

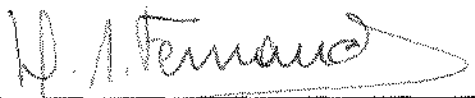
ESPAÇOS H^1 E BMO NÃO-ISOTRÓPICOS E OPERADORES INTEGRAIS

SINGULARES VETORIAIS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Luiz Antonio Pereira Gomes e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de outubro de 1992.

Prof. Dr.


Dicesar Lass Fernandez

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Ciências.

À Elenice, Gustavo e André Luiz pelos
momentos de renúncia e compreensão.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez, pela dedicada e competente orientação, assim como pelo incentivo dado durante a elaboração desta tese.

Ao Prof. Dr. Benjamin Bordin, pela valiosa ajuda prestada em todo o desenrolar deste trabalho.

À Universidade Estadual de Maringá, por ter possibilitado a realização do curso de Pós-Graduação.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UEM, pelo apoio e incentivo dado durante a realização deste trabalho, aos amigos e a todos que de uma forma ou de outra nos apoiaram.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO 1 - ESPAÇOS DE HARDY H^1 NÃO-ISOTRÓPICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS	1
1.1. RESULTADOS PRELIMINARES	2
1.2. OS ESPAÇOS DE HARDY H_{Hb}^1 E H_{ai}^1 NÃO-ISOTRÓPICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS	11
1.3. O ESPAÇO BMO NÃO-ISOTRÓPICO DE FUNÇÕES VETORIAIS	17
CAPÍTULO 2 - OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS SOBRE OS ESPAÇOS H^1 E BMO NÃO-ISOTRÓPICOS	37
2.1. OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS	38
2.2. OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS COM NÚCLEO PRODUTO SOBRE O ESPAÇO $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ NÃO-ISOTRÓPICO	39
2.3. OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS COM NÚCLEO PRODUTO SOBRE ESPAÇOS DE HARDY $H^1(\mathbb{R}^2, E)$ NÃO-ISOTRÓPICOS	60
CAPÍTULO 3 - OS ESPAÇOS $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ NÃO-ISOTRÓPICOS ..	70
3.1. OS ESPAÇOS $L^P(\mathbb{R}^2)$ MISTOS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS INTEIRAS	71
3.2. OS ESPAÇOS $L^P(\ell^Q)$ DE FUNÇÕES ANALÍTICAS INTEIRAS A VALORES VETORIAIS	75
3.3. OS ESPAÇOS $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ NÃO-ISOTRÓPICOS	81

CAPÍTULO 4 - A CARACTERIZAÇÃO $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$	87
4.1. RESULTADOS PRELIMINARES	88
4.2. UM SUBESPAÇO DENSO DE $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$	95
4.3. A CARACTERIZAÇÃO $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$	100
REFERÊNCIAS	105

INTRODUÇÃO

A teoria dos espaços de Hardy H^p tem sua origem no estudo dos valores fronteira de funções analíticas no interior do disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pode-se afirmar que o primeiro resultado nesse sentido é devido a Fatou, que em 1906 demonstrou que funções analíticas e limitadas em D (isto é, funções de H^∞) possuem limite em quase todo ponto da fronteira de D .

Os espaços H^p , $p > 0$, apareceram como espaços de funções analíticas em D , cujas restrições a circunferências de raio r possuem normas L^p limitadas para todo r ($0 \leq r < 1$):

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Na segunda década deste século G.Hardy e os irmãos F.Riesz e M.Riesz demonstraram que um resultado análogo ao de Fatou para H^∞ é válido para funções de H^2 , e os mesmos irmãos Riesz estenderam o resultado para todo $p > 0$. As técnicas utilizadas neste estágio inicial do desenvolvimento da teoria eram fundamentalmente de variável complexa, o que impedia a extensão da teoria para espaços de dimensões maiores.

O primeiro passo no sentido de tornar a teoria dos espaços H^p independente da teoria das funções analíticas é obtido com a utilização das chamadas técnicas reais e com o estudo do espaço $Re H^p$ (parte real de H^p). Isto possibilitou uma caracterização do espaço $Re H^p$ em termos da função conjugada, que é um dos operadores importantes da análise de Fourier. Mas o passo fundamental nesse sentido foi dado por Burkholder, Gundy e Silverstein [11], que caracterizam os espaços $Re H^p$ em termos de funções maximais.

Paralelamente à teoria dos espaços H^p definidos sobre o disco unitário D , existe a teoria dos espaços H^p definidos sobre o semi-plano $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0\}$. A relação entre os espaços H^p sobre D e os espaços H^p sobre $\mathbb{R}_+^2$ é dada pela transformação conforme que aplica D no semi-plano $\mathbb{R}_+^2$.

A teoria dos espaços H^p apresenta aspectos distintos nos casos em que $0 < p < 1$, $p = 1$ e $1 < p < \infty$. No último caso são isomorfos a L^p ; no primeiro caso apesar de serem apenas espaços quase-normados os duais não se reduzem a $\{0\}$ e são interessantes. O caso $p = 1$ é distinto dos demais pois é um espaço normado mas não isomorfo a L^1 .

Em muitas situações que ocorrem em análise de Fourier o espaço H^1 é considerado um bom substituto do espaço L^1 . De fato, é bem conhecido (ver A.Zygmund [63] e R.R.Coifman e G.Weiss [20]) que existem muitos resultados em análise de Fourier que são válidos para L^p , $1 < p < \infty$, mas que não permanecem válidos para L^1 . No entanto, a substituição de L^1 por H^1 recupera a validade desses resultados.

Um passo importante no desenvolvimento da teoria dos espaços de Hardy foi dado por C.Fefferman [24], que caracterizou o dual de H^1 como o espaço BMO de funções de oscilação média limitada (Bounded Mean Oscillation). Este espaço, que contém estritamente o espaço L^∞ , foi introduzido por John e Nirenberg [39]. Essa caracterização leva a uma nova interpretação dos espaços de Hardy, pois conduz de maneira direta ao que se conhece como "decomposição atômica" das funções de H^1 .

Posteriormente, R.R.Coifman [19] fornece uma caracterização dos espaços H^p , $0 < p \leq 1$, em termos de funções chamadas átomos, construindo os átomos através da função maximal de Fefferman-Stein [26]. Uma das vantagens da caracterização atômica é que facilita a estimativa de muitos operadores (em particular, operadores de convolução) sobre os espaços H^p , pois permite que tal estimativa seja realizada apenas sobre átomos, que são funções relativamente simples.

O grande desenvolvimento da teoria dos espaços de Hardy H^p nas últimas três décadas tem propiciado variadas extensões destes espaços. Assim, tem sido estudados espaços H^p sobre domínios do plano complexo [22], espaços H^1 sobre o polidisco [48], espaços H^p de várias variáveis [26], espaços H^p com pesos [33], espaços H^p sobre espaços de tipo homogêneo [20], espaços H^p de tipo parabólico ([12],[13]), espaços H^p sobre produto

de semi-planos, entre outras extensões.

A teoria dos espaços de Hardy H^p sobre produto de semi-planos tem sido estudada por diversos autores como R.F.Gundy [35], R.F.Gundy e E.M.Stein [36], S.Y.A.Chang [15], S.Y.A.Chang e R.Fefferman ([16], [17], [18]), R.Fefferman ([27], [28], [29]), K.Merryfield [43], H.Sato ([49], [50]), S.Sato [51], N.V.P.Bertolo [6], B.Bordin [8], B.Bordin e D.L.Fernandez [9], entre outros.

Neste trabalho estamos tratando particularmente de alguns aspectos da teoria do espaço de Hardy H^1 sobre produto de semi-planos. Num dos trabalhos fundamentais da teoria dos espaços H^p sobre produto de semi-planos, R.F.Gundy e E.M.Stein [36] demonstram que o espaço H^1 sobre produto de semi-planos pode ser caracterizado via transformadas dupla e parciais de Hilbert, através de integrais de área e por funções maximais, com normas equivalentes. Posteriormente, S.Y.A.Chang e R.Fefferman [16] obtiveram uma decomposição atômica para o espaço H^1 sobre produto de semi-planos. Mais precisamente, eles mostraram que todo elemento f pertencente a H^1 admite uma decomposição atômica $f = \sum_k \lambda_k a_k$, onde a_k são funções chamadas átomos e λ_k são escalares satisfazendo $\sum_k |\lambda_k| \leq c \|f\|_{H^1}$. Os mesmos autores em outro trabalho [17] demonstram que a recíproca desse resultado também é verdadeira, ou seja, que o espaço definido através das decomposições atômicas acima citadas caracteriza o espaço H^1 .

O espaço H^1 sobre produto de semi-planos (assim como suas diversas caracterizações) também costuma ser denominado de espaço H^1 não-isotrópico. Este espaço é uma generalização do espaço de Hardy H^1 definido sobre o semi-plano $\mathbb{R}_+^2$, que também costuma receber a denominação de espaço H^1 isotrópico.

Em [32] D.L.Fernandez obtem um teorema que fornece condições para que certos operadores integrais singulares vetoriais sejam limitados sobre os espaços $L^p = L^p(L^{p'})$ de normas mistas de Benedek-Panzone [3]. Este teorema, por sua vez, generaliza uma versão de um teorema de A.Benedek, A.P.Calderón e R.Panzone, obtida por J.L.Rubio de Francia, F.Ruiz e J.L.Torrea em ([46], [47]). Esta versão de Rubio de Francia-Ruiz-Torrea refere-se não somente a operadores integrais singulares do tipo convolução mas também a operadores integrais singulares com núcleos variáveis e garante a limitação desses operadores sobre L^p para $1 < p < \infty$. Nos casos limites $p = 1$ e $p = \infty$ a limitação não se verifica, o que pode ser visto

tomando a transformada de Hilbert, que é o exemplo clássico dos operadores considerados por Rubio de Francia-Ruiz-Torrea. Por outro lado, estes mesmos autores demonstram em ([46], [47]) que tais operadores integrais singulares são do tipo forte (H^1, L^1) e do tipo forte (L^∞, BMO) , isto é, são limitados de H^1 em L^1 e de L^∞ em BMO (no caso isotrópico). Isto fornece mais um exemplo da utilidade do espaço H^1 como um bom substituto do espaço L^1 e também mostra a importância do espaço BMO como substituto do espaço L^∞ .

Ainda em [47], Rubio de Francia-Ruiz-Torrea utilizam as limitações (H^1, L^1) e (L^∞, BMO) , da classe de operadores integrais singulares vetoriais por eles considerada, para demonstrar que o espaço H^1 isotrópico pode ser caracterizado como o espaço $H_0^{1,2}$. Este espaço é um caso particular dos espaços $H_{p,q}^s$ que foram estudados por J. Peetre [45] e H. Triebel [59] e são definidos utilizando-se sistemas especiais de funções testes cujas transformadas de Fourier decompõem a identidade.

Por outro lado, em [32] Fernandez não trata das limitações dos operadores integrais singulares vetoriais nos casos (H^1, L^1) e (L^∞, BMO) (onde H^1 e BMO são espaços não-isotrópicos), nem obtem a caracterização $H^1 = H_0^{1,2}$ no caso não-isotrópico.

São dois os objetivos principais deste trabalho. O primeiro é obter versões para os espaços H^1 e BMO não-isotrópicos dos resultados de Rubio de Francia-Ruiz-Torrea sobre operadores integrais singulares. Essas versões são análogas as que Fernandez obteve para espaços L^p de normas mistas. O segundo é obter uma caracterização do tipo $H^1 = H_0^{1,2}$ para o caso não-isotrópico.

Passemos a uma descrição sucinta dos capítulos que compõem este trabalho.

No Capítulo 1, inicialmente relembramos diversos conceitos e resultados que serão utilizados no trabalho. A seguir, definimos os espaços de Hardy não-isotrópicos H_{Hb}^1 (H^1 Hilbert) e H_{at}^1 (H^1 atômico) de funções vetoriais, que generalizam, respectivamente, os espaços não-isotrópicos H_{Hb}^1 e H_{at}^1 de funções escalares. Algumas propriedades desses espaços são demonstradas e entre elas destacamos uma que fornece um subespaço denso do espaço H_{Hb}^1 de funções vetoriais. Também definimos um espaço BMO (Bounded Mean Oscillation) de funções vetoriais, que generaliza uma versão do espaço BMO de funções escalares introduzido por S.Y.A.Chang

e R.Fefferman em [16]. São dois os resultados principais obtidos nesse capítulo. O primeiro é uma extensão para o caso vetorial do resultado de dualidade que afirma que o dual topológico do espaço não-isotrópico $H^1_{H^b}$ é o espaço BMO não-isotrópico. No caso escalar este resultado é devido a C.Fefferman e E.M.Stein [26] quando os espaços envolvidos são isotrópicos, e a H.Sato ([49, [50]]) no caso não-isotrópico. Este resultado de dualidade terá importância na demonstração da caracterização do espaço H^1 que é realizada no Capítulo 4. O segundo resultado é uma caracterização do espaço BMO de funções vetoriais em termos de certas medidas denominadas medidas de Carleson. Esta caracterização, por sua vez, será fundamental no Capítulo 2 para demonstrar que certa classe de operadores integrais singulares ali considerada é limitada de L^∞_c em BMO .

O objetivo do Capítulo 2, que é um dos capítulos principais deste trabalho, é estudar a ação de operadores integrais singulares vetoriais com núcleo produto sobre os espaços H^1 e BMO não-isotrópicos. Os núcleos dos operadores que estudamos são do tipo $K(x, u, y, v) = k_2(y, v) \cdot k_1(x, u)$ (o produto aqui indicando na verdade a composição de aplicações); onde cada k_i , $i = 1, 2$, é uma aplicação tomando valores num conveniente espaço de aplicações lineares $L(E, F)$ (E, F espaços de Banach). Os operadores que consideramos são análogos aos que D.L.Fernandez [32] demonstrou serem limitados sobre os espaços L^p de normas mistas de Benedek-Panzone. Nosso objetivo aqui é obter versões para os espaços H^1 e BMO não-isotrópicos do resultado de Fernandez. Estas versões desempenham um papel importante na demonstração da caracterização do espaço H^1 que é realizada no Capítulo 4. A primeira versão fornece condições para que operadores integrais singulares vetoriais análogos aos considerados por Fernandez sejam limitados de L^∞_c em BMO e a segunda versão dá condições para que esses mesmos operadores sejam limitados de H^1 em L^1 .

No Capítulo 3, apresentamos alguns aspectos dos espaços $H^{p,q}_S$ não-isotrópicos. Estes espaços constituem generalizações dos espaços $H^{p,q}_T$ que formam estudados por J.Peetre e H.Triebel e referidos anteriormente. O principal resultado deste capítulo é o que afirma que os espaços $H^{p,q}_S$ independem dos particulares sistemas de funções testes que são utilizados para defini-los. Isto será essencial no Capítulo 4 para demonstrar que um caso particular dos espaços $H^{p,q}_S$ (caso em que $S = (0,0)$, $P = (1,1)$ e $Q = (2,2)$) caracteriza o espaço de Hardy H^1 não-isotrópico.

Finalmente, no último capítulo obtemos uma caracterização do espaço de Hardy H^1 não-isotrópico como o espaço não-isotrópico $H^{1,2}_0$, que é um caso particular dos espaços $H^{p,q}_S$ definidos no Capítulo 3. Caracterização deste tipo para o espaço H^1 isotrópico foi demonstrada por J.Peetre ([44], [45]), H.Triebel [59] e J.L.Rubio de Francia-F.J.Ruiz-J.L.Torrea [47]. Salientamos, no entanto, que as demonstrações que esses diversos autores apresentam, ou contém passagens onde é difícil perceber os argumentos envolvidos ou apenas são dadas algumas indicações. Portanto, antes de iniciarmos a demonstração da caracterização de H^1 no caso não-isotrópico, tivemos que desenvolver detalhadamente a demonstração do caso isotrópico, a fim de tornar clara as idéias envolvidas nesse caso. Mas ao tentarmos adaptar a demonstração para o caso não-isotrópico, surgiram várias dificuldades que não aparecem no caso isotrópico. Isto exigiu que idéias novas fossem empregadas na demonstração do caso não-isotrópico. Esta demonstração, por sua vez, utiliza como ingredientes essenciais o teorema de dualidade do espaço H^1 não-isotrópico a valores vetoriais apresentado no Capítulo 1, os teoremas sobre operadores integrais singulares vetoriais obtidos no Capítulo 2 e o resultado contido no Capítulo 3 que afirma que duas normas quaisquer do espaço $H^{1,2}_0$, definidas por sistemas de funções testes distintos, são equivalentes. Acreditamos que no contexto da teoria dos espaços H^p não-isotrópicos a caracterização do espaço H^1 que obtemos é nova (pelo menos não temos referências!).

Neste trabalho a letra C denotará sempre uma constante que poderá assumir mais de um valor numa mesma seqüência de desigualdades.

Finalmente observamos que, por uma questão de simplicidade de notação, os espaços de Hardy H^1 não-isotrópicos de funções à valores num espaço de Banach E estão sendo denotados por $H^1(\mathbb{R}^2, E)$, ao invés da notação mais sugestiva $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, E)$. Isto também vale para os outros espaços não-isotrópicos considerados neste trabalho.

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS DE HARDY H^1 NÃO-ISOTRÓPICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS.

Como já dissemos na introdução, um dos objetivos desta dissertação é obter uma caracterização do espaço de Hardy não-isotrópico H^1 de funções escalares como um elemento da escala de espaços $H_S^{p,q}$, a saber o espaço $H_0^{1,2}$. Isto será feito no Capítulo 4 com o auxílio de resultados que envolvem generalizações dos espaços de Hardy H^1 não-isotrópicos.

O objetivo do presente capítulo é apresentar essas generalizações e obter alguns desses resultados.

O parágrafo 1.1 consiste de um resumo dos principais conceitos e resultados que serão usados neste e nos demais capítulos do trabalho. Não faremos nenhuma demonstração, pois podem ser encontradas nas respectivas referências.

No parágrafo 1.2 definimos os espaços de Hardy não-isotrópicos H_{Ht}^1 (H^1 Hilbert) e H_{at}^1 (H^1 atômico) de funções vetoriais, que generalizam, respectivamente, os espaços não-isotrópicos H_{Ht}^1 e H_{at}^1 de funções escalares. Algumas propriedades desses espaços são demonstradas e entre elas destacamos o Teorema 1.2.5 que fornece um subespaço denso de $H_{Ht}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ (espaço H^1 Hilbert de funções a valores em ℓ^2). Este resultado será utilizado na demonstração do Teorema de dualidade para o espaço $H_{Ht}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ que será feita no parágrafo seguinte.

No parágrafo 1.3 introduzimos o espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ (Bounded Mean Oscillation) de funções vetoriais e demonstramos que este espaço é o dual

topológico do espaço $H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Este resultado de dualidade terá importância fundamental na demonstração da caracterização do espaço H^1 que é obtida no Capítulo 4.

Outro resultado importante é o Teorema 1.3.17 que fornece uma caracterização do espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ em termos de certas medidas denominadas medidas de Carleson. Esta caracterização será essencial no Capítulo 2 para demonstrar um teorema que afirma que certos operadores integrais singulares vetoriais são limitados de $L_c^\infty(\mathbb{R}^2, E)$ em $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, onde E é um espaço de Banach.

1.1 RESULTADOS PRELIMINARES.

Este parágrafo consta de uma série de definições, teoremas e propriedades que usaremos neste e nos demais capítulos. Não faremos nenhuma demonstração, pois podem ser encontradas nas respectivas referências.

1.1.1 NOTAÇÕES. Indicaremos por $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano n -dimensional e se $x = (x_1, \dots, x_n)$ é um ponto de $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

denotará a norma Euclidiana.

Dado um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$, $|A|$ denotará a medida de Lebesgue de A , χ_A representará a função característica de A e a notação

$$\int_A f(x) dx$$

indicará integração no sentido de Lebesgue. Quando $A = \mathbb{R}^n$ e não houver possibilidade de confusão escreveremos simplesmente $\int f(x) dx$.

Representaremos por $\mathbb{Z}$ o conjunto de todos os números inteiros, por $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não-negativos e por $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos.

Se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, designaremos os

produtos $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ e $\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$, respectivamente, por x^α e $\alpha!$.

Dado, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, chamaremos de norma de α ao número natural $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, e denotaremos por D^α o operador de diferenciação

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Sejam $\mathcal{U}$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e f uma função definida em $\mathcal{U}$ à valores em $\mathcal{C}$. Indicaremos por $\text{supp } f$ o suporte de f , isto é, o menor conjunto fechado (relativamente a $\mathcal{U}$) que contém o conjunto $\{x \in \mathcal{U} : f(x) \neq 0\}$.

Por um *intervalo diádico* entenderemos um intervalo da forma especial

$$I = \{x \in \mathbb{R} : i2^{-j} \leq x < (i+1)2^{-j}\}$$

onde i, j são números inteiros. Um *retângulo diádico* é um retângulo R da forma $R = I \times J$, onde I e J são intervalos diádicos.

1.1.2 ESPAÇOS $L^P(E)$ COM NORMAS MISTAS.

Sejam E um espaço de Banach, em relação à norma denotada por $\|\cdot\|_E$, e $P = (p_1, \dots, p_n)$ com $0 < p_i \leq \infty$. Denotaremos por $L^P(\mathbb{R}^n, E)$ o espaço de todas as funções f definidas sobre $\mathbb{R}^n$ à valores em E tais que $\|f(x)\|_E$ é Lebesgue mensurável e

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^P(\mathbb{R}^n, E)} &= \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|_E^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n} < \infty \end{aligned}$$

com as modificações usuais quando algum (ou alguns) dos p_i é igual a ∞ . Notemos que se $p_i = p$, para $i = 1, 2, \dots, n$, então $L^P(\mathbb{R}^n, E) = L^p(\mathbb{R}^n, E)$.

Quando não houver motivo para confusão, escreveremos $L^P(E)$ e $\|\cdot\|_{L^P(E)}$ ao invés de $L^P(\mathbb{R}^n, E)$ e $\|\cdot\|_{L^P(\mathbb{R}^n, E)}$, e quando $E = \mathcal{C}$, o corpo

dos números complexos, colocaremos simplesmente L^p e $\|\cdot\|_{L^p}$.

Os espaços $L^p(E)$ são espaços quase-Banach (espaços de Banach se $\min(p_1, \dots, p_n) \geq 1$), isto é, são espaços completos em relação às quase-normas $\|\cdot\|_{L^p(E)}$. Lembremos que $\|\cdot\|$ é uma quase-norma num espaço vetorial F quando todas as propriedades que definem uma norma são satisfeitas para $\|\cdot\|$, com exceção da desigualdade triangular que é substituída pela desigualdade

$$\|u + v\| \leq C \cdot (\|u\| + \|v\|) \quad , \quad u, v \in F$$

onde C é uma constante positiva.

Analogamente, dado um espaço de Banach E e $Q = (q_1, \dots, q_n)$ com $0 < q_i \leq \infty$, indicaremos por $\ell^Q(\mathbb{Z}^n, E)$ ($\ell^Q(E)$ quando não houver motivo para confusão) o espaço de todas as (multi-)sequências $(c_N)_{N \in \mathbb{Z}^n}$ em E tal que

$$\|(c_N)_{N \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^Q(E)} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \dots \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|c_N\|_E^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \right)^{1/q_n} < \infty \quad ,$$

com as modificações usuais quando algum (ou alguns!) dos q_i é igual a ∞ . Os espaços $\ell^Q(E)$ são espaços quase-Banach (Banach se $\min(q_1, \dots, q_n) \geq 1$). Se $E = \mathbb{C}$, escreveremos simplesmente ℓ^Q e $\|\cdot\|_{\ell^Q}$.

Notemos que se $q_i = q$ para $i = 1, 2, \dots, n$, então o espaço $\ell^Q(E)$ se reduz ao espaço $\ell^q(E)$.

Em todo este trabalho, a menos de menção explícita em contrário, ℓ^2 indicará o espaço $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$.

Se E é um espaço de Banach, a *transformada de Fourier* de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ é definida por

$$\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot y} f(y) \, dy \quad .$$

onde $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. A transformada inversa (ou conjugada) de Fourier de f é definida por

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} f(y) dy$$

1.1.3 A CLASSE $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$. (Ver Treves [58])

Seja E um espaço de Banach em relação à norma $\|\cdot\|$. Designaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ a classe de todas as funções φ , indefinidamente deriváveis, definidas sobre $\mathbb{R}^n$ à valores em E tais que

$$P_{N,\alpha}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N \|D^\alpha \varphi(x)\|_E \leq C_{N,\alpha} < \infty,$$

para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e todo $N \in \mathbb{N}$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ é equipado com a topologia natural definida pelas seminormas $(P_{N,\alpha})$. Quando não houver motivo para confusão, colocaremos simplesmente $\mathcal{S}(E)$ para denotar $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$. Se E é o conjunto dos números complexos então $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ se reduz à classe das funções de decrescimento rápido (no infinito) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Uma sequência $(\varphi_j)_j$ converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ se para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $N \in \mathbb{N}$ temos

$$P_{N,\alpha}(\varphi_j - \varphi) \longrightarrow 0.$$

1.1.4 A CLASSE $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. (Ver Treves [58])

Seja E um espaço de Banach. Designaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ a classe de todas as aplicações lineares T definidas sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valores em E que são contínuas (isto é, tais que se $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $T(\varphi_j) \longrightarrow T(\varphi)$ em E). Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então denotaremos por $T(\varphi)$ ou $\langle T, \varphi \rangle$ a ação de T em φ . No caso particular que $E = \mathbb{C}$ temos simplesmente o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ das distribuições temperadas.

Em [58] Treves demonstra que se F' é o dual forte de um espaço de Fréchet F , então temos o isomorfismo

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, F') \cong [\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, F)]'$$

Se T é um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, a *transformada de Fourier* de T , designada por $\hat{T}$ ou $\mathcal{F}T$, é definida por

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle ,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Semelhantemente, a *transformada inversa de Fourier* de T , designada por $\tilde{T}$ ou $\mathcal{F}^{-1}T$, é definida por

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle ,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que $\hat{T}$ está bem definida como elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, pois $\hat{T}$ é uma aplicação linear de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em E e se

$$\varphi_j \longrightarrow \varphi$$

em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\hat{\varphi}_j \longrightarrow \hat{\varphi}$$

em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o que implica que

$$\langle \hat{T}, \varphi_j \rangle = \langle T, \hat{\varphi}_j \rangle \rightarrow \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle$$

em E . O fato que $\tilde{T}$ também está bem definida como elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ pode ser visto de maneira análoga.

Finalmente, notemos que se T é um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, então temos

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T .$$

Isto segue da fórmula de inversão de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}T, \tilde{\varphi} \rangle \\ &= \langle T, \hat{\tilde{\varphi}} \rangle \\ &= \langle T, \varphi \rangle , \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, implica que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T$. A segunda identidade segue de maneira análoga.

