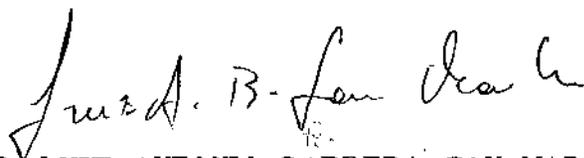


" $\alpha$ -CONEXÕES OBTIDAS POR AÇÕES DE GRUPOS DE LIE"

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. MARCO ANTONIO NOGUEIRA FERNANDES e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de agosto de 1992



PROF. DR. LUIZ ANTONIO BARRERA, SAN MARTIN

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, IMECC - UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

A Manoel e Ana (em memória),  
Rosa, Verónica, Paulo e  
Luciana.

## AGRADECIMENTOS

A Luiz San Martin pela valiosa orientação e, além disso, pela amizade que cultivamos nesses anos. Ao Antonio Kumpera que por motivo de força maior não pode ser meu orientador, mas apresentou-me ao Luiz. A Isaac Lázaro pela amizade, mais uma vez demonstrada, naquele difícil 1<sup>o</sup> ano de curso. Aos colegas da UFBA, UEFS e pós-graduação do IMECC que sempre me apoiaram. Para finalizar, à minha mulher, Rosa, que soube enfrentar com muita coragem mais esta etapa de nossas vidas.

## ÍNDICE

NOTAÇÕES	1
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	7
CAPÍTULO 2: ALGEBRAS DE LIE, GRUPOS DE LIE E ESPAÇOS SIMÉTRICOS	21
2.1. Algebras de Lie	21
2.2. Grupos de Lie	33
2.3. Espaços Simétricos	41
CAPÍTULO 3: POLINÓMIOS INVARIANTES PELO GRUPO DE WEYL	49
3.1. Grupo de Weyl	49
3.2. Grupo de Weyl das Algebras de Lie Simples	51
3.3. Polinômios Invariantes pelo Grupo de Weyl	53
CAPÍTULO 4: MODELOS TRANSFORMACIONAIS	57
4.1. Métrica de Fisher	57

4.2.	Métrica de Fisher em Espaços Simétricos	63
4.3.	$\alpha$ -Conexões em Espaços Simétricos	68
4.4.	Exemplos	77
CAPÍTULO 5: PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS		88
5.1.	Subvariedades Totalmente Geodésicas	88
5.2.	Conexão Não-Completa	91
5.3.	O Tensor Curvatura e suas Derivadas	92
5.4.	Não-Compatibilidade com Métrica Alguma	96
5.5.	O Tensor de Ricci	98
5.6.	Equivalência Projetiva	98
REFERÊNCIAS		102

## NOTAÇÕES

Adotaremos no desenrolar deste texto, as seguintes notações.

Denotaremos a transposta, a conjugada, o traço e o determinante da matriz  $A$ , de ordem  $n$ , por  $A^t$ ,  $\bar{A}$ ,  $\text{tr}(A)$  e  $\det A$  respectivamente.

$A$  é chamada simétrica se  $A^t = A$ , anti-simétrica se  $A + A^t = 0$ , Hermitiana se  $A^t = \bar{A}$ , anti-Hermitiana se  $A^t + \bar{A} = 0$ .

$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  significa que  $A$  é uma matriz  $n \times n$  cujas entradas diagonais são  $a_1, \dots, a_n$ .

Se  $I_n$  denota a matriz identidade de ordem  $n$ , teremos

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

-  $GL(n, \mathbb{C}), (GL(n, \mathbb{R}))$ : O grupo das matrizes complexas (reais)  $n \times n$  com determinante diferente de zero.

-  $SL(n, \mathbb{C}), (SL(n, \mathbb{R}))$ : O grupo das matrizes complexas (reais)  $n \times n$  com determinante 1.

-  $U(p, q)$ : O grupo das matrizes  $g \in GL(p+q, \mathbb{C})$ , que deixam invariante a forma Hermitiana

$$- z_1 \bar{z}_1 - \dots - z_p \bar{z}_p + z_{p+1} \bar{z}_{p+1} + \dots + z_{p+q} \bar{z}_{p+q},$$

isto é,

$$g^t I_{p,q} \bar{g} = I_{p,q}.$$

-  $U(n) = U(0, n) = U(n, 0)$ .

-  $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(p+q, \mathbb{C})$ .

-  $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ .

-  $S(U_p \times U_q)$ : O conjunto das matrizes

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

onde  $g_1 \in U(p), g_2 \in U(q)$  e  $\det g_1 \cdot \det g_2 = 1$ .

-  $SU^*(2n)$ : O grupo das matrizes em  $SL(2n, \mathbb{C})$  que comutam com a aplicação  $\psi$  de  $\mathbb{C}^{2n}$  dada por

$$(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n}) \longrightarrow (\bar{z}_{n+1}, \dots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_n).$$

-  $SO(n, \mathbb{C})$ : O grupo das matrizes  $g$  em  $SL(n, \mathbb{C})$  que deixam invariante a forma quadrática

$$z_1^2 + \dots + z_n^2, \text{ isto é, } g^t I_n g = I_n.$$

-  $SO(p, q)$ : O grupo das matrizes  $g \in SL(p+q, \mathbb{R})$  que deixam invariante a forma quadrática

$$-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2,$$

isto é,

$$g^t I_{p,q} g = I_{p,q}.$$

-  $SO(n) = SO(n, 0) = SO(0, n)$ .

-  $SO^*(2n)$ : O grupo das matrizes em  $SO(2n, \mathbb{C})$  que deixam invariante a forma anti-Hermitiana

$$-z_1 \bar{z}_{n+1} + z_{n+1} \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_{n+2} + z_{n+2} \bar{z}_2 - \dots - z_n \bar{z}_{2n} + z_{2n} \bar{z}_n,$$

isto é,

$$g \in SO^*(2n) \Leftrightarrow g^t J_n g = J_n, \quad g^t g = I_{2n}.$$

-  $Sp(n, \mathbb{C})$ : O grupo das matrizes  $g$  em  $GL(2n, \mathbb{C})$  que deixam invariante a forma exterior

$$z_1 \wedge z_{n+1} + z_2 \wedge z_{n+2} + \dots + z_n \wedge z_{2n},$$

isto é,

$$g^t J_n g = J_n.$$

-  $Sp(n, \mathbb{R})$ : O grupo das matrizes  $g \in GL(2n, \mathbb{R})$  que deixam invariante a forma exterior

$$x_1 \wedge x_{n+1} + x_2 \wedge x_{n+2} + \dots + x_n \wedge x_{2n},$$

isto é,

$$g^t J_n g = J_n.$$

-  $Sp(p, q)$ : O grupo das matrizes  $g$  em  $Sp(p+q, \mathbb{C})$  que deixam invariante a forma Hermitiana

$$Z^t K_{p,q} \bar{Z}, \text{ isto é, } g^t K_{p,q} g = K_{p,q}.$$

-  $Sp(n) = Sp(0, n) = Sp(n, 0) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$ .

Todos os grupos listados anteriormente são grupos de Lie (subgrupos de Lie do grupo linear  $GL(n, \mathbb{C})$ ), com as respectivas álgebras de Lie dadas abaixo.

-  $gl(n, \mathbb{C}), (gl(n, \mathbb{R}))$ : (matrizes complexas (reais)  $n \times n$ ).

-  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), (\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ : (matrizes complexas (reais)  $n \times n$  de traço 0).

-  $\mathfrak{u}(p, q)$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \bar{Z}_2^t & Z_3 \end{pmatrix}; Z_1, Z_3 \text{ anti-Hermitiana de ordem } p \text{ e } q, \right.$   
 $\left. \text{respectivamente, } Z_2 \text{ arbitrária} \right\}$ .

-  $\mathfrak{su}(p, q)$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \bar{Z}_2^t & Z_3 \end{pmatrix}; Z_1, Z_3 \text{ anti-Hermitiana de ordem } p \text{ e } q, \right.$   
 $\left. \text{respectivamente, } \text{tr}(Z_1) + \text{tr}(Z_3) = 0, Z_2 \text{ arbitrária} \right\}$ .

-  $\mathfrak{su}^*(2n)$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}; Z_1, Z_2 \text{ matrizes complexas } n \times n, \right.$   
 $\left. \text{tr}(Z_1) + \text{tr}(\bar{Z}_1) = 0 \right\}$ .

-  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ : (matrizes complexas  $n \times n$  anti-simétricas).

-  $\mathfrak{so}(p, q)$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^t & X_3 \end{pmatrix}; X_1, X_3 \text{ matrizes reais, } X_1, X_3 \text{ anti-simétricas} \right.$   
 $\left. \text{de ordem } p \text{ e } q, \text{ respectivamente, } X_2 \text{ arbitrária} \right\}$ .

-  $\mathfrak{so}^*(2n)$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}; Z_1, Z_2 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), Z_1 \text{ anti-Hermitiana,} \right.$   
 $\left. Z_2 \text{ Hermitiana} \right\}$ .

-  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^t \end{pmatrix}; Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \right.$   
 $\left. Z_2, Z_3 \text{ simétricas} \right\}$ .

-  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^t \end{pmatrix}; X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \right.$   
 $\left. X_2, X_3 \text{ simétricas} \right\}$ .

$$- \mathfrak{sp}(p,q): \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cccc} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ \bar{Z}_{12}^t & Z_{22} & Z_{14}^t & Z_{24} \\ -\bar{Z}_{13} & \bar{Z}_{14} & \bar{Z}_{11} & -\bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{14}^t & -\bar{Z}_{24} & -Z_{13}^t & \bar{Z}_{22} \end{array} \right) ; \left. \begin{array}{l} Z_{ij} \text{ matriz complexa; } Z_{11} \\ \text{e } Z_{13} \text{ de ordem } p, Z_{12} \text{ e} \\ Z_{14} \text{ matrizes } p \times q, Z_{11} \text{ e} \\ Z_{22} \text{ anti-Hermitianas, } Z_{13} \\ \text{e } Z_{14} \text{ simétricas} \end{array} \right\}$$

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita, sobre  $\mathbb{R}$  ou

$\mathbb{C}$ .

-  $\mathfrak{gl}(V)$ : Aplicações lineares de  $V$  em  $V$ .

-  $GL(V)$ : Aplicações lineares não-singulares de  $V$  em  $V$ .

-  $\text{ger}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ : O subespaço gerado pelos vetores  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $V$ .

Seja  $M$  uma variedade diferenciável, espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e atlas  $C^\infty$ .

-  $T_p M$ : O espaço vetorial dos vetores tangentes à  $M$  em  $p$ .

-  $\mathcal{X}(M)$ : O espaço vetorial dos campos de vetores  $C^\infty$  tangentes à  $M$ .

-  $C^\infty(M)$ : O anel das funções  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

## 1.INTRODUÇÃO

Um modelo estatístico ou uma família parametrizada de probabilidades é uma família de distribuições de probabilidades  $\{p(\theta, x)\}_{\theta \in M}$  onde:

(i)  $x$  é uma variável pertencente ao espaço amostral  $X$ ;

(ii)  $M$  é uma variedade  $n$ -dimensional (variedade dos parâmetros);

(iii)  $\int_X p(\theta, x) d\mu = 1$ , para cada  $\theta \in M$ , com  $\mu$  medida de base.

Exemplo 1.1 (Modelo Normal): A família de distribuições de probabilidades é dada por:

$$p(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2},$$

onde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $d\mu = dx$  medida de Lebesgue,  $\theta = (m, \sigma)$  com média  $m$  e desvio padrão  $\sigma$  e a variedade dos parâmetros sendo

$$M = \{\theta = (m, \sigma) \in \mathbb{R}^2; \sigma > 0\}.$$

Exemplo 1.2 (Modelo Multinomial): Seja

$$x \in X = \{1, 2, \dots, n+1\},$$

e  $p_i = P(x = i)$  probabilidade de  $x$  ser igual à  $i$ . Temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$$

com  $0 < p_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ .

Tomemos  $\theta_1 = p_1$ ,  $\theta_2 = p_2, \dots$ ,  $\theta_{n+1} = p_{n+1}$ .

Assim

$$p(\theta, x) = \sum_{i=1}^{n+1} \delta(x-i) \theta_i,$$

onde

$$\delta(x-i) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = i \\ 0, & \text{se } x \neq i \end{cases}$$

com

$$M = \{(\theta_1, \dots, \theta_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / 0 < \theta_i < 1, \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i = 1, i = 1, \dots, n+1\},$$

ou, através da mudança de coordenadas

$$\xi_i = 2 \sqrt{\theta_i}, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

o octante positivo da esfera  $n$ -dimensional de raio 2.

Exemplo 1.3 (Família Exponencial): Este exemplo tem como caso particular o modelo normal. A família de probabilidades é dada por

$$p(\theta, x) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \theta_i x_i - \psi(\theta)\right\},$$

onde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  são dados adequadamente e  $\psi(\theta)$  é tomado de tal forma a fazer que

$$\int_{\mathcal{X}} p(\theta, x) d\mu = 1.$$

Por exemplo, no modelo normal  $\theta_1 = m/\sigma^2$ ,  $\theta_2 = -1/(2\sigma^2)$ ,  
 $x_1 = x$ ,  $x_2 = x^2$  e

$$\psi(\theta) = -\frac{\theta_1^2}{4\theta_2} - \frac{1}{2} \log(-\theta_2) + \frac{1}{2} \log n.$$

Em 1945, Rao [17], introduziu pela primeira vez uma métrica Riemanniana em um modelo estatístico, com o objetivo de calcular a distância geodésica entre duas distribuições, para vários modelos estatísticos.

Apesar disso, não se entendia bem as implicações do conceito de curvatura Riemanniana de um modelo estatístico.

Somente em 1972, Chentsov [8] desenvolveu um novo conceito de variedade estatística, ao invés de trabalhar apenas com a conexão Riemanniana, como fizeram os outros. A teoria estatística desenvolvida pelo Chentsov, mostrou-se consistente e elucidou a estrutura geométrica da família exponencial. Entretanto, ele não observou que a curvatura dada por esta família de conexões, desempenhava um papel central, na "teoria assintótica de alta ordem" em inferência estatística.

Foi Efron [10], em 1975, independente de Chentsov, quem definiu o conceito de curvatura estatística de um modelo estatístico, o qual demonstrou ser aplicável à teoria acima.

Sob a influência deste trabalho Amari [1], introduziu uma família a um parâmetro de conexões afins, a qual chamou de  $\alpha$ -conexões e provou ser equivalente a definida por Chentsov.

Vamos então definir estes conceitos, segundo Amari [3].

Seja  $\{p(\theta, x)\}_{\theta \in M}$  um modelo estatístico e  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  um sistema de coordenadas locais de  $M$  em  $\theta$ . Denotemos por  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$

Para cada  $\theta \in M$ , seja

$$E_{\theta} [f(x)] = \int_{\mathcal{X}} f(x) p(\theta, x) d\mu,$$

a esperança da variável aleatória  $f(x)$ .

Suponhamos que as seguintes condições, chamadas condições de regularidade, sejam satisfeitas:

(i) Todas as funções  $p(\theta, x)$  tem um suporte comum  $\mathcal{X}$ , tal que  $p(\theta, x) > 0$ , para todo  $x \in \mathcal{X}$ .

(ii) Seja

$$l(\theta, x) = \log p(\theta, x).$$

Para cada  $\theta \in M$ , as  $n$  funções em  $x$

$$\partial_i l = \partial_i l(\theta, x), \quad i = 1, \dots, n,$$

são linearmente independentes.

(iii) Os momentos das variáveis aleatórias  $\partial_i l$ , existem até a ordem necessária, isto é,  $E_{\theta} [(\partial_i l)^k]$  existem para  $k = 1, 2, 3, \dots$

(iv) Para qualquer função  $f(\theta, x)$  considerada, vale

$$\partial_i \int_{\mathcal{X}} f(\theta, x) d\mu = \int_{\mathcal{X}} \partial_i f(\theta, x) d\mu.$$

Observação 1.4: Como  $\int_{\mathbf{x}} p(\theta, \mathbf{x}) d\mu = 1$ , temos por (iv),

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i \int_{\mathbf{x}} p(\theta, \mathbf{x}) d\mu = \int_{\mathbf{x}} \partial_i p(\theta, \mathbf{x}) d\mu = \\ &= \int_{\mathbf{x}} \partial_i l(\theta, \mathbf{x}) p(\theta, \mathbf{x}) d\mu = E_{\theta} [\partial_i l]. \end{aligned}$$

De acordo com (ii), para cada  $\theta \in M$ , podemos considerar o espaço vetorial  $n$ -dimensional gerado pelas  $n$  variáveis aleatórias  $\partial_i l(\theta, \mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dado por

$$T_{\theta}^{(4)} = \left\{ \Lambda(\mathbf{x}) / \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\theta) \partial_i l(\theta, \mathbf{x}) \right\}.$$

Seja  $T_{\theta} = T_{\theta} M$ , o espaço tangente à  $M$  em  $\theta$ . Sabemos que  $T_{\theta}$  também é um espaço vetorial  $n$ -dimensional, gerado pelos vetores  $\partial_i$ . Podemos então definir um isomorfismo entre  $T_{\theta}$  e  $T_{\theta}^{(4)}$  por

$$\partial_i \in T_{\theta} \longleftrightarrow \partial_i l(\theta, \mathbf{x}) \in T_{\theta}^{(4)}.$$

Portanto, a cada vetor tangente

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n a_i(\theta) \partial_i \in T_{\theta},$$

corresponde uma variável aleatória

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\theta) \partial_i l(\theta, \mathbf{x}) \in T_{\theta}^{(4)},$$

tendo as mesmas coordenadas  $a_i(\theta)$ . O espaço  $T_{\theta}^{(4)}$  é chamado a  $i$ -representação do espaço tangente  $T_{\theta}$ .

Definimos então uma métrica Riemanniana em um modelo estatístico, chamada métrica de Fisher, pelo produto interno

$$1.5 \quad \langle A, B \rangle_{\theta} = E_{\theta} [A(x)B(x)],$$

onde  $A(x)$  e  $B(x)$  são as 1-representações de  $A$  e  $B$  respectivamente, ou em coordenadas locais

$$1.6 \quad \epsilon_{ij}(\theta) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_{\theta} = E_{\theta} [\partial_i \partial_j 1]$$

$\theta \in M$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Ou ainda

$$1.7 \quad \epsilon_{ij}(\theta) = - E_{\theta} [\partial_i \partial_j 1],$$

onde usamos o fato de que

$$\partial_i \partial_j 1 = \partial_i \partial_j p / p - \partial_i \partial_j 1.$$

Tomando  $q(\theta, x) = p(\theta, x)^{1/2}$ , podemos tomar (1.6) também como

$$1.8 \quad \epsilon_{ij}(\theta) = 4 \int_x \partial_i q(\theta, x) \partial_j q(\theta, x) d\mu.$$

Por exemplo, no modelo normal a métrica de Fisher é dada por

$$\epsilon_{ij}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto o modelo normal com esta métrica é um espaço hiperbólico.

