

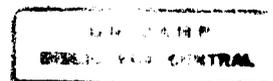
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica**  
**Departamento de Matemática Aplicada**

**Métodos Numéricos para**  
**Precificação de Opções**

**Saulo Pomponet Oliveira**

**Agosto de 1998**

**Campinas - São Paulo**



UNIDADE	BC		
N.º CHAMADA:			
V.	Ex.		
TC/MBO BC/	35155		
PRCC.	395/98		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00		
DATA	18/09/98		
N.º CPD			

CM-00116200-2

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Oliveira, Saulo Pomponet

OL4m Métodos numéricos para precificação de opções / Saulo Pomponet Oliveira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Petrônio Pulino

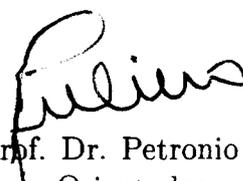
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise numérica. 2. Desigualdades variacionais (Matemática). 3. Opções (Finanças). I. Pulino, Petrônio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Métodos Numéricos para  
Precificação de Opções**

Este exemplar corresponde a redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Saulo Pomponet Oliveira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de agosto de 1998.



Prof. Dr. Petronio Pulino  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA APLICADA.

## Agradecimentos

- Ao meu pai, mãe (*in memoriam*) e irmãos, que algumas vezes foram o único laço fora de Campinas, laço persistente de união;
- À simpática e acolhedora comunidade católica do Jardim América e de todo o distrito de Barão Geraldo;
- Aos colegas com quem morei em dois períodos especiais: no primeiro e no último ano;
- Pela atenção e exemplo de vida de diversos professores no IMECC;
- Aos amigos da graduação, da turma de Matemática Aplicada e Computacional e da pós-graduação ;
- Pela lições de coragem e profissionalismo vividas no movimento empresa-júnior, enquanto membro da OTMMA ;
- Ao Prof. A. Cláudio Paiva (IME-USP), pelo auxílio nos primeiros meses de mestrado e indicações da bibliografia;
- Pela atenção e valiosas sugestões dos membros da Banca Examinadora;
- Aos funcionários do IMECC, em especial aqueles com quem tive o privilégio de ter mais contato;
- Aos amigos de várias cidades do Brasil, em especial do Rio de Janeiro;
- À CAPES, pelo suporte financeiro concedido;
- Ao orientador, Prof. Petrônio Pulino, pela educação matemática dos primeiros anos e pela ampla educação acadêmica dos anos seguintes.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 10 de agosto de 1998

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



---

Prof (a). Dr (a). **PETRONIO PULINO**



---

Prof (a). Dr (a). **JOSÉ ANTONIO SCARAMUCCI**



---

Prof (a). Dr (a). **PAULO RÉGIS CARON RUFFINO**

*”Em condições normais, o cientista pesquisador não é um inovador, mas um solucionador de problemas, e os problemas nos quais se concentra são exatamente aqueles que lhe parecem ser resolvidos dentro da tradição científica existente.”*

Extraído de  
*Caos: o surgimento de uma nova ciência,*  
James Gleick.

# Índice

## Capítulo 1: Introdução

1.1. Terminologia Básica	02
1.2. Fundamentos de Matemática Financeira	04
1.3. Processos Estocásticos	08
1.4. Observações	15

## Capítulo 2: Modelo de Black-Scholes

2.1. Princípios Gerais de Precificação de Opções	17
2.2. Hipóteses Gerais do Modelo de Black-Scholes	23
2.3. Movimento Browniano Geométrico	24
2.4. Simulando o Movimento Browniano Geométrico	26
2.5. Método de Monte Carlo	29
2.6. Fórmula de Black-Scholes	31
2.7. Equação de Black-Scholes	38
2.8. Pagamento de Dividendos	40
2.9. Observações	41

## Capítulo 3: Análise da Equação de Black-Scholes

3.1. Classificação e Comentários	42
3.2. Equação de Difusão	43
3.3. Solução Analítica - Equação de Black-Scholes	44
3.4. Observações	50

## Capítulo 4: Métodos de Diferenças Finitas

4.1. Método Explícito	51
4.2. Método de Crank-Nicolson	52
4.3. Condições de Contorno	54
4.4. Estabilidade	56
4.5. Observações	59

## Capítulo 5: Adaptações para Diferenças Finitas

5.1. Solução de Equações Transformadas	60
5.2. Malhas não Uniformes	62
5.3. Distorções nas Equações Transformadas	63
5.4. Observações	67

## Capítulo 6: Experimentos Numéricos

6.1. Descrição e Resultados	69
6.2. Observações	80

## Capítulo 7: Opções Americanas de Venda

7.1. Exercício Prematuro em Opções Americanas de Venda	81
7.2. Formulação como Problema de Fronteira Livre	82
7.3. Formulação de Complementaridade	85
7.4. Opções Americanas com Dividendos	85
7.5. Observações	86

## Capítulo 8: Solução por Diferenças Finitas

8.1. Método Explícito	88
8.2. Método de Crank-Nicolson	89
8.3. Métodos Adaptados	90
8.4. Observações	92

## Capítulo 9: Inequações Variacionais Lineares

9.1. Conceitos Iniciais	93
9.2. Problema do Obstáculo	96
9.3. Existência e Unicidade	101
9.4. Penalização	113
9.5. Método de Galerkin	118
9.6. Métodos de Elementos Finitos	119
9.7. Problema de Complementaridade Linear	120
9.8. Inequações Variacionais de Evolução	126
9.9. Observações	133

## Capítulo 10: Experimentos Numéricos (II)

10.1. Descrição e Resultados	134
10.2. Observações	142

Comentários Finais	143
Bibliografia	144

# Capítulo 1 :

## Introdução

Este trabalho visa desenvolver e analisar métodos numéricos aplicados a um problema originário do mercado financeiro: a determinação do valor de negociação , ou precificação , de contratos de opções. Esta análise pretende fornecer uma validação de diversos métodos numéricos, abrindo espaço para o aprimoramento destes no problema considerado.

O conhecimento sobre opções, contratos futuros e estrutura a termo da taxa de juros é fundamental para o mercado de derivativos, atualmente um dos mais importantes mercados financeiros no Brasil e no exterior.

Faremos uma abordagem essencialmente matemática do tema, embora os resultados procurados (em especial o aprimoramento de métodos numéricos) tenham como origem dificuldades da prática financeira. É interessante notar que alguns resultados podem ser aproveitados em outros problemas em matemática aplicada.

Este capítulo e o seguinte tratam dos fundamentos econômicos e da formulação do modelo clássico, que envolve uma equação diferencial linear de difusão-convecção, a equação de *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0$$

O capítulo 3 apresenta um tratamento analítico da equação de *Black-Scholes*, enquanto o capítulo 4 apresenta o método de diferenças finitas e os cuidados que devem ser tomados ao aplicarmos este método numérico ao problema.

A busca de um melhor desempenho em diferenças finitas é o assunto do capítulo 5; os resultados obtidos são comparados no capítulo seguinte.

Nos capítulos de 7 a 10 vamos analisar um modelo mais complexo, que descreve contratos que admitem o exercício prematuro. Este modelo admite diversas formulações, como problema de fronteira livre e inequações variacionais. Daremos maior ênfase às opções americanas de venda.

Trataremos com mais profundidade as inequações variacionais, que levam a métodos eficientes de solução, baseados nos Métodos de Elementos Finitos e algoritmos de solução de Problemas de Complementaridade Linear. Estratégias de solução e resultados são apresentados.

Reservamos ao final de cada capítulo uma seção de observações onde são apresentadas notas bibliográficas, comentários sobre os assuntos discutidos e contribuições desta dissertação ao tema proposto.

## 1.1 Terminologia Básica

Um **ativo financeiro** é um bem físico ou instrumento legal que possui valor mensurável em uma unidade monetária; ouro, ações e títulos públicos são exemplos de ativos. Quando existe um conjunto de pessoas físicas e jurídicas (denominadas **agentes**, **participantes** ou **investidores**) oferecendo ou procurando um ou mais ativos, temos um **mercado** dos ativos envolvidos. O mercado determina o valor ou preço destes ativos.

A necessidade de proteção contra variações futuras dos preços dos ativos estimulou a criação de contratos em que a negociação dos preços futuros ocorrem no presente, os chamados **derivativos**.

Os derivativos são contratos caracterizados pela dependência de um ou mais ativos e sujeitos a um conjunto de restrições sobre os direitos e deveres das partes e sobre os prazos de vencimento, consistindo em variações do contrato usual de compra ou venda no ato. Como exemplos de derivativos, temos os contratos futuros e de opções.

Uma **opção** é um tipo de contrato envolvendo de um lado o comprador, e do outro, o vendedor da opção. O comprador adquire por meio desta o direito de vender (**opção de venda**) ou de comprar (**opção de compra**) um determinado ativo em data futura. O vendedor assume a obrigação futura de atender ao direito do comprador, recebendo uma remuneração (**prêmio da opção**) pela responsabilidade assumida.

O ativo associado a uma opção é conhecido como **ativo-objeto** da opção. As ações serão o tipo de ativo-objeto mais frequente neste trabalho.

Dizemos que o comprador **exerce** a opção se ele utiliza o direito adquirido de compra ou venda. O preço futuro pelo qual o ativo será vendido ou comprado é chamado **preço de exercício**.

As opções que permitem o exercício apenas em uma data fixa (**data de vencimento**) são conhecidas como **opções européias**, enquanto aquelas que o permitem o exercício antes da data de vencimento (**exercício prematuro**) são denominadas **opções americanas**. Esta classificação deve-se aos locais em que os dois tipos de opções foram inicialmente negociados.

O comprador não tem o dever de vender ou comprar o ativo no futuro, ou seja, ele pode desistir da transação se as condições do mercado não forem adequadas. Por outro lado, o vendedor da opção é obrigado a honrar o contrato, independente das condições do mercado. Este desequilíbrio é compensado por uma escolha adequada do valor do prêmio. O problema de determinar este valor é conhecido como **precificação<sup>1</sup> de opções**. (*option pricing*) . De modo geral, precificação é um processo de determinar o valor justo a ser pago por um determinado ativo.