No caso particular em que $E = \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ temos o seguinte resultado: Se $T = (T_{ij})_{ij}$ pertence a $S'(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ então temos

$$(1) \quad \hat{T} = (\hat{T}_{ij})_{ij} .$$

Um resultado análogo a este vale para a transformada inversa de Fourier, isto é, se $T = (T_{ij})_{ij}$ pertence a $S'(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ então temos

$$(2) \quad \tilde{T} = (\tilde{T}_{ij})_{ij} .$$

A seguir introduziremos algumas notações com o objetivo de enunciar os teoremas de Paley-Wiener-Schwartz. Seja T pertencente a $S'(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos por $\text{supp } T$ o suporte de T , isto é, o complementar do maior subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ onde T se anula. Uma função analítica f de n variáveis complexas será indicada por $f(z)$, onde $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Se uma função $f(x)$ definida em $\mathbb{R}^n$ admite uma extensão a uma função analítica de n variáveis complexas então esta extensão também será denotada por $f(z)$. Então, os teoremas de Paley-Wiener-Schwartz, cujas demonstrações podem ser encontradas em [37], [53] ou [62] são:

1.1.5 TEOREMA. As seguintes condições são equivalentes:

- (1) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp } \hat{\varphi} \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq b\}$
- (2) $\varphi(z)$ é uma função analítica inteira de n variáveis complexas e para todo $\lambda > 0$ e todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante positiva $C_{\lambda, \varepsilon}$ tal que

$$|\varphi(z)| \leq C_{\lambda, \varepsilon} (1 + |x|)^{-\lambda} e^{(b+\varepsilon)|y|} ,$$

para todo $z = x + iy$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

1.1.6 TEOREMA. As seguintes condições são equivalentes:

- (1) $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp } \hat{f} \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq b\}$

(2) $f(z)$ é uma função analítica inteira de n variáveis complexas e para um número real apropriado λ e todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva C_ε tal que

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon (1 + |x|)^\lambda \cdot e^{(b+\varepsilon)|y|} ,$$

para todo $z = x + iy$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

1.1.7 EXEMPLO. Seja f pertencente a $L^p(\mathbb{R}^n, E)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então, a aplicação linear $T = T_f$ definida por

$$T_f(\varphi) = \int \varphi(x) f(x) dx ,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pertence a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. De fato, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ então pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|T_f(\varphi)\| &\leq \int |\varphi(x)| \|f(x)\|_E dx \\ &\leq \|f\|_{L^p(E)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{Np'} |\varphi(x)|^{p'} (1 + |x|^2)^{-Np'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq \|f\|_{L^p(E)} P_{N,0}(\varphi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-Np'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq C \cdot \|f\|_{L^p(E)} P_{N,0}(\varphi) \end{aligned}$$

se $Np' > n/2$, o que mostra que T_f é contínua.

1.1.8 OPERADORES MAXIMAIS DE HARDY-LITTLEWOOD.

Se f é uma função pertencente a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (isto é se f é uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$) então a *função maximal de Hardy-Littlewood* Mf é definida por

$$(1) \quad Mf(x) = \sup_B |B|^{-1} \int_B |f(y)| dy ,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as bolas B centradas no ponto x . É sabido (ver [25],[55],[57]) que se $1 < p \leq \infty$, então existe constante $C > 0$ tal que

$$(2) \quad \|Mf\|_{L^p} \leq C \cdot \|f\|_{L^p} ,$$

para toda f pertencente a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Esta desigualdade é conhecida como desigualdade maximal de Hardy-Littlewood. O operador $M : f \rightarrow Mf$ é chamado de operador maximal (de Hardy-Littlewood).

Formularemos a seguir um teorema que fornece uma extensão da desigualdade 1.1.8(2), que foi obtida por R. J. Bagby [2]. Antes, porém, introduziremos algumas notações. Sejam μ_j com $j = 1, \dots, m$ medidas de Borel σ -finitas sobre $\mathbb{R}$ e $\mu = \prod_{j=1}^m \mu_j$ a correspondente medida produto sobre $\mathbb{R}^m$. Sejam ν a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ e μ, ν (respectivamente ν, μ) a medida produto sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$). Consideremos $f(x, y)$ com $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}$ uma função definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ à valores complexos que é localmente integrável (em relação à medida μ, ν) em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Denotemos por $M_{01}f$ a função maximal de $f(x, \cdot)$, isto é,

$$M_{01}f(x, y) = \sup_{r>0} (2r)^{-1} \int_{|x-y|<r} |f(x, z)| dz ,$$

onde a integração acima é no sentido de Lebesgue.

Analogamente, se $f(x, y)$ com $x \in \mathbb{R}$ e $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ é uma função localmente integrável (em relação a medida ν, μ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ então $M_{10}f$ é definida por

$$M_{10}f(x, y) = \sup_{r>0} (2r)^{-1} \int_{|x-z|<r} |f(z, y)| dz .$$

1.1.9 TEOREMA. Sejam $1 < p < \infty$ e $Q = (q_1, \dots, q_n)$ com $1 < q_j \leq \infty$ se $j = 1, \dots, m$. Então existe uma constante positiva C tal que

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} \|M_{01}f(x, y)\|_{L^{q_1}}^p dy \leq C \cdot \int_{\mathbb{R}} \|f(x, y)\|_{L^{q_1}}^p dy .$$

para toda função $f(x, y)$ pertencente a $L^p(\mathbb{R}, L_\mu^Q(\mathbb{R}^m))$.

A desigualdade análoga a 1.1.9(1) para a função $M_{10}f$ é dada por:

$$\int_{\mathbb{R}} \|M_{10}f(x, y)\|_{L_\mu^Q}^p dx \leq C \cdot \int_{\mathbb{R}} \|f(x, y)\|_{L_\mu^Q}^p dx ,$$

para toda função $f(x, y)$ pertencente a $L^p(\mathbb{R}, L_\mu^Q(\mathbb{R}^m))$.

Um caso especial interessante do teorema anterior é quando μ é a medida da contagem, isto é, quando $L_\mu^Q = \ell^Q$.

1.1.10 OPERADOR MAXIMAL FORTE. Sejam $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $a = (a_1, \dots, a_n)$ pertencentes a $\mathbb{R}^n$ tais que $a_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$. Denotaremos por $R(z, a)$ o retângulo definido por $R = R(z, a) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - z_i| \leq a_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$. Se f pertence a $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, então o operador maximal forte M_* é definido por

$$M_*(f)(x) = \sup \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy ,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os retângulos $R = R(z, a)$ tais que $x \in R$.

Relembraremos a seguir algumas notações com o objetivo de enunciarmos o teorema maximal forte. Indicaremos por $\log^+$ a função definida sobre o conjunto dos números reais positivos por $\log^+ x = \log x$ se $x \geq 1$ e $\log^+ x = 0$ se $0 < x < 1$. Denotaremos por $L(1 - (\log^+ L)^{n-1})$ o espaço de todas as funções f definidas sobre $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{C}$ tais que

$$\int |f(x)|(1 + (\log^+ |f(x)|)^{n-1}) dx < \infty.$$

Então, o teorema maximal forte é estabelecido como segue (ver [21] e [38]).

1.1.11 TEOREMA. O operador M_* é limitado do espaço de Orlicz $L(1 - (\log^+ L)^{n-1})$ no L^1 fraco, isto é, existe uma constante C_n (que depende apenas da dimensão n) tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_*(f)(x) > \alpha\}| \leq C_n \int \frac{|f(x)|}{\alpha} (1 + (\log^+ \frac{|f(x)|}{\alpha})^{n-1}) dx ,$$

onde $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto mensurável A .

1.2 OS ESPAÇOS DE HARDY H_{Hb}^1 E H_{at}^1 NÃO-ISOTRÓPICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS.

No que segue usaremos a seguinte notação:

$$\square = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

1.2.1 DEFINIÇÃO. Seja f pertencente a $L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Suas transformadas de Hilbert $H_k f$, $k \in \square$, são os elementos pertencentes a $S'(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ definidos por:

$$(1) \quad \mathcal{F}(H_{10}f) = -i \operatorname{sg} x \hat{f}(x, y),$$

$$(2) \quad \mathcal{F}(H_{01}f) = -i \operatorname{sg} y \hat{f}(x, y),$$

$$(3) \quad \mathcal{F}(H_{11}f) = (-i \operatorname{sg} x)(-i \operatorname{sg} y) \hat{f}(x, y),$$

$$(4) \quad H_{00}f = f.$$

1.2.2 OBSERVAÇÃO. Se $f = (f_{ij})_{ij}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ então $H_k f = (H_k f_{ij})_{ij}$, $k \in \square$, onde $H_k f_{ij}$ denota a transformada de Hilbert da função escalar f_{ij} . De fato, se por exemplo $k = (1,0)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H_{10}f) &= -i \operatorname{sg} x \hat{f}(x, y) \\ &= (-i \operatorname{sg} x \hat{f}_{ij}(x, y))_{ij} \\ &= (\mathcal{F}(H_{10}f_{ij}))_{ij} \end{aligned}$$

donde a identidade segue por 1.1.4(2).

Definimos a seguir o espaço de Hardy H^1 de Hilbert não-isotrópico de funções a valores vetoriais.

1.2.3 DEFINIÇÃO. $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2) = H_{Hb}^1(\ell^2)$ é o espaço vetorial das funções f pertencentes a $L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ tais que suas transformadas de Hilbert, $H_k f$, $k \in \square - \{(0,0)\}$, estão em $L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$.

Munimos o espaço $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ com a seguinte norma:

$$\|f\|_{H_{Hb}^1(\ell^2)} = \sum_{k \in \square} \|H_k f\|_{L^1(\ell^2)} ,$$

onde $H_{00}f = f$.

Observemos que se $f \in H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, então os momentos na direção x e na direção y são nulos, isto é,

$$\int f(x, y) dx = 0, \quad \int f(x, y) dy = 0.$$

Com efeito, se $f = (f_{ij})_{ij} \in H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, então $f_{ij} \in H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2)$, para todo i, j , e portanto,

$$\int f_{ij}(x, y) dx = 0, \quad \int f_{ij}(x, y) dy = 0 ,$$

para todo i, j . Como f é integrável o resultado segue. Resulta desta observação que o espaço $S(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ não está contido em $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$.

Nosso próximo passo será exibir um subespaço denso de $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Necessitaremos do seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se em H.Sato [49].

1.2.4 TEOREMA. Seja $\mathcal{O}$ o espaço das funções f pertencentes a $S(\mathbb{R}^2)$ a valores reais tais que

(1) $\hat{f}$ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(2) $\text{supp } \hat{f} \subset [(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})]^\circ = \emptyset$.

Então, $\mathcal{O}$ é um subespaço denso de $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2)$, onde $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2)$ denota o espaço de Hardy de funções à valores reais.

1.2.5 TEOREMA. Seja $H_0^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ o espaço das funções $f = (f_{ij})_{ij} \in H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ tais que $f_{ij} \in \mathcal{O}$, para todo i, j . Então, $H_0^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ é um subespaço denso de $H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$.

Demonstração. Sejam $f = (f_{ij})_{ij} \in H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ e $\varepsilon > 0$. Então, $f_{ij} \in H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2)$, para todo i, j . Como $\mathcal{O}$ é denso em $H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2)$, para cada f_{ij} , existe um elemento $h_{ij} \in \mathcal{O}$ tal que

$$\|f_{ij} - h_{ij}\|_{H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2)} < \frac{\varepsilon}{4c^2 2^{|i|} 2^{|j|}}$$

onde $c = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-|i|}$. Seja $h = (h_{ij})_{ij}$. Como

$$\begin{aligned} \|H_k(f - h)\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} &= \iint \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |H_k(f_{ij} - h_{ij})|^2 \right)^{1/2} dx dy \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \iint |H_k(f_{ij} - h_{ij})| dx dy \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|f_{ij} - h_{ij}\|_{H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$, então temos

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|H_k(f - h)\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &\leq 4 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|f_{ij} - h_{ij}\|_{H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2)} \\ &< 4 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{4c^2 2^{|i|} 2^{|j|}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

A próxima definição será utilizada no Lema 2.3.1 do próximo capítulo, que é um resultado preliminar no sentido de obter um teorema que garante a limitação de certos operadores integrais singulares vetoriais do espaço de

Hardy não-isotrópico H^1 no espaço L^1 .

1.2.6 DEFINIÇÃO. Seja E um espaço de Banach. Uma função a definida sobre $\mathbb{R}^2$, a valores no espaço E , é um E -átomo retangular se verifica as seguintes condições:

- (1) Existem intervalos limitados $I, J \subset \mathbb{R}$ tal que $\text{supp } a \subset I \times J$;
- (2) $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} \leq |I \times J|^{-1/2}$;
- (3) $\int a(x, y) dx = 0$, q.t.p. $y \in \mathbb{R}$ e $\int a(x, y) dy = 0$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}$.

1.2.7 LEMA. Sejam $(a_k)_{k=0}^\infty$ uma sequência de E -átomos retangulares e $(\lambda_k)_{k=0}^\infty$ uma sequência de escalares tal que

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| < \infty.$$

Então, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge em $L^1(\mathbb{R}^2, E)$ para uma função f pertencente a $L^1(\mathbb{R}^2, E)$.

Demonstração. Vejamos inicialmente que se a é um E -átomo retangular, então

$$(2) \quad \|a\|_{L^1(\mathbb{R}^2, E)} \leq 1$$

De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e 1.2.6(1) e 1.2.6(2) temos

$$\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^2, E)} \leq |I \times J|^{1/2} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} \leq |I \times J|^{1/2} |I \times J|^{-1/2} = 1.$$

Agora, seja $f_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k a_k$. Então, por (1) e (2) segue que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n > n_0$ temos

$$\sum_{k=n+1}^m \|\lambda_k a_k\|_{L^1(\mathbb{R}^2, E)} \leq \sum_{k=n+1}^m |\lambda_k| \|a_k\|_{L^1(\mathbb{R}^2, E)}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^m |\lambda_k| < \varepsilon$$

Logo, para os mesmos n_0 , n e m temos

$$\|f_m - f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2, E)} \leq \sum_{k=n+1}^m \|\lambda_k a_k\|_{L^1(\mathbb{R}^2, E)} < \varepsilon,$$

o que mostra que a sequência das somas parciais f_n é de Cauchy, e portanto convergente no espaço completo $L^1(\mathbb{R}^2, E)$.

O lema anterior sugere a seguinte definição:

1.2.8 DEFINIÇÃO. Seja E um espaço de Banach. $H_{ret}^1(\mathbb{R}^2, E)$ é o espaço de todas as funções f pertencentes a $L^1(\mathbb{R}^2, E)$ que possuem representação na forma $f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k$, onde $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência de E -átomos retangulares e $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$. A norma de um elemento f pertencente a $H_{ret}^1(\mathbb{R}^2, E)$ é definida por

$$\|f\|_{H_{ret}^1(\mathbb{R}^2, E)} = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| : f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k \right\}$$

Notamos que se a é um E -átomo retangular então $\|a\|_{H_{ret}^1(\mathbb{R}^2, E)} \leq 1$.

Observamos que os espaços $H_{ret}^1(\mathbb{R}^2)$ e $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2)$, de funções a valores reais, não são isomorfos, pois R. Fefferman [27] demonstrou, utilizando argumentos de dualidade, que $H_{ret}^1(\mathbb{R}^2)$ está contido estritamente em $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2)$. O espaço definido por átomos que é isomorfo a $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2)$ é o espaço $H_{at}^1(\mathbb{R}^2)$ definido por Chang-Fefferman [16], [17] e [29].

A seguir vamos definir um tipo de átomo à valores num espaço de Banach E , que generaliza os átomos de Chang-Fefferman a valores reais, com o objetivo de introduzir o espaço de Hardy atômico de funções a valores num espaço de Banach E . Chamaremos esses átomos de E -átomos de Chang-Fefferman.

1.2.9 DEFINIÇÃO. Seja E um espaço de Banach. Uma função a definida sobre $\mathbb{R}^2$ a valores no espaço E , é um E -átomo de Chang-Fefferman se existe um conjunto aberto de medida finita $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tal que:

$$(1) \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} \leq |\Omega|^{-1/2};$$

$$(2) a = \sum_{R \in \mathcal{M}(\Omega)} a_R,$$

onde cada função a_R , chamada partícula elementar, verifica:

(i) $\text{supp } a_R \subset \tilde{R}$, com R retângulo diádico e $\tilde{R}$ o quádruplo de R ;

(ii) $\int a_R(x, y) dx = 0$, q.t.p. $y \in \mathbb{R}$ e $\int a_R(x, y) dy = 0$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}$;

$$(iii) \left(\sum_{R \in \mathcal{M}(\Omega)} \|a_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)}^2 \right)^{1/2} \leq |\Omega|^{-1/2}.$$

Para os E-átomos de Chang-Fefferman também vale um resultado análogo ao do Lema 1.2.7:

1.2.10 LEMA. Sejam $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de E-átomos de Chang-Fefferman e $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de escalares tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$. Então, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge em $L^1(\mathbb{R}^2, E)$.

Demonstração. Análoga à do Lema 1.2.7.

Agora podemos definir o espaço $H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)$:

1.2.11 DEFINIÇÃO. Seja E um espaço de Banach. $H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)$ é o espaço de todas as funções f pertencentes a $L^1(\mathbb{R}^2, E)$ que admitem representação na forma $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$, onde $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma família de E-átomos de Chang-Fefferman e $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma família de escalares tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$.

Munimos o espaço $H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)$ com a norma:

$$\|f\|_{H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)} = \inf \left\{ \sum |\lambda_k| \right\},$$

onde o infimo é tomado sobre todas as representações de f da forma $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$.

Notamos que em [16], [17] Chang-Fefferman demonstraram que os

espaços $H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2)$ e $H_{at}^1(\mathbb{R}^2)$, de funções à valores reais, são isomorfos, com normas equivalentes.

1.3 O ESPAÇO BMO NÃO-ISOTRÓPICO DE FUNÇÕES VETORIAIS.

1.3.1 PROLONGAMENTO BI-HARMÔNICO. Indicaremos por $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ os elementos da forma $(x, s; y, t)$ onde x, y, s, t pertencem a $\mathbb{R}$ com s, t positivos. O núcleo de Poisson no semi-plano

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, s) : x, s \in \mathbb{R} \text{ e } s > 0\}$$

é definido por

$$P_s(x) = \frac{c \cdot s}{s^2 + x^2},$$

onde a constante positiva c é escolhida de modo que P_s tenha massa total igual a 1, e o núcleo de Poisson conjugado é dado por

$$Q_s(x) = \frac{c \cdot x}{s^2 + x^2}.$$

Uma função u definida sobre $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ é dita bi-harmônica se u é harmônica em (x, s) pertencente a $\mathbb{R}_+^2$ e (y, t) pertencente a $\mathbb{R}_+^2$ separadamente, isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Seja agora uma função f definida sobre $\mathbb{R}^2$ e integrável em relação à medida $P_1(x)P_1(y)dxdy$. Então f admite um prolongamento a uma função bi-harmônica $\tilde{f}$ sobre $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ através da integral de Poisson definida por

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, s; y, t) &= P_s P_t * f(x, y) \\ &= \iint P_s(x - x') P_t(y - y') f(x', y') dx' dy'\end{aligned}$$

Dizemos, neste caso, que $\tilde{f}$ é o *prolongamento bi-harmônico* sobre $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ de f . Isto justifica a seguinte definição:

1.3.2 DEFINIÇÃO. Dizemos que uma função f definida sobre $\mathbb{R}^2$ é prolongável se é integrável em relação à medida $P_1(x)P_1(y)dxdy$.

1.3.3 ESPAÇOS $L^p(\pi)$. Denotemos por π a medida $P_1(x)P_1(y)dxdy$ sobre $\mathbb{R}^2$ e por $L^1(\mathbb{R}^2, \pi) = L^1(\pi)$ o espaço das funções prolongáveis. Como a medida π é limitada, o espaço $L^1(\pi)$ contém uma sequência decrescente de sub-espaços $\{L^p(\pi); 1 \leq p \leq \infty\}$.

Vamos precisar também de versões não-isotrópicas dos espaços BMO de John-Nirenberg [39].

1.3.4 DEFINIÇÃO. Uma função f definida sobre $\mathbb{R}^2$ a valores reais pertence a $BMO_{rel}(\mathbb{R}^2) = BMO_{rel}$ se verifica as seguintes condições:

- (1) f pertence a $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$;
- (2) $\sup |I \times J|^{-1} \iint_{I \times J} |f - f_I - f_J + f_{IJ}|^2 dxdy < \infty$,

onde I, J são intervalos fechados e

$$f_I(y) = |I|^{-1} \int_I f(x, y) dx,$$

$$f_J(x) = |J|^{-1} \int_J f(x, y) dy,$$

$$f_{IJ} = |I \times J|^{-1} \int \int_{I \times J} f(x, y) dx dy .$$

BMO_{rel} é um espaço vetorial e

$$\|f\|_{BMO_{rel}} = \left(\sup_{I, J} |I \times J|^{-1} \int \int_{I \times J} |f - f_I - f_J + f_{IJ}|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

é uma seminorma em BMO_{rel} . Não é difícil verificar que $\|f\|_{BMO_{rel}} = 0$ se, e só se, f pertence a $L^2_{loc}(\mathbb{R}) + L^2_{loc}(\mathbb{R})$, isto é, $f(x, y) = g(x) + h(y)$ onde $g, h \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Para tornar o espaço BMO_{rel} um espaço normado procedemos como segue. Dizemos que uma função f em BMO_{rel} é *normalizada* se $f_{I_0} = 0$ e $f_{J_0} = 0$, onde I_0 e J_0 são intervalos unitários centrados na origem. Vemos facilmente que, para toda função f em BMO_{rel} , a função

$$f - f_{I_0} - f_{J_0} + f_{I_0 J_0}$$

é o único elemento de BMO_{rel} normalizado e congruente a f módulo $L^2_{loc}(\mathbb{R}) + L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Então, BMO_{rel} assim normalizado é um espaço normado por $\|\cdot\|_{BMO_{rel}}$.

1.3.5 DEFINIÇÃO. Seja f uma função pertencente à $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ à valores reais. Suas transformadas de Hilbert "aproximada" e modificada, $\tilde{H}_k^{s,t}$, $k \in \square$, são definidas por:

$$\tilde{H}_{0,0}^{s,t} f(x, y) = \int \int (P_s(x-x') - P_1(-x')) (P_t(y-y') - P_1(-y')) f(x', y') dx' dy' ,$$

$$\tilde{H}_{1,0}^{s,t} f(x, y) = \int \int (Q_s(x-x') - Q_1(-x')) (P_t(y-y') - P_1(-y')) f(x', y') dx' dy' ,$$

$$\tilde{H}_{0,1}^{s,t} f(x, y) = \int \int (P_s(x-x') - P_1(-x')) (Q_t(y-y') - Q_1(-y')) f(x', y') dx' dy' ,$$

$$\bar{H}_{1,1}^{s,t} f(x,y) = \int \int (Q_s(x-x') - Q_1(-x'))(Q_t(y-y') - Q_1(-y')) f(x',y') dx' dy' ,$$

O próximo teorema mostra que as transformadas $\bar{H}_k^{s,t}$, $k \in \square$, pertencem ao espaço $BMO_{ret}(\mathbb{R}^2)$.

1.3.6 TEOREMA. Existe uma constante positiva C tal que, para todo s e t positivos, temos

$$\|\bar{H}_k^{s,t} f\|_{BMO_{ret}} \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty} , \quad k \in \square ,$$

para toda f pertencente à $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ à valores reais.

Demonstração. Ver H. Sato [49].

Os três resultados que enunciamos a seguir fornecem outras propriedades das transformadas $\bar{H}_k^{s,t} f$.

1.3.7 TEOREMA. Seja $\delta > 0$. Então existe uma constante positiva C que independe de δ tal que, para todo s e t no intervalo $(0, \delta)$ e todo $k \in \square$, temos

$$\|\bar{H}_k^{s,t} f\|_{L^2(\pi)} \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty} .$$

Demonstração. Ver H. Sato [49].

1.3.8 TEOREMA. Para toda f pertencente a $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, todo $k \in \square$ e todo s, s', t e t' positivos, temos

$$P_s P_t * (\bar{H}_k^{s',t'} f) = \bar{H}_k^{s+s', t+t'} f .$$

Demonstração. Ver H.Sato [49].

1.3.9 TEOREMA. Seja f pertencente a $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ à valores reais. Então, para cada $k \in \square$, existe uma única função $\bar{H}_k f$ pertencente a $L^2(\mathbb{R}^2; \pi)$ à valores reais, tal que

$$(1) \quad \|\bar{H}_k f\|_{L^2(\pi)} \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty},$$

$$(2) \quad \|\bar{H}_k f\|_{BMO_{\pi,t}} \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty},$$

$$(3) \quad \bar{H}_k^{s,t} f = P_s P_t * \bar{H}_k f,$$

para todo s e t positivos.

Demonstração. Ver H. Sato [49].

As funções $\bar{H}_k f$, $k \in \square$, cuja existência é garantida pelo teorema anterior, são chamadas *as transformadas de Hilbert modificadas de f* . Se $g = (g_{ij})_{ij}$ pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, onde $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$, então *as transformadas de Hilbert modificadas de g* , igualmente denotadas por $\bar{H}_k g$, $k \in \square$, são definidas por

$$\bar{H}_k g = (\bar{H} g_{ij})_{ij},$$

onde cada $\bar{H}_k g_{ij}$ é a transformada de Hilbert modificada de g_{ij} pertencente a $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Agora estamos em condições de definir o espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, que generaliza o espaço $BMO(\mathbb{R}^2)$ de funções à valores reais, com dois objetivos principais. O primeiro é mostrar que esse espaço é o dual topológico do espaço de Hardy $H_{H^k}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ definido no parágrafo anterior. O segundo objetivo é fornecer uma caracterização do espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ em termos de certas medidas denominadas medidas de Carleson.

1.3.10 DEFINIÇÃO. Uma função g definida em $\mathbb{R}^2$, à valores em $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$, pertence a $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ se pode ser representada como

$$(1) \quad g = \sum_{k \in \square} \bar{H}_k g_k,$$

com

$$\bar{H}_{00} g_{00} = g_{00} \text{ e } \sum_{k \in \square} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)} < \infty.$$

Munimos o espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ com a seguinte norma:

$$\|g\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)} = \inf \left\{ \sum_{k \in \square} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações possíveis de g da forma (1).

Nosso próximo objetivo é mostrar que o espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ é o dual do espaço $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Para isto, porém, necessitaremos do seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se em H.Sato [49]:

Lembramos que o espaço $\mathcal{O}$ que aparece no enunciado foi definido em 1.2.4.

1.3.11 TEOREMA. Se $f \in \mathcal{O}$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ então temos

$$\iint H_k f(x, y) g(x, y) dx dy = (-1)^{|k|} \iint f(x, y) \bar{H}_k g(x, y) dx dy,$$

onde $k = (k_1, k_2) \in \square$.

No que segue a notação $\langle, \rangle$ indicará o produto interno usual em $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$, isto é, se $\alpha = (\alpha_{ij})_{ij}$ e $\beta = (\beta_{ij})_{ij}$ são elementos de ℓ^2 , então

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_{ij} \beta_{ij}.$$

1.3.12 TEOREMA. O dual de $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ é o espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, no seguinte sentido:

(i) Seja $g \in BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. O funcional linear que a cada $f \in H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ associa o número real

$$L_g(f) = \iint \langle f(x, y), g(x, y) \rangle dx dy$$

se prolonga, por continuidade, a um funcional linear contínuo L_g sobre $H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Além disso, a aplicação $g \mapsto L_g$ é injetiva.

