed{\eta_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} i\vec{x}\xi \\ \xi \end{pmatrix}} \quad (7.56)$$

Definimos o *spinor adjunto de Dirac*

$$\bar{\omega} = \omega^\dagger \gamma_0 = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4). \quad (7.57)$$

O *twistor transposto* é dado por

$$\bar{\eta}_{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\omega} \mathbb{P}_{\mathcal{R}}(1 + \gamma_5 \bar{\mathbf{x}}) = \bar{\Pi}(1 + \gamma_5 \bar{\mathbf{x}}). \quad (7.58)$$

**Proposição 7.1** ► O produto escalar  $\bar{\eta}_{\bar{\mathbf{x}}}\eta_{\mathbf{x}}$ , representa o valor esperado do dual do vetor-posição  $\gamma_5 \mathbf{x}$  com respeito ao spinor  $\Pi$ . ◀

<sup>5</sup>Em alusão às orientações dos spinors de Dirac, falamos que  $\mathbb{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)$  é um projetor de orientação positiva ou  $\mathbb{P}_{\mathcal{L}} \equiv \mathbb{P}_{\mathcal{R}}^* = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)$  é um projetor de orientação negativa.

**Prova:** De fato,

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_x \eta_x &= \bar{\Pi} \Pi + 2\bar{\Pi} \gamma_5 \mathbf{x} \Pi + \mathbf{x}^2 \bar{\Pi} \Pi \\ &= 2\bar{\Pi} \gamma_5 \mathbf{x} \Pi,\end{aligned}\tag{7.59}$$

já que  $\bar{\Pi} \Pi = \bar{\omega} \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \frac{1}{2} (1 + i\gamma_5) \omega = 0$ .

□

Definimos também o produto tensorial

$$\eta_x \bar{\Pi} = (1 + \gamma_5 \mathbf{x}) \Pi \bar{\Pi} = (1 + \gamma_5 \mathbf{x}) q,\tag{7.60}$$

onde  $q = \Pi \bar{\Pi}$  é a projeção positiva do vetor nulo  $Q = \omega \bar{\omega}$ , o que dá a interpretação do twistor como sendo composto por um vetor nulo  $q$  e uma bandeira  $\gamma_5 \mathbf{x} q$ . O multivetor correspondente a um twistor é dado por

$$\eta_x^\circ \equiv \eta_x \bar{\Pi} = q + \gamma_5 \mathbf{x} q = (1 - i\mathbf{x}) q.\tag{7.61}$$

Obtemos agora os produtos internos entre twistors. A relação de incidência, que determina um ponto no espaço-tempo  $\mathbb{M}$  a partir da intersecção de dois twistors, é dada, como no formalismo de Penrose, por

$$J_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}^{\omega\omega} = \underline{\eta}_x \eta_{x'} = \bar{\Pi} \gamma_5 (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Pi = 0,\tag{7.62}$$

onde  $\underline{\eta}_x$  é a conjugação de Clifford do multivetor  $\eta_x$ . O produto  $J_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}^{\omega\omega}$  é invariante ao multiplicarmos  $\eta_x$  por um fator complexo. Assim, de oito graus de liberdade passamos a seis e o vínculo dado pela eq.(7.62) reduz o espaço dos twistors nulos a cinco dimensões, o que reconduz de fato ao formalismo clássico dos twistors, segundo Penrose.

Keller define ainda outro produto interno, que corresponde ao mesmo twistor, mas em dois pontos distintos em  $\mathbb{M}$ :

$$J_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}^{\omega\omega} = \underline{\eta}_x \eta_{x'} = \bar{\Pi} \gamma_5 (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Pi = 0.\tag{7.63}$$

O produto acima só será nulo quando  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . A congruência de Robinson é definida fixando-se  $\mathbf{x}$  e variando-se  $\mathbf{x}'$ .

Os twistors podem ser completamente descritos pela estrutura multivetorial da álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ , que é isomorfa a  $\mathcal{Cl}_{4,1}$ . Faremos a definição dos twistors, sob o ponto de vista das definições clássica e algébrica dos spinors.

Vimos no cap.(3) que um spinor clássico é um elemento do espaço de representação irredutível do grupo  $\text{Spin}_+(p, q)$ . Visto que esse grupo é definido como o conjunto dos elementos pares  $\phi$  do grupo de Clifford-Lipschitz tais que  $\phi \tilde{\phi} = 1$ , a representação irredutível vem automaticamente da representação irredutível da subálgebra par  $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$ .

Veremos no que se segue que os twistors podem ser vistos como uma classe especial<sup>6</sup> de spinors algébricos em  $\mathbb{R}^{4,1}$  (elementos de um ideal à esquerda da álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{4,1}$ ) ou como spinors clássicos em  $\mathbb{R}^{2,4}$  (elementos do espaço de representação do grupo  $\text{Spin}_+(2, 4)$ ).

<sup>6</sup>Tal classe tem uma dependência com a posição, já que devemos reconduzir o novo formalismo dos twistors ao formalismo clássico de Penrose.

**Definição** ► Um twistor em  $\mathbb{M}$  é um elemento do ideal à esquerda  $(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f$  com uma dependência intrínseca na posição ( $f$  é um idempotente primitivo de  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{Cl}_{4,1}$ ).

◀

Essa dependência intrínseca será explicitada logo abaixo. Com essa definição, os twistors são spinors de Dirac com uma dependência na posição.