A primeira bolsa de valores a negociar opções foi a *Chicago Board Options Exchange*, em 1973; No Brasil, a BM&F, a BOVESPA e a BVRJ são as principais bolsas que operam opções, frequentemente associadas a ativos como ouro, ações, dólar comercial, café e boi gordo.

**Exemplo (Hull (1997))** : Um investidor comprou 100 opções européias de compra de ações da IBM com preço de exercício  $E = \$100$  , vencimento de  $T = 2$  meses e prêmio  $c = \$5$ . O preço atual do lote é de  $S = \$98$ . Assim, ele faz um investimento inicial de  $(5)(100) = \$500$ .

Vejamos alguns cenários possíveis ao fim de dois meses:

- O preço da ação<sup>2</sup> caiu para \$90 : o investidor desiste de exercer a opção , sem obter lucros na operação.
- O preço da ação subiu para \$115 : o investidor exerce a opção , comprando as 100 ações por \$100 e vendendo-as imediatamente por \$115. O investidor ganha  $(115-100)(100) = \$1500$ .

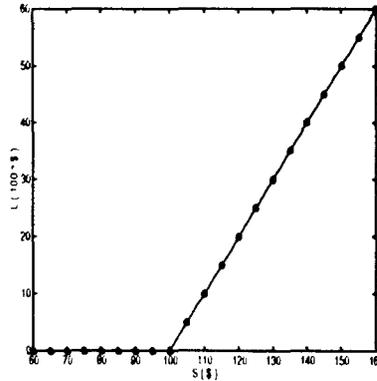
Observemos que o lucro do investidor depende da alta do preço da ação. Assim, o prêmio de \$500 pago pela opção de compra no ato do contrato renderá ao investidor  $S^* - E$ , se o preço  $S^*$  da ação superar o preço de exercício  $E$  após dois meses, ou zero, caso contrário.

Podemos generalizar os cenários acima através de um gráfico com vários valores de  $S$  :

---

<sup>1</sup>Embora precificação seja o termo mais utilizado, formalmente a palavra correta é **apreçamento**

<sup>2</sup>A palavra **ação** será usada no sentido de **lote de ações**.



**Figura 1.1:** Lucro do investidor  $\times$  do preço da ação no vencimento

## 1.2 Fundamentos de Matemática Financeira

Alguns conceitos de matemática financeira serão apresentados a seguir, visando a formulação de um modelo matemático para o mercado de opções.

### 1.2.1 Taxa de Juros

O **Juro** é definido como a remuneração de uma quantia (ou **capital**) emprestada por um dado instante de tempo, dependendo de fatores como o risco de inadimplência de quem toma o empréstimo, da inflação e do lucro desejado por quem empresta. A **taxa de juros** é a razão entre os juros pagos em um período de tempo e o capital emprestado. Por exemplo, se um capital de \$100 render \$10 em juros, a taxa de juros é de 10 % ao mês (10%/mês).

Definimos o **valor futuro** do capital como a soma do capital inicial e os juros referentes ao período da aplicação. No caso em que a taxa de juros é aplicada a apenas um período de tempo, o valor futuro  $VF$  de um capital  $S$  com taxa de juros  $i$  é dado por

$$VF = S(1 + i) \quad (1.1)$$

Por exemplo, um capital de \$100 tem um valor futuro de \$110 após um mês, considerando uma taxa de juros de 10%/mês

Dizemos que uma taxa de juros é **composta** se a taxa incide sobre o capital inicial acrescido de juros acumulados em períodos anteriores. Temos

que o valor futuro de um capital  $S$  aplicado sob uma taxa de juros composta  $i$  durante  $n$  unidades de tempo é dado por

$$VF = S(1 + i)^n \quad (1.2)$$

Se no exemplo anterior o período é de dois meses, o valor futuro é de \$121. Subentende-se que as taxas de juros são sempre compostas.

Há uma grandeza temporal implícita aos juros, a periodicidade com que os juros são aplicados; por exemplo, uma taxa  $i^* = 12\%/ano$  composta (ou capitalizada) mensalmente é tal que os juros são acumulados mensalmente, embora a taxa seja anual.

Uma taxa de juros  $i$  é dita **efetiva** se os intervalos de tempo em que a taxa é aplicada são iguais a uma unidade de tempo da mesma taxa. Se uma taxa de juros  $i_m$  é aplicada com periodicidade de  $m$  unidades de tempo, a taxa de juros efetiva  $i = i_1$  associada a  $i_m$  é tal que

$$i_m = m \cdot i \quad (1.3)$$

Neste caso, a taxa  $i_m$  é denominada **taxa de juros proporcional** de multiplicidade  $m$ . No exemplo anterior, a taxa de juros efetiva associada a  $i^* = i_{12}$  é dada por  $i = 1\%/mês$ . A indicação da periodicidade pode ser feita por índices ( $i_2, i_6, i_{12}, \dots$ ) ou expressando a forma de composição (composta mensalmente, anualmente,  $\dots$ ). A taxa de juros efetiva dispensa as duas notações.

### 1.2.2 Valor Presente

Seja  $S$  uma quantia disponível num dado instante futuro, sujeita a uma taxa de juros efetiva  $i$ . O **valor presente** ou valor atual de  $S$  é o valor do capital inicial que, aplicado à taxa  $i$  até o instante dado, tem um valor futuro igual a  $S$ . Dado um intervalo de tempo de  $n$  unidades, o valor presente  $VP$  de  $S$  é dado por:

$$VP = S(1 + i)^{-n} \quad (1.4)$$

Este conceito pode ser estendido para fluxos de caixa. Um **fluxo de caixa** é uma sequência  $\phi = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  em que cada componente  $v_k$  é um recebimento ou pagamento previsto para ocorrer dentro de  $k$  unidades de

tempo,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Considerando uma taxa de juros efetiva  $i$  para todo o período, temos que o valor presente  $VP$  do fluxo  $\phi$  é definido como

$$VP = \sum_{k=0}^n v_k(1+i)^{-k} \quad (1.5)$$

Podemos associar um ativo ao fluxo de caixa por ele gerado, constituindo uma maneira de avaliá-lo. O princípio fundamental de precificação é que o preço de um ativo é dado pelo valor atual do fluxo de caixa esperado gerado pelo ativo.

### 1.2.3 Arbitragem

**Arbitragem** é um fluxo de caixa que garante lucro sem imobilização de capital. Em geral, é caracterizada por:

- compra e venda de combinações de um mesmo ativo;
- realização simultânea de operações ;
- diferença entre a taxa de juros do mercado e a taxa de juros (previamente conhecida) associada a algum ativo;

Um exemplo sutil é o investimento em caderneta de poupança , que apesar de fornecer lucro garantido, não caracteriza uma arbitragem, pois a remuneração obtida deve-se à imobilização do capital por um certo período de tempo.

Os modelos de precificação de opções baseiam-se no **princípio de não-arbitragem**, que estabelece a não existência de oportunidades de arbitragem sem riscos em um mercado ideal. Esta hipótese justifica-se pelo fato de que tais oportunidades são detectadas rapidamente em um mercado competitivo, de modo que todos os agentes vão querer usufruir delas, fazendo com que os preços dos ativos envolvidos subam e que a arbitragem deixe de existir.

### 1.2.4 Juros Continuamente Compostos

O modelo tratado no próximo capítulo aproxima os mercados reais por mercados em que as negociações ocorrem continuamente, o que permite o uso do cálculo diferencial. Por este motivo vamos adotar daqui em diante taxas de juros capitalizadas continuamente.

Duas taxas de juros  $i$  e  $i'$  com periodicidades  $P$  e  $Q$  são **equivalentes** se produzem o mesmo valor futuro de um capital  $S$  aplicado durante o mesmo

período de tempo  $t$ , ou seja:

$$S(1+i)^{t/P} = S(1+i')^{t/Q} \quad (1.6)$$

De (1.6), definindo a razão  $m = P/Q$ , temos que:

$$i' = (1+i)^{1/m} - 1 \quad (1.7)$$

Podemos obter uma taxa  $i'_m$  proporcional a  $i'$  com multiplicidade  $m$  fazendo  $i'_m = m \cdot i'$ . Como  $m \cdot Q = P$ , a unidade da taxa  $i'_m$  é a mesma da taxa  $i$ .

Dada uma taxa  $i$ , queremos obter uma taxa  $r = i_\infty$  com a mesma unidade de  $i$ , porém **continuamente composta**, ou seja, apresentando intervalos de capitalização arbitrariamente pequenos ( $Q \rightarrow 0$ ). Seu valor é obtido calculando-se o limite de  $i'_m$  para  $m \rightarrow \infty$ :

$$i_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} i'_m = \ln(1+i) \quad (1.8)$$

Observando que  $1+i = e^{i_\infty} = e^r$ , temos que dado um intervalo de tempo  $t \in \mathbb{R}$ , o valor atual e o valor futuro de um capital  $S$  são expressos como:

$$VF = S \cdot (1+i)^t = S \cdot (e^r)^t = S \cdot e^{rt} \quad (1.9)$$

$$VP = S \cdot (1+i)^{-t} = S \cdot (e^r)^{-t} = S \cdot e^{-rt} \quad (1.10)$$

**Exemplo** : Considere uma taxa  $i = 50\%/ano$ . O valor futuro de uma aplicação de \$1 durante 2 anos é dado por  $VF = (1)(1+0.5)^2 = \$2,25$ ; a taxa continuamente composta  $r$  é dada por  $\ln(1+0.5) \approx 40.55\%/ano$ . O cálculo equivalente em (1.9) fornece  $VF = (1)e^{(2)r} = \$2,25$ .

### 1.2.5 Posições Vendidas e Compradas

Um **contrato futuro** é um contrato que estabelece a compra ou venda de um ativo em data futura por um determinado preço previamente estabelecido. Dizemos que um investidor que está vendendo em um contrato futuro assume uma **posição vendida** (*short position*), enquanto o investidor que está comprando assume uma **posição comprada** (*long position*). O investidor em posição comprada por exemplo em ações ganha com a alta do preço da ação, enquanto que em posição vendida ganha na queda da ação.

