

Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
Departamento de Matemática Aplicada.

Provas bijetivas através de nova representação matricial para partições

Autor: Robson da Silva¹
Doutorado em Matemática Aplicada

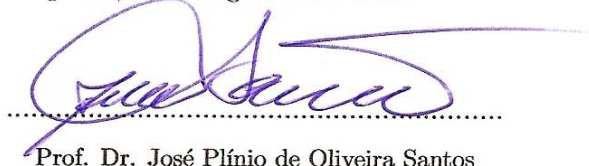
Orientador: Prof. Dr. José Plínio de O. Santos

¹Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

Provas bijetivas através de nova representação matricial para partições

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Robson da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de agosto de 2009.



Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Prof. Dr. Ricardo Dahab

Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter

Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8/5094**

Silva, Robson da
Si38p Provas bijetivas através de nova representação matricial para
partições / Robson da Silva -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : José Plínio de Oliveira Santos
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Funções geradoras. 3. Análise
combinatória. 4. Identidades combinatórias. I. Santos, José Plínio de
Oliveira. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Bijective proofs through new matricial representation for partitions.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partitions. 2. Generating functions.
3. Combinatorial analysis. 4. Combinatorial identities.

Área de concentração: Matemática Discreta.

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada.

Banca examinadora: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ricardo Dahab (IC-UNICAMP)
Prof. Dr. Jayme Luiz Swarcfiter (UFRJ)
Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho (UNB)
Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)

Data da defesa: 21/08/2009

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática Aplicada.

Tese de Doutorado defendida em 21 de agosto de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



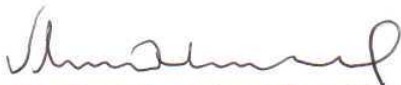
Prof(a). Dr(a). RICARDO DAHAB



Prof(a). Dr(a). JAYME LUIZ SZWARCFITER



Prof(a). Dr(a). HEMAR TEIXEIRA GODINHO



Prof(a). Dr(a). VILMAR TREVISAN

Agradecimentos

Agradeço muito ao professor Plínio por todos esses anos de trabalho conjunto e, especialmente, pela presente tese. Sua orientação, sempre paciente e atenciosa, foi decisiva para a obtenção dos resultados aqui apresentados. Estou certo de que, mais do que um orientador, eu tenho agora um parceiro para muitos trabalhos que ainda virão.

Sem dúvida alguma este trabalho não teria sido realizado sem o apoio de minha família, especialmente no início dos estudos quando decidi me enveredar pela Matemática. À minha esposa Ana, aos meus pais Joel e Marta e aos meus irmãos Wagner, Rogério e Wanderson serei sempre grato.

Um agradecimento especial deve ser feito à minha querida Ana que, além de estar ao meu lado, sempre me fortalece nos momentos difíceis e muito ajudou nesta caminhada até aqui.

À Ana e aos meus pais agradeço e dedico este trabalho.

Resumo

No presente trabalho, apresentamos provas bijetivas para algumas identidades. A principal ferramenta utilizada é a representação para partições como matrizes de duas linhas introduzida em [9] e [10]. Também apresentamos algumas consequências desta representação e a extendemos à outros casos. Uma prova bijetiva para uma identidade envolvendo os Números Triangulares é apresentada ao final.

Abstract

In this work, we show bijective proofs for some identities. The main tool is the two-line matrix representation for partitions introduced in [9] and [10]. We also present some consequences of this representation and we also extend it to other cases. A bijective proof for an identity involving the Triangular Numbers is given at the end.

Introdução

Em [9] e [10] uma nova forma de se representar partições como matrizes de duas linhas é apresentada. A maneira de se obter essas representações matriciais é exemplificada nos Capítulos 1 e 2 desta tese. Vale mencionar que esta nova forma de olhar para partições está se mostrando útil e permitindo a obtenção de resultados muito interessantes. Em nosso trabalho, procuramos obter aplicações desta representação para partições e também vamos estendê-la para séries com coeficientes negativos e positivos.

No Capítulo 1, relembramos algumas definições sobre partições e funções geradoras que serão utilizadas ao longo do texto. Ainda neste capítulo, recordamos brevemente a idéia de se representar partições como matrizes de duas linhas. Um estudo mais detalhado sobre esta nova representação para partições pode ser encontrada em [9] ou em [10].

Uma primeira consequência que obtivemos está no Capítulo 2. Trata-se de um artigo já aceito para publicação e cujo resultado principal é uma prova bijectiva para uma identidade na qual aparece a função geradora para partições nas quais as partes ímpares são distintas e maiores do que 1. Ao final deste artigo, apresentamos uma interpretação combinatória em termos de matrizes de duas linhas para uma outra identidade sem, no entanto, termos obtido ainda uma prova bijectiva para esta identidade.

No Capítulo 3, várias provas bijectivas são apresentadas. Este é um artigo submetido para publicação que contou com a participação fundamental do professor Dr Eduardo Brietzke (Universidade Federal do Rio Grande do Sul). Neste trabalho, entre outras provas bijectivas, apresentamos uma nova prova para uma Identidade de Lebesgue e, também, uma prova bijectiva para uma identidade envolvendo os chamados Gráficos 3-quadrantes de Ferrers.

Os Capítulos 4 e 5 trazem algumas novas consequências que temos obtido

usando a representação matricial para partições. No Capítulo 4, duas bijeções entre conjuntos de partições são exibidas. Vale mencionar que as tais bijeções não são triviais, mas com o emprego da representação matricial ela fica natural. Ainda neste capítulo, na última seção apresentamos a representação matricial para partições em partes ímpares sem saltos (todos os ímpares menores do que a maior parte ímpar aparecem como parte). Já no Capítulo 5, obtivemos interpretações combinatórias para quatro das chamadas *Mock Theta Functions* em termos de matrizes de duas linhas.

No Capítulo 6, estendemos o que está feito em [9] para certas somas cujos coeficientes nas expansões em séries de potências são inteiros não apenas positivos, mas também negativos. Fazemos essa extensão obtendo interpretações combinatórias para outras *Mock Theta Functions*. Vale mencionar que há uma grande quantidade de identidades envolvendo tais somas.

No capítulo final, diferentemente do restante deste trabalho, exibimos uma prova bijetiva para uma identidade envolvendo os Números Triangulares sem fazer uso da representação matricial para partições. Trabalhamos apenas com os Gráficos de Ferrers para partições. Essa demonstração relembra aquela obtida por F. Franklin em 1881 para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler (ver [6]).

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Introdução	ix
1 Representando partições como matrizes de duas linhas	1
1.1 Partições	1
1.2 Representando partições como matrizes de duas linhas	4
2 A combinatorial proof for an identity involving partitions with distinct odd parts	7
1 Introduction	8
2 The combinatorial interpretation	9
3 The combinatorial proof	11
3 Bijective proofs using the two-line matrix representations for partitions	17
1 Representation of partitions by two-line matrices	19
2 A combinatorial proof for an identity involving three-quadrant Ferrers graphs	26
3 Three identities and related bijections between certain classes of partitions	32
4 A new bijective proof for the Lebesgue Identity	47
5 Main bijection	51
4 Algumas bijeções entre conjuntos de partições	59

1	Uma bijeção envolvendo partições em partes $\equiv 2(\text{mod } 4)$	60
2	Uma bijeção envolvendo partições cujas partes diferem por pelo menos 2	64
3	Uma representação como matrizes de duas linhas para partições em partes ímpares sem saltos	66
5	Interpretações combinatórias para algumas das <i>Mock Theta Functions</i>	69
1	Introdução	69
2	Interpretação combinatória para $\psi(q)$	70
3	Interpretação combinatória para $F_0(q)$	73
4	Interpretação combinatória para $F_1(q)$	75
5	Interpretação combinatória para $\rho(q)$	77
6	Estendendo a representação como matrizes de duas linhas para séries com coeficientes negativos e positivos	79
1	Introdução	79
2	Interpretação combinatória para $\phi(q)$	80
3	Interpretação combinatória para $f_0(q)$	82
4	Interpretação combinatória para $f_1(q)$	83
5	Interpretação combinatória para $R(q)$	84
7	On a combinatorial proof for an identity involving the triangular numbers	87
8	Conclusão	93
	Referências bibliográficas	95

Capítulo 1

Representando partições como matrizes de duas linhas

A intenção deste capítulo é apresentar ao leitor definições de algumas ferramentas que usamos ao longo do texto. Relembramos, por exemplo, o que é uma partição de um inteiro positivo, algumas funções geradoras para certos conjuntos de partições e, principalmente, a idéia, introduzida em [9] e [10], de se representar partições como matrizes de duas linhas satisfazendo certas propriedades.

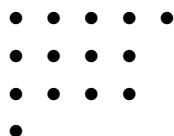
1.1 Partições

Definição 1.1 *Uma partição de um inteiro positivo n é uma representação deste número como soma de inteiros positivos. Cada inteiro positivo que aparece nesta soma é chamado de parte da partição.*

Exemplo: As partições de 5 são:

5
4 + 1
3 + 2
3 + 1 + 1
2 + 2 + 1
2 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1

Podemos também representar graficamente uma partição. A maneira mais comum de se fazer isso é através dos *Gráficos de Ferrers*. Vejamos como construir essa representação por meio de um exemplo. Considere a partição $5 + 4 + 4 + 1$ do número 14. Seu Gráfico de Ferrers é:



ou seja, colocamos 5 pontos na primeira linha, 4 na segunda e terceira linhas e 1 ponto na quarta linha, sempre começando da esquerda para a direita.

A importância do Gráfico de Ferrers de uma partição vai muito além de uma simples representação. Podemos usar essa representação para provar teoremas envolvendo partições, como no teorema a seguir ou mesmo no último capítulo deste trabalho.

Teorema 1.1 *Seja n um inteiro positivo. O número de partições de n em no máximo k partes é igual ao número de partições de n nas quais as partes são menores do que ou iguais a k .*

A demonstração deste teorema é extremamente simples usando os Gráficos de Ferrers das partições, tudo o que precisamos fazer é refletir o gráfico em torno da diagonal principal (reta $y = x$): o que antes era o número de partes passa a ser a maior parte e vice-versa.

O *Quadrado de Durfee* de uma partição é o tamanho do lado do maior quadrado que podemos colocar dentro do Gráfico de Ferrers da partição de modo que um dos vértices do quadrado fique no canto superior esquerdo do gráfico. Por exemplo, o Quadrado de Durfee da partição acima tem lado 3.

Um outro conceito de grande importância no desenvolvimento deste trabalho são as *funções geradoras para partições* que definimos agora.

Definição 1.2 *Dizemos que $f(q)$ é uma função geradora para uma sequência $(a_0, a_1, \dots)$ se, na expansão de $f(q)$ em série de potências, o coeficiente de q^n é a_n .*

Exemplo: A função geradora para partições cujas partes são distintas é

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^k).$$

Isso pode ser facilmente verificado se pensarmos que no termo $(1 + q^k)$ podemos ou não escolher a parte k e, caso escolhamos usar a parte k podemos fazer isso no máximo uma vez.

Exemplo: A função geradora para partições em partes ímpares é

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2k+1})} = (1 + q^1 + q^{2 \times 1} + q^{3 \times 1} + \dots)(1 + q^3 + q^{2 \times 3} + q^{3 \times 3} + \dots) \dots$$

De fato, se quisermos, por exemplo, obter a partição $3 + 3 + 1$ escolhemos o termo q^1 em $(1 + q + q^{2 \times 1} + q^{3 \times 1} + \dots)$ e $q^{2 \times 3}$ em $(1 + q^3 + q^{2 \times 3} + q^{3 \times 3} + \dots)$ e 1 nos demais termos.

As seguintes notações serão empregadas ao longo do texto para simplificar as expressões:

$$(a; q^k)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (1 - a)(1 - aq) \dots (1 - aq^{k(n-1)}), & n > 0 \end{cases}$$

$$(a; q^k)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q^k)_n$$

$$(a)_n = (a; q)_n,$$

sempre considerando $|q| < 1$.

Objetos de grande interesse em Combinatória são identidades do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \frac{1}{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}} \quad (1.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q; q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{4n-1})(1 - q^{4n-3})(1 - q^{4n})(1 + q^n)}{(1 - q^n)}$$

Nosso interesse aqui é obter interpretações combinatórias para as somas que aparecem nessas identidades. Depois, podemos tentar obter uma demonstração combinatória para a identidade usando essa interpretação e sabendo qual é o conjunto de partições gerado pelo outro lado da identidade.

1.2 Representando partições como matrizes de duas linhas

A intenção desta seção é apresentar ao leitor o principal conceito que usaremos ao longo deste trabalho. Aqui relembramos a nova forma de representar partições como matrizes de duas linhas introduzida em [9] e [10]. Como veremos no presente trabalho, esta representação matricial revela-se muito interessante, útil e prática.

Vamos tomar como exemplo a Identidade (1.1). Como está muito bem detalhado em [9] e [10], a idéia é introduzir parâmetros na soma em (1.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^k)_n}.$$

Depois de feita a escolha da introdução dos parâmetros, prova-se um teorema como o seguinte.

Teorema: *Seja $f(n)$ o número de partições de n da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$ com $\lambda_t \in \{ck + dj \mid c, d \geq 0\}$, $c_s = 1$ e tal que, para partes consecutivas $c_t k + d_t j$ e $c_{t+1} k + d_{t+1} j$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^k)_n}. \quad (1.2)$$

Agora, considerando $k = j = 1$, sabemos que a soma no lado direito de (1.2) é aquela que aparece em (1.1). Além disso, sabemos que o produto no lado direito de (1.1) é a função geradora para partições nas quais a diferença entre duas partes é de pelo menos 2. Assim, colocando cada parte $\lambda_t = c_t k + d_t j$ como a t -ésima coluna de uma matriz de duas linhas, obtemos o seguinte resultado.

Corolário: *O número de partições de n onde a diferença entre duas partes é no mínimo 2 é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

sendo $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas igual a n .

Em alguns casos consegue-se apresentar uma prova bijetiva para corolários como este acima. Dada uma matriz da forma apresentada no corolário acima, tudo o que devemos fazer é somar as entradas em cada coluna para formar uma

parte. Não é difícil verificar que estas partes diferem de pelo menos 2. Por outro lado, dada uma partição $\lambda_1 + \dots + \lambda_s$ cujas partes diferem de pelo menos 2, colocamos $c_s = 1$ e escolhemos d_s de modo que $\lambda_s = 1 + d_s$, depois colocamos $c_{s-1} = 3 + d_s$ e escolhemos d_{s-1} de modo que $\lambda_{s-1} = c_{s-1} + d_{s-1}$ e assim por diante. Por exemplo, à partição $15 = 9 + 4 + 2$ está associada a matriz $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e vice-versa.

No capítulo a seguir, bem como em [9] e [10], temos em detalhe como tudo isso é feito. Vale ressaltar que, como já mencionado, procuramos neste trabalho extrair consequências desta representação.

Capítulo 2

A combinatorial proof for an identity involving partitions with distinct odd parts

Neste capítulo apresentamos uma prova combinatória para uma identidade envolvendo partições nas quais as partes ímpares são distintas e maiores do que 1. Este é um primeiro resultado que obtivemos usando a representação matricial para partições. Os resultados apresentados aqui fazem parte de um artigo aceito para publicação em *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.

Vale mencionar que essa prova bijetiva foi obtida depois de muita tentativa de se demonstrar a Identidade (2.4) que aparece ao final do artigo. A Identidade (2.4) aparece em [8], onde se pode ler que essa identidade carece de uma prova combinatória. Daí nosso grande interesse em prová-la.

Nas Seções 1 e 3 do artigo a seguir, procedemos como em [9] e [10]. Como consequência, usando a interpretação combinatória obtida, apresentamos a prova combinatória da identidade envolvendo partições nas quais as partes ímpares são distintas e maiores do que 1. Na última seção, exibimos a interpretação combinatória para a soma na Identidade (2.4).

A combinatorial proof for an identity involving partitions with distinct odd parts

Jose Plínio O. Santos, Robson da Silva,

IMECC-UNICAMP, C.P. 6065, 13084-970-Campinas-SP, Brazil

E-mails: josepli@ime.unicamp.br robson@ime.unicamp.br

Abstract: We follow Santos et al [10] idea to present a combinatorial interpretation for a sum and provide a bijective proof for an identity involving the number of partitions of an integer in which the odd parts are distinct and greater than 1.

Keywords and Phrases: Partitions, identities

2000 AMS Subject Classification: 11P81, 05A19

1 Introduction

In this article we present a bijective proof for the following identity

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{2n}}{(q^2; q^2)_n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 + q^{2n+3}}{1 - q^{2n+2}}, \quad (2.1)$$

where $(a; b)_n = (1 - a)(1 - ab)(1 - ab^2) \cdots (1 - ab^{n-1})$.

This identity can be obtained from the equation 2.2.7 (see Andrews [1], p. 19)

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b - a)(b - aq) \cdots (b - aq^{n-1}) z^n}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^n)} \\ = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - azq^n)}{(1 - bzq^n)}, \end{aligned}$$

by replacing q by q^2 and putting $a = -q, b = 1$ and, finally, $z = q^2$:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q)(1 + q^3) \cdots (1 + q^{2n-1}) q^{2n}}{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2n})} \\ = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + q^{2n+3})}{(1 - q^{2n+2})}, \end{aligned}$$

which can be written as

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{2n}}{(q^2; q^2)_n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 + q^{2n+3}}{1 - q^{2n+2}}$$

and, considering that $\frac{(-q; q^2)_n q^{2n}}{(q^2; q^2)_n} = 1$ if $n = 0$, we have (2.1).

As in [10], we introduce parameters k and j in the LHS of (2.1) to obtain a combinatorial interpretation for the sum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{2nk}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}. \quad (2.2)$$

The special case $k = j = 1$ enable us to give a bijective proof for (2.1).

2 The combinatorial interpretation

In the theorem below we give a combinatorial interpretation for (2.2). In order to do that we define, for k and j positive integers, $A_{k,j} = \{ck + dj | c, d \geq 0\}$.