Já o modelo multinomial é uma parte da esfera  $n$ -dimensional de raio 2 do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Observação 1.9: A métrica de Fisher pode ser definida de uma forma mais geral, utilizando o conceito de imersão no espaço de Hilbert  $L^2$ , isto é,  $L^2$ -diferenciabilidade e injetividade da diferencial da aplicação  $\theta \longrightarrow q(\theta, \cdot)$ , de  $M$  em  $L^2$  (veja Marques, San Martín (17)).

Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (A, B) &\longrightarrow \nabla(A, B) = \nabla_A B \end{aligned}$$

tal que  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ,  $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$(i) \nabla_{fA+gB} C = f \nabla_A C + g \nabla_B C;$$

$$(ii) \nabla_A (B+C) = \nabla_A B + \nabla_A C;$$

$$(iii) \nabla_A (fB) = f \nabla_A B + A(f)B.$$

Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$ , chamada conexão de Levi-Civita, ou Riemanniana, tal que  $\forall A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\nabla_A B - \nabla_B A = [A, B] \text{ (torção nula)}$$

e

$$A_g(B, C) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C) \text{ (compatibilidade com a métrica } g)$$

Seja  $\nabla$  a conexão Riemanniana do modelo estatístico.

Logo,  $\forall \theta \in M$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk}(\theta) &= \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle_{\theta} = \frac{1}{2} (\partial_i \epsilon_{jk} + \partial_j \epsilon_{ki} - \partial_k \epsilon_{ij}) \\ &= E_{\theta} \left[ \partial_i \partial_j \partial_k \right] + \frac{1}{2} E_{\theta} \left[ \partial_i \partial_j \partial_k \right].\end{aligned}$$

Definimos então as  $\alpha$ -conexões por

$$1.9 \quad \Gamma_{ijk}^{(\alpha)}(\theta) = \Gamma_{ijk}(\theta) - \frac{\alpha}{2} T_{ijk}(\theta)$$

com  $\theta \in M$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , onde

$$1.10 \quad T_{ijk}(\theta) = E_{\theta} \left[ \partial_i \partial_j \partial_k \right]$$

define um tensor simétrico de 3<sup>a</sup> ordem.

Ou ainda,

$$\nabla_A^{(\alpha)} B = \nabla_A B - \frac{\alpha}{2} \tilde{T}(A, B),$$

onde  $\nabla^{(\alpha)}$  é a  $\alpha$ -conexão,  $\nabla = \nabla^{(0)}$  é a conexão Riemanniana, sendo

$$1.11 \quad \tilde{T}(A, B, C) = T(A, B, C),$$

$A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ , e  $T$  definido por (1.10).

É fácil ver que  $\nabla^{(\alpha)}$  é realmente uma conexão com torção nula (está provado em Amari [3]).

Observação 1.12: Note que pela observação 1.4, se  $A(x) \in T_{\theta}^{(\alpha)}$  então  $E_{\theta} [A(x)] = 0$ . Como por (1.7),  $E_{\theta} \left[ \partial_i \partial_j \right] \neq 0$ , temos que  $\partial_i \partial_j \in T_{\theta}^{(\alpha)}$ . Logo

$$\Gamma_{ijk}^{(\alpha)}(\theta) = E_{\theta} \left[ (\partial_i \partial_j 1 + \frac{1-\alpha}{2} \partial_i 1 \partial_j 1) \partial_k 1 \right],$$

pode ser interpretado geometricamente como a projeção sobre  $T_{\theta}^{(\alpha)}$ , da família de variáveis aleatórias  $\partial_i \partial_j 1 + \frac{1-\alpha}{2} \partial_i 1 \partial_j 1$ .

Exemplo 1.13: Vejamos as  $\alpha$ -conexões para a família exponencial

$$p(\theta, x) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i x_i - \psi(\theta) \right\},$$

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\psi(\theta)$  como no exemplo 1.3.

Temos que

$$l(\theta, x) = \sum_{i=1}^n \theta_i x_i - \psi(\theta)$$

e então

$$\partial_i l(\theta, x) = x_i - \partial_i \psi(\theta), \quad \partial_i \partial_j l(\theta, x) = - \partial_i \partial_j \psi(\theta).$$

Logo,

$$\xi_{ij}(\theta) = - E_{\theta} \left[ \partial_i \partial_j 1 \right] = \partial_i \partial_j \psi(\theta),$$

$$E_{\theta} \left[ \partial_i \partial_j 1 \partial_k 1 \right] = - \partial_i \partial_j \psi(\theta) E_{\theta} \left[ \partial_k 1 \right] = 0,$$

$$T_{ijk}(\theta) = E_{\theta} \left[ \partial_i 1 \partial_j 1 \partial_k 1 \right] = \partial_i \partial_j \partial_k \psi(\theta).$$

Portanto,

$$\Gamma_{ijk}^{(\alpha)}(\theta) = \frac{1-\alpha}{2} \partial_i \partial_j \partial_k \psi(\theta).$$

Podemos ainda calcular o tensor de curvatura desta

conexão

$$R^{(\alpha)}(A,B,C) = \nabla_A^{(\alpha)} \nabla_B^{(\alpha)} C - \nabla_B^{(\alpha)} \nabla_A^{(\alpha)} C - \nabla_{[A,B]}^{(\alpha)} C, \quad A,B,C \in \mathcal{X}(M),$$

cujas componentes no sistema de coordenadas serão dadas por

$$R_{ijk}^{(\alpha)} = \frac{1-\alpha^2}{4} \sum_{m=1}^n (T_{kmi} T_{jst} - T_{kmj} T_{ist}) e^{mt}.$$

Assim, temos que uma família exponencial é 1-flat e também -1-flat  $\left[ R = 0 \text{ para } \alpha = \pm 1 \right]$ .

Na verdade as  $\alpha$ -conexões possuem uma estrutura dual.

Definição 1.14: Seja  $(M,g)$  uma variedade Riemanniana e  $\nabla$  uma conexão afim de  $M$ . Definimos a conexão dual  $\nabla^*$  de  $\nabla$ , como sendo aquela que satisfaz

$$g(\nabla_A^* B, C) = Ag(B, C) - g(B, \nabla_A C), \quad A,B,C \in \mathcal{X}(M).$$

Lauritzen [15] (ou Amari [3]), provou que

- (i)  $\nabla^*$  é uma conexão;
- (ii)  $\nabla^* = \nabla^{(-\alpha)}$ ;
- (iii)  $(M, \nabla)$  é flat se e somente se  $(M, \nabla^*)$  é flat.

Consequentemente, um modelo estatístico é  $\alpha$ -flat se e somente se é  $-\alpha$ -flat.

Blaesild [6], tratou das  $\alpha$ -conexões como caso particular de uma certa família de tensores, originadas de um "yoke".

Nosso objetivo aqui será estudar as  $\alpha$ -conexões em famílias de probabilidades parametrizadas por um grupo de Lie  $G$ , definidas a seguir.

Suponhamos que  $X$  seja uma variedade onde  $G$  atua transitivamente. Podemos então considerar cada  $g \in G$ , como um difeomorfismo

$$\begin{aligned} g: X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow g(x) = gx \end{aligned}$$

de tal modo que o elemento neutro  $e \in G$  é a identidade de  $X$  e  $goh = gh$ .  $G$  atua também nas probabilidades definidas nos Borelianos de  $X$  por:

Sejam  $g \in G$ ,  $\mu$  uma probabilidade e  $A$  um Boreliano; então

$$g\mu(A) = \mu(g^{-1}(A)).$$

Se  $g\mu \ll \mu \ll g\mu$  então  $\{g\mu\}_{g \in G}$ , define uma família de probabilidades com distribuição de probabilidade dada por

$$p(g,x) = \frac{dg\mu}{d\mu}(x)$$

derivada de Radon-Nykodin, tendo  $\mu$  por medida de base.

Este modelo é chamado um modelo transformacional, segundo Barndorff-Nielsen [4].

Na verdade, para evitar duplicidade de parâmetros

(pensando em termos de imersão, injetividade da diferencial), o espaço dos parâmetros deve ser tomado como sendo um espaço homogêneo  $G/K$ , com  $K \subset G$  subgrupo compacto maximal tal que  $k\mu = \mu$ ,  $\forall k \in K$ .

Assim, nosso objetivo será estudar as  $\alpha$ -conexões em um modelo transformacional  $\langle \xi, \mu \rangle_{\xi \in G/K}$ .

Para começar, no capítulo 2, desenvolvemos resultados básicos da teoria das álgebras de Lie semi-simples complexas e reais e consequentemente da teoria dos grupos de Lie semi-simples e dos espaços simétricos.

O capítulo 3 está voltado para o estudo dos polinômios invariantes pelo grupo de Weyl, das álgebras de Lie semi-simples.

No capítulo 4, provamos então os seguintes resultados:

Proposição 4.1.9: A métrica de Fisher do modelo transformacional

$\langle \xi, \mu \rangle_{\xi \in G/K}$  é  $G$ -invariante e dada por

$$\langle \tilde{A}(\xi_0), \tilde{B}(\xi_0) \rangle_{\xi_0} = \int_X \tilde{A}(e, x) \tilde{B}(e, x) \mu(dx),$$

onde  $\xi_0 = eK$ ,  $A, B \in T_e G$  e

$$\tilde{A}(e, x) = \left. \frac{d}{dt} l(e^{tA}, x) \right|_{t=0}.$$

Proposição 4.2.10: Seja  $\langle \xi, \mu \rangle_{\xi \in G/K}$  um modelo transformacional

parametrizado por um espaço simétrico  $M = G/K$  (do tipo I ou do tipo III, veja tabela IV, pg.47). Se  $A, B \in \mathfrak{g} \cong T_{\xi_0} M$  então a métrica de Fisher é um múltiplo da métrica canônica do espaço simétrico  $M$ , isto é,

$$\langle A, B \rangle_{\xi_0} = \frac{|\lambda_{x_0}|^2}{\dim \mathfrak{g}} \text{tr}(\text{ad}(A)\text{ad}(B)),$$

onde  $\lambda_{x_0}$  é o funcional definido em  $\mathfrak{g}$  por  $\lambda_{x_0}(A) = \tilde{\Delta}(e, x_0)$ .

**Teorema 4.3.4:** O tensor  $T$ , dado por (1.10), de um modelo transformacional parametrizado por um espaço simétrico  $M$ ,  $\langle \xi, \mu \rangle_{\xi \in M}$  é não nulo apenas nos casos em que  $M$  for um dos espaços abaixo:

	Não-compacto	Compacto
AI	$SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$	$SU(n)/SO(n)$
AII	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$SU(2n)/Sp(n)$
EIV	$(e_{\alpha-2\theta}, f_4)$	$(e_{\alpha-7\theta}, f_4)$

**Teorema 4.3.6:** As  $\alpha$ -conexões de um modelo transformacional  $\langle \xi, \mu \rangle_{\xi \in M}$  com  $M$  espaço simétrico do tipo AI ou AII, são dadas por

$$\nabla_A^{(\alpha)} B = \frac{\alpha}{2} \gamma \left( \frac{AB+BA}{2} - \frac{\text{tr}(AB)}{m} I_m \right),$$

onde  $m = n$  ou  $m = 2n$  respectivamente,  $A, B \in \mathfrak{g}$  e  $\gamma$  é uma constante real.

Ainda no capítulo 4, calculamos as  $\alpha$ -conexões para os seguintes exemplos de modelos transformacionais: Modelo de Von Mises-Fisher, modelo hiperboloide, modelos normais, modelos parametrizados por  $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$  com espaço amostral dado por esferas, Grassmannianas ou flags.

Para finalizar, na tentativa de compreender a geometria das  $\alpha$ -conexões dadas pelo teorema 4.3.6, provamos então no capítulo 5, as seguintes propriedades geométricas:

(i) Subvariedades totalmente geodésicas.

(ii) Conexões não-completas.

(iii) O tensor curvatura  $\left[ \begin{matrix} (\alpha) \\ R(A, B, C), A, B, C \in \mathfrak{g} \end{matrix} \right]$  e todas as suas derivadas covariantes, estão no subespaço gerado por A e B.

(iv) Conexões não-compatíveis com métrica alguma.

(v) O tensor de Ricci é nulo.

(vi) Estas conexões não são projetivamente equivalentes à uma variedade flat, nem a um espaço simétrico afim, isto é, possuem geodésicas distintas destes dois tipos de variedades.

## 2.ÁLGEBRAS DE LIE, GRUPOS DE LIE E ESPAÇOS SIMÉTRICOS

Neste capítulo, apresentamos resultados básicos da teoria das álgebras e grupos de Lie, que serão necessários no desenvolver deste trabalho. Na seção 2.1, mostramos como se classificam as álgebras de Lie simples complexas e reais. Na seção 2.2, damos resultados básicos da teoria dos grupos de Lie. Por fim, na seção 2.3, apresentamos a classificação dos espaços simétricos.

### 2.1. ÁLGEBRAS DE LIE

Definição 2.1.1: Uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{C}$ , ou uma álgebra de Lie complexa, é um espaço vetorial complexo  $\mathfrak{g}$ , junto com uma operação bilinear  $[ \ , \ ]$ , denominada o colchete de Lie, definida por

$$\begin{aligned} [ \ , \ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longrightarrow [ \ , \ ](X, Y) = [X, Y] \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(i)  $[X, Y] = - [Y, X] \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ ;

(ii) Identidade de Jacobi:  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

O exemplo mais claro de álgebra de Lie complexa é dado pelo conjunto de todas as matrizes complexas de ordem  $n$ ,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , com o colchete de Lie definido por:

$$[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  dá origem á quatro classes de álgebras de Lie, as chamadas álgebras de Lie clássicas, a saber:

$\mathfrak{o}_n$  - Álgebra de Lie das matrizes de traço zero:

$$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C}); \text{tr}(A) = 0\}.$$

$\mathfrak{b}_n$  - Álgebra de Lie ortogonal em dimensão ímpar:

$$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) = \{B \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}); B = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -y^t & X & Y \\ -x^t & Z & -X^t \end{pmatrix}\},$$

onde  $x, y$  são matrizes complexas  $1 \times n$ ,  $X, Y, Z$  são matrizes  $n \times n$ , com  $Y$  e  $Z$  anti-simétricas.

$\mathfrak{c}_n$  - Álgebra de Lie simplética:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{C \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}); C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^t \end{pmatrix}\},$$

onde  $X, Y, Z$  são matrizes complexas  $n \times n$ , com  $Y$  e  $Z$  simétricas.

$\mathfrak{d}_n$  - Álgebra de Lie ortogonal em dimensão par:

$$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \{ D \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}); D = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^t \end{pmatrix} \},$$

onde  $X, Y, Z$  são matrizes complexas  $n \times n$ , com  $Y$  e  $Z$  anti-simétricas.

Dois conceitos básicos no estudo das álgebras de Lie são os de representação adjunta e a forma de Cartan-Killing.

Definição 2.1.2: A representação adjunta de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , é a aplicação linear definida por

$$\begin{array}{l} \text{ad: } \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X \longrightarrow \text{ad}(X): \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y \longrightarrow \text{ad}(X)(Y) = [X, Y] \end{array}$$

Definição 2.1.3: A forma de Cartan-Killing é a forma bilinear simétrica  $(\ , \ )$ , definida por:  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$

$$(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)).$$

Esta forma caracteriza um certo tipo muito importante de álgebras de Lie.

Proposição 2.1.4: Uma álgebra de Lie é semi-simples se, e somente se, sua forma de Cartan-Killing é não degenerada.

A prova desta proposição, bem como dos resultados adiante, podem ser encontradas em qualquer texto básico de álgebras de Lie (por exemplo, as referências [12], [13], [18] e

[19]).

Um exemplo de álgebra de Lie semi-simples é dado pelas álgebras de Lie simples, que são aquelas que não possuem ideais não triviais. As álgebras clássicas  $\mathfrak{a}_n$ ,  $\mathfrak{b}_n$ ,  $\mathfrak{c}_n$  e  $\mathfrak{d}_n$  são simples. Mais geralmente, temos:

Teorema 2.1.5 (W. Killing-E. Cartan): Qualquer álgebra de Lie simples é isomorfa a uma das álgebras clássicas  $\mathfrak{a}_n$  ( $n \geq 1$ ),  $\mathfrak{b}_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\mathfrak{c}_n$  ( $n \geq 3$ ),  $\mathfrak{d}_n$  ( $n \geq 4$ ), ou as álgebras de Lie excepcionais  $\mathfrak{g}_2$ ,  $\mathfrak{f}_4$ ,  $\mathfrak{e}_6$ ,  $\mathfrak{e}_7$ ,  $\mathfrak{e}_8$ .

Teorema 2.1.6: Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples. Então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$$

com  $\mathfrak{g}_i$  ideais simples de  $\mathfrak{g}$  e

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \text{ger}(\{X_i, X_j\}; \forall X_i \in \mathfrak{g}_i, X_j \in \mathfrak{g}_j) = 0,$$

para todo  $i, j = 1, \dots, n$ .

As álgebras simples podem ser descritas também via diagramas de Dynkin. A tabela I a seguir, apresenta as álgebras de Lie simples complexas  $\mathfrak{g}$  e seus respectivos diagramas de Dynkin.



é válido, mas a classificação das álgebras de Lie simples reais é um refinamento do teorema 2.1.5. As álgebras de Lie simples reais classificam-se via formas reais das álgebras de Lie simples complexas. Nosso próximo passo é apresentarmos esta classificação. Para isso, faz-se necessário mais alguns resultados.

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , de dimensão finita. Uma estrutura complexa em  $V$  é uma aplicação linear  $J: V \rightarrow V$  tal que  $J^2 = -I$ , onde  $I$  é a aplicação identidade de  $V$ . Um espaço vetorial  $V$  com uma estrutura complexa  $J$ , torna-se um espaço vetorial complexo  $V^{\mathbb{C}}$ , definindo-se o produto escalar por

$$(a+ib)X = aX + bJX, \quad X \in V, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, se  $V$  é um espaço vetorial complexo, podemos considerá-lo como um espaço vetorial real,  $V^{\mathbb{R}}$ . A multiplicação por  $i$  em  $V$ , torna-se então uma estrutura complexa  $J$  em  $V^{\mathbb{R}}$ , e é claro que  $(V^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = V$ .

