INVARIANTES RELATIVOS E DUALIDADE

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. **MARIA GORETE CARREIRA ANDRADE** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 24 de Novembro de 1992.

Prof. Dr. Janey Antonio Daccach
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR** em Ciências.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço:

- Ao Professor Janey Antonio Daccach pela paciência e dedicação dispensadas durante a orientação deste trabalho.
- Ao Toninho pela compreensão, apoio inestimável e pelo trabalho de digitação.
- À amiga Erminia pela companhia valiosa durante os passos neste caminho.
- Aos Professores do IMECC - Unicamp e do ICMSC - Usp pela minha formação e pelo estímulo.
- Ao Departamento de Matemática da Unesp de São José do Rio Preto que me concedeu condições para a realização deste trabalho.
- À Capes pelo apoio financeiro.
- À todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho, em especial à Professora Claudina Izepe Rodrigues.

Ao Toninho

ÍNDICE

Introdução i

Capítulo I - (Co)Homologia de Grupos e Dualidade 1

I.1 - Homologia e Cohomologia de Grupos 1

I.2 - Módulos Induzidos e Coinduzidos 8

I.3 - Homologia e Cohomologia Relativa 14

I.4 - Grupos e Pares de Dualidade 19

Capítulo II - Um Invariante Algébrico para um Par Grupo (G,S) . 28

II.1 - Definições e Notações 28

II.2 - O Invariante $E(G,S)$ e Dualidade 36

II.3 - Relação de $E(G,S)$ com o Invariante $e(G,S)$ 40

II.4 - Interpretação Topológica de $E(G,S)$ em termos de Pares Eilemberg-
-MacLane 53

Capítulo III - O Invariante Generalizado E(G,$\mathcal{S}$,M) 57

III.1 - O Invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ 57

III.2 - Propriedades do Invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ 67

III.3 - O Invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ e Dualidade 73

III.4 - O Invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ 82

Bibliografia 97

INTRODUÇÃO

A motivação para este trabalho foi o estudo de ends de grupos e pares de grupos, cohomologia relativa de grupos, grupos e pares de dualidade.

Com o estudo de cohomologia relativa de grupos definimos um novo invariante algébrico denotado por $E(G, \mathcal{S}, M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S}$ é uma família de subgrupos de G de índice infinito e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, que de certa forma generaliza os invariantes ends já existentes. Essa definição surgiu em colaboração com Erminia L. C. Fanti (ver [1]).

O objetivo deste trabalho é estudar o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ principalmente nos casos em que G e $\mathcal{S}$ satisfazem certas propriedades de dualidade e no caso em que G se decompõe sobre certos subgrupos. Também estudaremos a relação deste invariante com dois dos invariantes ends já existentes, a saber, $e(G)$ e $e(G, S)$, S subgrupo de G.

O end clássico $e(G)$ foi definido por Freudenthal [12], Hopf [13] e Specker [27] e se G é um grupo infinito então

$$e(G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G). \tag{0.1}$$

O invariante end $e(G, S)$ foi definido por Houghton [14] e Scott [24] e não tem uma fórmula cohomológica do tipo (0.1) no caso em que $[G : S] = \infty$, S subgrupo não trivial de G.

Nosso propósito inicial era chegar a uma caracterização de $e(G, S)$ em termos de cohomologia relativa de grupos. Com isto surgiu a definição de nosso invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ fazendo assim com que nos dedicássemos a seu estudo.

No capítulo I fazemos uma revisão dos principais resultados sobre (co)homologia de grupos, dualidade e suas interpretações topológicas.

No capítulo II definimos o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ para G um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ uma família de subgrupos de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, a saber,

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + \dim_{\mathbf{Z}_2} \mathrm{Ker}\ res^G_{\mathcal{S}}. \tag{0.2}$$

onde $res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G;M) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i;M)$ é a aplicação restrição.

Neste capítulo estudamos este invariante no caso em que $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = \mathbf{Z}_2(G/S)$. Por simplicidade, denotamos $E(G,S,\mathbf{Z}_2(G/S))$ por $E(G,S)$.

Em (II.1) damos uma caracterização de $E(G,S)$ em termos de derivações e derivações principais, a saber,

$$E(G,S) = 1 + \dim_{\mathbf{Z}_2} \frac{Der(G,S,\mathbf{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbf{Z}_2(G/S))} = 1 + \dim_{\mathbf{Z}_2} \frac{H^1(G,S;\mathbf{Z}_2(G/S))}{\mathbf{Z}_2(G/S)^S} \tag{0.3}$$

e computamos $E(G,S)$ num caso específico usando esta caracterização.

Em (II.2) estudamos $E(G,S)$ no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade. Um resultado interessante é que se (G,S) é um D^n-par com $[G:S] = \infty$ então $E(G,S) = 1$ (ver (II.2.3)). Este resultado "generaliza" o fato que se G é um D^n-grupo com $n > 1$ então $e(G) = 1$. Neste parágrafo usamos os isomorfismos de dualidade para computar $E(G,S)$ em alguns casos especiais e decidir se um par grupo (G,S) é ou não de dualidade. Por exemplo, usando nosso invariante podemos concluir que $(G,S) = (< s > * < t >, < sts^{-1}t^{-1} >)$ não é isomorfo à $(G,H) = (< s > * < t >, < t >)$ pois $E(G,S) = 1$ e $E(G,H) = \infty$. Como (G,S) é um PD^2-par, concluímos que (G,H) não é um PD^2-par.

No parágrafo (II.3) estudamos as relações existentes entre $E(G,S)$ e os ends $e(G)$ e $e(G,S)$. Neste parágrafo recordamos as definições destes ends, suas propriedades principais e a relação com ends de espaços topológicos. Sob certas hipóteses estes invariantes ends podem assumir apenas os valores 1, 2 ou ∞. Isto é verdadeiro para $E(G,S)$ com hipóteses mais restritivas como mostra (II.3.9).

Usando (0.1) e a definição de $E(G,S)$ temos que

$$e(G) = e(G,\{1\}) = E(G,\{1\}) = 1 + \dim_{\mathbf{Z}_2} \frac{H^1(G,\{1\};\mathbf{Z}_2G)}{P(G,\{1\};\mathbf{Z}_2G)}.$$

Como $E(G,S) = 1 + \dim_{\mathbf{Z}_2} \frac{H^1(G,S;\mathbf{Z}_2(G/S))}{P(G,S;\mathbf{Z}_2(G/S))}$ nossa esperança era provar que $E(G,S) = e(G,S)$ e obter um fórmula similar para $e(G,S)$. Mas isto é falso em geral. O que vale é que $E(G,S) \leq e(G,S)$ (ver (II.3.12)) e em alguns casos especiais,

por exemplo no caso em que S é normal em G, esses invariantes coincidem. A igualdade porém nem sempre é válida. Há exemplos em que $e(G,S)$ é infinito ao passo que $E(G,S)$ é finito.

No último parágrafo do capítulo II nós damos uma interpretação de $E(G,S)$ em termos de pares Eilemberg-MacLane. Esta interpretação é válida para $e(G,S)$ nos casos em que $E(G,S) = e(G,S)$.

Parte dos resultados do capítulo II foram conseguidos com a colaboração de Erminia L. C. Fanti (ver [1]). A relação de $E(G,\mathcal{S},M)$ no caso em que $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = Ind_S^G PS$ onde PS é o conjunto das partes de S, com o invariante end $\tilde{e}(G,S)$ definido por Kropholler e Roller [19] foi estudado por ela e encontra-se em [9].

No capítulo III deste trabalho estudamos o invariante algébrico $E(G,\mathcal{S},M)$ para $\mathcal{S}$ uma família qualquer de subgrupos de índice infinito em G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer.

Em (III.1) estudamos o funtor $H^*(-,-;-)$ para provar que $E(G,\mathcal{S},M)$ é um invariante em uma determinada categoria.

Quando os grupos de cohomologia $H^0(G;M)$ $H^0(\mathcal{S};M)$ e $H^1(G,\mathcal{S};M)$ têm dimensão finita, temos uma interpretação de $E(G,\mathcal{S},M)$ em termos de "característica de Euler Parcial" (ver (III.1.4)), que nos foi sugerida pelo Prof. Alejandro Adem. Usando esta interpretação, nós veremos um exemplo de cálculo de $E(G,\mathcal{S},\mathbb{Z}_2)$ no caso em que G se decompõe na forma $G = G_1 *_T G_2$ ou $G = G_1 *_{T,\theta}$ e $\mathcal{S} = \{G_1, G_2\}$ ou $\mathcal{S} = \{G_1\}$ respectivamente.

Em (III.2) estudamos as propriedades de $E(G,\mathcal{S},M)$ e relacionamos com derivações e derivações principais. Usando estas propriedades fazemos algumas computações de $E(G,\mathcal{S},M)$.

No parágrafo (III.3), demonstramos algumas propriedades básicas sobre D^n-pares e estudamos o invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ neste caso, generalizando o resultado (II.2.3). Um resultado interessante (ver (III.3.5)) é que se $(G,\mathcal{S})$ é um D^n-par, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1,\ldots,r\}$ com $[G : S_i] = \infty$ então $S_i \neq S_j$ para $i \neq j$ e S_i não é normal em G para $i = 1,\ldots,r$. Demonstramos também neste parágrafo outros resultados interessantes em alguns cálculos do invariante $E(G,\mathcal{S},M)$.

Em (III.4) estudamos o invariante $E(G,\mathcal{S},\mathbb{Z}_2G)$ denotado por $\overline{E}(G,\mathcal{S})$. Este invariante está intimamente relacionado com o end $e(G)$ e com a teoria de decomposição de grupos. Veremos que $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \leq e(G)$ para qualquer par grupo $(G,\mathcal{S})$ com $[G : S] = \infty$, $S \in \mathcal{S}$ e a desigualdade estrita, no caso em que G é finitamente gerado, somente pode ocorrer quando G se decompõe sobre um subgrupo finito. Um tipo de decomposição de um grupo G que será importante neste parágrafo é a decomposição adaptada a uma família $\mathcal{S}$ de subgrupos de G. O invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ mede exatamente quando uma decomposição de G é adaptada (ver (III.4.17) e (III.4.18)), o mesmo não ocorrendo com $e(G)$.

CAPÍTULO I

(Co)Homologia de Grupos e Dualidade

Neste capítulo faremos uma breve revisão de alguns resultados básicos da teoria de cohomologia de grupos, grupos e pares de dualidade, que serão de grande utilidade nos próximos capítulos.

Esta revisão tem como objetivo propiciar ao leitor uma melhor compreensão de nosso trabalho.

Quase todos os resultados serão enunciados sem demonstração. Apenas demonstraremos aqui resultados conhecidos que não encontramos demonstrados nas referências.

Usualmente a (co)homologia de um grupo G é definida sobre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$, com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo, mas pode ser definida analogamente sobre qualquer anel R com coeficientes em um RG-módulo. Neste trabalho apresentamos esta teoria usando, por conveniência, o corpo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ de dois elementos, mas usaremos sempre que necessário a (co)homologia definida sobre $\mathbb{Z}$.

Já a teoria de grupos de dualidade será apresentada sobre um anel R, onde $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$, especificando cada um quando for o caso.

Em todo este trabalho denotaremos $Hom_{\mathbb{Z}_2}$, $Hom_{\mathbb{Z}_2 G}$, $\otimes_{\mathbb{Z}_2}$, $\otimes_{\mathbb{Z}_2 G}$ e $dim_{\mathbb{Z}_2}$, respectivamente, por Hom, Hom_G, $\otimes$, $\otimes_G$ e dim.

I.1- Homologia e Cohomologia de Grupos

Neste parágrafo faremos uma revisão da teoria de (co)homologia de grupos.

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [5] e [20].

Vamos introduzir o conceito de (co)homologia de um grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, via resoluções projetivas de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$.

Apresentamos uma interpretação da 1-ésima cohomologia de G com coeficientes em M em termos de derivações e derivações principais, e uma interpretação topológica dos grupos de (co)homologia em termos de complexos $K(G,1)$.

(I.1.1) Seja $\mathbb{Z}_2G$, o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelos elementos de um grupo G.

Se $\alpha \in \mathbb{Z}_2G$ então podemos escrever α unicamente na forma $\alpha = \sum_{g\in G} r_g g$ onde $r_g \in \mathbb{Z}_2$ e $g \in G$, com $r_g = 0$ para quase todo g.

Temos então,

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g = \sum_{g\in G} (r_g + s_g) g.$$

Podemos também definir em $\mathbb{Z}_2G$ uma operação multiplicação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2G \times \mathbb{Z}_2G &\rightarrow \mathbb{Z}_2G \\ (\sum_{g\in G} r_g g, \sum_{g\in G} s_g g) &\rightarrow (\sum_{g\in G} r_g g)(\sum_{g\in G} s_g g) = \sum_{g\in G} t_g g \end{aligned}$$

onde $t_g = \sum_{xy=g} r_x s_y$.

Isto faz de $\mathbb{Z}_2G$ um anel com unidade $1 = 1e$, onde e é o elemento neutro de G, chamado *anel grupo de G sobre $\mathbb{Z}_2$*. O elemento $1g \in \mathbb{Z}_2G$ será denotado por g.

Em todo este trabalho, a menos que afirmemos o contrário, trabalharemos na categoria dos $\mathbb{Z}_2G$-módulos unitários à esquerda M.

Se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo temos naturalmente definida uma ação de G em M, a saber, $g.m = 1g.m$. Temos também que M é um $\mathbb{Z}_2$- módulo com a seguinte estrutura $0.m = 0$ e $1.m = 1e.m$. Assim, todo elemento de M tem ordem 2, isto é, $m + m = 1e.m + 1e.m = (1e + 1e).m = ((1 + 1)e).m = 0.m = 0$. Logo, $m = -m$, para todo $m \in M$.

Dizemos que M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial se $g.m = m$ para todo $g \in G$ e $m \in M$.

Daí, se $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in \mathbb{Z}_2 G$, temos

$$\alpha.m = \sum_{g \in G} (r_g g).m = (\sum_{g \in G} r_g).m.$$

Em particular, $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}_2 G$-módulo trivial para todo grupo G. De fato, se $\mathbb{Z}_2$ tem uma estrutura de $\mathbb{Z}_2 G$-módulo, a ação induzida de G em $\mathbb{Z}_2$ é trivial, pois $Aut(\mathbb{Z}_2) = \{id\}$.

(I.1.2) Observação: Se $\alpha \in \mathbb{Z}_2 G$ então α pode ser escrito unicamente na forma: $\alpha = 1g_1 + \ldots + 1g_k$ com $g_i \neq g_j$ para todo $i \neq j$.

(I.1.3) Se M é um $\mathbb{Z}_2 G$-módulo à esquerda podemos definir em M uma ação à direita da seguinte forma $m * g = g^{-1}m$. Logo M tem também uma estrutura de $\mathbb{Z}_2 G$-módulo à direita e daí podemos definir o produto tensorial $M \otimes_G N$.

Mais geralmente, se S é um subgrupo de G, vamos denotar por $Res_S^G M$ o $\mathbb{Z}_2 S$-módulo obtido por restrição de escalares de G à S, isto é, se $i : \mathbb{Z}_2 S \to \mathbb{Z}_2 G$ denota a inclusão então $s.m = i(s)m$, para todo $m \in M$. Daí podemos fazer o produto tensorial $M \otimes_S N$ para qualquer S subgrupo de G.

Se $S = \{e\}$ podemos colocar em $M \otimes N$ uma estrutura de $\mathbb{Z}_2 G$- módulo com a *G-ação diagonal*, isto é $g.(m \otimes n) = gm \otimes gn$, para todo $g \in G$, $m \in M$ e $n \in N$.

A passagem de módulos à esquerda para módulos à direita acima é conveniente mas pode tornar- se confusa quando por exemplo M admite naturalmente estruturas à esquerda e à direita, como por exemplo o $\mathbb{Z}_2 G$-bimódulo $\mathbb{Z}_2 G$. Neste caso, a menos que especifiquemos o contrário trabalharemos com a estrutura natural à direita e não com a definida acima.

Na verdade, *usaremos a estrutura definida acima na definição dos grupos de homologia de G*, abaixo.

Sejam agora M e N dois $\mathbb{Z}_2 G$-módulos à esquerda. Temos então o grupo abeliano $Hom_S(M, N)$, para qualquer S subgrupo de G.

Se $S = \{e\}$, podemos colocar em $Hom(M, N)$ uma estrutura de $\mathbb{Z}_2 G$-módulo com *G-ação diagonal*, isto é, se $f \in Hom(M, N)$ então $(g.f)(m) = gf(g^{-1}m)$.

Esta estrutura será bastante utilizada neste trabalho.

Uma *resolução projetiva* de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$ é uma sequência exata de $\mathbb{Z}_2G$-módulos

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

na qual cada F_i é projetivo.

Denotaremos uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$ por $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2$, onde F é o complexo de cadeias $\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to 0$.

(I.1.4) Definição: *Sejam G um grupo, M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$. O n-ésimo* **grupo de homologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H_n(G; M) = H_n(F \otimes_G M) \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Da mesma forma, o n-ésimo **grupo de cohomologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H^n(G; M) = H^n(Hom_G(F, M)) \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

(I.1.5) Observação:

(i) A definição anterior não depende da resolução projetiva $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2$, de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$. Isto decorre de [5,I.7.5].

(ii) Uma resolução projetiva de bastante importância, pois facilita muitos cálculos na teoria de homologia e cohomologia é a resolução bar (normalizada).

Em resumo, se $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2$ é a resolução bar temos que F_n é o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelos simbolos $[g_1 \mid g_2 \mid \ldots \mid g_n]$, com $g_i \in G$, $g_i \neq e$, e

$$\partial[g_1 \mid g_2 \mid \ldots \mid g_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i[g_1 \mid \ldots \mid g_n], \quad \text{onde}$$

$$d_i[g_1 \mid \ldots \mid g_n] = \begin{cases} g_1[g_2 \mid \ldots \mid g_n] & \text{se } i = 0 \\ [g_1 \mid \ldots \mid g_{i-1} \mid g_i g_{i+1} \mid g_{i+2} \mid \ldots \mid g_n] & \text{se } 0 < i < n \\ [g_1 \mid \ldots \mid g_{n-1}] & \text{se } i = n \end{cases}$$

Temos F_0 gerado pelo símbolo [ ]. Logo $F_0 \simeq \mathbb{Z}_2G$ e identificamos [ ] com $1 = 1e \in \mathbb{Z}_2G$ e $\varepsilon([\,]) = \varepsilon(1) = 1 \in \mathbb{Z}_2$.

Neste caso, denotaremos o complexo de cadeias $F \otimes_G M$ por $C_*(G, M)$ e o complexo de cocadeias $Hom_G(F, M)$ por $C^*(G, M)$.

Um elemento de $Hom_G(F_n, M) = C^n(G, M)$ pode ser visto como uma função $f : G^n \to M$ (identificando $[g_1 \mid \ldots \mid g_n] = (g_1, \ldots, g_n)$), com $f(g_1, \ldots, g_n) = 0$ se algum dos $g_i's$ é trivial, e o operador cobordo, $\delta : C^{n-1}(G, M) \to C^n(G, M)$ é dado por

$$(\delta f)(g_1, \ldots, g_n) = g_1 f(g_2, \ldots, g_n) - f(g_1 g_2, \ldots, g_n) + \cdots + (-1)^n f(g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

Se $n = 0$ então G^n é por convenção um conjunto com um único elemento, de modo que, $C^0(G, M) \simeq M$.

Usando a resolução bar podemos interpretar $H^1(G; M)$ em termos de derivações e derivações principais.

Sejam

$$Der(G, M) = \{f : G \to M \mid f(xy) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in G\}$$

$$\text{e } P(G, M) = \{d_m \in Der(G, M), m \in M \mid d_m(g) = gm + m, \forall g \in G\}$$

Então temos:

(I.1.6) Proposição: *Se G é um grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, então*

$$H^1(G; M) = \frac{Der(G, M)}{P(G, M)}.$$ □

(I.1.7) Podemos ver H_* e H^* como funtores de duas variáveis G e M.

Seja $\mathcal{D}$ a categoria cujos objetos são os pares (G, M) onde G é um grupo e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e cujos morfismos são aplicações $(\alpha, f) : (G, M) \to (L, N)$ onde $\alpha : G \to L$ é um homomorfismo de grupos e $f : M \to N$ é uma aplicação satisfazendo $f(g.m) = \alpha(g).f(m)$.

Nestas condições, temos induzido um homomorfismo

$$(\alpha, f)_* : H_*(G; M) \to H_*(L; N).$$

Para ver isto, tomamos resoluções projetivas $F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ e $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$ e $\mathbb{Z}_2L$ respectivamente e $\tau : F \to P$ uma aplicação compatível com α, isto é, $\tau(gx) = \alpha(g)\tau(x)$, para todo $g \in G$ e $x \in F$. Daí temos $\tau \otimes f : F \otimes_G M \to P \otimes_L N$ e $\tau \otimes f$ induz $(\alpha, f)_*$. Portanto H_* é um funtor covariante em $\mathcal{D}$.

Considere agora $\mathcal{D}'$ a categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{D}$, mas um morfismo é uma aplicação $(\alpha, f) : (G, M) \to (L, N)$ com $\alpha : G \to L$ homomorfismo e $f : N \to M$ satisfazendo $f(\alpha(g).n) = g.f(n)$.

Então temos induzida uma aplicação

$$(\alpha, f)^* : H^*(L, N) \to H^*(G, M).$$

De fato, considerando τ, P, e F como acima, temos que $(\alpha, f)^*$ é induzida da aplicação de cocadeia $Hom(\tau, f) : Hom_L(P, N) \to Hom_G(F, M)$.

Deste modo H^* é um funtor contravariante na categoria $\mathcal{D}'$.

Sejam

$M^G = \{g \in G \mid gm = m, \forall g \in G\}$ e

$M_G = \mathbb{Z}_2 \otimes_G M \simeq M/A$ onde $A =< gm - m, g \in G, m \in M >$.

(I.1.8) Teorema: *Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.*

(i) *Existem isomorfismos naturais $H_0(G; M) \simeq M_G$ e $H^0(G; M) = M^G$.*

(ii) *Para qualquer sequência exata curta*

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

de $\mathbb{Z}_2G$-módulos e qualquer inteiro n, existem homomorfismos naturais $\partial : H_n(G; M'') \to H_{n-1}(G; M')$ e $\delta : H^n(G; M'') \to H^{n+1}(G; M')$ tais que as sequências

$$\cdots \xrightarrow{p_*} H_n(G; M'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(G; M') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(G; M) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(G; M'') \to \cdots$$

$$\cdots \to H^{n-1}(G; M') \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(G; M) \xrightarrow{p^*} H^{n-1}(G; M'') \xrightarrow{\delta} H^n(G; M') \xrightarrow{i^*} \cdots$$

são exatas. □

O próximo lema relaciona a (co)homologia de G sobre $\mathbb{Z}$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo com a (co)homologia de G sobre $\mathbb{Z}_2$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

(I.1.9) Lema: *Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então a (co)homologia de G sobre $\mathbb{Z}_2$ com coeficientes em M é isomorfa à (co)homologia de G sobre $\mathbb{Z}$ com coeficientes em M (visto como $\mathbb{Z}G$- módulo).*

Demonstração: Se $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ então $P = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\varepsilon\otimes id} \mathbb{Z}_2$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$.

É fácil ver que

(a) $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq P \otimes_G M$

(b) $Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M) \simeq Hom_G(P, M)$

Daí o resultado segue de (a) e (b) usando a definição de (co)homologia. □

(I.1.l0) Finalizando este parágrafo, vamos ver uma interpretação topológica de H_* e H^* em termos de complexos $K(G,1)$.

Um CW-complexo X é chamado complexo de Eilemberg-MacLane do tipo $K(G,1)$ (ou simplesmente $K(G,1)$) se

(i) X é conexo

(ii) $\pi_1(X) = G$

(iii) O recobrimento universal Y de X é contráctil.

Da teoria de homotopia segue que a condição (iii) pode ser substituida pela condição

(iii)$'$ $\pi_i(X) = 0$ para $i \geq 2$.

É fato conhecido que dado um grupo G existe um complexo $K(G,1)$ associado à G [26,8.1].

Como os grupos de (co)homologia sobre $\mathbb{Z}$ tem uma interpretação topológica em termos de complexos $K(G,1)$ então, por (I.1.9), os grupos de (co)homologia sobre $\mathbb{Z}_2$ também têm esta interpretação.

De fato, dado um $\mathbb{Z}G$-módulo M, podemos construir o sistema de coeficientes locais $\mathcal{M}$ associado a M, para o $K(G,1)$ (cf.[33,IV.4]). Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial então $\mathcal{M} = M$. Como todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo é um $\mathbb{Z}G$-módulo temos o seguinte resultado:

(I.1.11) Teorema: *Seja G um grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. então*

$$H_*(G;M) = H_*(K(G,1);\mathcal{M}) \quad e$$
$$H^*(G;M) = H^*(K(G,1);\mathcal{M})$$

onde a (co)homologia de complexos é tomada com coeficientes locais.

Em particular, se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial, temos $H_*(G;M) = H_*(K(G,1);M)$ e $H^*(G;M) = H^*(K(G,1);M)$. □

I.2 - Módulos Induzidos e Coinduzidos

Neste parágrafo recordaremos as definições e algumas propriedades dos $\mathbb{Z}_2G$-módulos $Ind_S^G M$ e $Coind_S^G M$ que serão de grande importancia nos capítulos subsequentes. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [5].

(I.2.1) Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}_2S$-módulo. Temos que a multiplicação em G faz de $\mathbb{Z}_2G$ um $\mathbb{Z}_2G$-bimódulo (em particular um $\mathbb{Z}_2S$-bimódulo).

Escrevemos

$$Ind_S^G M = \mathbb{Z}_2G \otimes_S M$$
$$Coind_S^G M = Hom_S(\mathbb{Z}_2G, M)$$

A estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo em $Ind_S^G M$ é tal que $g.(x \otimes m) = gx \otimes m$ para todo $g \in G$ e $x \otimes m$ um gerador de $\mathbb{Z}_2G \otimes_S M$.

Em $Coind_S^G M$ temos a seguinte estrutura: se $f : \mathbb{Z}_2G \to M$ pertence a $Coind_S^G M$ então $(g.f)(x) = f(xg)$ para todo $g \in G$.

Seja $g \otimes M = \{g \otimes m : m \in M\}$. Daí $g \otimes M$ e M são isomorfos como grupos abelianos e $e \otimes M$ é $\mathbb{Z}_2S$-isomorfo a M. Denotaremos $g \otimes M$ por gM.

Temos então

(I.2.2) Proposição: *Seja E um conjunto de representantes para as classes à esquerda gS com $e \in G$ representando a classe S. Então o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $Ind_S^G M$ contém M como um $\mathbb{Z}_2S$-submódulo e além disso,*

(i) $Ind_S^G M \simeq \bigoplus_{g \in E} gM$

(ii) $Coind_S^G M \simeq \prod_{g \in E} gM$ □

Considere o conjunto quociente $G/S = \{gS \mid g \in G\}$ e seja $\mathbb{Z}_2(G/S)$ o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado por G/S.

Temos que $\mathbb{Z}_2(G/S)$ é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. De fato basta definirmos a ação nos geradores $g.(xS) = gxS$ e estendermos por linearidade a $\mathbb{Z}_2(G/S)$.

Vejamos agora um resultado que será bastante útil neste trabalho.

Denotaremos o conjugado de S em G, gSg^{-1}, por S^g.

(I.2.3) Proposição:

(i) *Se N é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo então*

$$Ind_S^G Res_S^G N \simeq \mathbb{Z}_2(G/S) \otimes N$$

onde G atua diagonalmente no produto tensorial.

(ii) *Sejam S e T subgrupos de G e E um conjunto de representantes para as classes duplas SgT. Para qualquer $\mathbb{Z}_2T$-módulo M, existe um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo*

$$Res_S^G Ind_T^G M \simeq \bigoplus_{g \in E} Ind_{S \cap T^g}^S Res_{S \cap T^g}^{T^g} gM \qquad \text{(Fórmula de Mackey)}$$

Em particular, se T é normal em G, existe um $\mathbb{Z}_2T$-isomorfismo

$$Res_T^G Ind_T^G M = \bigoplus_{g \in E} gM$$

onde E é um conjunto de representantes para as classes gT. □

(I.2.4) Existe um mergulho natural de $Ind_S^G M$ em $Coind_S^G M$, a saber:

$$\begin{aligned} \varphi \;:\; Ind_S^G M &\to Coind_S^G M \\ g \otimes m &\to \varphi(g \otimes m) = g\varphi_0(m) \end{aligned}$$

onde $\varphi_0 : M \to Coind_S^G M$ é definida por

$$\varphi_0(m)(h) = \begin{cases} hm & \text{se } h \in S \\ 0 & \text{se } h \notin S \end{cases}$$

φ é um $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo, e temos o seguinte resultado.