(ii) Para todo $L \in (H_{Hb}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*$, existe uma função $g \in BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ tal que $L = L_g$, e

$$(1) \quad \|L\|_{(H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*} = \|g\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)}.$$

Demonstração (i) Seja $g \in BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Basta mostrarmos que

$$(2) \quad |L_g(f)| \leq \|g\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \|f\|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)},$$

para toda $f = (f_n)_n$ no subespaço de $H_0^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ formado pelas sequências quase-nulas, pois tal subespaço é denso em $H_0^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. De fato, como $g = \sum_{k \in \square} \bar{H}_k g_k$, com $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, $k \in \square$, então pelo teorema 1.3.11, podemos escrever

$$\begin{aligned} \iint \langle f(x, y), g(x, y) \rangle \, dx dy &= \iint \langle f(x, y), \sum_{k \in \square} \bar{H}_k g_k(x, y) \rangle \, dx dy \\ &= \sum_{k \in \square} \iint \langle f(x, y), \bar{H}_k g_k(x, y) \rangle \, dx dy \\ &= \sum_{k \in \square} (-1)^{|k|} \iint \langle H_k f(x, y), g_k(x, y) \rangle \, dx dy, \end{aligned}$$

onde $k = (k_1, k_2)$.

Logo utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |L_g(f)| &= \left| \iint \langle f(x, y), g(x, y) \rangle \, dx dy \right| \\ &= \left| \sum_{k \in \square} (-1)^{|k|} \iint \langle H_k f(x, y), g_k(x, y) \rangle \, dx dy \right| \\ &\leq \sum_{k \in \square} \|H_k f\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &\leq \left(\sum_{k \in \square} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \right) \|f\|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)}. \end{aligned}$$

donde segue 1.3.12(2), e mais, L_g admite uma extensão contínua, também denotada por L_g , pertencente a $(H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*$ com

$$(3) \quad \|L_g\|_{(H_{H_k}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*} \leq \|g\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)}.$$

A injetividade da aplicação $g \mapsto L_g$ segue do fato que no caso escalar esta aplicação é injetiva (ver H.Sato [49]). Mostremos, agora, (ii). Seja A o espaço de Banach, que consiste da soma direta de quatro cópias de $L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, isto é,

$$A = \{(f_{00}, f_{10}, f_{01}, f_{11}) : f_k \in L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2), k \in \square\}.$$

Definimos uma norma sobre A colocando

$$\|(f_{00}, f_{10}, f_{01}, f_{11})\|_A = \sum_{k \in \square} \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)}.$$

Seja S o subespaço de A definido por

$$S = \{(f_{00}, f_{10}, f_{01}, f_{11}) \in A : f_k = H_k f_{00}, k \in \square\}.$$

Observemos que a aplicação linear G que a cada $f_{00} \in H_{H_k}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, associa

$$G(f_{00}) = (f_{00}, H_{10}f_{00}, H_{01}f_{00}, H_{11}f_{00})$$

é uma isometria de $H_{H_k}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ sobre S . Então, a cada $L \in (H_{H_k}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*$, podemos associar um elemento $K \in S^*$ (basta tomarmos $K = L \circ G^{-1}$) tal que

$$L(f_{00}) = K(f_{00}, H_{10}f_{00}, H_{01}f_{00}, H_{11}f_{00})$$

e

$$(4) \quad \|L\|_{(H_{H_k}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*} = \|K\|_{S^*}.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach, existe um elemento $\widetilde{K} \in A^*$ tal que $\widetilde{K}|_S = K$ e

$$(5) \quad \|K\|_{S^*} = \|\widetilde{K}\|_{A^*}.$$

Mas $A^* = B$, onde B é o espaço constituído pela soma direta de quatro cópias de $L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, munido da norma:

$$\|(g_{00}, g_{10}, g_{01}, g_{11})\|_B = \sum_{k \in \square} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)}.$$

Portanto, levando em conta isto, 1.3.12(4) e 1.3.12(5), temos que existe um elemento $(g_{00}, g_{10}, g_{01}, g_{11}) \in B$ tal que

$$(6) \quad \|L\|_{(H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*} = \sum_{k \in \square} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)}$$

e

$$L(f) = K(f, H_{10}f, H_{01}f, H_{11}f) = \sum_{k \in \square} \iint \langle H_k f(x, y), g_k(x, y) \rangle dx dy,$$

para todo elemento $f \in H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, onde $f = H_{00}f$. Mas se $f = (f_{ij})_{ij}$ é sequência quase-nula em $H_0^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, temos pelo Teorema 1.3.11 que

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{k \in \square} (-1)^{|k|} \iint \langle f(x, y), \bar{H}_k g_k(x, y) \rangle dx dy \\ &= \iint \langle f(x, y), \sum_{k \in \square} (-1)^{|k|} \bar{H}_k g_k(x, y) \rangle dx dy \\ &= \iint \langle f(x, y), g(x, y) \rangle dx dy, \end{aligned}$$

onde $g = \sum_{k \in \square} (-1)^{|k|} \bar{H}_k g_k$, e $|k| = k_1 + k_2$, $k = (k_1, k_2) \in \square$.

Decorre então que $L = L_g$. Além disso, de 1.3.12(6) e 1.3.12(3) resulta que

$$\|L\|_{(H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2))^*} = \|g\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)},$$

o que completa a demonstração de (ii).

1.3.13 REGIÕES DE CARLESON. Dado um conjunto aberto Ω contido em $\mathbb{R}_+^2$, a região de Carleson produto $S(\Omega)$ é definida pelos elementos $(x, s; y, t)$ pertencentes a $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ tais que o produto de intervalos $(x - s, x + s) \times (y - t, y + t)$ está contido em Ω .

1.3.14 DEFINIÇÃO. Uma medida de Borel positiva μ definida sobre $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ é uma medida de Carleson se existe uma constante positiva C tal que

$$(1) \quad \mu(S(\Omega)) = \int \int_{S(\Omega)} d\mu \leq C \cdot |\Omega|,$$

para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de medida finita.

O infimo do conjunto das constantes que verificam 1.3.14(1) será denotado por $\|\mu\|$.

Os lemas seguintes serão utilizados na demonstração do próximo teorema, que afirma que uma função localmente integrável g pertence a $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ se, e somente se

$$d\mu(x, s; y, t) = \|\psi_s \psi_t * g(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}$$

é uma medida de Carleson sobre $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$, onde $\psi_s(x) = s^{-1}\psi(s^{-1}x)$ e $\psi_t(y) = t^{-1}\psi(t^{-1}y)$, para uma conveniente $\psi \in S(\mathbb{R})$.

1.3.15 LEMA. Seja $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp } \phi \subset [-r, r]$ e $\int \phi(s) ds = 0$. Então existe constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^\infty |\hat{\phi}(\pm t)|^2 \frac{dt}{t} \leq C \cdot r^2 \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2.$$

Demonstração. Como $\int \phi(s) ds = 0$, temos

$$|\hat{\phi}(t)| = \left| \int_{-r}^r [e^{-2\pi i x t} - 1] \phi(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-r}^r |e^{-2\pi i x t} - 1| |\phi(x)| dx \\
&\leq |t| \|\phi\|_{L^\infty} \int_{-r}^r |x| dx \\
&\leq r^2 \|\phi\|_{L^\infty} |t|
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\hat{\phi}(\pm t)|^2 \frac{dt}{t} &\leq \int_0^{1/r} r^4 \|\phi\|_{L^\infty}^2 t^2 \frac{dt}{t} + \int_{1/r}^\infty |\hat{\phi}(\pm t)|^2 \frac{dt}{t} \\
&\leq C_1 r^2 \|\phi\|_{L^\infty}^2 + r \int_{-\infty}^\infty |\hat{\phi}(t)|^2 dt \\
&= C_1 r^2 \|\phi\|_{L^\infty}^2 + r \int_{-r}^r |\phi(x)|^2 dx \\
&\leq C r^2 \|\phi\|_{L^\infty}^2
\end{aligned}$$

1.3.16 LEMA. Seja $\phi \in S(\mathbb{R})$ tal que $|\phi(x)| \leq A (1 + |x|)^{-2}$ e $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 0$. Então, existe uma sequência $\{\phi_j\}_{j=0}^\infty$ de funções C^∞ tais que

$$(1) \quad \text{supp } \phi_j \subset (-2^{j-1}, 2^{j-1}) ;$$

$$(2) \quad \int \phi_j(t) dt = 0$$

$$(3) \quad \|\phi_j\|_{L^\infty} \leq C \cdot A \cdot 2^{-2j} ;$$

$$(4) \quad \int_0^\infty |\hat{\phi}_j(\pm t)|^2 \frac{dt}{t} \leq C \cdot A^2 \cdot 2^{-2j} ;$$

$$(5) \quad \phi = \sum_{j=0}^\infty \phi_j ;$$

onde C é uma constante universal.

Demonstração. Seja $\{\eta_j\}_{j=0}^\infty$ a partição da unidade constituída de funções $\eta_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$(6) \quad 0 \leq \eta_j \leq 1,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \text{supp } \eta_0 &\subset (-2, 2) \text{ e} \\ \text{supp } \eta_j &\subset \{x : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}, j \geq 1 \end{aligned}$$

$$(8) \quad \eta_j(x) = 1 \text{ se } 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1} - 1$$

$$(9) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mu_j = \int \phi(x) \eta_j(x) dx$ e $\alpha_j = \eta_j \cdot (\int \eta_j(x) dx)^{-1}$. Por 1.3.16(9) e como $\int \phi(t) dt = 0$ temos

$$(10) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j = \int \phi(x) \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j(x) dx = 0,$$

e então, somando por partes obtemos a identidade

$$(11) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \alpha_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j \mu_i \right) (\alpha_{j+1} - \alpha_j).$$

Portanto, utilizando 1.3.16(9), 1.3.16(10) e 1.3.16(11) podemos escrever

$$\begin{aligned} \phi &= \phi \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi \eta_j - \mu_j \alpha_j) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \alpha_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\phi \eta_j - \mu_j \alpha_j) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j \mu_i \right) (\alpha_{j+1} - \alpha_j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\phi \eta_j - \mu_j \alpha_j) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=j-1}^{\infty} \mu_i \right) (\alpha_{j+1} - \alpha_j) \\ &= \phi \eta_0 - \mu_0 \alpha_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\phi \eta_j - \mu_j \alpha_j + \left(\sum_{i=j}^{\infty} \mu_i \right) (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right] \\ &= \phi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \end{aligned}$$

Claramente as ϕ_j assim definidas satisfazem 1.3.16(1), 1.3.16(2) e 1.3.16(5). A desigualdade 1.3.16(3) segue das seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} |\phi(x)\eta_j(x) - \mu_j\alpha_j(x)| &\leq |\phi(x)\eta_j(x)| + \\ &+ \left| \int \phi(t)\eta_j(t)dt \left(\int \eta_j(t)dt \right)^{-1} \right| \\ &\leq 2 \sup_{2^j-1 \leq |x| \leq 2^{j+1}} |\phi(x)| \\ &\leq 2 A 2^{-2j} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=j}^{\infty} \mu_i \right| &\leq \sum_{i=j}^{\infty} \left| \int \phi(t)\eta_i(t)dt \right| \\ &\leq 2 A \sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i} \\ &\leq 4 A 2^{-j} ; \end{aligned}$$

$$|\alpha_j(x) - \alpha_{j-1}| \leq \left(\int \eta_j(t)dt \right)^{-1} + \left(\int \eta_{j-1}(t)dt \right)^{-1} \leq 6 2^{-j} ,$$

onde a última desigualdade segue do fato de

$$\int \eta_j(x)dx \geq \int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}-1} \eta_j(x)dx \geq 2^{-1} 2^j .$$

Finalmente, a desigualdade 1.3.16(4) segue do Lema 1.3.15 e de 1.3.16(3).

1.3.17 TEOREMA. Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uma função par tal que $\text{supp } \psi \subset [-1,1]$, $0 \in \text{supp } \hat{\psi}$ e $\int_0^\infty |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{t} = 1$. Uma função localmente integrável g pertence a $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ se, e somente se, existe uma constante $C_g > 0$ tal que

$$(1) \quad \iint_{S(\Omega)} \|\psi_s \psi_t * g(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq C_\varepsilon |\Omega|$$

para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de medida finita. Além disso,

$$\sup_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \iint_{S(\Omega)} \|\psi_s \psi_t * g(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right\}^{1/2} \sim \|g\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)},$$

onde o supremo é tomado sobre todos os conjuntos abertos de medida finita e $a \sim b$ significa que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \leq \frac{a}{b} \leq C_2$$

Demonstração. Mostremos inicialmente que a desigualdade 1.3.17(1) vale para toda função $g = (g_{ij})_{ij}$ pertencente a $L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Para isso, notemos que pelo lema 1.3.16 existe uma sequência $\{\psi^n\}_{n=0}^\infty$ de funções C^∞ tais que

$$(2) \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n ;$$

$$(3) \quad \text{supp } \psi^n \subset [-2^{n+1}, 2^{n+1}] ;$$

$$(4) \quad \int \psi^n(x) dx = 0 ;$$

$$(5) \quad \int_0^\infty |\mathcal{F} \psi^n(\pm t)|^2 \frac{dt}{t} \leq C \cdot A^2 2^{-2n} .$$

Então, pondo

$$\psi_{s,t}^{m,n}(x, y) = s^{-1} t^{-1} \psi^m(s^{-1}x) \psi^n(t^{-1}y) .$$

obtemos

$$\begin{aligned} \psi_s(x) \psi_t(y) &= s^{-1} t^{-1} \psi(s^{-1}x) \psi(t^{-1}y) \\ &= s^{-1} t^{-1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \psi^m(s^{-1}x) \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(t^{-1}y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s^{-1} t^{-1} \psi^m(s^{-1}x) \psi^n(t^{-1}y) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{s,t}^{m,n}(x,y)
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\psi_s \psi_t * g_{ij}(x,y) &= \iint \psi_s(x') \psi_t(y') g_{ij}(x-x', y-y') dx' dy' \\
&= \iint \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{s,t}^{m,n}(x', y') \right] g_{ij}(x-x', y-y') dx' dy' \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \iint \psi_{s,t}^{m,n}(x', y') g_{ij}(x-x', y-y') dx' dy' \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x,y) ,
\end{aligned}$$

para cada g_{ij} . Logo, para cada $(x, s; y, t)$ pertencente a $S(\Omega)$, a desigualdade de Minkowski fornece

$$\begin{aligned}
\|(\psi_s \psi_t * g)(x,y)\|_{\ell^2} &= \|((\psi_s \psi_t * g_{ij})(x,y))_{ij}\|_{\ell^2} \\
&= \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x,y) \right|^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \|(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x,y)\| \right)^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \|(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x,y)\|_{\ell^2}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(6) \quad & \left[\iint_{S(\Omega)} \|\psi_s \psi_t * g(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \leq \\
& \leq \left[\iint_{S(\Omega)} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left((\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x, y) \right)_{ij} \right\|_{\ell^2} \right)^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \\
& \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\iint_{S(\Omega)} \left\| \left((\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x, y) \right)_{ij} \right\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \iint_{S(\Omega)} |(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x, y)|^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Encontremos agora uma estimativa para cada integral

$$\iint_{S(\Omega)} |(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x, y)|^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}$$

onde $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Para isso, dado um retângulo R contido em $\mathbb{R}^2$, seja $R^{m,n}$ o retângulo concêntrico a R obtido através da expansão do retângulo R de 2^{n-1} vezes na direção x e 2^{m+1} vezes na direção y . Seja

$$\Omega^{m,n} = \bigcup_{R \subset \Omega} R^{m,n},$$

isto é, $\Omega^{m,n}$ é a reunião de todos os retângulos $R^{m,n}$ expandidos de retângulos R contidos em Ω . Então, temos

$$(7) \quad \Omega^{m,n} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M_S(\chi_\Omega)(x, y) > \frac{1}{8} 2^{-(m+n)}\}$$

e

$$(8) \quad |\Omega^{m,n}| \leq C \cdot 2^{3/2(m+n)} |\Omega|.$$

De fato, se (x, y) pertence a $\Omega^{m,n}$ então existe um retângulo $R^{m,n}$ tal que (x, y) pertence a $R^{m,n}$ e R está contido em $R^{m,n} \subset \Omega$, donde segue que

$$M_S(\chi_\Omega)(x, y) = \sup_{R'} \frac{|R' \cap \Omega|}{|R'|}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{|R^{m,n} \cap \Omega|}{|R^{m,n}|} \\
&\geq \frac{|R|}{2^{m+1}2^{n+1}|R|} \\
&> \frac{1}{8}2^{-(m+n)},
\end{aligned}$$

o que mostra 1.3.17(7). A desigualdade 1.3.17(8) decorre de 1.3.17(7) e do teorema maximal forte (Teorema 1.1.11).

Notemos ainda que se $(x, s; y, t)$ pertence a $S(\Omega)$, então temos

$$(9) \quad (\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x, y) = (\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij} \chi_{\Omega^{m,n}})(x, y).$$

Com efeito, seja $(x, s; y, t)$ em $S(\Omega)$, isto é, $(x, s; y, t)$ satisfazendo

$$R_{s,t}(x, y) = (x - s, x + s) \times (y - t, y + t) \subset \Omega.$$

Logo, por 1.3.17(3) temos que

$$\text{supp } \psi^m\left(\frac{x - \cdot}{s}\right) \subset [x - s2^{m+1}, x + s2^{m+1}],$$

e como

$$(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x, y) = \iint s^{-1}t^{-1} \psi^m\left(\frac{x - x'}{s}\right) \psi^n\left(\frac{y - y'}{t}\right) g_{ij}(x', y') dx' dy'$$

então se (x', y') não pertence a $\Omega^{m,n}$ temos que (x', y') não pertence a

$$R_{s,t}^{m,n}(x, y) = (x - s2^{m+1}, x + s2^{m+1}) \times (y - t2^{n+1}, y + t2^{n+1}),$$

donde segue que

$$\psi^m\left(\frac{x - x'}{s}\right) \psi^n\left(\frac{y - y'}{t}\right) = 0,$$

isto é,

$$(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x, y) = 0.$$

Isto mostra 1.3.17(9). Portanto, pelo teorema de Plancherel temos

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S(\Omega)} |(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x,y)|^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\
 & \leq \iint_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} |(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij} \chi_{\Omega^{m,n}})(x,y)|^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\
 & = \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F} \psi_{s,t}^{m,n}(\xi, \eta)|^2 |\mathcal{F}(g_{ij} \chi_{\Omega^{m,n}})(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\
 & = \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}(g_{ij} \chi_{\Omega^{m,n}})(\xi, \eta)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} |\mathcal{F} \psi_{s,t}^{m,n}(\xi, \eta)|^2 \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right) d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Mas utilizando 1.3.17(5), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}_+^2} |\mathcal{F} \psi_{s,t}^{m,n}(\xi, \eta)|^2 \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} = \\
 & = \left(\int_0^\infty |\mathcal{F} \psi_s^m(\xi)|^2 \frac{ds}{s} \right) \left(\int_0^\infty |\mathcal{F} \psi_t^n(\eta)|^2 \frac{dt}{t} \right) \\
 & = \left(\int_0^\infty |\mathcal{F} \psi(s\xi)|^2 \frac{ds}{s} \right) \left(\int_0^\infty |\mathcal{F} \psi^n(t\eta)|^2 \frac{dt}{t} \right) \\
 & = \left(\int_0^\infty |\mathcal{F} \psi(\pm u)|^2 \frac{du}{u} \right) \left(\int_0^\infty |\mathcal{F} \psi^n(\pm v)|^2 \frac{dv}{v} \right) \\
 & \leq C \cdot 2^{-2(m+n)}.
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S(\Omega)} |(\psi_{s,t}^{m,n} * g_{ij})(x,y)|^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\
 & \leq C \cdot 2^{-2(m+n)} \int_{\mathbb{R}^2} |g_{ij} \chi_{\Omega^{m,n}}(x,y)|^2 dx dy.
 \end{aligned}$$

Voltando agora em 1.3.17(6) e utilizando 1.3.17(8) obtemos

$$\begin{aligned}
& \left[\iint_{S(\Omega)} \| \psi_s \psi_t * g(x, y) \|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \\
& \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} C 2^{-2(m+n)} \int_{\mathbb{R}^2} |g_{ij} \chi_{\Omega^{m,n}}(x, y)|^2 dx dy \right]^{1/2} \\
& \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[C 2^{-2(m+n)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)}^2 |\Omega^{m,n}| \right]^{1/2} \\
& \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[C 2^{-2(m+n)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)}^2 2^{3/2(m+n)} |\Omega| \right]^{1/2} \\
& \leq C \cdot |\Omega|^{1/2} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)},
\end{aligned}$$

o que mostra 1.3.17(1) para g pertencente a $L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)$.

Agora se g pertence a $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, então

$$g = \sum_{k \in \square} \bar{H}_k g_k,$$

com $\bar{H}_{00} g_{00} = g_{00}$ e

$$\sum_{k \in \square} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)} < \infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(10) \quad & \left[\iint_{S(\Omega)} \| (\psi_s \psi_t * g)(x, y) \|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \\
& \leq \left[\iint_{S(\Omega)} \left(\sum_{k \in \square} \| (\psi_s \psi_t * \bar{H}_k g_k)(x, y) \|_{\ell^2} \right)^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \\
& \leq \sum_{k \in \square} \left[\iint_{S(\Omega)} \| (\psi_s \psi_t * \bar{H}_k g_k)(x, y) \|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Mas se denotarmos por H a transformada de Hilbert em uma variável e convencionarmos que $H_\varphi = \varphi$ e $H_1 \varphi = H\varphi$, então para cada

$k = (k_1, k_2) \in \square$, temos

$$\begin{aligned} (\psi_s \psi_t * \tilde{H}_k g_k)(x, y) &= ((\psi_s \psi_t * \tilde{H}_k g_k^{ij})(x, y))_{ij} \\ &= ((H_k(\psi_s \psi_t) * g_k^{ij})(x, y))_{ij} \\ &= [H_{k_1}(\psi_s) H_{k_2}(\psi_t) * g_k](x, y) \\ &= (\psi_s^{k_1} \psi_t^{k_2} * g_k)(x, y), \end{aligned}$$

onde $\psi^\ell = H_\ell \psi$ se $\ell = 0, 1$. Além disso, como ψ pertence a $S(\mathbb{R})$ com $0 \notin \text{supp } \hat{\psi}$ então $H\psi$ também pertence a $S(\mathbb{R})$ com $0 \notin \text{supp } \mathcal{F}(H\varphi)$, pois $\mathcal{F}(H\psi)(x) = -i \operatorname{sg} x \hat{\psi}(x)$. Portanto, utilizando um argumento semelhante ao que foi feito para obtermos a desigualdade 1.3.17(1) quando g pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ (com g e $\psi_s \psi_t$ substituídos por g_k e $\psi_s^{k_1} \psi_t^{k_2}$, $k = (k_1, k_2)$, respectivamente), segue de 1.3.17(10) que

$$\begin{aligned} &\left[\iint_{S(\Omega)} \|(\psi_s \psi_t * g)(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \\ &\leq C \cdot |\Omega|^{1/2} \sum_{k \in \square} \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, \ell^2)}, \end{aligned}$$

para toda $g \in BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, donde resulta que

$$\begin{aligned} &\left[\iint_{S(\Omega)} \|(\psi_s \psi_t * g)(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right]^{1/2} \\ &\leq C \cdot |\Omega|^{1/2} \|g\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)}. \end{aligned}$$

para toda g em $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Isto completa a demonstração da desigualdade 1.3.17(1).

A demonstração acima apresentada é uma generalização para o caso vetorial de uma versão simplificada da demonstração original de Chang-Fefferman [16], obtida por J. Aguirre (no caso escalar) [1]. A demonstração da recíproca é bastante longa, porém é obtida por modificação rotineira na demonstração original de Chang-Fefferman.

CAPÍTULO 2

OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS SOBRE OS ESPAÇOS H^1 E BMO NÃO-ISOTRÓPICOS.

Dedicamos este capítulo ao estudo de operadores integrais singulares vetoriais com núcleo produto sobre os espaços H^1 e BMO não-isotrópicos. Os núcleos dos operadores que estudamos são do tipo $K(x, u, y, v) = k_2(y, v) \cdot k_1(x, u)$ (o produto aqui indicando na verdade a composição de funções); onde cada k_i , $i = 1, 2$, é uma aplicação (também denominada núcleo) definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e tomando valores num conveniente espaço de aplicações lineares $L(E, F)$ (E, F espaços de Banach).

Os operadores que consideramos são análogos aos estudados por D.L. Fernandez em [32]. Neste trabalho Fernandez obtém um resultado onde são fornecidas condições sobre os núcleos k_1 e k_2 para que tais operadores sejam limitados sobre os espaços $L^p = L^{p_2}(L^{p_1})$ de normas mistas de Benedek-Panzone [3]. Nosso interesse aqui é obter versões do resultado de Fernandez para os espaços H^1 e BMO não-isotrópicos. Estas versões desempenham um papel importante na demonstração da caracterização do espaço H^1 que é realizada no Capítulo 4. O primeiro resultado neste sentido é o Teorema 2.2.7 que dá condições para que operadores integrais singulares vetoriais análogos aos considerados por Fernandez sejam limitados de L_c^∞ em BMO . Uma ferramenta essencial na demonstração deste resultado é o lema geométrico que J.L.Journé obteve em [41] para demonstrar que uma certa classe de operadores integrais singulares é limitada de L_c^∞ em BMO .

Chamamos a atenção que o resultado que obtemos se refere a operadores integrais singulares vetoriais enquanto o de Journé trata apenas de operadores integrais singulares escalares. Além disso, mesmo no caso escalar, a demonstração que apresentamos simplifica os argumentos utilizados por Journé. Isto é realizado através de uma modificação para o nosso caso de uma idéia que F.Sória utiliza em [54] para demonstrar que um determinado operador do tipo Littlewood-Paley é limitado sobre L^p .

O outro resultado que obtemos é o Teorema 2.3.3 que dá condições para que operadores semelhantes aos de Fernandez sejam limitados de H^1 em L^1 . Aqui também o lema de Journé é indispensável na demonstração. Esta, por sua vez, é baseada em argumentos que R.Fefferman utiliza em [29] para mostrar que operadores da classe de Journé são limitados de H^p em L^p , para p próximo de 1. Observamos novamente que no resultado de R.Fefferman os operadores considerados são escalares enquanto o que obtemos é para operadores vetoriais.

2.1 OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS.

2.1.1 NOTAÇÃO. Sejam E, F espaços de Banach e $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$. Denotemos por $L(E, F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F e por $L_{loc}^1(\mathcal{U}, E)$ o conjunto das aplicações definidas no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a valores em E que são mensuráveis e localmente integráveis em $\mathcal{U}$. Denotemos por $L_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ o subespaço de $L^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ das funções com suporte compacto e por $M(\mathbb{R}^n, E)$ o espaço das funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$.

Seja k pertencente a $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \Delta, L(E, F))$. Diremos que k verifica a condição (α) se

$$\int_{|x-y'| > 2|y-y'|} \|k(x, y) - k(x, y')\|_{L(E, F)} dx \leq C.$$

Diremos que k verifica a condição (β) se

$$\int_{|x'-y'| > 2|x-x'|} \|k(x, y) - k(x', y)\|_{L(E, F)} dy \leq C.$$

2.1.2. Seja T um operador linear de $L_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n, F)$ tal que

- (i) T estende-se a um operador linear limitado de $L^r(\mathbb{R}^n, E)$ em $L^r(\mathbb{R}^n, F)$, para algum r , com $1 < r < \infty$;
- (ii) existe um núcleo k pertencente a $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \Delta, L(E, F))$ tal que

$$Tf(x) = \int k(x, y) f(y) dy$$

para toda f pertencente a $L_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ e $x \notin \text{supp } f$.