Dizemos que uma álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}_0$ , tem uma estrutura complexa  $J$ , se  $J$  é uma estrutura complexa do espaço vetorial  $\mathfrak{g}_0$  e

$$[JX, JY] = J[X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_0.$$

O espaço vetorial complexo  $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ , torna-se uma álgebra de Lie complexa, com o colchete com o colchete de Lie dado por

$$[(a+ib)X, (c+id)Y] = (a+ib)(c+id)[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, supondo  $\mathfrak{g}$  um álgebra de Lie complexa, o espaço vetorial real  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ , tem uma estrutura complexa  $J$ , dada pela multiplicação por  $i$  em  $\mathfrak{g}$ . Com o colchete de Lie induzido por  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  torna-se uma álgebra de Lie real com estrutura complexa  $J$ .

Definição 2.1.8: Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie complexa. Uma forma real de  $\mathfrak{g}$  é uma subálgebra  $\mathfrak{g}_0$  da álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ , tal que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i \mathfrak{g}_0.$$

Logo, cada  $Z \in \mathfrak{g}$ , escreve-se unicamente por

$$Z = X + iY, \quad X, Y \in \mathfrak{g}_0.$$

Por exemplo, o conjunto das matrizes anti-Hermitianas de traço zero,  $\mathfrak{su}(n+1)$ , é uma forma real das álgebras de Lie  $\mathfrak{a}_n$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} \sigma: \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Z &\longrightarrow \sigma(Z) = X - iY \end{aligned}$$

é então um automorfismo de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  ( $\rho \in \mathfrak{GL}(\mathfrak{g})$  é automorfismo se  $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$ ), chamado de conjugação de  $\mathfrak{g}$  em relação à  $\mathfrak{g}_0$ .

Definição 2.1.9: Uma álgebra de Lie semi-simples real é dita

compacta, quando sua forma de Cartan-Killing é negativa definida.

Teorema 2.1.10: Toda álgebra de Lie semi-simples complexa  $\mathfrak{g}$ , tem uma forma real compacta  $\mathfrak{u}$ .

$\mathfrak{su}(n+1)$  é uma forma real compacta para as álgebras  $\mathfrak{a}_n$ .

Definição 2.1.11: Seja  $\mathfrak{g}_0$  uma álgebra de Lie semi-simples real e  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ . Uma decomposição em soma direta

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{s}$$

com  $\mathfrak{t}$  subálgebra e  $\mathfrak{s}$  subespaço vetorial de  $\mathfrak{g}_0$ , é uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ , se existe  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ , forma real compacta, tal que

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_0 \text{ e } \mathfrak{s} = i\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_0.$$

Teorema 2.1.12: Toda álgebra de Lie semi-simples real  $\mathfrak{g}_0$ , admite uma decomposição de Cartan. Além disso, se

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{s}_1, \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_2 \oplus \mathfrak{s}_2,$$

são duas decomposições de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ , então existe  $\varphi: \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$  automorfismo interno, tal que

$$\varphi(\mathfrak{t}_1) = \mathfrak{t}_2 \text{ e } \varphi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2.$$

Teorema 2.1.13: Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples complexa e  $\mathfrak{u}$  uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ . Se  $\sigma: \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$  é um automorfismo

involutivo (isto é,  $\sigma^2 = I$ ,  $\sigma \neq I$ ), então:

$$(i) \quad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}; \quad \sigma(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y} \in \mathfrak{u}; \quad \sigma(\mathfrak{Y}) = -\mathfrak{Y} \\ &= \mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{X} \end{aligned}$$

(ii)  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{X}$  é uma forma real não-compacta, e esta é uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ .

(iii) Toda forma real não-compacta é deste tipo.

As demonstrações dos teoremas 2.1.10, 2.1.12 e 2.1.13 podem ser encontradas em [12].

O teorema 2.1.13 aplicado as álgebras de Lie simples complexas, nos dá a classificação das álgebras de Lie simples reais. Como exemplo, vejamos o que acontece com as álgebras de Lie simples complexas do tipo  $\mathfrak{a}_n$ .

Temos que,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$  é uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$  é  $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n+1)$ . Assim,

AI- Tomando  $\sigma: \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$  definida por  $\sigma(X) = \bar{X}$ , temos as álgebras de Lie simples reais do tipo AI dadas por

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(n+1) \oplus \mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}),$$

onde  $\mathfrak{s}$  é o conjunto das matrizes simétricas de traço zero.

AII- Suponhamos  $n+1 = 2l$  e seja

$$\begin{aligned} \sigma: u &\longrightarrow u \\ X &\longrightarrow \sigma(X) = J_n \bar{X} J_n^{-1} \end{aligned}$$

Então,

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(l)$$

e

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}; \begin{array}{l} A \text{ é uma matriz } l \times l, \text{ Hermitiana} \\ \text{de traço zero e } B \in \mathfrak{so}(l, \mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

com

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s} = \mathfrak{su}^*(2l).$$

AIII- Suponhamos  $p+q = n+1$  e tomemos  $\sigma: u \longrightarrow u$ , definida por

$$\sigma(X) = I_{p,q} X I_{p,q}. \text{ Assim,}$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}; A \in \mathfrak{u}(p), B \in \mathfrak{u}(q), \text{tr}(A+B) = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & C \\ -\bar{C} & 0 \end{bmatrix}; C \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C}) \right\}$$

e

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s} = \mathfrak{su}(p,q).$$

A tabela II seguinte, apresenta a classificação das álgebras de Lie simples reais  $\mathfrak{g}_0$ , descritas pelos diagramas de Dynkin (última coluna à direita da tabela II) e diagramas de Satake (coluna do meio da tabela II).

TABELA II

AI						
AII			$(l = 2l_s + 1, l_s > 1)$			
AIII			$(2 < l_s < \frac{l}{2})$			
			$(l = 2l_s - 1, l_s \geq 2)$			
AIV						
BI			$(l = 2, 2 < l_s < l)$			
BII						
CI						
CII			$(l > 3, 1 < l_s < \frac{l-1}{2})$			
			$(l = 2l_s, l_s \geq 2)$			
DI			$(l = 4, 2 < l_s < l - 2)$			
DII						
DIII			$(l = 2l_s, l_s \geq 2)$			
			$(l = 2l_s + 1, l_s \geq 2)$			
EI						

TABELA II

(Cont.)

EII		$\circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$ $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$
EIII		$\circ \Rightarrow \circ$ $\lambda_1 \lambda_2$
EIV		$\circ - \circ$ $\lambda_1 \lambda_2$
EV		
EVI		$\circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$ $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$
EVII		$\circ \Rightarrow \circ - \circ$ $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
EVIII		
EIX		$\circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$ $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$
FI		$\circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$
FII		$\circ$ $\lambda_1$
G		$\circ \Rightarrow \circ$

## 2.2. GRUPOS DE LIE

Um grupo de Lie  $G$ , é uma variedade diferenciável com estrutura de grupo, tal que as operações "produto",  $(g,h) \rightarrow gh$ , e "inversa",  $g \rightarrow g^{-1}$ , são difeomorfismos.

Se  $g \in G$  então as aplicações

$$R_g: G \longrightarrow G, \quad L_g: G \longrightarrow G, \\ h \longmapsto hg, \quad h \longmapsto gh$$

chamadas translação à direita e translação à esquerda, respectivamente, são difeomorfismos. Do mesmo modo, a aplicação

$$\text{Ad}(g): G \longrightarrow G \\ h \longmapsto g h g^{-1}$$

é um difeomorfismo. Observemos que,  $\text{Ad}(g)(e) = e$ , onde  $e$  é a identidade de  $G$ .

Um campo  $X$  invariante à direita em  $G$  é um campo tal que

$$(dR_g)_h X(h) = X(hg),$$

onde  $(dR_g)_h: T_h G \longrightarrow T_h G$  é a diferencial de  $R_g$ , no ponto  $h \in G$ . De modo análogo,  $X$  é dito invariante à esquerda se  $(dL_g)_g X = X$ . Para se conhecer campos invariantes (à direita ou à esquerda), é suficiente conhecê-los na identidade  $e \in G$  ( $X(g) = (dR_g)_e X(e)$ ). A mesma coisa acontece com o fluxo: Fixamos  $A \in T_e G$  e denotamos

também por  $A$ , o único campo invariante à direita cujo valor em  $e$  é  $A$  (daqui por diante trabalhamos com campos invariante à direita, a teoria à esquerda é equivalente). Denotemos por  $\exp tA$  ou  $e^{tA}$  a curva solução de  $A$ , passando pela identidade, quando  $t = 0$ . Então a curva solução de  $A$  passando por  $g$  (quando  $t = 0$ ), é  $e^{tA} g$ .

Por translações à direita, qualquer espaço tangente  $T_g G$ , é descrito por  $T_e G$ . Além disso,  $T_e G$  define uma álgebra de Lie com o colchete de Lie dado pelo colchete de campos de vetores em uma variedade ( $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $[X, Y]f = (XY)f - (YX)f$ ).

Voltemos a aplicação  $Ad(g)$ . Sua diferencial define uma aplicação linear inversível, também denotada por  $Ad(g)$ ,

$$Ad(g): T_e G \longrightarrow T_g G,$$

que satisfaz,

$$Ad(g)[X, Y] = [Ad(g)X, Ad(g)Y].$$

Temos ainda que,

$$2.2.0 \quad e^{tAd(g)A} = g e^{tA} g^{-1}.$$

Um subgrupo de Lie  $H$ , de um grupo de Lie  $G$ , é uma subvariedade que é um subgrupo de  $G$ , com a restrição das aplicações produto e inversa à  $H$ , sendo difeomorfismos. A álgebra de Lie de  $H$  é então uma subálgebra da álgebra de Lie de  $G$ .

Se  $G$  é um grupo de Lie e  $H$  é um subgrupo algébrico e subconjunto fechado (subgrupo fechado) de  $G$ , então  $H$  é um subgrupo de Lie de  $G$ .

Assim,  $M = G/H = \{gH; g \in G\}$  (classes laterais à esquerda de  $H$ ) tem uma estrutura de variedade diferenciável de tal forma que a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi: G &\longrightarrow G/H \\ g &\longrightarrow gH \end{aligned}$$

pertence a  $C^\infty(G)$ .  $M$  é então chamada um espaço homogêneo.

Exemplos de espaços homogêneos podem ser obtidos por ações transitivas de grupos de Lie.

Definição 2.2.1: Dizemos que um grupo de Lie  $G$ , age em uma variedade  $M$ , se existe uma aplicação diferenciável  $\eta: G \times M \longrightarrow M$  indicada por  $\eta(g,x) = gx$ , tal que:

- (i)  $ex = x$ ;
- (ii)  $(gh)x = g(hx)$ .

Neste caso,  $\eta$  é chamada uma ação de  $G$  em  $M$ . Dada uma ação  $\eta$  de  $G$  em  $M$ , definimos a órbita de um ponto  $x \in M$ , como sendo o conjunto

$$O_x = \{gx; g \in G\}.$$

Dizemos que a ação  $\eta$  é transitiva, ou que  $G$  age transitivamente

em  $M$  através de  $\eta$ , se  $O_x = M$  para todo  $x \in M$ , isto é, para todo  $x, y \in M$ , existe  $g \in G$ , tal que  $gx = y$ . Para todo  $x_0 \in M$ , definimos o grupo de isotropia do ponto  $x_0$ ,

$$G_{x_0} = \{g \in G; gx_0 = x_0\}.$$

$G_{x_0}$  é um subgrupo fechado de  $G$  e temos,

Teorema 2.2.2: Seja  $\eta: G \times M \longrightarrow M$  uma ação transitiva de um grupo de Lie  $G$  na variedade  $M$ . Sejam  $x_0 \in M$  e  $H = G_{x_0}$ . Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \beta: G/H &\longrightarrow M \\ gh &\longrightarrow \eta(g, x_0) = gx_0 \end{aligned}$$

Então  $\beta$  é um difeomorfismo.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [20].

O teorema 2.2.2, nos fornece vários exemplos de espaços homogêneos, a saber:

(1)  $S^n$ , a esfera  $n$ -dimensional.

$SO(n+1)$  atua transitivamente em  $S^n$  por multiplicação de matrizes

$$\begin{aligned} \eta: SO(n+1) \times S^n &\longrightarrow S^n \\ (A, v) &\longrightarrow Av \end{aligned}$$

e temos então

$$S^n \cong \frac{SO(n+1)}{SO(n)}$$

(ii)  $S_m(n)$  o conjunto dos  $m$ -referencias ortonormais orientados do  $\mathbb{R}^n$ , isto é, se  $u_1, \dots, u_m$  são vetores ortonormais orientados em  $\mathbb{R}^n$

$$S_m(n) = \{ \tilde{u} = (u_1, \dots, u_m); m \leq n \},$$

chamada variedade de Stiefel.

$$S_m(n) \cong \frac{SO(n)}{SO(n-m)}$$

onde a ação é dada por

$$\begin{aligned} \eta: SO(n) \times S_m(n) &\longrightarrow S_m(n) \\ (A, \tilde{u}) &\longrightarrow A \cdot \tilde{u} = (A \cdot u_1, \dots, A \cdot u_m) \end{aligned}$$

(iii)  $Gr_m(n)$  a variedade de Grassman, ou Grassmanniana,

$Gr_m(n) = \{m\text{-planos orientados do } \mathbb{R}^n, \text{ passando pela origem}\}.$

$$\begin{aligned} SO(n) \times Gr_m(n) &\longrightarrow Gr_m(n) \\ (A, P) &\longrightarrow A(P) = \{A \cdot x; x \in P\} \end{aligned}$$

define uma ação transitiva de  $SO(n)$  em  $Gr_m(n)$ , com grupo de isotropia  $H$  de  $P_0$ , o  $m$ -plano gerado pelo conjunto  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , onde  $e_i$  são os vetores canônicos do  $\mathbb{R}^n$ , dado por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in SO(n); A \in SO(m) \text{ e } B \in SO(n-m) \right\},$$

que pode ser identificado com  $SO(m) \times SO(n-m)$ . Portanto,

$$Gr_m(n) \cong \frac{SO(n)}{SO(m) \times SO(n-m)}$$

Dado o espaço homogêneo  $M = G/K$ ,  $G$  atua transitivamente em  $M$  por

$$g(hk) = (gh)k$$

e, para cada  $g \in G$ , a aplicação

$$\begin{aligned} g: M &\longrightarrow M \\ x &\longrightarrow g(x) = gx \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

Seja  $A$  um campo invariante à direita em  $G$  ( $A \in T_\bullet G$ ). Se  $hk \in M$ ,  $e^{tA} hk$  define um fluxo em  $M$ . Derivando-se em relação à  $t$ , e tomando  $t = 0$ , obtém-se um campo  $\tilde{A}$  em  $M$ . Assim,  $\forall x \in M$ ,

$$T_x M = \langle \tilde{A}(x); A \in T_\bullet G \rangle$$

isto é, os elementos da álgebra de Lie de  $G$ , descrevem os elementos dos espaços tangentes à  $M$ .

Vimos acima que, cada  $g \in G$ , define um difeomorfismo e então faz sentido escrever  $(dg)_x(\tilde{A}(x))$ , para  $x \in M$ . Esta aplicação satisfaz

$$2.2.3 \quad (dg)_x(\tilde{A}(x)) = (Ad(g)(A))^\sim(gx)$$

Definição 2.2.4: Um grupo de Lie é dito semi-simples (simples), se

sua Álgebra de Lie é semi-simples (simples).

Por exemplo, os grupos  $SL(n, \mathbb{R})$  e  $SO(n)$  são simples.

Os grupos de Lie semi-simples admitem uma decomposição de Cartan.

Teorema 2.2.5: Seja  $G$  um grupo de Lie semi-simples conexo e  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie, cuja decomposição de Cartan é  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{s}$ . Se  $K$  é um subgrupo de  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{t}$

$$S = \{ \exp(Y) \in G; Y \in \mathfrak{s} \},$$

então

$$G = S K.$$

Além disso, a aplicação

$$(Y, Z) \in \mathfrak{s} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \exp(Y)Z \in G,$$

é um difeomorfismo.

Algumas informações adicionais com relação à  $K$ , podem ser dadas.

Proposição 2.2.6: Se  $K \subset G$  tem álgebra de Lie  $\mathfrak{t}$ , então:

(1)  $K$  é compacto se, e somente se,

$$Z(G) = \{ h \in G; hg = gh, \forall g \in G \},$$

o centro de  $G$ , é finito.

(ii) Se  $K$  é compacto então ele é compacto maximal.

Como era de se esperar, a noção de álgebra de Lie compacta, está associada ao conceito de grupo de Lie compacto.

Teorema 2.2.7: Uma álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$ , é compacta se, e somente se, existe um grupo de Lie compacto  $G$ , com álgebra de Lie isomorfa a  $\mathfrak{g}$ .

Para terminar esta seção, definiremos o conceito de grupo de Lie redutível.

Definição 2.2.8: Uma álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$ , é dita uma álgebra de Lie redutível se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

onde

$$\mathfrak{z} = \{X \in \mathfrak{g}; [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

o centro de  $\mathfrak{g}$ , é um ideal semi-simples.

Um grupo de Lie é redutível, quando sua álgebra de Lie é redutível. Um exemplo de grupo de Lie redutível é dado pelo grupo das matrizes com determinante não nulo,  $GL(n, \mathbb{R})$ . Sua álgebra de Lie,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , decompõe-se em

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{ger}(\mathbb{I}_n) \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

G escreve-se então

$$G = A \text{ SL}(n, \mathbb{R}),$$

onde A é uma matriz múltipla da identidade de ordem n.

### 2.3. ESPAÇOS SIMÉTRICOS

Seja M uma variedade Riemanniana. Uma aplicação  $s: M \longrightarrow M$  é chamada involutiva, quando  $s \neq I$  (aplicação identidade) e  $s^2 = I$ .

Definição 2.3.1: Uma variedade Riemanniana M é chamado um espaço simétrico, se cada  $p \in M$  é um ponto fixo isolado de uma isometria involutiva  $s_p$  de M.

Quando M é um espaço simétrico, temos que o grupo das isometrias de M,  $I(M)$ , é um grupo de Lie. Além disso, vale:

Teorema 2.3.2: Seja M um espaço simétrico e  $p_0 \in M$ .