Theorem 2.1 *Let $f(1) = 1$ and, for $n \geq 2$, $f(n)$ be the number of partitions of n into parts belonging to $A_{k,j}$ of the form $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 2$ or 3 , $d_t \equiv 0 \pmod{2}$ where for consecutive parts λ_t and λ_{t+1} we have*

- *if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$;*
- *if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;*
- *if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;*
- *if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$.*

Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{2nk}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}.$$

Proof: Let $f(m, n)$ be the number of partitions enumerated by $f(n)$ having exactly m parts. Then the following recurrence relation is satisfied by $f(m, n)$:

$$\begin{aligned} f(m, n) = & f(m, n - 2km + 2k - 2j) \\ & + f(m - 1, n - 2k) \\ & + f(m - 1, n - 2km - k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

To prove (3) we split the partitions enumerated by $f(m, n)$ into three disjoint sets:

1. those for which $d_s \neq 0$;
 2. those for which $2k$ is a part;
 3. those for which $3k$ is a part.
- from those in the set 1. we subtract $2j$ from the smallest part and $2k$ from the $m-1$ remaining parts. By doing this we are left with partitions of $n-2k(m-1)-2j$ in m parts that are enumerated by $f(m, n-2km+2k-2j)$;
 - from those partitions in the set 2. we subtract the part $2k$. Then, we obtain partitions of $n-2k$ in $m-1$ parts that are enumerated by $f(m-1, n-2k)$;
 - from those in the set 3. we subtract the part $3k$ and $2k$ from the other parts obtaining the partitions of $n-2k(m-1)-3k$ in $m-1$ parts that are enumerated by $f(m-1, n-2km-k)$.

Assuming that $f(0, n) = 0$ if $n > 0$, $f(0, 0) = 1$ and $f(l, n) = 0$ if $l < 0$, we define:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n.$$

By (3), we have

$$\begin{aligned}
F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n-2km+2k-2j) z^m q^n \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m-1, n-2k) z^m q^n \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m-1, n-2km-k) z^m q^n \\
&= q^{2j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n-2km+2k-2j) q^{2km} z^m q^{n-2km+2k-2j} \\
&\quad + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m-1, n-2k) z^{m-1} q^{n-2k} \\
&\quad + zq^{3k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m-1, n-2km-k) z^{m-1} q^{2k(m-1)} q^{n-2km-k} \\
&= q^{2j-2k} F(zq^{2k}, q) + zq^{2k} F(z, q) + zq^{3k} F(zq^{2k}, q).
\end{aligned}$$

Let $h(m, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(m, n) q^n$, then $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$ and

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= q^{2j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (z q^{2k})^n \\
&\quad + z q^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n \\
&\quad + z q^{3k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (z q^{2k})^n.
\end{aligned}$$

Comparing the coefficient of z^n in the last equality we have

$$\begin{aligned}
h(n, q) &= q^{2k(n-1)+2j} h(n, q) + q^{2k} h(n-1, q) \\
&\quad + q^{2kn+k} h(n-1, q).
\end{aligned}$$

Then,

$$h(n, q) = \frac{q^{2k}(1 + q^{2kn-k})h(n-1, q)}{1 - q^{2k(n-1)+2j}}.$$

Observing that $h(0, q) = 1$, we have

$$\begin{aligned}
h(n, q) &= \frac{q^{2k}(1 + q^{(2n-1)k})}{1 - q^{2k(n-1)+2j}} \frac{q^{2k}(1 + q^{(2n-3)k})}{1 - q^{2k(n-2)+2j}} \dots \\
&\quad \dots \frac{q^{2k}(1 + q^k)h(0, q)}{1 - q^{2j}} = \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{2kn}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{2kn}}{(q^{2j}; q^{2k})_n} z^n.$$

To finish the proof we put $z = 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) q^n \\
&= F(1, q) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{2kn}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}.
\end{aligned}$$

□

3 The combinatorial proof

It will be more appropriate for us to rewrite this theorem using a two-line notation as follows:

Theorem 3.1 *The generating function for matrices of the form*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & \cdots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & \cdots & d_s \times j \end{pmatrix},$$

where c_t and d_t satisfy $c_s = 2$ or 3 , $d_t \equiv 0 \pmod{2}$ and

- if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$,

is given by

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{2nk}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}.$$

Now, by taking $k = j = 1$ in this theorem and considering that the RHS of (2.1) is the generating function for partitions where the odd parts are distinct and greater than 1, we have the combinatorial interpretation for the identity (2.1) which is given in the next theorem. The proof we present is a bijective one.

Theorem 3.2 *The number of partitions of n where the odd parts are distinct and greater than 1 is equal to the number of matrices of the form*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

where c_t and d_t satisfy $c_s = 2$ or 3 , $d_t \equiv 0 \pmod{2}$ and

- if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$,

with the sum of all entries equals to n .

Proof: In order to construct the bijection we associate to each two-line matrix

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

a partition $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ by just adding the columns: $\lambda_t = c_t + d_t$. For example, the matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is associated with $5 + 2 + 2$.

Now we have to explain why by adding columns we get a partition where the odd parts are distinct and greater than 1. Observing how the two-line matrices are constructed we have that the entries of the second line are even numbers. For this reason the parity of each part obtained adding the entries in each column is given by the entry of the first line. So, it is impossible to have two consecutive odd parts $\lambda_t = c_t + d_t$ and $\lambda_{t+1} = c_{t+1} + d_{t+1}$ that are equal because we have $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ in this case. As we begin with $c_s = 2$ or 3 , each part obtained adding the entries in each column will be greater than 1.

We describe next how to go from a partition where the odd parts are distinct and greater than 1 to a two-line matrix.

1. we start at the end of the first line putting 2 or 3 if λ_s is even or odd, respectively. Then, we complete the column with an even number d_s such that the sum of the entries of this column is equal to λ_s . So the last column is uniquely determined.
2. in order to create the second column, we must observe the parity of λ_{s-1} and λ_s because c_{s-1} and c_s have to satisfy the hypotheses above. For example, if c_{s-1} and c_s are both odd, then $c_{s-1} = 2 + c_s + d_s$ and we complete this column by choosing an even number d_{s-1} such that $\lambda_{s-1} = c_{s-1} + d_{s-1}$. It is not difficult to see that there is only one way to fill the column up.
3. to build the previous column we observe the parity of λ_{t-1} and λ_t following the procedure described in item 2.

With this explanation we finished the proof. $\square$

We present, below, examples for $n = 8$ and $n = 9$ of the bijection described in Theorem 3. The left column has the two-line matrices representations and in the right column the partition in which the odd parts are distinct and greater than 1.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$	8
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	6+2
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	5+3
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	4+4
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4+2+2
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2+2+2+2

Tabela 2.1: The matrices and partitions for $n = 8$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$	9
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	7+2
$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	6+3
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	5+4
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	5+2+2
$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4+3+2
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3+2+2+2

Tabela 2.2: The matrices and partitions for $n = 9$

In [8] Igor Pak asks for a combinatorial proof for the identity

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n^2} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 + q^{2n+1}}{1 - q^{2n+2}}. \quad (2.4)$$

By inserting parameters in this sum we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^k; q^{2k})_n q^{kn^2}}{(q^{2j}; q^{2k})_n (q^{2k}; q^{2k})_n}. \quad (2.5)$$

Using the ideas described in this paper we have the following interpretation for this sum: *the coefficient of q^n in (5) is the number of partition $\lambda_1 + \dots + \lambda_s$ of n in which $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s \geq 1$, $d_t \equiv 0 \pmod{2}$ and*

- *if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t \geq 4 + c_{t+1} + d_{t+1}$;*
- *if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t \geq 3 + c_{t+1} + d_{t+1}$;*
- *if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t \geq 3 + c_{t+1} + d_{t+1}$;*
- *if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$,*

We hope to be able to find a combinatorial proof for (4) using the ideas described in this paper.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews, G.E., *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Rota, Editor), Vol. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [2] Pak, I., *Partition Bijections, a Survey*, Ramanujan Journal, vol. 12, 5-75, 2006.
- [3] Santos, J.P.O., Mondek, P., Ribeiro, A.C., *New two line arrays representing partitions*, Annals of Combinatorics, accepted.

Capítulo 3

Bijjective proofs using the two-line matrix representations for partitions

Neste capítulo apresentamos provas bijetivas para várias identidades, sempre usando a representação matricial para partições introduzida em [9] e [10]. Este é um artigo que foi submetido para publicação (*Ramanujan Journal*) e que teve a participação fundamental do professor Dr. Eduardo Brietzke da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Uma das identidades provadas está relacionada com os chamados *Gráficos 3-quadrantes de Ferrers*. Sua demonstração faz uso do resultado do artigo que está no capítulo anterior¹.

Vale destacar ainda um importante resultado. Uma nova prova combinatória é apresentada para uma Identidade de Lebesgue.

¹Essa prova bijetiva difere daquela apresentada por G. Andrews (ver [3]) por não fazer uso de funções geradoras e também por ser muito simples

Bijjective proofs using two-line matrix representations for partitions

EDUARDO H. M. BRIETZKE

brietzke@mat.ufrgs.br

Instituto de Matemática, UFRGS C.P. 15080, 90509-900 Porto Alegre-RS, Brazil

JOSÉ PLÍNIO O. SANTOS

josepli@ime.unicamp.br

IMECC-UNICAMP, C.P. 6065, 13084-970 Campinas-SP, Brazil

ROBSON da SILVA

robson@ime.unicamp.br

IMECC-UNICAMP, C.P. 6065, 13084-970 Campinas-SP, Brazil

Dedicated to George Andrews for his 70-th birthday

Abstract. In this paper we present bijective proofs of several identities involving partitions by making use of a new way for representing partitions as two-line matrices. We also apply these ideas to give a combinatorial proof for an identity related to three-quadrant Ferrers graphs.

Key words: Combinatorial identities, Lebesgue Identity, Three-quadrant Ferrers Graph.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary–11P81; Secondary–05A19

Introduction

In this paper we present a number of results by making use of a new way of representing partitions as two-line matrices introduced in [8]. As one will see, one of the new notations for unrestricted partitions has more explicit informations on the conjugate partition than what is given by the well-known Frobenius' symbol.

In Section 1, we present basically three distinct notations for unrestricted partitions that are given in [8]. In Section 2, we construct a bijection between the set of partitions into distinct odd parts with no parts equal to 1 and the set of self-conjugate three-quadrant Ferrers graphs. In the third one, we present combinatorial proofs for three identities and we establish bijections between several classes of partitions. One of the results resembles the Euler Pentagonal Number Theorem and another one is related to Ramanujan's partial theta function. In the final section, we provide a new bijective proof for the Lebesgue Identity based on the two-line matrix representation

for partitions.

1 Representation of partitions by two-line matrices

A very well-known representation of a partition by a two-line matrix is by means of the Frobenius' symbol. The purpose of this section is to recall three different ways of representing partitions given in [8]. The main motivation for these representations comes from results obtained in [8].

Theorem A. (Theorem 8, [8]) *The number of unrestricted partitions of n is equal to the number of two-line matrices of the form*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

where

$$\begin{aligned} c_k &= 0, \quad d_k \neq 0, \\ c_t &= c_{t+1} + d_{t+1}, \quad \text{for any } t < k, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A natural bijection between the two sets is given in [8]. Indeed, there are two different natural bijections between unrestricted partitions and two-line matrices satisfying (3.1). Perhaps the best way to describe them is by an example.

First bijection. The number k of columns of the matrix corresponds to the number of parts of the partition.

Consider, for example, the partition $\lambda = (6, 5, 2, 2)$ of 15. We associate to λ a 2×4 matrix A of the form given in Theorem A in such a way that the sum of the columns of A are the parts of λ . We have no choice for the fourth column, but to pick $c_4 = 0$ and $d_4 = 2$. Since c_3 must be 2 and the entries of the third column must add up to 2, then $d_3 = 0$. By the same argument, we must have $c_2 = 2$ and $d_2 = 3$. Also, $c_1 = 5$ and $d_1 = 1$. The representation is

$$\lambda = 6 + 5 + 2 + 2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

To go from the matrix to the partition, we only have to add the columns. As explained in [8], the second line of the matrix provides a complete description of the partition λ' conjugate to λ . In the above example, the second row $(1, 3, 0, 2)$ indicates that λ' contains one 1, three 2's, no 3's and two 4's.

Second bijection. The number k of columns of the matrix corresponds to the largest part of the partition.

To any positive integer j , we associate a $2 \times j$ matrix with the first $j - 1$ entries equal to 1 in the first row, the last entry in the second row equal to 1, and the remaining entries equal to 0. For example, we have

$$1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

If $j \leq k$, given a $2 \times j$ matrix A and a $2 \times k$ matrix B we perform the sum $A + B$ as if $k - j$ zero columns were added to the right of A . To the partition $\lambda = (6, 5, 2, 2)$ considered before, for instance, we associate the matrix

$$\begin{aligned} 6 + 5 + 2 + 2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note that by doing this we get adding up the columns the conjugate partitions and as before the second line has a description for the given partition saying that there is no 1's, two 2's, no 3's, no 4's, one 5 and one 6.

We now present two new bijections between unrestricted partitions of n and certain classes of two-line matrices. It is shown in [8] that these sets have the same number of elements, but a natural bijection between them is not presented.

In [8], for positive integers k and j a set of nonnegative integers is defined by

$$A_{k,j} = \{ck + dj \mid c, d \geq 0\}.$$

Theorem B. (Theorem 11, [8]) *Let $f(n)$ be the number of partitions of n of the form $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, with $\lambda_r \in A_{k,j}$, $c_s \neq 0$ and such that for $c_t k + d_t j$ and $c_{t+1} k + d_{t+1} j$*

consecutive parts, $c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$. Then,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^k)_n (q^k; q^k)_n}. \quad (3.2)$$

In the particular case $k = j = 1$, denoting by $p(n)$ the number of partitions of n , since

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n, \quad (3.3)$$

the following corollary is obtained.

Corollary C. (Corollary 12, [8]) *The number of unrestricted partitions of n is equal to the number of two-line matrices of the form*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_k \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

where

$$\begin{aligned} c_k &\neq 0, \\ c_t &\geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad \text{for any } t < k, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

We now explicitly construct a bijection between the set of matrices of the form (3.4) satisfying (3.5) and the set of unrestricted partitions. This provides a direct proof of Corollary C.

Construction of a first bijection. We now construct a natural bijection between the set of unrestricted partitions of n and the set of matrices of the form (3.4) with non-negative integer entries satisfying (3.5).

It suffices, for each $k \geq 1$ fixed, to establish a bijection between the set of unrestricted partitions of n with Durfee square with side k and the set of matrices described above with the additional requirement that the matrix should have k columns.

For instance, a partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ (as usual we suppose $\lambda_t \geq \lambda_{t+1}$) with Durfee square of side 3 is completely characterized once we declare how many times each one of the numbers 1, 2, and 3 appear as parts of λ , and if we also know the three largest parts λ_1, λ_2 e λ_3 of λ . We have to associate to λ a 2×3 matrix that gives a clue of these six numbers. Let

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

be such a matrix. By (3.5) we can write

$$c_3 = 1 + j_3, \quad (3.7)$$

$$c_2 = 3 + j_2 + j_3 + d_3 \quad (3.8)$$

$$c_1 = 5 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3. \quad (3.9)$$

with $j_1, j_2, j_3 \geq 0$. Hence, the matrix (3.6) may be rewritten as

$$\begin{pmatrix} 5+j_1+j_2+j_3+d_2+d_3 & 3+j_2+j_3+d_3 & 1+j_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

or, still, as the sum

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

From the above discussion, it follows that the partition λ can be characterized by the numbers

$d_1 \longrightarrow$ the number of times that 1 is a part of λ

$d_2 \longrightarrow$ the number of times that 2 is a part of λ

$d_3 \longrightarrow$ the number of times that 3 is a part of λ , not counting here eventual parts equal to 3 contained in the Durfee square

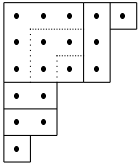
$j_1 \longrightarrow \lambda_1 - \lambda_2$, i.e., the number of times 1 is a part of the conjugate partition λ'

$j_2 \longrightarrow \lambda_2 - \lambda_3$, i.e., the number of times 2 is a part of λ'

$j_3 \longrightarrow \lambda_3 - 3$, i.e, the number of units that λ_3 exceeds the side of the Durfee square.

Note that the first three parts are completely determined: $\lambda_3 = 3 + j_3$, $\lambda_2 = 3 + j_2 + j_3$ and $\lambda_1 = 3 + j_1 + j_2 + j_3$.

Example 1. Consider the partition $\lambda = (5, 4, 4, 2, 2, 1)$ of $n = 18$.



We decompose the Ferrers' graph of λ as shown in the picture,

taking into account the size of the Durfee square and the number of times 1, 2, and 3 are parts of λ and of the conjugate partition λ' .

In the present example, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 0$, $j_1 = 1$, $j_2 = 0$, and $j_3 = 1$. This decomposition suggests the sum of matrices below:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ from the Durfee square,}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ because 1 appears once and 2 ap-}$$

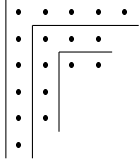
pears twice as parts of λ and

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ since 3 is twice part of } \lambda', \text{ but}$$

appears only once outside of the Durfee square and 1 is part of λ' only once.

Hence, the matrix corresponding to the partition λ is

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

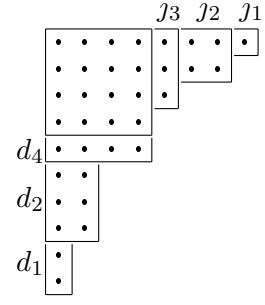


There is an easier way of obtaining the matrix-representation of the partition. We do not need to write out first the sum of matrices as done above. Indeed, in the example above, note that the sum of columns, 10, 6, and 2 are the length of the hooks shown in the picture to the left. In the second row, the entries 1 and 2 indicate the vertical displacement of the corresponding hook with respect to the previous one, and 0 indicates the vertical displacement of the last hook with respect to the bottom of the Durfee square.

The matrix $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ corresponds to the Durfee square. Note that the entries 5, 3, and 1 of the first row are precisely the number of elements each hook has in common with the Durfee square.

Example 2. Determine the partition represented by the matrix $\begin{pmatrix} 15 & 9 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

The Durfee square has side four and the length of the hooks are $15 + 2 = 17$, $9 + 3 = 12$, $5 + 0 = 5$, and $1 + 1 = 2$. In addition, the second row of the matrix indicates that the first hook starts two units below the second hook, which in turn initiates three units below the third hook, the third hook begins at the same level than the fourth one, and this last hook begins one unit below the bottom of the Durfee square. This is all we need to know the Ferres' graph of the partition, which is shown in the picture to the right. The corresponding partition is $\lambda = (8, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1)$.