No cap.(5), quando escrevemos a equação de Dirac utilizando a álgebra de Pauli  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , vimos que o spinor de Dirac  $\psi$  é um elemento do ideal  $(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f \simeq \mathcal{Cl}_{1,3}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}$ . Já que os idempotentes  $f_{\pm} = \frac{1}{2}(1 + e_3)$  são primitivos e geram ideais minimais à esquerda de  $\mathcal{Cl}_{3,0}$ , podemos escrever

$$\psi \in (\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f \simeq \mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}f_+ \oplus \mathcal{Cl}_{3,0}f_- \quad (7.64)$$

A vantagem de definirmos o twistor como um tipo particular de spinor algébrico em  $\mathbb{R}^{4,1}$  é que reobtemos a teoria dos twistors de Penrose, com uma notação destituída de índices, a partir do formalismo spinorial via álgebras de Clifford, que é um formalismo adequado para se expressar e interpretar relações geométricas. Além disso, provamos abaixo que tal formulação é equivalente à formulação do twistor segundo Keller.

Considerando, como feito na subseção (4.5.3), uma base  $\{E_A\}$  de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  e uma base  $\mathbb{C} \otimes \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  de  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ , pelo isomorfismo  $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$  dado por

$$E_0 = i\gamma_0, \quad E_1 = \gamma_{10}, \quad E_2 = \gamma_{20}, \quad E_3 = \gamma_{30}, \quad E_4 = \gamma_5\gamma_0 = -\gamma_{123}, \quad (7.65)$$

vemos que, de fato,  $E_0^2 = -1$  e  $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 1$ . Escrevemos um paravetor de  $\mathcal{Cl}_{4,1}$  como

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1} \ni x = x^0 + x^A E_A = x^0 + \alpha^0 E_0 + x^1 E_1 + x^2 E_2 + x^3 E_3 + \alpha^4 E_4. \quad (7.66)$$

Definimos um elemento  $\chi = xE_4$  do espaço  $\Lambda^0(\mathbb{R}^{4,1}) \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^{4,1}) \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^{4,1})$  como

$$\chi = xE_4 = x^0 E_4 + \alpha^0 E_0 E_4 + x^1 E_1 E_4 + x^2 E_2 E_4 + x^3 E_3 E_4 + \alpha^4. \quad (7.67)$$

Vemos que

$$\chi \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5) = T_x \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5) = T_x \mathbb{P}_{\mathcal{L}}. \quad (7.68)$$

Já que o twistor é definido segundo Keller por

$$\eta_x = T_x \mathbb{P}_{\mathcal{L}} \omega, \quad (7.69)$$

onde  $\omega \in (\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f$  é um spinor de Dirac, definimos o twistor um spinor algébrico em  $\mathbb{R}^{4,1}$ :

$$\boxed{\text{Twistor} = \chi \mathbb{P}_{\mathcal{L}} U f \in (\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f} \quad (7.70)$$

onde  $f$  é um idempotente primitivo de  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$  e  $U$  é um multivetor arbitrário da álgebra de Dirac. Portanto  $Uf$  é um spinor de Dirac e  $\mathbb{P}_{\mathcal{L}} U f = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} = \Pi \in \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})$  é um spinor de Weyl covariante pontuado (SCP). Podemos escrever o twistor como

$$\chi \Pi = xE_4 \Pi = (x^0 E_4 + \alpha^0 E_0 E_4 + x^1 E_1 E_4 + x^2 E_2 E_4 + x^3 E_3 E_4 + \alpha^4) \Pi. \quad (7.71)$$

Notamos que

$$E_4 \Pi = \gamma_5 \gamma_0 \Pi = -\gamma_0 \gamma_5 \Pi = -i\gamma_0 \Pi. \quad (7.72)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\chi\Pi &= (x^0 E_4 + \alpha^0 E_0 E_4 + x^1 E_1 E_4 + x^2 E_2 E_4 + x^3 E_3 E_4 + \alpha^4)\Pi \\
&= x^0 E_4 \Pi + x^k E_k E_4 \Pi + \alpha^0 E_0 E_4 \Pi + \alpha^4 \Pi \\
&= x^0 (E_4 \Pi) + x^k E_k (E_4 \Pi) + \alpha^0 E_0 (E_4 \Pi) + \alpha^4 \Pi \\
&= x^0 (-i\gamma_0 \Pi) + x^k (\gamma_k \gamma_0) (-i\gamma_0 \Pi) + \alpha^0 (i\gamma_0) (-i\gamma_0 \Pi) + \alpha^4 \Pi \\
&= -ix^0 \gamma_0 \Pi - ix^k \gamma_k \Pi + \alpha^0 \Pi + \alpha^4 \Pi \\
&= -i\mathbf{x}\Pi + \Pi = (1 - i\mathbf{x})\Pi \\
&= (1 + \gamma_5 \mathbf{x})\Pi.
\end{aligned} \tag{7.73}$$

Portanto a equivalência dessa definição com o modelo do twistor (segundo Keller) é provada.

A relação de incidência dada pela eq.(7.62) é traduzida no nosso formalismo apenas tomando-se o conjugado do twistor e multiplicando pelo próprio twistor, como na eq.(7.62):

$$J_{\bar{x}\chi} = \overline{x E_4 \bar{U}} x E_4 U = -\bar{U} E_4 \bar{x} x E_4 U = 0, \tag{7.74}$$

já que o paravetor  $x \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4,1}$  está no absoluto de Klein e conseqüentemente  $x\bar{x} = 0$ .

### 7.6.1 Representação do grupo de Poincaré na álgebra de Dirac

O grupo de Poincaré é caracterizado por translações na direção de um vetor  $\mathbf{d}$  arbitrário de  $\mathbb{R}^{1,3}$  e rotações, essas últimas descritas por transformações de Lorentz.