(I.2.5) Proposição: *Se* $[G : S] < \infty$ *então a aplicação* φ *definida acima é* $\mathbb{Z}_2G$*-isomorfismo e daí temos* $Ind_S^G M \simeq Coind_S^G M$. □

Um fato importante da teoria de (co)homologia de grupos é a relação entre a (co)homologia de um grupo G e de um subgrupo S. Esta relação é fornecida pelo seguinte resultado bastante conhecido.

(I.2.6) Proposição (Lema de Shapiro): *Sejam* S *um subgrupo de* G *e* M *um* $\mathbb{Z}_2S$*-módulo. Então*

(i) $H_*(S; M) \simeq H_*(G; Ind_S^G M)$

(ii) $H^*(G; M) \simeq H^*(G; Coind_S^G M)$ □

(I.2.7) Observação:

(i) O isomorfismo de Shapiro $H^*(S; M) \simeq H^*(G; Coind_S^G M)$ pode ser visto explicitamente da seguinte forma:

Sejam $\alpha : S \to G$ a inclusão e $\pi : Coind_S^G M \to M$ o $\mathbb{Z}_2S$-homomorfismo definido por $\pi(f) = f(1)$, para todo $f \in Coind_S^G M$ e 1 identificado com a unidade $1.e \in \mathbb{Z}_2G$.

Do fato de π ser $\mathbb{Z}_2S$-homomorfismo, temos que $\pi(\alpha(s).f) = s\pi(f)$. Portanto, por (I.1.7), temos a aplicação induzida

$$(\alpha, \pi)^* : H^*(G; Coind_S^G M) \to H^*(S; M)$$

que é exatamente o isomorfismo de Shapiro (ii).

Analogamente, se considerarmos o $\mathbb{Z}_2S$-monomorfismo $i : M \to Ind_S^G M$ definido por $i(m) = 1 \otimes m$, temos que $(\alpha, i)_*$ é o isomorfismo de Shapiro (i).

(ii) Se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, temos por (I.2.3)(i) que $Ind_S^G Res_S^G M \simeq \mathbb{Z}_2(G/S) \otimes M$.

Podemos provar um resultado parecido para o $Coind_S^G Res_S^G M$, isto é,

$$Coind_S^G Res_S^G M \simeq Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M)$$

De fato, basta definirmos o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo,

$$\begin{aligned} \phi \ : \ Hom_S(\mathbb{Z}_2G, M) &\rightarrow Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M) \\ f &\rightarrow \phi(f) \end{aligned}$$

onde $\phi(f)(xS) = xf(x^{-1})$ e

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \ : \ Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M) &\rightarrow Hom_S(\mathbb{Z}_2G, M) \\ f &\rightarrow \phi^{-1}(f) \end{aligned}$$

onde $\phi^{-1}(f)(x) = xf(x^{-1}S)$.

A ação em $Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M)$ é a ação diagonal dada em (I.1.3).

Podemos então reenunciar o lema de Shapiro da seguinte maneira:

(I.2.8) Proposição: *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então*

(i) $H_*(S; M) \simeq H_*(G; \mathbb{Z}_2(G/S) \otimes M)$

(ii) $H^*(S; M) \simeq H^*(G; Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M))$. □

Finalizando este parágrafo, vamos demonstrar dois lemas ([5, exerc. III.5.2 e III.5.4]) que não encontramos demonstrados nas referências, mas serão utilizados com bastante frequência nos próximos capítulos. Para isto necessitamos do seguinte resultado.

(I.2.9) Proposição: *Seja N um $\mathbb{Z}_2G$-módulo tal que $N = \bigoplus_{i \in I} M_i$ (como grupo abeliano). Suponhamos que a ação de G em N permute transitivamente os somandos (no sentido de que existe uma ação de G em I tal que $gM_i = M_{g_i}$). Sejam M um dos somandos M_i e $S \subset G$ o grupo de isotropia de i. Então M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e $N \simeq Ind_S^G M$.* □

(I.2.10) Lema: *Se M é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo e N é um $\mathbb{Z}_2G$- módulo então temos o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo*

$$N \otimes Ind_S^G M \simeq Ind_S^G(Res_S^G N \otimes M)$$

onde o produto tensorial da direita tem S-ação diagonal e o da esquerda a G-ação diagonal.

Demonstração: Seja E um conjunto de representantes para as classes gS. Podemos supor que $e \in E$. Por (I.2.2) temos

$$Ind_S^G M \simeq \bigoplus_{g \in E} gM.$$

Logo $N \otimes Ind_S^G M \simeq N \otimes (\bigoplus_{g \in E} gM) = \bigoplus_{g \in E}(N \otimes gM)$.

Considerando E como um conjunto de índices temos que $N \otimes Ind_S^G M$ é um $\mathbb{Z}_2 G$-módulo cujo grupo abeliano subjacente é uma soma direta $\bigoplus_{g \in E}(N \otimes gM)$.

Além disso a ação diagonal de G em $N \otimes Ind_S^G M$ permuta os somandos transitivamente.

De fato,

$$h.(N \otimes gM) = hN \otimes hgM = N \otimes hgM, \forall h \in G,$$

pois N é um $\mathbb{Z}_2 G$-módulo.

G atua em E da seguinte maneira: se $x \in E$ e $g \in G$ então $g.x = y \in E$ tal que $gxS = yS$.

Esta ação é transitiva, isto é, se $x \in E$ então a orbita de x, $G(x)$, é igual a E, pois $G(x) = \{g.x \mid g \in G\} \subset E$ e reciprocamente se $y \in E$ temos $y = (yx^{-1}).x$ com $yx^{-1} \in G$.

Consideremos o somando $N \otimes e.M = N \otimes M$.

Seja G_e o subgrupo de isotropia do elemento $e \in E$. Então

$$\begin{aligned} G_e &= \{g \in G \mid g.e = e\} = \{g \in G \mid gS = S\} \\ &= \{g \in G \mid g \in S\} = S. \end{aligned}$$

Daí, as hipóteses de (I.2.9) são satisfeitas e assim temos que $N \otimes M$ é um $\mathbb{Z}_2 S$-módulo (com S-ação diagonal) e

$$N \otimes Ind_S^G M \simeq Ind_S^G(Res_S^N \otimes M),$$

pois como N é $\mathbb{Z}_2 G$-módulo estamos considerando N no lado direito como $\mathbb{Z}_2 S$-módulo por restrição de escalares. □

(I.2.11) Lema: *Se G é um grupo, S um subgrupo de G com $[G:S]=\infty$, então $(Ind_S^G M)^G = 0$ para qualquer $\mathbb{Z}_2S$-módulo M.*

Demonstração: Seja E um conjunto de representantes para as classes gS, $g \in E$. Logo

$$Ind_S^G M \simeq \bigoplus_{g\in E} gM. \quad \text{(por (I.2.2))} \qquad (*)$$

Seja $\alpha \in (Ind_S^G M)^G$ com $\alpha \neq 0$. Então $g\alpha = \alpha$, $\forall g \in G$. Temos que $\alpha = \sum_{g\in E} gm$ onde gm são quase todos nulos. Por simplicidade vamos escrever

$\alpha = g_1m_1 + \ldots + g_km_k$ onde $g_im_i \in g_iM$ e $g_im_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Como $g\alpha = \alpha$ temos que

$$gg_1.m_1 + \ldots + gg_k.m_k = g_1m_1 + \ldots + g_km_k, \forall g \in G. \qquad (**)$$

Afirmação: Se $I = \{g_1m_1, \ldots, g_km_k\}$ então $gI = I$, $\forall g \in G$.

De fato, a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_g \; : \; Ind_S^G M &\rightarrow Ind_S^G M \\ g_im_i &\rightarrow gg_im_i \end{aligned}$$

é isomorfismo com inversa $\varphi_{g^{-1}}$.

Além disso, $\forall i$, $1 \leq i \leq k$, temos que $\exists j$, $1 \leq j \leq k$, tal que $gg_im_i = g_jm_j$.

Isto segue do fato que $gg_im_i \neq gg_jm_j$, $\forall i \neq j$, pois φ_g é injetora e $g_im_i \neq g_jm_j$. Se $gg_im_i \neq g_jm_j$, $\forall \;\; 1 \leq j \leq k$, teríamos, como a soma é direta em $(**)$, que $gg_im_i = 0$, o que nos dá $g_im_i = 0$ que é um absurdo.

Logo $\varphi_g(I) \subset I$ e como I é finito e φ_g é injetora temos $\varphi_g(I) = I$, isto é, $g.I = I$.

Considere agora o conjunto $X = \{g_i,\ i = 1, \ldots, k\}$.

Podemos definir uma ação de G em X da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G \times X &\xrightarrow{\psi} X \\ (g, g_iS) &\rightarrow gg_iS \end{aligned}$$

ψ está bem definida pois se $g_iS \in X$ então $gg_iS \in X$.

De fato, considere $g_im_i \in I$. Então $gg_im_i \in I$ e temos $gg_im_i = g_jm_j \in I$ e $g_jS \in X$. Logo $(g_1^{-1}gg_i)m_i = e.m_j \neq 0$.

Se $g_j^{-1}gg_i \neq S$ então $g_j^{-1}gg_i.S = xS$ para algum $x \neq e$ em E. Logo $xM \cap eM \neq \{0\}$ o que é um absurdo pois a soma $(*)$ é direta. Daí $gg_iS = g_jS \in X$.

A ação de G em X é transitiva. De fato se $g_iS \in X$, $G(g_iS) = \{gg_iS \mid g \in G\} = X$, pois se $g_jS \in X$ temos $g_iS = (g_jg_i^{-1})g_iX \in G(g_iS)$.

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca $G(g_1S) \leftrightarrow G/G_{g_1S}$ onde G_{g_1S} é o subgrupo de isotropia de g_1S.

Mas $G_{g_1S} = \{g \in G \mid gg_1S = g_1S\} = g_1Sg_1^{-1} = S^{g_1}$. Logo $X \leftrightarrow G/S^{g_1}$.

Além disso o automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi \; : \; G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow \varphi(g) = g_1gg_1^{-1} \end{aligned}$$

leva S isomorficamente em S^{g_1}.

Temos portanto definida uma bijeção

$$\begin{aligned} G/S &\xrightarrow{\overline{\varphi}} G/S^{g_1} \\ gS &\rightarrow \varphi(g)S^{g_1}. \end{aligned}$$

Como X é finito, temos que G/S é finito o que é um absurdo. Logo $\forall \alpha \in (Ind_S^G M)^G$ temos $\alpha = 0$. □

I.3 - Homologia e Cohomologia Relativa

O conceito de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ de subgrupos de G foi introduzido por Bieri e Eckmann em [4].

Faremos aqui uma breve revisão deste conceito e de alguns resultados que serão de grande importância no desenvolvimento de nosso trabalho. Recordamos também a definição de cohomologia relativa $H^*(G, S; M)$, S subgrupo de G, devida a Ribes [22] e provaremos que esta definição é equivalente à de Bieri-Eckmann no caso em que $\mathcal{S} = \{S\}$. No final do parágrafo apresentaremos uma interpretação topologica da (co)homologia relativa em termos de pares Eilemberg-MacLane.

Nas referências, a teoria de (co)homologia relativa está definida sobre o anel $\mathbb{Z}$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo. Mas, como em I.1, usaremos por conveniência, o corpo $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2G$-módulos M.

(I.3.1) Um par grupo $(G,\mathcal{S})$ consiste de um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in S\}$ de subgrupos de G não necessariamente distintos.

Denotaremos por $\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelas classes gS_i, no qual G atual por multiplicação à esquerda. Daí

$$\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_2(G/S_i) = \bigoplus_{i\in I} Ind_{S_i}^G \mathbb{Z}_2.$$

Seja $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}_2$ a aplicação aumentação usual, que leva cada gerador gS_i em $1 \in \mathbb{Z}_2$. Denotaremos por Δ o núcleo de ε. Temos então,

(I.3.2) Definição: *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Os* **grupos de (co)homologia relativa** *para $(G,\mathcal{S})$ com coeficientes em M são definidos, para todo $k \in \mathbb{Z}$, por*

$$\begin{aligned} H^k(G,\mathcal{S};M) &= H^{k-1}(G;Hom(\Delta,M)) \\ H_k(G,\mathcal{S};M) &= H_{k-1}(G;\Delta\otimes M). \end{aligned}$$

onde as ações de G em $Hom(\Delta,M)$ e $\Delta\otimes M$ são G-ações diagonais.

(I.3.3) Observação:

(i) Segue da definição que $H^k(G,\mathcal{S};M) = H_k(G,\mathcal{S};M) = 0$ se $k \leq 0$.

(ii) Se $\mathcal{S} = \emptyset$, por convenção, temos $H^k(G,\emptyset;M) = H^k(G;M)$ e $H_k(G,\emptyset;M) = H_k(G;M)$.

É conveniente escrever, para qualquer família $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$, de subgrupos de G,

$$H_k(\mathcal{S};M) = \bigoplus_{i\in I} H_k(S_i;M) \quad \text{e} \quad H^k(\mathcal{S};M) = \prod_{i\in I} H^k(S_i;M).$$

onde M é um $\mathbb{Z}_2\mathcal{S}$-módulo, isto é, um $\mathbb{Z}_2S_i$-módulo para todo $i \in I$. Se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo então M é um $\mathbb{Z}_2\mathcal{S}$-módulo por restrições.

O próximo resultado é particularmente útil em todo este trabalho.

(I.3.4) Proposição: *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$- módulo então temos as seguintes sequências exatas longas:*

(i) $\cdots \to H^k(G;M) \xrightarrow{res} H^k(\mathcal{S};M) \to H^{k+1}(G,\mathcal{S};M) \xrightarrow{J} H^{k+1}(G;M) \to \cdots$

(ii) $\cdots \to H_{k+1}(G;M) \xrightarrow{p} H_{k+1}(G,\mathcal{S};M) \to H_k(\mathcal{S};M) \xrightarrow{cor} H_k(G;M) \to \cdots$

que são naturais no $\mathbb{Z}_2G$*-módulo* M *e no par grupo* $(G,\mathcal{S})$. □

A definição de cohomologia relativa para um par grupo (G,S), S um subgrupo de G, foi dada por Ribes em [22] usando o conceito de funtor derivado.

Seja M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e considere o grupo abeliano

$$Der(G,S,M) = \{f \in Der(G,M) \mid f_{|S} = 0\}$$

É fácil ver que $Der(G,S,-)$ é um funtor covariante exato à esquerda, da categoria dos $\mathbb{Z}_2G$-módulos à esquerda na categoria dos grupos abelianos.

Seja $0 \to M \to P_0 \to P_1 \to \cdots$ uma resolução injetiva de M (isto é uma sequência exata de $\mathbb{Z}_2G$- módulos P_i que são injetivos para todo $i \geq 0$).

Então temos o complexo de cocadeias:

$$D : 0 \to Der(G,S,P_0) \to Der(G,S,P_1) \to \cdots$$

(I.3.5) Definição: *Se* G *é um grupo,* S *um subgrupo de* G *e* M *um* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo então*

$H^{k+1}(G,S;M) = H^k(D) = k$*-ésimo funtor derivado de* $Der(G,S,M)$.

(I.3.6) Observação:

(i) Seja $\Gamma(M) = \dfrac{Hom_S(\mathbb{Z}_2G,M)}{Hom_G(\mathbb{Z}_2G,M)}$. Por [22, lema1.1] temos que $Der(G,S,-)$ é isomorfo à $\Gamma(-)$ como funtores na categoria dos $\mathbb{Z}_2G$-módulos à esquerda.

Logo, o k-ésimo funtor derivado de $Der(G,S,M)$ coincide, a menos de isomorfismo, com o k-ésimo funtor derivado de $\Gamma(M)$.

Daí

$$H^{k+1}(G,S;M) = H^k(G;\Gamma(M)).$$

(ii) Temos que

$H^0(G,S;M) = H^{-1}(G;\Gamma(M)) = 0$

$H^1(G,S;M) = Der(G,S,M)$ pela exatidão à esquerda do funtor $Der(G,S,-)$.

Vamos demonstrar agora que (I.3.2), para $\mathcal{S}$ consistindo de um único subgrupo S de G, é equivalente a (I.3.5). Não encontramos esta demonstração na bibliografia pesquisada.

(I.3.7) Proposição: *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então*

$$H^k(G,\{S\};M) \simeq H^k(G,S;M) \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Por (I.3.6)(i) temos que $H^k(G,S;M) = H^{k-1}(G;\Gamma(M))$.

Seja $\Delta = \text{Ker } \varepsilon$, $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \to \mathbb{Z}_2$ a aplicação aumentação. Para provarmos a proposição basta provarmos que $\Gamma(M)$ é $\mathbb{Z}_2G$-isomorfo à $Hom(\Delta, M)$.

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & Hom_G(\mathbb{Z}_2G,M) & \xrightarrow{\chi} & Hom_S(\mathbb{Z}_2G,M) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(M) & \to 0 & (1) \\
& \downarrow \psi & (I) & \downarrow \phi & & & & \\
0 \to & Hom(\mathbb{Z}_2,M) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & Hom(\mathbb{Z}_2(G/S),M) & \xrightarrow{i^*} & Hom(\Delta,M) & \to 0 & (2)
\end{array}$$

A sequência (1) é claramente exata.

A sequência (2) é induzida da sequência exata

$$0 \to \Delta \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_2(G/S) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Do fato de $Hom(-,M)$ ser exato à esquerda segue que ε^* é injetiva e Im ε^* = Ker i^*. Como $\mathbb{Z}_2$ é $\mathbb{Z}_2$-projetivo, temos que i tem inversa à esquerda ([15,I.5.10]) e daí i^* é sobrejetora. Consequentemente a sequência (2) é exata.

Além disso p, χ, i^* e ε^* são todas $\mathbb{Z}_2G$- homomorfismos.

A aplicação ϕ é o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo definido em (I.2.7)(ii) e a aplicação ψ é o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo canônico

$$\begin{array}{rccc}
\psi & : & Hom_G(\mathbb{Z}G,M) & \to & Hom(\mathbb{Z}_2,M) \\
 & & f & \to & \psi(f)
\end{array}$$

onde $\psi(f)(1) = f(1.e)$.

É fácil provar com calculos elementares que o diagrama (I) é comutativo.

Consequentemente podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi \ : \quad \Gamma(M) &\rightarrow Hom(\Delta, M) \\ u = \rho(h) &\rightarrow (i^* \circ \phi)(h) \end{aligned}$$

de modo que $\varphi \circ \rho = i^* \circ \phi$

Pelo lema dos cinco ([20,p.14]) temos que φ é $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo, o que nos dá o resultado desejado. □

O próximo lema relaciona a cohomologia relativa definida sobre $\mathbb{Z}$ com a (co)homologia relativa definida sobre $\mathbb{Z}_2$.

(I.3.8) Lema: *Sejam $(G, \mathcal{S})$ um par grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então a (co)homologia relativa definida sobre $\mathbb{Z}$ com coeficientes em M (visto como $\mathbb{Z}G$-módulo) é isomorfa à (co)homologia relativa definida sobre $\mathbb{Z}_2$ com coeficientes em M.*

Demonstração: Sejam $\Delta_{\mathbb{Z}}$ o núcleo de $\varepsilon_1 : \mathbb{Z}(G/\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}_2}$ o núcleo de $\varepsilon_2 : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, onde ε_1 e ε_2 são as aumentações usuais.

Prova-se facilmente os seguintes $\mathbb{Z}G$-isomorfismos

(a) $\Delta_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \Delta_{\mathbb{Z}_2}$.

(b) $Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta_{\mathbb{Z}}, M) \simeq Hom(\Delta_{\mathbb{Z}_2}, M)$.

(c) $\Delta_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq \Delta_{\mathbb{Z}_2} \otimes M$.

Daí, aplicando a definição de (co)homologia relativa e (I.1.9) temos o resultado desejado. □

Finalizando este parágrafo vamos ver uma interpretação topológica da (co)homologia relativa no caso especial em que $(G, \mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilemberg-MacLane.

(I.3.9) *Um par grupo $(G, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ é* **realizado topologicamente por um par Eilemberg-MacLane** *$(X, Y) = K(G, \mathcal{S}, 1)$ se*

(i) *X é um $K(G,1)$-complexo celular.*

(ii) *Y é um subcomplexo cujas componentes $Y_i, i \in I$, são $K(S_i, 1)$-complexos (isto significa que $\pi_1(Y_i) \to \pi_1(X)$ induzida pela inclusão $Y_i \subset X$ é injetiva e aplica $\pi_1(Y_i)$ sobre $S_i \subset G$, depois de uma conveniente escolha de caminhos conectando pontos bases).*

O seguinte resultado, devido à Bieri-Eckmann [4], foi demonstrado para a (co)homologia relativa de grupos definida sobre $\mathbb{Z}$. Mas, por (I.3.8), vale também para a (co)homologia relativa definida sobre $\mathbb{Z}_2$.

Temos então

(I.3.10) Teorema: *Sejam (X, Y) um par Eilemberg-MacLane $K(G, \mathcal{S}, 1)$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então as sequências exatas longas para o par $(G, \mathcal{S})$ e para o par (X, Y), esta ultima tomada com coeficientes locais, são isomorfas. Mais precisamente, temos os seguintes diagramas comutativos (a menos de sinal como indicado),*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H_k(Y;\mathcal{M}) & \to & H_k(X;\mathcal{M}) & \to & H_k(X,Y;\mathcal{M}) & \to & H_{k-1}(Y;\mathcal{M}) & \to \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & (-1) & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & H_k(\mathcal{S};M) & \to & H_k(G;M) & \to & H_k(G,\mathcal{S};M) & \to & H_{k-1}(\mathcal{S};M) & \to \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H^k(G,\mathcal{S};M) & \to & H^k(G;M) & \to & H^k(\mathcal{S};M) & \to & H^{k+1}(G,\mathcal{S};M) & \to \cdots \\
& \downarrow & (-1)^{k+1} & \downarrow & & \downarrow & (-1)^{k+1} & \downarrow & \\
\cdots \to & H^k(X,Y;\mathcal{M}) & \to & H^k(X;\mathcal{M}) & \to & H^k(Y;\mathcal{M}) & \to & H^{k+1}(X,Y;\mathcal{M}) & \to \cdots
\end{array}$$

com as aplicações verticais sendo todas isomorfismos. □

I.4 - Grupos e Pares de Dualidade

Nosso objetivo neste parágrafo é introduzir alguns conceitos relacionados com condições de finitude sobre G, definir grupos e pares de dualidade e enunciar alguns resultados importantes desta teoria. No final do parágrafo apresentamos uma interpretação geométrica para estes grupos.

As definições e resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [2],[4] e [6].

No parágrafo 1 definimos o conceito de (co)homologia usando o corpo $\mathbf{Z}_2$, mas como dissemos esta definição é similar à definição usando o anel $\mathbf{Z}$ dos inteiros, apenas trocando $\mathbf{Z}$ por $\mathbf{Z}_2$.

Por conveniência, neste parágrafo, R denotará o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros ou o corpo $\mathbf{Z}_2$ e especificaremos cada um deles quando for o caso.

(I.4.1) Definição: *Seja G um grupo. Dizemos que G é* **do tipo** FP_n **sobre** *R se existe uma resolução projetiva parcial de R sobre RG de comprimento finito*

$$F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to R \to 0 \qquad (4.1)$$

onde cada F_i é finitamente gerado como RG-módulo.

Se existe tal resolução parcial para todo $n \in \mathbb{N}$ dizemos que G é **do tipo** FP_∞ **sobre** *R. Quando, além de FP_∞ sobre R, existir uma resolução projetiva de R sobre RG de comprimento finito, então G é dito ser* **de tipo** FP **sobre** R.

(I.4.2) Observação:

(i) Se G é do tipo FP (FP_n) sobre $\mathbb{Z}$ então G é do tipo FP (FP_n) sobre $\mathbf{Z}_2$. De fato, se $R = \mathbb{Z}$ na definição acima e aplicarmos o funtor $\mathbf{Z}_2 \otimes_{\mathbf{Z}} -$ em (4.1) então obtemos uma $\mathbf{Z}_2G$ resolução projetiva de $\mathbf{Z}_2$ com cada F_i sendo $\mathbf{Z}_2G$-projetivo e finitamente gerado (cf.(I.1.9)). Por conveniência, quando dissermos que *G é do tipo FP (FP_n)* estaremos pensando em *FP (FP_n) sobre* $\mathbf{Z}_2$.

(ii) Todo grupo G é do tipo FP_0 sobre R e G é do tipo FP_1 sobre R se e somente se G é finitamente gerado.

(I.4.3) Exemplo: Se X é uma variedade compacta de dimensão n (possivelmente com bordo) que é um $K(G,1)$ então G é do tipo FP.

Um resultado bastante utilizado neste trabalho que envolve grupos de tipo FP_n, $n = 0, 1$ é o seguinte:

(I.4.4) Lema: *Se G é um grupo do tipo FP_n para $n = 0$ ou $n = 1$ e*

$\{M_i\}_{i\in I}$ *é uma família de* $\mathbb{Z}_2G$*-módulos, então*

$$H^n(G;\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} H^n(G;M_i).$$

□

É claro que, em vista de (I.4.2)(ii), o lema é sempre válido para $n = 0$.

(I.4.5) Definição: *Seja G um grupo. Definimos a* **dimensão cohomológica** *de G sobre R, denotada por cd_RG, como*

$$cd_RG = sup\ \{n \mid H^n(G;M) \neq 0 \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}.$$

Analogamente, definimos a **dimensão homológica** *de G sobre R, denotada por hd_RG, como*

$$hd_RG = sup\ \{n \mid H_n(G;M) \neq 0 \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}.$$

(I.4.6) Observação:

(i) Sempre que estivermos nos referindo a *dimensão (co)homológica de G sobre $\mathbb{Z}_2$ usaremos a notação hdG (cdG).*

(ii) Se $cd_{\mathbb{Z}}G \leq n$ então $cdG \leq n$. Isto é demonstrado observando que todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo e usando (I.1.9).

(iii) Se G é um grupo que possui um subgrupo S com $[G : S] < \infty$ e $cd_RS < \infty$ dizemos que G tem dimensão cohomológica virtual finita sobre R e denotamos por $vcd_RG < \infty$.

Vejamos alguns resultados sobre dimensão (co)homológica de um grupo G.

(I.4.7) Teorema: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Então o seguinte ocorre:*

(i) $hd_RG \leq cd_RG$, $hd_RS \leq hd_RG$ e $cd_RS \leq cd_RG$.

(ii) *Se* $[G : S] < \infty$ *e* $cd_RG < \infty$ *então* $cd_RS = cd_RG$.

(iii) *Se* $[G:S] < \infty$ *e* $hd_R G < \infty$ *então* $hd_R S = hd_R G$. □

(I.4.8) Definição: *Dizemos que um grupo* G *tem* R**-torção** *se existe um subgrupo finito de* G *cuja ordem não é invertível em* R*, isto é, se* n *é a ordem do subgrupo então* $n.1$ *não é invertível onde* 1 *é a unidade de* R.

(I.4.9) Teorema: *Sejam* G *um grupo e* S *um subgrupo de* G. *Então temos*

(i) *Se* $hd_R G$ *(ou* $cd_R G$*) é finita, então* G *não tem* R *-torção.*

(ii) $cd_R G = 0$ *se e somente se* G *é um grupo finito sem* R*-torção (isto é,* $|\ G\ |$ *é uma unidade em* R*).*

(iii) *Se* $[G:S] < \infty$ *e* G *não tem* R*-torção então* $cd_R G = cd_R S$ *e* $hd_R G = hd_R S$. □

(I.4.10) Exemplo: Se S é um subgrupo finito de G então $cdS = 0$ se $|\ S\ |$ é impar e $cdS = \infty$ se $|\ S\ |$ é par. Em qualquer um dos casos $cd_{\mathbf{Z}} S = \infty$. Logo $cd_{\mathbf{Z}} G = \infty$, por (I.4.7)(i).

O seguinte resultado será bastante útil no parágrafo 3 do capítulo 2 e pode ser encontrado em [2] ou [11] . Nestas referências este resultado é enunciado utilizando-se um corpo K qualquer. Aqui enunciaremos para $K = \mathbb{Z}_2$.

(I.4.11) Teorema: *Seja* G *um grupo e* n *um inteiro positivo. Suponhamos que* G *tem as seguintes propriedades*

(i) cdG *é finita,*

(ii) G *é do tipo* FP_n*,*

(iii) $H^k(G;\mathbb{Z}_2 G) = 0$ *para todo* $0 \leq k \leq n-1$*,*

(iv) $H^n(G;\mathbb{Z}_2 G)$ *contém um subespaço* G*-invariante não trivial de dimensão finita sobre* $\mathbb{Z}_2$.

Então $cdG = n$*, daí* G *é de tipo* FP *e* $H^n(G;\mathbb{Z}_2 G) \simeq \mathbb{Z}_2$ *como* $\mathbb{Z}_2$*-módulo.*

□

Faremos agora um apanhado (que está longe de ser completo) da teoria de

grupos de dualidade.