Um operador T como o definido acima é usualmente chamado de *operador integral singular* (de núcleo variável). Em particular se k pertence a $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n - \{0\}, L(E, F))$ e $k(x, y) = k(x - y)$, o operador integral singular será do tipo convolução.

O principal resultado sobre esses operadores é o seguinte (ver [46], [47]).

2.1.3 TEOREMA. Seja T um operador linear de $L_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n, F)$ definido como em 2.1.2.

- (a) Se k verifica (α) e (β) então T é um operador limitado de $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ em $L^p(\mathbb{R}^n, F)$, para todo p com $1 < p < \infty$;
- (b) Se k verifica (α) então T é um operador limitado de $H^1(\mathbb{R}^n, E)$ em $L^1(\mathbb{R}^n, F)$;
- (c) Se k verifica (β) então T é um operador limitado de $L_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ em $BMO(\mathbb{R}^n, F)$.

Os espaços $H^1(\mathbb{R}^n, E)$ e $BMO(\mathbb{R}^n, F)$ que aparecem em 2.1.3 são os espaços considerados, por exemplo, por Fefferman-Stein em [26].

2.2 OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS COM NÚCLEO PRODUTO SOBRE O ESPAÇO $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ NÃO-ISOTRÓPICO.

Em [32] Fernandez apresenta uma generalização parcial do Teorema 2.1.3 para núcleo produto e espaços L^p com normas mistas de Benedek-

Panzone [3]. O objetivo deste parágrafo é obter uma generalização de 2.1.3(c) para o espaço $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ introduzido no Capítulo 1. A demonstração que apresentamos é baseada numa idéia de F. Sória (ver [54]) e utiliza como ingrediente de fundamental importância um lema geométrico devido a J. L. Journé [41], que tem tido muitas aplicações na teoria de domínios produto.

2.1.1 NOTAÇÃO. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto de medida finita. Denotaremos por $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega)$ a coleção de todos os retângulos diádicos maximais contidos em Ω . Indicaremos por $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega)$ a coleção de todos os retângulos diádicos $R = I \times J$ contidos em Ω que são maximais na direção x , isto é, se $S = I' \times J \subset \Omega$ é um retângulo diádico contendo R então $I' = I$. De maneira análoga definimos $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2(\Omega)$. Relembramos que os intervalos e retângulos diádicos foram definidos no parágrafo 1.1.1 do Capítulo 1. Denotaremos por Ω^* o conjunto onde a função maximal forte $M_S(\chi_\Omega)$ é maior que $\frac{1}{2}$, isto é,

$$\Omega^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M_S(\chi_\Omega)(x, y) > \frac{1}{2}\}$$

Estamos agora em condições de enunciar o próximo lema que combina o lema geométrico de J.L.Journé [41] com uma observação devida a R.Fefferman [29]. Com a finalidade de facilitar a leitura faremos a demonstração do lema: demonstração essa cujas idéias se devem essencialmente a F. Soria [54].

2.2.2 LEMA. Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Então, para cada $R_\alpha = I_\alpha \times J_\alpha$ pertencente a $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega)$ existe um retângulo $R'_\alpha = I'_\alpha \times J'_\alpha$ contendo R_α tal que

$$(1) \quad \bigcup_{R_\alpha \in \mathcal{M}} R'_\alpha \leq C \cdot \Omega$$

e, para todo $\varepsilon > 0$,

$$(2) \quad \sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}} |R_\alpha| \left[\left(\frac{|J_\alpha|}{|I'_\alpha|} \right)^\varepsilon - \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\varepsilon \right] \leq C_\varepsilon \cdot \Omega \quad ,$$

onde C_ε é uma constante que depende apenas de ε .

Demonstração. Mostremos inicialmente 2.2.2(1). Dado

$$R_\alpha = I_\alpha \times J_\alpha \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega) ,$$

seja $R_\alpha^1 = I'_\alpha \times J_\alpha$, onde I'_α é o maior intervalo diádico contendo I_α tal que

$$R_\alpha^1 \subset \Omega^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M_S(\chi_\Omega)(x, y) > \frac{1}{2}\}.$$

Observemos que $R_\alpha^1 \in \mathcal{M}_1(\Omega^*)$. Seja agora $(R_\alpha^1)^2 = I'_\alpha \times J'_\alpha$, onde J'_α é o maior intervalo diádico contendo J_α tal que

$$(R_\alpha^1)^2 \subset (\Omega^*)^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M_S(\chi_{\Omega^*})(x, y) > \frac{1}{2}\}.$$

Notemos que $(R_\alpha^1)^2 \in \mathcal{M}_2((\Omega^*)^*)$. Coloquemos

$$(R_\alpha^1)^2 = R'_\alpha \text{ e } (\Omega^*)^* = \hat{\Omega}.$$

Agora, observemos que se $(x, y) \in \bigcup_{R_\alpha \in \mathcal{M}} R'_\alpha$, então $(x, y) \in R'_\alpha \subset \hat{\Omega}$, para algum α , e

$$M_S(\chi_{\hat{\Omega}})(x, y) = \sup_S \frac{|S \cap \hat{\Omega}|}{|S|} \geq \frac{|R'_\alpha \cap \hat{\Omega}|}{|R'_\alpha|} = 1 > \frac{1}{2} .$$

onde o supremo é tomado sobre todos os retângulos S que contêm (x, y) . Logo,

$$\bigcup_{R_\alpha \in \mathcal{M}} R'_\alpha \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M_S(\chi_{\hat{\Omega}})(x, y) > \frac{1}{2}\}$$

e pelo teorema maximal forte (Teorema 1.1.11) temos

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{R_\alpha \in \mathcal{M}} R'_\alpha \right| &\leq \left| \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M_S(\chi_{\hat{\Omega}})(x, y) > \frac{1}{2}\} \right| \\ &\leq C \cdot \hat{\Omega} \leq C \cdot \Omega^* \leq C \cdot \Omega . \end{aligned}$$

o que completa a demonstração de 2.2.2(1). Mostremos agora 2.2.2(2).

Observevamos de início que

$$\sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)} |R_\alpha| \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon \leq \sum_{R_\alpha^1} \left(\sum_{R_\alpha^1} |R_\alpha| \right) \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon$$

onde $\sum_{R_\alpha^1} |R_\alpha|$ denota o somatório sobre todos os retângulos $R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)$ distintos que dão origem a R_α^1 . Mas para todo $R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)$, temos que $R_\alpha^1 \in \mathcal{M}_1(\Omega')$ e se $R_\beta \in \mathcal{M}(\Omega)$ é tal que $R_\alpha^1 = R_\beta^1$ então $R_\alpha = R_\beta$ ou $R_\alpha \cap R_\beta = \emptyset$. Logo, para cada R_α^1 , temos

$$\sum_{R_\alpha} |R_\alpha| = \left| \bigcup_{R_\alpha^1} R_\alpha \right| \leq |R_\alpha^1|$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)} |R_\alpha| \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon &\leq \sum_{R_\alpha^1} |R_\alpha^1| \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon \\ (3) \qquad \qquad \qquad &\leq \sum_{R_\beta^1 \in \mathcal{M}_1(\Omega')} |R_\beta^1| \left(\frac{|J_\beta|}{|J'_\beta|} \right)^\epsilon \end{aligned}$$

Agora, para cada retângulo R_ℓ pertencente a $\mathcal{M}(\Omega')$ coloquemos

$$\Gamma_\ell = \{ \beta : R_\beta \in \mathcal{M}_1(\Omega') \text{ e } R_\beta \subset R_\ell \}.$$

e para cada inteiro $k \geq 0$,

$$\Gamma_\ell^k = \{ \beta \in \Gamma_\ell : J_\beta = \frac{|J_\ell|}{2^k} \}.$$

Então, $J'_\beta = J'_\ell$ e $J_\beta = J_\ell$ para todo $\beta \in \Gamma_\ell$, e 2.2.2(3) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\sum_{R_\beta \in \mathcal{M}(\Omega^*)} \sum_{\beta \in \Gamma_\lambda} |R_\beta| \left(\frac{|J_\beta|}{|J'_\beta|} \right)^\epsilon &= \sum_{R_\delta \in \mathcal{M}(\Omega^*)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \Gamma_\lambda^k} |R_\beta| \left(\frac{|J_\delta|}{2^k |J'_\delta|} \right)^\epsilon \\
&= \sum_{R_\delta \in \mathcal{M}(\Omega^*)} \sum_{k=0}^{\infty} |R_\delta| \left(\frac{|J_\delta|}{2^k |J'_\delta|} \right)^\epsilon
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|J_\delta|}{2^k |J'_\delta|} \right)^\epsilon \leq C \cdot \left(\frac{|J_\delta|}{|J'_\delta|} \right)^\epsilon$$

então

$$\sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)} |R_\alpha| \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon \leq C \cdot \sum_{R_\delta \in \mathcal{M}(\Omega^*)} |R_\delta| \left(\frac{|J_\delta|}{|J'_\delta|} \right)^\epsilon.$$

Portanto, tudo se reduz a mostrar que

$$(4) \quad \sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)} |R_\alpha| \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon \leq C \cdot |\Omega|$$

e

$$(5) \quad \sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega^*)} |R_\alpha| \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon \leq C \cdot |\Omega|.$$

Necessitamos mostrar apenas 2.2.2(4), pois por simetria e pelo teorema maximal forte (Teorema 1.1.11), temos

$$\sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega^*)} |R_\alpha| \left(\frac{|J_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon \leq C \cdot |\Omega^*| \leq C \cdot |\Omega|.$$

Mostremos 2.2.2(4). Dado α , definamos

$$\Gamma_\alpha = \{\beta : R_\beta \in \mathcal{M}(\Omega), |I_\beta| > |I'_\alpha|\}$$

e

$$D_\alpha = R_\alpha - \bigcup_{\beta \in \Gamma_\alpha} R_\beta.$$

Afirmamos que

$$(6) \quad |D_\alpha| > \frac{1}{2}|R_\alpha|.$$

Para mostrar isto, observemos inicialmente que se β pertence a Γ_α e $R_\alpha \cap R_\beta \neq \emptyset$, então $pI'_\alpha \subset I_\beta$ e $J_\beta \subset J_\alpha$, onde pI'_α (chamado "pai" de I'_α) denota o intervalo diádico contendo I'_α de medida igual a duas vezes a medida de I'_α . Com efeito, $R_\alpha \cap R_\beta \neq \emptyset$ implica que $I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset$ e $J_\alpha \cap J_\beta \neq \emptyset$. Mas de $I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset$ e $|I_\beta| > |I'_\alpha|$ segue que I'_α está contido estritamente em I_β , donde $I_\beta \supset pI'_\alpha$. Por outro lado, $J_\alpha \cap J_\beta \neq \emptyset$ acarreta $J_\alpha \subset J_\beta$ ou $J_\beta \subset J_\alpha$. Mas a possibilidade $J_\alpha \subset J_\beta$ não ocorre, pois se ocorresse teríamos R_α contido estritamente em R_β (visto que $I_\alpha \subset I'_\alpha$ e I'_α contido estritamente em I_β), o que contrariaria o fato de R_α pertencer a $\mathcal{M}(\Omega)$. Portanto $J_\beta \subset J_\alpha$. Agora, para mostrarmos 2.2.2(6), suponhamos por absurdo que

$$|D_\alpha| \leq \frac{1}{2}|R_\alpha|$$

ou seja,

$$(7) \quad R_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta \in \Gamma_\alpha} R_\beta \right) > \frac{1}{2}|R_\alpha|.$$

Mas do fato de $J_\alpha \supset J_\beta$, para todo $\beta \in \Gamma_\alpha$, temos

$$R_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta \in \Gamma_\alpha} R_\beta \right) = [I_\alpha \times J_\alpha] \cap \left[\bigcup_{\beta \in \Gamma_\alpha} (I_\beta \times J_\beta) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= [I_\alpha \times J_\alpha] \cap [(\cup I_\beta) \times (\cup J_\beta)] \\
&= [I_\alpha \cap (\cup I_\beta)] \times [J_\alpha \cap (\cup J_\beta)] \\
&= I_\alpha \times [J_\alpha \cap (\cup J_\beta)].
\end{aligned}$$

Além disso, a inclusão $pI'_\alpha \subset I_\beta$, para todo $\beta \in \Gamma_\alpha$, acarreta que

$$\begin{aligned}
pI'_\alpha \times (\cup_\beta J_\beta) &= \cup_\beta (pI'_\alpha \times J_\beta) \\
&\subset \cup_\beta (I_\beta \times J_\beta) \subset \Omega.
\end{aligned}$$

Consequentemente, 2.2.2(7) se transforma em

$$|(\cup J_\beta) \cap J_\alpha| > \frac{1}{2} |J_\alpha|,$$

isto é,

$$|pI'_\alpha \times [(\cup J_\beta) \cap J_\alpha]| > \frac{1}{2} |pI'_\alpha \times J_\alpha|.$$

ou seja,

$$|[pI'_\alpha \times (\cup J_\beta)] \cap [pI'_\alpha \times J_\alpha]| > \frac{1}{2} |pI'_\alpha \times J_\alpha|.$$

ou ainda,

$$|\Omega \cap [pI'_\alpha \times J_\alpha]| > \frac{1}{2} |pI'_\alpha \times J_\alpha|.$$

Da última desigualdade resulta que

$$pI'_\alpha \times J_\alpha \subset \Omega.$$

Pela definição de $R_\alpha^1 = I'_\alpha \times J_\alpha$ segue que

$$pI'_\alpha \times J_\alpha \subset I'_\alpha \times J_\alpha \quad ,$$

isto é, que $pI'_\alpha \subset I'_\alpha$, o que é uma contradição. Isto completa a demonstração de 2.2.2(6).

Seja agora

$$\mathcal{A} = \{k \in \mathbb{Z} : |I_\alpha| = 2^k, \text{ onde } I_\alpha \text{ é tal que } R_\alpha = I_\alpha \times J_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)\}.$$

Então, por 2.2.2(6) temos

$$\begin{aligned} \sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)} |R_\alpha| \left(\frac{|I_\alpha|}{|I'_\alpha|} \right)^\epsilon &= \\ &= \sum_{k \in \mathcal{A}} \sum_{\{\alpha: |I_\alpha| = 2^k\}} |R_\alpha| \left(\frac{2^k}{|I'_\alpha|} \right)^\epsilon \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\{\alpha: |I_\alpha| = 2^k\}} |R_\alpha| \left(\frac{2^k}{|I'_\alpha|} \right)^\epsilon \\ &\leq 2 \iint \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\{\alpha: |I_\alpha| = 2^k\}} \lambda_{D_\alpha}(x, y) \left(\frac{2^k}{|I'_\alpha|} \right)^\epsilon dx dy . \end{aligned}$$

Fixe $(x, y) \in \Omega$ e considere entre todos os retângulos $R \in \mathcal{M}(\Omega)$ contendo (x, y) , aquele com maior projeção sobre o eixo x (denotemos este retângulo por $R_\gamma = I_\gamma \times J_\gamma$). Seja $T(x, y)$ o comprimento desta projeção (isto é, $T(x, y) = |I_\gamma|$). Então, se $|I_\alpha| = 2^k$ e $(x, y) \in D_\alpha = R_\alpha - \bigcup_{\beta \in \Gamma_\alpha} R_\beta$ temos $2^k \leq T(x, y) \leq |I'_\alpha|$. De fato, como $(x, y) \in R_\alpha = I_\alpha \times J_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)$ então pela definição de $T(x, y)$ temos $2^k = |I_\alpha| \leq T(x, y)$. Por outro lado, se $(x, y) \in D_\alpha$ então $(x, y) \in \bigcup_{\beta \in \Gamma_\alpha} R_\beta$, isto é, $(x, y) \in R_\beta$, qualquer que seja $\beta \in \Gamma_\alpha$. Como $(x, y) \in R_\gamma = I_\gamma \times J_\gamma$, então $\gamma \in \Gamma_\alpha$, donde $T(x, y) = |I_\gamma| \leq |I'_\alpha|$. Agora, como os D_α são disjuntos e $\bigcup D_\alpha \subset \Omega$ então

$$\sum_{\{\alpha: |I_\alpha| = 2^k\}} \lambda_{D_\alpha}(x, y) = \lambda_{\bigcup D_\alpha}(x, y) \leq \lambda_\Omega(x, y).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{R_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)} |R_\alpha| \left(\frac{|I_\alpha|}{|J'_\alpha|} \right)^\epsilon &\leq \\
 &\leq 2 \int \int \sum_{2^k \leq T(x,y)} \chi_\Omega(x,y) \left(\frac{2^k}{T(x,y)} \right)^\epsilon dx dy \\
 &\leq 2 \int \int \chi_\Omega(x,y) \sum_{k \leq 0} 2^{k\epsilon} dx dy \\
 &= C |\Omega| ,
 \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do lema.

Na demonstração do resultado principal deste parágrafo necessitaremos do próximo lema. Antes, porém, introduziremos algumas notações.

2.2.3 NOTAÇÕES. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, colocaremos

$$S_1(I) = I \times (0, |I|)$$

e se $R = I \times J$, então

$$S_1(R) = S_1(I) \times S_1(J) \subset \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 .$$

Se $c > 0$ é um número real, denotaremos por cI o intervalo concêntrico a I , obtido através do intervalo I pela dilatação de c vezes seu comprimento; e se $R = I \times J$, cR indicará o retângulo $cI \times cJ$.

Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma função par tal que $\text{supp } \psi \subset [-1, 1]$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds = 0$ e

$$(I) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(s)|^2 \frac{ds}{s} < \infty .$$

Para $t > 0$, colocaremos $\psi_t(s) = t^{-1} \psi(t^{-1} s)$. Então indicando por ℓ^2 o espaço $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$, temos o seguinte resultado:

2.2.4 LEMA. Sejam E um espaço de Banach, F um espaço de Hilbert e k_1 e k_2 núcleos em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2, L(E, F))$ e $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2, L(F, \ell^2))$, respectivamente, que satisfazem

$$(1) \quad \int_{|x'-y| > \gamma|x-z'|} \|k_j(x, y) - k_j(x', y)\|_{L_1} dy \leq C \cdot \gamma^{-\delta}, \quad j = 1, 2,$$

para todo $\gamma \geq 2$ e algum $\delta > 0$, onde $L_1 = L(E, F)$ e $L_2 = L(F, \ell^2)$. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares limitados de $L^2(\mathbb{R}, E)$ em $L^2(\mathbb{R}, F)$ e de $L^2(\mathbb{R}, F)$ em $L^2(\mathbb{R}, \ell^2)$, respectivamente, e que satisfaçam

$$(2) \quad T_1 f(x) = \int k_1(x, u) f(u) du,$$

para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}, E)$, e

$$(3) \quad T_2 f(y) = \int k_2(y, v) f(v) dv,$$

para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}, F)$. Suponhamos que T seja um operador linear de $L^\infty_c(\mathbb{R}^2, E)$ em $M(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ satisfazendo

$$(4) \quad Tf(x, y) = \int \int k_2(y, v) k_1(x, u) f(u, v) du dv,$$

para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2, E)$ e $(x, y) \in \text{supp } f$. Sejam $R = I \times J$ e $\tilde{R} = \tilde{I} \times \tilde{J}$ retângulos em $\mathbb{R}^2$ tais que $\tilde{R} \supset 6R$. Então, existem constantes $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$(5) \quad \begin{aligned} \int \int_{S_1(R)} \|v_s v_t * Tf(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} &\leq \\ &\leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |R| \left[\left(\frac{|I|}{|\tilde{I}|} \right)^\varepsilon + \left(\frac{|J|}{|\tilde{J}|} \right)^\varepsilon \right]. \end{aligned}$$

para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2, E)$ tal que $\text{supp } f \cap 6\tilde{R} = \emptyset$.

Demonstração. Sejam

$$A_1 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : z \in 6I, w \notin 6\tilde{J}\}$$

$$A_2 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : z \notin 6\tilde{I}, w \in 6J\}$$

$$A_3 = A_4 \cup A_5$$

onde

$$A_4 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : z \notin 6I, w \notin 6\tilde{J}\}$$

e

$$A_5 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : z \notin 6\tilde{I}, w \notin 6J\}$$

Observemos que A_1 , A_2 e A_3 são mutuamente disjuntos e $\text{supp } f \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (6\hat{R})^c$, pois por hipótese temos que $\text{supp } f \cap (6\hat{R}) = \emptyset$. Assim, se colocarmos $f_i = f \chi_{A_i}$, $i = 1, 2, 3$, então $f = f_1 + f_2 + f_3$ e teremos

$$\begin{aligned} (6) \quad & \int \int_{S_1(R)} \|v_s v_t * Tf(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq \int \int_{S_1(R)} \|v_s v_t * Tf_1(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} + \\ & + \int \int_{S_1(R)} \|v_s v_t * Tf_2(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} + \\ & + \int \int_{S_1(R)} \|v_s v_t * Tf_3(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Estimemos cada uma das integrais que aparecem no segundo membro de 2.2.4(6). Para estimarmos a primeira, observemos inicialmente que se

$(x, s; y, t) \in S_1(R)$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $|x - u| \leq s$ e $|y - v| \leq t$ então $(u, v) \in 3R \subset 6\tilde{R}$ e portanto $(u, v) \notin \text{supp } f_1$. Logo, se colocarmos $f_{1w}(\cdot) = f_1(\cdot, w)$ e lembrarmos que $\int \psi(s) ds = 0$, teremos

$$\begin{aligned} \psi_s \psi_t * T f_1(x, y) &= \\ &= \int \int \psi_s(x - u) \psi_t(y - v) T f_1(u, v) du dv \\ &= \int \int \psi_s(x - u) \psi_t(y - v) \left(\int \int k_2(v, w) \cdot k_1(u, z) \cdot f_1(z, w) dz dw \right) du dv \\ &= \int_{(6\tilde{J})^c} \left(\int \psi_t(y - v) k_2(v, w) dv \right) \left(\int \psi_s(x - u) \left(\int k_1(u, z) f_{1w}(z) dz \right) du \right) dw \\ &= \int_{(6\tilde{J})^c} Q_t T_2(y, w) (\psi_s * T_1 f_{1w})(x) dw, \end{aligned}$$

onde

$$Q_t T_2(y, w) = \int \psi_t(y - v) (k_2(v, w) - k_2(y, w)) dv.$$

Então pela desigualdade de Minkowsky temos

$$\begin{aligned} (7) \quad & \int \int_{S_1(R)} \|\psi_s \psi_t * T f_1(x, y)\|_{L^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq \int_{S_1(J)} \int_{S_1(I)} \left[\int_{(6\tilde{J})^c} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, E)} \|(\psi_s * T_1 f_{1w})(x)\|_F dw \right]^2 dx \frac{ds}{s} dy \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq \int_{S_1(J)} \left[\int_{(6\tilde{J})^c} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, E)} \left(\int_{S_1(I)} \|(\psi_s * T_1 f_{1w})(x)\|_F^2 dx \frac{ds}{s} \right)^{1/2} dw \right]^2 dy \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Mas, aplicando o teorema de Plancherel, a condição 2.2.3(1) e a limitação do operador T_1 de $L^2(\mathbb{R}, E)$ em $L^2(\mathbb{R}, F)$, obtemos

$$\int_{S_1(I)} \|(\psi_s * T_1 f_{1w})(x)\|_F^2 dx \frac{ds}{s} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\hat{\psi}_s(\xi)|^2 \|\mathcal{F}(T_1 f_{1w})(\xi)\|_F^2 d\xi \frac{ds}{s} \\
&\leq C \cdot \int_{-\infty}^\infty \|T_1 f_{1w}(x)\|_F^2 dx \\
&\leq C \cdot \int_{6J} \|f_{1w}(x)\|_E^2 dx \\
&\leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |J|.
\end{aligned}$$

Portanto, de 2.2.4(7) segue que

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_1(R)} \|\psi_s \psi_t * T f_1(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\
&\leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |J| \int_0^{|J|} \int_J \left[\int_{(6\tilde{J})^c} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, E)} dw \right]^2 dy \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Agora, se $\tilde{y}$ é centro do intervalo J e como $y \in J$, $|y - v| \leq t$ e $\tilde{J} \supset 6J$, então para todo $w \in (6\tilde{J})^c$, temos

$$\begin{aligned}
|y - w| &\geq |\tilde{y} - w| - |y - \tilde{y}| \geq \\
&\geq 5/2 |\tilde{J}| - 3|J| = \frac{1}{2} |\tilde{J}| \\
&> t \frac{|\tilde{J}|}{t} \geq \frac{\tilde{J}}{t} |y - v|.
\end{aligned}$$

onde $\frac{|\tilde{J}|}{t} > 2$, pois $2t < 2|J| \leq |\tilde{J}|$. Logo, aplicando a condição 2.2.4(1) com $j = 2$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{(6\tilde{J})} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, E)} dw \leq \\
&\leq \int_{|y-v| > \frac{\tilde{J}}{t} |y-v|} \int_{\mathbb{R}^2} |v_t(y-v)| |k_2(v, w) - k_2(y, w)|_{L(F, E)} dv dw \\
&= \int_{|y-v| \leq t} |v_t(y-v)| \left(\int_{|y-v| > \frac{\tilde{J}}{t} |y-v|} |k_2(v, w) - k_2(y, w)|_{L(F, E)} dw \right) dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \cdot \left(\frac{|\tilde{J}|}{t} \right)^{-\epsilon} \int_{|y-v| \leq t} |\psi_t(y-v)| dv \\
&\leq C \cdot \left(\frac{|\tilde{J}|}{t} \right)^{-\epsilon}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
(8) \quad &\iint_{S_1(R)} \|\psi_s \psi_t * T f_1(x, y)\|_{l^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\
&\leq c \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |J| |J| |\tilde{J}|^{-2\epsilon} \int_0^{|J|} t^{2\epsilon-1} dt \\
&= c \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |R| \left(\frac{|J|}{|\tilde{J}|} \right)^{2\epsilon},
\end{aligned}$$

o que completa a estimativa da primeira integral. Façamos agora a estimativa da segunda integral à direita da desigualdade 2.2.4(6). Para isto coloquemos $f_2^z(\cdot) = f_2(z, \cdot)$. Então, utilizando o fato que $\int \psi(x) dx = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\psi_s \psi_t * T f_2(x, y) &= \\
&= \iint \psi_s(x-u) \psi_t(y-v) \left(\iint k_2(v, u) k_1(u, z) f_2^z(z, u) dz du \right) du dv \\
&= \iint \iint_{(\mathbb{C}\tilde{I})^c} \left(\int k_2(v, u) \psi_s(x-u) k_1(u, z) f_2^z(u) \right) dz du dv \\
&= \int_{(\mathbb{C}\tilde{I})^c} \int \psi_t(y-v) \left(\int k_2(v, u) \left(\int \psi_s(x-u) k_1(u, z) du \right) f_2^z(u) du \right) dv dz \\
&= \int_{(\mathbb{C}\tilde{I})^c} \int \psi_t(y-v) \left(\int k_2(v, u) \left(\int \psi_s(x-u) (k_1(u, z) - k_1(x, z)) du \right) f_2^z(u) du \right) dv dz \\
&= \int_{(\mathbb{C}\tilde{I})^c} \int \psi_t(y-v) \cdot T_2(Q, T_1(x, z), f_2^z)(v) dv dz \\
&= \int_{(\mathbb{C}\tilde{I})^c} (\psi_t * T_2(Q, T_1(x, z), f_2^z))(y) dy dz.
\end{aligned}$$

onde

$$Q, T_1(x, z) = \int \psi_s(x-u)(k_1(u, z) - k_1(x, z))du.$$

Aplicando a desigualdade de Minkowsky obtemos

$$\begin{aligned} (9) \int \int_{S_1(R)} \|\psi_s \psi_t * T f_2(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} &\leq \\ &\leq \int_{S_1(I)} \int_{S_1(J)} \left(\int_{(6\tilde{I})^c} \| \psi_t * T_2(Q, T_1(x, z)) \cdot f_2^z \|(y) \|_{\ell^2} dz \right)^2 dy \frac{dt}{t} dx \frac{ds}{s} \\ &\leq \int_{S_1(I)} \left[\int_{(6\tilde{I})^c} \left(\int_{S_1(J)} \| \psi_t * T_2(Q, T_1(x, z)) \cdot f_2^z \|(y) \|_{\ell^2}^2 dy \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dz \right]^2 dx \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Mas, pelo teorema de Plancherel, por 2.2.3(1) e pela limitação de T_2 de $L^2(\mathbb{R}, F)$ em $L^2(\mathbb{R}, \ell^2)$, temos

$$\begin{aligned} \int \int_{S_1(J)} \| \psi_t * T_2(Q, T_1(x, z)) \cdot f_2^z \|(y) \|_{\ell^2}^2 dy \frac{dt}{t} &\leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\hat{\psi}_t(\xi)|^2 \cdot \| T_2(Q, T_1(x, z)) \cdot f_2^z \|(\xi) \|_{\ell^2}^2 d\xi \frac{dt}{t} \\ &\leq C \cdot \int_{-\infty}^\infty \| T_2(Q, T_1(x, z)) \cdot f_2^z \|(y) \|_{\ell^2}^2 dy \\ &\leq C \cdot \int_{-\infty}^\infty \| (Q, T_1(x, z)) \cdot f_2^z \|(w) \|_F^2 du \\ &\leq C \cdot \| Q, T_1(x, z) \|_{L(E, F)}^2 \int_{\tilde{J}} \| f_2^z(w) \|_E^2 dw \\ &\leq C \cdot \| Q, T_1(x, z) \|_{L(E, F)}^2 \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 J \end{aligned}$$