Dado um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,3}$ , o grupo de Poincaré definido a partir do *produto semidireto*<sup>7</sup> entre o grupo de Lorentz e o grupo das translações do espaço-tempo, e é dado por

$$\begin{aligned}
(L_2, \mathbf{d}_2)(L_1, \mathbf{d}_1)\mathbf{x} &= L_2 L_1 \widetilde{L_1} \widetilde{L_2} + L_2 \mathbf{d}_1 \widetilde{L_2} + \mathbf{d}_2 \\
&= (L_2 L_1, L_2 \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)\mathbf{x} \\
&= (L_3, \mathbf{d}_3)\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{7.78}$$

A partir dos operadores de projeção definidos na subsec.(7.6),

$$\mathbb{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5), \quad \mathbb{P}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5), \tag{7.79}$$

<sup>7</sup>Sejam  $G, H$  dois grupos. Suponha que  $G$  age sobre  $H$ , isto é, existe uma aplicação  $f: G \times H \rightarrow H$  tal que

$$\begin{aligned}
f(1_G, h) &= h, \\
f(g_1 g_2, h) &= f(g_1, f(g_2, h)),
\end{aligned} \tag{7.75}$$

para todo  $h \in H$ . Observe que, denotando  $f(g, h)$  simplesmente por  $g \odot h$ , temos:

$$\begin{aligned}
1_G \odot h &= h, \\
(g_1 g_2) \odot h &= g_1 \odot (g_2 \odot h),
\end{aligned} \tag{7.76}$$

para todo  $h \in H$ .

Definimos o produto semidireto entre  $H$  e  $G$  como uma multiplicação em  $H \times G$  (o produto cartesiano usual) dada por

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1(g_1 \odot h_2), g_1 g_2). \tag{7.77}$$

Essa definição embora seja para grupos pode ser generalizada para álgebras de Lie, bastando para isso que se insira hipóteses de diferenciabilidade.

vemos que tais operadores de projeção satisfazem

$$\mathbb{P}_{\mathcal{R}}\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i\mathbb{P}_{\mathcal{L}}. \quad (7.80)$$

As representações do grupo de Poincaré são dadas por

$$\mathbb{P}_i^{\mathcal{L}} = (1 + \mathbb{P}_{\mathcal{L}}\mathbf{d}_i)L_i, \quad \mathbb{P}_i^{\mathcal{R}} = (1 + \mathbb{P}_{\mathcal{R}}\mathbf{d}_i)L_i. \quad (7.81)$$

De fato, usando as relações (7.80), vemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_3^{\mathcal{L}} &= \mathbb{P}_2^{\mathcal{L}}\mathbb{P}_1^{\mathcal{L}} = (1 + \mathbb{P}_{\mathcal{L}}\mathbf{d}_2)L_2(1 + \mathbb{P}_{\mathcal{L}}\mathbf{d}_1)L_1 \\ &= (1 + \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\mathbf{d}_2 + L_2\mathbf{d}_1\widetilde{L}_2))L_2L_1 \\ &= (1 + \mathbb{P}_{\mathcal{L}}\mathbf{d}_3)(L_3). \end{aligned} \quad (7.82)$$

Podemos verificar o caso em que o projetor é dado por  $\mathbb{P}_{\mathcal{R}}$  de maneira semelhante. Além disso, para completar a caracterização do grupo de Poincaré como grupo chiral da álgebra do espaço-tempo  $\mathbb{M}$ , basta ver a propriedade da translação inversa:

$$(1 + \mathbb{P}_{\mathcal{L}}\mathbf{d})(1 - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}\mathbf{d}) = 1. \quad (7.83)$$

Essa caracterização do grupo de Poincaré é útil no que diz respeito à definição dos *screws*, a ser abordada na próxima subseção, como uma generalização dos twistors.

### 7.6.2 Screws e mexors

A idéia original de Penrose [Pe66] é descrever eventos físicos, que naturalmente estão relacionados a outros eventos por vetores nulos (tipo-luz), utilizando construções que se baseavam na geometria dos twistors. Uma relação importante na teoria é um raio de luz que serve como “suporte” para outro raio de luz.

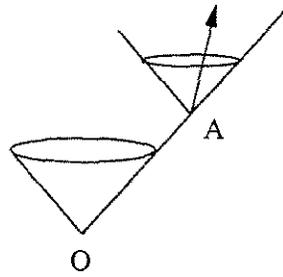


Figura 7.1: a idéia original dos twistors: vetores tipo luz que servem como suporte para outro vetor tipo-luz.

Na subsec.(7.6) vimos que o multivetor correspondente a um twistor é dado por

$$\eta_x^\circ \equiv \eta_x \bar{\Pi} = (1 + \gamma_5 \mathbf{x})q, \quad (7.84)$$

onde  $q$  é um vetor nulo. Nesse caso,  $\mathbf{x}$  denota a *posição de suporte* [BH85], aonde o vetor nulo  $q$  é ligado.

Podemos considerar diversos casos para o *braço conjugado*, que é um vetor  $\mathbf{x}$  que suporta outro vetor  $q$ :

- (i)  $\mathbf{x}$  e  $q$  nulos;
- (ii)  $\mathbf{x}$  arbitrário e  $q$  nulo (que já consideramos);
- (iii)  $\mathbf{x}$  e  $q$  arbitrários.

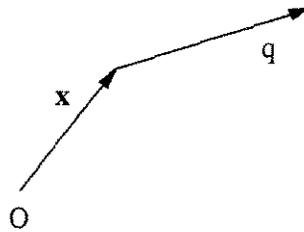


Figura 7.2: Articulação homocinética: suporte de um vetor por outro vetor arbitrário.