(1) Se  $G = I_0(M)$  é a componente conexa que contém a identidade do grupo de Lie  $I(M)$ , e K é o grupo de isotropia de G em  $p_0$  então K é um subgrupo compacto de G e  $G/K$  é difeomorfa a M.



(ii)  $\sigma$  é um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{g}$ .

(iii)  $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = X\}$  é uma subálgebra compactamente mergulhada de  $\mathfrak{g}$ , isto é, o subgrupo conexo do grupo adjunto de  $\mathfrak{g}$ , cuja álgebra de Lie é  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ , é compacto.

Se além disso,  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ , onde  $\mathfrak{z}$  é o centro de  $\mathfrak{g}$ ,

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  é dita uma álgebra de Lie efetiva.

Um par  $(G, K)$ , onde  $G$  é um grupo de Lie conexo, com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , e  $K$  é um subgrupo de Lie de  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ , é dito um par associado com a álgebra de Lie simétrica ortogonal  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$ .

Tomando-se  $K$  conexo e  $G$  simplesmente conexo, o par  $(G, K)$  associado a álgebra de Lie simétrica ortogonal  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$ , dá origem então ao espaço simétrico  $G/K$ .

As álgebras de Lie simétricas ortogonais decompõem-se em três outras álgebras, as quais são do tipo compacto, não-compacto e Euclídiano.

Definição 2.9.4: Seja  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  uma álgebra efetiva. Seja  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{s}$  uma decomposição de  $\mathfrak{g}$  em autoespaços de  $\sigma$  para os autovalores 1 e -1 respectivamente.

(i) Se  $\mathfrak{g}$  é compacta e, conseqüentemente semi-simples,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  é

dita do tipo compacto.

(ii) Se  $\mathfrak{g}$  é semi-simples não-compacta e  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  é uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , então  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  é dita do tipo não-compacto.

(iii) Se  $\mathfrak{a}$  é um ideal abeliano em  $\mathfrak{g}$ , então  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  é dita do tipo Euclidiano.

O par  $(\mathfrak{G}, K)$  associado a  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  é dito do tipo compacto, do tipo não-compacto ou do tipo Euclidiano, de acordo com o tipo de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$ .

Existe uma importante dualidade entre o tipo compacto e o tipo não-compacto. Seja  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  uma álgebra de Lie simétrica ortogonal e tomemos  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  tal que

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}.$$

Denotemos por  $\mathfrak{g}^*$  o subconjunto  $\mathfrak{k} + i\mathfrak{s}$  do complexificado  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  de  $\mathfrak{g}$ . Com o colchete de Lie induzido por  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{g}^*$  é uma álgebra de Lie real. A aplicação

$$\begin{aligned} \sigma^* : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ X+iY &\longrightarrow X-iY \end{aligned}$$

$X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{s}$  é um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{g}^*$ . Temos então que

**Teorema 2.3.5:** Seja  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$  uma álgebra de Lie simétrica ortogonal. Então

(i)  $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}^*, \sigma^*)$  é uma álgebra de Lie simétrica ortogonal chamada de

dual de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \sigma)$ .

(ii) Se  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \sigma)$  é do tipo compacto, então  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \sigma)$  é do tipo não-compacto e vice-versa.

Do ponto de vista de irredutibilidade ( $\mathfrak{f}$  é uma subálgebra simples maximal), as álgebras de Lie simétricas ortogonais do tipo compacto e do tipo não-compacto, classificam-se da seguinte forma:

Teorema 2.3.6: As álgebras de Lie simétricas ortogonais irredutíveis do tipo compacto são:

I.  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \sigma)$  onde  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie simples compacta e  $\sigma$  é um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{g}$ .

II.  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \sigma)$  onde a álgebra de Lie compacta  $\mathfrak{g}$  é a soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2,$$

de ideais simples tais que  $\sigma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$ ,  $\sigma(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_1$ , com  $\sigma$  um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{g}$ .

Enquanto que as álgebras de Lie simétricas ortogonais irredutíveis do tipo não-compacto são:

III.  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \sigma)$  onde  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie simples não-compacta real, cujo complexificado  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  é uma álgebra de Lie simples complexa e  $\sigma$  é um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{g}$ , tal que  $\mathfrak{f}$  forma uma subálgebra compactamente mergulhada de  $\mathfrak{g}$ .

IV.  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \sigma)$  onde  $\mathfrak{g} = I^{\mathbb{R}}$ ,  $I$  sendo uma álgebra de Lie simples

complexa e  $\sigma$  é a conjugação de  $\mathfrak{g}$  em relação à subálgebra compactamente mergulhada maximal.

Além disso, se  $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{t}^*, \sigma^*)$  denota o dual de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, \sigma)$ ,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, \sigma)$  é do tipo III se, e somente se,  $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{t}^*, \sigma^*)$  é do tipo I,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, \sigma)$  é do tipo IV se, e somente se,  $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{t}^*, \sigma^*)$  é do tipo II.

Assim, os espaços simétricos não-compacto do tipo IV são os espaços  $G/K$ , onde  $G$  é um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ , com  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie simples complexa, e  $K$  é um subgrupo compacto maximal de  $G$ . Por dualidade, os espaços simétricos do tipo II, são os grupos de Lie  $K$ , conexos, compactos, simples (tabela III a seguir).

TABELA III  
ESPAÇOS SIMÉTRICOS DO TIPO II E DO TIPO IV

$\mathfrak{g}$	$G$	$K$
$\mathfrak{a}_n$ ( $n \geq 1$ )	$SL(n+1, \mathbb{C})$	$SU(n+1)$
$\mathfrak{b}_n$ ( $n \geq 2$ )	$SO(2n+1, \mathbb{C})$	$SO(2n+1)$
$\mathfrak{c}_n$ ( $n \geq 3$ )	$Sp(n, \mathbb{C})$	$Sp(n)$
$\mathfrak{d}_n$ ( $n \geq 4$ )	$SO(2n, \mathbb{C})$	$SO(2n)$
$\mathfrak{g}_2$	$G_2^{\mathbb{C}}$	$G_2$
$\mathfrak{f}_4$	$F_4^{\mathbb{C}}$	$F_4$
$\mathfrak{e}_6$	$E_6^{\mathbb{C}}$	$E_6$
$\mathfrak{e}_7$	$E_7^{\mathbb{C}}$	$E_7$
$\mathfrak{e}_8$	$E_8^{\mathbb{C}}$	$E_8$

Enquanto que os espaços simétricos do tipo I e do tipo III são da seguinte forma:

TABELA IV  
ESPAÇOS SIMÉTRICOS DO TIPO I E DO TIPO III

	NÃO-COMPACTO	COMPACTO
AI	$SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$	$SU(n)/SO(n)$
AII	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$SU(2n)/Sp(n)$
AIII	$SU(p, q)/S(U_p \times U_q)$	$SU(p+q)/S(U_p \times U_q)$
BDI	$SO_0(p, q)/SO(p) \times SO(q)$	$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$
DIII	$SO^*(2n)/U(n)$	$SO(2n)/U(n)$
CI	$Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$	$Sp(n)/U(n)$
CII	$Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$	$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$
G	$(g_{2(2)}, su(2) \oplus su(2))$	$(g_{2(-14)}, su(2) \oplus su(2))$
FI	$(f_{4(4)}, sp(3) \oplus su(2))$	$(f_{4(-52)}, sp(3) \oplus su(2))$
FII	$(f_{4(-20)}, so(9))$	$(f_{4(-52)}, so(9))$
EI	$(e_{\alpha(2)}, sp(4))$	$(e_{\alpha(-78)}, sp(4))$
EII	$(e_{\alpha(2)}, su(6) \oplus su(2))$	$(e_{\alpha(-78)}, su(6) \oplus su(2))$
EIII	$(e_{\alpha(-14)}, so(10) \oplus \mathbb{R})$	$(e_{\alpha(-78)}, so(10) \oplus \mathbb{R})$
EIV	$(e_{\alpha(-2\alpha)}, f_4)$	$(e_{\alpha(-78)}, f_4)$
EV	$(e_{7(7)}, su(8))$	$(e_{7(-199)}, su(8))$

TABELA IV  
(Cont.)

EVI	$(e_{7(-5)}, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(e_{7(-123)}, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$
EVII	$(e_{7(-25)}, e_{\sigma} \oplus \mathbb{R})$	$(e_{7(-123)}, e_{\sigma} \oplus \mathbb{R})$
EVIII	$(e_{8(8)}, \mathfrak{so}(16))$	$(e_{8(-248)}, \mathfrak{so}(16))$
EIX	$(e_{8(-24)}, e_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(e_{8(-248)}, e_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$

Todos os resultados apresentados nesta seção estão demonstrados em [12].

Observação 2.3.7: Observemos que a classificação dos espaços simétricos dos tipos II e IV, está associada a classificação das álgebras de Lie simples complexas (tabelas I e III), enquanto que os tipos I e III, com a classificação das álgebras de Lie simples reais (tabelas II e IV).

### 3. POLINÔMIOS INVARIANTES PELO GRUPO DE WEYL

O objetivo deste capítulo é estabelecer a proposição 3.3.1, que afirma que os polinômios de 3<sup>o</sup> grau, invariantes pelo grupo de Weyl das álgebras de Lie simples reais existem apenas para as álgebras do tipo AI, AII, EIV. Na seção 3.1, definimos o grupo de Weyl de um espaço Euclidiano  $V$ . Na seção 3.2, mostramos como obter-se o grupo de Weyl das álgebras de Lie simples. Finalmente, na seção 3.3, definimos o que vem a ser um polinômio invariante pelo grupo de Weyl das álgebras de Lie simples, e chegamos à proposição 3.3.1.

#### 3.1. GRUPO DE WEYL

Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$  com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (um espaço Euclidiano),  $\alpha \in V$ ,  $\alpha \neq 0$ . Seja  $\omega_\alpha$  a reflexão em relação ao hiperplano ortogonal à  $\alpha$ , isto é,

$$\omega_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha, \quad \forall \beta \in V.$$

Definição 3.1.1: Um subconjunto  $\Phi \subset V$  é um sistema de raízes em  $V$ , se as seguintes condições verificam-se:

(i)  $\Phi$  é um conjunto de vetores não nulos de  $V$ .

(ii)  $\Phi$  gera  $V$ .

(iii) Se  $\alpha, \beta \in \Phi$  então  $\omega_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}$ .

(iv) Se  $\alpha, \beta \in \Phi$  então  $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$ .

Definição 3.1.2: Seja  $\Phi$  um sistema de raízes em  $V$ . Chamamos de grupo de Weyl de  $\Phi$ , e denotamos por  $W_\Phi$  (ou simplesmente  $W$ , caso não haja ambiguidade), o grupo gerado pelas reflexões  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ .

Observação 3.1.3: Observemos que em um grupo de Weyl  $W_\Phi$ , vale:

(i)  $W_\Phi$  é um grupo finito;

(ii)  $\forall \alpha \in \Phi$ ,  $\omega_\alpha(\Phi) \subset \Phi$ ;

(iii)  $W_\Phi$  é um grupo de transformações ortogonais.

Na verdade, o grupo de Weyl fica determinado por um certo tipo de sistema de raízes, o qual descrevemos a seguir.

Definição 3.1.4: Um subconjunto  $\pi \subset \Phi$  é chamado um sistema fundamental de raízes, quando:

(i)  $\pi$  é linearmente independente;

(ii) se  $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  e  $\alpha \in \Phi$ , então  $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$  onde  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  e

$\lambda_i \geq 0$  ou  $\lambda_i \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Sejam  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  base de  $V$  e  $V^*$  o conjunto de todos os

vetores  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$  cujo primeiro coeficiente diferente de zero,  $\lambda_i$ , é positivo. Temos então um relação de ordem dada por  $\alpha_1 > \alpha_2$  quando  $\alpha_1 - \alpha_2 \in V$ .

Definição 3.15: Um sistema de raízes  $\Phi$  é chamado positivo quando

$$\Phi^+ = \Phi \cap V^+.$$

Proposição 3.1.6: Sistemas positivos de raízes estão em correspondência biunívoca com sistemas fundamentais.

Proposição 3.1.7:  $W_\Phi = W_\pi$  com  $\pi$  sistema fundamental.

As provas das proposições 3.1.6 e 3.1.7 estão em [7].

### 3.2. GRUPO DE WEYL DAS ÁLGEBRAS DE LIE SIMPLES

Sabemos da teoria das álgebras de Lie simples complexas  $\mathfrak{g}$ , que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_l},$$

onde  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{g}$  (subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ),  $\alpha_i$  são os pesos de  $\text{ad}\mathfrak{h}$  (isto é,  $\alpha_i: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazem

$$\text{ad}(H) X = \alpha_i(H) X$$

para  $H \in \mathfrak{h}$ ,  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ ,  $X \neq 0$  e  $i = 1, \dots, k$ , também chamados de raízes de  $\mathfrak{g}$  relativa a  $\mathfrak{h}$ , e

$$\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1, \forall i = 1, \dots, k.$$

Apesar das raízes  $\alpha_i$  serem definidas como elementos do espaço dual  $\mathfrak{h}^*$  de  $\mathfrak{h}$ , elas podem ser vistas como elementos de  $\mathfrak{h}$ , via forma de Cartan-Killing  $(\ , \ )$  (que é não degenerada pois a álgebra é simples),

$$\alpha_i(H) = (H, H_{\alpha_i}) \quad \forall H \in \mathfrak{h}, \text{ com } H_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}, i = 1, \dots, k.$$

Consideremos então as raízes como elementos de  $\mathfrak{h}$  e seja  $\Phi$  um subconjunto finito de  $\mathfrak{h}$ . Temos que  $\Phi$  gera  $\mathfrak{h}$  e que se escolhermos qualquer subconjunto de  $\Phi$  que seja uma base para  $\mathfrak{h}$ , então cada elemento de  $\Phi$  é uma combinação linear das raízes neste subconjunto, com coeficientes em  $\mathbb{Q}$ .

Denotemos por  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  o conjunto de todos elementos de  $\mathfrak{h}$ , que são combinações lineares dos elementos de  $\Phi$ , com coeficientes reais. Assim,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}.$$

Temos também que a forma de Cartan-Killing restrita a  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  é positiva definida e logo,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  torna-se um espaço Euclidiano.

Finalmente, pode ser provado que  $\Phi$  é um sistema de raízes de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  nos moldes da definição 3.1.1.

A tabela V apresenta as álgebras de Lie simples complexas  $\mathfrak{g}$  e a correspondente ordem do grupo de Weyl  $|W|$ , de  $\mathfrak{g}$ .

TABELA V

$\mathfrak{g}$	$ W $
$\mathfrak{a}_n$ ( $n \geq 1$ )	$(n+1)!$
$\mathfrak{b}_n$ ( $n \geq 2$ )	$2^n \cdot n!$
$\mathfrak{c}_n$ ( $n \geq 3$ )	$2^n \cdot n!$
$\mathfrak{d}_n$ ( $n \geq 4$ )	$2^{n-1} \cdot n!$
$\mathfrak{g}_2$	12
$\mathfrak{f}_4$	$2^7 \cdot 3^2$
$\mathfrak{e}_6$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$
$\mathfrak{e}_7$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
$\mathfrak{e}_8$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

### 3.3. POLINÔMIOS INVARIANTES PELO GRUPO DE WEYL

Sejam  $W$  um grupo de Weyl atuando no espaço Euclidiano  $V$  e  $e_1, \dots, e_n$  uma base ortonormal de  $V$ . Então, cada  $x \in V$  pode ser escrito na forma

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Dado qualquer polinômio  $P(x_1, \dots, x_n)$  em  $x_1, \dots, x_n$ ,  $P$

pode ser visto como uma aplicação de  $V$  em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\mathcal{P}$  a álgebra de todas estas funções polinomiais em  $V$ .  $\mathcal{P}$  independe da base escolhida para  $V$ . Os polinômios de grau 1 em  $\mathcal{P}$  formam o espaço dual  $V^*$  de  $V$  e  $\mathcal{P}$  é então a álgebra simétrica de  $V^*$  dada por

$$\mathbb{R} \oplus V^* \oplus (V^* \otimes V^*) \oplus (V^* \otimes V^* \otimes V^*) \oplus \dots$$

Agora, a ação de  $W$  em  $V$  pode ser transferida de uma maneira natural, para uma ação em  $V^*$ , definindo  $\omega(f)$ ,  $\omega \in W$ ,  $f \in V^*$ , por

$$\omega(f)(\omega(x)) = f(x), \quad x \in V.$$

A ação de  $W$  em  $V^*$ , pode então ser estendida a uma ação em  $\mathcal{P}$  por

$$\omega(P)(x) = P(\omega^{-1}(x)), \quad P \in \mathcal{P}, \quad x \in V.$$

Uma função polinomial em  $\mathcal{P}$  é chamada um invariante de  $W$ , se

$$\omega(P) = P, \quad \forall \omega \in W.$$

Os invariantes formam um subanel  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{P}$ . Tomando  $\mathcal{P} = \mathbb{R}[I_1, \dots, I_n]$ , prova-se que o subanel dos invariantes é também um anel polinomial, isto é,  $\mathcal{S} = \mathbb{R}[I_1, \dots, I_n]$  onde  $I_1, \dots, I_n$  são certos elementos de  $\mathcal{S}$ .

Por exemplo, o grupo de Weyl das álgebras do tipo  $\mathfrak{a}_n$  é isomorfo ao grupo  $S_{n+1}$  (grupo das permutações de  $n+1$  elementos), como vimos na tabela V. Ele é melhor descrito atuando no espaço Euclidiano  $n+1$ -dimensional, com base ortonormal  $e_0, e_1, \dots, e_n$ ,

cujos elementos satisfazem

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0.$$

Os elementos de  $W$  atuam em  $V$ , permutando as coordenadas  $x_0, \dots, x_n$  de todas as maneiras possíveis. Assim os polinômios invariantes são os polinômios simétricos elementares

$$p_0 = x_0 + x_1 + \dots + x_n, \quad p_1 = \sum_{i < j} x_i x_j, \\ p_2 = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k, \dots, \quad p_n = x_0 x_1 \dots x_n.$$

Como,  $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0$ , temos  $\mathcal{S} = \mathbb{R}[I_1, \dots, I_n]$ , onde  $I_i$  é o polinômio simétrico elementar de grau  $i+1$ .

Por outro lado, nas álgebras do tipo  $b_n$ , o grupo de Weyl atua no espaço Euclidiano com base ortonormal  $e_1, \dots, e_n$ , permutando as coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ , de todas as maneiras possíveis e trocando de sinal arbitrariamente. Assim, os polinômios invariantes são os polinômios simétricos elementares em

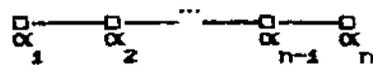
$x_1^2, \dots, x_n^2$ . Logo,  $\mathcal{S} = \mathbb{R}[I_1, \dots, I_n]$ , onde  $I_i$  é o  $i$ -ésimo polinômio simétrico elementar em  $x_1^2, \dots, x_n^2$ .