O estudo de grupos de dualidade e de dualidade de Poincaré foi iniciado por Johnson e Wall [16] e Bieri-Eckmann [3]. Pares de dualidade foram introduzidos por Bieri-Eckmann [4].

(I.4.12) Definição: *Um grupo G é dito ser um* **grupo de dualidade de dimensão** n **sobre** R *se existe um RG-módulo à direita C e isomorfismos naturais*

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo RG-módulo M, com G atuando diagonalmente no produto tensorial.

O RG-módulo à direita C é chamado *módulo dualizante* de G.

Se $C \simeq R$ então G é chamado grupo de dualidade de Poincaré orientável se a ação de G em R é trivial e não orientável caso contrário. Se $R = \mathbb{Z}_2$ os grupos de dualidade de Poincaré são todos orientáveis pois a ação de G em $\mathbb{Z}_2$ é sempre trivial.

É provado facilmente o seguinte resultado:

(I.4.13) Proposição: *Se G é um grupo de dualidade de dimensão n com módulo dualizante C então,*

(i) *$cd_R G = n$. Em particular G não tem R-torção.*

(ii) *G é de tipo FP sobre R.*

(iii) *$H^k(G; RG) = 0$ se $k \neq n$ e $H^n(G; RG) \simeq C$ e a ação à direita de G em C é induzida da ação natural à direita de G em RG.* □

Em dimensões baixas podemos determinar exatamente quais são os grupos de dualidade sobre R, a saber,

(I.4.14) Proposição:

(i) *G é um grupo de dualidade de dimensão 0 sobre R se e somente se G é finito sem R-torção.*

(ii) *G é um grupo de dualidade de dimensão 1 sobre R se e somente se G*

é finitamente gerado e $cd_R G = 1$.

(iii) *Se* $cd_R G = 2$ *então* G *é um grupo de dualidade sobre* R *se e somente se* G *é do tipo* FP *sobre* R *e* $H^1(G; RG) = 0$. □

Segue de (i) que todo grupo finito de ordem impar é um grupo de dualidade sobre $\mathbb{Z}_2$ mas o único grupo finito que é de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ é o grupo trivial.

Um resultado interessante que relaciona dualidade sobre $\mathbb{Z}$ e sobre $\mathbb{Z}_2$ é o seguinte:

(I.4.15) Lema: *Se* G *é um grupo de dualidade de dimensão* n *sobre* $\mathbb{Z}$ *então* G *é um grupo de dualidade de dimensão* n *sobre* $\mathbb{Z}_2$. □

Vejamos outro resultado bastante útil da teoria de grupos de dualidade.

(I.4.16) Teorema:

(i) *Seja* G *um grupo sem* R*-torção e seja* S *um subgrupo de* G *com* $[G : S] < \infty$. *Então existe um* RS*-isomorfismo canônico de* RS*-módulos à direita* $H^k(G; RG) \simeq H^k(S; RS)$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$. *Além disso,* G *é um grupo de dualidade de dimensão* n *sobre* R *com módulo dualizante* C *se e somente se* S *é um grupo de dualidade de dimensão* n *sobre* R *com módulo dualizante* $C' \simeq Res^G_S C$.

(ii) *Seja* $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ *uma sequência exata curta de grupos. Se* N *e* Q *são grupos de dualidade sobre* R *de dimensão* n *e* q*, respectivamente, então* G *é um grupo de dualidade sobre* R *de dimensão* $n + q$ *e*

$$H^{n+q}(G; RG) \simeq H^n(N; RN) \otimes_R H^q(Q; RQ).$$ □

A teoria de grupos de dualidade, mais precisamente *grupos de dualidade de Poincaré*, está intimamente relacionada com a teoria de variedades asféricas, isto é, variedades X que têm o mesmo tipo de homotopia de um $K(\pi_1(X), 1)$.

De fato, *se* G *é um grupo tal que existe uma variedade asférica* X *fechada* (compacta e sem bordo) *de dimensão* n *com* $\pi_1(X) = G$, então G é um grupo de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}$. Consequentemente, por (I.4.15), G *é um grupo de dualidade de*

Poincaré sobre $\mathbb{Z}_2$.

(I.4.17) Exemplo:

(i) Se $G = \mathbb{Z}^n$, então G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre R pois G é o grupo fundamental da variedade asférica $S^1 \times \ldots \times S^1$ (n vezes).

(ii) Toda superfície fechada F diferente da esfera S^2 e do plano projetivo $RP(2)$ é asférica. Logo $G = \pi_1(F)$ é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 2 sobre R.

Não é conhecido se todo grupo de dualidade de Poincaré G de dimensão n, $n > 2$, sobre $\mathbb{Z}$ admite uma variedade asférica fechada X com $\pi_1(X) = G$.

O caso $n = 2$ foi provado por Eckmann-Müller e Linell em [7] e [8]. Daí, G é um grupo de dualidade de dimensão 2 sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, G é um grupo superfície infinito (isto é, G é o grupo fundamental de uma superfície fechada diferente de S^2 e $RP(2)$).

Em [6] Dicks e Dunwood estenderam este resultado para PD^2-grupos livres de torção sobre qualquer anel comutativo de caracteristica zero.

Se G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 3, que é solúvel, então Thomas provou em [32] que a conjectura é verdadeira. Mas o caso geral $n \geq 3$ está ainda em aberto.

Vamos introduzir agora a definição e algumas propriedades de *pares de dualidade*. Veremos que pares de dualidade de Poincaré também estão relacionados com a teoria de variedades.

(I.4.18) Definição: *Um par grupo* $(G, \mathcal{S})$ *é chamado um* **par de dualidade de dimensão** n **sobre** R *se existe um* RG*-módulo à direita* C *e isomorfismos naturais*

$$\begin{aligned} H^k(G; M) &\simeq H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_R M) \\ H^k(G, \mathcal{S}; M) &\simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M) \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ *e todo* RG*-módulo* M.

O RG-módulo C é chamado módulo dualizante do par $(G,\mathcal{S})$ e temos que $H^n(G,\mathcal{S};RG)$ é RG-isomorfo a C.

Se $C \simeq R$ dizemos que $(G,\mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré orientável se a ação de G em R é trivial e não orientável caso contrário. Se $R = \mathbb{Z}_2$ um par de dualidade de Poincaré é sempre orientável.

Vamos listar algumas propriedades obtidas facilmente da definição de par de dualidade e que serão bastante úteis neste trabalho.

(I.4.19) Teorema: *Seja $(G,\mathcal{S})$, onde $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$, um par de dualidade de dimensão n sobre R e com módulo dualizante C. Então*

(i) *G é um grupo de dualidade de dimensão $n-1$ com módulo dualizante $\Delta \otimes_R C$ (com G-ação diagonal).*

(ii) *$\mathcal{S}$ é uma família finita de subgrupos.*

(iii) *Cada subgrupo S_i é um grupo de dualidade de dimensão $n-1$ com módulo dualizante C (considerado como RS_i-módulo por restrição).* □

A classe de pares de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}_2$ é maior que a classe de pares de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}$. Isto decorre do seguinte fato:

(I.4.20) Proposição: *Se $(G,\mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ então $(G,\mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}_2$.* □

Pares de dualidade de Poincaré $(G,\mathcal{S})$ sobre $\mathbb{Z}$ também estão relacionados com a teoria de variedades, como mostra o seguinte resultado:

(I.4.21) Teorema: *Seja (X,Y) um par Eilemberg-MacLane no sentido da definição (I.3.9), onde X é uma variedade de dimensão n, compacta, com bordo e $Y = \partial X$. Sejam Y_i, $i = 1,\ldots,r$ as componentes de Y. Se $G = \pi_1(X)$ e $\mathcal{S} = \{S_i = \pi_1(Y_i)\ ,\ i = 1,\ldots,r\}$ então $(G,\mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$.* □

Nas condições do teorema, $(G, \mathcal{S})$ *é um par de dualidade de Poincaré de dimensão* n *sobre* $\mathbb{Z}_2$, por (I.4.20).

A recíproca de (I.4.21), isto é, "Se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}$ de dimensão n então $(G, \mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilemberg-MacLane (X, Y) onde X é uma variedade compacta com bordo e $Y = \partial X^n$ é verdadeira para $n \leq 2$.

Em [6] Dicks e Dunwood provaram que se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré de dimensão $n \leq 2$ sobre um anel comutativo com unidade R e G é livre de torção então a reciproca de (I.4.21) é verdadeira.

Finalizando este capítulo, observamos que em todo este trabalho trabalharemos com grupos e pares de dualidade sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$, a menos que afirmemos o contrário. Por isto não precisaremos distinguir entre grupos e pares de dualidade de Poincaré orientáveis ou não, de acordo com observações anteriores.

Nos referiremos a grupos de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{Z})$ como D^n-grupos (D^n-grupos sobre $\mathbb{Z}$) e grupos de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{Z})$ como PD^n-grupos (PD^n-grupos sobre $\mathbb{Z}$).

A notação para pares de dualidade e de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{Z})$ é similar, ou seja, D^n-par (D^n-par sobre $\mathbb{Z}$) e PD^n-par (PD^n-par sobre $\mathbb{Z}$).

CAPÍTULO II

Um Invariante algébrico para um par grupo (G,S)

O propósito deste capítulo é introduzir um novo invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ onde $(G,\mathcal{S})$ é um par grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, e estuda-lo no caso em que $\mathcal{S}$ consiste de um único subgrupo S e M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathbb{Z}_2(G/S)$.

II.1- Definições e Notações.

Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Consideremos a sequência exata longa para a cohomologia do par (I.3.4)(i).

$$0 \to M^G \to \prod_{i\in I} M^{S_i} \xrightarrow{\delta} H^1(G,\mathcal{S};M) \xrightarrow{J} H^1(G;M) \xrightarrow{res^G_{\mathcal{S}}} \prod_{i\in I} H^1(S_i,M) \to \cdots$$

(II.1.1) Definição: *Para um par grupo $(G,\mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ com $[G:S_i] = \infty$ para todo $i \in I$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, definimos*

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + dim\ Ker\ res^G_{\mathcal{S}}$$

Claramente,

$$\begin{aligned} E(G,\mathcal{S},M) &= 1 + \dim \text{Im } J \\ &= 1 + \dim \frac{H^1(G,\mathcal{S};M)}{(\prod_{i\in I} M^{S_i}/M^G)} \end{aligned}$$

Temos que $E(G,\mathcal{S},M)$ é um invariante algébrico no seguinte sentido:

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são os pares $((G,\mathcal{S}),M)$ com $(G,\mathcal{S})$ um par grupo , $[G:S]=\infty$, $\forall S\in\mathcal{S}$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, e cujos morfismos são as aplicações:

$$\psi:((G,\mathcal{S}),M)\to((L,\mathcal{R}),N)$$

com $\mathcal{S}=\{S_i\leq G, i\in I\}$ e $\mathcal{R}=\{R_j\leq L, j\in J\}$ consistindo de

(a) Um homomorfismo $\alpha: G\to L$

(b) Uma aplicação $\pi: I\to J$ tal que $\alpha(S_i)\subseteq R_{\pi(i)}$

(c) Uma aplicação $\phi: N\to M$ tal que $\phi(\alpha(g).n)=g.\phi(n)$, isto é, ϕ é um $\mathbb{Z}_2G$- homomorfismo via $\alpha: G\to L$.

Se ψ é um isomorfismo, isto é, α é isomorfismo de grupos, π é uma bijeção e ϕ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo, então

$$E(G,\mathcal{S},M)=E(L,\mathcal{R},M)$$

A demonstração deste fato será vista em detalhes no capítulo III ((III.1.3)), onde estudaremos este invariante para $\mathcal{S}$ uma família qualquer de subgrupos e M qualquer $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

De agora em diante estudaremos o caso particular $\mathcal{S}=\{S\}$ e $M=\mathbb{Z}_2(G/S)=Ind_S^G\mathbb{Z}_2$ (por (I.2.3)(i)).

Por simplicidade denotaremos $E(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))$ por $E(G,S)$.

Portanto

$$E(G,S)=1+\dim \text{Ker } res_S^G$$

onde $res_S^G: H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S))\to H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S))$ é a aplicação restrição.

(II.1.2) Lema: *$E(G,S)$ é um invariante para o par grupo (G,S), isto é, se $\alpha:\ (G,S)\to(L,K)$ é um isomorfismo de grupos com $\alpha(S)=K$ e $[G:S]=\infty$ então $E(G,S)=E(L,K)$.*

Demonstração: Consideremos

$$\begin{aligned} \beta \ : \ \mathbb{Z}_2(L/K) &\rightarrow \mathbb{Z}_2(G/S) \\ lK &\rightarrow \alpha^{-1}(l)S \end{aligned}$$

Claramente β é um isomorfismo com inversa $\rho : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}_2(L/K)$ definida por $\rho(gS) = \alpha(g)K$.

Temos que

$$\beta(\alpha(g).lK) = \beta(\alpha(g)lK) = \alpha^{-1}(\alpha(g)l)S = g\alpha^{-1}(l)S = g.\beta(lK).$$

Logo β e α satisfazem as condições (a), (b) e (c) acima e assim

$$E(G,S) = E(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S)) = E(L,K,\mathbb{Z}_2(L/K)) = E(L,K). \qquad \square$$

O invariante $E(G,S)$ está relacionado com derivações e derivações principais. Consideremos

$$Der(G,S,M) = \{f : G \rightarrow M : f(xy) = xf(y) + f(x) \text{e } f_{|S} = 0\} \text{ e}$$
$$P(G,S,M) = \{d_m \in Der(G,S,M) : d_m(x) = xm + m,\ m \in M\}.$$

(II.1.3) Lema: *Seja* $res_S^G : H^1(G;M) \rightarrow H^1(S;M)$ *a aplicação restrição. Então*

$$Ker\ res_S^G \simeq \frac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}$$

Demonstração: Da sequência exata (I.3.4)(i) com $\mathcal{S} = \{S\}$ temos que Ker $res_S^G \simeq$ Im J. Desde que $H^1(G,M) = \dfrac{Der(G,M)}{P(G,M)}$ (por (I.1.6)) e $H^1(G,S,M) = Der(G,S,M)$ (por (I.3.6)(ii)), podemos ver J como a aplicação

$$\begin{aligned} Der(G,S,M) &\rightarrow \frac{Der(G,M)}{P(G,M)} \\ f &\rightarrow f + P(G,M). \end{aligned}$$

Daí Ker $J = \{f \in Der(G,S,M) : f \in P(G,S,M)\} = P(G,S,M)$.

Portanto

$$\text{Im } J \simeq \frac{Der(G,S,M)}{KerJ} = \frac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}$$

e temos o resultado desejado. □

(II.1.4) Corolário: *Seja (G,S) um par grupo com $[G:S]=\infty$. Então*

$$E(G,S) = 1 + dim\ \frac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))} = 1 + dim\ \frac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}.$$

Demonstração: É imediata, visto que $E(G,S) = 1 + \dim \text{Ker } res_S^G$, com $res_S^G : H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(S,\mathbb{Z}_2(G/S))$, e aplicando (I.3.6)(ii). □

Vejamos agora um exemplo de cálculo do invariante $E(G,S)$, usando o corolário anterior.

(II.1.5) Exemplo: Seja $G = \Pi_1(RP(\infty) \vee RP(\infty))$ (onde $\vee$ denota a união por um ponto). G tem a seguinte presentação: $G =< x,y; x^2 = y^2 = 1 >$ e é chamado grupo diedral infinito. Seja $S =< y >= \Pi_1(RP(\infty)) \simeq \mathbb{Z}_2$. Então $E(G,S) = 1$.

Demonstração: Se $g \in G$ então g tem uma das seguintes formas:

$$g = (xy)^\alpha,\ g = (yx)^\beta,\ g = x(yx)^\gamma \text{ ou } g = (yx)^\delta y$$

com α, β, γ e δ inteiros não negativos.

Seja $f \in Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))$. Então f depende apenas de $f(x)$. De fato:

(1) $f((xy)^\alpha) = \sum_{i=1}^{\alpha}((xy)^{\alpha-i}).f(x).$

(2) $f((yx)^\beta) = \sum_{i=1}^{\beta}((yx)^{\beta-i}y).f(x).$

(3) $f(x(yx)^\gamma) = xf((yx)^\gamma) + f(x) = \sum_{i=1}^{\gamma+1}((xy)^{\gamma+1-i}).f(x).$

(4) $f((yx)^\delta y) = f((yx)^\delta) = \sum_{i=1}^{\delta}((yx)^{\delta-i}y).f(x).$

Estas igualdades podem ser provadas facilmente usando o princípio de indução.

Agora, dois geradores g_1S e g_2S de $\mathbb{Z}_2$ são iguais se e somente se $g_1 = g_2y^j$ para algum $j \in \mathbb{Z}$. Denotemos por $\mathbf{g}$ a classe gS e por $\mathbf{g}^\alpha$ a classe $g^\alpha S$.

Portanto, o conjunto:

$$E = \{x(yx)^{\alpha}, (yx)^{\beta}, \alpha, \beta \in I\!N\}$$

representa as classes $\mathbf{g}$, $g \in G$.

De fato, se $\alpha > 0$

$$\mathbf{x(yx)^{-\alpha} = (yx)^{\alpha-1}} \text{ e } \mathbf{(yx)^{-\alpha} = x(yx)^{\alpha-1}}.$$

Além disso, se $f \in Der(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$, f tem que satisfazer:

(5) $f(x) = xf(x)$ (pois $f(x^2) = f(1) = 0$).

Daí $f(x)$ tem que ser uma soma do seguinte tipo:

(6) $f(x) = \sum_{i=1}^{r}((\mathbf{yx})^{\alpha_i} + \mathbf{x(yx)}^{\alpha_i}), \alpha_i \geq 0$, e tais que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$.

Isto é claro pois se $(\mathbf{yx})^{\alpha}$ aparece em $f(x)$ teremos que $\mathbf{x(yx)}^{\alpha}$ aparece em $xf(x)$ e de (5) temos que $\mathbf{x(yx)}^{\alpha}$ aparece em $f(x)$. Além disso $(\mathbf{yx})^{j} \neq \mathbf{x(yx)}^{i}$, para todo $i, j \geq 0$, $i \neq j$.

Afirmação: Para todo $f \in Der(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ temos que $f(x) = d_m(x)$, com $d_m \in P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$.

De fato, se $d_m \in P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ temos que $d_m(x) = xm + m$ e $d_m(y) = ym + m = 0$

Portanto $ym = m$. Logo

(7) $m = \sum_{i=1}^{k}((\mathbf{yx})^{\gamma_i} + \mathbf{x(yx)}^{\gamma_i - 1})$.

Isto é claro pois se $(\mathbf{yx})^{\gamma_i}$ aparece na soma então $\mathbf{y(yx)}^{\gamma_i} = \mathbf{x(yx)}^{\gamma_i - 1}$ também aparece e vice-versa.

Se r é par em (6), consideremos os pares

$$(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4), \ldots, (\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}), \ldots, (\alpha_{r-1}, \alpha_r).$$

Podemos escrever $(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i-1}} + (\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}}$ da seguinte forma:

$$(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i-1}} + (\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}} = \sum_{j=0}^{(\alpha_{2i}-\alpha_{2i-1})-1} ((\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j} + (\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j-1}).$$

Analogamente, podemos escrever $\mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i-1}} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}}$ como

$$\mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i-1}} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}} = \sum_{j=0}^{(\alpha_{2i}-\alpha_{2i-1})-1} (\mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j-1})$$

Portanto

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=0}^{(\alpha_{2i}-\alpha_{2i-1})-1} ((\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j} + (\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j-1} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j-1}).$$

Seja $\gamma_i = \sum_{i=0}^{(\alpha_{2i}-\alpha_{2i-1})-1} ((\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i}-j-1})$.

Daí $d_{\gamma_i} \in P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ e temos $f(x) = \sum_{i=1}^{r} d_{\gamma_i}(x) = d_{(\sum_{i=1}^{r}\gamma_i)}(x)$.

Colocando $m = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i$ temos que $f(x) = d_m(x)$ com $d_m \in P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$.

Suponhamos agora que r é impar. Seja $\alpha_0 = -1$. Temos que

$$P = (\mathbf{yx})^0 + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^0 + (\mathbf{yx})^{\alpha_0} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_0} = 0$$

Daí

$$f(x) = f(x) + P = (\sum_{i=0}^{r} (\mathbf{yx})^{\alpha_i}) + (\mathbf{yx})^0 + (\sum_{i=0}^{r} \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_i}) + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^0$$

Aplicando o raciocínio anterior para os pares

$$(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_2, \alpha_3), \ldots, (\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}), \ldots, (\alpha_{r-1}, \alpha_r)$$

obtemos do fato de $d_1 \in P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$;

$$f(x) = d_{\sum_{i=0}^{r}\lambda_i}(x) + \mathbf{x} + \mathbf{1} = d_{((\sum_{i=0}^{r}\lambda_i)+1)}$$

com $\lambda_i = \sum_{j=0}^{(\alpha_{2i+1}-\alpha_{2i})-1} ((\mathbf{yx})^{\alpha_{2i+1}-j} + \mathbf{x}(\mathbf{yx})^{\alpha_{2i+1}-j-1})$ e neste caso colocamos $m = (\sum_{i=0}^{r}\lambda_i + 1)$

Logo $f(x) = d_m(x)$ com $d_m \in P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$, o que prova a afirmação.

Como $d_m \in P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S)) \subset Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))$ temos que as formulas (1), (2), (3) e (4) valem para d_m.

Portanto $f(g) = d_m(g)$, para todo $g \in G$ e daí temos que $f \in P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))$ o que nos dá $\dfrac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))} = 0$.

Temos então $E(G,S) = 1$.

Finalizando este parágrafo demonstramos uma generalização de [5, IV.2.3] para o quociente $\dfrac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}$.

Para isto, recordemos algumas definições.

Seja M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

Dada uma sequência exata cindida

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \to G \to 1 \qquad (*)$$

dizemos que dois levantamentos $s_1, s_2 : G \to E$ são M-conjugados se existe um elemento $m \in M$ tal que $s_1(g) = i(m)s_2(g)i(m)^{-1}$, para todo $g \in G$.

Denotemos por $[s_1]$ a classe de levantamentos da sequência exata $(*)$, M-conjugados a s_1, isto é,

$$[s_1] = \{s : G \to E \mid s \text{ é } M\text{-conjugado a } s_1\}$$

Consideremos a extensão

$$0 \to M \to M \rtimes G \to G \to 1 \qquad (**)$$

onde $\rtimes$ denota o produto semi-direto de G e M relativo a dada ação de G em M ($g.m = (1g).m$, $1 \in \mathbb{Z}_2$).

Um levantamento $s : G \to M \rtimes G$ tem a forma $s(g) = (d(g), g)$ onde $d \in Der(G,M)$.

Daí, se s_1, s_2 são dois levantamentos M-conjugados de $(**)$ e uma vez que $(m,1)(n,g)(m,1)^{-1} = (m+n-gm, g)$ em $M \rtimes G$, $s_1(g) = (d_1(g), g)$ e $s_2(g) = (d_2(g), g)$, temos

$$d_1(g) = m + d_2(g) - gm.$$

Ou seja, $d_2(g) - d_1(g) = gm - m = d_m(g)$. Isto é, $d_2 - d_1 \in P(G,M)$.

Seja $\mathcal{M}(G,S,M)$ o conjunto das classes M-conjugadas $[s]$ de levantamentos $s: G \to M \rtimes G$, tal que $s_{|S} = (0, id_S)$.

Temos então o seguinte resultado:

(II.1.6) Proposição: *Seja G um grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então $\mathcal{M}(G,S,M)$ está em correspondência biunivoca com os elementos de $\dfrac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}$.*

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} s \;:\; G &\to M \rtimes G \\ g &\to (d(g), g) \end{aligned}$$

com $d \in Der(G,M)$, um levantamento da extensão

$$0 \to M \to M \rtimes G \to G \to 1.$$

Se $s_{|S} = (0, id_S)$ então $d \in Der(G,S,M)$. Considere

$$\begin{aligned} \psi \;:\; \mathcal{M}(G,S,M) &\to \frac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)} \\ [s] &\to d + P(G,S,M) \end{aligned}$$

ψ está bem definida pois, se $[s_1] = [s_2]$ existe $m \in M$ tal que

$$s_1(g) = i(m)s_2(g)i(m)^{-1} \text{ , para todo } g \in G.$$

Portanto, se $s_1(g) = (d_1(g), g)$ e $s_2(g) = (d_2(g), g)$ temos pelas observações anteriores que

$$d_2 - d_1 \in P(G,M).$$

Mas como $d_1, d_2 \in Der(G,S,M)$ temos que $d_2 - d_1 \in P(G,S,M)$. Logo $\psi([s_1]) = \psi([s_2])$.

Além disso, ψ é bijetora. De fato

$$\begin{aligned} \phi \;:\; \frac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)} &\to \mathcal{M}(G,S,M) \\ d + P(G,S,M) &\to [s] \end{aligned}$$

tal que $s(g) = (d(g), g)$, está bem definida, pois se $d_1 - d_2 \in P(G, S, M)$ então $[s_1] = [s_2]$ em $\mathcal{M}(G, S, M)$, e é inversa de ψ. □

II.2 - O Invariante E(G, S) e dualidade

Vamos agora estudar o invariante $E(G, S)$ no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade.

Usaremos os isormorfismos de dualidade para computar $E(G, S)$ em alguns casos especiais.

(II.2.1) Proposição: *Seja G um D^n-grupo com módulo dualizante C. Então*

(i) *Se S é um D^{n-1}-subgrupo de G com módulo dualizante $Res^G_S C$ temos que $E(G, S) \leq 2$.*

(ii) *Se S é subgrupo de G com dimensão homológica menor ou igual a $n-2$, temos que $E(G, S) = 1$.*

Demonstração: Em qualquer caso, (i) ou (ii), temos que $[G : S] = \infty$ (por (I.4.7)(ii)). Logo podemos definir $E(G, S)$. Além disso:

$$\begin{aligned} H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) &= H_{n-1}(G; C \otimes \mathbb{Z}_2(G/S)) && \text{(por dualidade de G)} \\ &= H_{n-1}(G; C \otimes Ind^G_S \mathbb{Z}_2) \\ &= H_{n-1}(G; Ind^G_S(Res^G_S C \otimes \mathbb{Z}_2)) && \text{(por (I.2.10))} \\ &= H_{n-1}(S; Res^G_S C \otimes \mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.2.6)(i))} \end{aligned}$$

Se S é um D^{n-1}-subgrupo com módulo dualizante $Res^G_S C$, temos:

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) = H_{n-1}(S, Res^G_S C \otimes \mathbb{Z}_2) = H^0(S; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

Portanto dim Ker $res^G_S \leq 1$ e daí $E(G, S) \leq 2$.

Se a dimensão homológica de S é menor que $n - 1$ temos que

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) = H_{n-1}(S; Ind^G_S((Res^G_S C) \otimes \mathbb{Z}_2)) = 0$$

Logo Ker $res^G_S = 0$ e daí $E(G,S) = 1$. □

(II.2.2) Exemplos:

(i) Se $G = \mathbb{Z}^k$ e $S = \mathbb{Z}^{k-1} \leq G$, então $E(G,S) \leq 2$.

De fato, $G = \Pi_1(T^k)$, onde $T^k = S^1 \times \ldots \times S^1$ (k vezes), é um PD^k-grupo e $S = \Pi_1(T^{k-1})$ é um PD^{k-1}-subgrupo. O resultado segue pela proposição anterior parte (i).

(ii) Se $G = \mathbb{Z}^k$ e $S = \mathbb{Z}^{k-2}$ então $E(G,S) = 1$.

Isto decorre da parte (ii) da proposição, visto que G é um PD^k- grupo, e $hdS = k-2$.

(iii) Se G é um D^n-grupo qualquer, $n \geq 2$, e S um subgrupo finito de G então $E(G,S) = 1$.

Claro que do fato de G ser D^n-grupo, a ordem de S é impar (por (I.4.13)(i)). Logo S não tem $\mathbb{Z}_2$-torção e portanto S é um D^0-subgrupo (por (I.4.14)(i)). Logo $hdS = 0 \leq n-2$.

O resultado segue novamente de (II.2.1)(ii).

(iv) Seja $G = \Pi_1(M^3)$ onde $M = X \times S^1$ com X a superfície orientada de genus 2. Temos então $\Pi_1(M^3) = H \times K$ onde $K = < t > \simeq \mathbb{Z}$ e $H =< a_1, b_1, a_2, b_2; (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) = 1 >$. Seja $S =< a_1 a_2^{-1} >$. Então G é um PD^3-grupo, H é um PD^2- subgrupo e K, S são PD^1-subgrupos. Portanto $E(G,K) = E(G,S) = 1$, $E(G,H) \leq 2$ e $E(H,S) \leq 2$.