Generalizamos a eq.(7.84), definindo o *multivetor associado ao twistor generalizado* (TG):

$$\eta_{\mathbf{x},Y}^\circ = (1 + \gamma_5 \mathbf{x} \mathbb{P}_{\mathcal{L}}) \mathbb{P}_{\mathcal{L}} Y, \quad (7.85)$$

onde  $Y$  é um vetor de  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}l_{1,3}$ . Poderíamos definir o TG de maneira equivalente, utilizando-se o projetor positivo  $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}$ .

Os fatores  $(1 + \gamma_5 \mathbf{x} \mathbb{P}_{\mathcal{L}})$  são representações do grupo de translação, já que a relação

$$(1 + \gamma_5 \mathbf{x} \mathbb{P}_{\mathcal{L}})(1 + \gamma_5 \mathbf{x}' \mathbb{P}_{\mathcal{L}}) = (1 + \gamma_5 (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \mathbb{P}_{\mathcal{L}}) \quad (7.86)$$

é de simples verificação.

Os TG comutam com as rotações, pois dado  $R \in \mathbb{S}pin_+(1,3)$ , temos

$$\begin{aligned} R(1 + \gamma_5 \mathbf{x} \mathbb{P}_{\mathcal{L}}) \mathbb{P}_{\mathcal{L}} Y R^{-1} &= (1 + \gamma_5 R \mathbf{x} R^{-1} \mathbb{P}_{\mathcal{L}}) \mathbb{P}_{\mathcal{L}} R Y R^{-1} \\ &= (1 + \gamma_5 \mathbf{x}_r \mathbb{P}_{\mathcal{L}}) \mathbb{P}_{\mathcal{L}} Y_r, \end{aligned} \quad (7.87)$$

onde  $\mathbf{x}_r$  e  $Y_r$  são os vetores obtidos a partir da rotação dos vetores  $\mathbf{x}$  e  $Y$ , respectivamente.

O vetor  $\mathbf{x}$  é um vetor posição já que é afetado por translações, enquanto  $Y$  é um vetor *frame free*, que fica invariante perante translações e deve portanto ser associado com direções, mas não com posições.

### Screws

Os *screws* são definidos a partir da expressão

$$S_{\mathbf{x},Y} = (1 + \mathbf{x}\mathbb{P}_{\mathcal{L}})Y \quad (7.88)$$

e são, com isso, representações fiéis do grupo de Poincaré. Suponhamos que  $Y$  seja dependente da posição  $\mathbf{x}$  ( $Y = Y(\mathbf{x})$ ), através de um gerador do grupo de rotações  $R(\mathbf{x})$  (linear em  $\mathbf{x}$ )

$$Y(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x})Y_0R^{-1}(\mathbf{x}), \quad Y_0 \in \mathbb{C}. \quad (7.89)$$

Considerando a forma explícita

$$\exp(\mathbf{W}) = \exp(w^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}), \quad (7.90)$$

podemos descrever uma rotação uniforme, que dependa linearmente de um parâmetro  $a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$ :

$$w^{\mu\nu} = a_{\mathbf{x}}w_1^{\mu\nu} + w_0^{\mu\nu}, \quad (7.91)$$

onde  $w_1^{\mu\nu}$  e  $w_0^{\mu\nu}$  são constantes.

Dessa maneira o screw uniforme corresponde a rotações no plano  $\gamma_{\mu\nu}$ , proporcionais ao deslocamento do vetor  $\mathbf{x} = a_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{1,3}$ , de acordo com o parâmetro  $a_{\mathbf{x}}$ . Ora, isso descreve uma trajetória em forma de hélice.

### Mexors

Podemos ainda generalizar o conceito dos screws, definindo os *mexors*:

$$M = (1 + iZ)\mathbb{P}_{\mathcal{L}}Y, \quad (7.92)$$

onde  $Y$  é um vetor complexo do espaço-tempo e  $Z$  é um multivetor da álgebra de Dirac.

Os mexors são objetos geométricos que descrevem um elétron com spin e suas interações [Ke97b]. Tais interpretações estão fora do escopo da presente dissertação.

O intuito deste trabalho foi reformular a teoria dos spinors e twistors de Penrose e as transformações conformes do espaço-tempo utilizando as álgebras de Clifford. Com o novo formalismo apresentado, é possível eliminar uma dimensão do espaço quadrático a partir do qual construímos a álgebra de Clifford. Com isso fomos capazes de descrever os twistors e as transformações conformes a partir da álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . Para tanto, tivemos que primeiramente estabelecer o formalismo clássico dos spinors e twistors, segundo Penrose. Utilizando tal formalismo, podemos descrever entidades associadas a certas partículas, como helicidade, momentum e momento angular, a partir dos twistors.

Paralelamente à compreensão do formalismo clássico de Penrose, apresentamos as álgebras de Clifford de maneira extensiva, introduzindo primeiramente o produto tensorial, a álgebra exterior e seus (anti)automorfismos e a álgebra de Grassmann. Definimos a álgebra de Clifford, de três maneiras distintas: a definição usual, a definição como uma classe de equivalência da álgebra exterior e a definição a partir dos operadores de criação e aniquilação. Demonstramos o teorema da periodicidade, do qual se pode concluir que todas as álgebras de Clifford podem ser expressas a partir das álgebras  $\mathcal{Cl}_{1,0}, \mathcal{Cl}_{0,1}, \mathcal{Cl}_{0,2}$  e  $\mathcal{Cl}_{1,1}$ . Estudamos os grupos clássicos ortogonais e seus recobrimentos duplos, os grupos Pin e Spin, além de construirmos as álgebras de Lie dos grupos  $\text{Spin}_+(3)$  e  $\text{Spin}_+(1,3)$ . Também construímos explicitamente a representação da álgebra de Pauli, obtendo as matrizes de Pauli e também as representações padrão e chiral da álgebra de Dirac, a partir de simples regras envolvendo a teoria dos idempotentes. A representação de Weyl (chiral) se mostra particularmente essencial no que diz respeito à recondução do nosso modelo ao modelo clássico de Penrose.