A tabela VI seguinte, apresenta o grau dos geradores da álgebra dos polinômios invariantes pelo grupo de Weyl das álgebras simples complexas  $\mathfrak{g}$ .

TABELA VI

$g$	GRAU DOS INVARIANTES
$a_n$	2, 3, ..., $n+1$
$b_n, c_n$	2, 4, ..., $2n$
$d_n$	2, 4, ..., $2n-2, n$
$g_2$	2, 6
$f_4$	2, 6, 8, 12
$e_6$	2, 5, 6, 8, 9, 12
$e_7$	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18
$e_8$	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30

Observemos que polinômios invariantes de grau 3, só aparecem em álgebras simples complexas do tipo  $a_n$ , isto é, álgebras simples que apresentam diagrama de Dynkin do tipo



Assim, no caso das álgebras reais, estes polinômios aparecem nas álgebras do tipo AI, AII e EIV (veja tabela II, pgs.31 e 32).

Portanto, temos que

**Proposição 3.3.1:** Polinômios de  $3^o$  grau, invariantes pelo grupo de Weyl das álgebras de Lie simples reais, são não nulos apenas para as álgebras AI, AII e EIV.

## 4. MODELOS TRANSFORMACIONAIS

Neste capítulo calculamos as  $\alpha$ -conexões para vários tipos de modelos transformacionais  $\{\mu\}_{\xi \in \mathbb{B}/K}$ . Primeiramente, em (4.1), calculamos a métrica de Fisher. As seções (4.2) e (4.3) tratam dos modelos transformacionais com o espaço dos parâmetros sendo um espaço simétrico. Em (4.2) calculamos a métrica de Fisher em termos da métrica canônica do espaço simétrico, para em (4.3) encontrarmos as  $\alpha$ -conexões. Finalmente, em (4.4), calculamos explicitamente as  $\alpha$ -conexões para alguns exemplos de modelos transformacionais.

### 4.1. MÉTRICA DE FISHER

Seja  $G$  um grupo de Lie e  $X$  uma variedade onde  $G$  atua transitivamente. Podemos então considerar cada  $g \in G$ , como um difeomorfismo

$$\begin{aligned} g: X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow g(x) = x \end{aligned}$$

de tal modo que o elemento neutro  $e \in G$  é a identidade de  $X$  e  $goh = gh$ .  $G$  atua também nas probabilidades definidas nos

Borelianos de  $X$  por:

Sejam  $g \in G$ ,  $\mu$  uma probabilidade e  $A$  um Boreliano; então

$$g\mu(A) = \mu(g^{-1}(A)).$$

Esta ação satisfaz

$$(gh)\mu = g(h\mu).$$

Suponhamos  $g\mu \ll \mu \ll g\mu$ . Então, pelo teorema de Radon-Nykodin,  $\{g\mu\}_{g \in G}$ , define uma família de probabilidades parametrizada por  $G$ , chamada de modelo transformacional.

Para cada  $g \in G$ , consideremos a distribuição de probabilidade

$$4.1.1 \quad p(g,x) = \frac{dg\mu}{d\mu}(x).$$

Proposição 4.1.2:  $p(g,x)$  como em (4.1.1) satisfaz

$$4.1.3 \quad p(gh,x) = p(h,g^{-1}x) p(g,x),$$

para  $g,h \in G$  e  $x \in X$ .

Prova: Uma definição alternativa de  $g\mu$  é via a igualdade

$$4.1.4 \quad \int f(x) (g\mu)(dx) = \int (f \circ g)(x) \mu(dx),$$

de onde segue que se  $\mu_1 \ll \mu_2$ , então

$$\frac{dg\mu_1}{dg\mu_2}(x) = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(g^{-1}x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 p(gh, x) &= \frac{dgh\mu(x)}{d\mu} = \frac{dgh\mu(x)}{dg\mu} \frac{dg\mu(x)}{d\mu} = \frac{dh\mu(g^{-1}x)}{d\mu} \frac{dg\mu(x)}{d\mu} \\
 &= p(h, g^{-1}x) p(g, x).
 \end{aligned}$$

■

Funções  $p: G \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfazendo a igualdade em (4.1.3) são denominadas cociclos ou multiplicadores sobre  $X$ . Os cociclos formam uma extensão natural dos homomorfismos de  $G$  em  $\mathbb{R}_+$  (como grupo multiplicativo) e aparecem com frequência na teoria de representação de grupos de Lie (veja por exemplo [11]).

Decorre imediatamente da definição de um cociclo  $p$ , que  $p(e, x) = 1$  para todo  $x \in X$ .

Definição 4.1.5: Seja  $K \subset G$  um subgrupo de Lie de  $G$ . Um cociclo  $p$  é chamado  $K$ -invariante, quando

$$p(k, x) = 1, \quad \forall k \in K.$$

Isto acarreta então

$$p(gk, x) = p(g, x), \quad \forall g \in G, k \in K.$$

Por exemplo, o cociclo dado por (4.1.1) é  $K$ -invariante se e só se  $k\mu = \mu \quad \forall k \in K$ . Sendo assim, o espaço dos parâmetros do modelo transformacional, deve ser tomado como sendo  $M = G/K$ , pois se  $g_1$  pertence a classe lateral  $gK$ ,  $g \in G$ , então  $g_1\mu = g\mu$ . Em  $G$  a métrica de Fisher degenera na direção de  $K$ , o que não acontece em  $M$ , como veremos agora.

Seja

$$l(g,x) = \log p(g,x).$$

Então

$$4.1.6 \quad l(gh,x) = l(h,g^{-1}x) + l(g,x),$$

para todo  $g,h \in G, x \in X$ .

Vimos na seção 2.2, que  $G$  atua transitivamente em  $M$  por

$$g(hK) = (gh)K \in T_{\xi}M = \left\{ \tilde{A}(\xi); A \in T_eG \right\}, \xi \in M.$$

Para cada  $g \in G$ , seja

$$\tilde{A}(g,x) = \left. \frac{d}{dt} l(e^{tA} g, x) \right|_{t=0} \stackrel{4.1.6}{=} \left. \frac{d}{dt} l(e^{tA} gK, x) \right|_{t=0}$$

$$A \in T_eG, x \in X.$$

Proposição 4.1.7: Seja  $K \subset G$  o maior subgrupo compacto de  $G$  tal que  $k\mu = \mu$  para todo  $k \in K$ . Se  $A \in T_eG$  é tal que  $\tilde{A}(\xi) \neq 0$ , então  $\tilde{A}(g,x) \neq 0$ .

Prova: Seja  $\xi = gK \in M$ , isto é,  $\xi = g\xi_0, \xi_0 = eK = K$ . Assim, basta mostrar que se  $A \in T_eG$  é tal que  $\tilde{A}(\xi_0) \neq 0$ , então  $\tilde{A}(g,x) \neq 0$ .

Suponhamos que  $\tilde{A}(e,x) = 0$  para todo  $x \in X$ , e seja

$$\beta(t) = l(e^{tA}, x), t \in \mathbb{R}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\beta'(t) &= \frac{d}{ds} \langle e^{tA} e^{sA}, x \rangle \Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} \left[ \langle e^{sA}, e^{-tA} x \rangle + \langle e^{tA}, x \rangle \right] \Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} \langle e^{sA}, e^{-tA} x \rangle \Big|_{s=0} \\
&= \tilde{A} \langle e, e^{-tA} x \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como  $\beta(0) = 0$ ,  $\beta(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ , isto é,  $\langle e^{tA}, x \rangle = 1$  o que nos dá  $e^{tA} \in K$  ( $t$  pequeno), e portanto,  $\tilde{A}(\xi_0) = 0$ , o que é uma contradição. ■

Logo, a métrica de Fisher, definida no capítulo 1 por (1.5), do modelo transformacional  $(\xi, \mu)_{\xi \in M}$  é dada por

$$\begin{aligned}
4.1.8 \quad \langle \tilde{A}(\xi), \tilde{B}(\xi) \rangle_{\xi} &= E_g \left[ \tilde{A}(g, x) \tilde{B}(g, x) \right] \\
&= \int_x \tilde{A}(g, x) \tilde{B}(g, x) (g\mu)(dx).
\end{aligned}$$

$A, B \in T_{\mathfrak{g}}$ ,  $\xi = gK$ .

Proposição 4.1.9: A métrica de Fisher é  $G$ -invariante, isto é,

$$\langle (dg)_{\xi}(u), (dg)_{\xi}(v) \rangle_{\mathfrak{g}(\xi)} = \langle u, v \rangle_{\xi}, \quad u, v \in T_{\xi}M.$$

Prova: Seja  $\xi = g\xi_0$ ,  $\xi_0 = eK = K$ . Então

$$\langle (dg)_{\xi_0}(\tilde{A}(\xi_0)), (dg)_{\xi_0}(\tilde{B}(\xi_0)) \rangle_{\mathfrak{g}(\xi_0)} \stackrel{(2.2.2)}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (\text{Ad}(g)A)^{\sim}(\xi), (\text{Ad}(g)B)^{\sim}(\xi) \rangle_{\xi} \quad (4.1.8) \\
&= \int_{\mathfrak{X}} (\text{Ad}(g)A)^{\sim}l(g,x) (\text{Ad}(g)B)^{\sim}l(g,x) (g\mu)(dx) \quad (4.1.4) \\
&= \int_{\mathfrak{X}} (\text{Ad}(g)A)^{\sim}l(g,gx) (\text{Ad}(g)B)^{\sim}l(g,gx) \mu(dx).
\end{aligned}$$

Mas por (2.2.0) e a definição de  $\tilde{A}$ ,

$$\begin{aligned}
(\text{Ad}(g)A)^{\sim}l(g,gx) &= \frac{d}{dt} l(e^{t\text{Ad}(g)A} g, gx) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} l(g e^{tA} g^{-1} g, gx) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} l(g e^{tA}, gx) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} [l(e^{tA}, g^{-1} gx) + l(g, gx)] \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} l(e^{tA}, x) \Big|_{t=0} \\
&= \tilde{A}l(e, x).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
4.1.10 \quad \langle (dg)_{\xi_0} (\tilde{A}(\xi_0)), (dg)_{\xi_0} (\tilde{B}(\xi_0)) \rangle &= \int_{\mathfrak{X}} \tilde{A}l(e, x) \tilde{B}l(e, x) \mu(dx) \\
&= \langle \tilde{A}(\xi_0), \tilde{B}(\xi_0) \rangle_{\xi_0}.
\end{aligned}$$

isto é,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é invariante quando se sai de  $\xi_0$ . O resto segue compondo-se esta invariância. ■

Corolário 4.1.11: A métrica de Fisher fica determinada se ela for conhecida em  $\xi_0 = eK$ .

Prova:

$$\langle u, v \rangle_{\xi} = \langle (dg^{-1})_{\xi}(u), (dg^{-1})_{\xi}(v) \rangle_{\xi_0},$$

$$\xi = g\xi_0, u, v \in T_{\xi}M.$$

■

Na próxima seção faremos o cálculo desta métrica no caso em que o espaço dos parâmetros é um espaço simétrico.

#### 4.2. MÉTRICA DE FISHER EM ESPAÇOS SIMÉTRICOS

Daremos agora a expressão da métrica de Fisher de um modelo transformacional parametrizado por um espaço simétrico em termos da métrica deste espaço. Os espaços simétricos que estamos interessados são os não-compactos do tipo I, e por dualidade, os compactos do tipo III (tabela IV, pg.47).

Seja então  $G$  um grupo de Lie simples não-compacto,  $K$  um subgrupo de Lie de  $G$  tal que  $M = G/K$  é o espaço simétrico considerado. Como  $\mu$  é  $K$ -invariante ( $k\mu = \mu, \forall k \in K$ ), e  $K$  é o maior subgrupo que preserva  $\mu$ , temos que, pelo corolário 4.1.11, a métrica de Fisher fica determinada em  $\xi_0 = eK \in M$ . Porém em  $M$  existe uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $G$ -invariante canônica dada por:

Pelo teorema 2.3.2, a projeção canônica  $\pi: G \longrightarrow M$ , induz um isomorfismo entre  $\mathfrak{g}$  e  $T_{\xi_0}M$ , via  $(d\pi)_{\xi_0}$ . Assim, se  $A, B \in \mathfrak{g}$

4.2.1

$$(A, B)_{\xi_0} = \text{tr}(\text{ad}(A)\text{ad}(B)).$$

A questão é comparar a métrica  $(\ , \ )$  com a métrica de Fisher.

Para isto, observemos que se  $k \in K$  então  $k\xi_0 = \xi_0$  e portanto,  $(dk)_{\xi_0} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  é uma aplicação linear dada por

$$(2.2.8) \quad (dk)_{\xi_0}(A) = (\text{Ad}(k)A)^{\sim}(k\xi_0) = \text{Ad}(k)A.$$

Assim, tomando-se diferenciais dos elementos de  $K$ ,  $K$  se representa como um grupo de transformações lineares num espaço vetorial

$$\begin{aligned} dk: K &\longrightarrow \text{gl}(\mathfrak{g}) \\ k &\longrightarrow (dk)_{\xi_0} \end{aligned}$$

Agora usamos os seguintes fatos:

(i) A representação de  $K$  em  $\mathfrak{g}$  é irredutível, isto é, não existe nenhum subespaço  $0 \neq V \neq \mathfrak{g}$  tal que  $dk(V) = V$ , para todo  $k \in K$ .

(ii) Seja  $K$  um grupo compacto de transformações lineares de um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita. Então existe um produto interno  $\langle \ , \ \rangle$  em  $V$ , que é invariante por  $K$  ( $\langle ku, kv \rangle = \langle u, v \rangle$ ,  $\forall k \in K, u, v \in V$ ) e  $K$  é um subgrupo ortogonal. Além disso, se a representação de  $K$  em  $V$  é irredutível, então qualquer produto interno  $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle$  em  $V$ ,  $K$ -invariante é da forma

4.2.2

$$\langle\langle \ , \ \rangle\rangle = c^2 \langle \ , \ \rangle, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

Com estes dois fatos, temos que a métrica de Fisher é essencialmente a mesma que a métrica canônica, isto é,

Proposição 4.2.3: A métrica de Fisher em  $\xi_0$  (e portanto em qualquer  $\xi$ ), é um múltiplo da métrica canônica, isto é,

$$4.2.4 \quad \begin{aligned} \langle A, B \rangle_{\xi_0} &= c^2 \langle A, B \rangle_{\xi_0} \\ &= c^2 \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(A)\operatorname{ad}(B)). \end{aligned}$$

A constante  $c$  em (4.2.2) é dada por

$$c^2 = \frac{\|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2}{n},$$

onde  $v_1, \dots, v_n$  é uma base ortonormal de  $V$  em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e

$$\|v\|^2 = \langle \langle v, v \rangle \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Assim, para determinar  $c$  em (4.2.4), precisamos analisar melhor a norma de Fisher

$$\|A\|^2 = \int_X \langle \tilde{A}(e, x) \rangle^2 \mu(dx), \quad A \in \mathfrak{s} = T_{\xi_0} M.$$

Faremos isso à seguir, no caso específico em que  $K$  atua transitivamente em  $X$ .

Proposição 4.2.5: Seja  $x \in X$  e  $\lambda_x: \mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação linear

definida por

$$\lambda_x(A) = \tilde{\lambda}(e, x) = \left. \frac{d}{dt} \langle e^{tA}, x \rangle \right|_{t=0}.$$

Se  $k \in K$ , então

$$\lambda_{kx} = \lambda_x \circ \text{Ad}(k^{-1}).$$

Prova:

$$\begin{aligned} \lambda_{kx}(A) &= \tilde{\lambda}(e, kx) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle e^{tA}, kx \rangle \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left[ \langle k^{-1} e^{tA} k, x \rangle - \langle k^{-1}, x \rangle \right] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle e^{t \text{Ad}(k^{-1})A}, x \rangle \right|_{t=0} \\ &= \lambda_x(\text{Ad}(k^{-1})A) \end{aligned}$$

para todo  $A \in \mathfrak{g}$ . ■

Logo

$$\|A\|^2 = \int_{\mathfrak{X}} \langle \lambda_x(A) \rangle^2 \mu(dx),$$

•

$$\begin{aligned} 4.2.6 \quad \|A_1\|^2 + \dots + \|A_n\|^2 &= \int_{\mathfrak{X}} (\langle \lambda_x(A_1) \rangle^2 + \dots + \langle \lambda_x(A_n) \rangle^2) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} |\lambda_x|^2 \mu(dx), \end{aligned}$$

onde  $A_1, \dots, A_n$  é uma base ortonormal de  $\mathfrak{g}$  em relação à  $(\cdot, \cdot)$  e  $|\lambda_x|^2$  é a norma no dual de  $\mathfrak{g}$  induzida por  $(\cdot, \cdot)$  (isto é,  $\lambda_x = \langle \lambda_x(A_1) \rangle \varepsilon_1 + \dots + \langle \lambda_x(A_n) \rangle \varepsilon_n$  com  $\varepsilon_i = (A_i, \cdot)$  base ortonormal do dual). Como  $(\cdot, \cdot)$  é invariante pela ação de  $K$  em  $\mathfrak{g}$ , a norma do

dual é invariante pela ação dual de  $K$ , isto é,

$$4.2.7 \quad |\lambda_x \circ \text{Ad}(k^{-1})|^2 = |\lambda_x|^2.$$

Por outro lado, como  $K$  é um grupo compacto, admite uma probabilidade de Haar, isto é, uma medida de probabilidade  $\mu_k$ , invariante por translações à esquerda e à direita (veja [5] ou [8]). Além disso,  $K$  age transitivamente em  $X$  e, pelo teorema 2.2.2,  $X$  é da forma  $X = K/H$  com  $H$  subgrupo fechado de  $K$ . Seja  $\pi: K \rightarrow K/H$  a projeção canônica. Então  $\mu = \pi(\mu_k)$ , isto é, se  $f$  é integrável em  $X$  então

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \int_K f(\pi(k)) \mu_k(dk),$$

ou se  $x_0 = \pi(H)$ ,

$$4.2.8 \quad \int_X f(x) \mu(dx) = \int_K f(kx_0) \mu_k(dk).$$

Assim, (4.2.6) fica

$$\begin{aligned} \|A_1\|^2 + \dots + \|A_n\|^2 &= \int_X |\lambda_x|^2 \mu(dx) \\ &\stackrel{(4.2.8)}{=} \int_K |\lambda_{kx_0}|^2 \mu_k(dk) \\ &\stackrel{(4.2.5)}{=} \int_K |\lambda_{x_0} \circ \text{Ad}(k^{-1})|^2 \mu_k(dk) \\ &\stackrel{(4.2.7)}{=} \int_K |\lambda_{x_0}|^2 \mu_k(dk) \\ &= |\lambda_{x_0}|^2 \end{aligned}$$

com  $x_0 \in X$ , fixado.