Portanto, disto e de 2.2.4(9) segue que

$$(10) \int \int_{S_1(R)} \|\psi_s \psi_t * T f_2(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq C_j \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |J| \int_0^{|J|} \int_I \left(\int_{(6\tilde{J})^c} \|Q_\cdot T_1(x, z)\|_{L(E, F)} dz \right)^2 dx \frac{ds}{s}.$$

Agora, se $\tilde{x}$ é o centro do intervalo I e como $x \in I$, $|x - u| \leq s$ e $\tilde{I} \supset 6I$, então para todo $z \in (6\tilde{I})^c$ temos

$$\begin{aligned} |x - z| &\geq |\tilde{x} - z| - |x - \tilde{x}| \geq \\ &\geq 5/2 |\tilde{I}| + 3 |I| - \frac{1}{2} |I| \\ &> s \frac{|\tilde{I}|}{s} \geq \frac{|\tilde{I}|}{s} |x - u|, \end{aligned}$$

onde $\frac{|\tilde{I}|}{s} > 2$, pois $2s < 2|I| \leq |\tilde{I}|$. Logo aplicando o Teorema de Fubini e a condição 2.2.4(1) com $j = 1$, resulta que

$$\begin{aligned} &\int_{(6\tilde{I})^c} \|Q_\cdot T_1(x, z)\|_{L(E, F)} dz \leq \\ &\leq \int_{|x-z| > \frac{|\tilde{I}|}{s} |x-u|} |\psi_s(x-u)| \|k_1(u, z) - k_1(x, z)\|_{L(E, F)} du dz \\ &= \int_{|x-u| \leq s} |\psi_s(x-u)| \left(\int_{|x-z| > \frac{|\tilde{I}|}{s} |x-u|} \|k_1(u, z) - k_1(x, z)\|_{L(E, F)} dz \right) du \\ &\leq C \left(\frac{\tilde{I}}{s} \right)^{-2} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (11) \quad &\iint_{S_1(R)} \|\psi_s \circ T f_2(x, y)\|_{L(E, F)}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 \int_0^1 \int_I \tilde{I}^{-2s} s^{2s-1} dx ds \\ &= C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 R \left(\frac{1}{\tilde{I}} \right)^{2s} \end{aligned}$$

Para estimarmos a última integral que aparece no segundo membro de 2.2.4(6), observemos de início que do fato de $\int \psi(x) dx = 0$ segue que

$$\begin{aligned} \psi_s \psi_t * T f_3(x, y) &= \\ &= \iint \psi_s(x-u) \psi_t(y-v) \left(\iint_{A_4 \cup A_5} k_2(v, w) k_1(u, z) f_3(z, w) dz dw \right) du dv \\ &= \iint_{A_4 \cup A_5} \left(\int \psi_t(y-v) k_2(v, w) dv \right) \left(\int \psi_s(x-u) k_1(u, z) du \right) f_3(z, w) dz dw \\ &= \iint_{A_4 \cup A_5} Q_t T_2(y, w) \cdot Q_s T_1(x, z) \cdot f_3(z, w) dz dw. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (12) \quad & \iint_{S_1(R)} \|\psi_s \psi_t * T f_3(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq \iint_{S_1(R)} \left(\iint_{A_4 \cup A_5} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, \ell^2)} \|Q_s T_1(x, z)\|_{L(E, F)} \times \right. \\ & \quad \times \|f_3(z, w)\|_E dz dw \Big)^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\ & \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 \iint_{S_1(R)} \left(\int_{(\mathbb{C} \setminus J)^c} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, \ell^2)} dw \right)^2 \times \\ & \quad \times \left(\int_{(\mathbb{C} \setminus J)^c} \|Q_s T_1(x, z)\|_{L(E, F)} dz \right)^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} = \\ & = C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 \iint_{S_1(R)} \left(\int_{(\mathbb{C} \setminus J)^c} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, \ell^2)} dw \right)^2 \times \\ & \quad \times \left(\int_{(\mathbb{C} \setminus J)^c} \|Q_s T_1(x, z)\|_{L(E, F)} dz \right)^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Mas, se $\tilde{y}$ é o centro do intervalo J e como $y \in J$, $w \in (\mathbb{C} \setminus J)^c$ e $|y - v| \leq t$, então temos

$$\begin{aligned} |y - w| &\geq |\tilde{y} - w| - |y - \tilde{y}| \geq \\ &\geq \frac{1}{3} |J| - \frac{1}{2} |J| \end{aligned}$$

$$> 2|J| \geq \frac{2|J|}{t} |y-v| ,$$

onde $\frac{2|J|}{t} > 2$, pois $t \in (0, |J|)$. Logo aplicando a condição 2.2.4(1) com $j = 2$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{(6J)^c} \|Q_t T_2(y, w)\|_{L(F, \ell^2)} dw \leq \\ & \leq \int_{(6J)^c} \int |\psi_t(y-v)| \|k_2(v, w) - k_2(y, w)\|_{L(F, \ell^2)} dv dw \\ & \leq \int \left(\int_{|y-w| > \frac{2|J|}{t} |y-v|} \|k_2(v, w) - k_2(y, w)\|_{L(F, \ell^2)} dw \right) |\psi_t(y-v)| dv \\ & \leq C \cdot \left(\frac{2|J|}{t} \right)^{-\delta} \\ & = C \cdot \left(\frac{|J|}{t} \right)^{-\delta} . \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\int_{(6J)^c} \|Q_s T_1(x, z)\|_{L(E, F)} dz \leq C \cdot \left(\frac{I}{s} \right)^{-\delta} .$$

Consequentemente, de 2.2.4(12) vem que

$$\begin{aligned} (13) \int \int_{S_1(R)} \|\psi_t \psi_s * T f_3(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} & \leq \\ & \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 \int_0^J \int_0^J \int_I \int_I (\tilde{J})^{-2\delta} t^{2\delta-1} (I)^{-2\delta} s^{2\delta-1} dx dy ds dt \\ & = C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 \int_0^J \int_0^J \int_I \int_I (J)^{-2\delta} t^{2\delta-1} (\tilde{J})^{-2\delta} s^{2\delta-1} dx dy ds dt \\ & \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 R \left[\left(\frac{I}{\tilde{J}} \right)^{2\delta} - \left(\frac{J}{\tilde{J}} \right)^{2\delta} \right] . \end{aligned}$$

o que completa a estimativa da última integral que aparece no segundo membro de 2.2.4(6). Finalmente, fazendo $\varepsilon = 2\delta$, de 2.2.4(6), 2.2.4(8), 2.2.4(11) e 2.2.4(13), temos

$$\begin{aligned} & \int \int_{S_1(R)} \|\psi_s \psi_t * Tf(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |R| \left[\left(\frac{|I|}{|\tilde{I}|} \right)^\varepsilon + \left(\frac{|J|}{|\tilde{J}|} \right)^\varepsilon \right], \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do Lema.

2.2.5 OBSERVAÇÃO. Se ao invés da condição 2.2.4(1) os núcleos k_j , $j = 1, 2$, satisfazem a condição

$$\|k_j(x, y) - k_j(x', y)\|_{L_j} \leq C \cdot \frac{|x - x'|}{|x - y|^2},$$

para todo $\gamma \geq 2$ tal que $|x - y| > \gamma |x - x'|$, então eles também satisfazem a condição 2.2.4(1). De fato, se denotarmos $1 < ab^{-1} < 2$ por $a \sim b$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{|x-y| > \gamma |x-x'|} \|k_j(x, y) - k_j(x', y)\|_{L_j} dy \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{|x-y| \sim 2^i \gamma |x-x'|} \|k_j(x, y) - k_j(x', y)\|_{L_j} dy \\ & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{|x-y| \sim 2^i \gamma |x-x'|} |x - x'| |x - y|^{-2} dy \\ & \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x - x'| 2^{-2i} \gamma^{-2} |x - x'|^{-2} \int_{|x-y| \leq 2^{i+1} \gamma |x-x'|} dy \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-2i} \gamma^{-2} |x - x'|^{-1} 2^{i+2} \gamma |x - x'| \\ & = C \cdot \gamma^{-1}. \end{aligned}$$

2.2.6 TEOREMA. Sejam k_1, k_2 núcleos e T_1, T_2 e T operadores lineares como no Lema 2.2.4. Suponhamos que T admita uma extensão limitada de $L^2(\mathbb{R}^2, E)$ em $L^2(\mathbb{R}^2, \ell^2)$. Então T é um operador limitado de $L_c^\infty(\mathbb{R}^2, E)$ em $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(1) \quad \|Tf\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^2, E)$.

Demonstração. Seja $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^2, E)$. Pelo Teorema 1.3.17 basta mostrarmos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(2) \quad \int \int_{S(\Omega)} \|\psi_s \psi_t * Tf(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |\Omega|,$$

para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de medida finita. Utilizando a notação do Lema 2.2.2, seja $\hat{\Omega} = \bigcup_{R_n \in \mathcal{M}} 180R'_\alpha$ e explicitemos $f = f_0 + f_1$, onde $f_0 = f\chi_{\hat{\Omega}}$ e $f_1 = f\chi_{\hat{\Omega}^c}$. Então, pelo Teorema de Plancherel, pela limitação do operador T de $L^2(\mathbb{R}^2, E)$ em $L^2(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ e por 2.2.2(1), temos

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int \int_{S(\Omega)} \|\psi_s \psi_t * Tf_0(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq \int \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} \|\psi_s \psi_t * Tf_0(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} \|\hat{\psi}_s(\xi)\|^2 \|\hat{\psi}_t(\eta)\|^2 \|\mathcal{F}(Tf_0)(\xi, \eta)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\ & \leq C \cdot \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)}^2 \\ & \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |\hat{\Omega}| \\ & \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |\Omega|. \end{aligned}$$

Observemos agora que

$$(4) \quad S(\Omega) \subset \bigcup_o S_1(5R_o).$$

De fato, se $(x, s; y, t) \in S(\Omega)$ então $(x-s, x+s) \times (y-t, y+t) \subset \Omega$. Portanto existem intervalos diádicos I' e J' tais que

$$(5) \quad I' \subset (x-s, x+s) \subset 5I'$$

e

$$(6) \quad J' \subset (y-t, y+t) \subset 5J'.$$

Seja agora $R = I \times J \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $I' \times J' \subset R$. Então, 2.2.6(5) e 2.2.6(6) implicam que $s < 2s \leq 5|I|$ e $t < 2t \leq 5|J|$ e portanto $(x, s; y, t) \in S_1(5I) \times S_1(5J) = S_1(5R)$, o que mostra 2.2.6(4).

Portanto, aplicando o Lema 2.2.4 com $R = 5R_\alpha$ e $\tilde{R} = 30R'_\alpha$ e o Lema 2.2.2, temos

$$\begin{aligned} (7) \quad & \iint_{S(\Omega)} \|\psi_s \psi_t * T f_1(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq \sum_\alpha \iint_{S_1(5R_\alpha)} \|\psi_s \psi_t * T f_1(x, y)\|_{\ell^2}^2 dx dy \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \\ & \leq \sum_\alpha C \|f_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |5R_\alpha| \left[\left(\frac{|5I_\alpha|}{|30I'_\alpha|} \right)^e - \left(\frac{|5J_\alpha|}{|30J'_\alpha|} \right)^e \right] \\ & \leq C \|f_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, E)}^2 |\Omega|. \end{aligned}$$

Utilizando agora 2.2.6(3) e 2.2.6(7) obtemos 2.2.6(2), o que completa a demonstração do teorema.

2.2.7 OBSERVAÇÃO. Segue da demonstração do Teorema 2.2.6 e do Lema 2.2.4 que a constante C em 2.2.6(1) depende apenas da constante que aparece na condição 2.2.4(1) e da limitação dos operadores T , T_1 e T_2 . Este fato será utilizado na demonstração do Teorema 4.1.4 do Capítulo 4.

2.3 OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS COM NÚCLEO PRODUTO SOBRE ESPAÇOS DE HARDY $H^1(\mathbb{R}^2, E)$ NÃO-ISOTRÓPICOS.

Neste parágrafo obtemos uma generalização de 2.1.3(b) para os espaços de Hardy $H^1_{at}(\mathbb{R}^2, E)$ introduzidos no capítulo 1. Como no parágrafo anterior, a demonstração que apresentamos também utiliza como elemento de fundamental importância o Lema 2.2.2.

O seguinte lema também será fundamental nessa demonstração. O enunciado do lema envolve a noção de átomo retangular que foi introduzida na Definição 1.2.6.

2.3.1 LEMA. Sejam E, F , e G espaços de Banach e k_1 e k_2 núcleos em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2, L(E, F))$ e $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2, L(F, G))$, respectivamente, que satisfazem

$$(1) \quad \int_{|x-y'| > \gamma|y-y'|} \|k_j(x, y) - k_j(x, y')\|_{L_j} dx \leq C \cdot \gamma^{-\delta}, \quad j = 1, 2,$$

para todo $\gamma \geq 2$ e algum $\delta > 0$, onde $L_1 = L(E, F)$ e $L_2 = L(F, G)$. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares limitados de $L^2(\mathbb{R}, E)$ em $L^2(\mathbb{R}, F)$ e de $L^2(\mathbb{R}, F)$ em $L^2(\mathbb{R}, G)$, respectivamente, e que satisfazem

$$(2) \quad T_1 f(x) = \int k_1(x, u) f(u) du,$$

para toda $f \in L^2_c(\mathbb{R}, E)$, e

$$(3) \quad T_2 f(y) = \int k_2(y, v) f(v) dv.$$

para toda $f \in L^2_c(\mathbb{R}, F)$. Suponha que T seja um operador linear de $L^2_c(\mathbb{R}^2, E)$ em $M(\mathbb{R}^2, G)$ satisfazendo

$$(4) \quad Tf(x, y) = \iint k_2(y, v) k_1(x, u) f(u, v) du dv,$$

para toda $f \in L_c^2(\mathbb{R}^2, E)$ e $(x, y) \notin \text{supp } f$.

Então, para todo E -átomo retangular, com suporte contido num retângulo $R = I \times J$, temos

$$(5) \quad \iint_{R_\gamma} \|Ta(x, y)\|_G dx dy \leq C \cdot \gamma^{-\delta},$$

para todo $\gamma \geq 2$ e algum $\delta > 0$, onde $R_\gamma = 2\gamma R$.

Demonstração. Seja a um E -átomo retangular com $\text{supp } a \subset R = I \times J$. Para $\gamma \geq 2$, sejam

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in 4I, y \notin 2\gamma J\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin 2\gamma I, y \in 4J\},$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin 2\gamma I, y \notin 4J\},$$

$$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin 4I, y \notin 2\gamma J\}.$$

Como $R_\gamma^c = (2\gamma R)^c = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, então temos

$$\iint_{R_\gamma^c} \|Ta(x, y)\|_G dx dy \leq V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

onde

$$V_i = \iint_{A_i} \|Ta(x, y)\|_G dx dy, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Estimemos cada uma destas integrais V_i separadamente. Seja $\bar{r}$ o centro do intervalo J . Se $(x, y) \in A_1$ então $(x, y) \in \text{supp } a$ e portanto por 2.3.1(4).

1.2.6(3) e 2.3.1(2) temos

$$\begin{aligned}
 Ta(x, y) &= \int_J \int_I k_2(y, v) k_1(x, u) a(u, v) du dv \\
 &= \int_J \int_I (k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})) k_1(x, u) a(u, v) du dv \\
 &= \int_J (k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})) \left(\int_I k_1(x, u) a_v(u) du \right) dv \\
 &= \int_J (k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})) T_1 a_v(x) dv,
 \end{aligned}$$

onde $a_v(\cdot) = a(\cdot, v)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 V_1 &\leq \int_{(2\gamma J)^c} \int_{4J} \int_J \|k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})\|_{L(F, G)} \|T_1 a_v(x)\|_F dv dx dy \\
 &= \int_J \left(\int_{(2\gamma J)^c} \|k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})\|_{L(F, G)} dy \right) \left(\int_{4J} \|T_1 a_v(x)\|_F^2 dx \right) dv.
 \end{aligned}$$

Mas se $y \notin 2\gamma J$ e $v \in J$ temos

$$|y - \bar{v}| \geq 2\gamma \frac{|J|}{2} > \gamma |v - \bar{v}|.$$

Usando isto, 2.3.1(1) com $j = 2$ e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em relação à variável x , obtemos

$$\begin{aligned}
 V_1 &\leq \int_J \left(\int_{|y-\bar{v}| > \gamma|v-\bar{v}|} \|k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})\|_{L(F, G)} dy \right) \left(\int_{4J} \|T_1 a_v(x)\|_F^2 dx \right) dv \\
 &\leq C \cdot \gamma^{-\ell} |J|^{1/2} \int_J \left(\int \|T_1 a_v(x)\|_F^2 dx \right)^{1/2} dv.
 \end{aligned}$$

Utilizando agora o fato que o operador T_1 é limitado de $L^2(\mathbb{R}, E)$ em $L^2(\mathbb{R}, F)$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz em relação à variável x e

1.2.6(2) temos

$$\begin{aligned} V_1 &\leq C \cdot \gamma^{-\delta} |I|^{1/2} \int_J \left(\int_I \|a_v(u)\|_E^2 du \right)^{1/2} dv \\ &\leq C \cdot \gamma^{-\delta} |I|^{1/2} |J|^{1/2} \left(\int_J \int_I \|a(u,v)\|_E^2 du dv \right)^{1/2} \\ &\leq C \cdot \gamma^{-\delta} \end{aligned}$$

Para avaliarmos V_2 , seja $\bar{u}$ o centro do intervalo I . Então, se $(x, y) \in A_2$ então $(x, y) \notin \text{supp } a$ e portanto por 2.3.1(4) e 1.2.6(3) podemos escrever

$$\begin{aligned} (6) \quad Ta(x, y) &= \\ &= \int \int k_2(y, v) \cdot k_1(x, u) \cdot a(u, v) du dv \\ &= \int_I \int_J k_2(y, v) \cdot [k_1(x, u) - k_1(x, \bar{u})] a^u(v) du dv, \end{aligned}$$

onde $a^u(\cdot) = a(u, \cdot)$. Agora, para cada x, u , definamos $g_{x,u} : \mathbb{R} \rightarrow F$ por

$$g_{x,u}(v) = [k_1(x, u) - k_1(x, \bar{u})] \cdot a^u(v).$$

A função $g_{x,u}$ pertence a $L^2(\mathbb{R}, F)$, pois

$$(7) \quad \|g_{x,u}\|_{L^2(\mathbb{R}, F)} \leq \|k_1(x, u) - k_1(x, \bar{u})\|_{L(E, F)} \|a^u\|_{L^2(\mathbb{R}, E)}.$$

Além disso, o fato de que $\text{supp } a^u \subset J$ implica que $\text{supp } g_{x,u} \subset J$. Logo, por 2.3.1(3) e 2.3.1(6) podemos escrever

$$Ta(x, y) = \int_I T_2 g_{x,u}(y) du.$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (na variável y), pelo fato de T_2 ser um operador limitado de $L^2(\mathbb{R}, F)$ em $L^2(\mathbb{R}, G)$ e por 2.3.1(7), temos

$$\begin{aligned}
V_2 &\leq \int_{AJ} \int_{(2\gamma I)^c} \int_I \|T_2 g_{x,u}(y)\|_G du dx dy \\
&\leq \int_{(2\gamma I)^c} \int_I 2 |J|^{1/2} \left(\int \|T_2 g_{x,u}(y)\|_G^2 dy \right)^{1/2} du dx \\
&\leq C \cdot |J|^{1/2} \int_{(2\gamma I)^c} \int_I \left(\int \|g_{x,u}(v)\|_F^2 dv \right)^{1/2} du dx \\
&\leq C \cdot |J|^{1/2} \int_I \left(\int_{(2\gamma I)^c} \|k_1(x,u) - k_1(x,\bar{u})\|_{L(E,F)} dx \right) \left(\int \|a^u(v)\|_E^2 dv \right)^{1/2} du .
\end{aligned}$$

Mas se $x \notin 2\gamma I$ e $u \in I$ então temos

$$|x - \bar{u}| \geq 2\gamma \frac{|J|}{2} > \gamma |u - \bar{u}| .$$

Assim, aplicando 2.3.1(1) com $j = 1$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz (na variável u) e 1.2.6(2) obtemos

$$\begin{aligned}
V_2 &\leq C \cdot |J|^{1/2} \int_I \left(\int_{|x-\bar{u}| > \gamma|u-\bar{u}|} \|k_1(x,u) - k_1(x,\bar{u})\|_{L(E,F)} dx \right) \times \\
&\quad \times \left(\int \|a^u(v)\|_E^2 dv \right)^{1/2} du . \\
&\leq C \cdot |J|^{1/2} \gamma^{-t} \int_I \left(\int \|a^u(v)\|_E^2 dv \right)^{1/2} du \\
&\leq C \cdot \gamma^{-t} \|R\|^{1/2} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2; E)} \\
&\leq C \cdot \gamma^{-t} .
\end{aligned}$$

Passemos, agora, a estimar V_3 . Para isto, observemos de início que se $(x, y) \in A_3$ então $(x, y) \in \text{supp } a$ e assim por 2.3.1(4) e 1.2.6(3) podemos escrever

$$Ta(x, y) = \int \int (k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})) (k_1(x, u) - k_1(x, \bar{u})) a(u, v) du dv .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
V_3 &\leq \int \int_{A_3} \int \int_R \|k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})\|_{L(F, G)} \times \\
&\quad \times \|k_1(x, u) - k_1(x, \bar{u})\|_{L(E, F)} \|a(u, v)\|_E du dv dx dy \\
&= \int \int_R \left(\int_{(4J)^c} \|k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})\|_{L(F, G)} dy \right) \times \\
&\quad \times \left(\int_{(2\gamma J)^c} \|k_1(x, u) - k_1(x, \bar{u})\|_{L(E, F)} dx \right) \|a(u, v)\|_E du dv .
\end{aligned}$$

Mas se $y \notin 4J$ e $v \in J$, temos

$$|y - \bar{v}| \geq 4 \frac{|J|}{2} > 2 |v - \bar{v}| ,$$

e já vimos na estimativa de V_2 que se $x \notin 2\gamma I$ e $u \in I$, então $|x - \bar{u}| > \gamma |u - \bar{u}|$.

Portanto, de 2.3.1(1), da desigualdade de Cauchy-Schwarz e de 1.2.6(2), temos

$$\begin{aligned}
V_3 &\leq \int \int_R \left(\int_{|y-\bar{v}| > 2|v-\bar{v}|} \|k_2(y, v) - k_2(y, \bar{v})\|_{L_2} dy \right) \times \\
&\quad \times \left(\int_{|x-\bar{u}| > \gamma|u-\bar{u}|} \|k_1(x, u) - k_1(x, \bar{u})\|_{L_1} dx \right) \|a(u, v)\|_E du dv \\
&\leq C \cdot 2^{-\ell} \gamma^{-\ell} \int \int_R \|a(u, v)\|_E du dv \\
&\leq C \cdot 2^{-\ell} \gamma^{-\ell} |R|^{1/2} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2; E)} \\
&\leq C \cdot \gamma^{-\ell} .
\end{aligned}$$

A estimativa de V_4 é análoga à de V_3 e assim,

$$V_4 \leq C \cdot \gamma^{-\ell} ,$$

e isto completa a demonstração do lema.

2.3.2 OBSERVAÇÃO. Se os núcleos k_j , $j = 1, 2$, satisfazem a condição

$$\|k_j(x, y) - k_j(x, y')\|_{L_j} \leq C \cdot \frac{|y - y'|}{|x - y|^2} ,$$

para todo $\gamma \geq 2$ tal que $|x - y'| > \gamma|y - y'|$, então eles também satisfazem a condição 2.3.1(1). A demonstração é análoga à da observação 2.2.5.

2.3.3 TEOREMA. Sejam E , F e G espaços de Banach. Sejam k_1 , k_2 núcleos e T_1 , T_2 e T operadores lineares como no Lema 2.3.1. Suponhamos ainda que T possui uma extensão limitada de $L^2(\mathbb{R}^2, E)$ em $L^2(\mathbb{R}^2, G)$. Então, T admite uma extensão limitada de $H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)$ em $L^1(\mathbb{R}^2, G)$, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(1) \quad \|Tf\|_{L^1(\mathbb{R}^2, G)} \leq C \cdot \|f\|_{H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)} ,$$

para toda $f \in H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)$.