Com o intuito de formular teorias a partir da álgebra de Clifford gerada por um espaço quadrático de menor dimensão, formulamos o conceito paravetorial, que nos permite expressar vetores de um espaço  $\mathbb{R}^{p,q}$  como paravetores, que são elementos de um espaço da forma  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{q,p-1}$ . Para ilustrar a versão “minimalista” de teorias, formulamos o eletromagnetismo e a teoria de Dirac utilizando somente a álgebra de Pauli. A vantagem dessa descrição é unificar operadores, vetores e tensores na forma de elementos da álgebra de Pauli.

Estabelecemos o formalismo dos spinors utilizando álgebras de Clifford, descrevendo os quatro tipos de spinors de Weyl como elementos de quatro ideais distintos, à direita e à esquerda, da álgebra de Pauli. A partir dessa nova formulação reconstruímos as entidades geométricas (pólo, bandeira) descritas por Penrose em sua teoria. Demonstramos que o pólo pode ser escrito como a soma da velocidade própria com o paravetor-spin e a bandeira como a composição do pólo com uma família de paravetores.

Provamos que o grupo de isometria do produto interno no espaço dos twistors, a saber o  $\text{SU}(2,2)$ , pode ser escrito exclusivamente dentro das álgebras de Clifford, através do isomorfismo  $\text{SU}(2,2) \simeq \mathcal{Spin}_+(2,4)$ . As transformações conformes (translação, inversão, rotação,

transversão e dilatação) são expressas através da ação do grupo  $\text{Spin}_+(2,4)$  sobre paravetores de  $\mathbb{R}^{4,1}$ . Enquanto a teoria original das transformações conformes no espaço-tempo é formulada em um espaço de seis dimensões ( $\mathbb{R}^{2,4}$ ), com o uso do modelo paravetorial conseguimos descrever todas as transformações conformes utilizando a álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}_{4,1}$ , que é isomorfa à álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . Portanto eliminamos a dimensão redundante outrora necessária à descrição das transformações conformes. Descrevemos a álgebra de Lie do grupo conforme com base na álgebra de Dirac.

Definimos o twistor no contexto das álgebras de Clifford, como elemento particular da classe de spinors algébricos (com dependência intrínseca na posição) de  $\mathbb{R}^{4,1}$ , ou seja, o twistor é definido como elemento particular de um ideal à esquerda da álgebra de Dirac  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ . De modo equivalente, o twistor é um spinor clássico de  $\mathbb{R}^{2,4}$ . Com isso desmistificamos o conceito de twistor, mostrando que tal entidade se trata de uma classe particular de spinors. Os twistors e as transformações conformes são formulados exclusivamente a partir da álgebra de Dirac. Reconduzimos o novo formalismo aos formalismos atuais, de Keller [Ke97b] e de Penrose [Pe84][Pe86]. Algumas vantagens desse novo formalismo são notórias. A primeira delas é que podemos construir uma teoria destituída de índices abstratos, o que elimina a complexidade de notação e até mesmo de compreensão da teoria clássica de Penrose. Além disso, através do teorema de periodicidade das álgebras de Clifford, esse formalismo pode ser possivelmente generalizado, com o intuito de se descrever os twistors e as transformações conformes em espaços quadráticos arbitrários de dimensão finita. Finalmente generalizamos o conceito de twistors, definindo novas entidades: os screws. Com base na interpretação geométrica dos twistors (segundo Penrose), onde podemos construir vetores nulos que suportam outros vetores nulos, podemos não somente nos restringir ao caso de vetores nulos. Esse formalismo possui diversas aplicações em robótica e engenharia. Os screws possuem a propriedade de descrever braços conjugados (articulações homocinéticas), com dois graus de liberdade, os quais também podem ser associados a movimentos helicoidais. Podemos compor diversos screws, e idealizarmos modelos para a descrição de estruturas mais complexas, como a mão biônica e outras. O desenvolvimento computacional relacionado a essas possíveis aplicações não foi implementado por fugir do escopo deste trabalho. Outra generalização possível dos twistors são os mexors, que descrevem um elétron com spin e suas interações. As possíveis interpretações dos mexors e um estudo mais aprofundado dessas entidades está fora do escopo da presente dissertação. Uma possível extensão a este trabalho é o estudo dos twistors em espaços de curvatura arbitrária e a quantização obtida nos espaços dos twistors. A aplicação desta última em uma possível teoria de gravitação quântica é um promissor assunto de pesquisa atual.