É conhecido que se G é um D^n-grupo, $n > 1$, então o número de ends clássico de G, $e(G)$ é 1. (ver o próximo parágrafo e [3])

Veremos agora um resultado semelhante para D^n-pares, que nos dá uma condição necessária para que um par grupo (G,S) seja de dualidade.

(II.2.3) Proposição: *Se (G,S) é um D^n-par com $[G : S] = \infty$ então* $E(G,S) = 1$.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Demonstração: Considere a sequência exata longa (I.3.4)(i) para o par (G,S) e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$:

$$0 \to H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^0(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{\delta} H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{J} \cdots$$

Seja C o módulo dualizante de (G,S). Então:

$$\begin{aligned} H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S)) &\simeq H_{n-1}(G;C \otimes \mathbb{Z}_2(G/S)) && \text{(por dualidade)} \\ &\simeq H_{n-1}(G;Ind_S^G(Res_S^G C \otimes \mathbb{Z}_2)) && \text{(por (I.2.10))} \\ &\simeq H_{n-1}(S;C \otimes \mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.2.6)(i))} \\ &\simeq H^0(S;\mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.4.19)(iii))} \\ &\simeq \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) = (\mathbb{Z}_2(G/S))^G = (Ind_S^G \mathbb{Z}_2)^G = 0$ desde que $[G:S] = \infty$ (por (I.2.11))

Além disso $H^0(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) = \mathbb{Z}_2(G/S)^S$ contém $\{0,1S\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Daí $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_2(G/S)^S \overset{\delta}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}_2$ o que nos dá $\mathbb{Z}_2(G/S)^S = \mathbb{Z}_2$.

Portanto Ker $res_S^G \simeq ImJ \simeq \dfrac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = 0$, e assim $E(G,S) = 1$.

□

(II.2.4) Exemplos:

(i) Considere $G = < t > * < s > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = < sts^{-1}t^{-1} > \simeq \mathbb{Z}$. Então (G,S) é um PD^2-par e portanto $E(G,S) = 1$.

De fato, sejam X o toro menos um disco aberto D^2 e $Y = \partial X \simeq S^1$. Daí X é homotopicamente equivalente a figura oito. Portanto $\Pi_1(X) = < s > * < t > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $\Pi_1(Y) = < sts^{-1}t^{-1} > = S$. Por (I.4.21), (G,S) é um PD^2-par e o resultado segue da proposição anterior.

(ii) Se $G = < t > * < s > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = < s > \simeq \mathbb{Z}$ então (G,S) não é um PD^2-par pois $E(G,S) = \infty$.

De fato, como G é um produto livre, todo elemento de G pode ser unicamente expresso na forma $t^{r_1}s^{l_1}t^{r_2}s^{l_2}\ldots t^{r_n}s^{l_n}$ onde $n \geq 1, r_i, l_i$ são números inteiros e são não nulos exceto possivelmente para r_1 e l_n.

Seja f um elemento de $Der(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$. Temos que

(1) $f(t^r) = \sum_{i=0}^{r-1} t^i f(t)$ e $f(t^{-r}) = \sum_{i=1}^{r} t^{-i} f(t)$ para todo $r > 0$.

(2) $f(t^{r_1}s^{l_1} \dots t^{r_n}s^{l_n}) = \sum_{j=1}^{n} t^{r_1}s^{l_1} \dots t^{r_{j-1}}s^{l_{j-1}} f(t^{r_j})$.

As fórmulas (1) pode ser provada facilmente por indução sobre r e (2) pode ser provada por indução sobre n.

Portanto, qualquer derivação $f \in Der(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ depende apenas de $f(t)$.

Temos que $\mathbb{Z}_2(G/S)$ é o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelas classes gS.

Dadas duas classes g_1S e g_2S de S temos que $g_1S = g_2S \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 = s^l \Leftrightarrow g_1 = g_2s^l$ para algum $l \in \mathbb{Z}$.

Daí $E = \{1\} \cup \{t^{r_1}s^{l_1} \dots t^{r_{k-1}}s^{l_{k-1}}t^{r_k}$ onde $k \geq 1, r_j, l_j \in \mathbb{Z}$ e são não nulos exceto possivelmente para $r_1\}$, é um conjunto de representantes para as classes gS.

Seja $f_j, j \in \mathbb{Z}$, derivações tais que $f_j(t) = s^jtS$. Temos que $f_j \notin P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$.

De fato, se $f_j \in P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ teremos $f_j(t) = t\alpha + \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{Z}_2(G/S)$. Logo $\alpha = x_1S + x_2S + \cdots + x_rS$ onde $x_i \in E$ e $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Se xS é um gerador de $\mathbb{Z}_2(G/S)$ então txS também o é.

Portanto $t\alpha + \alpha$ é uma soma de geradores de $\mathbb{Z}_2(G/S)$ (possivelmente não distintos), com um número par de termos.

Mas s^jtS também é gerador de $\mathbb{Z}_2(G/S)$. Logo $\sigma = t\alpha + \alpha + s^jtS = 0$ é uma soma nula com um número impar de geradores de $\mathbb{Z}_2(G/S)$.

Temos que x_jS é igual a no máximo um termo tx_kS e $tx_iS \neq tx_jS$ para $i \neq j$. Além disso $g_jS \neq g_lS + g_kS$ se $g_j, g_l, g_k \in E$.

Portanto se cancelarmos os termos que aparecem duas vezes na soma σ ficaremos com um número impar de geradores distintos, o que é um absurdo, pois $\sigma = 0$.

Logo $f_j(t) \neq t\alpha + \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2(G/S)$. Daí f_j não é derivação principal.

Suponhamos agora que

$$f_j + P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S)) = f_i + P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))$$

Então $f_j(t) + f_i(t) = t\alpha + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2(G/S)$, α uma soma finita de geradores distintos de $\mathbb{Z}_2(G/S)$. Assim

$$s^j tS + s^i tS = t\alpha + \alpha$$

Suponhamos $s^i tS \neq s^j tS$ Como $s^i tS$ é um gerador de $\mathbb{Z}_2(G/S)$ temos que $s^i tS$ aparece em α ou em $t\alpha$.

Se $s^i tS$ aparece em α, então $ts^i tS$ aparece uma única vez em $t\alpha$ ($txS = tyS \Leftrightarrow xS = yS$). Logo $ts^i tS$ aparece em α. Daí $t^2 s^i tS$ aparece em $t\alpha$ e assim por diante, concluimos que α é uma soma infinita, o que é um absurdo. Assim $s^i tS = s^j tS$ o que implica $i = j$.

Portanto, $\{f_j + P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S)), j \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto infinito de elementos de $\dfrac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}$ e daí $E(G,S) = \infty$.

(II.2.5) Observação: Uma observação interessante a fazer, que é consequência dos dois exemplos anteriores e ilustra uma aplicação de nosso invariante, é o fato de que não existe isomorfismo do par $(< t > * < s >, < sts^{-1}t^{-1} >)$ no par $(< t > * < s >, < s >)$ apesar de $< sts^{-1}t^{-1} >$ ser isomorfo a $< s >$.

II.3- Relação de E(G,S) com o invariante e(G,S).

Neste parágrafo estudaremos as relações existentes entre o invariante $E(G,S)$ por nós definido e os invariantes ends $e(G)$ (definido por Freudenthal [12], Hopf [13] e Specker [27]) e $e(G,S)$ (definido por Houghton [14] e Scott [24]).

Para facilidade do leitor, recordaremos aqui as definições e algumas propriedades básicas de $e(G)$ e $e(G,S)$. Para maiores detalhes ver [24] e [25].

Seja G um grupo atuando em si mesmo por multiplicação à esquerda e consideremos $PG = \{A : A \subset G\}$ o conjunto potência de G. Temos que PG é um grupo

abeliano com a operação diferença simétrica e é um $\mathbf{Z}_2G$-módulo no qual G atua por multiplicação à esquerda, isto é, $g.A = \{ga : a \in A\}$

Denotaremos por $\overline{\mathbf{Z}_2G}$ o $\mathbf{Z}_2G$-módulo $Coind_{\{1\}}^G \mathbf{Z}_2 = Hom(\mathbf{Z}_2G, \mathbf{Z}_2)$.

A aplicação

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \overline{\mathbf{Z}_2G} &\rightarrow PG \\ f &\rightarrow \phi(f) = \{g \in G : f(g^{-1}) \neq 1\} \end{aligned}$$

é um $\mathbf{Z}_2G$-isomorfismo e o submódulo $\mathbf{Z}_2G$ de $\overline{\mathbf{Z}_2G}$ é levado por ϕ em $FG = \{F \subset G : F \text{é finito}\}$.

Portanto identificaremos PG com $\overline{\mathbf{Z}_2G}$ e FG com $\mathbf{Z}_2G$.

Da mesma forma, se S é um subgrupo de G, consideramos $G/S = \{gS : g \in G\}$ e podemos identificar $\overline{\mathbf{Z}_2(G/S)} = Hom(\mathbf{Z}_2(G/S), \mathbf{Z}_2) = Coind_S^G \mathbf{Z}_2$ (por (I.2.7)(ii)) com $P(G/S)$ e $\mathbf{Z}_2(G/S)$ com $F(G/S)$.

Sejam

$$E(G) = \frac{\overline{\mathbf{Z}_2G}}{\mathbf{Z}_2G} \quad \text{e} \quad E(G/S) = \frac{\overline{\mathbf{Z}_2(G/S)}}{\mathbf{Z}_2(G/S)}.$$

(II.3.1) Definição: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G*

(i) $e(G) = dim\ H^0(G; E(G)) = dim\ E(G)^G$.

(ii) $e(G,S) = dim\ H^0(G, E(G/S)) = dim\ E(G/S)^G$.

Algumas propriedades básicas desses invariantes são:

(II.3.2) *Se G é um grupo e S subgrupo de G então*

(i) $e(G, \{1\}) = e(G)$

(ii) $e(G) = 0$ *se, e somente se, G é finito.*

(iii) $e(G,S) = 0$ *se, e somente se,* $[G : S] < \infty$

(iv) *Se G_1 é subgrupo de G com* $[G : G_1] < \infty$ *então* $e(G) = e(G_1)$. *Se além disso* $G_1 \supset S$ *então* $e(G_1, S) = e(G, S)$.

(v) *Se S é normal em G então* $e(G,S) = e(G/S)$

A teoria de ends de grupos está bastante relacionada com a teoria de ends de espaços.

Dado um CW-complexo X localmente finito temos,

$$e(X) = sup\{n(K), K \text{subcomplexo finito de} X\}$$

onde $n(K)$ é o número de componentes conexas ilimitadas de $X - K$.

Por exemplo, se $X = \mathbb{R}^n$, $n > 1$ e K é qualquer subcomplexo finito de X então $n(K) = 1$. Logo $e(\mathbb{R}^n) = 1$. Se $X = \mathbb{R}$ então $n(K) = 2$, para qualquer subcomplexo finito K. Logo $e(\mathbb{R}) = 2$.

Se G é finitamente gerado, podemos construir o diagrama de Cayley de G denotado por Γ, da seguinte forma: os vértices de Γ são os elementos de G e para $g \in G$ existe uma aresta unindo g e yg onde y é um gerador de G.

Claramente G atua em Γ à direita.

Por exemplo, se $G =< t > \simeq \mathbb{Z}$, Γ pode ser identificado com a reta usual.

É válido o seguinte resultado:

(II.3.3) *Se Γ é o Diagrama de Cayley de um grupo finitamente gerado G então $e(G) = e(\Gamma)$. Se além disso S é um subgrupo de G então $e(G,S) = e(\Gamma/S)$ onde Γ/S denota o quociente de Γ pela ação à direita de S.*

No exemplo acima $e(\mathbb{Z}) = e(\Gamma) = 2$.

A teoria de ends de grupos está também relacionada com recobrimentos regulares. Temos:

(II.3.4) *Sejam X um CW-complexo finito, $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento conexo com grupo de transformações de recobrimento G e S um subgrupo de G. Então $e(G) = e(\tilde{X})$ e $e(G,S) = e(\tilde{X}/S)$ onde $\tilde{X}/S$ denota o quociente de $\tilde{X}$ pela ação de S.*

(II.3.5) Exemplo: Seja $\tilde{X} = \mathbb{R}^n$ e $X = T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ vezes}}$. Temos então $p : \mathbb{R}^n \to T^n$ recobrimento regular (universal) com grupo de transformações de recobrimento $G = \Pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ e $X = T^n$ é CW complexo finito. Logo pelo resultado

anterior temos

$$e(\mathbb{Z}^n) = e(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Se $S = \mathbb{Z}^{n-j} \leq \mathbb{Z}^n = G$, $1 \leq j < n$, então

$$e(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^{n-j}) = e(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^{n-j}) = e(T^{n-j} \times \mathbb{R}^j) = \begin{cases} 2 & \text{se } j = 1 \\ 1 & \text{se } 1 < j < n. \end{cases}$$

Outros resultados interessantes a respeito de $e(G)$ e $e(G,S)$ são sobre os quais valores esses invariantes podem assumir sob certas hipóteses:

(II.3.6) *Seja G um grupo infinito finitamente gerado e S um subgrupo de G. Então:*

(i) *$e(G)$ assume apenas os valores 1,2 e ∞.*

(ii) *Se $[N_G(S) : S] = \infty$, onde $N_G(S)$ é o normalizador de S em G, então $e(G,S) = 1, 2$ ou ∞.*

Sem a hipótese $[N_G(S) : S] = \infty$, $e(G,S)$ pode assumir qualquer valor n, $n \in \mathbb{N}$. ([24, exer. 2.3]).

É conhecido, que se G é finitamente gerado então a dimensão de $H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$ é 0,1 ou ∞ ([13]).

Daí o resultado (II.3.6) (i) pode ser visto como consequência do seguinte fato:

(II.3.7) *Se G é um grupo infinito então*

$$e(G) = 1 + dim\ H^1(G; \mathbb{Z}_2G).$$

Estamos interessados em demonstrar um resultado semelhante a (II.3.6), porém com hipóteses mais restritivas, para $E(G,S)$. Não sabemos se o mesmo é válido sob hipóteses mais gerais.

Para isto necessitamos do seguinte lema:

(II.3.8) Lema: *Se G é um grupo infinito finitamente gerado com $vcdG < \infty$, então qualquer $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$ tem dimensão 0,1 ou ∞ quando considerado como $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial.*

Demonstração: Como $vcdG < \infty$ temos, por (I.4.6)(iii), que existe S subgrupo de G com $[G : S] < \infty$ e $cdS < \infty$. Daí, por (I.4.16)(i), $H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$ é $\mathbb{Z}_2S$-isomorfo a $H^1(S;\mathbb{Z}_2S)$. Logo todo $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$ pode ser visto, em particular, como um $\mathbb{Z}_2S$-submódulo de $H^1(S;\mathbb{Z}_2S)$.

Portanto, basta demonstrarmos o lema para o subgrupo S.

Seja V um $\mathbb{Z}_2S$-submódulo de $H^1(S;\mathbb{Z}_2S)$ com $0 < \dim V < \infty$.

Como G é finitamente gerado e $[G : S] < \infty$ então, por [23,1.6.11], temos que S é finitamente gerado. Daí, por (I.4.2)(ii), S é do tipo FP_1.

Do fato de G ser infinito e $[G : S] < \infty$ temos que S é infinito. Logo, por (I.2.11), $H^0(S;\mathbb{Z}_2S) = 0$.

Portanto, estamos nas hipóteses de (I.4.11) de onde concluimos que $H^1(S;\mathbb{Z}_2S) \simeq \mathbb{Z}_2$ e daí $\dim V = 1$. □

Nota: No artigo [10], Farrell afirma que o resultado anterior vale apenas supondo G finitamente presentado. Porém não encontramos a demonstração deste fato em nenhuma das referências pesquisadas.

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte fato:

(II.3.9) Teorema: *Sejam G um grupo, $S \subset N$ subgrupos de G com S normal em N e $[G : S] = \infty$. Suponhamos que N/S seja finitamente gerado com $vcd(N/S) < \infty$ e que $\varphi^* : H^1(G; Ind_N^G\mathbb{Z}_2(N/S)) \to H^1(G; Coind_N^G\mathbb{Z}_2(N/S))$, induzida do mergulho $\varphi : Ind_N^G(\mathbb{Z}_2(N/S)) \to Coind_N^G(\mathbb{Z}_2(N/S))$, seja monomorfismo. Então $E(G,S)$ assume somente os valores 1,2 ou ∞.*

Demonstração: Como $E(G,S) = 1+\dim \text{Ker } res_S^G$ onde res_S^G é a aplicação restrição : $H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S))$ vamos provar que $\text{Ker } res_S^G$ é $\mathbb{Z}_2(N/S)$-isomorfo a um $\mathbb{Z}_2(N/S)$-submódulo de $H^1(N/S,\mathbb{Z}_2(N/S))$. Daí aplicando

(II.3.8) obtemos o resultado desejado.

Denotemos por $\overline{g}$ a classe gS, $g \in G$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \mathbb{Z}_2(G/S) &\rightarrow \mathbb{Z}_2(N/S) \\ \overline{g} &\rightarrow \varphi(g \otimes \overline{1})(1) \end{aligned}$$

onde φ é o mergulho definido em (I.2.4).

Na verdade ϕ é a composta das seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \psi \ : \ \mathbb{Z}_2(G/S) &\rightarrow \mathbb{Z}_2G \otimes_N \mathbb{Z}_2(N/S) \\ \overline{g} &\rightarrow g \otimes \overline{1} \end{aligned}$$

$$\varphi : \mathbb{Z}_2G \otimes_N \mathbb{Z}_2(N/S) \rightarrow Hom_N(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2(N/S)) \text{ e}$$

$$\pi : Hom_N(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2(N/S)) \rightarrow \mathbb{Z}_2(N/S)$$

definida em (I.2.7)(i).

Logo $\phi = \pi \circ \varphi \circ \psi$. Explicitamente temos

$$\phi(\overline{g}) = \begin{cases} \overline{g1} & \text{se } g \in N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere $id_G : G \rightarrow G$ e a inclusão $i : N \hookrightarrow G$. Temos que $(i,\phi)^* : H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(N;\mathbb{Z}_2(N/S))$ é a composta $(i,\pi)^* \circ (id_G,\varphi)^* \circ (id_G,\psi)^* = (i,\pi)^* \circ \varphi^* \circ \psi^*$ e é monomorfismo pois $(i,\pi)^*$ é o isomorfismo de Shapiro (I.2.7)(i), φ^* é monomorfismo por hipótese e ψ^* é isomorfismo pois ψ é.

Temos também que $\phi^* : H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(S;\mathbb{Z}_2(N/S))$ é induzida de (id_S, ϕ).

Seja $p : N \rightarrow N/S$ a projeção canônica.

Da sequência exata dos cinco termos (ver [20,p.355]) temos:

$$0 \rightarrow H^1(N/S;\mathbb{Z}_2(N/S)) \xrightarrow{p^*} H^1(N;\mathbb{Z}_2(N/S)) \xrightarrow{res_S^N} H^1(S;\mathbb{Z}_2(N/S))$$

com Im p^* = Ker res_S^N. Portanto $H^1(N/S;\mathbb{Z}_2(N/S)) \simeq$ Ker res_S^N.

Logo temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) & \overset{res_S^G}{\to} & H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) \\ & & \downarrow (i,\phi)^* & (\mathrm{I}) & \downarrow \phi^* \\ H^1(N/S;\mathbb{Z}_2(N/S)) & \overset{p^*}{\rightarrowtail} & H^1(N;\mathbb{Z}_2(N/S)) & \overset{res_S^N}{\to} & H^1(S;\mathbb{Z}_2(N/S)) \end{array}$$

Do fato de S ser normal em N temos definida um ação à direita de N/S em $\mathbb{Z}_2(G/S)$, isto é, $\overline{g}.\overline{n} = \overline{gn}$. Temos também uma ação à direita natural de N/S em $\mathbb{Z}_2(N/S)$ dada por $\overline{n}.\overline{n_1} = \overline{nn_1}$.

Portanto $\mathbb{Z}_2(G/S)$ e $\mathbb{Z}_2(N/S)$ são $\mathbb{Z}_2(N/S)$-módulos à direita e podemos ver facilmente que induzem estrutura de $\mathbb{Z}_2(N/S)$-módulos à direita nos grupos de cohomologia acima, a saber:

$$[f].\overline{n} = [f.\overline{n}] \text{ onde } (f.\overline{n})(x) = f(x).\overline{n}$$

com f representando uma classe de cohomologia e $f(x) \in \mathbb{Z}_2(G/S)$ ou $f(x) \in \mathbb{Z}_2(N/S)$.

As aplicações res_S^G, res_S^N, e p^* são claramente aplicações de $\mathbb{Z}_2(N/S)$-módulos.

Vamos verificar que $(i,\phi)^*$ é $\mathbb{Z}_2(N/S)$-aplicação.

Notemos primeiro que ϕ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2(N/S)$-módulos. De fato:

$$\phi(\overline{g}.\overline{n}) = \begin{cases} \overline{gn} & \text{se } g \in N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \phi(\overline{g}).\overline{n} = \begin{cases} \overline{gn} & \text{se } g \in N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto $\phi(\overline{g}.\overline{n}) = \phi(\overline{g}).\overline{n}$. Logo $(i,\phi)^*$ é $\mathbb{Z}_2(N/S)$-monomorfismo.

Como res_S^G é $\mathbb{Z}_2(N/S)$-homomorfismo, temos que Ker res_S^G é $\mathbb{Z}_2(N/S)$-submódulo de $H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S))$.

Do fato do diagrama (I) ser comutativo temos que $(i,\phi)^*(\text{Ker } res_S^G) \subset \text{Ker } res_S^N$.

Portanto $p^{*^{-1}}((i,\phi)^*(\text{Ker } res_S^G))$ é um $\mathbb{Z}_2(N/S)$-submódulo de $H^1(N/S;\mathbb{Z}_2(N/S))$. Daí

$$\begin{aligned}
\dim \text{Ker } res_S^G &= \dim (i,\phi)^*(\text{Ker } res_S^G) && ((i,\phi)^* \text{é monomorfismo}) \\
&= \dim p^{*-1}(i,\phi)^*(\text{Ker } res_S^G) && (p^* \text{é monomorfismo}) \\
&= 0,\ 1,\ \text{ou } \infty && (\text{por (II.3.8)}).
\end{aligned}$$

Portanto $E(G,S) = 1, 2$ ou ∞. □

(II.3.10) Corolário: *Sejam $S \subseteq N \subseteq G$ grupos com S normal em N, $[G : N] < \infty$ e $[G : S] = \infty$. Se N/S é finitamente gerado e $vcd(N/S) < \infty$ então $E(G,S)$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞.*

Demonstração: Segue do fato que se $[G : N] < \infty$ então, por (I.2.5), $\varphi : Ind_N^G M \to Cond_N^G M$ é isomorfismo para qualquer $\mathbb{Z}_2 N$-módulo M. Em particular para $M = \mathbb{Z}_2(N/S)$. Daí o teorema anterior se aplica. □

(II.3.11) Exemplos:

(i) Sejam G um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo de G com $[N : S] = \infty$ onde N é o normalizador de S em G.

Então por [17,lema 3.1] temos que $[G : N] < \infty$ e N/S tem um subgrupo cíclico L/S de índice finito. Daí $vcd(N/S) = 1$.

Além disso como G é finitamente gerado temos que N, e daí N/S, são finitamente gerados.

Logo estamos nas hipóteses de (II.3.10) e daí $E(G,S) = 1, 2$ ou ∞ (já tinhamos visto em (II.2.1)(i) que $E(G,S) \leq 2$ nestas hipóteses).

(ii) Seja H um grupo com $e(H) = \infty$, $vcdH < \infty$ e H finitamente gerado (por exemplo H igual ao grupo livre com n geradores, $n > 1$). Consideremos os grupos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p$ onde p é qualquer número inteiro positivo. Temos que $\mathbb{Z}$ atua em $\mathbb{Z}_p$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p &\to \mathbb{Z}_p \\
(n, \overline{m}) &\to n.\overline{m} = (-1)^n.\overline{m}.
\end{aligned}$$

Logo podemos tomar o produto semidireto $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}$ onde a operação de grupo é dada por

$(\overline{n}, a) * (\overline{m}, b) = (\overline{n} + a.\overline{m}, a + b) = (\overline{n} + (-1)^a \overline{m}, a + b)$.

Sejam $G = H \oplus (\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z})$, $N = H \oplus (\{0\} \rtimes \mathbb{Z})$ e $S = \{0\} \rtimes \mathbb{Z}$.

Se $p = 2$ temos que a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_2$ é trivial e daí $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Se $p \neq 2$ a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_p$ não é trivial e S não é normal em G.

Temos que $[G : N] < \infty$, $S \lhd N$, $[N : S] = \infty$ e $N/S \simeq H$.

Portanto estamos nas hipóteses de (II.3.10) e daí temos $E(G, S) = 1, 2$ ou ∞.

Vamos agora estudar a relação de $e(G, S)$ com o invariante $E(G, S)$.

Temos que, se G é um grupo infinito,

$$\begin{aligned} e(G) &= 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \quad \text{(por (II.3.7))} \\ &= 1 + \dim \frac{Der(G, \mathbb{Z}_2 G)}{P(G, \mathbb{Z}_2 G)} \quad \text{(por (I.1.6))} \end{aligned}$$

Desde que $e(G, \{1\}) = e(G)$, se segue de (II.1.4) que

$$e(G, \{1\}) = E(G, \{1\}) = 1 + \dim \frac{H^1(G, \{1\}; \mathbb{Z}_2 G)}{P(G, \{1\}, \mathbb{Z}_2 G)}$$

Nós observamos que para o end de pares $e(G, S)$, onde S é um subgrupo não trivial de G, não existe uma formula análoga (usando cohomologia relativa).

Como $E(G, S) = 1 + \dim \frac{H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}$, nossa esperança era provar que $E(G, S) = e(G, S)$ e daí obter uma fórmula similar para $e(G, S)$. Mas isto é falso em geral como veremos no seguinte teorema.

(II.3.12) Teorema: *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G com $[G : S] = \infty$. Então*

$$E(G, S) \leq e(G, S).$$

Se S é normal em G a igualdade é verdadeira e portanto

$$e(G, S) = 1 + dim \frac{H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}$$

Demonstração: Considere a sequência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/S) \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} \to E(G/S) \to 0$$

de $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

Em cohomologia temos induzida a sequência exata longa

$$0 \to H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^0(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \to H^0(G;E(G/S)) \xrightarrow{s}$$

$$\xrightarrow{s} H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{t} H^1(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \to \cdots \tag{1}$$

Mas $H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) = 0$ pois $[G:S] = \infty$ (por (I.2.11)) e $H^0(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) = H^0(S;\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ por (I.2.6)(ii).

Daí nós obtemos a sequência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to H^0(G;E(G/S)) \to \text{Ker } t \to 0$$

e portanto, por (II.3.1),

$$e(G,S) = 1 + \dim \text{Ker } t. \tag{2}$$

Tomando $A = \varphi(\mathbb{Z}_2(G/S))$, vemos que A é um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$, $\mathbb{Z}_2G$-isomorfo a $\mathbb{Z}_2(G/S)$ e nós temos $\dfrac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))} \simeq \dfrac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)}$. Daí

$$E(G,S) = 1 + \dim \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} \tag{3}$$

Considerando as aplicações

$$H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(G;A) \xrightarrow{t_1} H^1(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \xrightarrow{Shapiro} H^1(S;\mathbb{Z}_2)$$

(com $t: H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ e $t_2: H^1(G;A) \to H^1(S;\mathbb{Z}_2)$)

nós temos

$$\text{Ker } t \simeq \text{Ker } t_1 = \text{Ker } t_2 \tag{4}$$

O homomorfismo

$$\psi : \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} \to \frac{Der(G,A)}{P(G,A)} \simeq H^1(G;A)$$

definido por $\psi(f + P(G,S,A)) = [f] = f + P(G,A)$ é um monomorfismo e daí

$$\frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} \simeq \text{Im } \psi = \{[f] : f \in Der(G,S,A)\}$$

Para provar a primeira parte do teorema, nós necessitamos somente mostrar que

$$\text{Im } \psi \subset \text{Ker } t_2 \tag{5}$$

Se isto ocorrer teremos

$$\begin{aligned} E(G,S) &= 1 + \dim \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} \quad \text{(por (3))} \\ &= 1 + \dim \text{Im } \psi \\ &\leq 1 + \dim \text{Ker } t_2 \quad \text{(por (5))} \\ &= 1 + \dim \text{Ker } t \quad \text{(por (4))} \\ &= e(G,S) \quad \text{(por (2))} \end{aligned}$$

Para provar (5) nós vemos que $t_2 : H^1(G,A) \to H^1(S,\mathbb{Z}_2)$ é a aplicação induzida por $(S \xrightarrow{\alpha} G,\ A \xrightarrow{\pi'} \mathbb{Z}_2)$ onde α é a inclusão de S em G e π' é a composição das aplicações

$$A \xrightarrow{k} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} \xrightarrow{\rho} Coind_S^G \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2,$$

onde k é a inclusão, ρ é a aplicação ϕ^{-1} definida em (I.2.7)(ii) e π é definida em (I.2.7)(i).