We now undertake the construction of a second bijection between unrestricted partitions and two-line matrices. Again, our motivation is a result presented in [8].

Theorem D. (Theorem 9, [8]) *The generating function for matrices of the form*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & \cdots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & \cdots & d_s \times j \end{pmatrix},$$

where $d_t \neq 0$, $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ and the sum of all entries is equal to n , is given by the LHS of the identity

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2+(j-k)n}}{(q^j; q^k)_n (q^k; q^k)_n} = \frac{1}{(q^j; q^k)_{\infty}}. \quad (3.12)$$

In the particular case $k = j = 1$, using (3.3), the following result follows.

Theorem E. (Theorem 10, [8]) *The number of unrestricted partitions of n is equal to the number of two-line matrices of the form*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_k \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

where

$$\begin{aligned} d_t &\neq 0, \\ c_t &\geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}, \\ n &= \sum c_t + \sum d_t. \end{aligned} \quad (3.14)$$

In [8], the equinumerability expressed in Theorem E is established by a generating function technique, but a natural bijection between the two sets is not presented.

Construction of a second bijection. We now construct a natural bijection between the set of unrestricted partitions of n and the set of matrices of the form (3.13) with non-negative integer entries satisfying (3.14). We rewrite the condition $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ as

$$c_t = 1 + j_t + c_{t+1} + d_{t+1} \quad \forall t < k, \quad (3.15)$$

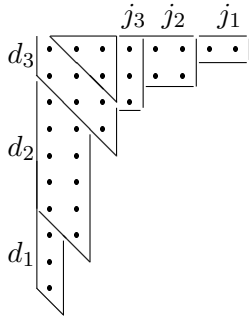
$$c_k = j_k, \quad (3.16)$$

$$j_t \geq 0. \quad (3.17)$$

In this case we also take $s = k$ and define a bijection between the set of unrestricted partitions of n with Durfee square of side k and the set of matrices of the form (3.13) satisfying (3.15), (3.16) and (3.17), in addition to (3.14), with k columns.

For example, if $k = 3$, then

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+j_1+j_2+j_3+d_2+d_3 & 1+j_2+j_3+d_3 & j_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_3 & j_3 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$



Compare (3.18) with the picture to the left. The entries d_1 , d_2 , and d_3 in the second row of the matrix are all nonvanishing and indicate the sizes of the subsets of the Ferrers' diagram in the picture. The elements in the first row of the matrix, in turn, indicate the number of units still necessary to complete the hooks. The j_t 's can vanish, but $d_t \neq 0$ for any t .

In the picture to the left, we show the example of the partition $\lambda = (8, 6, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$, for which $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$, $j_1 = 2$, $j_2 = 2$ and $j_3 = 1$. The matrix associated to this partition is

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

The correspondence described by (3.18) or, alternatively, in a pictorial manner in the above picture, provides a new representation of unrestricted partitions by matrices. As

with the representation obtained previously from (3.10), the number of columns in the matrix is equal to the side of the Durfee square of the partition.

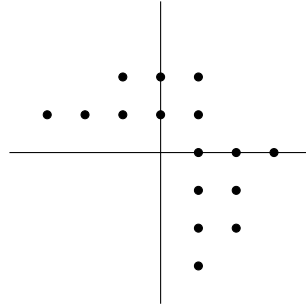
Note that by composition, we obtain a bijection between the set of matrices of the form (3.4) satisfying (3.5) and those satisfying (3.14). The bijection simply takes

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 - 1 & c_2 - 1 & \cdots & c_k - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & \cdots & d_k + 1 \end{pmatrix}.$$

2 A combinatorial proof for an identity involving three-quadrant Ferrers graphs

In [1], G. E. Andrews presented the three-quadrant Ferrers graphs as an extension of the two-quadrant Ferrers graphs. The three-quadrant Ferrers graphs of a positive integer n are constructed by placing n points in the first, second and fourth quadrants of the plane observing that each point must have at least one positive coordinate. We also require that the points on the x -axis and on the y -axis form the longest row and the tallest column among all rows and all columns in the set with positive x -coordinates and y -coordinates, respectively.

For example:



We recall from [1] that the self-conjugate three-quadrant Ferrers graphs are the ones that are unchanged by the mapping $(x, y) \mapsto (y, x)$. Let $s_3(n)$ denote the number of self-conjugate three-quadrant Ferrers graphs of n .

For example, the next two three-quadrant Ferrers graphs are self-conjugate:

impossible to have two equal consecutive odd parts $\lambda_t = c_t + d_t$ and $\lambda_{t+1} = c_{t+1} + d_{t+1}$, since we have $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ in this case. As we begin with $c_s = 2$ or 3 , each part, obtained by adding up the entries in corresponding column, is greater than 1.

We describe next how to go from a partition where the odd parts are distinct and greater than 1 to a two-line matrix satisfying the conditions above:

1. we start at the end of the first line, placing 2 or 3 if λ_s is even or odd, respectively. Then, we complete the column with an even number d_s such that the sum of the entries of this column is equal to λ_s . So the last column is uniquely determined.
2. in order to create the column just before the last one, we must observe the parity of λ_{s-1} and λ_s , because c_{s-1} and c_s have to satisfy the conditions above. For example, if c_{s-1} and c_s are both odd, then $c_{s-1} = 2 + c_s + d_s$ and we complete this column by choosing an even number d_{s-1} such that $\lambda_{s-1} = c_{s-1} + d_{s-1}$. It is not difficult to see that there is only one way to fill the column up.
3. to build the previous column we observe the parity of λ_{t-1} and λ_t and follow the procedure described in item 2.

For example, the table below presents the matrices and the partitions having odd parts distinct and greater than 1 for $n = 8$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$	8
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	6+2
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	5+3
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	4+4
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4+2+2
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2+2+2+2

Tabela 3.1: The matrices and partitions for $n = 8$

The bijective proof

It is convenient to rewrite the matrices of the form (3.20) as

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ 2d_1 & 2d_2 & \cdots & 2d_s \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

where c_t and d_t satisfy $c_s = 2$ or 3 and

- if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = c_{t+1} + 2d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 0 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2}$, then $c_t = 1 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$;
- if $c_t \equiv 1 \pmod{2}$ and $c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2}$, then $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$.

Due to the restrictions on c_t , we have $c_t = i_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, where $i_t \in \{0, 1, 2\}$, for $t = 1, 2, \dots, s-1$ and $c_s = 2 + i_s$, where $i_s = 0, 1$. We can split (3.21) as the sum

$$\begin{pmatrix} 2+i_1+\cdots+i_s+2d_2+\cdots+2d_s & \cdots & 2+i_{s-1}+i_s+2d_s & 2+i_s \\ & 2d_1 & \cdots & 2d_{s-1} & 2d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i_1+\cdots+i_s & \cdots & 2+i_{s-1}+i_s & 2+i_s \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} d_2+\cdots+d_s & \cdots & d_s & 0 \\ d_1 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}.$$

Note that the numbers $2 + i_1 + \cdots + i_s, \dots, 2 + i_{s-1} + i_s, 2 + i_s$ form a non increasing sequence ending in either 2 or 3 and that there is no gap in the odd numbers in this sequence (if $2k+1$ is in the sequence, then so is every odd integer between 3 and $2k+1$).

For example, the matrix

$$\begin{pmatrix} 26 & 22 & 19 & 11 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

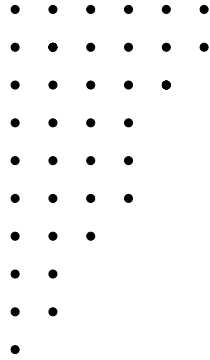
can be split as

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

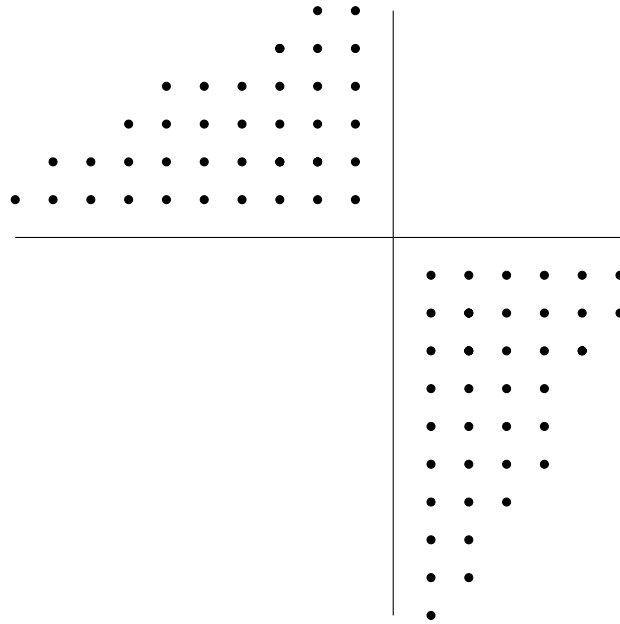
We will use this example to show how to associate a matrix like (3.21) and a three-quadrant Ferrers graph. The arguments in this example can be directly extended to the general case. We associate the matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

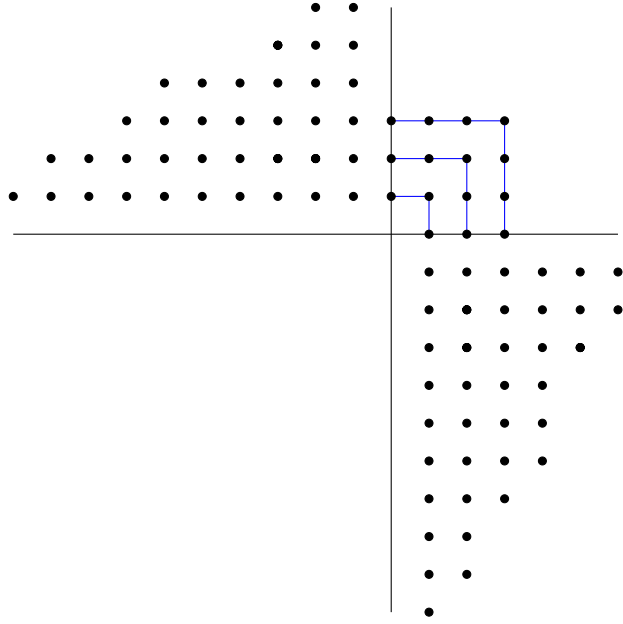
to the partition having one part equal to 1, two parts equal to 2, one part equal to 3, three parts equal to 4, one part equal to 5, and two parts equal to 6 ($6 + 6 + 5 + 4 + 4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1$), whose Ferrers graph is



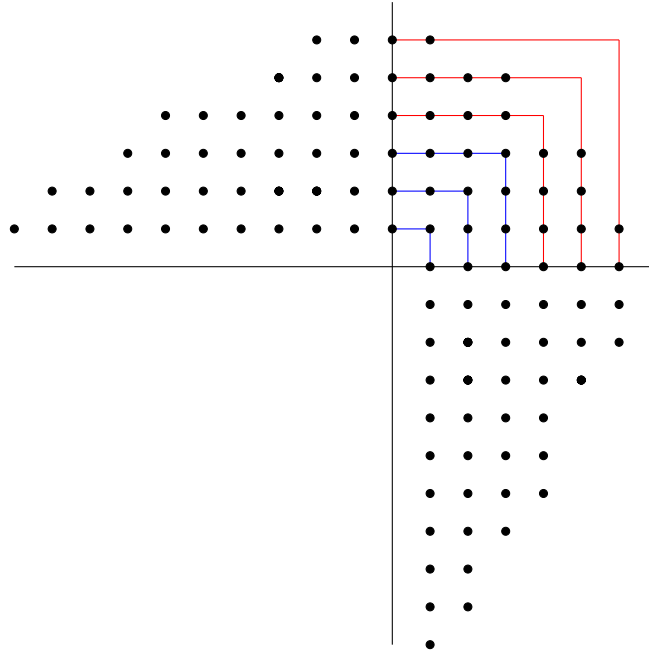
The pair of Ferrers graphs obtained from the second matrix in (3.22) can be placed in the plane in the following way



Now we describe how to place the contribution from the first matrix in (3.22) in the plane in order to obtain a self-conjugate three-quadrant Ferrers graph. To do this, we consider first the odd numbers in the first line: 7, 5, and 3. These numbers are represented in the first quadrant of the plane in the following way



The even numbers, 8, 8 and 4, are represented in the first quadrant after the odd numbers in a non increasing sequence as follows



Note that the first even number after the greatest odd number, if there is one, is 1 plus the greatest odd number. Therefore, the construction of the three-quadrant Ferrers graph described above can always be done. It is clear that this procedure can be reversed in order to obtain the two-line matrix representing a partition in which the odd parts are distinct and greater than 1.

The same argument applies in general and we have a bijection. Hence, identity (3.19) is proved.

3 Three identities and related bijections between certain classes of partitions

In this section we prove three partition identities ((3.23), (3.36), and (3.48) below) using combinatorial arguments and we establish bijections between several classes of partitions related to these identities. Our main tool is constructing bijections between certain classes of partitions and sets of two-line matrices. As an application of our results proved by combinatorial arguments, we obtain a straightforward proof of an identity about Ramanujan's ψ function (see (3.51) below), which is similar to dozens of identities for partial theta functions obtained by Ramanujan in his notebooks (see, for example, [3] and chapter 9 of [4]).

Our first objective is to study the identity

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3) \cdots (1+q^{2k-1})}{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2k})} q^{2k} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n}}. \quad (3.23)$$

We provide two combinatorial proofs for identity (3.23). As a matter of fact, we consider a slight improvement of (3.23).

Theorem 1. *The following identity holds*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+zq)(1+zq^3) \cdots (1+zq^{2k-1})}{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2k})} q^{2k} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+zq^{2n+1}}{1-q^{2n}}. \quad (3.24)$$

Proof: We introduce two classes of partitions

$\mathcal{P}_n$, the set of all partitions λ of n such that

- the odd parts of λ are distinct;
- the largest part of λ is even;

and

$\mathcal{Q}_n$, the set of all partitions μ of n such that

- the odd parts of μ are distinct;
- 1 is not a part of μ .

Identity (3.23) is equivalent to the statement that, for any n , $\mathcal{P}_n$ and $\mathcal{Q}_n$ have the same number of elements, or, in other words, there is a bijection between these two classes of partitions. Identity (3.24) suggests that it is possible to find such a bijection that preserves the number of odd parts of partitions.

Denote by $\mathcal{P}_{n,k,m}$ the subset of all $\lambda \in \mathcal{P}_n$ such that λ contains exactly m odd parts and its largest part is $a(\lambda) = 2k$. Consider also the subset $\mathcal{Q}_{n,k,m}$ of all $\mu \in \mathcal{Q}_n$ such that μ has exactly m odd parts and its largest part is $a(\mu) = 2k$ or $2k + 1$.

The coefficient of $z^m q^n$ on the left-hand-side and on the right-hand-side of (3.24) are, respectively, the number of elements of the sets

$$\mathcal{P}_{n,m} := \bigcup_k \mathcal{P}_{n,k,m} \quad \text{and} \quad \mathcal{Q}_{n,m} := \bigcup_k \mathcal{Q}_{n,k,m}. \quad (3.25)$$

Hence, to prove (3.24), it suffices to construct a bijection between the two classes of partitions $\mathcal{P}_{n,k,m}$ and $\mathcal{Q}_{n,k,m}$.

We now define a bijection $\varphi : \mathcal{P}_{n,k,m} \rightarrow \mathcal{Q}_{n,k,m}$. Given any partition $\lambda \in \mathcal{P}_{n,k,m}$, we define $\varphi(\lambda) \in \mathcal{Q}_{n,k,m}$ by:

- if 1 is not a part of λ , $\varphi(\lambda) = \lambda$;
- if 1 is a part of λ , $\varphi(\lambda)$ is the partition obtained by removing 1 from λ and adding one unit to its largest part $a(\lambda)$. If λ contains more than one copy of $a(\lambda)$, we add 1 to one of them only. Since $a(\lambda)$ is even, the number of odd parts is not altered.

Then, φ is a bijection with an inverse φ^{-1} defined by:

- if $\mu \in \mathcal{Q}_{n,k,m}$ is such that its largest part is even, then $\varphi^{-1}(\mu) = \mu$;
- if $\mu \in \mathcal{Q}_{n,k,m}$ and its largest part $a(\mu)$ is odd, $\varphi^{-1}(\mu)$ is obtained by removing from μ one part equal to $a(\mu)$ and adding one part equal to $a(\mu) - 1$ and one part equal to 1. $\square$

Of course, φ defined above can be extended to bijections from $\varphi : \mathcal{P}_{n,m} \rightarrow \mathcal{Q}_{n,m}$ or from $\varphi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n$.

Example. For $n = 11$, the two classes $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n,1}$ and $\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_{n,1}$ defined in (3.25) and the correspondence φ constructed in Theorem 1 are given by

$$\begin{array}{ccc}
(10, 1) & \mapsto & (11) \\
(8, 3) & \mapsto & (8, 3) \\
(8, 2, 1) & \mapsto & (9, 2) \\
(6, 5) & \mapsto & (6, 5) \\
(6, 4, 1) & \mapsto & (7, 4) \\
(6, 3, 2) & \mapsto & (6, 3, 2) \\
(6, 2, 2, 1) & \mapsto & (7, 2, 2) \\
(4, 4, 3) & \mapsto & (4, 4, 3) \\
(4, 4, 2, 1) & \mapsto & (5, 4, 2) \\
(4, 3, 2, 2) & \mapsto & (4, 3, 2, 2) \\
(4, 2, 2, 2, 1) & \mapsto & (5, 2, 2, 2) \\
(2, 2, 2, 2, 2, 1) & \mapsto & (3, 2, 2, 2, 2)
\end{array}$$

We now present another proof for identity (3.24) based on a two-line matrix representation for partitions. The idea of the proof is to introduce a certain class of two-line matrices and to interpret it in terms of partitions in two different ways. Consider the set $\mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)}$ of $2 \times k$ matrices of the form

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_k \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

with non-negative integer entries, having exactly m odd entries in the first row, and satisfying

$$c_k \in \{2, 3\}, \quad d_t \equiv 0 \pmod{2}, \quad \forall t; \quad (3.27)$$

$$c_t \equiv 0 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \implies c_t = c_{t+1} + d_{t+1}; \quad (3.28)$$

$$c_t \equiv 0 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \implies c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}; \quad (3.29)$$

$$c_t \equiv 1 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \implies c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}; \quad (3.30)$$

$$c_t \equiv 1 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \implies c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}; \quad (3.31)$$

$$\sum c_t + \sum d_t = n. \quad (3.32)$$

This class of matrices was introduced in [9].