# Referências Bibliográficas

---

- [AL96] R. Ablamowicz, P. Lounesto e J. Parra, *Clifford Algebras with Numeric and Symbolic Computations*, Birkhäuser, Berlim, 1996.
- [AM67] R. Abraham e J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamim, 1967.
- [AO82] R. Ablamowicz, Z. Oziewicz e J. Rzewuski, *Clifford algebra approach to twistors*, J. Math. Physics, **23**, 2, 1982.
- [Ba00] W. Baylis, *Multiparavector subspaces of  $Cl_n$ : theorems and applications*, em *Clifford algebras and their Applications in Math. Physics, vol.I*, editado por Rafal Ablamowicz e Bertfried Fauser, Birkhäuser, Berlim, 2000.
- [Ba95a] W. Baylis, *Eigenspinors in electrodynamics*, em *Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, 1995.
- [Ba95b] W. Baylis, *The paravector model of spacetime*, em *Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [Ba97] W. Baylis, *Eigenspinors and electron spin*, Advances in Applied Clifford Algebras, **7** (S), 1997.
- [Ba99] W. Baylis, *Electrodynamics: A Modern Approach*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [Be93] A. Bette, *Twistor phase space dynamics and the Lorentz force equation*, J. Math. Physics, **34**, 10, 1993.
- [Be96] A. Bette, *Directly interacting massless particles - a twistor approach*, J. Math. Physics, **37**, 4, 1996.
- [Be00] A. Bette, *Twistor approach to relativistic dynamics and to the Dirac equation*, em *Clifford algebras and their Applications in Math. Physics, vol.I*, editado por Rafal Ablamowicz e Bertfried Fauser, Birkhäuser, Berlim, 2000.
- [BF98] B. Felsager, *Geometry, Particles and Physics*, Springer-Verlag, 1998.
- [BH85] D. Bohm e B. Hiley, *Generalization of the twistor to the Clifford algebras as a basis for geometry*, Rev. Bras. de Física, 1985.
- [Bk91a] N. Berkovitz, *A supertwistor description of the massless superparticle on ten-dimensional space*, N. Physics B, **350**, 1,2, 1991.
- [Bk91b] N. Berkovitz, *Twistors,  $N = 8$  superconformal invariance and the Green-Schwarz string*, N. Physics B, **358**, 1 1991.
- [Bo93] R. Boudet, *Non abelian gauge fields in the real Clifford algebra of spacetime*, F. Brackx et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1993.
- [Br64] A. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, N. York, 1964.
- [BT87] I. Benn e R. Tucker, *An Introduction to Spinors and Geometry with applications in Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [BY99] W. Baylis e Y. Yao, *Relativistic dynamics of charges in electromagnetic fields: an eigenspinor approach*, Physical Review A, **60**, 2, 1999.
- [Ca66] E. Cartan, *The Theory of Spinors*, Dover, 1966.
- [CF89] J. Chisholm e R. Farewell, *Unified spin gauge theories of the four fundamental forces*, A. Micali et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1989.

- [CF93] J. Chisholm e R. Farewell, *Spin gauge theories: principles and predictions*, F. Brackx et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1993.
- [Ch54] C. Chevalley, *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia Univ. Press, 1954.
- [Cl78] W. Clifford, *Applications of Grassmann extensive algebra*, Am. J. Math. Pure and Appl., **1**, 1878.
- [Co94] A. Connes, *Noncommutative Theory*, Academic Press, Londres, 1994.
- [Cs86] L. Castellani et alli, *The complete  $N = 3$  matter coupled supergravity*, N. Physics. **B268**, 1986.
- [Cr91] A. Crumeyrolle, *Supergravity, supersymmetry: a geometric unitary spinor theory*, A. Micali et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1989.
- [Cr90] A. Crumeyrolle, *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*, Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [Cw89] J. Crawford, *The geometric structure of the space of fermionic physical observables*, A. Micali et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1989.
- [Cw91] J. Crawford, *Clifford algebra: notes on the spinor metric and Lorentz, Poincaré, and conformal groups*, J. Math. Physics, **32**, 3, 1991.
- [Da98] C. Daviau, *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, V. Dietrich et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1998.
- [DL93] C. Doran, A. Lasenby e S. Gull, *Gravity as a gauge theory in the spacetime algebra*, F. Brackx et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1993.
- [ER89] D. Ebner e S. Rodriguez-Romo, *Fermions as special states of bosons*, A. Micali et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1989.
- [FC90] V. Figueiredo, E. C. Oliveira e W. Rodrigues Jr., *Covariant, algebraic, and operator spinors*, Int. J. Theor. Phys., **29**, 4, 1990.
- [FS90] J. Fillmore e A. Springer, *Möbius groups over general fields using Clifford algebras associated with spheres*, Int. J. Theor. Phys., **29**, 3, 1990.
- [Ga44] H. Grassmann, *A New Branch of Mathematics. The Ausdehnungslehre and Other Works*, Open Court, Chicago, 1994.
- [GM91] J. Gilbert e M. Murray, *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [Go81] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1981.
- [Gr97] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Springer-Verlag, 1997.
- [Gu97] K. Gürlebeck e WW. Sprössig, *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, J. Wiley, 1997.
- [Ha53] W. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Dublin, 1853.
- [He66] H. Hestenes, *Spacetime Algebra*, Gordon and Breach, N. York, 1966.
- [He90] H. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1990.
- [He91] D. Hestenes, *The design of linear algebra and geometry*, Acta Applicandae Mathematicae, **23**, 1991.
- [He94a] D. Hestenes, *Invariant body kinematics I: saccadic and compensatory eye movements*, Neural Networks, **7**, 1, 1994.
- [He94b] D. Hestenes, *Invariant body kinematics II: reaching and neurogeometry*, Neural Networks, **7**, 1, 1994.
- [He97] D. Hestenes, *Real Dirac theory*, Advances in Applied Clifford Algebras, **7** (S), 1997.