Daí $\pi'(f) = (\pi \circ \rho \circ k)(f) = \rho(f)(1) = f(1S)$ e π' é um $\mathbb{Z}_2 S$-homomorfismo.

Sejam $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ e $F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ resoluções Bar para S e G respectivamente. Considere $\tau : P \to F$ a inclusão. Nós temos claramente que $\tau(sx) = s\tau(x)$. Daí, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & C^0(G,A) & \xrightarrow{\delta^1} & C^1(G,A) & \xrightarrow{\delta^2} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi'^{\#} & & \\ 0 & \to & C^0(S,\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\overline{\delta^1}} & C^1(S,\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\overline{\delta^2}} & \cdots \end{array}$$

onde $\pi'^{\#} = \pi' \circ f \circ \tau$. Logo, $t_2[f] = [\pi' \circ f \circ \tau]$.

Considere $[f] \in \text{Im } \psi$. Então $f \in \text{Ker } \delta^2$ e $f_{|S} = 0$ pois $f \in Der(G,S,A)$. Além disso $\pi' \circ f \circ \tau : S \to \mathbb{Z}_2$ satisfaz $(\pi' \circ f \circ \tau)(s) = \pi'(f(s)) = f(s)(1.S) = 0$. Se segue que $t_2[f] = 0$ e daí $\text{Im } \psi \subset \text{Ker } t_2$.

Para provar a igualdade no caso S normal em G observe que $P(G,S,A) = P(G,A)$ pois a ação de S em $\mathbb{Z}_2(G/S)$ é trivial. Daí

$$\frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} = \frac{Der(G,S,A)}{P(G,A)} \subset \frac{Der(G,A)}{P(G,A)} = H^1(G;A)$$

Então é suficiente mostrar que

$$\text{Ker } t_1 \subset \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} \tag{6}$$

De fato, se isto ocorrer teremos $e(G,S) \leq E(G,S)$, o qual, junto com a primeira parte fornece a igualdade desejada.

Para provar (6), seja $F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ a resolução Bar para G e considere a aplicação $(G \xrightarrow{\alpha} G, A \xrightarrow{k} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ com α igual a identidade de G e k a inclusão. Obviamente k é $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo e nós temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & C^0(G,A) & \xrightarrow{\delta^1} & C^1(G,A) & \to \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow k^{\#} & \\ 0 & \to & C^0(G,\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) & \xrightarrow{\overline{\delta^1}} & C^1(G,\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) & \to \cdots \end{array}$$

onde $k^{\#} = k \circ f$ induz $t_1 : H^1(G;A) \to H^1(G,\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$.

Seja $[f] \in \text{Ker } t_1 \subset H^1(G;A)$. Desde que $f \in \text{Ker } \delta^2 = Der(G,A)$, para provar (6), basta mostrar que $f_{|S} = 0$. Mas $0 = t_1[f] = [k \circ f]$ implica que $k \circ f \in \text{Im } \overline{\delta_1}$ e daí existe $u \in C^0(G,\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ tal que $k \circ f = \overline{\delta^1}u$.

Portanto $(k \circ f)(s) = f(s) = s.u[\,] - u[\,]$, para $s \in S$. Usando o fato que as ações de S em $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2(G/S)$ são triviais nós temos, para qualquer $xS \in \mathbb{Z}_2(G/S)$, $f(s)(xS) = s.u[\,](xS) - u[\,](xS) = u[\,](s^{-1}xS) - u[\,](xS) = u[\,](xS) - u[\,](xS) = 0$. Em outras palavras, $f_{|S} = 0$.

Portanto $f \in Der(G,S,A)$, como desejado. □

(II.3.13) Observação:

(i) A igualdade em (II.3.12) nem sempre ocorre. Por exemplo, em (II.2.4)(i) temos $E(G,S) = 1 < e(G,S) = \infty$ (ver [24,p.190]).

(ii) Em (II.2.2)(i) temos S normal em G e portanto $E(G,S) = e(G,S) = e(G/S) = 2$, por (II.3.5).

(iii) Se $E(G,S) = e(G,S)$ então não necessariamente S é normal em G. Em (II.1.5) temos $E(G,S) = 1$. Por [24, lema 2.6] $e(G,S) = 1$. Portanto $E(G,S) = e(G,S)$ e S não é normal em G.

É interessante investigar outros casos onde $e(G,S) = E(G,S)$ para $[G:S] = \infty$. Temos

$$E(G,S) = 1 + \dim \text{Ker } res_S^G \text{ e } e(G,S) = 1 + \dim \text{Ker } t$$

onde t é a aplicação utilizada na demonstração de (II.3.12). Portanto

$$E(G,S) = e(G,S) \Leftrightarrow \dim \text{Ker } res_S^G = \dim \text{Ker } t.$$

Temos a seguinte proposição.

(II.3.14) Proposição: *Sejam $S \subseteq G$ com $[G:S] = \infty$. Se a aplicação restrição $res_S^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S))$ é trivial então $E(G,S) = e(G,S)$.*

Demonstração: Se tivermos $res_S^G = 0$ então $\ker res_S^G = H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \supset$ Ker t e daí dim Ker $t \leq$ dim Ker res_S^G. Portanto $e(G,S) \leq E(G,S)$. A igualdade segue da primeira parte de (II.3.12). □

(II.3.15) Corolário: *Se G é um D^n-grupo e S um subgrupo de G com $hdS \leq n-2$ então $e(G,S) = E(G,S) = 1$.*

Demonstração: $res_S^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S))$ é trivial pois, na demonstração de (II.2.1)(ii), vimos nestas hipóteses que $H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) = 0$.

Como Ker res_S^G e Ker t estão contidos em $H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S))$ temos que Ker res_S^G =Ker $t = 0$ e daí temos o resultado desejado. □

(II.3.16) Corolário: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G com $[G:S] = \infty$. Suponhamos que a ordem de S, m, é impar. Então $E(G,S) = e(G,S)$.*

Demonstração: Consideremos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_m : \ \mathbb{Z}_2(G/S) &\to \mathbb{Z}_2(G/S) \\ \alpha &\to m.\alpha = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{\text{m vezes}} \end{aligned}$$

Como m é impar, temos que $m.\alpha = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2(G/S)$. Portanto

$\phi_m = id_{\mathbf{Z}_2(G/S)}$ é isomorfismo. Logo m é invertível em $\mathbf{Z}_2(G/S)$ e daí, por [5,III.10.2], temos que $H^1(S;\mathbf{Z}_2(G/S)) = 0$.

Portanto $res^G_S = 0$ e o resultado segue de (II.3.14). □

Nós não sabemos se este último corolário é verdadeiro se considerarmos m par.

Finalizando este parágrafo, nós relembramos que o invariante $E(G,S)$ foi definido para $[G : S] = \infty$, mas é interessante observar que se $[G : S] < \infty$ temos o seguinte resultado.

(II.3.17) Lema: *Sejam $S \subseteq G$ grupos com $[G : S] < \infty$. Então*

$$\frac{Der(G,S,\mathbf{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbf{Z}_2(G/S))} = 0.$$

Demonstração: Desde que $[G : S] < \infty$ temos, por (II.3.2)(iii), que $e(G,S) = 0$. Logo na sequência exata (II.3.12)(1) temos Ker t = Im $s = 0$.

Agora, recordemos que para demonstrar (II.3.12)(5) não usamos o fato que $[G : S] = \infty$. Daí (II.3.12)(5) é verdadeira para $[G : S] < \infty$ e temos

$$\frac{Der(G,S,\mathbf{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbf{Z}_2(G/S))} \simeq \text{Im } \psi \subseteq \text{Ker } t_2 \simeq \text{Ker } t = 0,$$

o que demonstra o lema. □

II.4- Interpretação topológica de E(G,S) em termos de pares Eilemberg-MacLane.

Neste parágrafo veremos uma interpretação de $E(G,S)$ em termos de cohomologia relativa de complexos, tomada com coeficientes locais. Consequentemente, nos casos em que $E(G,S)$ coincide com $e(G,S)$ teremos também uma interpretação deste tipo para $e(G,S)$.

Considerando em (I.3.9) e (I.3.10), $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$ temos a seguinte interpretação topológica para $E(G,S)$:

(II.4.1) Proposição: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G com $[G:S] = \infty$. Se (X,Y) é um par Eilemberg-MacLane realizando topologicamente (G,S), então*

$$E(G,S) = 1 + dim\ \frac{H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S}$$

onde $H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))$ é tomada com coeficientes locais dado pelo $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathbb{Z}_2(G/S)$.

Demonstração: Pelo resultado (II.3.10) temos o seguinte diagrama comutativo (a menos de sinal) com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^0(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{J} & H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{res_S^G} & \cdots \\ & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \\ 0 \to & H^0(Y;\mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{J'} & H^1(X;\mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{r} & \cdots \end{array}$$

visto que $H^0(X;\mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) = 0$ pois $[G:S] = \infty$.

Temos também que $H^0(Y;\mathbb{Z}_2(G/S)) = \mathbb{Z}_2(G/S)^S$, por [33,VI.3.2], e $H^0(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) = \mathbb{Z}_2(G/S)^S$ por (I.1.8)(i).

Portanto Ker res_S^G = Im $J \simeq \dfrac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S}$, onde nós identificamos aqui $\mathbb{Z}_2(G/S)^S$ com $P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S)) \subset H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))$ via o monomorfismo δ acima.

Como o diagrama é comutativo temos que Im J é isomorfo a Im J'. Mas $\mathrm{Im}J' \simeq \dfrac{H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S}$. Portanto

$$E(G,S) = 1 + \dim\frac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = 1 + \dim\frac{H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S}. \qquad \square$$

O seguinte corolário nos dá uma interpretação topologica de $e(G,S)$, no caso em que $e(G,S) = E(G,S)$.

(II.4.2) Corolário: *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G com $[G:S] = \infty$ e suponhamos $e(G,S) = E(G,S)$. Se (X,Y) é um par Eilemberg-MacLane realizando topologicamente (G,S) então*

$$e(G,S) = 1 + dim\frac{H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S}$$

onde $H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))$ é tomada com coeficientes locais dado pelo $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathbb{Z}_2(G/S)$.

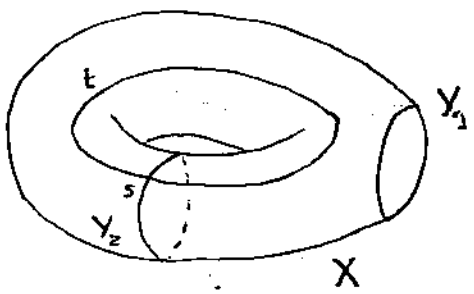
Em particular, isto é verdadeiro, com as hipóteses anteriores e S normal em G.

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior. No caso S normal em G vimos em (II.3.12) que $e(G,S) = E(G,S)$. □

Vejamos agora alguns exemplos que ilustram esta interpretação topológica:

(II.4.3) Exemplos:

(i) Sejam $G = < t > * < s >$, $S = < sts^{-1}t^{-1} >$ e $H = < s >$. Considere X igual o toro T^2 menos um disco aberto, $Y_1 = \partial X$ e Y_2 o laço representado pelo gerador s de $\Pi_1(T^2)$ como mostra a figura:

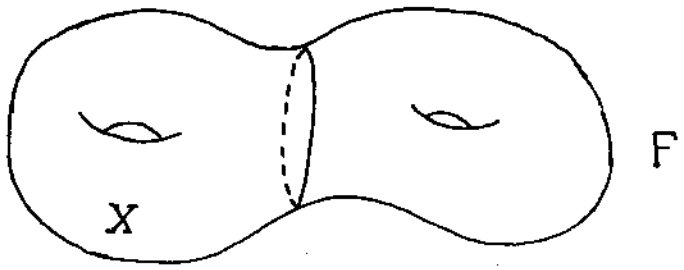


Então (X,Y_1) é um Eilemberg-Maclane par realizando (G,S) e (X,Y_2) é um Eilemberg-MacLane par realizando (G,H). Logo por (II.4.1) e (II.2.4) temos

$$E(G,S) = 1 + \dim\frac{H^1(X,Y_1;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = 1 < e(G,S) = \infty$$

$$E(G,H) = 1 + \dim\frac{H^1(X,Y_2;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = \infty = e(G,H)$$

(ii) Considere F a superfície orientada de genus 2 e X uma subsuperfície compacta como mostra a figura.



Sejam $G = \Pi_1(F) =< a_1, b_1, a_2, b_2 : \prod_{i=1}^{2}[a_i, b_i] = 1 >$ e $S = \Pi_1(X) = < a_1 > * < b_1 >$. Temos que F é um $K(G,1)$ e X é um $K(S,1)$. Além disso $\Pi_1(X) \to \Pi_1(F)$ é injetiva (basta usar o teorema de Van Kampen).

Logo (F, X) é um Eilemberg-MacLane par realizando (G, S) e temos:

$$E(G,S) = 1 + \dim \frac{H^1(F, X; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = 1$$

pois $e(G,S) = 1$ (ver [24,lema 2.4]).

(iii) Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ e $S = \{1\} \oplus \mathbb{Z}_2$. O par (G,S) é realizado topologicamente por $(X,Y) = (S^1 \times RP(\infty), \{1\} \times RP(\infty))$.

Daí, como S é normal em G,

$$e(G,S) = 1 + \dim \frac{H^1(S^1 \times RP(\infty), RP(\infty); \mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)} = 2$$

(iv) Sejam G um grupo infinito e $S = \{1\}$ o subgrupo trivial. Considere $X = K(G,1)$ e o vértice $* \in X$. O par $(G, \{1\})$ é realizado topologicamente por $(X, *)$. Então

$$e(G) = e(G, \{1\}) = 1 + \dim \frac{H^1(X, *; \mathbb{Z}_2 G)}{\mathbb{Z}_2 G}.$$

CAPÍTULO III

O Invariante Generalizado E(G,$\mathcal{S}$,M)

Neste capítulo estudaremos o invariante algébrico definido no capítulo II para $\mathcal{S}$ uma família qualquer de subgrupos e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer.

Aqui generalizaremos para o par grupo $(G,\mathcal{S})$ alguns resultados obtidos no capítulo II.

No último parágrafo deste capítulo estudaremos o invariante $E(G,\mathcal{S},\mathbb{Z}_2G)$ que denotaremos por $\overline{E}(G,\mathcal{S})$.

III.1 - O Invariante E(G,$\mathcal{S}$,M).

Recordemos inicialmente a definição de $E(G,\mathcal{S},M)$.

(III.1.1) Definição: *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G (não necessariamente distintos) e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Suponhamos que $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$.*

Então

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + dim\ Ker\ res^G_{\mathcal{S}}$$

onde $res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G;M) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i;M)$ é a aplicação dada na sequência exata (I.3.4)(i).

Vamos provar que, sob certas condições. $E(G,\mathcal{S},M)$ é um invariante nas variáveis $(G,\mathcal{S})$ e M.

Para isto temos que ver $H^*(G,\mathcal{S};M)$ como funtor de duas variáveis $((G,\mathcal{S}),M)$.

Na literatura não encontramos um estudo detalhado deste funtor $H^*((-,-);-)$. A referência que temos é o artigo de Bieri-Eckmann [4, 1.1 e 1.2].

Faremos aqui um estudo deste funtor com um enfoque um pouco diferente do considerado por Bieri-Eckmann.

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são os pares $((G,\mathcal{S}),M)$ onde G é um grupo, $\mathcal{S}=\{S_i, i\in I\}$ é uma família de subgrupos de índice infinito em G e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e cujos morfismos são aplicações:

$$\psi : ((G,\mathcal{S}),M) \to ((L,\mathcal{R}),N)$$

consistindo de:

(a) Um homomorfismo $\alpha : G \to L$

(b) Uma aplicação $\pi : I \to J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$

(c) Um homomorfismo $\phi : N \to M$ tal que $\phi(\alpha(g).n) = g.\phi(n)$, isto é, ϕ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$-módulos onde consideramos N como $\mathbb{Z}_2G$-módulo via α.

Vamos ver que nestas condições existe um homomorfismo (induzido por ψ):

$$\psi^* : H^*(L,\mathcal{R};N) \to H^*(G,\mathcal{S};M)$$

Sejam

$$\varepsilon_G : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_2(G/S_i) \to \mathbb{Z}_2 \qquad \text{e}$$
$$xS_i \to 1$$

$$\varepsilon_L : \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) = \bigoplus_{i\in J}\mathbb{Z}_2(L/R_j) \to \mathbb{Z}_2$$
$$lR_j \to 1$$

as aplicações aumentações.

Denotemos por Δ_G o núcleo de ε_G e por Δ_L o núcleo de ε_L.

Usando (b) nós temos uma aplicação, definida nos geradores de $\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ e estendida por linearidade

$$\begin{aligned} \rho \ : \ \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) &\rightarrow \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) \\ xS_i &\rightarrow \alpha(x)R_{\pi(i)} \end{aligned}$$

Claramente ρ está bem definida, é homomorfismo e $\rho(\Delta_G) \subset \Delta_L$

Seja $\overline{\rho} = \rho_{|\Delta_G} : \Delta_G \rightarrow \Delta_L$.

Temos então

$$\begin{aligned} (\overline{\rho},\phi)^{\#} \ : \ Hom(\Delta_L, N) &\rightarrow Hom(\Delta_G, M) \\ f &\rightarrow \phi \circ f \circ \overline{\rho} \end{aligned}$$

onde $\phi : N \rightarrow M$ é dada em (c).

Por simplicidade, denotemos $Hom(\Delta_L, N)$ por $\mathcal{N}$ e $Hom(\Delta_G, M)$ por $\mathcal{M}$.

Temos que $\mathcal{N}$ é um $\mathbb{Z}_2L$-módulo com L-ação diagonal:

$$(l.f)(x) = lf(l^{-1}x), \text{ para todo } x \in \Delta_L,\ f \in \mathcal{N} \text{e } l \in L.$$

Da mesma forma $\mathcal{M}$ é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo com G-ação diagonal.

(III.1.2) Lema: *A aplicação $(\overline{\rho},\phi)^{\#} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ satisfaz a condição $(\overline{\rho},\phi)^{\#}(\alpha(g).f) = g.(\overline{\rho},\phi)^{\#}(f)$, para todo $f \in \mathcal{N}$ e todo $g \in G$, isto é, $(\overline{\rho},\phi)^{\#}$ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos onde $\mathcal{N}$ é visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo via α.*

Demonstração: Inicialmente note que $\rho : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R})$ é tal que

$$\rho(g.u) = \alpha(g).\rho(u) \tag{1}$$

para todo $g \in G$ e $u \in \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$.

Basta verificar isto nos geradores de $\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$.

Seja xS_i um gerador de $\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$. Temos:

$$\begin{aligned} \rho(g.(xS_i)) &= \rho(gxS_i) && \text{(definição da ação de } G \text{ em } \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})) \\ &= \alpha(gx)R_{\pi(i)} && \text{(pela definição de } \rho) \\ &= \alpha(g)\alpha(x)R_{\pi(i)} && (\alpha \text{ é homomorfismo}) \\ &= \alpha(g).(\alpha(x)R_{\pi(i)}) && \text{(ação de } L \text{ em } \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R})) \\ &= \alpha(g).\rho(xS_i) && \text{(definição de } \rho). \end{aligned}$$

Portanto temos que (1) é verdadeira.

Seja agora $f \in \mathcal{N}$ e $u \in \Delta_G$.

$$\begin{aligned}
(\overline{\rho},\phi)^{\#}(\alpha(g).f)(u) &= \phi \circ (\alpha(g).f) \circ \overline{\rho}(u) && \text{(definição de } (\overline{\rho},\phi)^{\#}) \\
&= \phi(\alpha(g).f)(\overline{\rho}(u)) \\
&= \phi(\alpha(g)f(\alpha(g)^{-1}.\overline{\rho}(u)) && \text{(ação de } L \text{ em } N) \\
&= g.\phi(f(\alpha(g)^{-1}.\overline{\rho}(u)) && \text{(por (c))} \\
&= g.(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}.\overline{\rho}(u)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(g.(\overline{\rho},\phi))^{\#}(f)(u) &= g.(\overline{\rho},\phi)^{\#}(f)(g^{-1}u) && \text{(ação de } G \text{ em } M) \\
&= g(\phi \circ f \circ \overline{\rho})(g^{-1}u) && \text{(definição de } (\overline{\rho},\phi)^{\#}) \\
&= g(\phi \circ f)(\overline{\rho}(g^{-1}u) \\
&= g(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}\overline{\rho}(u)) && \text{(por (1))}
\end{aligned}$$

Daí segue o lema. □

Denotemos por $\tilde{\psi}$ a aplicação $(G \xrightarrow{\alpha} L, \mathcal{N} \xrightarrow{(\tilde{\rho},\phi)^{\#}} \mathcal{M})$.

Pelo lema anterior $(\overline{\rho},\phi)^{\#}$ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos e daí por (I.1.7) temos que $\tilde{\psi}$ induz, para todo $k \in \mathbb{Z}$, um homomorfismo.

$$\tilde{\psi}^k : H^k(L;\mathcal{N}) \to H^k(G;\mathcal{M})$$

Mas por definição (ver (I.3.2)),

$$H^k(G,\mathcal{S};M) = H^{k-1}(G;\mathcal{M}) \quad \text{e} \quad H^k(L,\mathcal{R};N) = H^{k-1}(L;\mathcal{N}).$$

Logo, considerando $\psi^k = \tilde{\psi}^{k-1}$ temos o homomorfismo induzido

$$\psi^* : H^*(L,\mathcal{R};N) \to H^*(G,\mathcal{S};M).$$

Daí $H^*(-,-;-)$ é um funtor contravariante da categoria $\mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{A}$ dos grupos abelianos:

De fato, verifica-se facilmente que

• Se $\psi : ((G,\mathcal{S}),M) \to ((G,\mathcal{S}),M)$ é a aplicação identidade, então $\psi^* : H^*(G,\mathcal{S};M) \to H^*(G,\mathcal{S};M)$ é o homomorfismo identidade.

• Se $\psi : ((G,\mathcal{S}),M) \to ((L,\mathcal{R}),N)$ e $\gamma : ((L,\mathcal{R}),N) \to ((K,\mathcal{O}),P)$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então $(\gamma \circ \psi)^* = \psi^* \circ \gamma^*$.

Observemos que um isomorfismo na categoria $\mathcal{C}$, $\psi : ((G,\mathcal{S}),M) \to ((L,\mathcal{R}),N)$ consiste de

(a) $\alpha : G \to L$ isomorfismo de grupos

(b) $\pi : I \to J$ bijeção tal que $\alpha(S_i) = R_{\pi(i)}$

(c) $\phi : N \to M$ isomorfismo de grupos que é um isomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$-módulos colocando em N a ação $g.n = \alpha(g).n$.

Vamos provar agora que $E(G,\mathcal{S},M)$ é um invariante na categoria $\mathcal{C}$. Mais precisamente,

(III.1.3) Proposição: *Se na categoria $\mathcal{C}$, $((G,\mathcal{S}),M)$ e $((L,\mathcal{R}),N)$ são isomorfos, então*

$$E(G,\mathcal{S},M) = E(L,\mathcal{R},N).$$

Demonstração: Dentro das hipóteses do teorema, temos que $\rho : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R})$ definido por $\rho(xS_i) = \alpha(x)R_{\pi(i)}$ é um isomorfismo com inversa $\beta : \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) \to \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ tal que $\beta(lR_j) = \alpha^{-1}(l)S_{\pi^{-1}(j)}$.

Como $\beta(\Delta_L) \subset \Delta_G$, $\overline{\rho} : \Delta_G \to \Delta_L$ é também isomorfismo.

Considere o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \Delta_G & \xrightarrow{i_G} & \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) & \xrightarrow{\varepsilon_G} & \mathbb{Z}_2 & \to 0 \\ & \downarrow \overline{\rho} & & \downarrow \rho & & \downarrow id & \\ 0 \to & \Delta_L & \xrightarrow{i_L} & \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) & \xrightarrow{\varepsilon_L} & \mathbb{Z}_2 & \to 0 \end{array}$$

Como $\mathbb{Z}_2$ é $\mathbb{Z}_2$-projetivo, as aplicações ε_G e ε_L têm inversas à direita. Por [15, I.5.10], i_G e i_L têm inversas à esquerda.

Logo este diagrama induz o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to Hom(\mathbb{Z}_2, M) & \to & Hom(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M) & \to & Hom(\Delta_G, M) \to 0 & & (1) \\ \uparrow \phi & & \uparrow (\rho, \phi)^{\#} & & \uparrow (\overline{\rho}, \phi)^{\#} & & \\ 0 \to Hom(\mathbb{Z}_2, N) & \to & Hom(\mathbb{Z}_2\,(L/\mathcal{R}), N) & \to & Hom(\,\Delta_L, N) \to 0 & & (2) \end{array}$$

As aplicações horizontais da sequência (1) são todas $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismos e as da sequência (2) são $\mathbb{Z}_2L$-homomorfismos. As aplicações verticais são $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismos, considerando os $\mathbb{Z}_2L$-módulos como $\mathbb{Z}_2G$-módulos via α.

Seja $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2L$. Logo $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ é também uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$. De fato $\alpha : G \to L$ induz a seguinte ação de G em P_i: $g * x = \alpha(g).x$, $\forall g \in G$ e $x \in P_i$. Daí cada P_i é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Como α é isomorfismo, cada P_i é $\mathbb{Z}_2G$-projetivo.

Seja $\tau : P \to P$ a aplicação identidade. Temos claramente que τ é compatível com α, isto é, $\tau(g * x) = \alpha(g)\tau(x)$.

Aplicando $Hom_G(P, -)$ à sequência (1) e $Hom_L(P, -)$ à sequência (2) temos o seguinte diagrama comutativo de complexos de cocadeias:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to Hom_G(P, M) & \to & Hom_G(P, Hom(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) & \to & Hom_G(P, \mathcal{M}) \to 0 & & (1)' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 \to Hom_L(P, N) & \to & Hom_L(P, Hom\,(\mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}), N)) & \to & Hom_L(P, \mathcal{N}) \to 0 & & (2)' \end{array}$$

onde $\mathcal{M} = Hom(\Delta_G, M)$ e $\mathcal{N} = Hom(\Delta_L, N)$.

As sequências (1)' e (2)' são exatas pois $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ é uma resolução $\mathbb{Z}_2G$-projetiva e $\mathbb{Z}_2L$-projetiva.

Além disso as aplicações verticais são todas isomorfismos.

Aplicando o funtor $H^*(-)$, junto com o Lema de Shapiro e a definição de cohomologia relativa, temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas ([5, I.0.4]):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \to H^0(G; M) & \to & \prod\limits_{i \in I} H^0(S_i; M) & \to & H^1(G, \mathcal{S}; M) & \xrightarrow{J_G} & H^1(G; M) & \xrightarrow{res_S^G} & \prod\limits_{i \in I} H^1(S_i; M) \to \cdots \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ 0 \to H^0(L; N) & \to & \prod\limits_{j \in J} H^0(R_j; N) & \to & H^1(L, \mathcal{R}; N) & \xrightarrow{J_L} & H^1(L; N) & \xrightarrow{res_{\mathcal{R}}^L} & \prod\limits_{i \in I} H^1(R_i; M) \to \cdots \end{array}$$

As aplicações verticais são todas isomorfismos pois são induzidas por isomorfismos.

Daí, claramente Im $J_G \simeq$ Im J_L e portanto

$$\begin{aligned} E(G,\mathcal{S},M) &= 1 + \dim \text{Ker } res^G_{\mathcal{S}} = 1 + \dim \text{Im } J_G \\ &= 1 + \dim \text{Im } J_L = 1 + \dim \text{Ker } res^L_{\mathcal{R}} \\ &= E(L,\mathcal{R},N)\ . \end{aligned}$$ □

Vejamos agora uma interpretação do invariante $E(G,\mathcal{S},M)$, que nos foi sugerida por Alejandro Adem, em termos de "característica de Euler parcial".

Esta interpretação faz sentido quando os grupos de cohomologia envolvidos na definição de $E(G,\mathcal{S},M)$ têm dimensão finita.

(III.1.4) Lema: *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $[G : S] = \infty$, $\forall S \in \mathcal{S}$, M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e suponhamos que os grupos de cohomologia $H^0(G;M)$, $H^0(\mathcal{S};M)$ e $H^1(G,\mathcal{S};M)$ tenham dimensão finita. Então*

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + dim\ H^0(G;M) - dim\ H^0(\mathcal{S};M) + dim\ H^1(G,\mathcal{S};M).$$

Demonstração: A demonstração é óbvia, considerando a sequência exata do par $(G,\mathcal{S})$ e $\mathbb{Z}_2G$-módulo M,

$$0 \to H^0(G;M) \xrightarrow{\chi} H^0(\mathcal{S};M) \xrightarrow{\delta} H^1(G,\mathcal{S};M) \xrightarrow{J} H^1(G;M) \xrightarrow{res^G_S} \cdots$$

e o fato que se $T : V \to W$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita então dim V = dim Im T + dim Ker T. □

O invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ está intimamente relacionado com a teoria de decomposição de grupos. Usando esta teoria é possível calcular o invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ em muitos casos e assim decidir se um grupo se decompõe ou não sobre um subgrupo.