We now introduce a notation needed in the next theorem. Let $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)}$. If, for example, $k = 4$ and

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,4,m}^{(2,3)}$$

then considering the restrictions (27)-(31) it is not difficult to verify that we can write in a unique manner $c_4 = 2 + j_4$, $c_3 = 2 + d_4 + j_3 + 2j_4$, $c_2 = 2 + d_3 + d_4 + j_2 + 2j_3 + 2j_4$, $c_1 = 2 + d_2 + d_3 + d_4 + j_1 + 2j_2 + 2j_3 + 2j_4$, with $j_t \in \{0, 1\}$, i.e., A is of the form

$$A = \begin{pmatrix} 2+d_2+d_3+d_4+j_1+2j_2+2j_3+2j_4 & 2+d_3+d_4+j_2+2j_3+2j_4 & 2+d_4+j_3+2j_4 & 2+j_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix},$$

with $j_t \in \{0, 1\}$. In the general case of a $2 \times k$ matrix $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)}$, we can express in a unique way

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 + d_2 + d_3 + \cdots + d_k + j_1 + 2j_2 + \cdots + 2j_k \\ c_2 &= 2 + d_3 + d_4 + \cdots + d_k + j_2 + 2j_3 + \cdots + 2j_k \\ &\vdots \\ c_{k-1} &= 2 + d_k + j_{k-1} + 2j_k \\ c_k &= 2 + j_k \end{aligned} \tag{3.33}$$

where $j_t \in \{0, 1\}$.

Theorem 2. *For any (n, k, m) , with $0 \leq m \leq n$ and $k \geq 1$, there is a bijection*

$$\psi : \mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,k,m},$$

where $\mathcal{P}_{n,k,m}$ is the set of all partitions λ of n such that

- λ has exactly m odd parts and the odd parts are distinct;
- the largest part of λ is $a(\lambda) = 2k$.

Precisely, given $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)}$, $\lambda = \psi(A)$ is the partition containing:

- $\frac{1}{2} d_t$ parts equal to $2t$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- j_t parts equal to $2t - 1$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- one part equal to $2k$,

where the $j_t \in \{0, 1\}$ are defined by (3.33).

Proof: Let $j_t \in \{0, 1\}$ as above. From (3.32) and (3.33) it follows that

$$n = 2k + (d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \cdots + kd_k) + (j_1 + 3j_2 + 5j_3 + \cdots + (2k-1)j_k). \quad (3.34)$$

We define a partition $\lambda = \psi(A)$ containing:

- $\frac{1}{2}d_t$ parts equal to $2t$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- j_t parts equal to $2t-1$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- one part equal to $2k$.

Note that, for any $t \leq k$,

$$j_t = \begin{cases} 0, & \text{if } c_t \text{ is even} \\ 1, & \text{if } c_t \text{ is odd} \end{cases}$$

Therefore the number of odd parts in λ is equal to the number of odd elements in the first row of A .

It is easy to see that ψ defined above is a bijection between the set of matrices $\mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)}$ and the set of partitions $\mathcal{P}_{n,k,m}$. $\square$

Denote by $\tilde{\mathcal{Q}}_{n,k,m}$ ($0 \leq m \leq n$, $k \geq 1$) the set of partitions μ of n such that

- μ contains exactly k parts, m of these being odd;
- the odd parts of μ are distinct;
- 1 is not a part of μ .

Note that, for $\mathcal{Q}_{n,m}$ defined by (3.25), we have

$$\mathcal{Q}_{n,m} = \bigcup_k \mathcal{Q}_{n,k,m} = \bigcup_k \tilde{\mathcal{Q}}_{n,k,m}. \quad (3.35)$$

Our next result establishes a bijection between $\tilde{\mathcal{Q}}_{n,k,m}$ and the same class of matrices as before.

Theorem 3. *There is a natural bijection $\theta : \mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}_{n,k,m}$. Given any matrix $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)}$ of the form (3.26), the corresponding partition $\mu = \theta(A)$ is obtained adding up the columns of A ,*

$$\mu = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_k + d_k).$$

Proof: The proof is straightforward. $\square$

Corollary. *Identity (3.24) holds true.*

Proof: As mentioned above, the cardinalities of the sets $\mathcal{P}_{n,m}$ and $\mathcal{Q}_{n,m}$, defined by (3.25), are, respectively, equal to the coefficient of $z^m q^n$ on left-hand-side and on the right-hand-side of (3.24). Since, by Theorems 2 and 3, $\mathcal{P}_{n,k,m}$ and $\tilde{\mathcal{Q}}_{n,k,m}$ are both in one-to-one correspondence with the same set of matrices $\mathcal{M}_{n,k,m}^{(2,3)}$, using (3.35) we obtain identity (3.24). $\square$

Application. We can construct a bijection $\theta \circ \psi^{-1} : \mathcal{P}_{n,k,m} \rightarrow \mathcal{Q}_{n,k,m}$, or $\theta \circ \psi^{-1} : \mathcal{P}_{n,m} \rightarrow \mathcal{Q}_{n,m}$, if we want, which is different from the bijection constructed in the proof of Theorem 1. For example, if $n = 11$ the bijection $\theta \circ \psi^{-1}$ is described below.

$$\begin{array}{llll}
(2, 2, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} & \mapsto (11) \\
(4, 3, 2, 2) & \mapsto & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (8, 3) \\
(4, 4, 3) & \mapsto & \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto (6, 5) \\
(4, 2, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (9, 2) \\
(4, 4, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto (7, 4) \\
(6, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (7, 2, 2) \\
(6, 4, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (5, 4, 2) \\
(6, 3, 2) & \mapsto & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (6, 3, 2) \\
(6, 5) & \mapsto & \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (4, 4, 3) \\
(8, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (5, 2, 2, 2) \\
(8, 3) & \mapsto & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (4, 3, 2, 2) \\
(10, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (3, 2, 2, 2, 2)
\end{array}$$

We now study a second identity (see (3.36) below) that, surprisingly, has the same

right-hand-side as (3.23).

Theorem 4. *The following identity holds*

$$\frac{1}{1-q^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} q^{2k-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n}}, \quad (3.36)$$

or, multiplying both sides by $1+q$,

$$\frac{1}{1-q} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+q)^2(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} q^{2k-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n}}. \quad (3.37)$$

The proof of (3.36) depends on a relationship between two classes of partitions established in Theorem 5 below.

In addition to $\mathcal{Q}_n$, the set of partitions of n such that the odd parts are distinct and 1 is not a part, introduced in the proof of Theorem 1, we consider the following class of partitions:

$\mathcal{R}_n$, the set of all partitions λ of n such that

- the odd parts of λ are distinct;
- λ contains at least one odd part;
- if $a_o(\lambda)$ denotes the largest odd part, then $a_o(\lambda) + 1 \geq$ any even part.

Our next result resembles the Euler Pentagonal Number Theorem.

Theorem 5. *Let $\mathcal{R}_n$ and $\mathcal{Q}_n$ be the two classes of partitions defined above. Then,*

$$|\mathcal{Q}_n| - |\mathcal{R}_n| = (-1)^n. \quad (3.38)$$

Proof of Theorem 5: We construct a correspondence ϕ , which associates $\phi(\lambda) \in \mathcal{Q}_n$ to any given $\lambda \in \mathcal{R}_n$:

- if 1 is a part of λ , we define $\phi(\lambda)$ as the partition obtained by removing 1 from λ and adding 1 to its largest odd part;
- if 1 is not a part of λ , we take $\phi(\lambda) = \lambda$.

Then, ϕ is a one-to-one, with an inverse ϕ^{-1} defined by:

- if $\mu \in \mathcal{Q}_n$ is such that its largest odd part $a_o(\mu)$ and largest even part $a_e(\mu)$ satisfy $a_o(\mu) + 1 \geq a_e(\mu)$, then $\phi^{-1}(\mu) = \mu$;

– if $\mu \in \mathcal{Q}_n$ contains no odd parts or if $a_o(\mu) + 1 < a_e(\mu)$, we construct $\phi^{-1}(\mu)$ by removing from μ one part equal to $a_e(\mu)$ and add one part equal to $a_e(\mu) - 1$ and one part equal to 1.

The correspondence ϕ defines a bijection except for the following two special features:

– when n is even, there is one element $\mu = (2, 2, \dots, 2) \in \mathcal{Q}_n$ without a corresponding $\phi^{-1}(\lambda) \in \mathcal{R}_n$;

– when n is odd, there is one element $\lambda = (2, 2, \dots, 2, 1) \in \mathcal{R}_n$ without a corresponding $\phi(\lambda) \in \mathcal{Q}_n$.

Therefore, (3.38) holds. $\square$

Proof of Theorem 4: It is easy to see that the generating function of $\mathcal{R}_n$ is

$$\frac{1}{1 - q^2} q + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3) \cdots (1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2k})} q^{2k-1}. \quad (3.39)$$

From (3.38) and (3.39), we obtain

$$\frac{1}{1+q} + \frac{1}{1-q^2} q + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3) \cdots (1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2k})} q^{2k-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n}},$$

from which (3.36) follows immediately. $\square$

In order to construct a bijection between certain classes of partitions, we consider the set $\mathcal{M}_{n,k,m}^{(1)}$ of all $2 \times k$ matrices of the form (3.26), with non-negative integer entries, having exactly m odd entries in the first row, and satisfying

$$c_k = 1, \quad d_t \equiv 0 \pmod{2}, \quad \forall t; \quad (3.40)$$

$$c_t \equiv 0 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \implies c_t = c_{t+1} + d_{t+1} \quad (3.41)$$

$$c_t \equiv 0 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \implies c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1} \quad (3.42)$$

$$c_t \equiv 1 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 0 \pmod{2} \implies c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1} \quad (3.43)$$

$$c_t \equiv 1 \pmod{2}, \quad c_{t+1} \equiv 1 \pmod{2} \implies c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1} \quad (3.44)$$

$$\sum c_t + \sum d_t = n. \quad (3.45)$$

Let $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(1)}$. As before, if, for example, $k = 4$, then it is easy to verify that A is expressed in a unique way as

$$A = \begin{pmatrix} 2+d_2+d_3+d_4+j_1+2j_2+2j_3 & 2+d_3+d_4+j_2+2j_3 & 2+d_4+j_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix},$$

with $j_t \in \{0, 1\}$.

In general, for any $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(1)}$, we can write in a unique way

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2 + d_2 + d_3 + \cdots + d_k + j_1 + 2j_2 + \cdots + 2j_{k-1} \\
c_2 &= 2 + d_3 + d_4 + \cdots + d_k + j_2 + 2j_3 + \cdots + 2j_{k-1} \\
&\vdots \\
c_{k-1} &= 2 + d_k + j_{k-1} \\
c_k &= 1,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

where $j_t \in \{0, 1\}$.

Consider also the set $\mathcal{R}_{n,k,m}$ of partitions λ of n , having exactly m odd parts, such that the odd parts are distinct, the largest odd part is $a_o(\lambda) = 2k - 1$, and any even part is less than or equal to $2k$.

Theorem 6. *For any n , k , and m , with $1 \leq m \leq n$ and $k \geq 1$, there is a bijection $\zeta : \mathcal{M}_{n,k,m}^{(1)} \rightarrow \mathcal{R}_{n,k,m}$. Precisely, given $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(1)}$, $\lambda = \zeta(A)$ is the partition containing*

- $\frac{1}{2} d_t$ parts equal to $2t$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- j_t parts equal to $2t - 1$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$;
- one part equal to $2k - 1$,

where the $j_t \in \{0, 1\}$ are given by (3.46).

Remark. *In the case $k = 1$ (hence, n is necessarily odd) λ contains one part equal to 1 and $\frac{1}{2}d_1$ parts equal to 2.*

Proof: From (3.45) and (3.46) it follows that

$$n = (2k - 1) + (d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \cdots + kd_k) + (j_1 + 3j_2 + 5j_3 + \cdots + (2k - 3)j_{k-1}). \tag{3.47}$$

To the matrix A we associate a partition λ containing:

- $\frac{1}{2} d_t$ parts equal to $2t$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- j_t parts equal to $2t - 1$, for any $t \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$;
- one part equal to $2k - 1$.

Note that, since $j_t = 1$ if c_t is odd and $j_t = 0$ if c_t is even, for any $t \leq k - 1$, it follows that the number of odd parts in λ is equal to the number of odd elements in the first row of A . This completes the argument. $\square$

Remark. In practice, to deal with the inverse correspondence ζ^{-1} it is useful to identify integers with matrices as described below. For simplicity, we consider the case $k = 4$.

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 5 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 7 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ 2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 4 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 6 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & 8 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

For example, the partition $\lambda = (8, 7, 4, 4, 4, 3, 1)$ corresponds to the matrix

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In the case of the correspondence ψ considered in Theorem 2, the identification is the same, except for the integer $2k$. For example, for $k = 4$, remember that the largest part of any $\mu \in \mathcal{P}_{n,4,m}$ is $2k = 8$. The only difference is that the first 8 is identified with the matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and each additional 8 is identified with

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

We now introduce another class of partitions. Let $\mathcal{S}_{n,k,m}$ denote the set of all partitions π of n such that

- π has exactly k parts and m of these parts are odd;
- the odd parts of π are distinct;
- the smallest part of π is odd.

Theorem 7. *There is a natural bijection $\xi : \mathcal{M}_{n,k,m}^{(1)} \rightarrow \mathcal{S}_{n,k,m}$. Given any matrix $A \in \mathcal{M}_{n,k,m}^{(1)}$, the corresponding partition $\pi = \xi(A)$ is defined as*

$$\pi = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_k + d_k),$$

i.e., by adding up the columns of A .

Proof: The proof is straightforward. $\square$

Corollary. *There is a bijection $\xi \circ \zeta^{-1} : \mathcal{R}_{n,k,m} \rightarrow \mathcal{S}_{n,k,m}$.*

Proof: Combining the bijections given in Theorems 6 and 7, one obtains a bijection from $\xi \circ \zeta^{-1} : \mathcal{R}_{n,k,m} \rightarrow \mathcal{S}_{n,k,m}$. $\square$

Example. Let $n = 11$. For $m = k = 1$, we have

$$(2, 2, 2, 2, 1) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} \mapsto (11)$$

For $m = 1$ and $k = 2$, we have

$$\begin{aligned} (3, 2, 2, 2, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (10, 1) \\ (4, 3, 2, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \mapsto (8, 3) \\ (4, 4, 3) &\mapsto \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \mapsto (6, 5) \end{aligned}$$

For $m = 1$ and $k = 3$, we have

$$\begin{aligned} (5, 2, 2, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (8, 2, 1) \\ (6, 5) &\mapsto \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto (4, 4, 3) \\ (5, 4, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (6, 4, 1) \\ (5, 3, 2, 1) &\mapsto \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (7, 3, 1) \end{aligned}$$

Example. For $n = 20$, $k = 4$, and $m = 2$, we have

$$\begin{array}{llll}
(8, 7, 4, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto (7, 6, 4, 3) \\
(8, 7, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto (9, 4, 4, 3) \\
(7, 6, 6, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (7, 6, 6, 1) \\
(7, 6, 4, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (9, 6, 4, 1) \\
(7, 6, 2, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (11, 4, 4, 1) \\
(7, 4, 4, 4, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (9, 8, 2, 1) \\
(7, 4, 4, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (11, 6, 2, 1) \\
(7, 4, 2, 2, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (13, 4, 2, 1) \\
(7, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1) & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (15, 2, 2, 1) \\
(8, 7, 3, 2) & \mapsto & \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto (8, 5, 4, 3) \\
(7, 6, 4, 3) & \mapsto & \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (8, 7, 4, 1) \\
(7, 6, 3, 2, 2) & \mapsto & \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (10, 5, 4, 1) \\
(7, 4, 4, 3, 2) & \mapsto & \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (10, 7, 2, 1)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(7, 4, 3, 2, 2, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (12, 5, 2, 1) \\
(7, 3, 2, 2, 2, 2, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (14, 3, 2, 1) \\
(8, 7, 5) &\mapsto \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto (6, 6, 5, 3) \\
(7, 6, 5, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (8, 6, 5, 1) \\
(7, 5, 4, 4) &\mapsto \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (8, 8, 3, 1) \\
(7, 5, 4, 2, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (10, 6, 3, 1) \\
(7, 5, 2, 2, 2, 2) &\mapsto \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (12, 4, 3, 1)
\end{aligned}$$

As an application of Theorem 7, we obtain the following identity.

Theorem 8. *The following identity holds*

$$\frac{q}{1-q^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})} q^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1+q^{2n+2i+1}}{1-q^{2n+2i}}. \quad (3.48)$$

Remark. Indeed a slightly stronger version of (3.48) holds true, namely

$$\frac{zq}{1-q^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+zq)(1+zq^3)\cdots(1+zq^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} zq^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} zq^{2k-1} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1+zq^{2k+2i+1}}{1-q^{2k+2i}}. \quad (3.49)$$

Proof: The proof follows from Theorem 7 and its corollary. On one hand, the coefficient of $z^m q^n$ in the expansion of $\frac{(1+zq)(1+zq^3)\cdots(1+zq^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} zq^{2k-1}$ is the number of elements of $\mathcal{R}_{n,k,m}$. Therefore, the coefficient of $z^m q^n$ in the left-hand-side of (3.49) is the number of elements in the union $\cup_k \mathcal{R}_{n,k,m}$.

On the other hand, if we denote by $\mathcal{S}_{n,m}$ the set of all partitions π of n such that

- the odd parts of π are distinct;

- π has exactly m odd parts;
- the smallest part of π is odd,

then the class $\mathcal{S}_{n,k,m}$, defined immediately before the statement of Theorem 7, consists in the partitions $\pi \in \mathcal{S}_{n,m}$ with exactly k parts. We consider also the class

$$\tilde{\mathcal{S}}_{n,k,m} = \{\pi \in \mathcal{S}_{n,m} \mid \text{the smallest part of } \pi \text{ is } 2k-1\}.$$

Clearly,

$$\mathcal{S}_{n,m} = \bigcup_k \mathcal{S}_{n,k,m} = \bigcup_k \tilde{\mathcal{S}}_{n,k,m},$$

with the above unions being of pairwise disjoint sets.