- [Ho95] P. Howe, *Twistors and supersymmetry*, Leuven Conference on High Energy Physics, 1995.
- [Jo76] R. Josza, *Applications of Sheaf Cohomology in Twistor Theory*, dissertação de mestrado defendida em Queen's College, Oxford, 1976.
- [KA96] J. Keller, A. Rodríguez e R. Yamaleev, *An algebraic linear relativistic equation over twistor fields with confined states*, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **6**, 2, 1996.
- [Ke91] J. Keller, *Spinors and multivectors as a unified tool for spacetime geometry and for elementary particle physics*, *Int. Journal of Theor. Physics*, **30**, 2, 1991.
- [Ke97a] J. Keller, *On the electron theory*, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **7** (S), 1997.
- [Ke97b] J. Keller, *Spinors, twistors, mexors and the massive spinning electron*, *Adv. Apl. Clif. Algebras*, **7** (S), 1997.
- [Kl74] F. Klotz, *Twistors and conformal group*, *J. Math. Physics*, **15**, 12, 1974.
- [Ko96] K. Teleman, *Conformal Lorentz geometry revisited*, *J. Math. Physics*, **37**, 2, 1996.
- [Kr91] H. Kruger, *New solutions oh the Dirac equation for central fields*, em *The electron*, ed. D. Hestenes e A. Weingartshofer, Kluwer, 1991.
- [Ku99] J. Kuipers, *Quaternion and Rotation Sequences*, Princeton Univ. Press, 1999.
- [KV89] J. Keller e F. Viniegra, *The multivector structure of the matter and interaction field theories*, A. Micali et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1989.
- [La95] J. Lasenby, *Geometric algebra: applications in engineering*, em *Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, 1995.
- [La97] A. Laufer, *The Exponential Map, Clifford Algebras, Spin Representations and Spin Gauge Theory of  $U(1) \times T^4$* , tese de doutorado defendida em Universität Konstanz, 1997.
- [LD92] A. Lasenby, C. Doran e S. Gull, *2-spinors, twistors and supersymmetry in the spacetime algebra*, *Proceedings of the Second Max Born Symposium*, 1992.
- [Lo96] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [Lw84] H. Lawson, *Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose*, Séminaire BOURBAKI, 36e année, 624, 1983/84.
- [Ma89] J. Maks, *Modulo (1,1) Periodicity of Clifford Algebras and Generalized (anti-)Möbius Transformations*, tese de doutorado defendida na Technische Universiteit Delft, 1989.
- [Mi73] C. Misner, K. Thorne e J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [Mo00] R. Mosna, *Álgebras de Clifford e Generalizações*, tese de doutorado em andamento pelo Inst. de Física Gleb Wataghin, Unicamp.
- [NZ83] C. Nash e S. Zen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, 1983.
- [Oz86] Z. Oziewicz e A. Common, *From Grassmann to Clifford*, em *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, D. Reidel Pub. Company, 1986.
- [Pa93] R. Pappas, *A formulation of hamiltonian mechanics using geometric calculus*, F. Brackx et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Holanda, 1993.
- [Pe66] R. Penrose, *Twistor Algebra*, *J. Math. Physics*, **8**, 2, 1966.
- [Pe84] R. Penrose e W. Rindler, *Spinors and spacetime, vol.1: Two-spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [Pe86] R. Penrose e W. Rindler, *Spinors and spacetime, vol.2: Spinor and Twistor Methods in Spacetime Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

- [Pe87] R. Penrose, *On the origins of twistor theory*, Grav. and Geometry, Bibliopolis, Naples, 1987.
- [Pe99] R. Penrose, *The central programme of twistor theory*, Chaos, Solitons and Fractals, **19**, 2-3, 1999.
- [Pi80] A. Pellionisz e R. Llinàs, *Tensorial approach to the geometry of brain function: cerebellar coordination via metric tensor*, Neuroscience, **5**, 1980.
- [Po95] I. Porteous, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [Re90] F. Reese Harvey, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, Boston, 1990.
- [Ri93] A. Rigas, *Grupos de Lie Via Exemplos*, XIX Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.
- [Rz93] M. Riesz, *Clifford Numbers and Spinors*, Kluwer, Dordrecht, Holanda, 1993.
- [Sa00] A. Santana, A. Ribeiro Filho e J. David Vianna, *Grupos de Lie em mecânica clássica: a contribuição de Dirac e recentes desenvolvimentos*, Rev. Bras. de Ensino de Física (RBEF), **22**, 2, 2000.
- [Sn97] J. Snugg, *Clifford Algebra, a Computational Tool for Physicists*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.
- [So85] M. Sohnius, *Introducing supersymmetry*, Phys. Rep., **128**, 2 e 3, 1985.
- [Sm00] L. Smolin, *Three Roads to Quantum Gravity*, 2000.
- [TC90] D. Tweed e W. Cadera *Computing three-dimensional eye position quaternions and eye velocity*, Vision Research, **30**, 1990.
- [Va97] J. Vaz, *A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a teoria de Pauli*, Rev. Bras. de Ensino de Física (RBEF), **19**, 2, 1997.
- [Va99] J. Vaz, *Notas de aula de MT301A (Tópicos em Física-Matemática)*, Imecc, Unicamp, 1999.
- [Wc98] F. Wilczek, *The future of particle physics as a natural science*, Int. J. Modern Phys. A, **13**, 1998.
- [Wi86a] E. Witten, *Twistor-like transform in ten dimensions*, N. Physics. **B266**, 2, 1986.
- [Wi86b] E. Witten, *Noncommutative geometry and quantum field theory*, N. Physics. **B268**, 1986.