Logo,

$$4.2.9 \quad c^2 = \frac{|\lambda_{x_0}|^2}{\dim \mathfrak{g}}$$

para  $x_0 \in X$  fixado.

Portanto, (4.2.4) fica

$$4.2.10 \quad \begin{aligned} \langle A, B \rangle_{\xi_0} &= \frac{|\lambda_{x_0}|^2}{\dim \mathfrak{g}} \langle A, B \rangle_{\xi_0} \\ &= \frac{|\lambda_{x_0}|^2}{\dim \mathfrak{g}} \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(A)\operatorname{ad}(B)) \end{aligned}$$

Observação 4.2.11: Observemos que na expressão da métrica de Fisher, dada por 4.2.10, o único termo que depende especificamente do modelo é  $|\lambda_{x_0}|^2$ .

### 4.3. $\alpha$ -CONEXÕES EM ESPAÇOS SIMÉTRICOS

Vamos agora utilizarmos os resultados desenvolvidos nas seções anteriores e calcularmos as  $\alpha$ -conexões em um modelo transformacional parametrizado por um espaço simétrico.

Sejam então  $G, K, X, M$  e  $\mu$  como na seção (4.2).

Vimos na introdução que as  $\alpha$ -conexões são definidas em um sistema de coordenadas por

$$4.3.0 \quad \begin{aligned} \Gamma_{ijk}^{(\alpha)}(\theta) &= \Gamma_{ijk}^{(0)}(\theta) - \frac{\alpha}{2} T_{ijk}(\theta) \\ &= E_{\theta} \left[ \langle \partial_i \partial_j \rangle + \frac{1-\alpha}{2} \langle \partial_i \partial_j \rangle \partial_k \right] \end{aligned}$$

com  $\theta \in M$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , onde  $\Gamma_{ijk}^{(0)}(\theta)$  é a conexão Riemanniana, a 0-conexão, e

$$4.3.1 \quad T_{ijk}(\theta) = E_{\theta} \left[ \langle \partial_i \partial_j \partial_k \rangle \right],$$

é um tensor simétrico de  $3^{\text{a}}$  ordem. Ou ainda,

$$\nabla_A^{(\alpha)} B = \nabla_A^{(0)} B - \frac{\alpha}{2} \tilde{T}(A, B),$$

onde

$$\langle \tilde{T}(A, B), C \rangle = T(A, B, C), \quad A, B, C \in \mathcal{X}(M),$$

e  $T$  é definido por (4.3.1).

Para começar, observemos que para o caso aqui considerado, (4.3.0) difere da integral em (4.1.8), por apenas mais um termo. Assim, de modo análogo à prova de que a métrica de Fisher é  $G$ -invariante, segue que as  $\alpha$ -conexões são  $G$ -invariantes, isto é,

$$\langle dg \rangle_{\xi} \left[ \nabla_A^{(\alpha)} B \right] = \nabla_{\langle dg \rangle_{\xi}(A)}^{(\alpha)} \langle dg \rangle_{\xi}(B), \quad A, B \in T_{\xi} M.$$

Logo, é suficiente conhecer  $\Gamma_{ijk}^{(\alpha)}(\xi_0)$  onde  $\xi_0 = eK = K$  é

a identidade em M.

Porém, em um espaço simétrico  $\overset{(0)}{\nabla}_A B = 0$ , para  $A, B \in \mathfrak{g} = T_{\zeta_0} M$  (veja [13], volII, pg.230).

Portanto,

$$\overset{(0)}{\Gamma}_{ijk}(\zeta_0) = -\frac{\alpha}{2} T_{ijk}(\zeta_0),$$

ou seja,

$$\langle \overset{(0)}{\nabla}_A B, C \rangle_{\zeta_0} = -\frac{\alpha}{2} T(A, B, C)_{\zeta_0}, \quad A, B, C \in \mathfrak{g}.$$

Vamos então estudar o tensor simétrico de 3<sup>a</sup> ordem

$$4.3.2 \quad T(A, B, C)_{\zeta_0} = \int_X \tilde{A}(e, x) \tilde{B}(e, x) \tilde{C}(e, x) \mu(dx)$$

com  $A, B, C \in \mathfrak{g}$ .

Temos que T é um tensor invariante pela ação de G pois  $\overset{(0)}{\nabla}$  e  $\overset{(0)}{\nabla}$  são G-invariantes. Em particular,  $T(A, B, C)_{\zeta_0}$  é K-invariante.

Como T define um tensor simétrico de 3<sup>a</sup> ordem, por polarização, é suficiente encontrar

$$4.3.3 \quad P(A) = T(A, A, A)_{\zeta_0} = \int_X (\tilde{A}(e, x))^3 \mu(dx).$$

Assim, (4.3.3) define um polinômio em  $A \in \mathfrak{g}$ , de 3<sup>o</sup> grau, K-invariante, ou um polinômio invariante pelo grupo de Weyl de  $\mathfrak{g}$ . Mas, vimos na proposição 3.3.1, que estes polinômios só aparecem

nos casos em que  $\theta$  é do tipo AI, AII, EIV. Portanto, temos

**Teorema 4.3.4:** O tensor  $T$ , dado por (4.3.1), de um modelo transformacional parametrizado por um espaço simétrico  $M$ ,  $\{\xi, \mu\}_{\xi \in M}$ , é não nulo apenas nos casos em que  $M$  for um dos espaços abaixo:

	Não-compacto	Compacto
AI	$SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$	$SU(n)/SO(n)$
AII	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$SU(2n)/Sp(n)$
EIV	$(e_{\sigma(-2\sigma)}, f_4)$	$(e_{\alpha-7\beta}, f_4)$

Faremos agora o cálculo das  $\alpha$ -conexões para  $\{\xi, \mu\}_{\xi \in M}$  com  $M$  dado por AI e AII. O caso EIV decorre de uma álgebra de Lie excepcional e não será tratado aqui.

1º CASO:  $M = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ .

Então  $\mathfrak{g}$  é o conjunto das matrizes reais de ordem  $n$ , simétricas e de traço zero.

Vejamos então quem é (4.3.3). Vimos na seção (3.3), que o conjunto dos polinômios invariantes pelo grupo de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , é gerado pelo polinômio simétrico de grau 3

$$4.3.5 \quad \sigma_3(A) = \sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k,$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são autovalores de  $A$  e  $n \geq 3$ , pois se  $n = 2$  então

$\sigma_2(A) = 0$ . Mais precisamente,  $\sigma_2$  é o único polinômio invariante pelo grupo de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , cuja restrição as matrizes diagonais  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  é dado por (4.3.5). Porém, se  $A$  não é diagonal, ou diagonalizamos  $A$  ou então  $\sigma_2(A)$  é o coeficiente de  $\lambda^{n-2}$  no polinômio característico de  $A$ . Podemos escrever  $\sigma_2(A)$  ainda por:

Seja  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  com  $\text{tr}(A) = 0$ . Então

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j=1}^n \lambda_i \lambda_j + \sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \\ &= \text{tr}(A^2) + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \sum_{i < j} \lambda_j + \sigma_2(A) \\ &= \text{tr}(A^2) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sigma_2(A), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sigma_2(A) = \frac{1}{3} \text{tr}(A^2)$$

Assim, todo polinômio invariante pelo grupo de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , de grau 3, é da forma

$$P(A) = \tau \text{tr}(A^3), \tau \in \mathbb{R}.$$

Voltemos agora ao tensor

$$T(A, B, C) = \langle \tilde{T}(A, B), C \rangle, A, B, C \in \mathfrak{g}.$$

Seja  $S: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow$  (matrizes reais simétricas) definida

por

$$S(A, B) = \gamma \frac{(AB+BA)}{2},$$

onde  $\gamma = \frac{\tau}{c^2}$ ,  $c^2$  dado por (4.2.4). Então,

$$\langle S(A,A), A \rangle = \langle \gamma A^2, A \rangle \stackrel{(4.2.4)}{=} \gamma c^2 \operatorname{tr}(A^3),$$

isto é,

$$\langle S(A,A), A \rangle = P(A) = T(A,A,A).$$

Como  $\tilde{T}$  e  $S$  são simétricos,  $\tilde{T}(A,B)$  é então a projeção ortogonal de  $\gamma \frac{(AB+BA)}{2}$  sobre  $\mathfrak{s}$ , ou seja,

$$\tilde{T}(A,B) = \gamma \left[ \frac{AB+BA}{2} - \frac{\operatorname{tr}(AB)}{n} I_n \right]$$

e logo

$$\begin{aligned} \stackrel{(\alpha)}{\nabla_A} B &= - \frac{\alpha}{2} \tilde{T}(A,B) \\ &= - \frac{\alpha}{2} \gamma \left[ \frac{AB+BA}{2} - \frac{\operatorname{tr}(AB)}{n} I_n \right]. \end{aligned}$$

No caso em que  $K$  age transitivamente em  $X$ , uma expressão mais explícita pode ser obtida da seguinte maneira:

De acordo com (4.2.8) e pela proposição 4.2.5, (4.3.2)

fica

$$\begin{aligned} T(A,B,C)_{\xi_0} &= \int_K \tilde{A}(e, kx_0) \tilde{B}(e, kx_0) \tilde{C}(e, kx_0) \mu_k(dk) = \\ &= \int_K \lambda_{x_0}(\operatorname{Ad}(k^{-1})A) \lambda_{x_0}(\operatorname{Ad}(k^{-1})B) \lambda_{x_0}(\operatorname{Ad}(k^{-1})C) \mu_k(dk) \end{aligned}$$

Porém, para  $x_0 \in X$  fixado,  $\lambda_{x_0}$  é um elemento do dual de

$\mathfrak{s}$  e portanto pode ser escrito por

$$\lambda_{\xi_0}(A) = (A, A_0)$$

com  $A_0 \in \mathfrak{g}$  fixado e  $(, )$  produto interno em  $\mathfrak{g}$  dado por (4.2.1).

Consequentemente,  $T(A, B, C)_{\xi_0}$  fica

$$T(A, B, C)_{\xi_0} = \int_K (\text{Ad}(k^{-1})A, A_0) (\text{Ad}(k^{-1})B, A_0) (\text{Ad}(k^{-1})C, A_0) \mu_k(dk),$$

onde  $A, B, C \in \mathfrak{g}$ ,  $A_0$  fixado em  $\mathfrak{g}$ .

Podemos então encontrar a constante  $\tau$  para o polinômio

$$P(A) = \int_K (\text{Ad}(k^{-1})A, A_0)^3 \mu_k(dk).$$

$P$  é da forma

$$P(A) = \int_K Q(\text{Ad}(k^{-1})A) \mu_k(dk)$$

com  $Q(A) = (A, A_0)^3$  polinômio.

Agora,  $K$  age nos polinômios por

$$(kQ)(A) = Q(\text{Ad}(k^{-1})A), \quad k \in K.$$

Seja

$$(A, B) = \text{tr}(AB)$$

produto interno em  $\mathfrak{g}$  e fixemos uma base ortonormal. Um polinômio  $Q$  se escreve como soma de monômios nas coordenadas em relação a base ortonormal fixada. No espaço dos polinômios, defina  $\langle Q_1, Q_2 \rangle$  de tal forma que os monômios formem uma base ortonormal (veja pg.66). Este é um produto interno invariante pela ação de  $K$  e não depende da base ortonormal fixada.

Nestas condições, seja

$$P_I(A) = \text{tr}(A^2)$$

e  $P = \tau P_I$  com

$$P = \int kQ \mu_k(dk)$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \tau |P_I|^2 &= \langle \tau P_I, P_I \rangle = \langle P, P_I \rangle = \langle \int kQ \mu_k(dk), P_I \rangle = \\ &= \int \langle kQ, P_I \rangle \mu_k(dk) = \int \langle Q, k^{-1}P_I \rangle \mu_k(dk) = \int \langle Q, P_I \rangle \mu_k(dk) = \langle Q, P_I \rangle \end{aligned}$$

o que nos dá,

$$\tau = \frac{\langle Q, P_I \rangle}{|P_I|^2}$$

Tomando  $Q(A) = (A, A_0)^2$ , pode-se ter, sem perda de generalidade,  $A_0$  diagonal e então

$$\langle Q, P_I \rangle = \text{tr}(A_0^2).$$

Portanto

$$P(A) = \frac{\text{tr}(A_0^2)}{|P_I|^2} \text{tr}(A^2),$$

e logo

$$\gamma = \frac{\text{tr}(A_0^2)}{c^2 |P_I|^2}$$

Observemos que na expressão de  $P(A)$  o único termo que depende do modelo é  $\text{tr}(A_0^2)$  (analogamente à métrica de Fisher).

2º CASO:  $M = SU^*(2n)/Sp(n)$ .

Vimos na seção (2.1) (pg.30), que neste caso

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}; \begin{array}{l} C \text{ é uma matriz } n \times n, \text{ Hermitiana} \\ \text{de traço zero e } D \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

Porém, teorema 2.15.7 de [21] nos dá que o conjunto dos polinômios invariantes pelo grupo de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , é uma restrição ao conjunto dos polinômios invariantes pelo grupo de Weyl de  $\mathfrak{g}$  do caso anterior (isto é, matrizes reais simétricas de traço zero).

Assim, basta mostrar que se  $A, B \in \mathfrak{g}$  então

$$\nabla_A^{(\alpha)} B = -\frac{\alpha}{2} \gamma \left( \frac{AB+BA}{2} - \frac{\text{tr}(AB)}{2n} I_{2n} \right)$$

também pertence a  $\mathfrak{g}$ . Mas isto é um simples cálculo.

Os casos AI e AII compactos seguem da dualidade descrita no teorema 2.3.5. Portanto, temos

Teorema 4.3.6: As  $\alpha$ -conexões do modelo transformacional  $\langle \mu \rangle_{\zeta \in M}$ ,  $M$  espaço simétrico do tipo AI ou AII, são dadas por

$$\nabla_A^{(\alpha)} B = -\frac{\alpha}{2} \gamma \left( \frac{AB+BA}{2} - \frac{\text{tr}(AB)}{m} I_m \right)$$

para  $m = n$  ou  $m = 2n$  respectivamente e  $A, B \in \mathfrak{g}$ .

#### 4.4. EXEMPLOS

Daremos agora, vários exemplos de modelos transformacionais, para com o auxílio dos resultados até aqui apresentados, calcularmos explicitamente as  $\alpha$ -conexões destes modelos transformacionais.

Exemplo 4.4.1 (Modelo de Von Mises-Fisher): É um modelo transformacional do tipo família exponencial, com o espaço dos parâmetros sendo a esfera  $(n-1)$ -dimensional,

$$S^{n-1} = \frac{SO(n)}{SO(n-1)},$$

que é um espaço simétrico do tipo compacto, BDI (tabela IV, pg.47). Logo, pelo teorema 4.3.4, o tensor T é nulo para este modelo, isto é, todas as  $\alpha$ -conexões coincidem.

Exemplo 4.4.2 (Modelo Hiperbolóide): É também um modelo do tipo família exponencial, com o espaço dos parâmetros dado agora pelo hiperbolóide unitário,

$$H^p = \{x = (x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}; x_{p+1} > 0, x * x = 1\},$$

onde o produto escalar \* é definido por  $x * y = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1}$ .

$$H^p \cong \frac{SO_0(p, 1)}{SO(p)},$$

que é um espaço simétrico do tipo não-compacto, BDI e pelo mesmo argumento anterior, todas as  $\alpha$ -conexões coincidem.

Maiores detalhes sobre os modelos dos exemplos (4.4.1) e (4.4.2), podem ser encontrados em [5].

Exemplo 4.4.3: (Modelos Normais): Seja  $G = SL(n, \mathbb{R})$ ,  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $K = SO(n)$  e  $\mu = N(0,1)$ , normal com média zero e covariância 1, isto é,

$$\frac{d\mu}{dx} = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2},$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $dx$  medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ .

Sabemos que  $G$  atua em  $X$  por multiplicação de matrizes, ação não transitiva, e  $K$  é compacto maximal de  $G$ . Assim, temos o modelo transformacional, denominado modelo transformacional composto (Barndorff-Nielsen [5]),  $\{\xi_\mu\}_{\xi \in G/K}$ , com o cociclo  $p$ ,  $K$ -invariante, dado por

$$p(g, x) = e^{-(|g^{-1}x|^2 - |x|^2)/2}.$$

Ora,  $G/K$  é um espaço simétrico do tipo AI e, pelo teorema 4.3.4, este modelo tem tensor  $T$  não nulo. Vamos então calculá-lo.

Pelos argumentos expostos na seção (4.3), devemos então calcular

$$4.4.4 \quad P(A) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{A}(e, x))^2 \mu(dx)$$

com  $A \in \mathfrak{g}$  (matrizes reais  $n \times n$ , simétricas de traço zero),

$$\tilde{\Delta}(e, x) = \frac{d}{dt} \langle e^{tA} x, x \rangle \Big|_{t=0}, \quad l = \log p.$$

Porém,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(e, x) &= \frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{2} (|e^{-tA} x|^2 - |x|^2) \right]_{t=0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle e^{-tA} x, e^{-tA} x \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle Ax, x \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$P(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle Ax, x \rangle^2 (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2} dx.$$

Tomando coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \left[ \int_{S_r^{n-1}} \langle Ax, x \rangle^2 (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2} dx \right] r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2/2} dr \int_{S_r^{n-1}} \langle Ax, x \rangle^2 dx, \end{aligned}$$

onde  $\Gamma$  representa a função gama,

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx, \quad m \in \mathbb{R}_+^*,$$

e  $S_r^{n-1}$  denota a esfera  $(n-1)$ -dimensional de raio  $r$ .