The coefficient of $z^m q^n$ in the expansion of $z q^{2k-1} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1+zq^{2k+2i+1}}{1-q^{2k+2i}}$ is the number of elements of $\tilde{\mathcal{S}}_{n,k,m}$. Hence, the coefficient of $z^m q^n$ in the right-hand-side of (3.49) is the number of elements in the union $\mathcal{S}_{n,m} = \cup_k \mathcal{S}_{n,k,m} = \cup_k \tilde{\mathcal{S}}_{n,k,m}$. Since, by the corollary of Theorem 7, $\mathcal{R}_{n,k,m}$ and $\mathcal{S}_{n,k,m}$ have the same number of elements, (3.49) follows. $\square$

It is important to point out that as a consequence of Theorem 8, that has been proved by a combinatorial argument, we can easily prove a well-known identity about Ramanujan's partial theta function

$$\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (3.50)$$

Theorem 9. *The function ψ , defined by (3.50), satisfies the identity*

$$1 + q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5) \cdots (1-q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (3.51)$$

Proof: From (3.48) it follows that

$$\frac{q}{1-q^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3) \cdots (1+q^{2n-3})}{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2n})} q^{2n-1} = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+q^{2i+1}}{1-q^{2i}} \right) \cdot U(q),$$

where $U(q)$ is defined by

$$U(q) := q + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2n-2})}{(1+q^3)(1+q^5) \cdots (1+q^{2n-1})} q^{2n-1}.$$

Using (3.36), we obtain

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+q^{2i+1}}{1-q^{2i}} - \frac{1}{1+q} \right) = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+q^{2i+1}}{1-q^{2i}} \right) \cdot U(q). \quad (3.52)$$

To prove (3.51) it suffices to verify that

$$1 - U(-q) = \psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (3.53)$$

Using the notation

$$(a; q)_{\infty} := \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i), \quad |q| < 1,$$

we can rephrase (3.52) as

$$\frac{(-q^3; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} - \frac{1}{1+q} = \frac{(-q^3; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \cdot (1 - \psi(-q)),$$

which is easily seen to be true, using (see (1.3.4), page 11, in [5])

$$\psi(q) = \frac{(q^2; q^2)_{\infty}}{(q; q^2)_{\infty}}. \quad \square$$

Remark. Identity (3.24), and hence identity (3.23) as well, is a particular case of the following identity (see (1.5) in [2])

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a)(1+aq) \cdots (1+aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^k)} z^k q^k = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1+azq^j}{1-zq^j}. \quad (3.54)$$

Indeed, taking $z = 1$ in (3.54) and then replacing q by q^2 and a by z , one obtains (3.24) as a particular case.

In [2], (3.54) is proved by a combinatorial argument, but the proof is more involved than our proof of (3.24).

Remark. Using the notation

$$(a; q)_n := \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_j; q)_n := (a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdots (a_j; q)_n,$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_j; q)_{\infty} := (a_1; q)_{\infty} (a_2; q)_{\infty} \cdots (a_j; q)_{\infty},$$

we can rephrase (3.51) as

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (q^2; q^2)_{\infty} (-q; q)_{\infty} = (q; q)_{\infty} (-q; q)_{\infty}^2.$$

Several similar identities are known. For example (see [10], (1.7) in Theorem 1.5),

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (a^n + b^n) = (q, a, b; q)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab/q; q)_{2n} q^n}{(q, a, b, ab; q)_n}. \quad (3.55)$$

Taking $a = -1$ and $b = -q$, the summation on the right-hand-side of (3.55) reduces to the first term and we obtain (3.51).

Replacing $b = 0$ in (3.55) yields

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n = (q; q)_{\infty} (a; q)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q; q)_n (a; q)_n}. \quad (3.56)$$

Replacing $a = -q$ in (3.56), we obtain

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q^2; q^2)_n}. \quad (3.57)$$

Finally, taking $a = -1$ in (3.56), we obtain

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + q^n) q^n}{(q^2; q^2)_n}. \quad (3.58)$$

As noted in [10], identity (3.55) contains as a particular case when $b = \frac{q}{a}$, the Jacobi triple product identity.

4 A new bijective proof for the Lebesgue Identity

We now turn our attention to the problem of obtaining a representation of the partitions in which even parts are not repeated as a certain class of two-line matrices. As a consequence of our ideas, we provide a new combinatorial proof of the following equality, known as Lebesgue Identity:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1 + zq)(1 + zq^2) \cdots (1 + zq^r)}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^r)} q^{\binom{r+1}{2}} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + zq^{2i})(1 + q^i). \quad (3.59)$$

Combinatorial proofs of the Lebesgue Identity have been given by several authors, among them Bessenrodt, Bressoud, Little, Sellers, Alladi and Gordon (see [6] and [7]). We believe our bijection is simpler. It is based on a new way of representing partitions by two-line matrices, introduced by Santos, Mondek, and Ribeiro in [8].

Let

$$f(z, q) := \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1 + zq)(1 + zq^2) \cdots (1 + zq^r)}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^r)} q^{\binom{r+1}{2}} \quad (3.60)$$

be the left-hand side of (3.59). Denote by $\mathcal{M}_{n,k}$ the set of all $2 \times k$ matrices of the form

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_k \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

with non-negative integer entries satisfying

$$c_k = i_k \in \{1, 2\}, \quad (3.62)$$

$$c_t = i_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ with } i_t \in \{1, 2\} \text{ for } t < k, \quad (3.63)$$

$$\sum c_t + \sum d_t = n. \quad (3.64)$$

Denote by $\mathcal{M}_{n,m,k}$ the subset of all matrices in $\mathcal{M}_{n,k}$ for which $i_t = 2$ for exactly m elements in the first row and let $\mathcal{N}_{n,m} := \bigcup_k \mathcal{M}_{n,m,k}$. In this section we establish that (3.60) is the generating function of the number of elements $|\mathcal{N}_{n,m}|$ of the set $\mathcal{N}_{n,m}$. More precisely, the coefficient of $z^m q^n$ on (3.60) is the number of matrices of the form (3.61), with any number k of columns, satisfying (3.62), (3.63), and (3.64), and with $i_t = 2$ for exactly m elements in the first row.

When σ is a partition, we denote by $\ell(\sigma)$ the number of parts of σ , by $a(\sigma)$ its largest part, and by $|\sigma|$ the sum of all parts.

Let $\mathcal{D}_{n,r,m}$ denote the set of pairs (λ, μ) of partitions into distinct parts, in which

$$\ell(\lambda) = m, \quad (3.65)$$

i.e., λ contains exactly m parts,

$$a(\lambda) \leq r = \ell(\mu), \quad (3.66)$$

and

$$|\lambda| + |\mu| = n. \quad (3.67)$$

Denote by $\mathcal{P}_{n,m}$ the set of all partitions of n in which even parts are not repeated and having exactly m even parts. Our main result is the following theorem, from which the Lebesgue Identity will be derived.

Theorem 1. *There is a natural bijection between the sets $\mathcal{P}_{n,m}$ and $\mathcal{N}_{n,m}$.*

The construction of the bijection stated in Theorem 1 is the object of the next section. In order to get our alternative proof for the Lebesgue Identity, a few further propositions are necessary.

Proposition 1. *For each fixed r the coefficient of $z^m q^n$ on*

$$\frac{(1+zq)(1+zq^2)\cdots(1+zq^r)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^r)} q^{\binom{r+1}{2}}$$

is the number of elements in the set $\mathcal{D}_{n,r,m}$ of pairs (λ, μ) of partitions defined above by (3.65), (3.66) and (3.67).

Proof: First note that

$$g(q) := \frac{q^{\binom{r+1}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^r)} \quad (3.68)$$

is the generating function of the number of partitions μ of n into exactly r distinct parts. Indeed, $1/((1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^r))$ is the generating function of the partitions of n in parts less than or equal to r , or, taking conjugate, the generating function of the partitions of n in at most r parts. Summing to a Sylvester's triangle of side r , as suggested by the picture below, completes the argument.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \end{array} + \begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \end{array}$$

Also, the coefficient of $z^m q^n$ in the expansion of $(1+zq)(1+zq^2)\cdots(1+zq^r)$ is the number of partitions λ of n into exactly m distinct parts less than or equal to r . $\square$

Corollary. (see [7]) *The coefficient of $z^m q^n$ on the generating function (3.60) is equal to the number of elements of the set $\mathcal{D}_{n,m} := \bigcup_r \mathcal{D}_{n,r,m}$ of pairs (λ, μ) of partitions into distinct parts satisfying*

$$\ell(\lambda) = m, \quad (3.69)$$

$$a(\lambda) \leq \ell(\mu), \quad (3.70)$$

and

$$|\lambda| + |\mu| = n. \quad (3.71)$$

The following proposition is straightforward.

Proposition 2. *The coefficient of $z^m q^n$ on the right-hand side of (3.59) is the number of elements of the set $\mathcal{P}_{n,m}$.*

Proof: It suffices to rewrite the right-hand side of (3.59) as

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+zq^{2i})(1+q^i) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1+zq^{2i})(1-q^{2i})}{(1-q^i)} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1+zq^{2i})}{(1-q^{2i-1})}. \quad \square$$

We have interpreted the right-hand side and the left-hand side of the Lebesgue Identity (3.59) as generating functions of $\mathcal{D}_{n,m}$ and $\mathcal{P}_{n,m}$, respectively. Hence, to prove the Lebesgue Identity it suffices to show that

$$|\mathcal{D}_{n,m}| = |\mathcal{N}_{n,m}| = |\mathcal{P}_{n,m}|. \quad (3.72)$$

We establish each one of these two equalities by constructing a bijection between the corresponding sets.

Construction of a bijection $\varphi : \mathcal{D}_{n,m} \longrightarrow \mathcal{N}_{n,m}$

Given any pair (λ, μ) of partitions into distinct parts satisfying (3.69), (3.70), and (3.71), we associate to it a $2 \times k$ matrix satisfying (3.62), (3.63), and (3.64) and for which $i_t = 2$ for exactly m elements in the first row. For $k = \ell(\mu)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, we consider first two sequences $(j_1, \dots, j_k)$ and $(d_1, \dots, d_k)$ defined by

$$j_t = \begin{cases} 1, & \text{if } t \text{ is a part of } \lambda \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.73)$$

and

$$\begin{aligned} d_k &= \mu_k - 1; \\ d_t &= \mu_t - \mu_{t+1} - 1, \quad \text{for } t < k. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Note that the parts of λ are exactly the non-vanishing elements in the list $(kj_k, \dots, 3j_3, 2j_2, j_1)$. Therefore,

$$|\lambda| = j_1 + 2j_2 + \dots + kj_k. \quad (3.75)$$

Also, from (3.74), it follows that

$$\begin{aligned} \mu_k &= d_k + 1 \\ \mu_{k-1} &= d_{k-1} + d_k + 2 \\ &\vdots \\ \mu_1 &= d_1 + \dots + d_k + k \end{aligned} \quad (3.76)$$

Hence, from (3.75) and (3.76) it follows that

$$|\lambda| + |\mu| = (j_1 + 2j_2 + \dots + kj_k) + (d_1 + 2d_2 + \dots + kd_k) + (1 + 2 + \dots + k).$$

By (3.71) we have

$$n = (1 + 2 + \dots + k) + (j_1 + 2j_2 + \dots + kj_k) + (d_1 + 2d_2 + \dots + kd_k). \quad (3.77)$$

Setting

$$i_t := 1 + j_t, \quad t \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (3.78)$$

and

$$\begin{aligned} c_k &:= i_k \\ c_t &:= i_k + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad \text{for } t \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \end{aligned}$$

we consider the element $A \in \mathcal{M}_{n,m,k}$ of the form (3.61) and denote it by $\varphi(\lambda, \mu)$. By (3.77), the entries of A add up to n .

Conversely, given a $2 \times k$ matrix A of the form (3.61) satisfying (3.62), (3.63), and (3.64) and such that $i_t = 2$ for exactly m elements, we consider the two sequences $(j_1, \dots, j_k)$ and $(d_1, \dots, d_k)$, where $(d_1, \dots, d_k)$ is the second row of A and $j_t = c_t - c_{t+1} - d_{t+1} - 1$, if $t \leq k-1$, and $j_k = c_k - 1$. The matrix A is characterized by these two sequences. The pair of partitions (λ, μ) such that $A = \varphi(\lambda, \mu)$ is formed by the partition λ whose parts are exactly the non-vanishing elements in the list $(kj_k, \dots, 3j_3, 2j_2, j_1)$ and the partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, with μ_t given by (3.76).

Application. The above argument verifies the claim made before that the expression (3.60) is the generating function of the number of elements of the set $\mathcal{N}_{n,m}$ of matrices of the form (3.61), with any number k of columns, satisfying (3.62), (3.63), and (3.64), and with $i_t = 2$ for exactly m elements in the first row.

In the construction of the bijection $\psi : \mathcal{M}_{n,m} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,m}$ we need to be more careful. This construction is the object of the next section.

5 Main bijection

In order to prove Theorem 1, we now construct a bijection $\psi : \mathcal{N}_{n,m} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,m}$. As a matter of fact, we specialize and, for each k , construct a bijection $\psi : \mathcal{M}_{n,m,k} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,m,k}$, where $\mathcal{M}_{n,m,k}$ is the set of matrices with k columns defined above and $\mathcal{P}_{n,m,k}$ is a subset of $\mathcal{P}_{n,m}$ to be defined below.

The definition of the set $\mathcal{P}_{n,m,k}$ and the bijection ψ is slightly different, according to the case that the number k of columns is even or odd.

Case 1: k is even. If $k = 2s$, we take $\mathcal{P}_{n,m,k}$ to be the subset of all partitions in $\mathcal{P}_{n,m}$ with exactly s parts greater than or equal to $k + 1 = 2s + 1$. Given any matrix

$A \in \mathcal{M}_{n,m,k}$, using (3.62), (3.63), (3.64) and (3.78) we have

$$\begin{aligned} n &= c_1 + \cdots + c_{2s} + d_1 + \cdots + d_{2s} \\ &= (j_1 + 2j_2 + \cdots + 2sj_{2s}) + (d_1 + 2d_2 + \cdots + 2sd_{2s}) + (1 + 2 + \cdots + 2s). \end{aligned}$$

Since $1 + 2 + \cdots + 2s = s(2s + 1)$, we have

$$\begin{aligned} n &= (d_1 + 3d_3 + \cdots + (2s-1)d_{2s-1}) + (2j_2 + 4j_4 + \cdots + 2sj_{2s}) + (j_1 + 2s + 1 + 2d_{2s}) \\ &\quad + (3j_3 + 2s + 1 + 2d_{2s-2} + 2d_{2s}) + \cdots + ((2s-1)j_{2s-1} + 2s + 1 + 2d_2 + \cdots + 2d_{2s}). \end{aligned}$$

Based on this decomposition, to the $2 \times (2s)$ matrix A we associate the partition π containing

- (i) d_1 parts equal to 1;
- (ii) d_3 parts equal to 3;
- $\vdots$
- (iii) d_{2s-1} parts equal to $2s - 1$;
- (iv) one part equal to $2r$, whenever $j_{2r} = 1$, $r \in \{1, 2, \dots, s\}$;
- (v) one part equal to $j_1 + 2s + 1 + 2d_{2s}$;
- (vi) one part equal to $3j_3 + 2s + 1 + 2d_{2s-2} + 2d_{2s}$;
- $\vdots$
- (vii) one part equal to $(2s - 1)j_{2s-1} + 2s + 1 + 2d_2 + 2d_4 + \cdots + 2d_{2s}$.

It is easy to see that $\pi \in \mathcal{P}_{n,m,2s} = \mathcal{P}_{n,m,k}$.

The fact that ψ is a bijection from $\mathcal{M}_{n,m,k}$ onto $\mathcal{P}_{n,m,k}$ in Case 1 as well as in Case 2 follows from the following lemma.

Lemma. *Given k integers such that odd numbers are not repeated, there is a unique way to order them in a certain order $N_1, N_2, \dots, N_k$ and write out*

$$\begin{aligned} N_1 &= 2e_1 + j_1 \\ N_2 &= 2e_2 + 3j_3 \\ N_3 &= 2e_3 + 5j_5 \\ &\dots \\ N_k &= 2e_k + (2k - 1)j_{2k-1} \end{aligned} \tag{3.79}$$

with

$$j_t \in \{0, 1\}; \tag{3.80}$$

$$e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_k. \tag{3.81}$$

To understand the idea of the proof of the above lemma, we provide an example.

Example. With $k = 8$, consider the following eight numbers, where odd numbers are not repeated: $(3, 4, 6, 6, 7, 11, 12, 17)$. First we express the even numbers as

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot 2 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 12 &= 2 \cdot 6 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Then, we take the least odd number in the set, which is 3. There is a unique way of expressing it, namely

$$3 = N_1 = 2 \cdot 1 + 1. \tag{3.83}$$

Adding (3.83) to the array (3.82), we obtain

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 4 &= 2 \cdot 2 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 12 &= 2 \cdot 6 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Then, we take the next odd number in the list, i.e., 7. There is only one way of fitting it into the array (3.84), namely at the second place, as N_2 , with $j_3 = 1$,

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 7 &= 2 \cdot 2 + 3 \\ 4 &= 2 \cdot 2 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 12 &= 2 \cdot 6 \end{aligned} \tag{3.85}$$

The next odd number in the list is 11 and the only way to fit it into the array (3.85)

is between 4 and the first 6, i.e., as N_4 , with $j_7 = 1$,

$$\begin{aligned}
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 2 + 3 \\
4 &= 2 \cdot 2 \\
11 &= 2 \cdot 2 + 7 \\
6 &= 2 \cdot 3 \\
6 &= 2 \cdot 3 \\
12 &= 2 \cdot 6
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Finally, the only way to fit the last odd number 17 into array (3.86) is the sixth place, as N_6 , with $j_{11} = 1$,

$$\begin{aligned}
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 2 + 3 \\
4 &= 2 \cdot 2 \\
11 &= 2 \cdot 2 + 7 \\
6 &= 2 \cdot 3 \\
17 &= 2 \cdot 3 + 11 \\
6 &= 2 \cdot 3 \\
12 &= 2 \cdot 6
\end{aligned} \tag{3.87}$$

The proof of the above lemma follows the same argument outlined in the example. First we arrange an array containing the expressions of the even elements in the list. Then, we begin including the odd elements one by one, in increasing order.