Demonstração. Como o subespaço $H_0^1(\mathbb{R}^2, E)$, formado por todas as somas finitas da forma

$$f = \sum_{i=-n}^n \alpha_i a_i ,$$

onde os a_i são E -átomos de Chang-Fefferman e α_i escalares, é denso em $H_{at}^1(\mathbb{R}^2, E)$, basta mostrarmos que T é um operador limitado de $H_0^1(\mathbb{R}^2, E)$ em $L^1(\mathbb{R}^2, G)$. Para isto provemos inicialmente que existe constante $C > 0$ tal que

$$(2) \quad \|Ta\|_{L^1(\mathbb{R}^2, G)} \leq C ,$$

para todo E -átomo de Chang-Fefferman a . Com este objetivo, lembremos que por 1.2.9(2), temos

$$(3) \quad a = \sum_{R \in \mathcal{M}(\Omega)} a_R ,$$

onde $\text{supp } a_R \subset 4R$. Utilizando a notação do Lema 2.2.2, seja $\hat{\Omega} = \bigcup_{R \in \mathcal{M}} 48R'$. Então, podemos escrever

$$\|Ta\|_{L^1(\mathbb{R}^2, G)} = \int \int_{\hat{\Omega}} \|Ta(x, y)\|_G \, dx dy + \int \int_{\hat{\Omega}^c} \|Ta(x, y)\|_G \, dx dy .$$

Estimemos cada uma destas integrais separadamente. Para estimarmos a primeira observemos que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, pelo fato de T ser um operador limitado de $L^2(\mathbb{R}^2, E)$ em $L^2(\mathbb{R}^2, G)$ e por 2.2.2(1) e 1.2.9(1), temos

$$\begin{aligned} \int \int_{\hat{\Omega}} \|Ta(x, y)\|_G \, dx dy &\leq |\hat{\Omega}|^{1/2} \|Ta\|_{L^2(\mathbb{R}^2, G)} \\ &\leq C \cdot |\hat{\Omega}|^{1/2} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} \\ &\leq C \cdot |\Omega|^{1/2} |\Omega|^{-1/2} = C . \end{aligned}$$

Para estimarmos a outra integral notemos de início que para cada $R \in \mathcal{M}$, a função $\hat{a}_R$ definida por

$$\hat{a}_R(x, y) = \|a_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)}^{-1} 4R^{1/2} a_R(x, y) ,$$

é um E -átomo retangular com $\text{supp } \hat{a}_R \subset 4R = \tilde{R}$. Então utilizando 2.3.3(3), obtemos

$$\begin{aligned} \int \int_{\hat{\Omega}^c} \|Ta(x, y)\|_G \, dx dy &\leq \sum_{R \in \mathcal{M}} \int \int_{\hat{\Omega}^c} \|Ta_R(x, y)\|_G \, dx dy \\ &\leq C \cdot \sum_{R \in \mathcal{M}} \|a_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} |\tilde{R}|^{1/2} \int \int_{(48R')^c} \|T\hat{a}_R(x, y)\|_G \, dx dy . \end{aligned}$$

Seja, agora,

$$\gamma = \gamma(R) = \min \left\{ 2 \frac{|I'|}{|J'|} , 2 \frac{|J'|}{|I'|} \right\} .$$

Então, $\gamma \geq 2$ e temos $2\gamma\tilde{R} \subset 48R'$, donde segue que $(48R')^c \subset (2\gamma\tilde{R})^c = \tilde{R}_\gamma^c$. Portanto, aplicando o Lema 2.3.1 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta que

$$\begin{aligned} \int \int_{\hat{\Omega}'} \|Ta(x, y)\|_G \, dx dy &\leq \\ &\leq C \cdot \sum_{R \in \mathcal{M}} \|a_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} |R|^{1/2} \int \int_{\tilde{R}_\gamma^c} \|T\tilde{a}_R(x, y)\|_G \, dx dy \\ &\leq C \cdot \sum_{R \in \mathcal{M}} \|a_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} |R|^{1/2} \gamma^{-\delta} \\ &\leq C \cdot \sum_{R \in \mathcal{M}} \|a_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)} |R|^{1/2} \left[\left(\frac{|I|}{|J'|} \right)^\delta + \left(\frac{|J|}{|J'|} \right)^\delta \right] \\ &\leq C \cdot \left(\sum_{R \in \mathcal{M}} \|a_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2, E)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{R \in \mathcal{M}} |R| \left[\left(\frac{|I|}{|J'|} \right)^{2\delta} + \left(\frac{|J|}{|J'|} \right)^{2\delta} \right] \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando 2.2.2(2) e 1.2.9(2)(iii), obtemos

$$\begin{aligned} \int \int_{\hat{\Omega}'} \|Ta(x, y)\|_G \, dx dy &\leq \\ &\leq C \cdot |\Omega|^{-1/2} |\Omega|^{1/2} = C, \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração de 2.3.3(2).

Para completar a demonstração do Teorema, seja

$$f = \sum_{i=-n}^n \alpha_i a_i \in H_0^1(\mathbb{R}^2, E)$$

Então, por 2.3.3(2) temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2, G)} &\leq \sum_{i=-n}^n |\alpha_i| \|Ta_i\|_{L^1(\mathbb{R}^2, G)} \\ &\leq \sum_{i=-n}^n |\alpha_i|. \end{aligned}$$

donde

$$\|Tf\|_{L^1(\mathbb{R}^2, G)} \leq C \cdot \|f\|_{H_{a,1}^1(\mathbb{R}^2, E)} .$$

2.3.4 OBSERVAÇÃO. Decorre da demonstração do Teorema 2.3.3 e do Lema 2.3.1 que a constante C em 2.3.3(1) depende apenas da constante que aparece na condição 2.3.1(1) e da limitação dos operadores T , T_1 e T_2 . Este fato será utilizado na demonstração do teorema 4.1.2.

CAPÍTULO 3

OS ESPAÇOS $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ NÃO-ISOTRÓPICOS.

Neste capítulo apresentaremos alguns aspectos dos espaços $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ não-isotrópicos. A finalidade é, no próximo capítulo, demonstrarmos que particularizando os parâmetros P, Q, S o espaço correspondente coincide com o espaço de Hardy não-isotrópico $H^1(\mathbb{R}^2)$. Os espaços $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ são definidos utilizando-se sistemas especiais de funções testes cujas transformadas de Fourier decompõem a identidade. Isto será de capital importância na demonstração do resultado central do Capítulo 4. Desenvolveremos o capítulo como segue.

No parágrafo 3.1 definimos os espaços $L_K^P(\mathbb{R}^2)$ mistos de funções analíticas inteiras (o subespaço das funções $\mathcal{F} \in L^P \cap \mathcal{S}'$ tais que $\text{supp } \hat{f} \subset K$) e enunciamos alguns resultados que serão utilizados em seguida.

No parágrafo 3.2 definimos os espaços $L_K^P(\mathbb{R}^2, \ell^Q)$ mistos de sequências de funções analíticas inteiras. O resultado principal aqui é um teorema de multiplicador de Fourier, válido para todo $P = (p_1, p_2)$ com $0 < p_j < \infty$, $j = 1, 2$ (ao contrário dos teoremas habituais sobre multiplicadores de Fourier válidos somente para $1 < p_j < \infty$).

Finalmente, no parágrafo 3.3 introduzimos os espaços $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ não-isotrópicos e demonstramos que eles independem dos sistemas de funções testes que são utilizados para defini-los.

3.1 OS ESPAÇOS $L^P(\mathbb{R}^2)$ MISTOS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS INTEIRAS.

Neste parágrafo definimos os espaços $L_K^P(\mathbb{R}^2)$ mistos de funções analíticas inteiras e enunciamos alguns resultados que serão utilizados no próximo parágrafo. Não faremos nenhuma demonstração, pois podem ser encontradas nas referências citadas.

3.1.1 DEFINIÇÃO. Seja $P = (p_1, p_2)$ com $0 < p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$. Definimos o espaço $L_K^P = L_K^P(\mathbb{R}^2)$ por

$$(1) \quad L_K^P = \{f \in S'(\mathbb{R}^2) / \text{supp } \mathcal{F}f \subset K \text{ e } f \in L^P(\mathbb{R}^2)\}$$

onde $L^P(\mathbb{R}^2)$ é o espaço L^P com norma mista de Benedek-Panzone [3]

Munimos o espaço $L_K^P(\mathbb{R}^2)$ com a quase-norma mista (norma se $\min(p_1, p_2) \geq 1$)

$$\|f\|_{L^P} = \left(\int \left(\int |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

Observamos que pelo teorema de Paley-Wiener-Schwartz (Teorema 1.1.6) os elementos de L_K^P são funções analíticas inteiras do tipo exponencial e portanto 3.1.1(1) tem sentido.

O próximo resultado fornece uma desigualdade do tipo Nikols'kij. Para enunciar-lo, coloquemos

$$(2) \quad K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| \leq b_1, |x_2| \leq b_2\}$$

onde $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$.

3.1.2 TEOREMA. Sejam $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ com $0 < p_i \leq q_i \leq \infty$, $i = 1, 2$. Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ um multi-índice e K como em 3.1.1(2). Então existe uma constante positiva C , que independe de b_1 e b_2 , tal que

$$\|D^\alpha f\|_{L^Q} \leq C \cdot b_1^{\alpha_1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} \cdot b_2^{\alpha_2 - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}} \cdot \|f\|_{L^P}$$

para toda $f \in L_K^P(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Ver Schmeisser-Triebel [52]

Se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, colocamos

$$S_K(\mathbb{R}^2) = \{\varphi \in S(\mathbb{R}^2) / \text{supp } \mathcal{F}f \subset K\}.$$

Equipamos $S_K(\mathbb{R}^2)$ com a topologia induzida pela topologia usual de $S(\mathbb{R}^2)$. Então vale o seguinte resultado.

3.1.3 TEOREMA. Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (p_1, p_2)$ com $0 < p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$. Então, $L_K^P(\mathbb{R}^2)$ é um espaço quase-Banach (Banach se $\min(p_1, p_2) \geq 1$). Além disso, as imersões

$$(1) \quad S_K(\mathbb{R}^2) \subset L_K^P(\mathbb{R}^2) \subset S'(\mathbb{R}^2).$$

são contínuas.

Demonstração. Ver Schmeisser-Triebel [52]

O próximo teorema fornece uma desigualdade maximal para os espaços $L_K^P(\mathbb{R}^2)$, que será fundamental no parágrafo seguinte para obtermos uma quase-norma equivalente para os espaços $L_K^P(l^q)$ mistos. Relembramos que M_{01} e M_{10} denotam as funções maximais

$$(M_{01}f)(x_1, x_2) = (Mf(x_1, \cdot))(x_2)$$

e

$$(M_{10}f)(x_1, x_2) = (Mf(\cdot, x_2))(x_1)$$

definidas no capítulo 1.

3.1.4 TEOREMA. Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (p_1, p_2)$ com $0 < p_1 \leq \infty$ e $0 < p_2 < \infty$. Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é um multi-índice e

r_1 e r_2 são tais que $0 < r_i < \infty$, $i = 1, 2$, então existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ z=(z_1, z_2)}} \frac{|D^\alpha f(x-z)|}{(1+|z_1|^{\frac{1}{r_1}})(1+|z_2|^{\frac{1}{r_2}})} &\leq C_1 \cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ z=(z_1, z_2)}} \frac{|f(x-z)|}{(1+|z_1|^{\frac{1}{r_1}})(1+|z_2|^{\frac{1}{r_2}})} \\ &\leq C_2 \cdot \left[M_{01}(M_{10}|f|^{r_1})^{\frac{r_2}{r_1}}(x) \right]^{\frac{1}{r_2}}. \end{aligned}$$

para toda $f \in L_K^P(\mathbb{R}^2)$ e todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Ver Schmeisser-Triebel [52] e Bertolo-Fernandez [7].

O próximo resultado dá uma quase-norma equivalente à quase-norma do espaço $L_K^P(\mathbb{R}^2)$.

3.1.5 TEOREMA. Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (p_1, p_2)$ com $0 < p_1 \leq \infty$ e $0 < p_2 < \infty$. Se $0 < r_1 < p_1$ e $0 < r_2 < \min(p_1, p_2)$, então existe constante positiva C tal que

$$\|f\|_{L^P} \leq \left\| \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ z=(z_1, z_2)}} \frac{|f(\cdot - z)|}{(1+|z_1|^{\frac{1}{r_1}})(1+|z_2|^{\frac{1}{r_2}})} \right\|_{L^{P'}} \leq C \cdot \|f\|_{L^P}$$

para toda $f \in L_K^P(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Ver Schmeisser-Triebel [52] e Bertolo-Fernandez [7].

3.1.6 DEFINIÇÃO. Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (p_1, p_2)$ com $0 < p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$. Seja $m \in S'(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathcal{F}^{-1}m \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Dizemos que m é um multiplicador de Fourier para $L_K^P(\mathbb{R}^2)$ se existe constante positiva C tal que

$$\|\mathcal{F}^{-1}m * f\|_{L^P} \leq C \cdot \|f\|_{L^P}$$

para toda $f \in L_K^P(\mathbb{R}^2)$.

Observamos que $\mathcal{F}^{-1}m * f$ tem sentido. De fato, se $f \in L_K^P(\mathbb{R}^2)$ então pelo Teorema 3.1.2 temos que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ e portanto $\mathcal{F}^{-1}m * f$ está bem definida pois $\mathcal{F}^{-1}m \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

O resultado que enunciaremos a seguir é um teorema de multiplicador de Fourier para os espaços $L_K^P(\mathbb{R}^2)$.

3.1.7 TEOREMA. Sejam K e U subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$. Sejam $P = (p_1, p_2)$ com $0 < p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$ e $Q = (q_1, q_2)$ com $q_1 = \min(1, p_1)$ e $q_2 = \min(1, p_1, p_2)$. Então existe uma constante positiva C tal que

$$\|\mathcal{F}^{-1}m * f\|_{L^P} \leq C \cdot \|\mathcal{F}^{-1}m\|_{L^Q} \|f\|_{L^P}$$

para toda $f \in L_K^P(\mathbb{R}^2)$ e $\mathcal{F}^{-1}m \in L_U^Q(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Ver Schmeisser-Triebel [52].

A seguir definimos os espaços de Lizorkin-Nikol'skij $H_2^R(\mathbb{R}^2)$ e enunciaremos um resultado envolvendo estes espaços. Isto será utilizado no próximo parágrafo para demonstrar um teorema de multiplicadores de Fourier para $L_K^P(\ell^Q)$.

3.1.8 DEFINIÇÃO. Seja $R = (r_1, r_2)$ com $r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Definimos o espaço de Lizorkin-Nikol'skij $H_2^R = H_2^R(\mathbb{R}^2)$ por

$$(1) \quad H_2^R(\mathbb{R}^2) = \{f \in S'(\mathbb{R}^2) : (1 - x_1^2)^{\frac{r_1}{2}} (1 + x_2^2)^{\frac{r_2}{2}} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

O espaço $H_2^R(\mathbb{R}^2)$ é completo em relação a norma

$$(2) \quad \|f\|_{H_2^R} = \|(1 - x_1^2)^{\frac{r_1}{2}} (1 + x_2^2)^{\frac{r_2}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^2}.$$

Se $R = (r_1, r_2)$ com $r_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, então $H_2^R(\mathbb{R}^2) = W_2^R(\mathbb{R}^2)$, onde $W_2^R = W_2^{R, H}(\mathbb{R}^2)$ é o espaço de Sobolev com derivadas mistas dominantes definido por

$$(3) \quad W_2^R(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : \|f\|_{W_2^R} < \infty\}$$

onde

$$(4) \quad \|f\|_{W_2^R} = \|f\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^{r_1} f}{\partial x_1^{r_1}} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^{r_2} f}{\partial x_2^{r_2}} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^{r_1+r_2} f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} \right\|_{L^2}.$$

É fácil ver que

$$H_2^R(\mathbb{R}^2) \subset H_2^{(0,0)} = L^2(\mathbb{R}^2)$$

se $0 \leq r_1 < \infty$ e $0 \leq r_2 < \infty$.

3.1.9 TEOREMA. Sejam $D = (d_1, d_2)$ e $P = (p_1, p_2)$ com $0 < d_i < \infty$ e $0 < p_i \leq 2$, $i = 1, 2$. Seja $R = (r_1, r_2)$ com

$$r_1 > d_1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad r_2 > d_2 + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}.$$

Então, existe constante positiva C tal que

$$\|(1-x_1^2)^{\frac{d_1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{d_2}{2}} f\|_{L^P} \leq C \cdot \|f\|_{H_2^R}$$

para toda $f \in H_2^R(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Ver Schmeisser-Triebel [52] ou Bertolo-Fernandez [7].

3.2 OS ESPAÇOS $L^P(\ell^Q)$ DE FUNÇÕES ANALÍTICAS INTEIRAS A VALORES VETORIAIS.

Neste parágrafo apresentamos a versão vetorial mista dos espaços $L_K^P(\mathbb{R}^2)$, isto é, os espaços $L_K^P(\ell^Q)$ de seqüências de funções analíticas inteiras definidas em $\mathbb{R}^2$ e a valores em $\ell^Q = \ell^Q(\mathbb{Z}^2)$. O resultado principal é um teorema de multiplicador de Fourier que será utilizado no próximo

parágrafo para mostrar que os espaços $H_S^{P,Q}$ independem das particulares famílias de funções testes utilizadas para defini-los.

3.2.1 DEFINIÇÃO. Sejam $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ com $0 < p_n \leq \infty$ e $0 < q_n \leq \infty$, $n = 1, 2$. Seja $K = \{K_N\}_{N \in \mathbb{Z}^2}$ uma família de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$. Definimos $L_K^P(\ell^Q) = L_K^P(\mathbb{R}^2, \ell^Q(\mathbb{Z}^2))$ por

$$(1) \quad L_K^P(\ell^Q) = \{f = (f_N)_{N \in \mathbb{Z}^2} \in L^P(\ell^Q) : f_N \in S'(\mathbb{R}^2) \text{ e } \text{supp } \mathcal{F} f_N \subset K_N, \forall N \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Equipamos o espaço $L^P(\ell^Q)$ com a quase-norma (norma se $\min(p_1, p_2) \geq 1$ e $\min(q_1, q_2) \geq 1$)

$$(1) \quad \|f\|_{L^P(\ell^Q)} = \left(\int \left(\int \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |f_N(x_1, x_2)|^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{p_1}{q_2}} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

onde $N = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$.

Notemos que pelo teorema de Paley-Wiener-Schwartz (Teorema 1.1.6) o espaço $L_K^P(\ell^Q)$ consiste de seqüências de funções analíticas inteiras do tipo exponencial sobre $\mathbb{R}^2$.

3.2.2 TEOREMA. Sob as hipóteses da definição acima, o espaço $L_K^P(\ell^Q)$ é um espaço quase-Banach em relação a quase-norma 3.2.1(1).

Demonstração. Ver Schmeisser-Triebel [52].

3.2.3 DEFINIÇÃO. Sejam $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ com $0 < p_n \leq \infty$ e $0 < q_n \leq \infty$, $n = 1, 2$. Seja $K = \{K_N\}_{N \in \mathbb{Z}^2}$ uma família de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$. Seja $M = (m_N)_{N \in \mathbb{Z}^2}$ uma família de elementos de $S'(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathcal{F}^{-1} m_N \in L^1(\mathbb{R}^2)$, para todo $N \in \mathbb{Z}^2$. Dizemos que M

é um multiplicador de Fourier para $L_K^P(\ell^Q)$ se existe uma constante C tal que

$$\|(\mathcal{F}^{-1}m_N * f_N)_{N \in \mathbb{Z}^2}\|_{L^r(\ell^Q)} \leq C \cdot \|(f_N)_{N \in \mathbb{Z}^2}\|_{L^r(\ell^Q)}$$

para toda $f = (f_N)_{N \in \mathbb{Z}^2} \in L_K^P(\ell^Q)$.

Nosso objetivo é estender o teorema de multiplicador 3.1.7 de $L_K^P(\mathbb{R}^2)$ para $L_K^P(\ell^Q)$. Com este propósito vamos demonstrar de início um resultado que fornece uma quase-norma equivalente para os espaços $L_K^P(\ell^Q)$.

3.2.4 TEOREMA. Sejam $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ com $0 < p_n < \infty$ e $0 < q_n \leq \infty$, $n = 1, 2$. Seja $K = \{K_N\}_{N \in \mathbb{Z}^2}$ a família de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$(1) \quad K_N = K_{(i,j)} = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq a_i, |x_2| \leq b_j\}$$

onde $a_i > 0$ e $b_j > 0$. Se $0 < r_1 < \min(p_1, q_1, q_2)$ e $0 < r_2 < \min(p_1, p_2, q_1, q_2)$, então existe uma constante positiva C tal que

$$\|(f_N)_N\|_{L^r(\ell^Q)} \leq \|(\tilde{f}_N)_N\|_{L^r(\ell^Q)} \leq C \cdot \|(f_N)_N\|_{L^r(\ell^Q)}$$

para toda família $f = (f_N)_{N \in \mathbb{Z}^2} \in L^P(\ell^Q)$, onde para cada $N = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $\tilde{f}_N$ é dado por

$$(2) \quad \tilde{f}_N(x) = \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^2 \\ z_1 \in [a_i, a_i+1], \\ z_2 \in [b_j, b_j+1]}} \frac{|f_N(x-z)|}{(1 + |a_i z_1|^{\frac{1}{r_1}})(1 + |b_j z_2|^{\frac{1}{r_2}})}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração. A primeira desigualdade em 3.2.4(2) é óbvia, pois $|f_N(x)| \leq \tilde{f}_N(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Para demonstramos a segunda desigualdade em 3.2.4(2) observemos inicialmente que fazendo as transformações $z_1 = a_j^{-1} z_1'$, $z_2 = b_k^{-1} z_2'$, $x_1 = a_j^{-1} x_1'$, $x_2 = b_k^{-1} x_2'$, aplicando o Teorema 3.1.4 e utilizando o fato que

$$M_{01}(M_{10}[g(c_1, c_2)]^{\frac{1}{r_1}})^{\frac{1}{r_2}}(x_1, x_2) = M_{01}(M_{10}[g]^{\frac{1}{r_1}})^{\frac{1}{r_2}}(c_1 x_1, c_2 x_2).$$

temos

$$\begin{aligned}
 f_N^*(x) &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ z=(z_1, z_2)}} \frac{|f_N(x-z)|}{(1+|a_i z_1|^{\frac{1}{r_1}})(1+|b_j z_2|^{\frac{1}{r_2}})} \\
 &= \sup_{\substack{x' \in \mathbb{R}^2 \\ z'=(z'_1, z'_2)}} \frac{|f_N(a_i^{-1}(x'_1 - z'_1), b_j^{-1}(x'_2 - z'_2))|}{(1+|z'_1|^{\frac{1}{r_1}})(1+|z'_2|^{\frac{1}{r_2}})} \\
 &\leq C \cdot [M_{01}(M_{10}|f_N(a_i^{-1} \cdot, b_j^{-1} \cdot)|^{r_1})^{\frac{r_2}{r_1}}(x'_1, x'_2)]^{\frac{1}{r_2}} \\
 &= C \cdot [M_{01}(M_{10}|f_N|^{r_1})^{\frac{r_2}{r_1}}(a_i^{-1} x'_1, b_j^{-1} x'_2)]^{\frac{1}{r_2}} \\
 &= C \cdot [M_{01}(M_{10}|f_N|^{r_1})^{\frac{r_2}{r_1}}(x)]^{\frac{1}{r_2}}
 \end{aligned}$$

onde C independe de $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $N = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ e f_N . Notemos agora que se $r > 0$ e $g = (g_N)_{N \in L^r(\ell^N)}$ temos

$$(3) \quad \|(g_N)_N\|_{L^r(\ell^N)} = \|(|g_N|^r)_N\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\ell^{\frac{N}{r-1}})}^{\frac{1}{r}}$$

onde $\frac{r}{r-1} = (\frac{r_1}{r}, \frac{r_2}{r})$ e $\frac{N}{r-1} = (\frac{N_1}{r}, \frac{N_2}{r})$. Utilizando estes fatos e aplicando 1.1.9(1), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|(f_N)_N\|_{L^r(\ell^N)} &\leq C \cdot \|([M_{01}(M_{10}|f_N|^{r_1})^{\frac{r_2}{r_1}}]^{\frac{1}{r_2}})_N\|_{L^r(\ell^N)} \\
 &= C \cdot \|([M_{01}(M_{10}|f_N|^{r_1})^{\frac{r_2}{r_1}}]_N)^{\frac{1}{r_2}}\|_{L^{\frac{r}{r_2}}(\ell^{\frac{N}{r_2}})} \\
 &= C \cdot \|([M_{01}(M_{10}|f_N|^{r_1})^{\frac{r_2}{r_1}}]_N)^{\frac{1}{r_2}}\|_{L^{\frac{r_1}{r_2}}(\ell^{\frac{N}{r_2}})} \cdot \|1\|_{L^{\frac{r}{r_2}}(\ell^{\frac{N}{r_2}})}^{\frac{1}{r_2}} \\
 &\leq C \cdot \|([M_{10}|f_N|^{r_1}]_N)^{\frac{1}{r_1}}\|_{L^{\frac{r_1}{r_2}}(\ell^{\frac{N}{r_2}})} \cdot \|1\|_{L^{\frac{r}{r_2}}(\ell^{\frac{N}{r_2}})}^{\frac{1}{r_2}} \\
 &= C \cdot \|([M_{10}|f_N|^{r_1}]_N)^{\frac{1}{r_1}}\|_{L^{\frac{r_1}{r_2}}(\ell^{\frac{N}{r_2}})} \cdot \|1\|_{L^{\frac{r}{r_2}}(\ell^{\frac{N}{r_2}})}^{\frac{1}{r_2}}
 \end{aligned}$$

Aplicando agora 1.1.9(2) e utilizando 3.2.4(4) resulta

$$\begin{aligned}\|(f_N)_N\|_{L^r(\ell^q)} &\leq C \cdot \left\| \left(\|f_N\|_{L_{r_1}^{p_1}(\ell^{q_1})} \right)_N \right\|_{L_{r_2}^{p_2}(\ell^{q_2})}^{\frac{1}{r_2}} \\ &= C \cdot \|(f_N)_N\|_{L^r(\ell^q)},\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.

O próximo resultado é um teorema de multiplicador de Fourier para os espaços $L_K^P(\ell^Q)$. Este teorema será fundamental no próximo parágrafo para demonstrar que as quase-normas dos espaços $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ independem dos particulares sistemas de funções testes que são utilizados para defini-las.