Um investidor **fecha uma posição** ao realizar uma operação visando liquidar o compromisso gerado, em geral tomando uma posição oposta à posição em questão. Por exemplo, uma posição vendida de 100 unidades de um ativo é fechada assumindo uma posição comprada de 100 unidades do mesmo ativo e com mesma data de vencimento. Chegando o vencimento, as duas posições se cancelam.

A **venda descoberta** (*short selling*) de um ativo consiste na venda de ativos não possuídos pelo investidor, ficando o mesmo obrigado a comprar em data futura o mesmo número de ativos, realizando a reposição junto à fonte que emprestou-lhe os ativos vendidos. Considere, por exemplo, um investidor que vende a descoberto 50 ações fornecidas por uma corretora pelo preço unitário de \$10. Após dois meses, ele resolve fechar sua posição comprando 50 ações e devolvendo-as à corretora. Se o preço do ativo tiver caído para \$9.50, o lucro obtido é de \$25.

### 1.3 Processos Estocásticos

Vamos inicialmente estabelecer algumas definições básicas de probabilidade e apresentar a função de distribuição normal, a mais empregada neste trabalho. Convém consultar referências completas sobre o assunto, sugeridas nas notas bibliográficas ao final deste capítulo.

#### 1.3.1 Elementos de Probabilidade

A incerteza do mercado é causada basicamente por fenômenos de natureza econômica, como mudanças na variação cambial, adversidades climáticas que afetem a agricultura, estímulo ao crescimento de um setor da economia ou crise financeira em países que sejam parceiros comerciais.

Estes e outros fatores formam um conjunto de situações possíveis do mercado, que vão determinar o preço dos ativos. Vamos denominar este conjunto como **espaço amostral** ou **espaço de estados** e representá-lo por  $\Omega$ . Cada elemento  $\omega \in \Omega$  é denominado um **resultado** ou **estado**.

Um **evento** é um conjunto  $A \subset \Omega$  de resultados cuja ocorrência ou não-ocorrência pode ser observada (de outro modo, é uma informação disponível). Associamos a cada evento  $A$  uma probabilidade  $P(A)$  do evento ocorrer.

Apresentamos a seguir algumas definições formais do conjunto dos eventos observáveis e do modelo probabilístico genérico.

**Definição 1.1 :** Dado um espaço de estados  $\Omega$ , dizemos que um conjunto  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$  se  $\mathcal{F}$  satisfaz os seguintes axiomas:

(A1)  $\Omega \in \mathcal{F}$

(A2) Dado  $A \subset \Omega$ , se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c \in \mathcal{F}$

(A3) Se  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência tal que  $A_n \in \mathcal{F}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad (1.11)$$

O par  $(\Omega, \mathcal{F})$  é denominado um **espaço mensurável**. Os eventos  $A \in \mathcal{F}$  são chamados **eventos aleatórios**.

**Definição 1.2 :** Seja  $(\Omega, \mathcal{F})$  um espaço mensurável. Dizemos que  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **medida** em  $(\Omega, \mathcal{F})$  se  $\mu$  satisfaz os seguintes axiomas:

(M1)  $\mu(\emptyset) = 0$

(M2)  $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

(M3) Se  $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$  é uma sequência de conjuntos mutuamente excluídos, ou seja,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , então

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (1.12)$$

Temos que  $\mathbb{P}$  é uma medida de probabilidade se  $\mathbb{P}$  satisfaz (M1) a (M3) e a seguinte propriedade:

(M4)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

O trio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é denominado um espaço de probabilidade.

Dada a dificuldade em descrever os estados que influenciam o preço de um ativo e o fato de que toda a teoria de probabilidade pode ser construída a partir de um espaço satisfazendo os axiomas acima, vamos considerar o espaço de probabilidade como uma estrutura abstrata. Devemos esclarecer, porém, que este espaço deve ser único, ou seja, que o conhecimento dos estados possíveis da economia e das probabilidades de ocorrência de cada evento deve ser comum a todos os agentes do mercado. Isto corresponde na linguagem cotidiana a dizer que o mercado deve ser transparente.

Veremos a seguir como definir variáveis em espaços de probabilidade, e vamos relacionar a medida de probabilidade a medidas que descrevem a probabilidade de uma variável particular.

**Definição 1.3 :** Sejam  $(\Omega, \mathcal{F})$  e  $(\Omega', \mathcal{F}')$  espaços mensuráveis. Uma função  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  é  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -mensurável se para todo  $B \in \mathcal{F}'$  o conjunto  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\}$  pertencer a  $\mathcal{F}$ .

No caso em que  $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , sendo  $\mathcal{B}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel (vide James (1981)), dizemos que  $X$  é mensurável com relação a  $\mathcal{F}$ , ou que  $X$  é uma **variável aleatória** em  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Definição 1.4 :** A **função de distribuição acumulada**  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de uma variável aleatória  $X$  definida em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é definida por

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X(\omega) \leq x] \quad (1.13)$$

A **distribuição** ou **função de densidade de probabilidade** de  $X$  é uma função  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz:

$$\mathbb{P}[X(\omega) \in B] = \int_B f_X(x) dx \quad (1.14)$$

As definições acima sugerem a seguinte relação entre  $F$  e  $f$ :

$$F_X(z) = \int_{-\infty}^z f_X(x) dx \quad (1.15)$$

Podemos, portanto, calcular probabilidades associadas a uma variável aleatória sem utilizar diretamente a medida  $\mathbb{P}$ . As variáveis aleatórias são um passo intermediário na descrição do preço de ativos. Em seguida, vamos associá-la à uma variável que descreva o tempo e assim construir um modelo completo para o problema.

Vamos definir a média e a variância de variáveis aleatórias usando o conceito de função de densidade:

**Definição 1.5 :** A **esperança** ou **média** de uma variável aleatória  $X$  é dada por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot p(\omega) d\omega \quad , \quad (1.16)$$

onde  $p = f_X$  é a função de densidade de probabilidade de  $X$ .

Se  $E[X] = \bar{X}$ , a **variância** de uma variável aleatória  $X$  é dada por:

$$E[(X - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{X})^2 \cdot p(\omega) d\omega \quad , \quad (1.17)$$

Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição **normal** com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  ( $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) se a função de densidade de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left[ \frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1.18)$$

Neste caso, a média e a variância de  $X$  são respectivamente  $\mu$  e  $\sigma^2$ .

### 1.3.2 Processos Estocásticos : Definição e Exemplos

Uma função  $X(t, \omega) = X_t(\omega)$  é um **processo estocástico** se, para cada tempo  $t$  fixo, temos que  $X_t$  é uma variável aleatória, e para cada  $\omega$ ,  $X_t$  é uma função determinística, denominada **trajetória** do processo.

**Definição 1.6 :** Um processo estocástico indexado por  $T$  com valores em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  é uma função

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

tal que  $X_t(\omega)$  é mensurável em  $\mathcal{F}$  para todo  $t$  fixo.

Assim, o conceito de processo estocástico representa uma generalização das funções de uma variável real<sup>3</sup> e das funções de variável aleatória, de modo que pode servir de modelo para uma classe muito maior de fenômenos naturais e econômicos.

**Exemplo 1 (tempo contínuo) :**  $X_t \sim N(0, t)$ . ( $X_t$  é uma variável aleatória com distribuição normal de média 0 e variância  $t$ ).

Temos assim uma distribuição normal cada vez mais dispersa. Este processo poderia descrever, por exemplo, a queda livre de uma pena : quanto maior a altitude da queda, mais difícil fica localizar onde ela vai cair, ou seja, a dispersão é crescente.

**Exemplo 2 (tempo discreto) :**  $X_t \sim U\{0, t\}$  ( $X_t$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no conjunto  $\{0, 1, \dots, t\}$ ).

Este processo descreve, por exemplo, o processo de escolher uma bola ao acaso de uma cesta que começa contendo uma bola preta; a cada instante uma bola de cor diferente é adicionada à cesta, de modo que a probabilidade de encontrar a bola preta vai se reduzindo.

---

<sup>3</sup>Podemos também definir processos estocásticos com variáveis complexas ou vetoriais.

### 1.3.3 Processos de Markov e Movimento Browniano

Dentro do universo de processos estocásticos, vamos nos interessar pelos processos do tipo markoviano, ou **processos de Markov**, caracterizados pela independência do passado : em um instante presente  $t_o$ , a variável aleatória  $X_t$  no instante futuro  $t > t_o$  independe de  $X_s$  para todo  $s < t_o$ .

Esta propriedade é consistente com a **hipótese de mercado eficiente**, que estabelece que somente a informação presente pode afetar aleatoriamente o preço futuro, devido ao fato de que toda a informação anterior já foi absorvida pelo mercado e somente vai influenciar o preço de maneira previsível.