Agora, como  $SO(n)$  atua transitivamente em  $S_r^{n-1}$ , a

integral

$$4.4.5 \quad \int_{S_r^{n-1}} \langle Ax, x \rangle^2 dx$$

é então, o polinômio  $K$ -invariante em  $\mathfrak{e}$ , de  $3^\circ$  grau, dado por

$$\frac{\text{tr}(A_0^2)}{|P_1|^2} \text{tr}(A^2), A \in \mathfrak{e}, A_0 \in \mathfrak{e}, \text{fixo.}$$

Tomando  $A_0 = \text{diag}(1-(1/n), -1/n, \dots, -1/n) \in \mathfrak{e}$  e  $P_1(A) = \text{tr}(A^2)$ , temos

$$\int_{S_r^{n-1}} \langle Ax, x \rangle^2 dx = \frac{(n-2)(n-1)}{n^2 |P_1|^2} \text{tr}(A^2).$$

Assim,

$$P(A) = \frac{I_r(n)}{\Gamma(n/2)} \frac{(n-2)(n-1)}{n^2 |P_1|^2} \text{tr}(A^2)$$

com

$$I_r(n) = \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2/2} dr = \begin{cases} 1.3 \dots (n-2) \sqrt{\pi}/2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (\frac{n}{2}-1)! 2^{(n/2)-1}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Podemos calcular ainda  $|P_1|^2$ , tomando para isso  $A = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{e}$  e então calculando a integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle Ax, x \rangle^2 \mu(dx).$$

Mas,

$$\langle Ax, x \rangle^2 = \left( \frac{2}{3} x_1^2 - \frac{1}{3} x_2^2 - \frac{1}{3} x_3^2 \right)^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i^6 \mu(dx) = 15, \int_{\mathbb{R}^n} x_i^2 x_j^4 \mu(dx) = 3, \int_{\mathbb{R}^n} x_i^2 x_j^2 x_k^2 \mu(dx) = 1,$$

nos dá

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle Ax, x \rangle^2 \mu(dx) = \frac{16}{9}.$$

Portanto,

$$|P_1|^2 = \frac{1}{8} \frac{I_r(n)}{\Gamma(n/2)} \frac{(n-2)(n-1)}{n^2}.$$

Logo,

$$P(A) = 8 \operatorname{tr}(A^2).$$

Ainda com  $\mu = N(0,1)$ ,  $X = \mathbb{R}^n$ , vamos tomar agora  $G = GL(n, \mathbb{R})$ .  $G$  é um grupo de Lie redutível (seção (2.3), pg.40), com álgebra de Lie redutível

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{ger}(\Gamma_n) \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

O compacto maximal de  $G$ , agora é  $K = O(n)$ , o grupo ortogonal, e o espaço dos parâmetros é  $M = GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ , enquanto  $p$ , o cociclo  $K$ -invariante, é dado por

$$p(g, x) = |\det g| e^{-(\|g^{-1}x\|^2 - \|x\|^2)/2}.$$

Vamos então calcular (4.4.4) agora com

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 \in \mathfrak{ger}(\Gamma_n), \quad A_2 \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(e, x) &= \frac{d}{dt} \log |e^{tA}, x| \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \log |\det e^{tA}| - \frac{1}{2} (\|e^{-tA} x\|^2 - \|x\|^2) \right] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \log |\det(e^{tA_1} e^{tA_2})| - \frac{1}{2} \|e^{-tA} x\|^2 \right] \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Mas  $A_1 = \nu I_n$ ,  $A_2 \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , nos dá  $e^{tA_1} = e^{\nu t} I_n$  e  $e^{tA_2} \in SL(n, \mathbb{R})$  (isto é,  $\det e^{tA_2} = 1$ ).

Logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}(e, x) &= n\nu + \langle Ax, x \rangle \\
&= n\nu + \nu |x|^2 + \langle \Lambda_2 x, x \rangle \\
&= \tilde{\lambda}_1(e, x) + \tilde{\lambda}_2(e, x).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + 8 \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{\lambda}_1(e, x))^2 \tilde{\lambda}_2(e, x) \mu(dx) + \\
&+ 8 \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\lambda}_1(e, x) (\tilde{\lambda}_2(e, x))^2 \mu(dx).
\end{aligned}$$

com

$$P(A_1) = \frac{\pi^{n/2} \nu^3}{n/2 \Gamma(n/2)^3} \int_0^\infty (n+r^2)^3 r^{n-1} e^{-r^2/2} dr$$

e

$$P(A_2) = 8 \operatorname{tr}(A_2^3).$$

Por outro lado, utilizando coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{\lambda}_1(e, x))^2 \tilde{\lambda}_2(e, x) \mu(dx) = \\
&= \frac{\nu^2}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty (n+r^2)^2 r^{n-1} e^{-r^2/2} dr \int_{S_r^{n-1}} \langle \Lambda_2 x, x \rangle dx,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\lambda}_1(e, x) (\tilde{\lambda}_2(e, x))^2 \mu(dx) = \\
&= \frac{\nu}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty (n+r^2) r^{n-1} e^{-r^2/2} dr \int_{S_r^{n-1}} \langle \Lambda_2 x, x \rangle^2 dx.
\end{aligned}$$

Porém, como  $O(n)$  atua transitivamente em  $S_r^{n-1}$ , as

integrals

$$\int_{S_r^{n-1}} \langle A_2 x, x \rangle dx, \quad \int_{S_r^{n-1}} \langle A_2 x, x \rangle^2 dx$$

são polinômios  $K$ -invariantes em  $\mathfrak{o}$ , de 1° e 2° graus, respectivamente, e então

$$\int_{S_r^{n-1}} \langle A_2 x, x \rangle dx = 0 \text{ (tabela VI, pg.56),}$$

$$\int_{S_r^{n-1}} \langle A_2 x, x \rangle^2 dx \stackrel{(4.2.10)}{=} \frac{2}{n(n+1)} \operatorname{tr}(A_2^2).$$

Portanto,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + J_r(n) \operatorname{tr}(A_2^2),$$

onde

$$J_r(n) = \frac{\nu}{n(n+1) \Gamma(n/2)} \int_0^\infty (n+r^2) r^{n-1} e^{-r^2/2} dr,$$

sendo esta última integral calculada de modo análogo à  $I_r(n)$ .

Ainda neste exemplo, podemos substituir  $GL(n, \mathbb{R})$  pelo grupo das transformações afins  $G = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$  com o produto definido por

$$(g, a)(h, b) = (gh, gb+a), \quad g, h \in GL(n, \mathbb{R}), \quad a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Este grupo atua em  $\mathbb{R}^n$  por

$$(g, a)x = gx+a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (g, a) \in G.$$

A identidade em  $G$  é  $(I_n, 0)$  e o elemento inverso

$$(g, a)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}a).$$

Se  $K = O(n) \times \{0\}$ ,  $K$  fixa  $\mu$ , o espaço dos parâmetros é  $G/K$ .

$$\begin{aligned} \frac{d(g, a)\mu}{d\mu}(x) &= |\det g| (2\pi)^{-n/2} e^{-|g^{-1}x - g^{-1}a|^2} \\ &= N(a, gg^t). \end{aligned}$$

Através de cálculos análogos aos anteriores, pode-se encontrar uma expressão para o tensor.

Exemplo 4.4.6: Vamos tomar agora  $G = SL(n, \mathbb{R})$  atuando em  $X = S^{n-1}$ . Temos que  $K = SO(n)$ , o compacto maximal contido em  $G$ , atua transitivamente em  $S^{n-1}$  e  $S^{n-1}$  identifica-se à  $K/H$  onde,

$$H = \{A \in SO(n); A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B \in SO(n-1)\},$$

é um subgrupo fechado de  $K$  identificado com  $SO(n-1)$ .

Em geral, se  $K$  é um grupo compacto e  $H$  um subgrupo fechado de  $K$ , existe uma única probabilidade  $\mu$ , em  $K/H$ , invariante pela ação de  $K$ . Em  $S^{n-1}$  esta medida é a medida de Lebesgue normalizada. Seja então  $\langle \mu \rangle_{g \in G/K}$  este modelo transformacional. Temos que o cociclo  $p$  é dado por

$$p(g, x) = |g^{-1}x|, g \in SL(n, \mathbb{R}), x \in S^{n-1}.$$

Para ver isto, tomemos primeiro  $h = \text{diag} \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle \in SL(n, \mathbb{R})$  e

$x = e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in S^{n-1}$ . Como  $\mu$  é uma forma volume e  $he_1 = \lambda_1 e_1$ ,  $p(h, e_1)$  é o determinante da transformação que  $h$  induz no espaço tangente  $T_{e_1} S^{n-1} = \{(0, x_2, \dots, x_n)\}$ . Portanto,

$$p(h, e_1) = \lambda_2 \dots \lambda_n = \lambda_1^{-1} = \|h^{-1}e_1\|.$$

Tomemos agora,  $n$  triangular superior com 1 em toda diagonal. Pelo mesmo raciocínio ( $ne_1 = e_1$ ,  $\det n = 1$ ), verifica-se que  $p(n, e_1) = 1$ .

Para  $g \in SL(n, \mathbb{R})$  qualquer, usamos a decomposição de Iwasawa de  $SL(n, \mathbb{R})$ :  $g$  se escreve de maneira única como  $g = khn$  com  $k \in SO(n)$ ,  $h$  diagonal com entradas positivas e  $n$  triangular superior com 1 em toda diagonal.

Escrevendo então  $g^{-1} = khn$  temos,

$$\begin{aligned} p(g, e_1) &= p(n^{-1}h^{-1}k^{-1}, e_1) = p(n^{-1}h^{-1}, e_1) = \\ &= p(h^{-1}, ne_1) p(n^{-1}, e_1) = p(h^{-1}, e_1) = \|he_1\| = \\ &= \|khne_1\| = \|g^{-1}e_1\|. \end{aligned}$$

Finalmente, se  $x = ke_1$  para algum  $k \in K$ ,

$$\begin{aligned} p(g, x) &= p(k^{-1}g, e_1) p(k^{-1}, e_1)^{-1} = p(k^{-1}g, e_1) = \\ &= \|(k^{-1}g)^{-1}e_1\| = \|g^{-1}ke_1\| = \|g^{-1}x\|. \end{aligned}$$

Agora, o cálculo do polinômio será feito pela integral (4.4.5) do exemplo anterior, como veremos a seguir.

Temos,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}l(e,x) &= \frac{d}{dt} \left[ \log \|e^{-tA} x\| \right]_{t=0} \\ &= - \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}P(A) &= \int_{S^{n-1}} (\tilde{\Delta}l(e,x))^2 \mu(dx) \\ &= - \int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle^2 dx.\end{aligned}$$

Ainda neste exemplo, troquemos  $S^{n-1}$  pela Grasmanniana  $Gr_2(n)$  dos subespaços bi-dimensionais do  $\mathbb{R}^n$ . Da mesma forma,  $K$  atua transitivamente em  $Gr_2(n)$ , definindo uma probabilidade  $\mu$ ,  $K$ -invariante em  $Gr_2(n)$ . Agora, para  $g \in SL(n, \mathbb{R})$  e  $x = \text{ger}\langle u, v \rangle \in Gr_2(n)$ , o cociclo é dado por

$$\begin{aligned}p(g,x) &= (\|g^{-1}u\|^2 \|g^{-1}v\|^2 - \langle g^{-1}u, g^{-1}v \rangle^2)^{1/2} \\ &= |g^{-1}x|,\end{aligned}$$

onde  $|g^{-1}x|$  é a norma induzida no produto exterior  $\Lambda^2 \mathbb{R}^n$  dada por

$$|u \wedge v|^2 = \det \begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \|v\|^2 \end{pmatrix}$$

A mesma coisa é possível fazer em qualquer Grasmanniana  $Gr_k(n)$ ,  $k \leq n$ .

Estes modelos admitem ainda mais uma generalização:

Seja  $\mathbb{F}^n(k_1, \dots, k_r)$  o conjunto dos flags em  $\mathbb{R}^n$ , com  $k_1 < \dots < k_r \leq n$ . Um flag  $k_1, \dots, k_r$  de subespaços de  $\mathbb{R}^n$  é uma sequência de subespaços  $V_1 \subset \dots \subset V_r$ , com  $\dim V_i = k_i$  (por exemplo  $\text{Gr}_k(n) = \mathbb{F}^n(k)$ ).

$SL(n, \mathbb{R})$  atua em  $\mathbb{F}^n(k_1, \dots, k_r)$  por

$$g(V_1 \subset \dots \subset V_r) = (gV_1 \subset \dots \subset gV_r).$$

A restrição desta ação à  $K = SO(n)$  é transitiva, definindo uma probabilidade  $K$ -invariante em  $\mathbb{F}^n(k_1, \dots, k_r)$ .

## 5. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Faremos agora um estudo da geometria da conexão

$$\nabla_A B = \frac{AB+BA}{2} - \frac{\text{tr}(AB)}{n} I_n,$$

$A, B \in \mathfrak{g} = T_{\xi_0} M$ ,  $M = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ .

Em (5.1) encontramos subvariedades totalmente geodésicas. Em (5.2) provamos que  $\nabla$  não é completa. Em (5.3) calculamos o tensor curvatura e suas diferenciais. Em (5.4) mostramos que  $\nabla$  não é compatível com métrica alguma. Em (5.5) verificamos que o tensor de Ricci é nulo. Por fim, em (5.6) demonstramos que  $\nabla$  não é projetivamente equivalente a uma conexão flat, nem a um espaço localmente simétrico afim.

### 5.1. SUBVARIEDADES TOTALMENTE GEODÉSICAS

Seja  $N = \{ \xi \in M; \xi \text{ é diagonal} \}$ . Então  $\{ \tilde{A}_1(\xi), \dots, \tilde{A}_n(\xi) \}$

com  $\tilde{A}_i(\xi)$  matriz diagonal de traço zero, forma uma base para  $T_\xi N$ .

Proposição 5.1.1:  $N$  é uma subvariedade totalmente geodésica, isto

é,  $\forall \xi \in N$ , se  $\tilde{A}(\xi), \tilde{B}(\xi) \in T_\xi N$  então  $\nabla_{\tilde{A}(\xi)} \tilde{B}(\xi) \in T_\xi N$ .

Prova: Seja  $\xi \in N$ . Então  $\xi = h\xi_0$  com  $h$  matriz diagonal.

Como  $\nabla$  é  $\mathfrak{G}$ -invariante (observação após 4.3.1), temos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{A}_i(h\xi_0)} \tilde{A}_j(h\xi_0) &= (dh)_{\xi_0} \left[ \nabla_{(dh^{-1})_{\xi_0} \tilde{A}_i(\xi_0)} (dh^{-1})_{\xi_0} \tilde{A}_j(\xi_0) \right] \\ &\stackrel{(2.2.9)}{=} (dh)_{\xi_0} \left[ \nabla_{\tilde{A}_i(\xi_0)} \tilde{A}_j(\xi_0) \right] \\ &\stackrel{(2.2.9)}{=} \nabla_{\tilde{A}_i(\xi_0)} \tilde{A}_j(\xi_0). \end{aligned}$$

Porém, se  $A$  e  $B$  são matrizes diagonais de traço zero,

$$\nabla_A B = AB - \frac{\text{tr}(AB)}{n} I_n,$$

também é diagonal de traço zero.

Logo,  $\nabla_{\tilde{A}_i(\xi)} \tilde{A}_j(\xi)$  é diagonal de traço zero, isto é,

se  $\tilde{A}_i(\xi), \tilde{A}_j(\xi) \in T_\xi N$  então  $\nabla_{\tilde{A}_i(\xi)} \tilde{A}_j(\xi) \in T_\xi N$ . ■

A proposição 5.1.1, nos dá ainda outros exemplos de subvariedades totalmente geodésicas.

Sabemos que as raízes de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  relativas a  $\mathfrak{h}$ , subálgebra de Cartan formada pelas matrizes diagonais de traço zero, são dadas por

$$(\lambda_i - \lambda_k)(H) = (H, E_{ii} - E_{kk}) = \text{tr}(HE_{ii} - HE_{kk}),$$

para cada  $i \neq k$ ,  $i, k = 1, \dots, n$ , onde  $E_{ik}$  é a matriz  $n \times n$  cuja  $ik$ -ésima entrada é 1 e todas as outras entradas são zero.

Proposição 5.1.2: Seja  $V$  o kernel de uma raiz. Então  $V$  é uma subvariedade totalmente geodésica.

Prova: Temos que

$$V = \{H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}; a_i - a_k = 0\},$$

é um subespaço vetorial de  $\mathfrak{h}$ . Assim, o espaço tangente à  $V$  em qualquer ponto pode ser identificado à  $V$ . Pela proposição 5.1.1, se  $H_1, H_2 \in V$  então  $\nabla_{H_1} H_2 \in \mathfrak{h}$ . Por outro lado, é fácil ver que, a  $i$ -ésima entrada menos a  $k$ -ésima entrada de

$$\nabla_{H_1} H_2 = H_1 H_2 - \frac{\text{tr}(H_1 H_2)}{n} I_n,$$

é zero. Portanto,  $\nabla_{H_1} H_2 \in V$ .

Logo,  $V$  é uma subvariedade totalmente geodésica. ■

## 5.2. CONEXÃO NÃO-COMPLETA

Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita completa, quando toda geodésica de  $M$ , estende-se indefinidamente, isto é, se  $\alpha: I \longrightarrow M$  é uma geodésica então  $I = \mathbb{R}$ .

Pela proposição 5.1.2, temos que o subespaço gerado pela matriz  $\text{diag}(1,1,-2)$  é uma subvariedade totalmente geodésica uni-dimensional. Vamos então mostrar que a conexão não é completa neste subespaço.

Temos que a equação das geodésicas é uma equação diferencial de 2ª ordem, uni-dimensional, dada por

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Gamma \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = 0, \Gamma \text{ constante,}$$

cuja solução pode ser colocada na forma

$$\alpha(t) = \log(1+at), a \text{ constante.}$$

Assim,  $\alpha$  não pode ser estendida indefinidamente e portanto, a conexão não é completa em dimensão 3.

Para dimensão  $n$  é só fazer analogia ao caso anterior, utilizando o subespaço gerado pela matriz  $\text{diag}(1, \dots, 1, 1-n)$  ( $n-1$  primeiras entradas iguais à 1), que é uma subvariedade totalmente

geodésica (interseção de kernel de raízes).

### 5.3.0 TENSOR CURVATURA E SUAS DIFERENCIAIS

Dada uma variedade diferenciável  $M$  com uma conexão afim  $\nabla$ , um tensor do tipo  $(r,s)$  é uma aplicação

$$T: \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M),$$

$r$  vezes
 $s$  vezes

que é linear em cada  $\mathcal{X}(M)$  considerado como um módulo sobre  $C^\infty(M)$ . A diferencial covariante de  $T$ ,  $\nabla T$ , é um tensor do tipo  $(r+1,s)$  definido por

$$\begin{aligned} (\nabla T)(A_1, \dots, A_r, A) &= (\nabla_A T)(A_1, \dots, A_r) = \\ &= \nabla_A \langle T(A_1, \dots, A_r) \rangle - \sum_{i=1}^r T(A_1, \dots, \nabla_A A_i, \dots, A_r), \end{aligned}$$

para  $A_1, \dots, A_r, A \in \mathcal{X}(M)$ .