Vamos recordar aqui algumas definições e um resultado interessante sobre decomposição de grupos, que podem ser encontrados em [4], e serão úteis no próximo exemplo e no decorrer do parágrafo 4.

(III.1.5) Definição: *Consideremos os grupos G_1 e G_2 com presentações $G_1 =< X_1; R_1 >$ e $G_2 =< X_2; R_2 >$. Se $T_1 \subset G_1$ e $T_2 \subset G_2$ são subgrupos com um dado isomorfismo $\sigma : T_1 \simeq T_2$, então o produto livre $G_1 *_T G_2$ de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado $T = T_1 = T_2$ é dado por*

$$G_1 *_T G_2 =< X_1, X_2; R_1, R_2, t = \sigma(t), \forall t \in T_1 >. \qquad (1)$$

Analogamente, se T, T' são subgrupos de G_1 com um dado isomorfismo $\sigma : T \simeq T'$ então o grupo HNN $G_1 *_{T,\sigma}$ sobre o grupo base G_1, com respeito a σ e letra estável p, é dado por

$$G_1 *_{T,\sigma} =< X_1, p; R_1, p^{-1}tp = \sigma(t),\ \forall t \in T >. \qquad (2)$$

(III.1.6) Definição: *Dizemos que G se decompõe sobre um subgrupo T se $G = G_1 *_T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$ ou $G = G_1 *_{T,\sigma}$.*

(III.1.7) Exemplos:

(i) $\mathbb{Z} = \{1\} *_{\{1\},\sigma}$ onde $\sigma = id_{\{1\}}$.

(ii) Seja $G =< x, y; xy = yx^2 >$ e $X =< x >$. então, por ([2,p. 167]), $G = X *_{X,\sigma}$ onde $\sigma : X \to X$ é tal que $\sigma(x) = x^2$.

(iii) Seja $G =< a_1, b_1, a_2, b_2; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 >$. Então $G = G_1 *_S G_2$ onde $G_1 =< a_1 > * < b_1 >$, $G_2 =< a_2 > * < b_2 >$ e S é identificado à $S_1 =< a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} >$ e $S_2 =< a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} >$.

(III.1.8) Lema:

(i) *Se $G = G_1 *_T G_2$ então temos a sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2 G$-módulos*

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

onde α é dada por $\alpha(xT) = (xG_1, -xG_2)$, $x \in G$, e ε é a aumentação.

(ii) *Se $G = G_1 *_{T,\sigma}$ então temos a sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2 G$-módulos*

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

onde α é dada por $\alpha(xT) = xG_1 - xpG_1$. □

(III.1.9) Observação: Se G se decompõe sobre T é fácil ver, usando o

fato que qualquer $g \in G$ é representado por uma única palavra reduzida (ver [25, 1.6 e 1.7]), que $[G : G_i] = \infty$ para $i = 1, 2$ se a decomposição é na forma (III.1.5)(1) e que $[G : G_1] = \infty$ se a decomposição é na forma (III.1.5)(2). Logo o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$, nestes casos, pode ser definido quando $\mathcal{S}$ é uma família qualquer de subgrupos de G_1 ou G_2.

Vejamos agora um exemplo de cálculo do invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ no caso em que G se decompõe na forma (III.1.5)(1) ou (III.1.5)(2).

(III.1.10) Proposição: *Sejam G um grupo, G_1, G_2, T subgrupos de G.*

(i) *Se G se decompõe sobre T na forma $G = G_1 *_T G_2$ então* $E(G, \{G_1, G_2\}, \mathbb{Z}_2) = 1$.

(ii) *Se G se decompõe sobre T na forma $G = G_1 *_{T,\sigma}$ então* $E(G, \{G_1\}, \mathbb{Z}_2) = 2$.

Demonstração: (i) Por (III.1.8)(i) temos a seguinte sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos:

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Portanto $\Delta = \text{Ker } \varepsilon \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$.

Vamos considerar o par grupo $(G, \{G_1, G_2\})$ e o $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial $\mathbb{Z}_2$.

Temos então

$$\begin{aligned}
H^0(G; \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2 \\
H^0(\{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) &= H^0(G_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H^0(G_2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \\
H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) &= H^0(G; Hom(\Delta, \mathbb{Z}_2)) && \text{(por (I.3.2))} \\
&\simeq H^0(G; Hom(\mathbb{Z}_2(G/T), \mathbb{Z}_2)) \\
&\simeq H^0(T; \mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.2.8)(ii))} \\
&\simeq \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Logo, por (III.1.4) temos

$$E(G, \{G_1, G_2\}, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 2 + 1 = 1.$$

(ii) Da mesma forma, usando (III.1.8)(ii), temos a sequência exata

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \to \mathbb{Z}_2(G/G_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

e daí $\Delta = \text{Ker } \varepsilon \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$.

Considerando o par grupo $(G, \{G_1\})$ e o $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial $\mathbb{Z}_2$ temos

$$H^0(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad H^0(G_1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad H^1(G, G_1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Logo, novamente por (III.1.4) temos $E(G, G_1, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$. □

(III.1.11) Corolário: *Seja G um grupo tal que dim $H_{n-1}(G, \mathbb{Z}_2) > 1$. Temos:*

(i) *Se G_1 e G_2 são subgrupos de G tais que $(G, \{G_1, G_2\})$ é um PD^n-par, então $G \neq G_1 *_T G_2$ para qualquer subgrupo T de G_1 e G_2.*

(ii) *Se G_1 é um subgrupo de G tal que (G, G_1) é um PD^n-par então $G \neq G_1 *_{T,\sigma}$ para qualquer subgrupo T de G_1.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{S}_1 = \{G_1, G_2\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{G_1\}$. Seja $i = 1$ ou 2. Se $(G, \mathcal{S}_i)$ é um PD^n-par temos $H^1(G, \mathcal{S}_i; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$ por (I.4.18).

Além disso, $H^0(G; \mathbb{Z}_2) = H^0(\mathcal{S}_2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ e $H^0(\mathcal{S}_1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Daí, usando (III.1.4), temos

$$E(G, \mathcal{S}_1, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 2 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 1 \quad \text{e}$$
$$E(G, \mathcal{S}_2, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 1 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 2.$$

e o resultado segue da proposição anterior. □

(III.1.12) Exemplo: Sejam $G = < s > * < t >$, $S_1 = < s >$, $S_2 = < t >$ e $S = < sts^{-1}t^{-1} >$.

Temos que $H_1(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

De fato, como $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial, temos por [R,11.4.4], que $H^1(G; \mathbb{Z}_2) = G_{ab} \otimes \mathbb{Z}_2$ onde G_{ab} denota o grupo quociente $G/[G, G]$.

Daí $H^1(G; \mathbb{Z}_2) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Agora, (G,S) é um PD^2-par (ver (II.2.4)(i)). Logo, por (III.1.11)(ii)) $G \neq S*_{T,\sigma}$ para qualquer T subgrupo de S.

Também podemos concluir que $(G,\{S_1,S_2\})$ não é um PD^2-par pois se fosse não poderiamos ter $G = S_1 *_{\{1\}} S_2$, por (III.1.11)(i).

Finalizando este parágrafo, vamos ver uma interpretação topológica de $E(G,\mathcal{S},M)$ em termos de pares Eilemberg-MacLane que generaliza (II.4.1).

(III.1.13) Proposição: *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $[G:S] = \infty$, $\forall S \in \mathcal{S}$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se $(G,\mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilemberg-MacLane $(X,Y) = K(G,\mathcal{S};1)$, então*

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + dim\ \frac{H^1(X,Y;\mathcal{M})}{(\prod_{S\in\mathcal{S}} M^S/M^G)}$$

onde $\mathcal{M}$ denota o sistema de coeficientes locais associado à M.

Demonstração: É análoga a (II.4.1) usando o resultado (I.3.10). □

III.2- Propriedades do Invariante E(G,$\mathcal{S}$,M).

Veremos neste parágrafo algumas propriedades de $E(G,\mathcal{S},M)$.

Antes disso, vamos ver uma interpretação de $E(G,\mathcal{S},M)$ em termos de derivações e derivações principais, que generaliza o resultado (II.1.4).

Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

Consideremos as aplicações

$$res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G;M) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i;M)$$

dada na sequência exata (I.3.4)(i) e

$$\begin{aligned} (res_i)_{i\in I} \ : \ H^1(G;M) &\to \prod_{i\in I} H^1(S_i;M) \\ [f] &\to (res_i[f])_{i\in I} \end{aligned}$$

onde $res_i = res^G_{S_i} : H^1(G;M) \to H^1(S_i;M)$ é a aplicação restrição, para cada $i \in I$.

Então temos:

(III.2.1) Proposição: *Se $(G,\mathcal{S})$ é um par grupo e M é um $\mathbf{Z}_2G$-módulo então as aplicações $res^G_{\mathcal{S}}$ e $(res_i)_{i\in I}$ são iguais. Consequentemente se $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$, então*

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + dim \bigcap_{i\in I} Ker\, res_i$$

com $Ker\, res_i \simeq \dfrac{Der(G,S_i,M)}{P(G,S_i,M)}$.

Demonstração: Consideremos os isomorfismos naturais

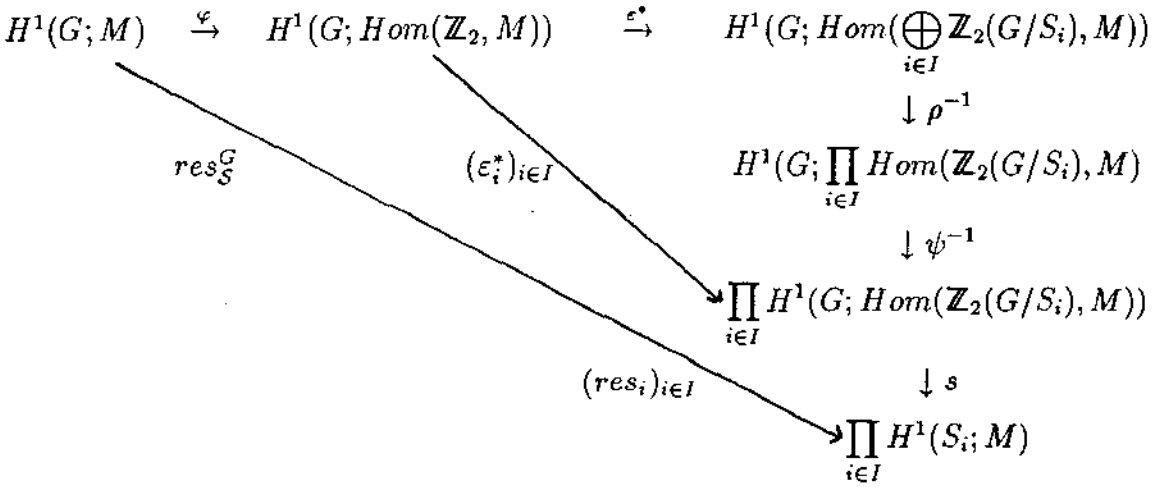
$$\begin{aligned} \psi \;:\; \prod_{i\in I} H^1(G; Hom(\mathbf{Z}_2(G/S_i),M)) &\to H^1(G; \prod_{i\in I} Hom((\mathbf{Z}_2(G/S_i),M)) \\ ([f_i])_{i\in I} &\to [f], \end{aligned}$$

onde $f(g) = (f_i(g))_{i\in I}$ e

$$\begin{aligned} \rho \;:\; H^1(G; \prod_{i\in I} Hom(\mathbf{Z}_2(G/S_i),M)) &\to H^1(G; Hom(\bigoplus_{i\in I} \mathbf{Z}_2(G/S_i),M) \\ [f] &\to [h] \end{aligned}$$

onde $h(g)(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}) = (p_{i_1} \circ f)(g)(\alpha_{i_1}) + \cdots + (p_{i_k} \circ f)(g)(\alpha_{i_k})$ e p_{i_j} são as projeções canônicas de $\prod_{i\in I} Hom(\mathbf{Z}_2(G/S_i),M)$.

Podemos fatorar $res^G_{\mathcal{S}}$ e $(res_i)_{i\in I}$ via o diagrama abaixo:



como $res_{\mathcal{S}}^{G} = s \circ \psi^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \varepsilon^{*} \circ \varphi$ e $(res_i)_{i\in I} = s \circ (\varepsilon_i^{*})_{i\in I} \circ \varphi$.

Logo, para mostrar a igualdade das duas aplicações basta mostrar que $(\varepsilon_i^{*})_{i\in I} = \psi^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \varepsilon^{*}$, ou simplesmente, $\varepsilon^{*} = \rho \circ \psi \circ (\varepsilon_i^{*})_{i\in I}$.

Temos que ε^{*} é induzida da aplicação:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\#} \ : \ Hom(\mathbb{Z}_2, M) &\rightarrow Hom(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_2(G/S_i), M) \\ f &\rightarrow f \circ \varepsilon \end{aligned}$$

e ε_i^{*} é induzida de

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{\#} \ : \ Hom(\mathbb{Z}_2, M) &\rightarrow Hom(\mathbb{Z}_2((G/S_i), M) \\ f &\rightarrow f \circ \varepsilon_i \end{aligned}$$

Sejam $g \in G$ e $u = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_2(G/S_i)$

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{\#} \circ f)(g)(u) &= (f(g) \circ \varepsilon)(u) \\ &= (f(g) \circ \varepsilon)(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}) \\ &= f(g)(\varepsilon(\alpha_{i_1}) + \cdots + \varepsilon(\alpha_{i_k})) \\ &= f(g)(\varepsilon_{i_1}(\alpha_{i_1}) + \cdots + \varepsilon_{i_k}(\alpha_{i_k})) \\ \rho \circ \psi \circ (\varepsilon_i^{*})_{i\in I}[f] &= \rho \circ \psi([\varepsilon_i^{\#} \circ f])_{i\in I} \\ &= \rho([l]) \quad (\text{ onde } \ l(g) = ((\varepsilon_i^{\#} \circ f)(g))_{i\in I}) \\ &= [h] \qquad \text{e} \\ h(g)(u) &= h(g)(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}) \\ &= p_{i_1} \circ l(g)(\alpha_{i_1}) + \cdots + p_{i_k} \circ l(g)(\alpha_{i_k}) \\ &= ((\varepsilon_{i_1}^{\#} \circ f)(g))(\alpha_{i_1}) + \cdots + ((\varepsilon_{i_k}^{\#} \circ f)(g))(\alpha_{i_k}) \\ &= f(g)(\varepsilon_{i_1}(\alpha_{i_1}) + \cdots + \varepsilon_{i_k}(\alpha_{i_k})) \end{aligned}$$

Portanto $h = \varepsilon^{\#} \circ f$ e daí $\varepsilon^{*}[f] = [\varepsilon^{\#} \circ f] = [h] = \rho \circ \psi \circ (\varepsilon_i)_{i\in I}^{*}[f]$.

Daí temos $res_{\mathcal{S}}^{G} = (res_i)_{i\in I}$.

Suponhamos agora $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$. Podemos então definir $E(G, \mathcal{S}, M)$, isto é,

$$\begin{aligned} E(G, \mathcal{S}, M) &= 1 + \dim \text{Ker } res_{\mathcal{S}}^{G} \\ &= 1 + \dim \text{Ker } (res_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

Mas, $\alpha \in \text{Ker}\,(res_i)_{i\in I} \Leftrightarrow (res_i(\alpha))_{i\in I} = 0 \Leftrightarrow res_i(\alpha) = 0$, para todo $i \in I, \Leftrightarrow \alpha \in \bigcap_{i\in I} \text{Ker}\, res_i$.

Portanto $\text{Ker}\,(res_i)_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} \text{Ker}\, res_i$.

Assim $E(G,\mathcal{S},M) = 1 + \dim \bigcap_{i\in I} \text{Ker}\, res_i$ e $\text{Ker}\, res_i \simeq \dfrac{Der(G,S_i,M)}{P(G,S_i,M)}$ por (II.1.3). □

Temos então as seguintes propriedades de $E(G,\mathcal{S},M)$, consequências da proposição anterior.

(III.2.2) Corolário: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ e $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$. Se $\mathcal{S}' = \{S_{i_k}, i_k \in I' \subset I\}$ é uma subfamília de $\mathcal{S}$ então*

$$E(G,\mathcal{S},M) \leq E(G,\mathcal{S}',M)$$

para qualquer $\mathbb{Z}_2G$-módulo M.

Em particular $E(G,\mathcal{S},M) \leq E(G,S_i,M)$ para todo $i \in I$.

Demonstração: Temos que $\bigcap_{i_k\in I'} \text{Ker}\, res_{i_k} \supset \bigcap_{i\in I} \text{Ker}\, res_i$.

Logo por (III.2.1),

$$\begin{aligned} E(G,\mathcal{S},M) &= 1 + \dim \bigcap_{i\in I} \text{Ker}\, res_i \\ &\leq 1 + \dim \bigcap_{i_k\in I'} \text{Ker}\, res_{i_k} \\ &= E(G,\mathcal{S}',M). \end{aligned}$$ □

(III.2.3) Corolário: *Se $(G,\mathcal{S})$ é um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ com $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$, e $\mathcal{S}' = \{H_i \leq S_i, i \in I\}$ então*

$$E(G,\mathcal{S},M) \leq E(G,\mathcal{S}',M)$$

para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M.

Demonstração: Temos $H_i \leq S_i \leq G$ e $res^G_{H_i} = res^{S_i}_{H_i} \circ res^G_{S_i}$, para todo $i \in I$.

$$H^1(G;M) \overset{res^G_{S_i}}{\rightarrow} H^1(S_i;M) \overset{res^{S_i}_{H_i}}{\rightarrow} H^1(H_i;M)$$

$$res^G_{H_i}$$

Daí, obviamente Ker $res^G_{S_i} \subset$ Ker $res^G_{H_i}$, para todo $i \in I$.

Logo $\bigcap_{i\in I}$ Ker $res^G_{S_i} \subset \bigcap_{i\in I}$ Ker $res^G_{H_i}$ e portanto o resultado segue da proposição anterior. □

(III.2.4) Corolário: *Se M e N são $\mathbb{Z}_2G$-módulos e $\phi : N \rightarrow M$ um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo que induz $\phi^* : H^1(G;N) \rightarrow H^1(G;M)$ monomorfismo, então $E(G,\mathcal{S},N) \leq E(G,\mathcal{S},M)$.*

Demonstração: O $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo $\phi : N \rightarrow M$ induz o diagrama comutativo, para todo $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc} H^1(G;N) & \overset{\phi^*}{\rightarrow} & H^1(G;M) \\ \downarrow res^N_i & & \downarrow res^M_i \\ H^1(S_i;N) & \overset{\phi^*_i}{\rightarrow} & H^1(S_i;M) \end{array}$$

Seja $i \in I$ e $\alpha \in$ Ker res^N_i. Então,

$$res^M_i \circ \phi^*(\alpha) = \phi^*_i \circ res^N_i(\alpha) = \phi^*_i(0) = 0.$$

Potanto $\phi^*(\text{Ker } res^N_i) \subset$ Ker res^M_i.

Daí temos

$$\bigcap_{i\in I} \text{Ker } res^N_i \simeq \phi^*(\bigcap_{i\in I} \text{Ker } res^N_i) = \bigcap_{i\in I} \phi^*(\text{Ker } res^N_i) \subset \bigcap_{i\in I} \text{Ker } res^M_i$$

Logo, por (III.2.1) temos a desigualdade desejada. □

(III.2.5) Corolário: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $\mathcal{S} = \bigcup_{l\in L} \mathcal{S}_l = \{S_i, i \in I\}$ onde $\mathcal{S}_l = \{S_{i_l} = R_l, i_l \in I_l\}$, e $[G : S_i] = \infty \ \forall i \in I$. Então $E(G,\mathcal{S},M) = E(G,\mathcal{S}',M)$ onde $\mathcal{S}' = \{R_l, l \in L\}$ e M é qualquer $\mathbb{Z}_2G$-módulo.*

Em particular, se $\mathcal{S} = \{S_i = S, i \in I\}$ *então* $E(G, \mathcal{S}, M) = E(G, S, M)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} E(G,\mathcal{S},M) &= 1 + \dim \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker} res_i && \text{(por (III.2.1))} \\ &= 1 + \dim \bigcap_{l\in L}\bigcap_{i_l\in J_l} \operatorname{Ker} res_{i_l} \\ &= 1 + \dim \bigcap_{l\in L} \operatorname{Ker} res_l && \text{(pois } res_{i_l} = res_l \text{ para todo } i_l \in I_l) \\ &= E(G,\mathcal{S}',M). \end{aligned}$$

□

(III.2.6) Exemplos:

(i) Consideremos o grupo $G =< s > * < t > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e a família de subgrupos $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ onde $S_1 =< sts^{-1}t^{-1} > \simeq \mathbb{Z}$ e $S_2 = [G, G]$ o subgrupo comutador de G.

Seja M_i o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathbb{Z}_2(G/S_i)$, $i = 1, 2$.

Então $E(G, \mathcal{S}, \mathbb{Z}_2(G/S_1) = E(G, \mathcal{S}, \mathbb{Z}_2(G/S_2)) = 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} E(G,\mathcal{S},\mathbb{Z}_2(G/S_1)) &\leq E(G,S_1,\mathbb{Z}_2(G/S_1)) && \text{(por (III.2.2))} \\ &= E(G,S_1) = 1 && \text{(por (II.2.4)(i))} \\ \text{e } E(G,\mathcal{S},\mathbb{Z}_2(G/S_2)) &\leq E(G,S_2,\mathbb{Z}_2(G/S_2)) && \text{(por (III.2.2))} \\ &= E(G,S_2) \\ &= e(G,S_2) && \text{(por (II.3.12))} \\ &= e(G/S_2) && \text{(por (II.3.2)(v))} \\ &= e(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}) = 1 && \text{(por II.3.5).} \end{aligned}$$

(ii) Sejam G um grupo, $H \leq S$ subgrupos de G com $[G : S] = \infty$. Então, por (II.2.3), temos

$E(G, S) \leq E(G, H, \mathbb{Z}_2(G/S))$ e

$E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/H)) \leq E(G, H)$.

Em particular se (G, H) é um D^n-par temos, aplicando (II.2.3),

$E(G,S,\mathbb{Z}_2(G/H)) = 1$ e se S é normal em G temos $e(G,S) \leq E(G,H,\mathbb{Z}_2(G/S))$ por (II.3.12).

(iii) Sejam G um grupo e $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ com $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$. Consideremos a família $\mathcal{S}' = \{L_i, i \in I\}$ tal que $L_i = \bigcap_{j \in I} S_j$, para todo $i \in I$. Então

$$\begin{aligned} E(G,\mathcal{S},M) &\leq E(G,\mathcal{S}',M) \quad \text{(por (II.2.3))} \\ &= E(G,L_i,M) \quad \text{(por (II.2.5))} \end{aligned}$$

Portanto

$$E(G,\mathcal{S},M) \leq E(G,\bigcap_{i \in I} S_i, M).$$

III.3: O Invariante E(G,$\mathcal{S}$,M) e Dualidade.

Neste parágrafo veremos alguns resultados envolvendo o invariante $E(G,\mathcal{S},M)$, grupos e pares de dualidade.

Sabemos que se $(G,\mathcal{S})$ é um D^n-par então $\mathcal{S}$ é finita, por (I.4.19)(ii), e portanto denotaremos neste caso $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1,2,\ldots,r\}$.

Antes de estudarmos o invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ vamos demonstrar algumas propriedades básicas envolvendo D^n-pares.

(III.3.1) Proposição: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um D^n-par com módulo dualizante C e $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1,2,\ldots,r\}$. Então:*

(i) $H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^G M_i) = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{S_i}$ *onde M_i é um $\mathbb{Z}_2S_i$-módulo para todo $i \in I$.*

(ii) $H^1(G,\mathcal{S};Ind_S^G M) = M^S$ *onde S é um D^{n-1}- subgrupo de G com módulo dualizante $Res_S^G C$ e M é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo.*

Demonstração: (i) Consideremos $(G,\mathcal{S})$ um D^n-par com módulo dualizante C. Por (I.4.19)(i) G é um D^{n-1}-grupo. Além disso $H_i(G;-)$ preserva somas diretas. Daí

$$
\begin{aligned}
H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^G M_i) &\simeq H_{n-1}(G;C\otimes(\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^G M_i)) \quad \text{(por dualidade)}\\
&\simeq H_{n-1}(G;\bigoplus_{i=1}^{r}(C\otimes Ind_{S_i}^G M_i))\\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{r} H_{n-1}(G;Ind_{S_i}^G(C\otimes M_i)) \qquad \text{(por (I.2.10))}\\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{r} H_{n-1}(S_i;(C\otimes M_i)) \qquad \text{(por (I.2.6)(i))}\\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(S_i;M_i)=\bigoplus_{i\in I} M_i^{S_i} \qquad \text{(por (I.2.19)(ii))}
\end{aligned}
$$

(ii) É demonstrado de forma análoga a (i). □

(III.3.2) Corolário: *Se $(G,\mathcal{S})$ é um D^n-par, $\mathcal{S}=\{S_i, i=1,2,\cdots,r\}$, então*

$$H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_2(G/S_i))=\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_2.$$

Demonstração: $\mathbb{Z}_2(G/S_i)=\mathbb{Z}_2G\otimes_{S_i}\mathbb{Z}_2 = Ind_{S_i}^G\mathbb{Z}_2$, por (I.2.3)(i). Logo basta aplicar a proposição anterior para $M_i=\mathbb{Z}_2$, $i=1,\cdots,r$. □

(III.3.3) Corolário: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo. Se $(G,\mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilemberg-MacLane (X,Y) onde X é uma variedade compacta com bordo, de dimensão n, e $Y=\partial X$, então o número de componentes conexas de ∂X é igual a dim $H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{S\in\mathcal{S}}\mathbb{Z}_2(G/S)) =$ dim $H^1(G,\mathcal{S};\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}))$.*

Demonstração: Por (I.4.21) temos que $(G,\mathcal{S})$ é um PD^n-par. Seja $\mathcal{S}=\{S_i, i=1,\cdots,r\}$ e $Y=\bigcup_{i=1}^{r} K(S_i,1)$.

Por (III.3.2), dim $H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{S\in\mathcal{S}}\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}))=r$ que é o número de componentes conexas de Y. □

(III.3.4) Exemplo: Sejam X o toro T^2 menos r discos abertos e $Y=$

∂X. Então, por [4, III.9.2], (X,Y) é um par Eilemberg-MacLane realizando o par grupo $(G=\prod_1(X), \mathcal{S}=\{S_i=\prod_1(Y_i), i=1,\ldots,r\})$. Daí dim $H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{i=1}^{r} Z_2(G/S_i))=r$.

Veremos agora um resultado sobre D^n-pares para o invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ que generaliza o resultado (II.2.3).