Case 2: k is odd. If $k = 2s + 1$, we take $\mathcal{P}_{n,m,k}$ to be the subset of all partitions in $\mathcal{P}_{n,m}$ with at least $s + 1$ parts greater than or equal to $k = 2s + 1$, but at most s of them greater than or equal to $2s + 3$. Given any matrix $A \in \mathcal{M}_{n,m,k}$, we have

$$\begin{aligned}
n &= c_1 + \cdots + c_{2s+1} + d_1 + \cdots + d_{2s+1} \\
&= (j_1 + 2j_2 + \cdots + (2s+1)j_{2s+1}) + (d_1 + 2d_2 + \cdots + (2s+1)d_{2s+1}) + (1 + 2 + \cdots + (2s+1)).
\end{aligned}$$

Since $1 + 2 + \cdots + (2s+1) = (s+1)(2s+1)$, we have

$$\begin{aligned}
n &= (d_1 + 3d_3 + \cdots + (2s+1)d_{2s+1}) + (2s+1+j_1) + (2j_2 + 4j_4 + \cdots + 2sj_{2s}) + (3j_3 + 2s+1 + 2d_{2s}) \\
&\quad + (5j_5 + 2s+1 + 2d_{2s-2} + 2d_{2s}) + \cdots + ((2s+1)j_{2s+1} + 2s+1 + 2d_2 + \cdots + 2d_{2s}).
\end{aligned}$$

Based on this decomposition, to the $2 \times (2s + 1)$ matrix A we associate the partition π containing

- (i) d_1 parts equal to 1;
- (ii) d_3 parts equal to 3;
- $\vdots$
- (iii) d_{2s+1} parts equal to $2s + 1$;
- (iv) One part equal to $2s + 1 + j_1$;
- (v) one part equal to $2r$, whenever $j_{2r} = 1$, $r \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- (vi) one part equal to $3j_3 + 2s + 1 + 2d_{2s}$;
- (vii) one part equal to $5j_5 + 2s + 1 + 2d_{2s-2} + 2d_{2s}$;
- $\vdots$
- (viii) one part equal to $(2s + 1)j_{2s+1} + 2s + 1 + 2d_2 + 2d_4 + \dots + 2d_{2s}$.

It is easy to see that $\pi \in \mathcal{P}_{n,m,2s+1} = \mathcal{P}_{n,m,k}$.

We still have to show that any $\pi \in \mathcal{P}_{n,m}$ belongs to $\mathcal{P}_{n,m,k}$ for some k , i.e., $\mathcal{P}_{n,m} = \bigcup_k \mathcal{P}_{n,m,k}$. Indeed, given $\pi \in \mathcal{P}_{n,m}$, let s be the largest integer such that π has at least s parts greater than or equal to $2s + 1$. If π has exactly s parts greater than or equal to $2s + 1$, then $\pi \in \mathcal{P}_{n,m,2s}$, otherwise $\pi \in \mathcal{P}_{n,m,2s+1}$.

The next example illustrates that our bijective proof of the Lebesgue Identity is different from the ones given in [6] and [7].

Example Consider now the partition $\pi = (22, 21, 19, 18, 15, 10, 9, 9, 7, 4, 2)$, which is the same example as in [7], page 27. There are exactly five parts greater than or equal to 11. Hence, π corresponds to a 2×10 matrix. We first look at parts less than or equal to 10. There is one 7 and two 9's. Therefore $d_1 = d_3 = d_5 = 0$, $d_7 = 1$, and $d_9 = 2$. There is one of each, 2, 4, and 10. Hence, $j_2 = j_4 = j_{10} = 1$ and $j_6 = j_8 = 0$.

The five parts greater than or equal to 11 are 15, 18, 19, 21 and 22. Three of them are odd and are represented as

$$15 = 11 + 2 \cdot 2$$

$$19 = 11 + 2 \cdot 4$$

$$21 = 11 + 2 \cdot 5$$

Now note that

$$15 = 11 + 2 \cdot 2$$

$$18 = 11 + 2 \cdot 2 + 3$$

$$22 = 11 + 2 \cdot 3 + 5$$

$$19 = 11 + 2 \cdot 4$$

$$21 = 11 + 2 \cdot 5$$

and, hence,

$$d_{10} = 2$$

$$d_8 + d_{10} = 2$$

$$d_6 + d_8 + d_{10} = 3$$

$$d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} = 4$$

$$d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} = 5$$

It follows that $d_2 = 1$, $d_4 = 1$, $d_6 = 1$, $d_8 = 0$ and $d_{10} = 2$.

We now have all the elements to write out the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 21 & 19 & 16 & 14 & 11 & 9 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Using the bijection constructed in Section 4, to this 2×10 matrix A we associate a pair (λ, μ) of partitions into distinct parts. We consider $j_t = c_t - c_{t+1} - d_{t+1} - 1$, if $t \leq k - 1$, and $j_k = c_k - 1$. In this concrete example, we have $(j_1, j_2, \dots, j_{10}) = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$. The first element of the pair is the partition λ formed with the non-vanishing elements in $(10j_{10}, 9j_9, \dots, 2j_2, j_1)$, i.e., $\lambda = (10, 5, 4, 3, 2)$. Consider also the second row of A , $(d_1, d_2, \dots, d_{10}) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 2)$. The second element of the pair is the partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{10})$ given by

$$\mu_{10} = d_{10} + 1$$

$$\mu_9 = d_9 + d_{10} + 2$$

$$\vdots$$

$$\mu_1 = d_1 + \dots + d_{10} + 10$$

i.e., $\mu = (18, 17, 15, 14, 12, 11, 9, 7, 6, 3)$. This pair (λ, μ) is different from the one obtained in [7].

Referências Bibliográficas

- [1] G. E. Andrews, *Three-quadrant Ferrers Graphs*, Indian Journal of Mathematics **42** (2000), 1–7.
- [2] G. E. Andrews, *Enumerative proofs of certain q -identities*, Glasgow Math. J. **8** (1967), 33–40.
- [3] G. E. Andrews, *Ramanujan’s “lost” notebook I, Partial θ -functions*, Adv. in Math. **41** (1981), 137–172.
- [4] G. E. Andrews, and B. C. Berndt, *Ramanujan’s Lost Notebook*, Part I, Springer, 2005, New York.
- [5] B. C. Berndt, *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, AMS, 2006, Providence, RI, USA.
- [6] D. P. Little and J.A. Sellers, *New Proofs of Identities of Lebesgue and Göllnitz via Tilings*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 116 (2009), 223–231.
- [7] I. Pak, *Partition bijections, a survey*, Ramanujan Journal, 12 (2006), 5–75.
- [8] J. P. O. Santos, P. Mondek and A. C. Ribeiro, *New two-line arrays representing partitions*, submitted.
- [9] J. P. O. Santos and R. Silva, *A combinatorial proof for an identity involving partitions with distinct odd parts*, Submitted.
- [10] S. O. Warnaar, *Partial theta functions. I. beyond the lost notebook*, Proc. London Math. Soc. **87** (2003), 363–395.

Capítulo 4

Algumas bijeções entre conjuntos de partições

Neste capítulo apresentamos mais uma consequência interessante de se representar partições como matrizes de duas linhas. Obtemos aqui duas bijeções entre conjuntos de partições, algo não tão imediato quando olhamos apenas o enunciado dos teoremas.

Ao final, apresentamos uma representação como matrizes de duas linhas para partições em partes ímpares sem saltos.¹

¹*sem saltos* aqui quer dizer que se um ímpar ocorre como parte então todo ímpar positivo menor do que este aparece como parte

1 Uma bijeção envolvendo partições em partes $\equiv 2(\text{mod } 4)$

Em [10] o Resultado 4.1 abaixo é apresentado como um corolário (Corolário 15, [10]) sem uma prova combinatória. Nesta seção apresentamos uma prova combinatória para ele. Além disso, usaremos este resultado para obter uma bijeção entre dois conjuntos de partições.

Resultado 4.1 *O número de partições de n em partes $\equiv 2(\text{mod } 4)$ é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

onde $c_s = 2, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, d_t \equiv 0(\text{mod } 2)$ e a soma de todas as entradas é igual a n .

Demonstração do Resultado 4.1: Para ver a bijeção é suficiente considerar um exemplo.

Considere a partição $10 + 6 + 2 + 2$ de 20. Como temos partes $\equiv 2(\text{mod } 4)$, então cada parte é duas vezes um número ímpar. Dividindo as partes por 2 obtemos uma partição de 10 em partes ímpares: $5 + 3 + 1 + 1$. Agora, pela Bijeção de Sylvester obtemos de $5 + 3 + 1 + 1$ uma partição de 10 em partes distintas: $5 + 3 + 2$.

Como mostrado em [10], Corolário 13, existe uma bijeção natural entre o conjunto de partições de n em partes distintas e o conjunto de matrizes de duas linhas da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

onde $c_s = 1, c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n . Dada uma tal matriz de duas linhas, adicionamos as entradas em cada coluna para obter uma partição em partes distintas; se uma partição em partes distintas é dada, dividimos cada partes como as duas entradas em cada coluna observando as condições $c_s = 1$ e $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$.

Agora, usamos esta bijeção para representar a partição $5 + 3 + 2$ como a matriz de duas linhas

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando todas as entradas desta matriz por 2 temos uma matriz da forma (4.1).

Então

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{10+6+2+2}_{\text{partes } \equiv 2(\text{mod } 4)} & \mapsto & \underbrace{5+3+1+1}_{\text{partes ímpares}} \mapsto \underbrace{5+3+2}_{\text{partes distintas}} \\
 \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{c_s = 1, c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}} & \mapsto & \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{c_s = 2, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, d_t \equiv 0(\text{mod } 2)}
 \end{array}$$

É muito fácil de ver que este procedimento pode ser invertido para ir de uma matriz de duas linhas na forma (4.1) para uma partição em partes pares $\equiv 2(\text{mod } 4)$. $\square$

Na tabela abaixo apresentamos a bijeção descrita acima para $n = 20$.

$18 + 2$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$
$14 + 6$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
$14 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$10 + 10$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}$
$10 + 6 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$10 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
$6 + 6 + 6 + 2$	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$6 + 6 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
$6 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

Apresentamos agora uma prova combinatória para o seguinte teorema usando o Resultado 4.1.

Teorema 4.1 *O número de partições de um inteiro positivo n em partes $\equiv 2 \pmod{4}$ é igual ao número de partições $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$ de n satisfazendo as condições:*

1. a maior parte λ_1 é par;
2. as partes ímpares são menores do que ou iguais a $\lambda_1/2$;
3. cada parte ímpar aparece um número par de vezes;
4. não há saltos nas partes pares;
5. partes pares maiores do que $\lambda_1/2$ aparecem apenas uma vez.

Demonstração do Teorema 4.1: Do Resultado 4.1 acima sabemos que existe uma bijeção entre o conjunto de partições de n em partes pares $\equiv 2 \pmod{4}$ e o conjunto de matrizes de duas linhas da forma (4.1) onde $c_s = 2, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, d_t \equiv 0 \pmod{2}$ e a soma de todas as entradas é igual a n . Então, o Teorema 4.1 estará provado se exibirmos uma bijeção entre este conjunto de matrizes e o conjunto de partições de n satisfazendo as condições de 1 a 5 acima.

Como $c_s = 2, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $d_t \equiv 0 \pmod{2}$, a matriz

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{s-1} & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2s) + d_2 + \cdots + d_s & (2s-2) + d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 4 + d_s & 2 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix},$$

pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 2s & 2s-2 & \cdots & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + \cdots + d_s & d_3 + \cdots + d_s & \cdots & d_s & 0 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Agora, associamos cada uma das matrizes em (4.2) com as seguintes partições

$$\begin{pmatrix} 2s & 2s-2 & \cdots & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \mu = (2s) + (2s-2) + \cdots + 4 + 2$$

$$\begin{pmatrix} d_2 + \cdots + d_s & d_3 + \cdots + d_s & \cdots & d_s & 0 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \text{a partição } \sigma \text{ tendo:} \\ d_1 \text{ partes } 1 \\ d_2 \text{ partes } 2 \\ \vdots \\ d_s \text{ partes } s \end{cases}$$

Para obter uma partição λ de n satisfazendo as condições de 1 a 5, tudo o que temos que fazer é juntar as partes das partições μ e σ .

Este procedimento pode ser facilmente invertido. De fato, se temos uma partição satisfazendo as condições de 1 a 5, começamos descobrindo o número de colunas da matriz de duas linhas dividindo a maior parte por 2. Então, para completar a construção devemos determinar $d_1, \dots, d_s$. Isto é facilmente feito contando o número de partes iguais a $1, \dots, s$. $\square$

Para ver a bijeção descrita na demonstração do Teorema 4.1, vamos examinar um exemplo. Considere a partição $26 + 22 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2$ em partes pares $\equiv 2 \pmod{4}$. Esta partição é representada pela matriz de duas linhas abaixo

$$26 + 22 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 22 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} 24 & 22 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 14 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Agora, seguindo o procedimento descrito acima, obtemos as partições associadas a essas duas matrizes:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 14 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 5 + 5 + \underbrace{3 + \dots + 3}_{12 \times} + 1 + 1.$$

Portanto, obtemos a partição satisfazendo as condições de 1 a 5:

$$26 + 22 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 \mapsto 10 + 8 + 6 + 5 + 5 + 4 + \underbrace{3 + \dots + 3}_{12 \times} + 2 + 1 + 1$$

A tabela abaixo mostra a bijeção para $n = 20$.

18+2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$	4+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
14+6	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	4+2+2+2+2+2+1+1+1+1+1+1
14+2+2+2	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	6+4+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1
10+10	$\begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}$	2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
10+6+2+2	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	6+4+3+3+2+1+1
10+2+2+2+2+2	$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	6+4+2+2+2+2+2
6+6+6+2	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	6+4+2+2+2+1+1+1+1
6+6+2+2+2+2	$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	4+2+2+2+2+2+2+2+1+1
6+2+2+2+2+2+2+2	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	8+6+4+2
2+2+2+2+2+2+2+2+2+2	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$	4+2+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1

2 Uma bijeção envolvendo partições cujas partes diferem por pelo menos 2

Nesta seção nossa meta é obter uma prova bijetiva para o teorema abaixo. Antes, porém, relembremos um resultado de [10].

Teorema 4.2 *O número de partições de um inteiro positivo n cujas partes diferem por pelo menos 2 é igual ao número de partições de n satisfazendo as condições:*

1. não há saltos nas partes ímpares;
2. cada parte par é menor do que ou igual ao número de partes ímpares diferentes;
3. a maior parte é ímpar, $2k - 1$, e cada parte ímpar maior do que k aparece apenas uma vez.

A prova deste teorema basea-se no seguinte resultado (Corolário 7, [10]):

Resultado 4.2 *O número de partições de n cuja diferença entre as partes é de pelo menos 2 é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde $c_s = 1, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n .

Demonstração do Teorema 4.2: Pelo Resultado 4.2, cada partição onde a diferença entre partes é de pelo menos 2 pode ser representada como uma matriz de duas linhas da forma (4.3) e vice-versa. Então, para provar o Teorema 4.2, devemos construir uma bijeção entre este conjunto de matrizes de duas linhas e o conjunto das partições de n satisfazendo as condições 1, 2 e 3.

Cada matriz da forma (4.3) pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} 2(s) - 1 + d_2 + \cdots + d_s & 2(s-1) - 1 + d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 3 + d_s & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix},$$

que, por sua vez, pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} 2s-1 & 2(s-1)-1 & \cdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + \cdots + d_s & d_3 + \cdots + d_s & \cdots & d_s & 0 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Associamos a matriz da esquerda em (4.4) com a partição $\lambda = (2s-1) + (2(s-1)-1) + \cdots + 1$. A segunda matriz é associada com a partição μ tendo: d_1 partes 1, d_2 partes 2, ..., d_s partes s . Considere a partição $\gamma = \lambda \cup \mu$. É fácil ver que γ não tem saltos nas partes ímpares, cada parte par é menor do que ou igual ao número de partes ímpares diferentes e cada parte ímpar maior do que s aparece apenas uma vez, onde $2s-1$ é sua maior parte.

Para ver como ir de uma partição satisfazendo 1, 2 e 3 para uma matriz da forma (4.3), o exemplo abaixo descreve o que acontece no caso geral.

Considere a partição $\sigma = 15 + 13 + 11 + 9 + 8 + 8 + 8 + 7 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$. Fazemos $\sigma = \lambda \cup \mu$, onde $\lambda = 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$ e $\mu = 8 + 8 + 8 + 3 + 2 + 2 + 1$. Como $\lambda_1 = 2 \times 8 - 1$, a matriz de duas linhas terá $s = 8$ colunas. A segunda matriz em (4.4) é construída colocando $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = 0$ e $d_8 = 3$. Então,

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 17 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

A tabela abaixo mostra a bijeção trabalhando para $n = 12$. Na primeira e na terceira colunas estão as partições mencionadas no Teorema 4.2, enquanto na segunda coluna estão as matrizes de duas linhas do Resultado 4.2 que são usadas para construir a bijeção entre a primeira e a segunda colunas.

12	$\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$11 + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$	$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$10 + 2$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	$3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$9 + 3$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$8 + 4$	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$
$7 + 5$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1$
$8 + 3 + 1$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$7 + 4 + 1$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$5 + 3 + 2 + 1 + 1$
$6 + 4 + 2$	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$5 + 3 + 3 + 1$

3 Uma representação como matrizes de duas linhas para partições em partes ímpares sem saltos

Em [4] a função geradora para partições em partes ímpares sem saltos é apresentada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^3) \cdots (1-q^{2n-1})}.$$

Apresentamos nesta seção uma representação como matrizes de duas linhas para estas partições seguindo a idéia introduzida em [9]. Também mostramos, para um inteiro positivo n , a bijeção entre este conjunto de matrizes e o conjunto de partições em partes ímpares sem saltos.

Teorema 4.3 *O número de partições de um inteiro positivo n em partes ímpares sem saltos é igual ao número de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

onde $c_s = 1, c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n .