Um processo de Markov particular é o chamado **Movimento Browniano**. Um processo  $z = B_t$  é um movimento browniano se possui as seguintes propriedades:

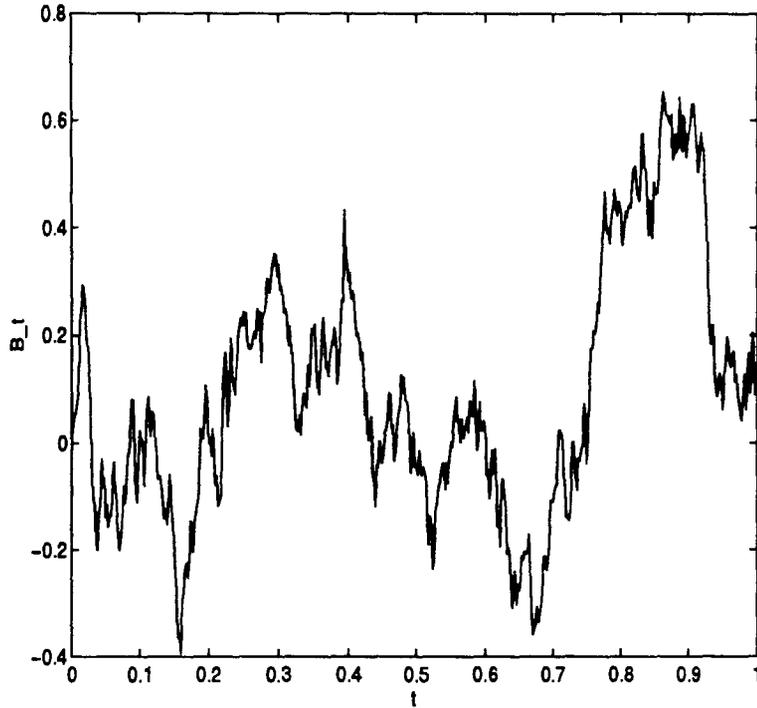
- $B_t$  possui trajetórias contínuas;
- $B_o(\omega) = 0 \quad \forall \omega$ , ou seja, a probabilidade  $P(B_o = 0)$  é igual a 1;
- Para instantes de tempo quaisquer  $t < s < u < v$ ,
  - $(B_s - B_t)$  e  $(B_u - B_v)$  são variáveis aleatórias independentes;
  - $B_s - B_t \sim N(0, s - t)$ .

Das últimas propriedades acima, concluímos que

$$z = B_t = B_t - B_o \sim N(0, t) \quad (1.19)$$

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t \sim N(0, \Delta t) \quad (1.20)$$

Podemos pensar no gráfico  $B_t \times t$  como o gráfico de uma possível trajetória de  $B_t$ . O traçado desta trajetória é feito usando um gerador de variáveis aleatórias de distribuição Normal centrada com variância  $\Delta t$  para cada incremento de tempo  $\Delta t$ . Um gráfico assim gerado é uma **simulação** do movimento browniano. Apresentamos a seguir uma simulação do movimento Browniano no intervalo  $[0,1]$  :



**Figura 1.3:** Simulação do Movimento Browniano com 500 pontos

Apresentaremos a seguir alguns conceitos financeiros relacionados com processos estocásticos.

### 1.3.4 Portfolios

Sejam  $S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^n$  processos estocásticos que descrevem o preço dos ativos  $A^1, A^2, \dots, A^n$  ao longo do tempo  $t$ . Um **portfolio** associado a  $(A^i)$  é uma sequência  $P_t$  de vetores em  $\mathbb{R}^n$ ,

$$P = P_t = (a_t^1, a_t^2, \dots, a_t^n), \quad (1.21)$$

tal que os coeficientes  $a_t^i$  representam a quantidade do ativo  $A^i$  que foi mantida no portfolio ou vendida, se  $a_t^i > 0$  ou comprada se  $a_t^i < 0$ , no instante

$t$ . O valor  $V_t$  deste portfolio no instante  $t$  é dado pela seguinte combinação linear dos processos  $S_t^i$  :

$$V_t = a_t^1 S_t^1 + a_t^2 S_t^2 + \dots + a_t^n S_t^n \quad (1.22)$$

Observemos que se um portfolio é composto de um único ativo,  $V_t$  coincide com o preço do ativo.

### 1.3.5 Retorno e Risco

Um portfolio pode gerar lucro ou prejuízo a depender do movimento dos preços dos ativos envolvidos. Isto motiva a definição de uma medida de desempenho de portfolios.

A variação relativa do valor de um portfolio  $P_t$  entre dois instantes consecutivos  $t_0$  e  $t_1$  representa o **retorno** de um portfolio:

$$R_P = R_P(t_0, t_1) = \frac{V_{t_1} - V_{t_0}}{V_{t_0}} \quad (1.23)$$

A diferença  $t_1 - t_0$  indica o período com que o retorno é calculado. Para variações contínuas no tempo, o retorno relaciona-se com  $V_t$  por meio da seguinte equação:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = r_t \cdot V_t \quad , \quad (1.24)$$

sendo que  $r = r_t$  é a **taxa de retorno instantânea**, resultante da atualização do valor do retorno em intervalos arbitrariamente pequenos (vide na seção 1.2.4 uma discussão semelhante). Assim como nos juros continuamente compostos, a taxa de retorno instantânea com periodicidade  $n$  é dada por

$$r_t = \ln(1 + R_P(t, t + n)) \quad (1.25)$$

Visando simplificar a notação, vamos nos referir à taxa  $r_t$  como o retorno do portfolio no caso contínuo.

Suponhamos que o retorno de um portfolio entre dois instantes segue uma distribuição de probabilidade com valor médio e variância conhecidas.

O **risco** de um portfolio pode ser definido como a probabilidade de que o valor do portfolio fique abaixo do valor esperado em uma data futura. Uma medida do risco é fornecida pela variância da distribuição do retorno em instantes recentes.

Dizemos que um investidor tem **aversão ao risco** se ele escolhe entre dois ativos com o mesmo retorno aquele que representa o menor risco. Assim, o ativo com maior risco deverá apresentar um retorno maior ou ter seu preço reduzido para que seja aceito no mercado com agentes aversos ao risco. Um investidor é **neutro ao risco** se ele não faz distinção entre ativos pelo risco que cada um apresenta. Assim, a tendência em um mercado com neutralidade ao risco é que todos os ativos forneçam o mesmo retorno.

Vamos associar o retorno às taxas de juros. Consideremos um título imaginário que representa o empréstimo de um capital  $S_0$  sujeito a taxa de juros  $r$  e sem risco de inadimplência. Seu valor após  $t$  unidades de tempo da ocorrência do empréstimo é  $B(t) = S_0 e^{rt}$ . Observando que  $S(t)$  é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial B}{\partial t} = r \cdot B , \quad (1.26)$$

temos de (1.24) que o retorno deste título corresponde à taxa de juros  $r$ .

Observe que num mercado neutro ao risco que negocia títulos como este, todos os demais ativos neste mercado estão associados à mesma taxa de juros. Se o mercado não é neutro ao risco, o princípio de não-arbitragem garante que todos os ativos e portfólios que apresentem risco zero devem ter o mesmo retorno que o título, e portanto devem estar associados à mesma taxa de juros.

Esta abordagem permite aplicarmos os conceitos de juros apresentados anteriormente a um ativo ou a um portfólio, destacando a importância da existência de um ativo sem riscos na análise de um mercado.

## 2 Observações

Uma vasta literatura trata dos aspectos operacionais dos mercados de opções; utilizamos duas obras de caráter introdutório, Hull (1997) e Silva Neto (1994), além de Figlewski et al (1990).

Os princípios básicos de matemática financeira podem ser encontrados em Vieira Sobrinho (1984). A teoria de probabilidade é apresentada num contexto geral em James (1981) e voltada para modelos econômico-financeiros em Malliaris e Brock (1982). Recomendamos Harrison e Kreps (1979) para uma leitura aprofundada sobre modelos estocásticos que supõem transações em tempo contínuo.

A literatura em finanças costuma se dividir em três abordagens: análise quantitativa (modelos matemáticos e estatísticos), discussão de aspectos operacionais do mercado (estratégias, padrões e normas) ou estudo crítico dos modelos com relação à realidade dos mercados (validação dos modelos, questionamento das hipóteses realizadas). Daqui em diante vamos nos concentrar na análise quantitativa em mercados de opções.

Na interpretação dos espaços de probabilidade, fizemos uma hipótese sobre a transparência dos mercados. A suposição de transparência não significa uma limitação da teoria, mas uma condição para haja liquidez em um mercado, visto que os investidores exigem credibilidade às aplicações. Por esta razão, as Bolsas de Valores se esforçam em coibir privilégios no recebimento de informações, por exemplo cancelando o pregão na ocorrência de boatos.

Embora o exemplo apresentado de opções sobre ações tenha enfatizado um caráter especulativo do contrato, o contrato de opções tem como principal objetivo entre as instituições não-financeiras a proteção do capital contra as variações futuras de fluxo de caixa. Neste sentido, apresentamos um novo exemplo em que o ativo-objeto é a taxa de câmbio.

**Exemplo:** Uma empresa importadora "compra" 5 contratos de opções sobre dólar comercial para 3 meses com preço de exercício de R\$1,20 / dólar, pagando um prêmio de R\$2.000. Cada contrato dá direito à compra de \$100.000.

Se após 3 meses a taxa de câmbio estiver em R\$1,18 / dólar, a empresa desiste da opção e compra os dólares no câmbio. Se a taxa atingir R\$1,23 / dólar, a opção é exercida e os dólares são comprados a R\$1,20 / dólar.

Portanto, a maior taxa de câmbio a ser paga é de R\$1,20 / dólar. O prêmio pago no início ( $5 \cdot 2000 = \text{R}\$40.000$ ) serviu como um seguro para a compra de  $5 \cdot 100.000 = \$500.000$  necessários.

# Capítulo 2 :

## Modelo de Black-Scholes

Os trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) representaram um avanço no que era conhecido até então a respeito de precificação de opções: a partir de um conjunto razoável de hipóteses e com argumentos de arbitragem, Black e Scholes propuseram uma fórmula que fornece o prêmio de uma opção europeia a partir do preço atual do ativo, o tempo de expiração da opção e alguns parâmetros acessíveis, enquanto Merton elaborou uma estrutura teórica que serve como base para critérios de precificação de opções.

### 2.1 Princípios Gerais de Precificação de Opções

Esta seção trata dos princípios e resultados iniciais de Merton (1973), que trazem informações sobre propriedades e condições satisfeitas pelos prêmios de opções americanas ou europeias de compra ou venda.

Para fixar idéias, vamos utilizar [\$] como unidade monetária e [anos] como unidade de tempo.

Vamos considerar um mercado que negocia três tipos de ativos: ações, opções e um título que paga \$1 sem riscos ao final de um dado período. As hipóteses sobre a atuação dos participantes do mercado resumem-se ao princípio de não-arbitragem. Vamos supor ainda que as ações negociadas não geram rendimentos (**dividendos**) ao portador e que não há restrição alguma às transações no mercado.