3.2.5 TEOREMA. Sejam $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ com $0 < p_n < \infty$ e $0 < q_n \leq \infty$, $n = 1, 2$. Seja $K = \{K_N\}_{N \in \mathbb{Z}^2}$ a sequência 3.2.4(1) de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ e $R = (r_1, r_2)$ com

$$(1) \quad r_1 > \frac{1}{\min(p_1, q_1, q_2)} + \frac{1}{2} \text{ e } r_2 > \frac{1}{\min(p_1, p_2, q_1, q_2)} + \frac{1}{2}.$$

Então existe uma constante positiva C tal que

$$(2) \quad \|(m_N * f_N)_N\|_{L^r(\ell^q)} \leq C \cdot \sup_{N=(i,j)} \|\mathcal{F}m_N(a_i \cdot, b_j \cdot)\|_{H_2^R} \cdot \|(f_N)_N\|_{L^r(\ell^q)}$$

para toda família $(f_N)_N \in L_K^P(\ell^Q)$ e toda família $(\mathcal{F}m_N)_{N \in \mathbb{Z}^2}$ contida em $H_2^R(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Consideremos famílias $(f_N)_N$ em $L^P(\ell^Q)$ e $(\mathcal{F}m_N)_N$ em $H_2^R(\mathbb{R}^2)$. Vejamos de início que $m_N * f_N$ tem sentido para cada $N \in \mathbb{Z}^2$. Para isto notemos que, por um lado, o Teorema 3.1.9 afirma que $m_N \in L^1(\mathbb{R}^2)$, pois $(\mathcal{F}m_N)_N \in H_2^R(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado, como $f_N \in L_{K_N}^P(\mathbb{R}^2)$ então do Teorema 3.1.2 segue que $f_N \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Logo, $m_N * f_N$ está bem

definida. Passemos à demonstração de (2). Para cada $N = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ coloquemos

$$f_N^*(x) = \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^2 \\ z = (z_1, z_2)}} \frac{|f_N(x - z)|}{(1 + |a_i z_1|^{\frac{1}{s_1}}) (1 + |b_j z_2|^{\frac{1}{s_2}})}$$

onde s_1 e s_2 são constantes positivas que serão escolhidas oportunamente. Então, utilizando a desigualdade

$$1 + |d(u - v)|^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot (1 + |d(u - v - w)|^{\frac{1}{r}}) (1 + |dw|^{\frac{1}{r}})$$

onde u, v, w, r e d pertencem a $\mathbb{R}$ com r e d positivos, temos

$$\begin{aligned} |(m_N * f_N)(x - z)| &\leq \int \int |m_N(x - z - y)| |f_N(y)| dy \\ &\leq f_N^*(x) \int \int |m_N(x - z - y)| (1 + |a_i(x_1 - y_1)|^{\frac{1}{s_1}}) (1 + |b_j(x_2 - y_2)|^{\frac{1}{s_2}}) dy \\ &\leq C f_N^*(x) (1 + |a_i z_1|^{\frac{1}{s_1}}) (1 + |b_j z_2|^{\frac{1}{s_2}}) \times \\ &\quad \times \int \int |m_N(x - z - y)| (1 + |a_i(x_1 - y_1 - z_1)|^{\frac{1}{s_1}}) (1 + |b_j(x_2 - y_2 - z_2)|^{\frac{1}{s_2}}) dy \\ &= C f_N^*(x) (1 + |a_i z_1|^{\frac{1}{s_1}}) (1 + |b_j z_2|^{\frac{1}{s_2}}) \times \\ &\quad \times \int \int a_i^{-1} b_j^{-1} (\mathcal{F}^{-1} g_N) \left(\frac{y_1}{a_i}, \frac{y_2}{b_j} \right) (1 + |y_1|^{\frac{1}{s_1}}) (1 + |y_2|^{\frac{1}{s_2}}) dy \end{aligned}$$

onde $m_N = \mathcal{F}^{-1} g_N$ com $g_N \in H_2^R(\mathbb{R}^2)$.

Lembrando agora que

$$a_i^{-1} b_j^{-1} (\mathcal{F}^{-1} g_N) \left(\frac{y_1}{a_i}, \frac{y_2}{b_j} \right) = (\mathcal{F}^{-1} g_N(a_i \dots b_j \cdot))(y_1, y_2)$$

e aplicando o Teorema 3.1.9 (com $p_1 = p_2 = 1$, $d_1 = s_1^{-1}$, $d_2 = s_2^{-1}$) obtemos

$$(m_N * f_N)(x - z) \leq C f_N^*(x) (1 + |a_i z_1|^{\frac{1}{s_1}}) (1 + |b_j z_2|^{\frac{1}{s_2}}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int \int (\mathcal{F}^{-1} g_N(a_i \cdot, b_j \cdot))(y) (1+y_1^2)^{\frac{1}{2s_1}} (1+y_2^2)^{\frac{1}{2s_2}} dy \\
& \leq C f_N(x) (1+|a_i z_1|)^{\frac{1}{s_1}} (1+|b_j z_2|)^{\frac{1}{s_2}} \|g_N(a_i \cdot, b_j \cdot)\|_{H_2^p} \\
& = C f_N(x) (1+|a_i z_1|)^{\frac{1}{s_1}} (1+|b_j z_2|)^{\frac{1}{s_2}} \|\mathcal{F} m_N(a_i \cdot, b_j \cdot)\|_{H_2^p}
\end{aligned}$$

se

$$(3) \quad r_1 > \frac{1}{s_1} + \frac{1}{2} \text{ e } r_2 > \frac{1}{s_2} + \frac{1}{2},$$

isto é,

$$(m_N * f_N)'(x) \leq C \cdot f_N(x) \cdot \|\mathcal{F} m_N(a_i \cdot, b_j \cdot)\|_{H_2^p}$$

se 3.2.5(3) vale. Sejam s_1 e s_2 satisfazendo 3.2.5(3) tais que $0 < s_1 < \min(p_1, q_1, q_2)$ e $0 < s_2 < \min(p_1, p_2, q_1, q_2)$. Então, aplicando o Teorema 3.2.4 temos

$$\begin{aligned}
\|(m_N * f_N)_N\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} & \leq \|((m_N * f_N)')_N\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
& \leq C \cdot \sup_{N=(i,j)} \|\mathcal{F} m_N(a_i \cdot, b_j \cdot)\|_{H_2^p} \cdot \|(f_N)_N\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
& \leq C \cdot \sup_{N=(i,j)} \|\mathcal{F} m_N(a_i \cdot, b_j \cdot)\|_{H_2^p} \cdot \|(f_N)_N\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração.

3.3 OS ESPAÇOS $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ NÃO-ISOTRÓPICOS.

O objetivo deste parágrafo é introduzir os espaços $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ definidos através de normas mistas e mostrar que estes espaços independem dos particulares sistemas de funções testes que são utilizados para defini-los.

3.3.1 LEMA. Existe $\varphi \in S(\mathbb{R})$ tal que

- (1) $\text{supp } \mathcal{F}\varphi = \{t \in \mathbb{R} : 2^{-1} \leq |t| \leq 2\} ;$
- (2) $|\mathcal{F}\varphi(t)| > 0 \text{ se } 2^{-1} < |t| < 2 ;$
- (3) $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(2^{-i}t) = 1 \text{ se } t \neq 0 .$

Demonstração. Ver *Bergh – Löfström* [4]

3.3.2 SISTEMA DE FUNÇÕES TESTES. Sejam φ como no Lema 3.3.1 e para cada $i \in \mathbb{Z}$ a função φ_i dada por $\varphi_i(t) = 2^i \varphi(2^i t)$. Chamaremos a família $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de um sistema de funções testes sobre $\mathbb{R}$. Observemos que do fato de $\mathcal{F}\varphi_i(t) = \mathcal{F}\varphi(2^{-i}t)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, e de 3.3.1(1), 3.3.1(2) e de 3.3.1(3) seguem as condições

- (1) $\text{supp } \mathcal{F}\varphi_i = \{t \in \mathbb{R} : 2^{i-1} \leq |t| \leq 2^{i+1}\} ; i \in \mathbb{Z} ;$
- (2) $|\mathcal{F}\varphi_i(t)| > 0 \text{ se } 2^{i-1} < |t| < 2^{i+1} ;$
- (3) $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi_i(t) = 1 \text{ se } t \neq 0 .$

3.3.3 DEFINIÇÃO. Sejam $S = (s_1, s_2)$, $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ tais que $s_n \in \mathbb{R}$, $0 < p_n < \infty$ e $0 < q_n \leq \infty$, $n = 1, 2$. Sejam $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sistemas de funções testes como em 3.3.2. $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2) = H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2, \varphi, \psi)$ é o espaço vetorial das funções f pertencentes a $L^P(\mathbb{R}^2) \cap S'(\mathbb{R}^2)$, a valores reais, que satisfazem $(2^{s_1 i + s_2 j} \varphi_i \psi_j * f)_{ij} \in L^P(\ell^Q)$.

Equipamos o espaço $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ com a seguinte quase-norma (norma se $\min(p_1, p_2, q_1, q_2) \geq 1$) :

$$(1) \quad \|f\|_{H_S^{P,Q}}^{\varphi, \psi} = \| (2^{s_1 i + s_2 j} \varphi_i \psi_j * f)_{ij} \|_{L^P(\ell^Q)}$$

Quando não houver motivo para confusão denotaremos $\|f\|_{H_S^{P,Q}}^{\varphi, \psi}$ simplesmente por $\|f\|_{H_S^{P,Q}}$.

Observemos que se $S = (s, s)$, $P = (p, p)$ e $Q = (q, q)$ então

$$\|f\|_{H_s^{p,q}}^{\varphi,\psi} = \|(2^{s(i+j)}\varphi_i\psi_j * f)_{ij}\|_{L^p(\ell^q)}$$

e portanto podemos escrever $H_s^{p,q}(\mathbb{R}^2)$ na notação mais simplificada $H_s^{p,q}(\mathbb{R}^2)$.

O próximo resultado mostra que a quase-norma 3.3.3(1) independe dos sistemas de funções testes $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

3.3.4 TEOREMA. Sejam $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(\beta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $(\psi_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ sistemas de funções testes como em 3.3.2. Sejam S , P e Q como na Definição 3.3.3. Então as quase-normas $\|\cdot\|_{H_s^{p,q}}^{\alpha,\beta}$ e $\|\cdot\|_{H_s^{p,q}}^{\varphi,\psi}$ são equivalentes, isto é, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$(1) \quad C_1 \cdot \|f\|_{H_s^{p,q}}^{\alpha,\beta} \leq \|f\|_{H_s^{p,q}}^{\varphi,\psi} \leq C_2 \cdot \|f\|_{H_s^{p,q}}^{\alpha,\beta}.$$

Demonstração. Basta mostrarmos a primeira desigualdade em 3.3.4(1), pois a segunda é obtida da primeira invertendo as posições de α, β e φ, ψ . Observemos inicialmente que de 3.3.2(1) e 3.3.2(3) podemos escrever

$$\mathcal{F}\alpha_i(t_1) = \mathcal{F}\alpha_i(t_1) \sum_{m=-1}^1 \mathcal{F}\varphi_{i-m}(t_1)$$

e

$$\mathcal{F}\beta_j(t_2) = \mathcal{F}\beta_j(t_2) \sum_{n=-1}^1 \mathcal{F}\psi_{j-n}(t_2)$$

para cada t_1, t_2 pertencentes a $\mathbb{R}$ e cada i, j pertencentes a $\mathbb{Z}$. Então, se $f \in H_s^{p,q}(\mathbb{R}^2)$, temos

$$(2) \quad \alpha_i\beta_j * f = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 \alpha_i\beta_j * \varphi_{i-m}\psi_{j-n} * f.$$

Portanto, utilizando 3.3.4(2) e a desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_{\varepsilon}^{s,\beta}}^{\alpha,\beta} &= \|(2^{s_1 i + s_2 j} \alpha_i \beta_j * f)_{ij}\|_{L^p(\ell^q)} \\ &\leq C \cdot \sum_{n=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 2^{-s_1 m - s_2 n} \|(\alpha_i \beta_j * (2^{s_1(i+m) + s_2(j+n)} \varphi_{i+m} \psi_{j+n} * f))_{ij}\|_{L^p(\ell^q)} \\ &\leq C \cdot \sum_{n=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 \|(\alpha_i \beta_j * f_{i+m, j+n})_{ij}\|_{L^p(\ell^q)}, \end{aligned}$$

onde

$$f_{i+m, j+n} = 2^{s_1(i+m) + s_2(j+n)} \varphi_{i+m} \psi_{j+n} * f.$$

Tomemos agora $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo

$$r_1 > \frac{1}{\min(p_1, q_1, q_2)} + \frac{1}{2} \text{ e } r_2 > \frac{1}{\min(p_1, p_2, q_1, q_2)} + \frac{1}{2}.$$

Então por 3.1.8 $H_2^R(\mathbb{R}^2) = W_2^R(\mathbb{R}^2)$ e aplicando o Teorema 3.2.5 com f_N , m_N , a_i e b_j substituídos por $f_{i-m, j-n}$, $\alpha_i \beta_j$, 2^{i-2} e 2^{j-2} , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_{\varepsilon}^{r,\beta}}^{\alpha,\beta} &\leq \\ &\leq C \cdot \sum_{n=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 \sup_{i,j} \|\mathcal{F} \alpha_i(2^{i-2} \cdot)\|_{W_2^{r_1}} \|\mathcal{F} \beta_j(2^{j-2} \cdot)\|_{W_2^{r_2}} \|(f_{i-m, j-n})_{ij}\|_{L^p(\ell^q)} \\ &\leq C \cdot \sup_{i,j} \|\mathcal{F} \alpha_i(2^{i-2} \cdot)\|_{W_2^{r_1}} \|\mathcal{F} \beta_j(2^{j-2} \cdot)\|_{W_2^{r_2}} \|(2^{s_1 k + s_2 l} \varphi_k \psi_l * f)_{kl}\|_{L^p(\ell^q)}. \end{aligned}$$

Para completar a demonstração basta mostrarmos que existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$(3) \quad \|\mathcal{F} \alpha_i(2^{i-2} \cdot)\|_{W_2^{r_1}} \leq C_1,$$

$$(4) \quad \|\mathcal{F}\beta_j(2^{j+2}\cdot)\|_{W_2'^2} \leq C_2 ,$$

para todo i e j pertencentes a $\mathbb{Z}$. De fato, como $\mathcal{F}\alpha_i(2^{i+2}t) = \mathcal{F}\alpha(2^2t)$, então para todo inteiro positivo h temos que $D^h[\mathcal{F}\alpha_i](2^{i+2}t) = 2^{2h}D^h(\mathcal{F}\alpha)(2^2t)$, onde D^h denota a derivada de ordem h . Como $\alpha \in S(\mathbb{R})$ satisfaz 3.3.1(1) segue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\alpha_i(2^{i+2}\cdot)\|_{W_2'^2}^2 &= \sum_{h=0}^{\tau_1} \int |D^h(\mathcal{F}\alpha_i)(2^{i+2}t)|^2 dt \\ &= \sum_{h=0}^{\tau_1} 2^{4h} \int |D^h(\mathcal{F}\alpha)(2^2t)|^2 dt \\ &\leq \sum_{h=0}^{\tau_1} 2^{4h-2} \int_{|u|\leq 2} |D^h(\mathcal{F}\alpha)(u)|^2 du \\ &\leq C_1 , \end{aligned}$$

o que mostra 3.3.4(3). Analogamente obtemos 3.3.4(4). Isto completa a demonstração.

3.3.5 Observação. Segue da demonstração do Teorema 3.3.4 que não é necessário utilizarmos a condição 3.3.2(3) dos sistemas $(\alpha_k)_k$ e $(\beta_l)_l$, isto é,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\alpha_k(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\beta_l(t) = 1 \quad , \quad t \neq 0 \quad ,$$

para obtermos desigualdades do tipo

$$\|f\|_{H_1^{\frac{2,p}{p-2}}} \leq C \cdot \|f\|_{H_1^{\frac{2,p}{p-2}}}.$$

Isto permitirá exigir dos sistemas $(\alpha_k)_k$ e $(\beta_l)_l$ outro tipo de condição como, por exemplo,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\alpha_k(t)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\beta_l(t)|^2 = 1 \quad , \quad t \neq 0 \quad ,$$

o que será feito no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

A CARACTERIZAÇÃO $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.

É neste capítulo que abordamos o tema central deste trabalho, que é obter uma caracterização do espaço de Hardy não-isotrópico $H^1(\mathbb{R}^2)$ como o espaço não-isotrópico $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Este espaço é um caso particular dos espaços $H_S^{P,Q}(\mathbb{R}^2)$ definidos no Capítulo 3 quando $S = (0,0)$, $P = (1,1)$ e $Q = (2,2)$ (ver observação feita após a definição 3.3.3 para o uso da notação $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$).

No caso isotrópico, caracterização do espaço H^1 do tipo que apresentamos neste capítulo foi obtida inicialmente por J. Peetre [44], [45]. Posteriormente, H. Triebel realizou em '59 outra demonstração utilizando outros argumentos. Mais recentemente, uma nova demonstração foi feita por J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz e J. L. Torrea [47]. Observamos, entretanto, que as demonstrações que esses diversos autores apresentam, ou contém passagens onde é difícil perceber os argumentos envolvidos ou apenas são dadas algumas indicações dos mesmos. Em vista disso, foi necessário inicialmente desenvolver detalhadamente a demonstração da caracterização no caso isotrópico, para que todas as idéias envolvidas se tornassem claras. Feito isso, procuramos adaptar a demonstração para o caso não-isotrópico. Entretanto apareceram várias dificuldades as quais não ocorrem no caso isotrópico. Idéias novas tiveram que ser empregadas na demonstração do caso não-isotrópico. Esta demonstração, por sua vez, é realizada com o auxílio de resultados que foram obtidos nos capítulos anteriores, como segue.

No parágrafo 4.1 utilizamos os resultados sobre operadores integrais singulares, que foram obtidos no Capítulo 2 (Teoremas 2.2.6 e 2.3.3) para demonstrar que certos operadores definidos através de funções testes convenientes são limitados de $H^1(\mathbb{R}^2)$ em $L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ e de $L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ em $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ (Teoremas 4.1.2 e 4.1.4). Como consequência direta desses operadores serem limitados de $H^1(\mathbb{R}^2)$ em $L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ segue que o espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$ está imerso continuamente no espaço $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.

A finalidade do parágrafo 4.2 é obter um subespaço denso de $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. A idéia da construção deste subespaço é devida a E.M.Stein [55] e foi também utilizada por H.Sato [49]. Este subespaço auxiliará na demonstração da imersão $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$, que será feita no parágrafo seguinte. Outras ferramentas que também desempenham papel fundamental na demonstração dessa imersão são o Teorema de dualidade do espaço de Hardy $H_{H^b}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ não-isotrópico que foi obtido no Capítulo 1 (Teorema 1.3.12), o teorema que afirma que os operadores considerados no parágrafo 4.1.1 são limitados de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ em $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)$ (Teorema 4.1.4) e o resultado do Capítulo 3 que diz que duas normas quaisquer do espaço $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, definidas através de famílias de funções testes distintas, são equivalentes (Teorema 3.3.4).

4.1 RESULTADOS PRELIMINARES.

Neste parágrafo obtemos alguns resultados que auxiliarão na demonstração da caracterização $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, que será feita no parágrafo 4.3. O lema seguinte será necessário na demonstração de alguns desses resultados.

4.1.1 LEMA. Seja $\varphi \in S(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\varphi}(0) = 0$ e $\hat{\varphi}(t) > 0$ se $2^{-1} < t < 2$. Fazendo $\varphi_j(x) = 2^j \varphi(2^j x)$, $j \in \mathbb{Z}$, temos

$$(1) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_j(t)|^2 \leq C ;$$

$$(2) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\varphi_j(x)|^2 \leq C \cdot |x|^{-2} ;$$

$$(3) \quad \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\varphi_j(x-y) - \varphi_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \frac{|y|}{|x|^2}, \text{ se } |x| > 2|y|.$$

Demonstração. Ver Torrea [57] ou Fernandez [31].

4.1.2 TEOREMA. Sejam φ e ψ como no lema anterior. Então

$$(1) \quad \|(\varphi_i \psi_j * f)_{ij}\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \leq C \cdot \|f\|_{H_{ul}^1(\mathbb{R}^2)}$$

para toda $f \in H_{ul}^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Consideremos o operador linear definido em $L_c^2(\mathbb{R}^2)$ por

$$Tf = (\varphi_i \psi_j * f)_{ij} \in M(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2)).$$

O operador T está bem definido, pois se $f \in L_c^2(\mathbb{R}^2)$ então pelo Teorema de Plancherel e por 4.1.1(1) temos

$$\begin{aligned} (2) \quad & \iint \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\varphi_i \psi_j * f(x, y)|^2 dx dy = \\ & = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \iint |\varphi_i \psi_j * f(x, y)|^2 dx dy \\ & = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \iint |\hat{\varphi}_i(s) \hat{\psi}_j(t) \hat{f}(s, t)|^2 ds dt \\ & = \iint \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_i(s)|^2 \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}_j(t)|^2 \right) |\hat{f}(s, t)|^2 ds dt \\ & \leq C \cdot \iint |\hat{f}(s, t)|^2 ds dt = C \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

donde segue que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\varphi_i \psi_j * f(x, y)|^2 < \infty$$

para quase todo (x, y) , isto é, $Tf(x, y) \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$. Para mostrar que Tf é uma função mensurável é suficiente verificar que a aplicação

$$(x, y) \longrightarrow Tf(x, y) \cdot \alpha$$

é mensurável para todo $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$, uma vez que $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ é separável. Mas se $\alpha = (\alpha_{ij})_{ij}$ temos

$$\begin{aligned} Tf(x, y) \cdot \alpha &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\varphi_i \psi_j * f(x, y)) \alpha_{ij} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij} \varphi_i \psi_j * f(x, y), \end{aligned}$$

que é obviamente mensurável. A desigualdade 4.1.2(2) mostra que T é um operador limitado de $L^2(\mathbb{R}^2)$ em $L^2(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2))$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos os operadores T^n , T_1^n e T_2^n definidos da seguinte maneira:

T^n definido em $L_c^2(\mathbb{R}^2)$ por

$$T^n f = (\varphi_i \psi_j * f; -n \leq i, j \leq n) \in M(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2)) :$$

T_1^n definido em $L^2(\mathbb{R})$ por

$$T_1^n f = (\varphi_i * f; -n \leq i \leq n) \in M(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{Z})) :$$

T_2^n definido em $L_c^2(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{Z}))$ por

$$T_2^n g = (\psi_j * g_i; -n \leq i, j \leq n) \in M(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{Z}^2)) .$$

Nosso próximo passo será mostrar que esses operadores satisfazem as hipóteses do Teorema 2.3.3. Para isto observemos de início que por um raciocínio análogo ao que fizemos com o operador T , é fácil vermos que para cada $n \in \mathbb{N}$, T^n está bem definido e $T^n f$ é função mensurável. Além

disso, de 4.1.2(2) segue que os operadores T^n são todos limitados de $L^2(\mathbb{R}^2)$ em $L^2(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2))$, com $\|T^n\|$ limitada por uma constante que independe de n .

Os operadores T_1^n são limitados de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{Z}))$ com $\|T_1^n\|$ limitada por uma constante que independe de n , pois pelo Teorema de Plancherel e 4.1.1(1) temos

$$\begin{aligned} \int \sum_{i=-n}^n |\varphi_i * f(x)|^2 dx &= \sum_{i=-n}^n \int |\hat{\varphi}_i(s)|^2 |\hat{f}(s)|^2 ds \\ &\leq C \cdot \int |\hat{f}(s)|^2 ds = C \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Afirmamos, agora, que para cada $n \in \mathbb{N}$, o núcleo k_1^n definido por

$$k_1^n(x) : \lambda \in \mathcal{C} \longrightarrow k_1^n(x) \cdot \lambda = (\varphi_i(x) \lambda; -n \leq i \leq n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

está bem definido, pertence a $L^2_{loc}(\mathbb{R}, L(\mathcal{C}, \ell^2(\mathbb{Z})))$, verifica a condição 2.3.1(1) com $L_1 = L(\mathcal{C}, \ell^2(\mathbb{Z}))$ e para todo $f \in L^2_c(\mathbb{R})$ temos

$$(3) \quad T_1^n f(x) = \int k_1^n(x-y) f(y) dy.$$

De fato, k_1^n está bem definido, pois de $\varphi \in S(\mathbb{R})$, temos

$$(4) \quad \|k_1^n(x) \cdot \lambda\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{i=-n}^n |\varphi_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\lambda\| \leq C(n) \|\lambda\|$$

para todo $\lambda \in \mathcal{C}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como $L(\mathcal{C}, \ell^2(\mathbb{Z}))$ é isométrico a $\ell^2(\mathbb{Z})$, e a aplicação

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{i=-n}^n \alpha_i \varphi_i(x)$$

é mensurável, para todo $\alpha = (\alpha_i)_i \in \ell^2(\mathbb{Z})$, segue que k_1^n é mensurável. Agora, se $A \subset \mathbb{R}$ é um compacto, então por 4.1.2(4) temos

$$\int_A \|k_1^n(x)\|_{L_1}^2 dx \leq C(n)|A| < \infty,$$

onde $L_1 = L(\mathcal{C}, \ell^2(\mathbb{Z}))$, o que mostra que k_1^n pertence a $L_{loc}^2(\mathbb{R}, L_1)$. Para mostrar 4.1.2(3) observemos que do fato da aplicação

$$u \in \mathbb{R} \longrightarrow (\varphi_i(u)f(u); -n \leq i \leq n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

ser integrável temos

$$\begin{aligned} T_1^n f(x) &= (\varphi_i * f(x); -n \leq i \leq n) \\ &= \left(\int \varphi_i(x-u)f(u)du; -n \leq i \leq n \right) \\ &= \int (\varphi_i(x-u)f(u); -n \leq i \leq n)du \\ &= \int k_1^n(x-u)f(u)du. \end{aligned}$$

Finalmente, se $|x - u'| > \gamma|y - u'|$, com $\gamma \geq 2$, então por 4.1.1(3), obtemos

$$\begin{aligned} |k_1^n(x-u) - k_1^n(x-u')|_{L_1} &= \left(\sum_{i=-n}^n |\varphi_i(x-u) - \varphi_i(x-u')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=-n}^n |\varphi_i(x-u' - (u-u')) - \varphi_i(x-u')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \cdot \frac{|u-u'|}{|x-u'|^2}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante que independe de n . Portanto, pela observação 2.3.2 segue que o núcleo k_1^n verifica a condição 2.3.1(1) com $L_1 = L(\mathcal{C}, \ell^2(\mathbb{Z}))$ e constante C independente de n . A limitação dos operadores T_2^n de $L^2(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{Z}))$ em $L^2(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{Z}^2))$, com $\{T_2^n\}$ limitada por uma constante que independe de n , segue de 4.1.1(1) por um raciocínio

análogo ao que fizemos para T_1^n . Vejamos agora que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um núcleo k_2^n pertencente a $L^2_{loc}(\mathbb{R}, L(\ell^2(\mathbb{Z}), \ell^2(\mathbb{Z}^2)))$, satisfazendo 2.3.1(1) com $L_2 = L(\ell^2(\mathbb{Z}), \ell^2(\mathbb{Z}^2))$, tal que

$$(5) \quad T_2^n g(y) = \int k_2^n(y-v)g(v)dv,$$

para toda $g \in L^2_c(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{Z}))$. Para isto seja k_2^n definido por

$$k_2^n(y) : \alpha = (\alpha_i)_i \in \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow k_2^n(y) \cdot \alpha = (\psi_j(y) \cdot \alpha_i; -n \leq i, j \leq n) \in \ell^2(\mathbb{Z}^2).$$

Esta função está bem definida, pois do fato de $\psi \in S(\mathbb{R})$ segue que

$$\begin{aligned} (6) \quad \|k_2^n(y) \cdot \alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)} &= \left(\sum_{j=-n}^n \sum_{i=-n}^n |\psi_j(y) \alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{j=-n}^n |\psi_j(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(n) \cdot \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \end{aligned}$$

para todo $\alpha = (\alpha_i)_i \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e todo $y \in \mathbb{R}$. A mensurabilidade de k_2^n segue do fato de que $k_2^n = \sum_{i,j=-n}^n k_{2,i,j}^n$, onde cada $k_{2,i,j}^n$ definida por

$$k_{2,i,j}^n(y) \cdot \alpha = (\dots, 0, \psi_j(y) \alpha_i, 0, \dots)$$

é mensurável, pois cada ψ_j o é. O fato de que $\|k_2^n(y)\|_{L_2}^2$ é localmente integrável, onde $L_2 = L(\ell^2(\mathbb{Z}), \ell^2(\mathbb{Z}^2))$, segue de 4.1.2(6). A verificação de 4.1.2(5) é análoga à de 4.1.2(3). Também como no caso do núcleo k_1^n , segue de 4.1.1(3) que

$$\|k_2^n(y-v) - k_2^n(y-v')\|_{L_2} \leq C \cdot \frac{|v-v'|}{|y-v'|^2}$$

onde C é uma constante que independe de n , donde resulta que k_2^n satisfaz 2.3.1(1) com constante independente de n . Para completar a verificação de

que os operadores T^n , T_1^n e T_2^n satisfazem as hipóteses do Teorema 2.3.3, notemos que do fato da aplicação

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (\varphi_i(u)\psi_j(v)f(u, v); -n \leq i, j \leq n) \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$

ser integrável quando $f \in L_c^2(\mathbb{R}^2)$, temos

$$T^n f(x, y) = \int \int k_2^n(y - v)k_1^n(x - u)f(u, v)dudv$$

para toda $f \in L_c^2(\mathbb{R}^2)$.