(III.3.5) Proposição: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um D^n-par, $\mathcal{S}=\{S_i, i=1,\cdots,r\}$. Suponhamos que $[G:S]=\infty$ para todo $S\in\mathcal{S}$. Então*

(i) $E(G,\mathcal{S},\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i)=1$ *onde M_i é um $\mathbb{Z}_2S_i$-módulo para $i=1,\ldots,r$ com dim $M_i^{S_i}<\infty$.*

(ii) *$S_i\neq S_j$ para $i\neq j$ e S_i não é normal em G para $i=1,\ldots,r$.*

Demonstração: Considere a sequência exata longa (I.3.4)(i) para o par $(G,\mathcal{S})$ tomando $M=\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i$.

$$0\to H^0(G;\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i)\to \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(S_j;\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i)\xrightarrow{\delta} H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i)\xrightarrow{J}\cdots$$

Temos

$$\begin{aligned} H^0(G;\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i) &= \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(G; Ind_{S_i}^{G} M_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{r} (Ind_{S_i}^{G} M_i)^G = 0 \quad \text{(por (I.2.11))} \end{aligned}$$

Daí δ é injetora. Por (III.3.1)(i) temos

$$H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i)\simeq \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{S_i}.$$

e portanto, dim $H^1(G,\mathcal{S};\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i)<\infty$. Agora,

$$\begin{aligned} \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(S_j;\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i) &= \bigoplus_{j=1}^{r}[H^0(S_j; Ind_{S_j}^{G} M_j)\oplus \bigoplus_{i\neq j=1}^{r} H^0(S_j; Ind_{S_i}^{G} M_i)] \\ &= \bigoplus_{j=1}^{r}[(Ind_{S_j}^{G} M_j)^{S_j}\oplus \bigoplus_{i\neq j=1}^{r} (Ind_{S_i}^{G} M_i)^{S_j}]. \end{aligned}$$

Como, por (I.2.2), $M_j^{S_j} \hookrightarrow (Ind_{S_j}^G M_j)^{S_j}$ temos

$$\bigoplus_{j=1}^{r} M_j^{S_j} \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} (Ind_{S_j}^G M_j)^{S_j} \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} [(Ind_{S_j}^G M_j)^{S_j} \oplus \bigoplus_{i \neq j=1}^{r} (Ind_{S_i}^G M_i)^{S_j}] \overset{\delta}{\hookrightarrow} \bigoplus_{j=1}^{r} M_j^{S_j}$$

Usando o fato que $\dim M_j^{S_j}$ é finita para $j = 1, \ldots, r$ concluimos que:

$$(Ind_{S_j}^G M_j)^{S_j} = M_j^{S_j} \tag{1}$$

$$(Ind_{S_i}^G M_i)^{S_j} = 0 \text{ para todo } i \neq j \tag{2}$$

e daí $\dim \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(S_j; \bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^G M_i) = \dim \bigoplus_{j=1}^{r} M_j^{S_j} < \infty$

Portanto, usando (III.1.4), temos $E(G, \mathcal{S}, \bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^G M_i) = 1$

(ii) Tomando em (1) e (2), $M_i = \mathbb{Z}_2$ para $i = 1, \ldots, r$ temos

$$\mathbb{Z}_2(G/S_j)^{S_j} = (Ind_{S_j}^G \mathbb{Z}_2)^{S_j} = \mathbb{Z}_2 \tag{3}$$

$$\mathbb{Z}_2(G/S_i)^{S_j} = (Ind_{S_i}^G \mathbb{Z}_2)^{S_j} = 0 \text{ para } i \neq j \tag{4}$$

Segue daí que $S_i \neq S_j$ para $i \neq j$ e S_i não é normal em G pois se fosse teriamos $\mathbb{Z}_2(G/S_i)^{S_i} = \mathbb{Z}_2(G/S_i)$ que é uma soma infinita de copias de $\mathbb{Z}_2$. □

(III.3.6) Corolário: *Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ com $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$. Se existe $S \in \mathcal{S}$ tal que (G, S) é um D^n-par então $E(G, \mathcal{S}, Ind_S^G M) = 1$ para qualquer $\mathbb{Z}_2 S$-módulo M com $\dim M^S < \infty$.*

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} E(G, \mathcal{S}, Ind_S^G M) &\leq E(G, S, Ind_S^G M) && \text{(por (III.2.5))} \\ &= 1 && \text{(por (III.3.5)(i))} \end{aligned}$$ □

(III.3.7) Exemplos:

(i) Seja X igual a F menos r discos abertos onde F é uma superfície fechada (r finito, $r \geq 2$ se $F = S^2$) e $Y = \partial X = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i$ onde os Y_i são os bordos dos r-discos. Seja $\mathcal{S} = \{S_i = \pi_1(Y_i), i = 1, \ldots, r\}$. Então por [4, III.9.2], temos que $(G, \mathcal{S})$ é um PD^2-par.

Daí por (III.3.5)(i), $E(G,\mathcal{S},\bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{S_i}^{G} M_i) = 1$ onde os M_i são quaisquer $\mathbb{Z}_2 S_i$- módulos com $\dim M_i^{S_i} < \infty$, $i = 1,\ldots,r$.

Além disso, por (III.3.5)(ii) S_i não é normal em G e $S_i \neq S_j$, para todo $i \neq j = 1,\ldots,r$.

(ii) Se em (i), F é uma superfície orientável de genus $k \geq 1$ e $r = 1$ então $G = \Pi_1(X)$ é um grupo livre com geradores $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$, S_1 é o grupo cíclico gerado pelo produto de comutadores $\prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$ e temos (G, S_1) um PD^2-par (ver [4, p.304]).

Seja $\mathcal{S}$ uma família qualquer de subgrupos de G tal que $S_1 \in \mathcal{S}$. Então, para qualquer $\mathbb{Z}_2 S_1$-módulo M temos, por (III.3.6), que $E(G,\mathcal{S}, Ind_{S_1}^{G} M) = 1$.

No artigo [18], Kropholler e Roller demonstraram um resultado (lema 2.2) para PD^n-pares. A demonstração de Kropholler-Roller pode ser adaptada para D^n-pares, mas aqui faremos uma demonstração diferente usando as formulas (3) e (4) contidas na demonstração da proposição anterior.

Antes disto vamos recordar o conceito de comensurabilidade de subgrupos.

Sejam S, T subgrupos de um grupo G. Dizemos que S *é comensurável com* T se $[S : S \cap T] < \infty$ e $[T : T \cap S] < \infty$.

O conjunto formado pelos $g \in G$ tal que S é comensurável com S^g é denotado por $Com_G(S)$.

Temos então o seguinte,

(III.3.8) Proposição: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um D^n-par com módulo dualizante C e $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1,\ldots,r\}$. Então uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(i) *$\mathcal{S}$ consiste de um único subgrupo S com $[G : S] = 2$.*

(ii) *$\mathcal{S}$ consiste de duas cópias de G.*

(iii) *$[G : S] = \infty$ e $Com_G(S) = S$ para todo $S \in \mathcal{S}$ e S_i não é comensurável com S_j^g para todo $i \neq j$ e todo $g \in G$.*

Demonstração: Suponhamos que exista $S \in \mathcal{S}$ tal que $[G : S] < \infty$. Consideremos o $\mathbb{Z}_2 G$-módulo $Ind_S^G PS$ onde PS é o conjunto das partes de S.

Temos que PS pode ser identificado com $Coind_{\{1\}}^{S}\mathbb{Z}_2$ (ver (II.3)) e como $[G:S]<\infty$, $Ind_S^G PS = Coind_S^G PS$. Daí

$$Ind_S^G PS = Coind_S^G Coind_{\{1\}}^{S}\mathbb{Z}_2 = Coind_{\{1\}}^{G}\mathbb{Z}_2 = PG. \tag{1}$$

Seja agora a sequência exata longa para o par $(G,\mathcal{S})$ e o $\mathbf{Z}_2G$- módulo PG:

$$0 \to H^0(G;PG) \to H^0(\mathcal{S};PG) \to H^1(G,\mathcal{S};PG) \to H^1(G;PG) \to \cdots$$

Temos

$$\begin{aligned}
H^k(G;PG) &= H^k(G;Coind_{\{1\}}^{G}\mathbb{Z}_2) \\
&= H^k(\{1\};\mathbb{Z}_2) \qquad \text{(por (I.2.6)(ii)} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } k>0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } k=0 \end{cases} \quad \text{e} \\
H^1(G,\mathcal{S};PG) &= H^1(G,\mathcal{S};Ind_S^G PS) \qquad \text{(por (1))} \\
&= H^0(S;PS) \qquad \text{(por (III.3.1)(ii))} \\
&= \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

Logo temos a sequência exata curta:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to H^0(\mathcal{S};PG) \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

Portanto $H^0(\mathcal{S};PG) = \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(S_i;PG) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Como $\mathbb{Z}_2 \simeq \{\emptyset, S_i\} \subset (PG)^{S_i}$, temos que $\mathcal{S}$ tem no máximo dois subgrupos.

Se $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ temos $(PG)^{S_1} \oplus (PG)^{S_2} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e portanto $(PG)^{S_i} \simeq \mathbb{Z}_2$. Como $\{\emptyset, G\} \subset (PG)^{S_i} = \{\emptyset, S_i\}$ temos que $G = S_i$ para $i = 1, 2$.

Portanto $\mathcal{S} = \{G, G\}$.

Se $\mathcal{S} = \{S\}$ então $(PG)^S = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Logo $(PG)^S = \{\emptyset, G, S, S^C\}$. Mas, se $g_1 \in G - S$, temos $S^C = Sg_1$ pois $sSg_1 = Sg_1$, para todo $s \in S$.

Daí $G = S \cup Sg_1$ e temos $[G:S] = 2$.

Suponhamos agora que $[G:S_i] = \infty$ para $i = 1, \ldots r$.

Na demonstração de (III.3.5) vimos que

$$\mathbb{Z}_2(G/S_i)^{S_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Seja E um conjunto de representantes para as classes duplas $S_j g S_i$ para i e j fixos com 1 representando a classe $S_j S_i$.

Pela formula de Mackey

$$Res^G_{S_j} \mathbb{Z}_2(G/S_i) = \bigoplus_{g \in E} Ind^{S_j}_{S_j \cap S_i^g} g\mathbb{Z}_2.$$

Daí

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2(G/S_i)^{S_j} &= H^0(S_j; \bigoplus_{g \in E} Ind^{S_i}_{S_j \cap S_i^g} g\mathbb{Z}_2) \\ &= \bigoplus_{g \in E} H^0(S_j; Ind^{S_i}_{S_j \cap S_i^g} g\mathbb{Z}_2) \quad \text{(por (I.4.4))} \end{aligned}$$

Consideremos $i = j$. Temos que $H^0(S_i; Ind^{S_i}_{S_i \cap S_i^1} 1.\mathbb{Z}_2) = H^0(S_i; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

Logo $H^0(S_i; Ind^{S_i}_{S_i \cap S_i^g} g\mathbb{Z}_2) = 0$, para $g \neq 1$.

Daí $[S_i : S_i \cap S_i^g] = \infty$ pois caso contrário teriamos,

$$H^0(S_i; Ind^{S_i}_{S_i \cap S_i^g} g\mathbb{Z}_2) = H^0(S_i; Coind^{S_i}_{S_i \cap S_i^g} g\mathbb{Z}_2) = H^0_-(S_i \cap S_i^g; g\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

o que é um absurdo.

Logo S_i não é comensurável com S_i^g, para todo $g \neq 1$ em E.

Daí, como a formula de Mackey é independente do conjunto E tomado. temos que S_i não é comensurável com S_i^g, para todo $g \in G - S_i$.

Portanto $Com_G(S_i) = S_i$ para algum $i = 1, \ldots, r$.

Se $i \neq j$ temos que $H^0(S_j; Ind^{S_j}_{S_j \cap S_i^g} g\mathbb{Z}_2) = 0$ para todo $g \in G$.

Daí, pelo mesmo argumento acima, temos que $[S_j : S_j \cap S_i^g] = \infty$, para todo $g \in G$. Portanto S_j não é comensurável a um conjugado de S_i para $i \neq j$. □

(III.3.9) Observação:

(i) Como consequência desta proposição deduzimos que, se $(G, \mathcal{S})$ é um D^n-par com $[G : S] = \infty$, $\forall S \in S$, então S não é normal em G para todo $S \in \mathcal{S}$.

De fato, temos $N_G(S) = \{g \in G : gSg^{-1} = S\} \subset Com_G(S)$. Se S fosse normal a G teriamos $Com_G(S) = N_G(S) = G$, o que não acontece. Já tinhamos chegado a este resultado em (III.3.4)(ii).

(ii) Uma outra observação a fazer é que não perdemos muito supondo em (III.3.5) que $[G : S] = \infty$ para todo $S \in \mathcal{S}$ já que é o que ocorre na grande maioria dos casos, pela proposição anterior.

(iii) Do resultado anterior não é possível concluir que $S_i \neq S_j$ para $i \neq j$, mas isto é verdadeiro por (III.3.5)(ii).

Finalizando este parágrafo, vamos ver mais alguns resultados que podem ser interessantes em alguns calculos do invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$.

(III.3.10) Proposição: *Se $(G, \mathcal{S})$ é um D^n-par com $[G : S] = \infty$ para todo $S \in \mathcal{S}$ e T é um subgrupo de G com dimensão homologica $hdT \leq n-2$, então $E(G, \mathcal{S}, Ind_T^G M) = 1$ para M um $\mathbb{Z}_2T$-módulo com dim $M^T < \infty$.*

Demonstração: Consideremos a sequência exata longa

$$0 \to H^0(G; Ind_T^G M) \to H^0(\mathcal{S}; Ind_T^G M) \to H^1(G, \mathcal{S}; Ind_T^G M) \to \cdots$$

Temos $[G : T] = \infty$ pois se $[G : T] < \infty$ teriamos $hdT = n-1$ por (I.4.7)(iii). Logo $H^0(G; Ind_T^G M) = 0$ por (I.2.11).

Ainda

$$\begin{aligned} H^1(G, \mathcal{S}; Ind_T^G M) &= H_{n-1}(G; C \otimes Ind_T^G M) && \text{(por dualidade)} \\ &= H_{n-1}(T; C \otimes M) && \text{((por (I.2.10) e (I.2.6))} \\ &= 0 && \text{(pois } hdT \leq n-2\text{).} \end{aligned}$$

Daí $H^0(\mathcal{S}; Ind_T^G M) = 0$ e temos, aplicando (III.1.4), o resultado desejado.

□

(III.3.11) Proposição: *Seja $(G, \mathcal{S})$ um D^n-par com módulo dualizante C e $[G : S] = \infty$ para todo $S \in \mathcal{S}$. Sejam T um D^{n-1}-subgrupo de G com módulo dualizante $Res_T^G C$ e M um $\mathbb{Z}_2T$-módulo com dim $M^T = r < \infty$. Então $E(G, \mathcal{S}; Ind_T^G M) \leq r + 1$.*

Demonstração: Temos que $[G : T] = \infty$ pois se $[G : T]$ fosse finito, por (I.4.16)(i), teriamos que o módulo dualizante de T seria $\Delta \otimes C$, o que não é verdade, visto que, do fato de $[G : S] = \infty$, $\forall S \in \mathcal{S}$, temos que Δ é a soma de mais de uma cópia de $\mathbb{Z}_2$.

Além disso, por (III.3.1)(ii), temos

$$H^1(G, \mathcal{S}; Ind_T^G M) = M^T.$$

Logo usando a sequência exata longa (I.3.4)(i) temos que

$$0 \leq \dim H^0(\mathcal{S}; Ind_T^G M) \leq r.$$

Temos então, por (III.1.4), $E(G, \mathcal{S}, Ind_T^G M) \leq r + 1$. □

(III.3.12) Corolário: *Se na proposição anterior $T \in \mathcal{S}$ então*

$$E(G, \mathcal{S}, Ind_T^G M) = 1$$

para todo $\mathbb{Z}_2T$-módulo M com dim $M^T < \infty$.

Demonstração: Sabemos que,

$$H^0(\mathcal{S}; Ind_T^G M) = H^0(T; Ind_T^G M) \oplus \bigoplus_{S \in \mathcal{S}, S \neq T} H^0(S; Ind_T^G M).$$

Usando a formula de Mackey, temos que

$$H^0(T; Ind_T^G M) = H^0(T; M) \oplus \bigoplus_{g \in E, g \neq 1} H^0(T; Ind_{T \cap T^g}^T gM),$$

onde E é um conjunto de representantes para as classes duplas TgT.

Logo dim $M^T \leq$ dim $H^0(T; Ind_T^G M) \leq$ dim $H^0(\mathcal{S}; Ind_T^G M) \leq$ dim $H^1(G, \mathcal{S}; Ind_T^G M) =$ dim M^T

Portanto dim $H^0(\mathcal{S}; Ind_T^G M) =$ dim M^T.

Aplicando (III.1.4) temos $E(G, \mathcal{S}, Ind_T^G M) = 1$. □

(III.3.13) Corolário: *Nas hipóteses da proposição anterior considerando $M = \mathbb{Z}_2$ temos que $E(G, \mathcal{S}, \mathbb{Z}_2(G/T)) \leq 2$. Em particular se $\mathcal{S} = \{S\}$ e $S \cap T^g = \{1\}$, para todo $g \in G$, então $E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/T)) = 2$.*

Demonstração: Que $E(G,\mathcal{S},\mathbb{Z}_2(G/T)) \leq 2$ é óbvio. Se $\mathcal{S} = \{S\}$ e $S \cap T^g = \{1\}$ temos, aplicando a formula de Mackey, que $H^0(S;\mathbb{Z}_2(G/T)) = 0$ o que nos dá o resultado desejado. □

III.4 - O invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$

Neste parágrafo estudaremos o invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ e sua relação com o end $e(G)$ definido por Freudenthal-Hopf-Specker. Veremos também que este invariante está intimamente relacionado com a teoria de decomposição de grupos sobre subgrupos finitos e com a teoria de decomposição adaptada a uma família finita de subgrupos.

Recordemos inicialmente a definição de $\overline{E}(G,\mathcal{S})$.

(III.4.1) Definição: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ e $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$. Definimos*

$$\overline{E}(G,\mathcal{S}) = 1 + dim\ Ker\ res^G_{\mathcal{S}}$$

onde $res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G;\mathbb{Z}_2G) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i;\mathbb{Z}_2G)$ é a aplicação dada na sequência exata (I.3.4)(i).

$\overline{E}(G,\mathcal{S})$ é um invariante na variável $(G,\mathcal{S})$, como mostra o seguinte lema.

(III.4.2) Lema: *Sejam $(G,\mathcal{S})$ e $(L,\mathcal{R})$ par grupos com $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$, $\mathcal{R} = \{R_j,\ i \in J\}$, e $[G : S_i] = \infty$, $\forall i \in I$. Se $\alpha : (G,\mathcal{S}) \to (L,\mathcal{R})$ é um isomorfismo de pares então $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = \overline{E}(L,\mathcal{R})$.*

Demonstração: O isomorfismo α consiste de

(a) $\alpha : G \to L$ isomorfismo de grupos.

(b) $\pi : I \to J$ bijeção tal que $\alpha(S_i) = R_{\pi(i)}$.

Seja $\phi : \mathbb{Z}_2L \to \mathbb{Z}_2G$ onde $\phi(l) = \alpha^{-1}(l)$. Temos $\phi(\alpha(g).l) = \alpha^{-1}(l) = g.\phi(l)$. Logo ϕ satisfaz:

(c) $\phi : \mathbb{Z}_2L \to \mathbb{Z}_2G$ é um isomorfismo na categoria $\mathcal{C}$ e por (III.1.3) temos

que

$$E(G,\mathcal{S},\mathbb{Z}_2G) = E(L,\mathcal{R},\mathbb{Z}_2L)$$

o que nos dá o resultado desejado. □

O invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ tem as seguintes propriedades que serão bastante úteis em todo este parágrafo.

(III.4.3) Proposição: *Seja* $(G,\mathcal{S})$ *um par grupo com* $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ *e* $[G : S_i] = \infty$ *para todo* $i \in I$. *Valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se* $\mathcal{S}' = \{S_{i_k},\ i_k \in I' \subset I\}$ *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \leq \overline{E}(G,\mathcal{S}')$. *Em particular* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \leq \overline{E}(G,S_i),\ \forall i \in I$.

(ii) *Se* $\mathcal{S}' = \{H_i \leq S_i,\ i \in I\}$ *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \leq \overline{E}(G,\mathcal{S}')$.

(iii) *Se* $\mathcal{S} = \bigcup_{l\in L} \mathcal{S}_l$ *com* $\mathcal{S}_l = \{S_{i_l} = R_l,\ i_l \in I_l \subset I\}$, $\mathcal{S}' = \{R_l,\ l \in L\}$ *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = \overline{E}(G,\mathcal{S}')$. *Em particular se* $S_i = S$ *para todo* $i \in I$ *temos* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = \overline{E}(G,S)$.

(iv) $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = \overline{E}(G,\bigcap_{i\in I} S_i)$.

(v) *Se* $\mathcal{R} = \{S_j \in \mathcal{S} \mid S_j$ *é infinito*$\}$, *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = \overline{E}(G,\mathcal{R})$.

Demonstração: (i)-(iv) decorre imediatamente de (III.2.2), (III.2.3), (III.2.5) e (III.2.6)(iii).

(v) Se $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$ então existe $S_i \in \mathcal{S}$ tal que S_i é finito. Temos que $res_i : H^1(G;\mathbb{Z}_2G) \to H^1(S_i;\mathbb{Z}_2G)$ é a aplicação nula. De fato, considere E um conjunto de representantes para as classes S_ig. Temos então

$$\begin{aligned}
H^1(S_i;\mathbb{Z}_2G) &= H^1(S_i;\bigoplus_{g\in E} Ind_{\{1\}}^{S_i} g\mathbb{Z}_2) && \text{(pela formula de Mackey)}\\
&= \bigoplus_{g\in E} H^1(S_i; Ind_{\{1\}}^{S_i} g\mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.4.4))}\\
&= \bigoplus_{g\in E} H^1(S_i; Coind_{\{1\}}^{S_i} g\mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.2.5))}\\
&= \bigoplus_{g\in E} H^1(\{1\}; g\mathbb{Z}_2) = 0 && \text{(por (I.2.6)(ii)).}
\end{aligned}$$

Daí $\operatorname{Ker} res_i = H^1(G;\mathbb{Z}_2G),\ \forall S_i \in \mathcal{S},\ S_i$ finito.

Logo

$$\begin{aligned}\overline{E}(G,\mathcal{S}) &= 1+\dim\Big(\bigcap_{S_i\ finito}\operatorname{Ker} res_i \cap \bigcap_{S_j\ infinito}\operatorname{Ker} res_j\Big)\\ &= 1+\dim\Big(H^1(G;\mathbb{Z}_2G)\cap \bigcap_{S_j\ infinito}\operatorname{Ker} res_j\Big)\\ &= \overline{E}(G,\mathcal{R}).\end{aligned}$$

□

Veremos agora que o invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ assume sempre o valor 1 quando G e $\mathcal{S}$ satisfazem certas propriedades de dualidade. Isto ocorre também com o end clássico $e(G)$, que é sempre 1, se G é um D^n-grupo, $n>1$.

(III.4.4) Proposição:

(i) *Se $(G,\mathcal{S})$ é um D^n-par com $[G:S]=\infty$ para todo $S\in\mathcal{S}$ então* $\overline{E}(G,\mathcal{S})=1$.

(ii) *Se $(G,\mathcal{S})$ é um par grupo com $[G:S]=\infty$, para todo $S\in\mathcal{S}$ e (G,T) é um D^n-par para algum $T\in\mathcal{S}$ então* $\overline{E}(G,\mathcal{S})=1$.

(iii) *Se G é um D^n-grupo com módulo dualizante C e $n>1$ então* $\overline{E}(G,\mathcal{S})=1$ *para qualquer família $\mathcal{S}$ de subgrupos de G, com $[G:S]=\infty$, $\forall S\in\mathcal{S}$.*

Demonstração: (i) Decorre imediatamente de (III.3.10) para $M=\mathbb{Z}_2$ e $T=\{1\}$.

(ii) Decorre de (III.4.3)(i) e de (i).

(iii) Temos que

$$\begin{aligned}H^1(G;\mathbb{Z}_2G) &= H_{n-1}(G;C\otimes\mathbb{Z}_2G) && \text{(por dualidade)}\\ &= H_{n-1}(G;Ind_{\{1\}}^G(C\otimes\mathbb{Z}_2)) && \text{(por (I.2.10)}\\ &= H_{n-1}(\{1\};C\otimes\mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.2.6)(i))}\\ &= 0 && \text{(pois } n>1)\end{aligned}$$

Portanto, como $\operatorname{Ker} res_S^G \subset H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$, temos o resultado desejado. □

Estudaremos agora a relação entre o invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ e o end clássico $e(G)$. Veremos que $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ está intimamente relacionado com $e(G)$. Por exemplo, se G

é infinito finitamente gerado, $e(G)$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞ (ver (II.3.6)(i)). Vale um resultado análogo, porém com uma hipótese mais fraca, para $\overline{E}(G,\mathcal{S})$. Não sabemos se o mesmo é verdadeiro sob hipóteses mais gerais. Veremos também que em muitos casos $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ coincide com $e(G)$, mas a igualdade não é sempre verdadeira.

(III.4.5) Proposição: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $[G:S]=\infty$ para todo $S\in\mathcal{S}$. Se G é finitamente gerado com $vcdG<\infty$, então $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞.*

Demonstração: Como, por hipótese, G é finitamente gerado com $vcdG<\infty$, então, por (II.3.8), qualquer $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$ tem dimensão 0, 1 ou ∞.

Temos que $res^G_{S_i}: H^1(G,\mathbb{Z}_2G)\to H^1(S_i;\mathbb{Z}_2G)$ é um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo, onde $H^1(-;\mathbb{Z}_2G)$ é visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a ação à direita $[f].g=[f.g]$ onde $(f.g)(x)=f(x)g$.

Logo $res^G_{\mathcal{S}}=(res^G_{S_i})_{i\in I}$ é um $\mathbb{Z}_2G$- homomorfismo e daí Ker $res^G_{\mathcal{S}}$ tem dimensão 0, 1 ou ∞, o que prova a proposição. □

(III.4.6) Proposição: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $[G:S]=\infty$ para todo $S\in\mathcal{S}$. Então*

(i) $\overline{E}(G,\mathcal{S})\le e(G)$. *Em particular, se $e(G)=1$ então $\overline{E}(G,\mathcal{S})=1$.*

(ii) *Se cada $S\in\mathcal{S}$ é finito temos $\overline{E}(G,\mathcal{S})=e(G)$.*

(iii) *Se cada $S\in\mathcal{S}$ é finitamente gerado e $e(S)=1$ então $\overline{E}(G,\mathcal{S})=e(G)$.*

(iv) *Se $e(G)=2$ temos que $\overline{E}(G,\mathcal{S})=2$.*

Demonstração: (i) Por (II.3.7) temos $e(G)=1+\dim H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$. Portanto, como Ker $res^G_{\mathcal{S}}\subset H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$, temos

$$\overline{E}(G,\mathcal{S})=1+\dim \text{Ker } res^G_{\mathcal{S}}\le 1+\dim H^1(G;\mathbb{Z}_2G)=e(G).$$

Para demonstrar (ii) e (iii) considere a sequência exata (I.3.4)(i) para $M=\mathbb{Z}_2G$:

$$0 \to \prod_{i\in I} H^0(S_i;\mathbb{Z}_2G) \to H^1(G,\mathcal{S};\mathbb{Z}_2G) \to H^1(G;\mathbb{Z}_2G) \overset{res^G_{\mathcal{S}}}{\to} \prod_{i\in I} H^1(S_i;\mathbb{Z}_2G) \to \cdots.$$

Pela formula de Mackey (I.2.3)(ii), temos, para todo $S \in \mathcal{S}$,

$$Res^G_S \mathbb{Z}_2G = Res^G_S Ind^G_{\{1\}}\mathbb{Z}_2 = \bigoplus_{g\in E} Ind^S_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2,$$

onde E é um conjunto de representantes para as classes duplas $Sg\{1\} = Sg$.

Daí temos, para todo $S \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} H^1(S;\mathbb{Z}_2G) &= H^1(S;\bigoplus_{g\in E} Ind^S_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2) \\ &= \bigoplus_{g\in E} H^1(S; Ind^S_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2) \quad \text{(por (I.4.4))}. \end{aligned}$$

Se cada $S \in \mathcal{S}$ é finito temos

$$\begin{aligned} H^1(S; Ind^S_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2) &= H^1(S; Coind^S_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2) \qquad \text{(por (I.2.5))} \\ &= H^1(\{1\}; g\mathbb{Z}_2) \qquad \text{(por (I.2.6)(ii))} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se $e(S) = 1$ para cada $S \in \mathcal{S}$, temos que S é infinito (por (II.3.2)(ii)), e $H^1(S; Ind^S_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2) \simeq H^1(S;\mathbb{Z}_2S) = 0$ (por (II.3.7)).

Em qualquer caso, temos

$$\prod_{S\in\mathcal{S}} H^1(S;\mathbb{Z}_2G) = \prod_{S\in\mathcal{S}} (\bigoplus_{g\in E} H^1(S; Ind^S_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2)) = 0.$$

Daí Ker $res^G_{\mathcal{S}} = H^1(G;\mathbb{Z}_2G)$ e por (II.3.7) temos $\overline{E}(G;\mathcal{S}) = e(G)$.

(iv) Se $e(G) = 2$ é conhecido que qualquer subgrupo de G ou é finito ou tem índice finito em G.

De fato, se $e(G) = 2$, por [25, teo. 5.12], temos que G tem um subgrupo cíclico infinito H com $[G : H] < \infty$. Seja S um subgrupo qualquer de G. Então $S \cap H = \{1\}$ ou $[H : S \cap H] < \infty$

Como $[S : S \cap H] \leq [G : H] < \infty$ então S é finito se $S \cap H = \{1\}$. Por outro lado, se $S \cap H \neq \{1\}$, $[G : S \cap H] \leq [G : H][H : S \cap H] < \infty$ e daí $[G : S] \leq [G : S \cap H] < \infty$. Portanto $[G : S] < \infty$.