Representamos por  $c(S, \tau; E)$  o prêmio de uma opção de compra europeia com preço de exercício  $E$  que vence dentro de  $\tau$  anos, sabendo que no instante presente a ação custa  $S$ . A mesma opção do tipo americano é representada por  $C(S, \tau; E)$ .

Sendo um valor pago pelo compromisso assumido pelo vendedor da opção, o prêmio não pode ser negativo em quaisquer circunstâncias, ou seja,

$$c(S, \tau; E) \geq 0 \text{ e } C(S, \tau; E) \geq 0 \quad (2.1)$$

Vamos determinar o lucro gerado ao exercer uma opção de compra (não necessariamente na data de vencimento, no caso de opções americanas):

- Se  $S > E$ , o comprador exerce a opção, pagando  $E$  pela ação e em seguida vendendo-a no mercado por  $S$ , obtendo assim um lucro de  $S - E$ ;
- Se  $S \leq E$ , o comprador desiste de comprar a ação, não obtendo lucro;

Deste modo, o exercício da opção gera ao comprador um lucro igual a  $\max\{S - E, 0\}$ . Definindo  $(x)^+ = \max\{x, 0\}$ , temos que o lucro é dado por  $(S - E)^+$ .

Apresentamos a seguir algumas propriedades, que são verificadas pelo argumento de que a não ocorrência da propriedade leva a uma condição de arbitragem.

**Proposição 2.1** : O preço de uma opção de compra na data de vencimento equivale ao lucro por ela gerado, ou seja,

$$c(S, 0; E) = (S - E)^+ \text{ e } C(S, 0; E) = (S - E)^+ \quad (2.2)$$

*Demonstração* : Suponha que  $c(S, 0; E) < (S - E)^+$ . Podemos comprar a opção e exercê-la no ato, ganhando  $(S - E)^+ - c(S, 0; E) > 0$  instantaneamente. Assim,  $c(S, 0; E) \geq (S - E)^+$ .

Por outro lado, se  $c(S, 0; E) > (S - E)^+$ , podemos vender uma opção, recebendo  $c(S, 0; E)$ . Se  $S > E$ , compramos uma ação por  $S$  e vendemos por  $E$  ao comprador da opção, obtendo um lucro de  $c(S, 0; E) - (S - E) > 0$ . Se  $S < E$ , o comprador não exerce a opção e ficamos com o prêmio, garantindo, de qualquer forma, um lucro imediato. Assim,  $c(S, 0; E) \leq (S - E)^+$  e portanto  $c(S, 0; E) = (S - E)^+$ .

Analogamente,  $C(S, 0; E) = (S - E)^+$ .

**Proposição 2.2** :  $C(S, \tau; E) \geq (S - E)^+$ .

*Demonstração* : De (2.1),  $C(S, \tau; E) \geq (S - E)^+$  para  $S \leq E$ . Suponha que para  $S > E$  dado, existe  $\tau^*$  tal que  $C(S, \tau^*; E) < (S - E)^+ = S - E$ .

Podemos comprar uma opção por  $C(S, \tau^*; E)$ , exercê-la imediatamente, ganhando  $(S - E)^+$ ; estas operações geram um lucro instantâneo  $L = S - E - C(S, \tau^*; E) > 0$ . Assim,  $C(S, \tau^*; E) \geq (S - E)^+$  para  $S > E$  e portanto,  $C(S, \tau^*; E) \geq (S - E)^+$  para todo  $S$ .

De modo análogo, podemos verificar as seguintes proposições:

**Proposição 2.3** : Se  $\tau_1 \geq \tau_2$ ,

$$c(S, \tau_1; E) \geq c(S, \tau_2; E) \text{ e } C(S, \tau_1; E) \geq C(S, \tau_2; E). \quad (2.3)$$

**Proposição 2.4** :  $C(S, \tau; E) \geq c(S, \tau; E)$ .

**Proposição 2.5** : Se  $E_1 \geq E_2$ ,

$$c(S, \tau; E_1) \leq c(S, \tau; E_2) \text{ e } C(S, \tau; E_1) \leq C(S, \tau; E_2). \quad (2.4)$$

Uma ação pode ser vista como uma opção americana com vencimento ilimitado que gera um lucro  $S = (S - 0)^+$  no exercício, ou seja, uma ação equivale a uma opção **perpétua** ( $\tau \rightarrow \infty$ ) com preço de exercício  $E = 0$  ( $S = C(S, \infty, 0)^1$ ). Podemos com esta informação estabelecer um limitante superior para uma opção de compra:

**Proposição 2.6** :  $C(S, \tau; E) \leq S$  e  $c(S, \tau; E) \leq S$ .

*Demonstração* : De (2.3) e (2.4), para todo  $\tau$  e para todo  $E > 0$ ,

$$S = C(S, \infty; 0) \geq C(S, \tau; 0) \geq C(S, \tau; E) \quad (2.5)$$

Segue de (2.5) e da Proposição 2.4 que  $c(S, \tau; E) \leq S$ .

**Corolário 2.1** :  $c(0, \tau, E) = C(0, \tau, E) = 0$ .

*Demonstração* : De (2.5), temos em particular  $c(0, \tau, E) \leq 0$ . De (2.1), temos também  $c(0, \tau, E) \geq 0$ , logo  $c(0, \tau, E) = 0$ . Analogamente,  $C(0, \tau, E) = 0$ .

Seja  $B(\tau)$  o preço de um título que paga \$1 ao final de  $\tau$  anos. Por definição,  $B(0) = \$1$ . Assumindo que as taxas de juro associadas ao título são estritamente positivas, temos que  $B(\tau_1) < B(\tau_2)$  quando  $\tau_1 > \tau_2$ . Assim,  $B(\tau)$  tende a zero quanto  $\tau \rightarrow \infty$

O teorema a seguir complementa o resultado da proposição 2.6, estabelecendo um limite superior para o preço de uma opção:

**Teorema 2.1** : O prêmio de opções de compra com preço de exercício  $E$  satisfazem para todo  $s, t$  a seguinte desigualdade:

$$c(S, \tau; E) \geq (S - EB(\tau))^+ \text{ e } C(S, \tau; E) \geq (S - EB(\tau))^+ \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>O uso do símbolo  $\infty$  no lugar de um parâmetro significa que o parâmetro tende a infinito; neste caso,  $C(S, \infty, 0)$  é o limite de  $C(S, \tau, 0)$  quando  $\tau$  tende a infinito.

*Demonstração* : Suponha que  $c(S, \tau; E) + EB(\tau) < S$ . Vendendo a descoberto uma ação, comprando uma opção e comprando  $E$  títulos, obtemos um lucro  $L = S - c(S, \tau; E) - EB(\tau) > 0$ .

Ao final de  $\tau$  anos, supondo que a ação custe  $S^*$ , a opção e o título comprados rendem  $(S^* - E)^+ + E \geq S^*$ , suficientes para fechar comprar uma ação e fechar posição em descoberto.

Deste modo, garantimos no mínimo o lucro  $L$  inicial sem imobilização de capital. Portanto,  $c(S, \tau; E) + EB(\tau) \geq S$ , ou seja,  $c(S, \tau; E) \geq S - EB(\tau)$ .

De (2.1),  $c(S, \tau; E) \geq (S - EB(\tau))^+$ . A desigualdade para opções americanas segue da proposição 2.4.

É comum denominar a quantia  $(S - E)^+$  como **valor intrínseco** no sentido do valor mínimo que uma opção de compra. O teorema 2.1 sugere que esta definição cabe melhor ao valor  $(S - EB(\tau))^+$ . A diferença entre os dois limitantes pode ser grande especialmente para opções perpétuas:

**Corolário 2.2** :  $C(S, \infty, E) = c(S, \infty, E) = S$

*Demonstração* : Do teorema 2.1 e da proposição (2.6), temos que:

$$(S - EB(\tau))^+ \leq c(S, \tau; E) \leq S \quad (2.7)$$

$$(S - EB(\tau))^+ \leq C(S, \tau; E) \leq S \quad (2.8)$$

Como o limite para  $\tau \rightarrow \infty$  de  $(S - EB(\tau))^+$  é igual a  $S$ , o mesmo ocorre com  $c(S, \tau; E)$  e  $C(S, \tau; E)$ .

O teorema a seguir mostra que as opções de compra americanas e europeias devem ter o mesmo prêmio. O argumento utilizado é a preferência do investidor pelas alternativas mais rentáveis.

**Teorema 2.2** : Uma opção americana de compra nunca é exercida antes do vencimento, de modo que seu prêmio é idêntico ao de uma opção europeia ( $C(S, \tau; E) = c(S, \tau; E)$ ).

*Demonstração* : Um investidor comprou por  $C(S, \tau; E)$  uma opção americana de compra com vencimento em  $\tau$  anos. Suponhamos que falte um período de  $\tau^* < \tau$  anos para o vencimento, quando o preço da ação vale  $S^*$ . Se  $S^* \leq E$ , a opção não seria exercida, logo podemos assumir  $S^* > E$ .

O exercício prematuro da opção após  $\tau^*$  anos rende  $S^* - E$ . Uma alternativa é não exercer a opção, vender a descoberto uma ação e comprar  $E$  títulos que vencem em  $\tau^*$  anos.

O lucro gerado nesta operação é de  $S - EB(\tau^*) \geq S - E$ , o mesmo do exercício prematuro. Após  $\tau^*$  anos, se a ação está valendo  $\bar{S}$ , temos que a opção gera um lucro de  $(\bar{S} - E)^+$ , que somado ao rendimento de  $E$  gerado pelo título e descontada a despesa de  $\bar{S}$  para comprar uma ação e fechar a posição em descoberto, temos um saldo de  $(\bar{S} - E)^+ + E - \bar{S} = (E - \bar{S})^+ \geq 0$ .

Portanto, as operações acima levam a um rendimento maior que o exercício da opção após  $\tau^*$  anos, de modo que a opção não é exercida neste instante. Como  $\tau^*$  foi arbitrário, temos que o exercício prematuro não acontece em nenhum instante anterior ao vencimento.