Portanto, pelo Teorema 2.3.2, obtemos

$$(7) \quad \|T^n f\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2))} \leq C \cdot \|f\|_{H_{at}^1(\mathbb{R}^2)}$$

para todo n e toda $f \in H_{at}^1(\mathbb{R}^2)$, com C sendo uma constante que independe de n (ver observação 2.3.4). Finalmente, aplicando o teorema da convergência monótona em 4.1.2(7) obtemos 4.1.2(1), como desejávamos.

Como consequência do Teorema 4.1.2 temos o seguinte resultado que já fornece uma parte da caracterização $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.

4.1.3 COROLÁRIO. O espaço $H_{at}^1(\mathbb{R}^2)$ está imerso continuamente em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, isto é, existe constante positiva C tal que

$$\|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \leq C \cdot \|f\|_{H_{at}^1(\mathbb{R}^2)}$$

para toda $f \in H_{at}^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Basta observarmos que as funções testes que são utilizadas para definir o espaço $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1.2.

O próximo teorema terá importância fundamental na demonstração da imersão contrária à que se refere o Corolário 4.1.3, ou seja, que o espaço

$H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ está imerso continuamente no espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$.

4.1.4 TEOREMA. Sejam φ e ψ como no Lema 4.1.1. Então

$$\|(\varphi_i \psi_j * f)_{ij}\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \leq C \cdot \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema 4.1.2, utilizando neste caso o Teorema 2.2.6.

4.2 UM SUBESPAÇO DENSO DE $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$

O objetivo deste parágrafo é obter um subespaço denso de $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ que será utilizado na demonstração da caracterização $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.

A idéia da construção desse subespaço é devida à E. M. Stein [55] e foi também utilizada por H. Sato [49].

4.2.1 LEMA. Existe $\varphi \in S(\mathbb{R})$ a valores reais tal que

- (1) $\varphi(0) = 1$;
- (2) $\text{supp } \mathcal{F}\varphi \subset \{s \in \mathbb{R} : |s| \leq 1\}$.

Demonstração. Seja $\phi \in S(\mathbb{R})$ tal que $\phi(s) > 0$ se $|s| < 1$, $\phi(s) = 0$ se $|s| \geq 1$ e $\int \phi(s) ds = 1$. Consideremos ψ dada por

$$\psi(s) = \frac{1}{2}(\phi(s) - \overline{\phi(-s)})$$

e coloquemos $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\psi$. É fácil de verificar que φ satisfaz as condições 4.2.1(1) e 4.2.1(2). Para vermos que φ é a valores reais basta mostrarmos

que a parte imaginária de φ é igual a zero, isto é, $Im\varphi = 0$. Para isto, coloquemos $\check{\psi}(s) = \psi(-s)$. Então, observando que $\psi - \check{\psi} = 0$, temos

$$\begin{aligned} 2i Im\varphi &= \varphi - \bar{\varphi} = \mathcal{F}^{-1}\psi - \overline{\mathcal{F}^{-1}\psi} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\psi - \mathcal{F}^{-1}(\check{\psi}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\psi - \check{\psi}] = 0 \end{aligned}$$

donde segue que $Im\varphi = 0$.

4.2.2 TEOREMA. Seja $\mathcal{O}$ o espaço das funções $f \in S(\mathbb{R}^2)$ a valores reais tais que

- (1) $\hat{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$;
- (2) $supp \hat{f} \cap [(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})] = \emptyset$.

Então $\mathcal{O}$ é um subespaço denso de $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Observemos inicialmente que pelo Teorema 1.2.4, pela observação feita após 1.2.11 e pelo Teorema 4.1.3 segue que $\mathcal{O} \subset H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Sejam $f \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e $(\varphi_i)_i, (\psi_j)_j$ sistemas de funções testes a valores reais como em 3.3.2, com φ_i e ψ_j não-negativas para todo i, j . Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideremos a função f_N dada por

$$f_N(x, y) = \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N \varphi_i(x) \cdot \psi_j(y) \cdot f(x, y).$$

Então $f_N \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. De fato, $f_N \in L^1(\mathbb{R}^2)$, pois

$$\begin{aligned} \|f_N\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N \|\varphi_i(x) \cdot \psi_j(y) \cdot f(x, y)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \cdot \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando a desigualdade triangular e utilizando o fato de que $\hat{\varphi}$ e $\hat{\psi}$ pertencem a $S(\mathbb{R})$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|f_N\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} &\leq \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N \|\varphi_i \psi_j * f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \\
 &= \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N \iint \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k \psi_l * \varphi_i \psi_j * f(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\
 &= \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N \iint \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}_k \hat{\psi}_l \hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j] * f(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\
 &\leq C \cdot \iint \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k \psi_l * f(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\
 &= C \cdot \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)}.
 \end{aligned}$$

Mostremos agora que $f_N \rightarrow f$ em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ se $N \rightarrow \infty$. Observemos de início que do fato dos sistemas $(\varphi_i)_i$ e $(\psi_j)_j$ satisfazerem 3.3.2(3), temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f - f_N)(\xi, \eta) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j \hat{f})(\xi, \eta) - \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N (\hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j \hat{f})(\xi, \eta) \\
 &= \sum_{j \geq N+1} \sum_{i \geq N+1} (\hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j \hat{f})(\xi, \eta),
 \end{aligned}$$

para todo $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, donde segue que

$$\begin{aligned}
 \varphi_k \psi_l * (f - f_N)(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}_k \hat{\psi}_l \cdot \mathcal{F}(f - f_N)](x, y) \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left[\sum_{|j| \geq N+1} \sum_{|i| \geq N+1} (\hat{\varphi}_k \hat{\psi}_l \hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j \hat{f}) \right](x, y).
 \end{aligned}$$

Logo, notando que

$$\sum_{|j| \geq N+1} \sum_{|i| \geq N+1} \hat{\varphi}_k \hat{\psi}_l \hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j \hat{f} = 0$$

para todo k e l menor do que N , obtemos

$$\begin{aligned}
\|f - f_N\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} &= \iint \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k \psi_l * (f - f_N)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\
&= \iint \left(\sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |\mathcal{F}^{-1} \left[\sum_{|j| \geq N+1} \sum_{|i| \geq N+1} (\hat{\varphi}_k \hat{\psi}_l \hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j \hat{f}) \right]|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\
&\leq \iint \left(\sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |\mathcal{F}^{-1} \left[\sum_{s=-1}^1 \sum_{r=-1}^1 (\hat{\varphi}_k \hat{\psi}_l \hat{\varphi}_{k+r} \hat{\psi}_{l+s} \hat{f}) \right]|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\
&\leq \sum_{s=-1}^1 \sum_{r=-1}^1 \iint \left(\sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |\varphi_{k+r} \psi_{l+s} * \varphi_k \psi_l * f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy.
\end{aligned}$$

Tomemos agora um número natural N suficientemente grande (de modo a satisfazer a condição 3.2.5(1) com $r_1 = r_2 = u$, $p_1 = p_2 = 1$ e $q_1 = q_2 = 2$). Então, aplicando o Teorema 3.2.5 com m_N , f_N , a_i e b_j substituídos por $\varphi_{k+r} \psi_{l+s}$, $\varphi_k \psi_l * f$, 2^{k+1} e 2^{l+1} , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|f - f_N\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} &\leq C \left(\sum_{s=-1}^1 \sum_{r=-1}^1 \sup_l \|\hat{\psi}_{l+s}(2^{l+1} \cdot)\|_{W_2^2} \sup_k \|\hat{\varphi}_{k+r}(2^{k+1} \cdot)\|_{W_2^2} \right) \times \\
&\quad \times \left(\iint \left(\sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |\varphi_k \psi_l * f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \right).
\end{aligned}$$

Mas, fazendo uma estimativa semelhante à de 3.3.4(3), obtemos

$$\|\hat{\varphi}_{k-r}(2^{k-1} \cdot)\|_{W_2^2} \leq C_1$$

e

$$\|\hat{\psi}_{l-s}(2^{l-1} \cdot)\|_{W_2^2} \leq C_2$$

para todo k, l pertencentes a $\mathbb{Z}$ e r, s tomando os valores $-1, 0, 1$. Consequentemente,

$$\|f - f_N\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \leq C \cdot \iint \left(\sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |\varphi_k \psi_l * f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Pelo teorema da convergência dominada segue que $f_N \rightarrow f$ em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ se $N \rightarrow \infty$.

Nosso próximo passo é mostrar que podemos aproximar cada f_N em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ por um elemento de $\mathcal{O}$. Para isto, sejam α e β funções como no Lema 4.2.1 e, para cada $n \in \mathbb{N}$, coloquemos

$$f_{N,n}(x, y) = \alpha\left(\frac{x}{n}\right) \beta\left(\frac{y}{n}\right) f_N(x, y).$$

Então temos

$$\mathcal{F}[f_{N,n}] = n^2 \mathcal{F}\alpha(n.) \mathcal{F}\beta(n.) * \mathcal{F}f_N$$

e portanto $\mathcal{F}[f_{N,n}]$ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, para cada n . Além disso, como α e β satisfazem 4.2.1(2), temos

$$\begin{aligned} \text{supp } \mathcal{F}[f_{N,n}] &\subset \text{supp } [n^2 \mathcal{F}\alpha(n.) \mathcal{F}\beta(n.)] - \text{supp } \mathcal{F}f_N \\ &\subset \left\{ (x, y) : |x| \leq \frac{1}{n}, |y| \leq \frac{1}{n} \right\} + \\ &\quad - \left\{ (x, y) : 2^{-N-1} \leq x \leq 2^{N-1}, 2^{-N-1} \leq y \leq 2^{N-1} \right\} \end{aligned}$$

donde $\text{supp } \mathcal{F}[f_{N,n}] \cap [(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})] = \emptyset$ para n suficientemente grande. Portanto $f_{N,n} \in \mathcal{O}$ para n suficientemente grande. Afirmamos agora que $f_{N,n} \rightarrow f_N$ em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ se $n \rightarrow \infty$. Com efeito, como $\text{supp } \hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j$ e $\text{supp } \mathcal{F}[f_N - f_{N,n}]$ são disjuntos para $|i| \geq N-3$ e $|j| \geq N-3$, então temos

$$\begin{aligned} \|f_N - f_{N,n}\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} &= \iint \left(\sum_{|i| \leq N-2} \sum_{|j| \leq N-2} |\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}_i \hat{\psi}_j) \mathcal{F}(f_N - f_{N,n})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\ &\leq C \cdot \|f_N - f_{N,n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Como $f_{N,n} \rightarrow f_N$ pontualmente se $n \rightarrow \infty$, então pelo teorema da convergência dominada temos que $\|f_N - f_{N,n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$, o que prova a afirmação.

Finalmente, se $\varepsilon > 0$, temos que existe $f_N \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e $f_{N,n} \in \mathcal{O}$ tal que

$$\|f - f_N\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon/2$$

e

$$\|f_N - f_{N,n}\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon/2.$$

Consequentemente,

$$\|f - f_{N,n}\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon,$$

o que demonstra o teorema.

4.3 A CARACTERIZAÇÃO $H^1(\mathbb{R}^2) = H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$

A finalidade deste parágrafo final é demonstrar que o espaço de Hardy $H^1(\mathbb{R}^2)$ não-isotrópico coincide com o espaço $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, que é um caso particular dos espaços $H_\xi^{p,q}(\mathbb{R}^2)$ que foram introduzidos no Capítulo 3. Mais precisamente, demonstraremos o seguinte resultado.

4.3.1. TEOREMA. Uma função f em $L^1(\mathbb{R}^2)$ pertence a $H^1(\mathbb{R}^2)$ se, e somente se, f pertence a $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Além disso, existe constante $C > 0$ tal que

$$(1) \quad C^{-1} \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Demonstração. Basta mostrarmos a primeira desigualdade em 4.3.1(1), pois a segunda já foi demonstrada no Corolário 4.1.3. Para isto, sejam $f \in \mathcal{O}$ e $g \in L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1$. Sejam também $\alpha = (\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e $\beta = (\beta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sistemas de funções testes como em 3.3.2, mas com a condição 3.3.2(3) substituída por

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\hat{\alpha}_i(s)|^2 = 1, \quad s \neq 0$$

e

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\beta}_j(t)|^2 = 1, \quad t \neq 0$$

(ver observação 3.3.5). Então, utilizando a fórmula de polarização e o teorema de Plancherel, temos

$$\begin{aligned} (2) \quad & \iint f(x, y)g(x, y)dx dy = \\ &= \frac{1}{4} \left[\iint |f+g|^2 dx dy - \iint |f-g|^2 dx dy \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\iint \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\hat{\alpha}_i(s)|^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\beta}_j(t)|^2 |\mathcal{F}(f+g)|^2 ds dt - \right. \\ &\quad \left. - \iint \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\hat{\alpha}_i(s)|^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\beta}_j(t)|^2 |\mathcal{F}(f-g)|^2 ds dt \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \iint |\mathcal{F}(\alpha_i \beta_j * (f+g))|^2 ds dt - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \iint |\mathcal{F}(\alpha_i \beta_j * (f-g))|^2 ds dt \right] \\ &= \iint \frac{1}{4} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (|\alpha_i \beta_j * (f+g)|^2 - |\alpha_i \beta_j * (f-g)|^2) \right] dx dy \\ &= \iint \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\alpha_i \beta_j * f)(\alpha_i \beta_j * g) dx dy. \end{aligned}$$

Notemos agora que pelo Teorema 4.1.4 temos

$$(3) \quad \|(\alpha_i \beta_j * g)_{ij}\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \leq C \cdot \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

para toda $g \in L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, o que mostra que $(\alpha_i \beta_j * g)_{i,j} \in BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2))$. Por outro lado, se denotarmos por H a transformada de Hilbert em uma variável e convencionamos que $H_0 \varphi = \varphi$ e $H_1 \varphi = H\varphi$, então para cada $k = (l, m) \in \square$, temos

$$(4) \quad H_k(\alpha_i \beta_j * f)(x, y) = (H_l \alpha_i H_m \beta_j * f)(x, y)$$

Mostraremos isto apenas para $k = (1, 0)$, pois os outros casos são análogos. De fato, pela Definição 1.2.1, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[H_{10}(\alpha_i \beta_j * f)](s, t) &= -i s g s \mathcal{F}(\alpha_i \beta_j * f)(s, t) \\ &= -i s g s \hat{\alpha}_i(s) \hat{\beta}_j(t) \hat{f}(s, t) \\ &= \mathcal{F}(H\alpha_i)(s) \hat{\beta}_j(t) \hat{f}(s, t) \\ &= \mathcal{F}[H\alpha_i \cdot \beta_j * f](s, t) \end{aligned}$$

donde segue 4.3.1(4) para $k = (1, 0)$.

Além disso, as sequências $(H\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(H\beta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ são sistemas de funções testes satisfazendo 3.3.2(1) e 3.3.2(2), pois $\mathcal{F}[H\alpha_i](s) = -i s g s \hat{\alpha}_i(s)$ e $\mathcal{F}[H\beta_j](t) = -i s g t \hat{\beta}_j(t)$. Assim, levando em conta a Observação 3.3.5, podemos aplicar o Teorema 3.3.4 para obtermos

$$\begin{aligned} (5) \quad \|(\alpha_i \beta_j * f)_{i,j} \|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} &= \sum_{k \in \square} \| (H_k(\alpha_i \beta_j * f))_{i,j} \|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &= \sum_{(l,m) \in \square} \| (H_l \alpha_i H_m \beta_j * f)_{i,j} \|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &\leq C \cdot \|f\|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

o que mostra que $(\alpha_i \beta_j * f)_{i,j} \in H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2))$. Utilizando agora 4.3.1(2), 4.3.1(3) e 4.3.1(5) e lembrando que, pelo Teorema 1.3.12, $BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2))$ é o dual de $H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathbb{Z}^2))$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \iint f \cdot g \, dx \, dy \right| &\leq C \cdot \|(\alpha_i \beta_j * f)_{ij}\|_{H_{H_l}^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \|(\alpha_i \beta_j * g)_{ij}\|_{BMO(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &\leq C \cdot \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todas as funções g pertencentes a $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tais que $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1$, resulta que

$$(6) \quad \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \cdot \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)}$$

para toda $f \in \mathcal{O}$. Observemos agora que se f pertence a $\mathcal{O}$ então $H_k f$ também pertence, para cada $k = (l, m) \in \square$. Portanto, 4.3.1(6) e o Teorema 3.3.4 implicam

$$\begin{aligned} (7) \quad \|f\|_{H_{H_l}^1(\mathbb{R}^2)} &= \sum_{k \in \square} \|H_k f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \cdot \sum_{k \in \square} \|H_k f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \\ &= C \cdot \sum_{k \in \square} \|(\varphi_i \psi_j * H_k f)_{ij}\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &= C \cdot \sum_{(l,m) \in \square} \|(H_l \varphi_i, H_m \psi_j * f)_{ij}\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &\leq C \cdot \|(\varphi_i \psi_j * f)_{ij}\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \ell^2)} \\ &= C \cdot \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{O}$. Finalmente, mostremos que a desigualdade 4.3.1(7) vale para toda $f \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Para isso, seja $f \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Como, pelo Teorema 4.2.2, $\mathcal{O}$ é denso em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, existe uma sequência $(f_n)_n$ de elementos de $\mathcal{O}$ tal que $f_n \rightarrow f$ na norma de $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, donde segue que $(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. De 4.3.1(7) segue que $(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $H_{H_l}^1(\mathbb{R}^2)$, donde resulta que existe um elemento $g \in H_{H_l}^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f_n \rightarrow g$ na norma de $H_{H_l}^1(\mathbb{R}^2)$, pois $H_{H_l}^1(\mathbb{R}^2)$ é um espaço completo. Como $H_{H_l}^1(\mathbb{R}^2)$ e $H_{at}^1(\mathbb{R}^2)$ são isomorfos e pelo Corolário 4.1.3 temos que $H_{at}^1(\mathbb{R}^2)$ está imerso continuamente em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, então

$f_n \longrightarrow g$ na norma de $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e portanto $g = f$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon$$

e

$$\|f_n - f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon.$$

Consequentemente, por 4.3.1(7) resulta que

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f - f_n\|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2)} + \|f_n\|_{H_{H^1}^1(\mathbb{R}^2)} \\ &< \varepsilon + C \cdot \|f_n - f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} + C \cdot \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \\ &< (C + 1)\varepsilon + C \cdot \|f\|_{H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $f \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, donde segue que 4.3.1(7) vale para toda $f \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Isto completa a demonstração.

Referências

- [1] J.AGUÍRRE, Multilinear pseudo differential operators and paraproducts. Ph.D. Thesis, Washington Univ., Missouri, 1981.
- [2] R.J.BAGBY, An extended inequality for the maximal function. Proc. Amer. Math. Soc. 48(1975), 419-422.
- [3] A.BENEDEK and R.PANZONE, The spaces L^p with mixed norm. Duke Math. J. 28(1961), 301-324.
- [4] J.BERG and J.LÖFSTRÖM, Interpolation Spaces. An Introduction. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [5] N.V.P.BERTOLO, Sobre os Espaços de Hardy em Produtos de Semi-Planos e Produtos de Faixas. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1983.
- [6] N.V.P.BERTOLO, On the Hardy space H^1 on products of half-spaces. Pacific J. Math. 138(1989), 347-356.
- [7] J.I.BERTOLO and D.L.FERNANDEZ, On the L^p and $L^p(\ell^q)$ spaces of analytic functions with mixed norms. 19º Seminário Brasileiro de Análise, São José dos Campos, 1984, 269-290.
- [8] B.BORDIN, A Characterization of H^1 on the Bi-Half Plane. Seminarios Universidad Autonoma de Madrid. 3(1986), 107-114.
- [9] B.BORDIN e D.L.FERNANDEZ, Sobre os espaços H^1 em produtos de semi-espaços. Anais Acad. Brasil. Ciências. 55(1983), 319-321.
- [10] B.BORDIN and D.L.FERNANDEZ, On a Littlewood-Paley theorem and connections between some non-isotropic distributions spaces. Rev. Real Acad. Cien. Ex. Fis. Nat. de Madrid, 80(1986), 133-138.
- [11] D.L.BURKHOLDER, R.F.GUNDY and M.L.SILVERSTEIN, A maximal function characterization of the class H^1 . Trans. Amer. Math. Soc. 157(1971), 137-153.
- [12] A.P.CALDERÓN and A.TORCHINSKY, Parabolic maximal functions associated with a distribution. Advances in Math. 16(1975), 1-64.

- [13] A.P.CALDERÓN and A.TORCHINSKY, Parabolic maximal functions associated with a distribution, II. *Advances in Math.* 24(1977), 101-171.
- [14] L.CARLESON, A counterexample for measures bounded on H^p for the bi-disc. *Mittag Leffler Report*, 7(1974).
- [15] S.Y.A.CHANG, Carleson measures on the bi-disc. *Ann. of Math.* 109(1979), 613-620.
- [16] S.Y.A.CHANG and R.FEfferman, A continuous version of the duality of H^1 and BMO on the bi-disc. *Ann. of Math.* 112(1980), 179-201.
- [17] S.Y.A.CHANG and R.FEfferman, The Calderon-Zygmund decomposition on product domains, *Amer. J. Math.* 104(1982), 445-468.
- [18] S.Y.A.CHANG and R.FEfferman, Some recent developments in Fourier Analysis and H^p -theory in product domains. *Bull. Amer. Math. Soc.* 12(1985), 1-43.
- [19] R.R.COIFMAN, A real variable Characterization of H^p . *Studia Math.* 51(1974), 269-274.
- [20] R.R.COIFMAN and G.WEISS, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 83(1977), 569-645.
- [21] A.CORDOBA and R.FEfferman, A geometric proof of the strong maximal theorem. *Ann. of Math.* 102(1975), 95-100.
- [22] P.L.DUREN, *Theory of H^p Spaces*. Academic, New York, 1970.
- [23] P.FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.* 30(1906), 335-400.
- [24] C.FEfferman, Characterizations of bounded mean oscillation. *Bull. Amer. Math. Soc.* 77(1971), 587-588.
- [25] C.FEfferman and E.M.STEIN, Some maximal inequalities. *Amer. J. Math.* 93(1971), 107-115.
- [26] C.FEfferman and E.M.STEIN, H^p spaces of several variables. *Acta Math.* 129(1972), 137-193.
- [27] R.FEfferman, Functions of bounded mean oscillations on the bi-disc. *Ann. of Math.* 10(1979), 395-406.

- [28] R.FEfferman, The atomic decomposition of H^1 on product spaces. Adv. in Math. 55(1985), 90-100.
- [29] R.FEfferman, Calderón-Zygmund theory for product domains: H^p spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83(1986), 840-843.
- [30] R.FEfferman and E.M.STEIN, Singular integrals on product spaces. Adv. in Math. 45(1982), 117-143.
- [31] D.L.FERNANDEZ, Operadores integrais singulares vetoriais. 20o Seminário Brasileiro de Análise, São Paulo, 1984, 1-61.
- [32] D.L.FERNANDEZ, Vector-valued singular integral operators on L^p -spaces with mixed norms and applications. Pacific J. Math. 129(1987), 257-275.
- [33] J.GARCIA CUERVA, Weighted H^p Spaces. Ph.D. Thesis, Washington Univ., Missouri, 1975.
- [34] J.GARCIA CUERVA and J.L.RUBIO DE FRANCIA, Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [35] R.GUNDY, Maximal function characterizations of H^p for the bi-disc, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, 1978.
- [36] R.GUNDY and E.M.STEIN, H^p theory for the polydisc. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 76(1979), 1026-1029.
- [37] L.HÖRMANDER, Linear Partial Differential Operators. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- [38] B.JESSEN, J.MARCINKIEWICZ and A.ZYGMUND, Note on the differentiability of multiple integrals. Fund. Math. 25(1935), 217-234.
- [39] F.JOHN and L.NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14(1961), 415-426.
- [40] J.L.JOURNÉ, Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderón. Lecture Notes in Math. 994. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [41] J.L.JOURNÉ, Calderón-Zygmund operators on product spaces. Revista Mat. Iberoamericana, vol.1, no3, 1985, 55-91.

- [42] J.L.JOURNÉ, A covering lemma for product spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 96(1986), 593-598.
- [43] K.MERRYFIELD, On the area integral, Carleson measures and H^p in the polydisc. Indiana Univ. Math. J. 34(1985), 663-686.
- [44] J.PEETRE, H_p Spaces. Lecture Notes, Lund, 1974.
- [45] J.PEETRE, On spaces of Triebel-Lizorkin type. Ark. Mat. 13(1975), 123-130.
- [46] J.L.RUBIO DE FRANCIA, F.J.RUIZ and J.L.TORREA, Les opérateurs de Calderón-Zygmund vectoriels. C. R. Acad. Sci. Paris 297(1983), 477-480.
- [47] J.L.RUBIO DE FRANCIA, F.J.RUIZ and J.L.TORREA, Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels. Adv. Math. 62(1986), 7-48.
- [48] W.RUDIN, Function theory in polydisc. Benjamin, New York, 1969.
- [49] H.SATO, Caractérisation par les transformations de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$. These de Doctorat de Troisième Cycle, Univ. de Grenoble, 1979.
- [50] H.SATO, La classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$; sa caractérisation par les transformations de Riesz. C. R. Acad. Sc. Paris 291(1980), 91-94.
- [51] S.SATO, Lusin functions and nontangential maximal functions in the H^p theory on the product of upper half-spaces. Tôhoku Math. J. 37(1985), 1-13.
- [52] H.J.SCHMEISSER and H.TRIEBEL, Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. Birkhauser Verlag, Basel, Boston and Stuttgart, 1987.
- [53] L.SCHWARTZ, Théorie des Distributions. Paris, Hermann, 1973.
- [54] F.SORIA, A note on a Littlewood-Paley inequality for arbitrary intervals in $\mathbb{R}^2$. J. London Math. Soc. 36(1987), 137-142.
- [55] E.M.STEIN, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
- [56] E.M.STEIN and G.WEISS, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

- [57] J.L.TORREA, Integrales Singulares Vectoriales. Notas de Algebra y Analisis no12, Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, 1984.
- [58] F.TREVES, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, New York, 1967.
- [59] H.TRIEBEL, Spaces of Besov-Hardy-Sobolev Type. Teubner-Texte Math. 15, Leipzig, Teubner, 1978.
- [60] H.TRIEBEL, Theorems of Littlewood-Paley type for *BMO* and anisotropic Hardy spaces. Proc. Intern. Conf. "Constructive Function Theory 77", Sofia, 1980, 525-532.
- [61] H.TRIEBEL, Theory of Function Spaces. Birkhauser Verlag, Basel, Boston and Stuttgart, 1983.
- [62] K.YOSIDA, Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1965.
- [63] A.ZYGMUND, Trigonometric Series. 2nd edition, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1959.