Logo, como por hipótese $[G : S] = \infty$ para todo $S \in \mathcal{S}$, temos que S é finito, para todo $S \in \mathcal{S}$. Aplicando (ii) temos o resultado. □

A igualdade $\overline{E}(G, \mathcal{S}) = e(G)$ nem sempre ocorre como mostra os exemplos abaixo:

(III.4.7) Exemplos:

(i) Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo tal que qualquer $S \in \mathcal{S}$ é infinito e normal em G. Por [20, p.355] temos, para cada $S \in \mathcal{S}$, a seguinte sequência exata:

$$0 \to H^1(G/S; (\mathbb{Z}_2G)^S) \xrightarrow{p} H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \overset{res_S^G}{\to} H^1(S; \mathbb{Z}_2G).$$

Mas, aplicando a formula de Mackey e o mesmo raciocínio da demonstração de (III.4.6)(ii) - (iii), temos

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_2G)^S &= H^0(S; \mathbb{Z}_2G) \\ &= \bigoplus_{g \in E} H^0(S; Ind_{\{1\}}^S g\mathbb{Z}_2) \\ &= \bigoplus_{g \in E} (Ind_{\{1\}}^S g\mathbb{Z}_2)^S = 0 \quad \text{(por (I.2.11))}.\end{aligned}$$

Daí $H^1(G/S; (\mathbb{Z}_2G)^S) = 0$ o que nos dá $0 = \text{Im } p = \text{Ker } res_S^G$ para todo $S \in \mathcal{S}$.

Portanto $\text{Ker } res_{\mathcal{S}}^G = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} \text{Ker } res_S^G = 0$ e temos $\overline{E}(G, \mathcal{S}) = 1$.

Assim temos infinitos exemplos em que $\overline{E}(G, \mathcal{S})$ não coincide com $e(G)$. Por exemplo, se G é o grupo livre gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n > 1$, temos que $e(G) = \infty$ (ver resultado (III.4.10) abaixo) e se $S = [G, G]$ é o subgrupo comutador de G temos $\overline{E}(G, S) = 1$, pelo exposto acima.

(ii) Se (G, S) é o PD^2-par do exemplo (III.3.7)(ii) temos $\overline{E}(G, S) = 1$, por (III.4.4)(i), e $e(G) = \infty$.

Pela proposição anterior, vemos que, para grupos finitamente gerados, a desigualdade $\overline{E}(G, \mathcal{S}) < e(G)$ somente pode ocorrer nos casos em que $e(G) = \infty$. Isto pode ocorrer por exemplo se G se decompõe sobre um subgrupo finito (ver definições

(III.1.5) e (III.1.6) e observação (III.1.9)). Nos exemplos acima G é livre e daí se decompõe sobre o subgrupo trivial $\{1\}$.

Muitos resultados importantes sobre decomposição de grupos, envolvendo ends, foram provados em [28] e [29] por Stallings. Recordaremos aqui alguns destes resultados.

(III.4.8) *Seja G um grupo. Se G se decompõe sobre um subgrupo finito então $e(G) \geq 2$. Reciprocamente, se G é finitamente gerado e $e(G) \geq 2$ então G se decompõe sobre um subgrupo finito.*

(III.4.9) *Se $G = G_1 *_T G_2$ onde T é um subgrupo próprio finito de G_1 e G_2, de índice maior ou igual a 3 em G_2, então $e(G) = \infty$. Também se $G = G_1 *_{T,\theta}$ onde T é um subgrupo próprio finito de G_1 então $e(G) = \infty$.*

(III.4.10) *Um grupo G finitamente gerado livre de torsão pode ser escrito como um produto livre não trivial $G_1 * G_2$ se e somente se $e(G) = \infty$.*

(III.4.11) Observação:

(i) A segunda parte do resultado (III.4.8) é conhecido como Teorema de Estrutura de Stallings e é um resultado muito importante da teoria de ends.

(ii) Em (III.4.8) temos $\overline{E}(G,T) = e(G) \geq 2$ e em (III.4.9) temos em qualquer caso $\overline{E}(G,T) = e(G) = \infty$. Isto segue de (III.4.6)(ii).

Estamos interessados em calcular $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ quando G se decompõe sobre um subgrupo finito T e $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ com cada $S_i \subset G_1$ ou G_2 se $G = G_1 *_T G_2$ ou cada $S_i \subset G_1$ se $G = G_1 *_{T,\theta}$. Por (III.1.9) não precisamos supor que $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$, pois isto já é verdadeiro nestes casos.

Primeiramente, vejamos um resultado em que G_1 e G_2 são finitos:

(III.4.12) Proposição: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$. Suponhamos que G se decompõe sobre um subgrupo finito T.*

(i) *Se $G = G_1 *_T G_2$, G_1 e G_2 finitos e cada S_i está contido em G_1 ou*

G_2, $\forall i \in I$, *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \geq 2$.

(ii) *Se* $G = G_1 *_{T,\theta}$, G_1 *finito e* $S_i \subset G_1$, $\forall i \in I$, *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \geq 2$.

Demonstração: Em qualquer caso S_i é finito para todo $i \in I$. Daí $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = e(G) \geq 2$ (por (III.4.6)(ii) e (III.4.8)(ii)). □

Vamos estudar agora que valores $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ pode assumir quando G se decompõe sobre um subgrupo finito T onde pelo menos um dos subgrupos G_1 ou G_2 é infinito.

Temos o seguinte resultado:

(III.4.13) Proposição: *Seja* $(G,\mathcal{S})$ *um par grupo com* $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$. *Suponhamos que* G *se decompõe sobre um subgrupo finito* T.

(i) *Se* $G = G_1 *_T G_2$, *com* G_1, G_2 *infinitos e cada* S_i *contido em* G_1 *ou* G_2 *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = \infty$.

(ii) *Se* $G = G_1 *_T G_2$ *com apenas um dos subgrupos* G_1 *ou* G_2 *finitos e cada* S_i *contido em* G_1 *ou* G_2 *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \geq 2$.

(iii) *Se* $G = G_1 *_{T,\theta}$, *com* G_1 *infinito e cada* $S_i \subset G_1$, *então* $\overline{E}(G,\mathcal{S}) = \infty$.

Demonstração: (i) Vamos calcular primeiramente $\overline{E}(G,\{G_1,G_2\})$.

Por (III.1.8) temos que $\Delta = \text{Ker}\,\varepsilon \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$. Logo $Hom(\Delta,\mathbb{Z}_2G)$ é $\mathbb{Z}_2G$-isomorfo a $Hom(\mathbb{Z}_2(G/T),\mathbb{Z}_2)$.

Consideremos a sequência exata (I.3.4)(i) para o par $(G,\{G_1,G_2\})$ e $M = \mathbb{Z}_2G$,

$$0 \to H^0(G;\mathbb{Z}_2G) \to H^0(G_1;\mathbb{Z}_2G) \oplus H^0(G_2;\mathbb{Z}_2G) \to H^1(G,\{G_1,G_2\};\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{J} \cdots.$$

Temos que $H^0(G;\mathbb{Z}_2G) = 0$, por (I.2.11).

Usando a formula de Mackey e o fato de G_i ser infinito, $i = 1,2$, temos, aplicando o mesmo raciocínio de (III.4.7)(i), que $H^0(G_i;\mathbb{Z}_2G) = 0$.

Agora, considerando E um conjunto de representantes para as classes Tg,

temos

$$\begin{aligned}
H^1(G,\{G_1,G_2\};\mathbb{Z}_2G) &= H^0(G;Hom(\Delta,\mathbb{Z}_2G)) && \text{(por definição)}\\
&\simeq H^0(G;Hom(\mathbb{Z}_2(G/T),\mathbb{Z}_2G))\\
&\simeq H^0(T;\mathbb{Z}_2G) && \text{(por (I.2.8)(ii))}\\
&= H^0(T;\bigoplus_{g\in E} Ind_{\{1\}}^{T} g\mathbb{Z}_2) && \text{(pela formula de Mackey)}\\
&= \bigoplus_{g\in E} H^0(T;Ind_{\{1\}}^{T} g\mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.4.4))}\\
&= \bigoplus_{g\in E} H^0(\{1\};g\mathbb{Z}_2) && \text{(por (I.2.6)(ii))}\\
&= \bigoplus_{g\in E} g\mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Daí, como E é infinito, temos que dim $H^1(G,\{G_1,G_2\};\mathbb{Z}_2G)=\infty$.

Logo Ker $res^{G}_{\{G_1,G_2\}} \simeq H^1(G,\{G_1,G_2\};\mathbb{Z}_2G)$ e portanto temos $\overline{E}(G,\{G_1,G_2\})=\infty$.

Consideremos agora as subfamílias de $\mathcal{S}$,

$\mathcal{S}_1=\{S_l,\ l\in L \mid S_l\subset G_1\}$ e

$\mathcal{S}_2=\{S_j,\ j\in J \mid S_j\subset G_2 \quad \text{e}\ \ J\cap L=\emptyset\}$.

Portanto $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$ (união feita considerando-se a união disjunta dos conjuntos de índices).

Sejam $\mathcal{S}_1'=\{R_l=G_1,\ l\in L\}$ e $\mathcal{S}_2'=\{R_j=G_2,\ j\in J\}$.

Se $\mathcal{S}_2=\emptyset$ temos que $S_i\subset G_1,\ \forall i\in I$. Logo

$$\begin{aligned}
\overline{E}(G,\mathcal{S}) &= \overline{E}(G,\mathcal{S}_1)\\
&\geq \overline{E}(G,\mathcal{S}_1') && \text{(por (III.4.3)(ii))}\\
&= \overline{E}(G,G_1) && \text{(por (III.4.3)(iii))}\\
&\geq \overline{E}(G,\{G_1,G_2\}) && \text{(por (III.4.3)(i))}\\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Analogamente se $\mathcal{S}_1=\emptyset$.

Suponhamos agora $\mathcal{S}_1\neq\emptyset$ e $\mathcal{S}_2\neq\emptyset$.

Então temos,

$$\begin{aligned}\overline{E}(G,\mathcal{S}) &= \overline{E}((G,\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \\ &\geq \overline{E}(G,\mathcal{S}_1' \cup \mathcal{S}_2') \quad \text{(por (III.4.3)(ii))} \\ &= \overline{E}(G,\{G_1,G_2\}) \quad \text{(por (III.4.3)(iii))} \\ &= \infty,\end{aligned}$$

como queríamos.

(ii) Como em (i) vamos calcular primeiramente $\overline{E}(G,\{G_1,G_2\})$. Suponhamos G_1 finito e G_2 infinito.

Consideremos a sequência de Mayer-Vietoris para $G = G_1 *_T G_2$ e $M = \mathbb{Z}_2G$ (ver [2, teo. 2.10]),

$$0 \to H^0(G;\mathbb{Z}_2G) \to H^0(G_1;\mathbb{Z}_2G) \oplus H^0(G_2;\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{r} H^0(T;\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(G;\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{(res^G_{G_1}, res^G_{G_2})} H^1(G_1;\mathbb{Z}_2G) \oplus H^1(G_2;\mathbb{Z}_2G) \to \cdots$$

A aplicação r é definida por $r(f_1,f_2) = res^{G_1}_T f_1 - res^{G_2}_T f_2$ e por (III.2.1) $\overline{E}(G,\{G_1,G_2\}) = 1 + \dim \text{Ker}\,(res^G_{G_1}, res^G_{G_2})$.

Como G e G_2 são infinitos, prova-se usando o mesmo raciocínio de (i) que $H^0(G;\mathbb{Z}_2G) = 0$ e $H^0(G_2;\mathbb{Z}_2G) = 0$. Logo temos a sequência exata

$$0 \to H^0(G_1;\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{res^{G_1}_T} H^0(T;\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{\delta} \text{Im}\,\delta = \text{Ker}\,(res^G_{G_1}, res^G_{G_2}) \to 0.$$

Mas $H^0(G_1;\mathbb{Z}_2G) = (\mathbb{Z}_2G)^{G_1}$ e $H^0(T;\mathbb{Z}_2G) = (\mathbb{Z}_2G)^T$ e temos a inclusão $(\mathbb{Z}_2G)^{G_1} \xrightarrow{j} (\mathbb{Z}_2G)^T$.

É fácil ver que $res^{G_1}_T$ é sobrejetora se, e somente se, j é sobrejetora. Temos também que $\mathbb{Z}_2G$ pode ser identificado com o conjunto formado pelos subconjuntos finitos de G, FG (ver II.3).

Daí podemos ver $j : (FG)^{G_1} \to (FG)^T \mid\ j(A) = A$.

Como T é finito e $tT = T$, $\forall t \in T$, temos que $T \in (FG)^T$.

Mas $T \notin (FG)^{G_1}$. De fato, se $T \in (FG)^{G_1}$ teríamos $g_1T = T$, $\forall g_1 \in G_1$ e daí $G_1/T = \{T\}$, o que nos dá $G_1 = T$ que é uma contradição por (III.1.6).

Portanto j, e logo $res^{G_1}_T$, não é sobrejetora.

Se $\overline{E}(G,\{G_1,G_2\}) = 1$ teríamos Ker $(res^G_{G_1}, res^G_{G_2}) = 0 = \text{Im}\,\delta$ e daí $res^{G_1}_T$ seria isomorfismo, o que não é verdade.

Disto concluimos que $\overline{E}(G,\{G_1,G_2\}) \geq 2$.

Procedendo da mesma forma que em (i) prova-se que $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \geq 2$ para $\mathcal{S}$ uma família qualquer de subgrupos de G contidos em G_1 ou G_2.

Para demonstrar (iii) usamos o mesmo raciocínio de (i) para provar que $H^0(G;\mathbb{Z}_2G) = 0$, $H^0(G_1;\mathbb{Z}_2G) = 0$ e $H^1(G,G_1;\mathbb{Z}_2G) = H^0(T;\mathbb{Z}_2G) = \bigoplus_{g\in E} g\mathbb{Z}_2$, onde E é um conjunto de representantes para as classes Tg, $g \in G$.

Daí dim Ker $res^G_{G_1}$ = dim $H^1(G,G_1;\mathbb{Z}_2G) = \infty$ e portanto $\overline{E}(G,G_1) = \infty$.

Seja $\mathcal{S}' = \{R_i = G_1,\ i \in I\}$.

Então temos,

$$\begin{aligned} \overline{E}(G,\mathcal{S}) &\geq \overline{E}(G,\mathcal{S}') \quad \text{(por (III.4.3)(ii))} \\ &= \overline{E}(G,G_1) \quad \text{(por (III.4.3)(iii)} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

□

Um caso particular do resultado (III.4.9) e uma parte de (III.4.10) podem ser vistos como consequência da proposição anterior. De fato temos:

(III.4.14) Corolário: *Seja G um grupo que se decompõe sobre um subgrupo finito T.*

(i) *Se $G = G_1 *_T G_2$, com G_1, G_2 infinitos , então $e(G) = \infty$.*

(ii) *Se $G = G_1 *_{T,\theta}$, onde G_1 é infinito, então $e(G) = \infty$.*

(iii) *Se $T = \{1\}$, G livre de torsão, então $e(G) = \infty$.*

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior usando a desigualdade $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \leq e(G)$. □

Em (III.4.13) computamos o invariante $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ no caso em que a decomposição de G era sobre um subgrupo finito T. Podemos também calcular $\overline{E}(G,\mathcal{S})$ no caso em que T é infinito e $\mathcal{S}$ é uma família particular de subgrupos de G, como mostra o seguinte resultado.

(III.4.15) Proposição: *Seja G um grupo que se decompõe sobre um sub-*

grupo infinito T.

(i) *Se* $G = G_1 *_T G_2$, *então* $\overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) = 1$.

(ii) *Se* $G = G_1 *_{T,\theta}$, *então* $\overline{E}(G, G_1) = 1$.

Demonstração: Como T é infinito e é subgrupo de ambos os grupos G_1 e G_2 então G_1 e G_2 são infinitos.

Para calcular $\overline{E}(G, \{G_1, G_2\})$ em (i) e $\overline{E}(G, G_1)$ em (ii) procedemos como na demonstração de (III.4.13) para provar que:

$H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2 G) = H^0(T; \mathbb{Z}_2 G) = 0$ se $G = G_1 *_T G_2$ e

$H^1(G, G_1; \mathbb{Z}_2 G) = H^0(T; \mathbb{Z}_2 G) = 0$ se $G = G_1 *_{T,\theta}$, pois T é infinito em ambos os casos. □

Vamos agora ver a relação de nosso invariante com decomposição de grupos adaptada ao par grupo $(G, \mathcal{S})$ com $\mathcal{S}$ finita. Primeiramente vamos recordar a definição deste conceito. Esta definição pode ser encontrada em [21].

(III.4.16) Definição: *Seja* $(G, \mathcal{S})$ *um par grupo com* $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1, \ldots, m\}$. *Uma decomposição* $G = G_1 *_T G_2$ *ou* $G = G_1 *_{T,\theta}$, *de* G *sobre* T *é chamada* **adaptada** *ao par grupo* $(G, \mathcal{S})$ *se* T *é finito e todo subgrupo* S_i *é conjugado a um subgrupo de* G_1 *ou de* G_2. *Se tal decomposição existe dizemos que o par grupo* $(G, \mathcal{S})$ *é adaptado.*

Existe um critério cohomológico para um par grupo $(G, \mathcal{S})$, onde G é finitamente gerado, ser adaptado, que é uma condição suficiente. A condição é que a intersecção dos núcleos das aplicações restrições, $res_i : H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \to H^1(S_i; \mathbb{Z}_2 G)$, $i = 1, \ldots, m$, seja não nulo.

Se $\mathcal{S} = \emptyset$, este critério é apenas o teorema de estrutura de Stallings para grupos finitamente gerados com mais que um end (ver (III.4.11)). O resultado de Stallings foi estendido por Swan [30] no caso em que $m = 1$ e G é livre de torsão. O caso geral foi provado por Swarup em [31].

Este critério pode ser traduzido em termos do invariante $\overline{E}(G, \mathcal{S})$. De fato,

por (III.2.1), temos que

$$\overline{E}(G,\mathcal{S}) = 1 + \dim \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\, res_i.$$

Daí, o resultado de Swarup pode ser enunciado da seguinte forma:

(III.4.17) Teorema: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com G finitamente gerado e $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1,\ldots,m\}$. Se $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \geq 2$ então $(G,\mathcal{S})$ é adaptado.* □

Em [21] Müller também estudou decomposições adaptadas. Neste trabalho ele afirma que a reciproca de (III.4.17) é verdadeira sem a hipótese de G ser finitamente gerado.

Na literatura pesquisada, não encontramos a demonstração deste fato, mas faremos aqui uma demonstração usando o nosso invariante e suas propriedades.

(III.4.18) Teorema: *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo com $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1,\ldots,m\}$. Se $(G,\mathcal{S})$ é adaptado então $\overline{E}(G,\mathcal{S}) \geq 2$.*

Demonstração: Por hipótese temos que $(G,\mathcal{S})$ é adaptado. Daí, por (III.4.16), G se decompõe sobre um subgrupo finito T e cada S_i é conjugado a um subgrupo H_i de G_1 ou de G_2.

Logo existe $g_i \in G$ tal que $S_i = g_i^{-1}H_ig_i$, com $H_i \leq G_1$ ou $H_i \leq G_2$, $i = 1,\ldots,m$.

Seja $\mathcal{S}' = \{H_i,\ i = 1,\ldots,m\}$. Usando os resultados (III.4.12) e (III.4.13), temos que $\overline{E}(G,\mathcal{S}') \geq 2$.

Considere as aplicações de pares

$$\psi_i : (S_i, \mathbb{Z}_2G) \to (H_i, \mathbb{Z}_2G),\quad i = 1,\ldots,m,$$

consistindo de:

$$\begin{array}{lllllll} \text{(a)} & \varphi_i & : & S_i & \to & H_i & \text{isomorfismo de grupos} \\ & & & s & \to & g_isg_i^{-1} & \\ \text{(b)} & \phi_i & : & \mathbb{Z}_2G & \to & \mathbb{Z}_2G & \text{isomorfismo de grupos} \\ & & & x & \to & g_i^{-1}x. & \end{array}$$

Temos que ϕ_i é compatível com φ_i. De fato, $\phi_i(\varphi_i(s).x) = \phi_i(g_i s g_i^{-1} x) = g_i^{-1} g_i s g_i^{-1} x = s g_i^{-1} x = s\phi_i(x)$.

Daí por (I.1.7), temos induzido, para $i = 1, \ldots, m$, os isomorfismos

$$\begin{aligned} \psi_i^* : \ H^1(H_i; \mathbb{Z}_2 G) &\to H^1(S_i; \mathbb{Z}_2 G) \\ [f] &\to \psi_i^*[f] = [\phi_i \circ f \circ \varphi_i]. \end{aligned}$$

Agora considere

$$\begin{aligned} \psi^* : \ \bigoplus_{i=1}^{n} H^1(H_i; \mathbb{Z}_2 G) &\to \bigoplus_{i=1}^{m} H^1(S_i; \mathbb{Z}_2 G) \\ ([f_1], \ldots, [f_m]) &\to (\psi_1^*[f_1], \ldots, \psi_m^*[f_m]). \end{aligned}$$

Claramente ψ^* é isomorfismo.

Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) & \overset{res_{S'}^{G}}{\to} & \bigoplus_{i=1}^{m} H^1(H_i; \mathbb{Z}_2 G) \\ \downarrow res_S^G & \swarrow \psi^* & \\ \bigoplus_{i=1}^{m} H^1(S_i; \mathbb{Z}_2 G). & & \end{array}$$

Vamos provar que este diagrama é comutativo. Temos,

$$\begin{aligned} \psi^* \circ res_{S'}^{G}[f] &= \psi^*([f_{|H_1}], \ldots, [f_{|H_m}]) \\ &= ([\phi_1 \circ f_{|H_1} \circ \varphi_1], \ldots, [\phi_m \circ f_{|H_m} \circ \varphi_m]). \end{aligned}$$

Agora, $\phi_i \circ f_{|H_i} \circ \varphi_i : S_i \to \mathbb{Z}_2 G$, é tal que

$$\begin{aligned} \phi_i \circ f_{|H_i} \circ \varphi_i(s) &= \phi_i \circ f_{|H_i}(g_i s g_i^{-1}) && \text{(definição de } \varphi_i) \\ &= g_i^{-1} f(g_i s g_i^{-1}) && \text{(definição de } \phi_i) \\ &= g_i^{-1}(g_i f(s g_i^{-1}) + f(g_i)) && \text{(f é derivação)} \\ &= f(s g_i^{-1}) + g_i^{-1} f(g_i) \\ &= s f(g_i^{-1}) + f(s) + g_i^{-1} f(g_i) && \text{(f é derivação).} \end{aligned}$$

Mas $0 = f(1) = f(g_i^{-1} g_i) = g_i^{-1} f(g_i) + f(g_i^{-1})$ e daí $f(g_i^{-1}) = g_i^{-1} f(g_i)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi_i \circ f_{|H_i} \circ \varphi_i(s) &= f(s) + s f(g_i^{-1}) + f(g_i^{-1}) \\ &= f(s) + d_{f(g_i^{-1})}(s) && (d_{f(g_i^{-1})} \in P(S_i, \mathbb{Z}_2 G)) \\ &= f_{|S_i}(s) + d_{f(g_i^{-1})}(s). \end{aligned}$$

Logo,

$\phi_i \circ f_{|H_i} \circ \varphi = f_{|S_i} + d_{f(g_i^{-1})}, \quad d_{f(g_i^{-1})} \in P(S_i, M)$ (1)

Por outro lado, $res^G_{\mathcal{S}}[f] = ([f_{|S_1}], \ldots, [f_{|S_r}])$. Mas por (1) temos

$[\phi_i \circ f_{|H_i} \circ \varphi_i] = [f_{|S_i} + d_{f(g_i^{-1})}] = [f_{|S_i}], \quad \forall i = 1, \ldots, m.$

Assim, $res^G_{\mathcal{S}}[f] = \psi^* \circ res^G_{\mathcal{S}'}[f]$. Isto nos dá Ker $res^G_{\mathcal{S}}$ = Ker $res^G_{\mathcal{S}'}$, pois ψ^* é isomorfismo.

Daí $\overline{E}(G, \mathcal{S}) = \overline{E}(G, \mathcal{S}') \geq 2$ como queríamos. □

Finalizando este capítulo vamos ver um exemplo de aplicação do resultado anterior.

(III.4.19) Exemplo: Seja $(G, \mathcal{S})$ um PD^2-par sobre $\mathbb{Z}$ (daí é um PD^2-par sobre $\mathbb{Z}_2$) com $[G : S] = \infty, \quad \forall S \in \mathcal{S}$. Então G é um D^1-grupo, que não é PD^1. Logo G é livre de posto maior que 1 (ver [3]) e $e(G) = \infty$. Temos que G se decompõe sobre o subgrupo $T = \{1\}$ mas o par $(G, \mathcal{S})$ não é adaptado pois $\overline{E}(G, \mathcal{S}) = 1$, por (III.4.4)(i).

BIBLIOGRAFIA

[1] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *A relative cohomological invariant for pairs of groups*, (em preparação).

[2] Bieri, R.; *Homological dimension of discrete groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1976.

[3] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Groups with homological duality generalizing Poincaré duality.* Inventiones Math. 20 (1973) 103 - 124.

[4] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Relative homology and Poincaré duality*, Journal of Pure and Applied Algebra 13 (1978) 277 - 319.

[5] Brown, K.S.; *Cohomology of groups*, G.T.M. 87 Springer Verlag, New York, (1982).

[6] Dicks, W.; Dunwood, M.; *Groups acting on graphs*, Cambridge Unversity Press, (1988).

[7] Eckmann, B.; Müller, H.; *Poincaré duality groups of dimension two*, Comm. Math. Helvetici 55, (1980), 510 - 520.

[8] Eckmann, B.; Linell, P.A.; *Poincaré duality groups of dimension two II*, Comm. Math. Helv. 58, (1983), 111 - 114.

[9] Fanti, E.L.C.; Tese de Doutorado, ICM - USP, São Carlos (em preparação).

[10] Farrell, F.T.; *The second cohomology group of G with $\mathbb{Z}_2G$ coefficients*, Topology 13, (1974), 313 - 326.

[11] Farrell, F.T.; *Poincarè duality and groups of type (FP)*, Comment.

Math. Helv. 50, (1975), 187 - 195.

[12] Freudenthal, H; *Über die Enden Topologischer Raüme und Gruppen*, Math. Zeit. 33 (1931), 692 - 713.

[13] Hopf, H.; *Enden offener Raüme und unendlicher Gruppen*, Comm. Math. Helv. 16 (1943), 81 - 100.

[14] Houghton, C.H.; *Ends of locally compact groups and their coset spaces*, J. Aust. Math. Soc. 17 (1974) 274 - 284.

[15] Hu, S.T.; *Introduction to homological algebra*, Holden-Day series in Mathematics, Holden-Day inc. São Francisco, (1968).

[16] Johnson F.E.A.: Wall, C.T.C.: *On groups satisfying Poincaré duality*, Annals of Math., 96 (1972), 592 - 598.

[17] Kropholler, P.H,; Roller, M.A.; *Splittings of Poincaré duality groups*, Math. Z. 97 (1988), 421 - 438.

[18] Kropholler, P.H.; Roller, M.A.; *Splittings of Poincaré duality groupsII*, J. London Math. Soc. (2) 38 (1988), 410 - 420.

[19] Kropholler, P.H.; Roller, M.A.; *Relative ends and duality groups*, Journal of Pure and Appl. Algebra, 61 (1989), 197 - 210.

[20] MacLane, S.; *Homology* , Springer Verlag, Berlin (1967).

[21] Müller, H.; *Decomposition theorems for group pairs*, Math. Z. 176 (1981) 223 - 246.

[22] Ribes, L.; *On a cohomology theory for pairs of groups*, Proc. of the A.M.S. 21 (1969) 230 - 234.

[23] Robinson, D.J.S.; *A course in the theory of groups*, G.T.M. 80, Springer-Berlin, (1982).

[24] Scott, G.P.; *Ends of pairs of groups*, J. Pure Appl. Algebra 11 (1977),

179 - 198.

[25] Scott, G.P.; Wall, C.T.C.; *Topological methods in group theory*, London Math. Soc., Lect. Notes Series 36, Homological Group Theory, (1979) 137 - 203.

[26] Spanier, E.H.; *Algebraic topology*, MacGraw-Hill, Bombay, (1966).

[27] Specker, E.; *Endenverbände van Raüme und Gruppen*, Math. Ann. 122 (1950), 167 - 174.

[28] Stallings, J.R.; *On torsion free groups with infinitely many ends*, Ann. of Math. 88 (1968), 312 - 334.

[29] Stallings, J.R.; *Groups theory and 3-dimensional manifolds*, Yale Univ. Press, (1971).

[30] Swan, R.; *Groups of cohomological dimension one*, J. of Algebra 12 (1969), 585 - 610.

[31] Swarup, A.; *Relative version of a theorem of Stallings*, J. Pure Appl. Alg. 11 (1977), 75 - 82.

[32] Thomas, C.B.; *Splittings theorems for certain PD^3-groups*, Math. Z. 186, (1984), 201 - 209.

[33] Whitehead, G.W.; *Elements of homotopy theory*, G. T. M. 61, Springer-Verlag, New York, (1978).