**Observação :** Pelo fato de que

$$(S^* - E)^+ < (S^* - EB(\tau^*))^+ \leq C(S^*, \tau^*; E) , \quad (2.9)$$

também é preferível fechar a posição tomada na opção, vendendo uma opção americana com mesmo preço de exercício com vencimento em  $\tau - \tau^*$  anos.

Consideremos agora as opções de venda, representadas por  $p(S, \tau; E)$  quando do tipo europeu e por  $P(S, \tau; E)$  quando do tipo americano. Alguns resultados são análogos aos obtidos para opções de compra:

$$p(S, \tau; E) , P(S, \tau; E) \geq 0 \quad (2.10)$$

$$p(S, 0; E) = P(S, 0; E) = (E - S)^+ \quad (2.11)$$

$$P(S, \tau; E) \geq p(S, \tau; E) \quad (2.12)$$

$$P(S, \tau; E) \geq (E - S)^+ \quad (2.13)$$

Seja  $B'(\tau)$  o valor presente de \$1 em  $\tau$  anos, segundo a taxa de juros para empréstimos, ou seja, os agentes do mercado podem tomar emprestado uma quantia  $SB'(\tau)$  e pagar  $S$  ao final de  $\tau$  anos.

O importante resultado a seguir relaciona explicitamente opções de compra e opções de venda do tipo europeu:

**Teorema 2.3 :** Se  $B'(\tau) = B(\tau)$ , vale a seguinte igualdade:

$$p(S, \tau; E) = c(S, \tau; E) - S + EB(\tau) \quad (2.14)$$

*Demonstração* : Vamos verificar que  $p(S, \tau; E) + S - EB'(\tau) \geq c(S, \tau; E)$ . Supondo que esta desigualdade não seja válida, podemos vender uma opção de compra **A** com preço de exercício  $E$  e vencimento em  $\tau$  anos, comprar uma opção de venda **B** com o mesmo preço de exercício e data de vencimento, comprar uma ação e tomar emprestado uma quantia de  $EB'(\tau)$  para pagamento em  $\tau$  anos.

Geramos assim um lucro  $L = c(S, \tau; E) - p(S, \tau; E) - S + EB'(\tau) > 0$ . Ao final de  $\tau$  anos, temos duas situações:

- Se  $S > E$ , a opção **A** será exercida e a opção **B** não será exercida. Vendemos a ação por  $E$  e com esta quantia pagamos o empréstimo tomado;
- Se  $S < E$ , a opção **B** será exercida e a opção **A** não será exercida. Vendemos a ação por  $E$  e novamente liquidamos o empréstimo tomado;
- Se  $S = E$ , ambas as opções não serão exercidas; o empréstimo é pago pela venda da ação;

Em quaisquer circunstâncias, as operações são concluídas sem lucro ou prejuízo, garantindo o lucro inicial de  $L$  sem imobilização de capital. Portanto,  $p(S, \tau; E) + S - EB'(\tau) \geq c(S, \tau; E)$ , ou seja,

$$p(S, \tau; E) \geq c(S, \tau; E) - S + EB'(\tau) \quad (2.15)$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que

$$p(S, \tau; E) \leq c(S, \tau; E) - S + EB(\tau) \quad (2.16)$$

O resultado segue de (2.15), (2.16) e da hipótese  $B(\tau) = B'(\tau)$ .

**Corolário 2.3** :  $p(0, \tau; E) = EB(\tau)$ .

**Corolário 2.4** :  $p(S, \tau; E) \leq EB(\tau)$ .

**Corolário 2.5** :  $p(S, \infty; E) = 0$ .

Uma opção de venda americana não necessariamente tem o mesmo prêmio da opção européia equivalente. As opções de venda americanas serão discutidas posteriormente.

A função que determina o rendimento gerado por uma opção ( dada por  $(S - E)^+$  no caso de uma opção de compra e  $(E - S)^+$  no caso de uma opção de venda) é denominada **payoff** da opção.

Finalizamos esta seção enunciando um resultado relevante, demonstrado também em Merton (1973), que estabelece uma condição de convexidade para a função-prêmio.

**Teorema 2.4** : Se o retorno  $r_t$  de uma ação independe do seu preço  $S = S_t$ , então o prêmio de uma opção sobre esta ação é uma função convexa com respeito a  $S$ .

## 2.2 Hipóteses do Modelo de Black-Scholes

Vamos considerar um mercado que negocia ações, opções e títulos conforme anteriormente. As hipóteses essenciais do modelo de Black e Scholes para a obtenção do prêmio de uma opção de compra européia são as seguintes:

**H1** : As transações ocorrem continuamente e os ativos negociados são totalmente divisíveis;

Isto equivale a dizer que as variáveis preço e tempo são contínuas, de modo que possamos utilizar técnicas de cálculo, como observado anteriormente;

**H2** : A taxa de juros sem riscos  $r$  vigente no mercado é constante;

Esta taxa de juros refere-se ao retorno de um título sem riscos como na seção anterior. Deste modo, o preço  $B(\tau)$  de um título sem riscos que paga \$1 em  $\tau$  anos é dado pelo valor presente de \$1, ou seja,  $B(\tau) = e^{-r\tau}$ .

**H3** : A ação-objeto não paga dividendos ou similares;

Fizemos esta hipótese também na seção anterior. Ela pode ser substituída por uma mais fraca, de que os dividendos são constantes e conhecidos ao longo do tempo, mas esta questão não será abordada aqui.

**H4** : Não há custos de transação na compra e venda de ativos;

**H5** : Não há oportunidade de arbitragem sem riscos;

**H6** : A tomada e concessão de empréstimos são irrestritas e realizadas à mesma taxa  $r$ ;

**H7** : Não há restrições para a venda a descoberto;

As quatro suposições acima estão relacionadas ao uso do princípio de não arbitragem;

**H8** : o preço da ação segue um movimento browniano geométrico da forma:

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \\ S(0) = S_0 \end{cases},$$

sendo que  $\mu$ , o retorno esperado da ação e  $\sigma$ , a variância do retorno são constantes;

Esta hipótese será esclarecida na próxima seção. Observe que o fato dos coeficientes acima serem constantes garante, segundo o teorema 2.4, que a função-prêmio seja convexa.

## 2.3 Movimento Browniano Geométrico

Uma hipótese bastante simples para o comportamento dos preço  $S$  é a dependência exponencial com o tempo, ou seja, o preço  $S$  de um ativo no instante  $t$  que custa  $S_0$  no presente é solução do seguinte problema :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \lambda \cdot S \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Quando a taxa de crescimento relativo  $\lambda$  é uma constante, a solução é exatamente a função exponencial (tomando  $\lambda = r$ , temos a equação (1.9)). Um modelo pode ser mais realista a depender das hipóteses sobre  $\lambda$ . Uma idéia é supor que  $\lambda$  tem uma componente aleatória.

Apresentamos aqui um modelo clássico para ações que não pagam dividendos. Além da hipótese de mercado eficiente, o modelo também faz a suposição de que o preço da ação é um processo de tempo contínuo e que o crescimento relativo do preço  $S$  de uma ação, dado por  $\Delta S/S$ , é composto de duas partes:

- Uma componente determinística  $\mu \Delta t$ , sendo  $\mu$  o retorno esperado da ação;

- Uma componente estocástica  $\sigma \Delta z$ , em que  $\sigma^2$  é a variância do retorno da ação e  $z = B_t$ , o movimento browniano;

O parâmetro  $\sigma$  é denominado **volatilidade** da ação.

Observe que ao considerarmos um crescimento relativo, temos que o retorno esperado e a volatilidade independem do valor absoluto de uma ação. O preço de uma ação no instante  $t$  é solução do seguinte problema :

$$\begin{cases} dS = \mu \cdot S dt + \sigma \cdot S dz \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

$S_0$ , como antes, é o preço da ação no presente; a equação do problema acima é classificada como uma **equação diferencial estocástica**. Na forma integral, o problema dado por (2.18) é expresso como:

$$S = S_0 + \int \mu \cdot S dt + \int \sigma \cdot S dz \quad (2.19)$$

A representação mais comum na literatura financeira é a seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Vamos apresentar uma interpretação de  $dz$  no caso de incrementos finitos de tempo, ou seja,  $\Delta z = \Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t$ . Uma variável aleatória  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  relaciona-se com a distribuição normal padronizada  $N(0, 1)$  da seguinte forma :

$$X = \mu + \sigma \cdot \phi, \quad \phi \sim N(0, 1) \quad (2.21)$$

De (1.22), temos que

$$\Delta z = \Delta B_t = \sqrt{\Delta t} \cdot \phi, \quad \phi \sim N(0, 1) \quad (2.22)$$

Podemos assim interpretar  $\Delta z$  como uma a variável aleatória com distribuição normal padronizada, cuja dispersão é amplificada pela raiz quadrada do incremento  $\Delta t$ . Isto motiva alguns livros a sugerir a seguinte notação:

$$dz = \sqrt{dt} \cdot \phi, \quad \phi \sim N(0, 1), \quad (2.23)$$

que embora seja intuitiva, não é utilizada no cálculo estocástico.

Um processo que satisfaz a equação (2.18) é denominado **movimento browniano geométrico**. Uma das características marcantes deste modelo é a separação entre a tendência (o termo determinístico) e a incerteza (o termo estocástico). Esta separação pode ser percebida nas alterações da trajetória do preço quando um dos parâmetros é modificado, conforme a figura a seguir.

Antes de apresentar os resultados necessários para resolver o problema (2.18), vamos encontrar soluções numéricas para o movimento browniano geométrico.