# Índice Remissivo

---

- álgebra
  - de Clifford, 33, 34, 35
    - classificação, 44
    - centro da, 34
    - universal, 33
  - de Dirac, 65
  - de divisão, 31
  - exterior, 28, 29, 32
  - de Grassmann, 30
  - de Lie, 52, 54, 112
  - de Pauli, 59
  - radical, 31
  - semi-simples, 31, 42
  - simples, 31
  - sub-álgebra, 31
  - tensorial, 32
- alternador, 27, 32
- anel, 14, 104,
- aplicação
  - conforme 7,
  - de Clifford 36,
- Argand-Gauss, plano de, 6
- bandeira, 18, 102
- boost*, 82
  - expressão explícita para o, 83
- campos
  - spin-vetoriais, 14
  - escalares, 14
- Cartan-Dieudonné, teorema de, 45
- comutador, 53
- cone de luz, 6
- conjugação, 29
- contração, 29
- conforme
  - aplicação, 6
  - compactificação, 106
  - grupo, 107, 112
  - transformação, 105, 110
- congruência de Robinson, 23, 24, 114
- coordenadas,
  - projetivas, 7
  - homogêneas, 10
- correlação, 26
- de Sitter,
  - grupo de, 3
  - grupo de anti-
- Dirac,
  - teoria de, 85
  - equação de, 86
    - em termos de spinors de Weyl, 98, 99
    - em termos de spinors de Pauli, 99
- Dirac-Hestenes, equação de, 86
- direção nula, 5
- eletromagnetismo, 88
- esfera
  - $S^n$ , 107
  - de Riemann, 5, 8
  - rotação da, 9
- espaço
  - dual, 11
  - projetivo, 7
  - quadrático, 33
  - sesquidual, 11
  - spin, 11
  - tempo de Minkowski, 5, 25
    - métrica do, 13, 100
    - vetores do, 13, 100
- Euler,
  - ângulos de 9, 10
- formas, 28
- função de onda, 10
- grupo,
  - de Clifford-Lipschitz, 47, 48

- simétrico, 27
- simplético, 74, 77
- Pin, 50, 51
- Spin, 50, 51, 109, 110
- \$pin, 72, 76
- helicidade, 23
- hipertoro, 107
- Hodge,
  - isomorfismo de, 31
  - operador dual de, 31, 60
- homomorfismo, 50
- ideal, 31
- idempotente, 31
  - primitivo, 31
- índice abstrato, 11
- Infeld-van der Waerden, símbolos de 15
- inversão 111
- isometria, 45
- Klein, absoluto de, 106, 108, 109
- Leibniz, regra de 29
- Lorentz
  - força de, 90, 91, 92
  - grupo de, 9, 15
  - transformação de, 9, 81, 82
- matrizes de Pauli, 61
- Maxwell, equações de, 88, 89
- métrica, 30, 101
  - spinorial, 94, 95, 103
- mexors, 119
- Möbius
  - grupo de, 107
  - transformação de, 8, 105, 109
- módulo, 14
- momento 18,
  - angular 21
- momentum*, 21, 90
- neurogeometria, 3
- ondas planas, 87
- operador
  - de aniquilação, 36, 37
  - de criação, 36, 37
  - nabla, 62
  - de paridade, 86
- orientação, 23, 113,
- ortogonal,
  - transformação, 45, 46
  - grupo, 45
  - simetria, 46
- parabivetor, 80, 83
- paratrivetor, 80
- paravetor, 80, 100, 101, 102, 107, 108
  - automorfismos paravetoriais, 80
- periodicidade,
  - teorema da, 39, 44, 105, 106
- Poincaré
  - representação chiral do grupo de, 116, 117
- pólo, 18, 102
  - norte, 6, 7
- produto
  - exterior, 27
  - semidireto, 116
  - tensorial, 12, 27
  - vetorial, 60
- projeção estereográfica, 6
- pseudoescalar, 28
- quaternions, 43, 63, 66
- Radon-Hurwitz, números de, 32
- reflexão, 46
- representação, 15, 41
  - adjunta, 47
  - adjunta contorcida, 47
  - de Dirac, 67, 68, 69
  - espaço de, 15
  - equivalente, 16
  - graduada irredutível, 56, 57, 58
  - irredutível, 41
  - não-equivalente, 16
  - redutível, 41
  - de Weyl, 67, 70, 71, 72
- robótica, 3, 121
- rotação, 64, 107, 111
- screws, 118, 119
- spin, 10
  - autoestados de, 10
- spinor, 18

- 2-spinor, 15
- algébrico, 55, 115
- auto-, 90
- clássico, 54, 56
- contravariante,
  - de Dirac, 17, 85, 98
    - adjunto 113,
  - generalizado, 15
  - operatorial, 56
  - de Pauli, 65
  - projetivo, 10
  - transposto, 113
  - valência do, 15
  - de Weyl, 15, 16, 93
    - pontuado, 16, 94, 96, 103
    - apontuado, 16, 94, 96, 103
  - covariante,
    - pontuado, 17, 95, 96
    - apontuado, 17, 95, 96
- spinorial,
  - transformação, 8, 97
  - operação, 11
  
- translação, 107, 111
- tétrade nula, 13
- transversão, 107, 111
  
- twistor, 20, 115
  - espaço projetivo, 25
  - espaço-dual, 22
  - espaço projetivo, 25
  - incidente, 20
  - equação do, 20
  - equação conjugada do, 23
  - produto interno, 22, 114
    - grupo de isometria do, 22
  - de referência, 113
  
- velocidade própria 84
- vetor
  - nulo, 5
  - spin, 5, 12
  
- Wedderburn,
  - decomposição algébrica de, 41, 42