Demonstração do Teorema 4.3: A bijeção pode ser facilmente descrita por um exemplo. Considere uma matriz genérica de três colunas da forma (4.5):

$$\begin{pmatrix} 5 + 2d_3 + 2d_2 & 3 + 2d_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Associamos a esta matriz a partição tendo $d_1 + 1$ partes 1, $d_2 + 1$ partes 3 e $d_3 + 1$ partes 5. É claro que esta partição não tem saltos nas partes ímpares e nem partes pares. Esta aplicação pode ser invertida para irmos de uma partição em partes ímpares sem saltos para uma matriz da forma (4.5).

Abaixo temos uma tabela com as partições de 10 em partes ímpares sem saltos e as matrizes de duas linhas da forma (4.5).

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$
$3+1+1+1+1+1+1+1$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$
$3+3+1+1+1+1$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
$3+3+3+1$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$5+3+1+1$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□

Capítulo 5

Interpretações combinatórias para algumas das *Mock Theta* *Functions*

Apresentamos neste capítulo interpretações combinatórias para algumas das *Mock Theta Functions*. Essas funções têm papel importante em Matemática Discreta. Elas aparecem em várias identidades.

Há um grande número de *Mock Theta Functions*. No entanto, com o conhecimento que temos até o momento sobre essa nova forma de representar partições como matrizes de duas linhas, foi possível dar interpretações combinatórias para apenas quatro delas. No capítulo seguinte apresentamos interpretações combinatórias para outras.

A obtenção de interpretações combinatórias para essas funções já é de grande interesse. De posse dessas interpretações podemos tentar obter provas bijetivas para identidades envolvendo-as, a exemplo do que foi feito nos Capítulos 2 e 3.

1 Introdução

Apresentamos aqui interpretações combinatórias para somas como foi feito em [9] e [10]. Como consequência, obtemos interpretações combinatórias para as seguintes *Mock*

$$\psi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q^2)_n} \quad (5.1)$$

$$F_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q; q^2)_n} \quad (5.2)$$

$$F_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q; q^2)_{n+1}} \quad (5.3)$$

$$\rho(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}} (-q)_n}{(q; q^2)_{n+1}} \quad (5.4)$$

2 Interpretação combinatória para $\psi(q)$

Introduzimos parâmetros k e j em $\psi(q)$ para obter uma interpretação combinatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^{2k})_n}.$$

O caso particular $k = j = 1$ possibilitará a obtenção de uma interpretação combinatória para (5.1). Definimos, para k e j inteiros positivos, $A_{k,j} = \{ck + dj | c, d \geq 0\}$.

Teorema 5.1 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencendo a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, sendo $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 1$ e $c_t = 1 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^{2k})_n}.$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ tendo exatamente m partes. Logo, a seguinte relação de recorrência é satisfeita por $f(m, n)$:

$$\begin{aligned} f(m, n) = & f(m, n - 2km + 2k - j) \\ & + f(m - 1, n - 2k(m - 1) - k). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para provar (5.5) dividimos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em dois conjuntos disjuntos:

1. aquelas para as quais $d_s \neq 0$;
 2. aquelas para as quais k é uma parte, ou seja, $d_s = 0$.
- daquelas partições no conjunto 1. subtraímos j da menor parte e $2k$ das outras $m - 1$ partes. Fazendo isto ficamos com partições de $n - 2k(m - 1) - j$ em m partes que são enumeradas por $f(m, n - 2k(m - 1) - j)$;

- daquelas partições no conjuntos 2. subtraímos a parte k e $2k$ das demais partes. Logo, obtemos partições de $n - 2k(m - 1) - k$ em $m - 1$ partes que são enumeradas por $f(m - 1, n - 2k(m - 1) - k)$.

Assumindo que $f(0, n) = 0$ se $n > 0$, $f(0, 0) = 1$ e $f(l, n) = 0$ if $l < 0$, defini-se:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n.$$

Por (5.5), segue que

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2k(m - 1) - j) z^m q^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2k(m - 1) - k) z^m q^n \\ &= q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2k(m - 1) - j) q^{2km} z^m q^{n-2k(m-1)-j} \\ &\quad + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2k(m - 1) - k) q^{2k(m-1)} z^{m-1} q^{n-2k(m-1)-k} \\ &= q^{j-2k} F(zq^{2k}, q) + zq^k F(zq^{2k}, q). \end{aligned}$$

Seja $h(m, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(m, n) q^n$, donde $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n \\ &\quad + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n. \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n na última igualdade temos

$$h(n, q) = q^{2k(n-1)+j} h(n, q) + q^{k(2n-1)} h(n - 1, q).$$

Logo,

$$h(n, q) = \frac{q^{k(2n-1)} h(n - 1, q)}{1 - q^{2k(n-1)+j}}.$$

Agora, observando que $h(0, q) = 1$, temos

$$\begin{aligned} h(n, q) &= \frac{q^{k(2n-1)}}{1 - q^{2k(n-1)+j}} \frac{q^{k(2n-3)}}{1 - q^{2k(n-2)+j}} \cdots \\ &\quad \cdots \frac{q^k h(0, q)}{1 - q^j} = \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^{2k})_n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^{2k})_n} z^n.$$

Para finalizar a demonstração, colocamos $z = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n)q^n \\ &= F(1, q) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(q^j; q^{2k})_n}.\end{aligned}$$

□

Agora, colocando $k = j = 1$ temos a seguinte interpretação combinatória para $\psi(q)$.

Corolário 5.1 $\psi(q)$ é a função geradora para as matrizes de duas linhas da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

onde c_t e d_t satisfazem $c_s = 1$ e $c_t = 1 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$.

Apesar deste corolário seguir diretamente do Teorema 5.1, podemos dar a ele uma prova combinatória bastante interessante.

Demonstração: Sabemos que $\psi(q)$ é a função geradora para partições em partes ímpares sem saltos (Seção 3 do capítulo anterior). Logo, o corolário estará provado se construirmos uma bijeção entre este conjunto de partições e o conjunto das matrizes de duas linhas da forma (5.6).

Dada uma matriz da forma (5.6) podemos reescrevê-la como

$$\begin{pmatrix} 2(s-1) + 1 + 2d_2 + \cdots + 2d_s & 2(s-2) + 1 + 2d_3 + \cdots + 2d_s & \cdots & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(s-1) + 1 & 2(s-2) + 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d_2 + \cdots + 2d_s & 2d_3 + \cdots + 2d_s & \cdots & 0 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}.$$

Associamos esta matriz à partição tendo $1 + d_1$ partes 1, $3 + d_2$ partes 3, ..., $2s - 1 + d_s$ partes $2s - 1$. Na direção contrária, dada uma partição em partes ímpares sem saltos, podemos facilmente inverter este procedimento para obter uma matriz de duas linhas da forma (5.6). □

A tabela abaixo mostra as partições e matrizes correspondentes obtidas pela bijeção na prova do Corolário 5.1.

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$
$3 + 3 + 1 + 1 + 1$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$5 + 3 + 1$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 Interpretação combinatória para $F_0(q)$

Como na seção anterior, introduzimos parâmetros em $F_0(q)$ da seguinte maneira

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2}}{(q^j; q^{2k})_n}.$$

Teorema 5.2 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 2$ e $c_t = 4 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2}}{(q^j; q^{2k})_n}.$$

Demonstração: Para provar este teorema definimos $f(m, n)$ como o número de partições enumeradas por $f(n)$ tendo exatamente m partes. Então, a seguinte relação de recorrência é satisfeita por $f(m, n)$:

$$\begin{aligned} f(m, n) = & f(m, n - 2k(m-1) - j) \\ & + f(m-1, n - 4k(m-1) - 2k). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para provar (5.7) dividimos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em dois conjuntos disjuntos:

1. aquelas tais que $d_s \neq 0$;
 2. aquelas tais que $2k$ é uma partes, ou seja, $d_s = 0$.
- daquelas no conjunto 1. subtraímos j da menor parte e $2k$ das $m-1$ partes restantes. Fazendo isso, obtemos partições de $n - 2k(m-1) - j$ em m partes que são enumeradas por $f(m, n - 2k(m-1) - j)$;

- daquelas no conjunto 2. retiramos a parte $2k$ e $4k$ das demais $m-1$ partes. Logo, obtemos partições de $n - 4k(m-1) - 2k$ em $m-1$ partes que são enumeradas por $f(m-1, n - 2k(m-1) - k)$.

Agora, a demonstração é análoga àquela do Teorema 5.1 e, por esta razão, vamos omiti-la. $\square$

Tomando $k = j = 1$ temos a seguinte interpretação combinatória para $F_0(q)$.

Corolário 5.2 $F_0(q)$ é a função geradora para as matrizes de duas linhas da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

onde c_t e d_t satisfazem $c_s = 2$ e $c_t = 4 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$.

Deste corolário obtemos uma outra interpretação combinatória para $F_0(q)$ em termos de partições.

Teorema 5.3 $F_0(q)$ é a função geradora para partições satisfazendo

1. partes pares são $\equiv 2 \pmod{4}$;
2. a maior parte λ_1 é par;
3. todo par $\equiv 2 \pmod{4}$ que é $\leq \lambda_1$ aparece como parte;
4. cada parte ímpar é $\leq \lambda_1/2$.

Demonstração: Sabemos pelo Corolário 5.2 que $F_0(q)$ é a função geradora para as matrizes da forma (5.8). Agora, vamos descrever como associar uma partição satisfazendo as condições do teorema a uma matriz da forma (5.8).

Como $c_s = 2$ e $c_t = 4 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, podemos reescrever (5.8) como

$$\begin{pmatrix} 4(s-1) + 2 + 2d_2 + \cdots + 2d_s & 4(s-2) + 2 + 2d_3 + \cdots + 2d_s & \cdots & 2 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(s-1) + 2 & 4(s-2) + 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d_2 + \cdots + 2d_s & 2d_3 + \cdots + 2d_s & \cdots & 0 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}.$$

A primeira matriz no lado direito da igualdade vamos associar com a partição $(4(s-1)+2) + (4(s-2)+2) + \dots + 2$. Já a segunda matriz será associada à partição tendo d_1 partes 1, d_2 partes 3, ..., d_s partes $2s-1$. Logo, a partição λ satisfazendo 1, 2, 3 e 4 é obtida unindo-se as partes de μ e ν : $\lambda = \mu \cup \nu$.

Esta aplicação é claramente invertível. Vejamos este fato por meio de um exemplo. Considere a partição $\lambda = 10 + 6 + 5 + 5 + 2 + 1$. Neste caso, $s = 3, d_1 = 1, d_2 = 0$ e $d_3 = 2$. Assim, λ é associada à matriz

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

4 Interpretação combinatória para $F_1(q)$

Vamos agora procurar uma interpretação combinatória para a *Mock Theta Function* $F_1(q)$. Começamos inserindo parâmetros k e j da seguinte maneira

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k(2n^2+2n)}}{(q^j; q^{2k})_{n+1}}.$$

Teorema 5.4 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 4 + 2d_s$ e $c_t = 4 + c_{t+1} + 2d_t$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k(2n^2+2n)}}{(q^j; q^{2k})_{n+1}}.$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ tendo exatamente m partes. Logo, a seguinte relação de recorrência é verificada por $f(m, n)$:

$$\begin{aligned} f(m, n) = & f(m, n - 2km - j) \\ & + f(m - 1, n - 4k(m - 1) - 4k). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para provar (5.9) dividimos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em dois conjuntos disjuntos:

1. aquelas que têm $d_s \neq 0$;
 2. aquelas que têm $4k$ como parte.
- daquelas no conjunto 1. subtraímos j da menor parte e $2k$ de cada uma das m partes. Assim, obtemos partições de $n - 2km - j$ em m partes que são enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$;

- daquelas no conjunto 2. retiramos a parte $4k$ e $4k$ das demais $m - 1$ partes. Obtemos, então, partições de $n - 4k(m - 1) - 4k$ em $m - 1$ partes que são enumeradas por $f(m - 1, n - 4k(m - 1) - 4k)$.

Agora a demonstração segue os mesmos passos da prova do Teorema 5.1. $\square$

Tomando $k = j = 1$ temos a interpretação combinatória para $F_1(q)$ que estávamos procurando.

Corolário 5.3 $F_1(q)$ é a função geradora para as matrizes de duas linhas da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

onde $c_s = 4 + 2d_s$ e $c_t = 4 + c_{t+1} + 2d_t$.

Como na seção anterior, temos uma interpretação combinatória em termos de partições para $F_1(q)$ que vem das matrizes da forma (5.10).

Teorema 5.5 $F_1(q)$ é a função geradora para as partições satisfazendo:

1. as partes são ≥ 3 ;
2. as partes pares são distintas e $\equiv 0 \pmod{4}$;
3. não há saltos nas partes pares;
4. a maior parte λ_1 é par;
5. cada parte ímpar $\leq \lambda_1/2 + 1$.

Demonstração: Sabemos pelo Corolário 5.3 que $F_1(q)$ é a função geradora para as matrizes da forma (5.10). Agora, vamos descrever como associar uma partição satisfazendo as condições de 1 a 5 a uma dada matriz da forma (5.10).

Como $c_s = 4 + 2d_s$ e $c_t = 4 + c_{t+1} + 2d_t$, podemos reescrever (5.10) da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} 4s + 2d_1 + \cdots + 2d_s & \cdots & 8 + 2d_{s-1} + 2d_s & 4 + 2d_s \\ d_1 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4s & \cdots & 8 & 4 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d_1 + \cdots + 2d_s & \cdots & 2d_{s-1} + 2d_s & 2d_s \\ d_1 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}.$$

A primeira matriz no lado direito da igualdade é associada à partição $\mu = 4s + 4(s - 1) + \dots + 4$. A segunda matriz é associada à partição ν tendo d_1 partes 3, d_2 partes 5, ..., d_s partes $2s + 1$. Logo, a partição λ satisfazendo as condições de 1 a 5 é obtida pela união das partes de μ e ν : $\lambda = \mu \cup \nu$.

Para nos convencer de que esta aplicação é invertível, é suficiente considerar um exemplo. Considere a partição $\lambda = 16 + 12 + 8 + 7 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 3$. Neste caso, $s = 4$, $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 1$ e $d_4 = 0$. Assim, λ é associada à matriz

$$\begin{pmatrix} 28 & 22 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

5 Interpretação combinatória para $\rho(q)$

Finalizamos este capítulo apresentando uma interpretação combinatória para $\rho(q)$. De forma análoga ao que temos feito, introduzimos parâmetros da seguinte maneira

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k \frac{n(n+1)}{2}} (-q^k; q^k)_n}{(q^j; q^{2k})_{n+1}}.$$

Teorema 5.6 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s \geq 1$ e $c_t = i_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, sendo $i_t \in \{1, 2\}$. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k \frac{n(n+1)}{2}} (-q^k; q^k)_n}{(q^j; q^{2k})_{n+1}}.$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ tendo exatamente m partes. Então a seguinte relação de recorrência é satisfeita por $f(m, n)$:

$$\begin{aligned} f(m, n) = & f(m, n - 2km - j) \\ & + f(m - 1, n - k(m - 1) - k) \\ & + f(m - 1, n - 2k(m - 1) - 2k). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Para provar (5.11) dividimos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em três conjuntos disjuntos:

1. aquelas que têm $d_s \neq 0$;
2. aquelas que têm k como parte;
3. aquelas que têm $2k$ como parte.

- daquelas no conjunto 1. subtraímos j da menor parte e $2k$ de cada uma das m partes. Assim, obtemos partições de $n - 2km - j$ em m partes que são enumeradas por $f(m, n - 2km - j)$;
- daquelas no conjunto 2. retiramos a parte k e k das demais $m - 1$ partes. Logo, obtemos partições de $n - k(m - 1) - k$ em $m - 1$ partes que são enumeradas por $f(m - 1, n - k(m - 1) - k)$;
- daquelas no conjunto 3. retiramos a parte $2k$ e $2k$ das outras $m - 1$ partes. Assim, obtemos partições de $n - 2k(m - 1) - 2k$ em $m - 1$ partes que são enumeradas por $f(m - 1, n - 2k(m - 1) - 2k)$.

A demonstração agora é análoga àquela do Teorema 5.1. □

Como consequência deste teorema, quando fazemos $k = j = 1$, temos a interpretação combinatória para $\rho(q)$ que estávamos procurando.

Corolário 5.4 $\rho(q)$ é a função geradora para as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

onde $c_s \geq 1$ e $c_t = i_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}$, $i_t \in \{1, 2\}$.

Capítulo 6

Estendendo a representação como matrizes de duas linhas para séries com coeficientes negativos e positivos

Neste capítulo, estendemos o que foi feito em [9] e [10] para somas cujas expansões em série de potências têm coeficientes não apenas positivos (como em todos os casos obtidos até agora), mas negativos também.

Com o que apresentamos neste capítulo é possível procurar interpretações combinatórias para uma gama maior ainda de somas e, conseqüentemente, buscar provas bijetivas para identidades nas quais estas aparecem.

1 Introdução

Em [9] e [10] uma representação como matrizes de duas linhas é apresentada para certas somas, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n}. \quad (6.1)$$

Ao expandirmos essa soma, notamos que o coeficiente de q^n é sempre positivo. Todas as interpretações combinatórias para somas como (7.1) obtidas em [9] e [10] são para somas cujas expansões têm apenas coeficientes positivos. Neste capítulo, estendemos esta idéia para algumas somas nas quais esses coeficientes são números positivos ou negativos.

Vamos mostrar como obter a interpretação combinatória para somas cujo coeficiente de q^n pode ser positivo ou negativo. Faremos isso considerando as seguintes *Mock Theta Functions*

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q^2; q^2)_n} \quad (6.2)$$

$$f_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n} \quad (6.3)$$

$$f_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(-q; q)_n} \quad (6.4)$$

e também

$$R(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(-q; q)_n}. \quad (6.5)$$

2 Interpretação combinatória para $\phi(q)$

Começamos pela introdução de parâmetros k e j em $\phi(q)$ da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(-q^{2j}; q^{2k})_n}.$$

O caso particular $k = j = 1$ possibilitará a obtenção da interpretação combinatória para $\phi(q)$. Vamos definir, como antes, para k e j inteiros positivos, $A_{k,j} = \{ck + dj | c, d \geq 0\}$.