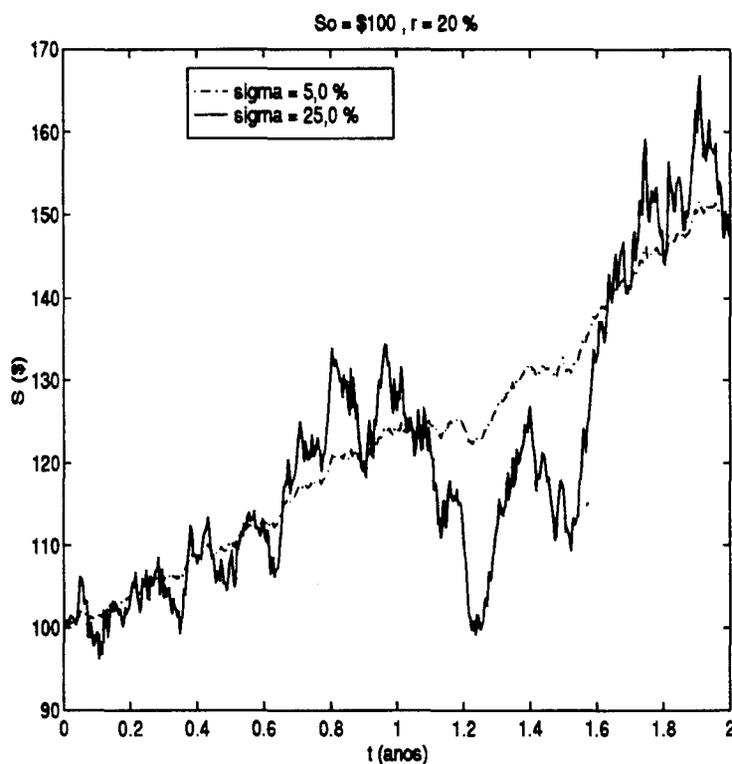


Figura 2.1: Simulação do movimento browniano geométrico.

## 2.4 Simulando o Movimento Browniano Geométrico

Vamos estabelecer algumas notações referentes à variável preço. Utilizaremos  $S$  e  $S_t$  para representar o preço de uma ação em um instante arbitrário

$t$ . Para os instantes  $t = 0$  (presente) e  $t = T$  (data de vencimento), usaremos as notações  $S_0$  e  $S_T$ .

Tentaremos obter possíveis trajetórias de  $S_t$  segundo o problema (2.18), considerando intervalos finitos de tempo  $\Delta t$ . Observemos inicialmente o problema sem o termo estocástico:

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu \cdot dt \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

cuja solução é  $S(t) = e^{\mu t}$ . Esta equação pode ser aproximada avaliando  $S$  nos instantes  $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ , com  $n \cdot \Delta t = T$ . Vamos denotar  $S(k\Delta t)$  por  $S_k, k = 1, \dots, n$ . Deste modo:

$$\frac{S^n - S^{n-1}}{S^{n-1}} = \mu \cdot \Delta t \quad (2.25)$$

Isolando  $S^n$ , temos  $S^n = S^{n-1}(1 + \mu\Delta t)$ . A repetição deste processo leva a uma expressão de  $S$  dependente de  $S_0$ :

$$S^n = S^{n-1}(1 + \mu\Delta t) = S^{n-2}(1 + \mu\Delta t)^2 = \dots = S_0(1 + \mu\Delta t)^n \quad (2.26)$$

Por exemplo, se  $T = 1$ ,  $n = 100$  e  $\mu = 50\%$ , temos que

$$\Delta t = 0.01 \text{ e } S(1) = e^{(0.5)(1)} \approx 1.649$$

Usando (13) para aproximar  $S(t)$ , temos

$$S(1) \approx S^{100} = (1 + (0.5)(0.01))^{100} \approx 1.647.$$

Utilizando (2.22), vamos tentar fazer o mesmo com o problema original :

$$\frac{S^n - S^{n-1}}{S^{n-1}} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \phi_n \cdot \sqrt{\Delta t} \quad , \quad \phi_n \sim N(0, 1) \quad (2.27)$$

$$S^n = S^{n-1}(1 + \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \phi_n \cdot \sqrt{\Delta t}) \quad , \quad \phi_n \sim N(0, 1) \quad (2.28)$$

Observemos que o preço  $S_n = S(n \cdot \Delta t)$  é uma variável aleatória normal com média  $S^{n-1}(1 + \mu\Delta t)$  e variância  $(S^{n-1}\sigma\sqrt{\Delta t})^2$ . Podemos agora avaliar um possível valor para  $\phi_n$  gerando um número aleatório com distribuição

normal padronizada e assim obter  $S^n$ .

**Exemplo :** suponha que uma ação custe atualmente  $S_0 = \$10$ , que as estimativas para  $r$  e  $\sigma$  são  $\mu = 20\%$ /ano e  $\sigma^2 = 10\%$ /ano. Calcule quanto poderá valer a ação dentro de um ano, considerando intervalos de tamanho  $\Delta t = 1/360$  (intervalos de um dia, pelo calendário comercial).

Vamos calcular  $S^1, S^2, \dots, S^{360} = S_T$ . Observe que  $S_1$  é dado por:

$$S^1 = S_0(1 + \mu\Delta t + \sigma\phi_1\sqrt{\Delta t}) = 10(1 + (0.2)(1/360) + \phi_1(0.1)\sqrt{1/360})$$

Usando um gerador aleatório, obtemos  $\phi_1 = 1.21$ . Logo,  $S_1 = \$10.07$ . Para calcular  $S_2$ , o processo é idêntico :

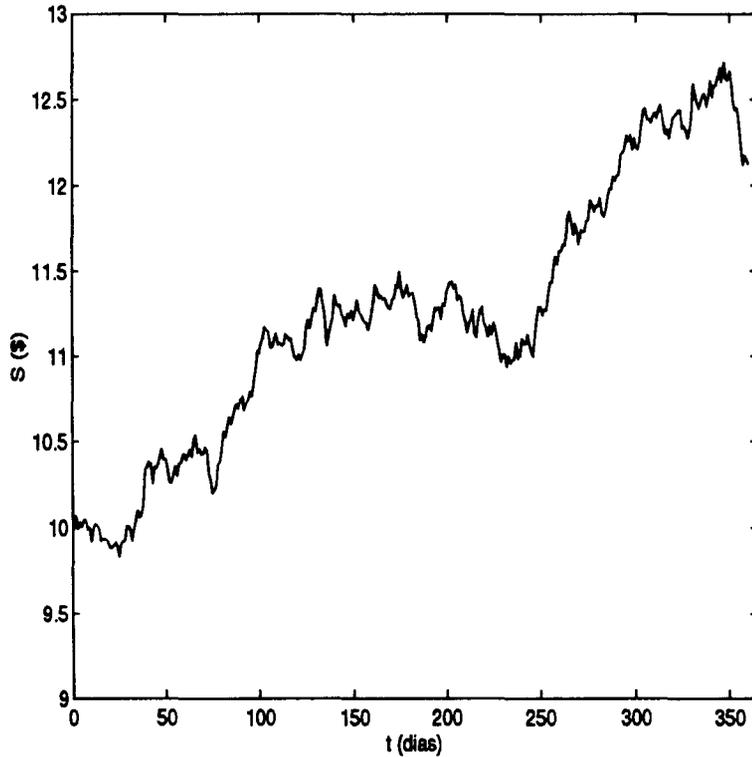
$$S^2 = S^1(1 + \mu\Delta t + \sigma\phi_2\sqrt{\Delta t}) = 10.07(1 + (0.2)(1/360) + \phi_2(0.1)\sqrt{1/360})$$

Usamos novamente o gerador para obter  $\phi_2 = -0.20$ . Logo,  $S_2 = \$10.06$ . Os resultados são apresentados no gráfico a seguir.

Cabe observar que a maneira como resolvemos (2.24) equivale ao *método de Euler* para o mesmo problema, considerando a equação na forma:

$$\frac{dS}{dt} = \mu \cdot S \quad (2.29)$$

Além disso, a expressão (2.26) pode ser vista como o valor futuro de  $S_0$ , aproximando a taxa de juros  $i_{\Delta t}$  de periodicidade  $\Delta t$  pela taxa continuamente composta  $\mu$ .



**Figura 2.2:** Simulação do preço  $S_t$ , segundo o problema (2.18)

## 2.5 Método de Monte Carlo

As idéias desenvolvidas na seção anterior dão origem ao seguinte método de precificação : se repetirmos o procedimento do exemplo anterior um grande número de vezes, digamos 2000, obteremos uma amostra de valores de  $S_T$  que satisfazem a equação (2.18):

Experimento	1	2	...	1998	1999	2000
$S_T$	12.17	13.75	...	13.87	11.77	13.44

O que fazer com estes 2000 valores ? Podemos considerar que a média  $\bar{S}$  seja uma boa aproximação do valor real de  $S_T$  , no sentido em que, se a ação

se comporta de acordo com (2.18), espera-se que seu preço esteja em torno de  $\bar{S}$ .