A segunda diferencial covariante de  $T$ ,  $\nabla^2 T = \nabla(\nabla T)$ , é então um tensor do tipo  $(r+2,s)$  dado por

$$(\nabla^2 T)(A_1, \dots, A_r, A, B) = (\nabla_B (\nabla T))(A_1, \dots, A_r, A),$$

$A_1, \dots, A_r, A, B \in \mathcal{X}(M)$ .

Em geral, a m-ésima diferencial covariante,  $\nabla^m T$ , é definida

indutivamente por  $\nabla(\nabla^{m-1}T)$ .

O objetivo desta seção é calcular o tensor de curvatura, tensor do tipo (3,1),

$$R(A,B,C) = \nabla_A \nabla_B C - \nabla_B \nabla_A C - \nabla_{[A,B]} C, \quad A,B,C \in \mathfrak{g}$$

e suas diferenciadas  $\nabla^m R$ .

Como,

$$\begin{aligned} \nabla_A \nabla_B C &= \frac{A \nabla_B C + \nabla_B C A}{2} - \frac{\text{tr}(A \nabla_B C)}{n} I_n \\ &= \frac{ABC+ACB+BCA+CBA}{4} - \frac{\text{tr}(BC)}{n} A - \frac{\text{tr}(ABC+ACB)}{2n} I_n, \end{aligned}$$

$$\nabla_B \nabla_A C = \frac{BAC+BCA+ACB+CAB}{4} - \frac{\text{tr}(AC)}{n} B - \frac{\text{tr}(BAC+BCA)}{2n} I_n,$$

$$\nabla_{[A,B]} C = \frac{[A,B]C + C[A,B]}{2} - \frac{\text{tr}([A,B]C)}{n} I_n,$$

temos que

$$\begin{aligned} R(A,B,C) &= \frac{1}{n} (\text{tr}(AC) B - \text{tr}(BC) A + \text{tr}([A,B]C) I_n) - \\ &\quad - \frac{[A,B]C}{4} - C[A,B]. \end{aligned}$$

Se restringirmos  $R$  a subvariedade totalmente geodésica das matrizes diagonais de  $M$ , então

$$R(A,B,C) = \frac{1}{n} (\text{tr}(AC) B - \text{tr}(BC) A).$$

Seja

$$T_r: \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{S} \longrightarrow C^{\infty}(M),$$

r vezes

o tensor do tipo  $(r,0)$  definido por

$$T_r(A_1, \dots, A_r) = \text{tr}(A_1 \dots A_r).$$

Temos que,  $T_1(A) = \text{tr}(A) = 0$  e,  $\forall r \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla_r T_r)(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}) &= \nabla_{A_{r+1}} (T_r(A_1, \dots, A_r)) - \\ &- \sum_{i=1}^r T_r(A_1, \dots, \nabla_{A_{r+1}} A_i, \dots, A_r). \end{aligned}$$

Mas,

$$\nabla_{A_{r+1}} (T_r(A_1, \dots, A_r)) = A_{r+1} \text{tr}(A_1 \dots A_r) = 0$$

e

$$\begin{aligned} T_r(A_1, \dots, \nabla_{A_{r+1}} A_i, \dots, A_r) &= \text{tr}(A_1 \dots A_{i-1} (\nabla_{A_{r+1}} A_i) A_{i+1} \dots A_r) = \\ &= \text{tr}(A_1 \dots A_{i-1} (A_i A_{r+1} - \frac{1}{n} \text{tr}(A_i A_{r+1}) I) A_{i+1} \dots A_r) = \\ &= \text{tr}(A_1 \dots A_i A_{r+1} \dots A_r) - \frac{1}{n} \text{tr}(A_i A_{r+1}) \text{tr}(A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_r) = \\ &= T_{r+1}(A_1, \dots, A_{r+1}) - \frac{1}{n} T_2(A_i, A_{r+1}) \cdot \\ &\quad T_{r-1}(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r) = \\ &= T_{r+1}(A_1, \dots, A_{r+1}) - \frac{1}{n} (T_2 \otimes T_{r-1}) \\ &\quad (A_i, A_{r+1}, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r), \end{aligned}$$

nos dá

$$\begin{aligned} \langle \nabla_r \rangle (A_1, \dots, A_r, A_{r+1}) &= -r T_{r+1} (A_1, \dots, A_{r+1}) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \langle T_2 \otimes T_{r-i} \rangle (A_i, A_{r+1}, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r). \end{aligned}$$

Consideremos agora o tensor  $(r+1,1)$  seguinte

$$S(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}) = T_r(A_1, \dots, A_r) A_{r+1}.$$

Proposição 5.3.1:  $\forall A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, A_{r+2} \in \mathfrak{S}$ ,

$$\langle \nabla_{r+1} \rangle (A_1, \dots, A_{r+1}, A_{r+2}) = \langle \nabla_r \rangle (A_1, \dots, A_r, A_{r+2}) A_{r+1}.$$

Prova:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{r+1} \rangle (A_1, \dots, A_{r+1}, A_{r+2}) &= \nabla_{A_{r+2}} \langle S(A_1, \dots, A_{r+1}) \rangle - \\ &- \sum_{i=1}^{r+1} S(A_1, \dots, \nabla_{A_{r+2}} A_i, \dots, A_{r+1}) = T_r(A_1, \dots, A_r) \nabla_{A_{r+2}} A_{r+1} - \\ &- \sum_{i=1}^r T_r(A_1, \dots, \nabla_{A_{r+2}} A_i, \dots, A_r) A_{r+1} - T_r(A_1, \dots, A_r) \nabla_{A_{r+2}} A_{r+1} = \\ &= \langle \nabla_{A_{r+2}} T_r \rangle (A_1, \dots, A_r) A_{r+1} = \langle \nabla_r \rangle (A_1, \dots, A_r, A_{r+2}) A_{r+1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Utilizando estes dois últimos tensores, podemos então reescrever  $R$  por

$$5.3.2 \quad R(A,B,C) = \frac{1}{n} \langle T_2(A,C) B - T_2(B,C) A \rangle.$$

e, pela proposição 5.3.1, calcularmos suas diferenciais

$$\begin{aligned}
5.3.3 \quad \langle \nabla R \rangle(A, B, C, D) &= \frac{1}{n} [\langle \nabla T_2 \rangle(A, C, D) B - \langle \nabla T_2 \rangle(B, C, D) A] \\
&= -\frac{2}{n} (T_3(A, C, D) B - T_3(B, C, D) A),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^2 R \rangle(A, B, C, D, E) &= -\frac{2}{n} [\langle \nabla T_3 \rangle(A, C, D, E) B - \langle \nabla T_3 \rangle(B, C, D, E) A] = \\
&= \frac{6}{n} \left\{ T_4(A, C, D, E) - \frac{1}{3n} [T_2(A, E) T_2(C, D) + T_2(D, E) T_2(A, C) + \right. \\
+ T_2(C, E) T_2(A, D)] \Big\} B - \frac{6}{n} \left\{ T_4(B, C, D, E) - \frac{1}{3n} [T_2(B, E) T_2(C, D) + \right. \\
+ T_2(D, E) T_2(B, C) + T_2(C, E) T_2(B, D)] \Big\} A,
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Logo,

Corolário 5.3.4:  $\nabla^m R \in \text{ger}(A, B)$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , onde  $\nabla^0 R = R(A, B, C)$ .

#### 5.4. CONEXÃO NÃO-COMPATÍVEL COM MÉTRICA ALGUMA

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma conexão afim  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$ , quando

$$A_g(B, C) = g(\nabla_A B, C) + g(B, \nabla_A C),$$

$\forall A, B, C \in \mathcal{X}(M)$ .

Proposição 5.4.1:  $\nabla$  não é compatível com métrica alguma.

Prova: Sabemos que, para uma conexão compatível com uma métrica dada, a álgebra de Lie do grupo de holonomia em um ponto da variedade, é uma subálgebra de  $\mathfrak{so}(n)$ . Por outro lado, tal álgebra de Lie é gerada por

$$\langle \nabla^m R \rangle (A, B, C_1, \dots, C_m), \quad A, B, C_1, \dots, C_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, vamos mostrar que para algum  $m$ ,  $\nabla^m R$  é um elemento de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{s})$ , não-múltiplo da identidade, que não pertence a  $\mathfrak{so}(n)$ .

Temos que, por (5.3.2), para  $A, B, C, D \in \mathfrak{s}$ ,

$$\begin{aligned} \langle R(A, B, C), D \rangle &= \frac{1}{n} [\operatorname{tr}(AC)\operatorname{tr}(BD) - \operatorname{tr}(BC)\operatorname{tr}(AD)] \\ &= - \langle C, R(A, B, D) \rangle, \end{aligned}$$

isto é,  $R(A, B) \in \mathfrak{so}(n)$ .

Por outro lado,  $\forall A, B, C, D, E \in \mathfrak{s}$ , (5.3.3) nos dá

$$\begin{aligned} \langle \langle \nabla R \rangle (A, B, C, D), E \rangle &= \frac{2}{n} \langle \operatorname{tr}(BCD) A - \operatorname{tr}(ACD) B, E \rangle \\ &= \frac{2}{n} [\operatorname{tr}(BCD) \operatorname{tr}(AE) - \operatorname{tr}(ACD) \operatorname{tr}(BE)] \end{aligned}$$

e

$$\langle \langle \nabla R \rangle (A, B, E, D), C \rangle = \frac{2}{n} [\operatorname{tr}(BED) \operatorname{tr}(AC) - \operatorname{tr}(AED) \operatorname{tr}(BC)].$$

Assim, tomando  $A, B, C, D, E$  satisfazendo  $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(BE) = 0$ ,  $DB = A$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \langle \nabla R \rangle (A, B, C, D), E \rangle &= \frac{2}{n} \operatorname{tr}(DBC) \operatorname{tr}(AE) = \frac{2}{n} \operatorname{tr}(AC) \operatorname{tr}(AE) \\ &= \langle \langle \nabla R \rangle (A, B, E, D), C \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,  $(\nabla R)(A,B,C)$  é um operador de  $\mathfrak{s}$  auto-adjunto, como queríamos demonstrar. ■

### 5.5.0 TENSOR DE RICCI

O tensor de Ricci de uma variedade diferenciável  $M$  é o tensor do tipo  $(2,0)$  definido por

$$\text{Ric}(A,B) = \text{traço da aplicação } C \longrightarrow R(A,B,C), \quad A,B,C \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim, se  $A,B,C \in \mathfrak{s}$ , a aplicação  $C \longrightarrow R(A,B,C)$  é um elemento de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{s})$ , tendo portanto, traço zero.

Logo,  $\text{Ric} \equiv 0$ .

### 5.6. EQUIVALÊNCIA PROJÉTIVA

Sejam  $\nabla$  e  $\tilde{\nabla}$  duas conexões afins de uma variedade diferenciável  $M$ . Dizemos que  $\tilde{\nabla}$  é projetivamente equivalente a  $\nabla$ , quando existe uma 1-forma  $\rho$  em  $M$  tal que

$$5.6.1 \quad \tilde{\nabla}_A B = \nabla_A B + \rho(A)B + \rho(B)A \quad \forall A,B \in \mathfrak{X}(M).$$

Em termos de geodésicas, isto significa dizer então que conexões projetivamente equivalentes possuem as mesmas geodésicas.

Para o nosso caso, pela proposição 3.12, pg.89 de [20], basta considerarmos uma 1-forma invariante à direita  $((R_g)^* \rho = \rho, (R_g)^*$  dual de  $R_g$ ), pois então  $\rho$  é diferenciável,  $\rho(A)$  é uma função constante em  $G = SL(n, \mathbb{R})$ , logo em  $M = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ , para cada  $A$  campo invariante à direita e  $d\rho(A, B) = -\rho([A, B])$ .

Suponhamos então que exista uma 1-forma  $\rho$  invariante à direita satisfazendo (5.6.1).

Vamos mostrar que para  $A, B, C, D$  matrizes diagonais de traço zero

$$\tilde{R}(A, B, C) = \tilde{\nabla}_A \tilde{\nabla}_B C - \tilde{\nabla}_B \tilde{\nabla}_A C \neq 0$$

e

$$(\tilde{\nabla} \tilde{R})(A, B, C, D) \neq 0,$$

isto é,  $\nabla$  não é projetivamente equivalente a uma conexão flat, nem a um espaço localmente simétrico afim.

Temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_A \tilde{\nabla}_B C &= \nabla_A \tilde{\nabla}_B C + \rho(A) \tilde{\nabla}_B C + \rho(\tilde{\nabla}_B C) A = \nabla_A \nabla_B C + \nabla_A (\rho(B)C + \rho(C)B) + \\ &+ \rho(A) \nabla_B C + \rho(A) \rho(B)C + \rho(A) \rho(C)B + [\rho(\nabla_B C) + 2\rho(B)\rho(C)]A = \\ &= \nabla_A \nabla_B C + [\rho(\nabla_B C) + 2\rho(B)\rho(C)]A + \rho(A) \rho(C)B + \\ &+ \rho(A) \rho(B)C + \rho(A) \nabla_B C + \rho(B) \nabla_A C + \rho(C) \nabla_A B, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_B \tilde{\nabla}_A C &= \nabla_B \nabla_A C + [\rho(\nabla_A C) + 2\rho(A)\rho(C)]B + \rho(B)\rho(C)A + \\ &+ \rho(B)\rho(A)C + \rho(B)\nabla_A C + \rho(A)\nabla_B C + \rho(C)\nabla_B A. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(A,B,C) &= R(A,B,C) + [\rho(\nabla_B C) + \rho(B)\rho(C)]A - [\rho(\nabla_A C) + \rho(A)\rho(C)]B \\ &= [\rho(\nabla_B C) + \rho(B)\rho(C) - \frac{1}{n} \text{tr}(BC)]A - \\ &- [\rho(\nabla_A C) + \rho(A)\rho(C) - \frac{1}{n} \text{tr}(AC)]B, \end{aligned}$$

que é obviamente diferente de zero.

Agora,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla} \tilde{R} \rangle(A,B,C,D) &= \langle \tilde{\nabla}_D \tilde{R} \rangle(A,B,C) = \langle \nabla_D \tilde{R} \rangle(A,B,C) + \\ &+ \rho(D)\tilde{R}(A,B,C) + \rho(\tilde{R}(A,B,C))D. \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_D \tilde{R} \rangle(A,B,C) &= \nabla_D \langle \tilde{R}(A,B,C) \rangle - \tilde{R}(\nabla_D A, B, C) - \tilde{R}(A, \nabla_D B, C) - \tilde{R}(A, B, \nabla_D C) \\ &= \langle \nabla_D R \rangle(A,B,C) + [\rho(\nabla_D A)C + \rho(\nabla_D A)\rho(C) + \rho(\nabla_A \nabla_D C) + \\ &+ \rho(A)\rho(\nabla_D C)]B - [\rho(\nabla_D B)C + \rho(\nabla_D B)\rho(C) + \\ &+ \rho(\nabla_B \nabla_D C) + \rho(B)\rho(\nabla_D C)]A. \end{aligned}$$

Portanto, como  $\tilde{R}, \tilde{\nabla}R \in \text{ger}(A, B)$ ,

$$\langle \tilde{\nabla}R \rangle(A, B, C, D) = \langle \dots \rangle A + \langle \dots \rangle B + \rho \langle \tilde{R}(A, B, C) \rangle D,$$

que também é diferente de zero.

## REFERÊNCIAS

- [1] Amari, S. *Theorie of information spaces a differential geometrical foundations of statistics*, POST RAAG Report, 106 (1980).
- [2] Amari, S. *Differential geometry of curves exponential families ... curvatures and information loss*, *Ann. Statist.* 10 (1982), 357-387.
- [3] Amari, S. *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, *Lectures Notes in Statistics* 28, Springer, Berlin, 1985.
- [4] Barndorff-Nielsen, O. E. *Differential and Integral Geometry in Statistical Inference*, *Lectures Notes - Monograf Series*, vol.10, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1987.
- [5] Barndorff-Nielsen, O. E., Blaesild, P., Eriksen, P. S. *Decomposition and Invariance of Measures and Statistical Transformation Models*, *Lectures Notes in Statistics* 58, Springer, Berlin, 1989.

- [6] Blaesild, P. *Yokes and tensors derived from yokes*, Research Report 173, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus (1988).
- [7] Carter, R. *Simple Groups of Lie Type*, Wiley, New York, 1972.
- [8] Chentsov, N. *Statistical Decision Rules and Optimal Inference* (in Russian), Nauka, Moscow, translated in English (1982), AMS, Rhode Island.
- [9] Eaton, M. *Group Invariance Applications in Statistics*, Regional Conference Series in Probability and Statistics, vol.1, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1989.
- [10] Efron, B. *Defining the curvature of a statistical problem* (with applications to second order efficiency), (with discussion), *Ann. Statist.* 3 (1975), 1189-1242.
- [11] Furstenberg, H. *Translation-invariant cones of functions on semi-simple Lie Groups*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol.71 (1965), 271-326.
- [12] Helgason, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

- [13] Jacobson, N. *Lie Algebras*, Wiley, New York, 1962
- [14] Kobayashi, S., Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, 2 vol., Wiley, New York, 1962.
- [15] Lauritzen, S. L. *Statistical Manifolds, Differential Geometry in Statistical Inference, Lectures Notes - Monograf Series*, vol.10, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1987.
- [16] Marques, M., San Martin, L. *Quasi-Invariance of product measures under Lie Group perturbations: Fisher information and  $L^2$ -differentiability*, *Annals of Probability*, vol.20, n<sup>o</sup>3, Julho 1992.
- [17] Rao, C. *Information and accuracy attainable in the estimator of statistical parametrs*, *Bull. Calcuta. Math. Soc.* 37 (1945), 81-91.
- [18] Varadarajan, V. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations*, Prentice Hall, New Jersey, 1974.
- [19] Wan, Z. *Lie Algebras*, Pergammon Press, New York, 1975.
- [20] Warner, F. *Foundations of Differential Manifolds and Lie*

*Groups, Scott-Foresman and Co., S. Francisco, 1971.*

- [21] Warner, G. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*,  
*Springer, Berlin, 1972.*