Teorema 6.1 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencendo a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 1$, $d_t \equiv 0 \pmod{2}$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s \frac{d_t}{2}}$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(-q^{2j}; q^{2k})_n}.$$

Demonstração: Seja $f(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f(n)$ tendo exatamente m partes. Logo, a seguinte relação de recorrência é satisfeita por $f(m, n)$:

$$f(m, n) = f(m-1, n-2km+k) - f(m, n-2km+2k-2j). \quad (6.6)$$

Para provar (6.6) dividimos as partições enumeradas por $f(m, n)$ em dois conjuntos disjuntos:

1. aquelas que têm $d_s \neq 0$;
 2. aquelas que têm k como parte.
- daquelas no conjunto 1. subtraímos $2j$ da menor parte e $2k$ das outras $m - 1$ partes restantes. Assim, ficamos com partições de $n - 2k(m - 1) - 2j$ em m partes que são enumeradas por $-f(m, n - 2km + 2k - 2j)$; o sinal de menos se deve ao fato de termos mudado o peso das partições após fazer esta operação.
 - daquelas no conjunto 2. retiramos a parte k e $2k$ das demais partes, obtendo partições de $n - 2k(m - 1) - k$ em $m - 1$ partes que são enumeradas por $f(m - 1, n - 2km + k)$.

Assumindo que $f(0, n) = 0$ se $n > 0$, $f(0, 0) = 1$ e $f(l, n) = 0$ if $l < 0$, definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) z^m q^n.$$

Por (6.6), temos

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) z^m q^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - 2j) z^m q^n \\ &= -q^{2j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n - 2km + 2k - 2j) q^{2km} z^m q^{n-2km+2k-2j} \\ &\quad + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m - 1, n - 2km + k) z^{m-1} q^{2k(m-1)} q^{n-2km+k} \\ &= -q^{2j-2k} F(zq^{2k}, q) + zq^k F(zq^{2k}, q). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } h(m, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(m, n) q^n, \text{ donde } F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n \text{ e} \\ \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= -q^{2j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n \\ &\quad + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n. \end{aligned}$$

Comparando o coeficiente de z^n nesta última igualdade segue que

$$h(n, q) = -q^{2k(n-1)+2j} h(n, q) + q^{2kn-k} h(n-1, q).$$

Então,

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn-k} h(n-1, q)}{1 + q^{2k(n-1)+2j}}.$$

Observando que $h(0, q) = 1$, temos

$$\begin{aligned} h(n, q) &= \frac{q^{2kn-k}}{1 + q^{2k(n-1)+2j}} \times \frac{q^{2k(n-1)-k}}{1 + q^{2k(n-2)+2j}} \times \cdots \\ &\cdots \times \frac{q^k h(0, q)}{1 + q^{2j}} = \frac{q^{kn^2}}{(-q^{2j}; q^{2k})_n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(-q^{2j}; q^{2k})_n} z^n.$$

Para finalizar a demonstração, colocamos $z = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m, n) q^n \\ &= F(1, q) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(-q^{2j}; q^{2k})_n}. \end{aligned}$$

□

Agora, tomando $k = j = 1$ segue a interpretação combinatória para $\phi(q)$.

Corolário 6.1 $\phi(q)$ é a função geradora para as matrizes de duas linhas

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

onde $c_s = 1, d_t \equiv 0 \pmod{2}, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e tendo peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s \frac{d_t}{2}}$.

3 Interpretação combinatória para $f_0(q)$

O que faremos nesta e na próxima seções deste capítulo é análogo ao que fizemos na Seção 1. Assim, começamos pela introdução de parâmetros k e j em $f_0(q)$ da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(-q^j; q^k)_n}.$$

Como na seção anterior, temos o seguinte teorema cuja prova, por ser semelhante àquela do Teorema 6.1, será omitida.

Teorema 6.2 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes ao conjunto $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e tendo peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s d_t}$. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn^2}}{(-q^j; q^k)_n}.$$

Agora, tomando $k = j = 1$, segue a interpretação combinatória para $f_0(q)$.

Corolário 6.2 *$f_0(q)$ é a função geradora para as matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

onde $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e com peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s d_t}$.

4 Interpretação combinatória para $f_1(q)$

Neste caso, introduzimos parâmetros k e j em $f_1(q)$ da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k(n^2+n)}}{(-q^j; q^k)_n}.$$

Como antes, temos um teorema cuja prova será omitida, e, como consequência, a interpretação combinatória para $f_1(q)$.

Teorema 6.3 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes pertencendo a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 2$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e com peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s d_t}$. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k(n^2+n)}}{(-q^j; q^k)_n}.$$

Agora, tomando $k = j = 1$ temos a seguinte interpretação combinatória para $\phi(q)$.

Corolário 6.3 *$f_1(q)$ é a função geradora para as matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

onde $c_s = 2$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e tendo peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s d_t}$.

5 Interpretação combinatória para $R(q)$

Nesta seção, vamos mostrar que a Série de Ramanujan

$$R(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(-q; q)_n} \quad (6.10)$$

é a função geradora para uma certa classe de matrizes de duas linhas que têm uma informação muito interessante na segunda linha.

Consideremos a seguinte inserção de parâmetros em $R(q)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k \frac{n(n+1)}{2}}}{(-q^j; q^k)_n}.$$

Teorema 6.4 *Seja $f(n)$ o número de partições de n em partes no conjunto $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, onde $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 1$, $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e tendo peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s d_t}$. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k \frac{n(n+1)}{2}}}{(-q^j; q^k)_n}.$$

A prova deste teorema é análoga àquela do Teorema 6.1. Agora, tomando $k = j = 1$ temos a seguinte interpretação combinatória para $R(q)$.

Corolário 6.4 *$R(q)$ é a função geradora para matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

onde $c_s = 1$, $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e com peso $(-1)^{\sum_{t=1}^s d_t}$.

Como é lembrado em [5], o coeficiente de q^n na expansão de $R(q)$ é o excesso do número de partições de n em partes distintas com posto par sobre aquelas com posto ímpar, onde o posto de uma partição é a maior parte menos o número de partes. Vamos mostrar que existe uma bijeção bastante natural entre estas partições e as matrizes de duas linhas do Corolário 6.4 e que a segunda linha toma conta do posto.

Para ir de uma partição em partes distintas λ para uma matriz de duas linhas da forma (6.11), começamos expressando a menor parte como $1 + d_s$, depois expressamos a parte anterior como $2 + d_{s-1} + d_s$ e assim por diante até a maior parte que é expressa como $s + d_1 + \cdots + d_s$. Sabendo que a maior parte é $s + d_1 + \cdots + d_s$ e que o número de partes é s podemos ver que o posto é exatamente $d_1 + \cdots + d_s$. Então, o peso da matriz obtida desse modo é $(-1)^{rank(\lambda)}$. Dada uma matriz da forma (6.11) obtemos uma partição em partes distintas somando as entradas em cada coluna.

A tabela abaixo mostra o conjunto de partições e matrizes descritas acima para $n = 7$.

partition	rank	matrix	weight
7	6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$	1
6 + 1	4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	1
5 + 2	3	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1
4 + 3	2	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	1
4 + 2 + 1	1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	-1

Capítulo 7

On a combinatorial proof for an identity involving the triangular numbers

Finalizamos este trabalho apresentando, neste último capítulo, uma prova combinatória para uma identidade envolvendo os números triangulares. Essa prova assemelha-se àquela dada por F. Franklin para a identidade que Euler apresentou envolvendo os números pentagonais¹.

O que veremos neste capítulo não faz uso da nova forma de representar partições como matrizes de duas linhas.

Essa prova bijetiva que obtivemos trabalha apenas com o Gráfico de Ferrers de cada partição. É uma simples e elegante prova de uma identidade no mínimo surpreendente.

O conteúdo deste capítulo foi submetido como um artigo para *The Electronic Journal of Combinatorics*.

¹Trata-se do Teorema Pentagonal de Euler que pode ser visto em [6]

On a combinatorial proof for an identity involving the triangular numbers

Jose Plínio O. Santos

IMECC - Unicamp, C.P. 6065, 13083-970, Campinas-SP, Brazil

e-mail: josepli@ime.unicamp.br

Robson da Silva

ICE - Unifei, C.P. 50, 37500-903, Itajubá-MG, Brazil

e-mail: rsilva@unifei.edu.br

abstract In this paper we present a combinatorial proof for an identity involving the triangular numbers. The proof resembles Franklin's proof of Euler's Pentagonal Number Theorem.

In its analytical version Euler's Pentagonal Number Theorem can be stated as follows:

Theorem 1 (Euler's Pentagonal Number Theorem)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} = (q; q)_{\infty}$$

This theorem has a beautiful combinatorial interpretation due to Legendre given below.

Theorem 2 (Combinatorial Version of Euler's Pentagonal Number Theorem) *Let $D_e(n)$ denote the number of partitions of n into an even number of distinct parts, and let $D_o(n)$ denote the number of partitions of n into an odd number of distinct parts. Then*

$$D_e(n) - D_o(n) = \begin{cases} (-1)^j, & \text{if } n = j(3j \pm 1)/2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For this version of Euler's Theorem there is a well known combinatorial proof given by F. Franklin in 1881 (see [1]). In this paper we present a proof for the following identity that resembles Franklin's proof.

Theorem 3 *For any complex number $|q| < 1$*

$$1 + q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2n})}{(1 - q^3)(1 - q^5) \cdots (1 - q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (7.1)$$

In [7] there is a different proof of this identity.

We know that the sum on the LHS of (7.1) generates partitions into parts greater than 1 where the even parts are distinct, the largest part is odd, and having weight $(-1)^m$, where m is the number of even parts. We also know that the exponents of q on the RHS of (7.1) are the triangular numbers.

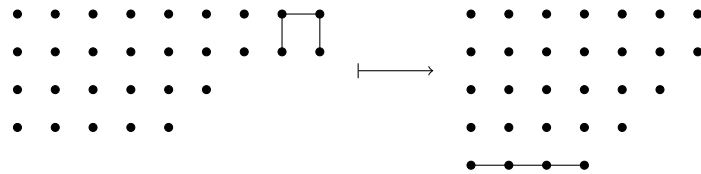
The identity (1) can be rewritten as

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (7.2)$$

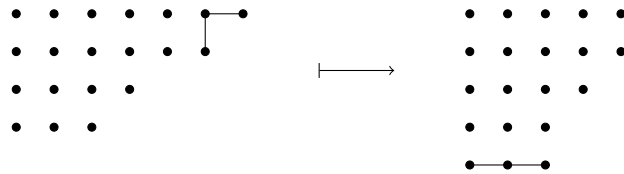
In order to prove the identity (7.2) we must show that the coefficient of q^n on the LHS is either 1 if n is a triangular number or 0 otherwise. In other words, if $p_e(n)$ (and $p_o(n)$) denotes the number of partitions of n generated by the LHS of (7.2) having an even (an odd) number of even parts, then we have to show that

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \text{ is a triangular number} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.3)$$

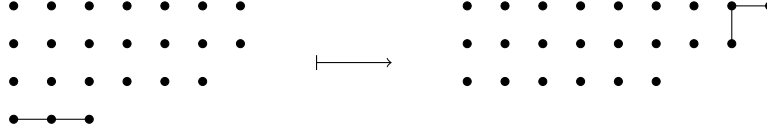
The proof of Theorem 3. On the set $\mathcal{P}(n)$ of partitions of n into parts greater than 1 where the even parts are distinct and the largest part is odd we define the following map. Given a partition $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s \in \mathcal{P}(n)$ we look at the Ferrers graph of λ . From this diagram we remove the last two columns to form a new part λ_{s+1} , being left with a partition $\lambda' = \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s$ of $n - \lambda_{s+1}$. We insert this new part below the smallest part of λ' when either $\lambda_{s+1} \leq \lambda'_s$ and λ'_s is odd or $\lambda_{s+1} < \lambda'_s$ and λ'_s is even, being left with the partition $\lambda'' = \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s + \lambda_{s+1} \in \mathcal{P}(n)$. For example:



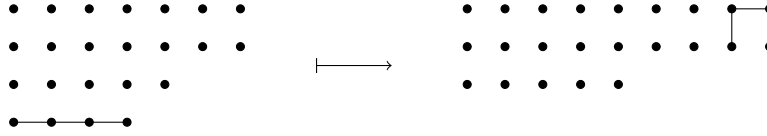
and



But if $\lambda_{s+1} > \lambda'_s$ or $\lambda_{s+1} = \lambda'_s$ and λ'_s is even, we can not do this operation in order to obtain a partition in $\mathcal{P}(n)$. In this case, we remove the smallest part λ_s to form two new columns that are equal (when λ_s is even) or differ by 1 (when λ_s is odd). We add these columns to the Ferrer's graph of the partition $\lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}$. It is easy to verify that the partition obtained in this way is in $\mathcal{P}(n)$. For example:



and



We observe now that when n is a triangular number, $n = \frac{k(k+1)}{2}$, this procedure does not work for that partition in $\mathcal{P}(n)$ having $\frac{k}{2}$ parts $k+1$, when k is even, or $\frac{k+1}{2}$ parts k , if k is odd. In fact:

- if we remove the last two columns from the partition having $\frac{k}{2}$ parts $k+1$, when k is even, the new part will have length $2\frac{k}{2} = k$ which can not be put below the smallest part $k+1-2 = k-1$. Also, by removing the smallest part of length $k+1$, we can not put the new two columns (one having length $\frac{k}{2}+1$ and the other having length $\frac{k}{2}$) in front of the last column (that has length $\frac{k}{2}-1$) of the partition with the smallest part removed.
- if we remove the last two columns from the partition having $\frac{k+1}{2}$ parts k , when k is odd, the new part will have length $2\frac{k+1}{2} = k+1$ which can not be put below the new smallest part $k-2$. Also, by removing the smallest part of length k , we can not put the new two columns (the greatest one having length $\frac{k+1}{2}$) in front of the last column (that has length $\frac{k-1}{2}$) of the partition with the smallest part removed.

For example, it is not possible to apply any of the two maps described above in the partitions of $15(k=5)$ and $21(k=6)$ below



To finish the proof, we have to show that the map discribed above changes the parity of the number of even parts. By doing this we will have shown that (3) holds.

In the cases we can remove the two last columns of the Ferrers graph of a partition in $\mathcal{P}(n)$ we have two possibilites: if the columns have the same lenght, we do not modify the number of odd parts and the new part has leght even, which modify the parity of the number of even parts; if the columns differ by 1 we lose one even part and obtain an odd part as the new part modifying the parity of the number of even parts. These arguments can be easily reversed in order to show that the inverse procedure also modify the parity of the number of even parts. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews, G.E., *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Rota, Editor), Vol. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [2] B. C. Berndt, *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, AMS, Providence, RI, USA, 2006.
- [3] Brietzke, E.H.M., Santos, J.P.O., Silva, R., *Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions*, Ramanujan Journal, submitted.

Capítulo 8

Conclusão

Neste trabalho procuramos obter consequências e aplicações interessantes da representação de partições como matrizes de duas linhas introduzidas em [9] e [10]. Dessa investigação resultou um artigo aceito para publicação, (Capítulo 2 ou [11]) e outro submetido, (Capítulo 3 ou [7]), este último com a colaboração fundamental do professor Dr. Eduardo Brietzke (UFRGS).

Além desses artigos, obtivemos também algumas consequências interessantes (Capítulos 4 e 5) usando a representação matricial para partições. No Capítulo 6, conseguimos estender a interpretação em termos de matrizes para certas somas cujos coeficientes nas expansões em séries de potências são inteiros não apenas positivos (como obtido até aqui, [9] e [10]), mas também negativos. Nesta extensão do trabalho feito em [9], soubemos dar um sentido ao sinal negativo. Há ainda muito o que se fazer nesta direção. Esses resultados devem fazer parte de um outro trabalho a ser submetido para publicação.

Ao final desta tese, Capítulo 7, apresentamos algo que foge um pouco do assunto principal. Trata-se de uma prova combinatória de uma identidade obtida de maneira semelhante àquela dada por F. Franklin (1881) ao Teorema dos Número Pentagonais de Euler.

Na continuação do que fizemos até o momento, podemos destacar a busca por novas interpretações combinatórias para somas (como aquela do Capítulo 2) e a consequente procura por provas bijetivas de identidades onde estas somas aparecem, principalmente para aquelas que carecem de provas combinatórias. Em particular, no caso das *Mock Theta Functions* devido ao seu grande interesse em Matemática Discreta. Muitas bijeções, como aquelas apresentadas no Capítulo 4, podem ser obtidas.

Algo que vale a pena investigar a fundo é a busca por interpretações combinatórias

para somas, em termos de matrizes, tendo em vista o que está feito no Capítulo 6. Há um grande número de tais somas, como por exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n^2}.$$

Por fim, demonstrações semelhantes àquela apresentada no Capítulo 7 podem ser procuradas para várias identidades daquele tipo. Citamos, por exemplo, o problema em aberto (ver [8]): exibir uma involução no conjunto das partições de n em partes distintas tendo a menor parte ímpar de modo que seja possível comprovar que a cardinalidade deste conjunto é ímpar se, e somente se, n for um quadrado perfeito.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews, G.E., *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Rota, Editor), Vol. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [2] Andrews G.E., *Mock theta functions*, Proc. Symposia in Pure Math. **49** Part 2, 283-298, 1989.
- [3] Andrews, G.E. *Three-quadrant Ferrers Graphs*, Indian Journal of Mathematics **42**, 1–7, 2000.
- [4] Andrews, G.E., *Partitions with initial repetitions* (<http://www.math.psu.edu/andrews/preprints.html>), 2006.
- [5] Andrews, G.E., *Partitions with distinct evens*, submitted, (<http://www.math.psu.edu/andrews/preprints.html>).
- [6] Andrews, G.E., Eriksson, K.; *Integer partitions*, Cambridge University Press, 2004.
- [7] Brietzke, E.H.M., Santos, J.P.O., Silva, R., *Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions*, Ramanujan Journal, submetido.
- [8] Pak, I., *Partition Bijections, a Survey*, Ramanujan Journal, vol. 12, 5-75, 2006.
- [9] Ribeiro, A.C., *Aspectos Combinatórios de Identidades do Tipo Rogers-Ramanujan*, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [10] Santos, J.P.O., Mondek, P., Ribeiro, A.C., *New two line arrays representing partitions*, Annals of Combinatorics, aceito.
- [11] Santos, J.P.O., Silva, R., *A combinatorial proof for an identity involving partitions with distinct odd parts*, South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, aceito.