A média dos experimentos realizados foi  $\bar{S} = \$12.26$ . Se o valor  $\bar{S}$  fosse realmente o preço futuro da ação, o prêmio de uma opção de compra seria facilmente calculado pelo valor presente do *payoff* na data de vencimento :

$$c = e^{-rT} \cdot (\bar{S} - E)^+ \quad (2.30)$$

Suponha no exemplo anterior que uma opção de compra com  $T = 1$  ano e  $E = \$10$  esteja disponível no mercado, e que a taxa de juros vigente é de igual ao retorno da ação :  $r = 20 \%$ /ano. Podemos estimar o prêmio da opção com o seguinte valor:

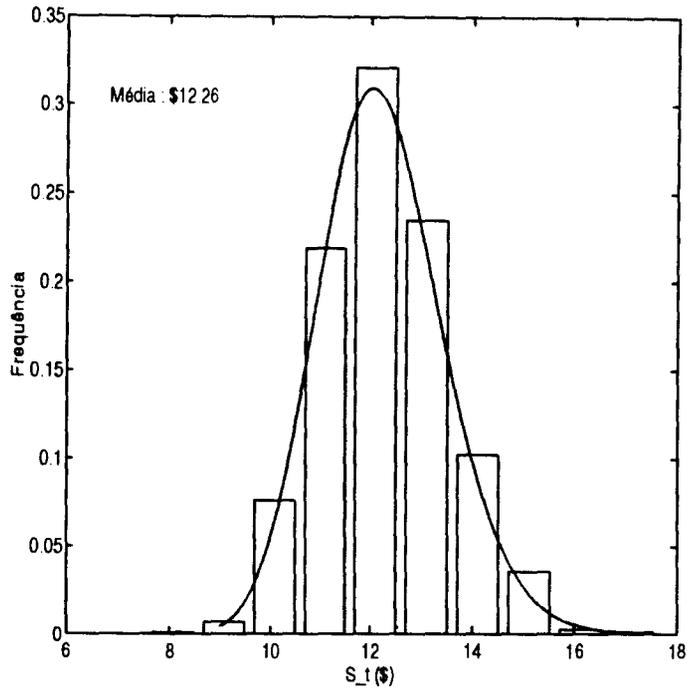
$$c = e^{-(0.2)(1)} \cdot (12.26 - 10)^+ = \$1.85$$

Podemos assim estimar o preço de uma opção com os seguintes procedimentos:

1. Simular o preço  $S_T$  no instante  $T$ , segundo (2.28);
2. Repetir o Passo 1 um grande número de vezes ;
3. Calcular a média  $\bar{S}$  ;
4. Calcular  $c$  segundo (2.30) ;

Este algoritmo é uma simplificação do método de Monte Carlo, um método de simulação normalmente usado em física e que tem apresentado bons resultados em Finanças . A figura a seguir mostra os resultados de nosso experimento em um histograma. O histograma sugere que  $S_T$  segue uma distribuição de probabilidade bem definida.

Se conhecemos a distribuição de probabilidade de  $S_T$  , não precisamos de fazer tantas simulações , bastando calcular a média diretamente da distribuição . Este é o princípio que nos leva à formula de Black-Scholes.



**Figura 2.3:** Histograma com 2000 amostras de  $S_T$

## 2.6 Fórmula de Black-Scholes

Vamos tentar obter a função de distribuição de probabilidade do preço  $S_T$  resolvendo o problema (2.18). Vamos enunciar definições e resultados baseados em Revuz e Yor(1991) sobre integração estocástica (ou cálculo estocástico).

### 2.6.1 Integração Estocástica

Quando definimos um processo estocástico, partimos de um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Vamos construir uma nova estrutura baseada na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ :

**Definição 2.1 :** Uma família  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\sigma$ -álgebras é uma **filtração** em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  satisfaz, para todo  $t \geq 0$ :

- $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ ;
- $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  para todo  $s \leq t$ .

**Definição 2.2 :** Um processo estocástico  $X_t$  é **adaptado** à filtração  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  se  $X_t$  for mensurável com relação a  $\mathcal{F}_t$  para cada  $t \geq 0$ .

Vamos incluir uma filtração no espaço de probabilidade, representando-o por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ . A idéia central de uma filtração é que o conjunto dos eventos possíveis cresce progressivamente com o tempo. Isto é consistente com o fato de que o conhecimento dos eventos possíveis em um instante futuro depende dos acontecimentos passados até este instante.

**Definição 2.3 :** Dada uma função mensurável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $f(\omega) = f_o$  **quase sempre** (q.s.) se o conjunto  $W$  definido por

$$W = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \neq f_o\} \quad (2.31)$$

tem medida nula com relação a  $\mathbb{P}$ , ou seja,  $\mathbb{P}(W) = 0$ .

**Definição 2.4 :** O processo estocástico  $X_t$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingale se  $X_t$  satisfaz as seguintes propriedades:

- $E[(X_t)^+] < \infty$  ;
- $E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$  q.s.<sup>2</sup>

Um martingale  $X_t$  é contínuo se suas trajetórias são contínuas quase sempre.

Podemos mostrar que o movimento browniano é um martingale contínuo com relação à filtração natural, e também um martingale local (Vide Revuz e Yor (1991), pg 117 ).

**Definição 2.5 :** Denominamos como  $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  o espaço das funções mensuráveis  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$E[X^2] = \int_{\Omega} X^2(\omega) d\omega < \infty \quad (2.32)$$

---

<sup>2</sup> $E[X_t/\mathcal{F}_s]$  é a **esperança condicional** de  $X_t$  com relação à  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_s$

Esta definição se estende a processos estocásticos  $X = X_t$ . Em particular, um martingale  $M_t$  é dito limitado em  $L^2$  se satisfaz a seguinte condição:

$$\sup_t E[M^2] < \infty \quad (2.33)$$

O espaço dos martingales limitados em  $L^2$  é denotado por  $H^2$ .

Assim como na integração usual (integral de Riemann), definimos uma partição  $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  do intervalo  $[0, t] \subset \mathbb{R}$ , com  $|\Delta| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ .

**Definição 2.6 :** Um processo  $X_t$  é **crecente** se ele é adaptado e as trajetórias  $X_t(\omega)$  são finitas, contínuas à direita e crescentes quase sempre em  $\Omega$ .

**Definição 2.7 :** A integral de Stieltjes de um processo  $X$  localmente limitado com relação a um processo crescente  $A_t$  é dada por:

$$\int_0^t X_s dA_s = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} X_{t_j} |A_{t_{j+1}} - A_{t_j}| \quad (2.34)$$

**Definição 2.8 :** Uma trajetória  $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tem **variação finita** se para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$S_t = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |A_{t_{j+1}} - A_{t_j}| < \infty \quad (2.35)$$

**Definição 2.9 :** Um processo  $X_t$  tem **variação finita** se para quase todo  $\omega \in \Omega$  as trajetórias  $X = X(\omega)$  têm variação finita

**Proposição 2.7 :** Todo processo  $X_t$  crescente tem variação finita.

A definição de integral de Stieltjes não é adequada para martingales, pois tais processos em geral não têm variação finita. Isto motiva a introdução de um processo intermediário, a variação quadrática, como veremos a seguir:

**Definição 2.10 :** Uma trajetória  $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tem **variação quadrática finita** se para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$T_t = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |A_{t_{j+1}} - A_{t_j}|^2 < \infty \quad (2.36)$$

**Definição 2.11 :** Um processo  $X_t$  tem variação quadrática finita se existe um processo crescente  $\langle X, X \rangle_t$  tal que para quase todo  $\omega \in \Omega$  as trajetórias  $X = X(\omega)$  satisfazem  $T_t = \langle X, X \rangle_t$ . O processo  $\langle X, X \rangle$  é denominado **variação quadrática** de  $X_t$ .

**Proposição 2.8 :** A variação quadrática do movimento Browniano é dada por

$$\langle B_t, B_t \rangle = t. \quad (2.37)$$

**Definição 2.12 :** Seja  $M \in H^2$ .  $L^2(M)$  consiste em todas as classes de equivalência de processos  $K$  tais que

$$E \left[ \int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty \quad (2.38)$$

**Definição 2.13 :** Dados dois martingales locais  $M$  e  $N$ , existe um único processo crescente  $\langle M, N \rangle = \langle M, N \rangle_t$  tal que o processo  $MN - \langle M, N \rangle$  é um martingale local.  $\langle M, N \rangle$  é denominado **variação quadrática cruzada** de  $M$  e  $N$ .

**Definição 2.14 :** Um processo  $X_t$  é um  $\mathcal{F}_t$ -semi-martingale se  $X_t = M_t + A_t$ , sendo  $M_t$  um martingale local com relação a  $\mathcal{F}_t$  e  $A_t$  um processo com variação finita.

**Teorema 2.5 :** Se  $X_t = M_t + A_t$  é um semi-martingale, então

$$\langle X, X \rangle = \langle M, M \rangle. \quad (2.39)$$

Definimos a **integral de Itô** de um processo limitado  $K$  com respeito a um martingale  $M \in H^2$  como o martingale  $K \circ M$  dado pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.6 :** Sejam  $M \in H^2$  e  $K \in L^2(M)$ . Existe um único elemento  $K \circ M \in H^2$  tal que

$$\langle K \circ M, N \rangle = \int_0^t K_s d\langle M, N \rangle_s \quad \forall N \in H^2 \quad (2.40)$$

**Teorema 2.7 :** Se  $K \in L^2(M)$  e  $H \in L^2(K \circ M)$ . Então  $HK \in L^2(M)$  e

$$H \circ (K \circ M) = (KH) \circ M \quad (2.41)$$

**Observações:**

- No caso particular em que  $K$  é um martingale local, a integral  $K \circ M$  também é um martingale local;
- O movimento browniano não é limitado em  $L^2$ . Esta dificuldade é contornada usando o conceito de tempo de parada (Vide Revuz e Yor (1991), pg 40), de modo que podemos integrar um processo com relação a  $B_t$ .

Uma ferramenta fundamental para o cálculo de integrais segundo (2.40) é o **Lema de Itô**, enunciado a seguir para o caso unidimensional:

**Lema 2.1 :** Seja  $X = X_t$  um semimartingale contínuo e  $F = F(X, t)$  uma função de classe  $C^2$ . Temos que  $F$  satisfaz

$$F(X, t) = F(X_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t} dt + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} d\langle X, X \rangle \quad (2.42)$$

**2.6.2 Solução do Problema (2.18) por Integração Estocástica**

Observemos inicialmente que o processo  $S$  descrito na forma integral (2.18),

$$S = S_0 + \int \mu \cdot S dt + \int \sigma \cdot S dz = S_0 + \int \mu \cdot S dt + (\sigma \cdot S) \circ B_t \quad (2.43)$$

é um semimartingale contínuo, em que os dois primeiros termos têm variação finita e o segundo termo é um martingale local. A variação quadrática de  $S$ , segundo o teorema 2.4, é dada por:

$$\langle S, S \rangle = \langle (\sigma \cdot S) \circ B_t, (\sigma \cdot S) \circ B_t \rangle \quad (2.44)$$

Pelo teorema 2.6, e usando a simetria da variação quadrática,

$$\langle S, S \rangle = \int_0^t (\sigma \cdot S)_s d\langle B_t, (\sigma \cdot S) \circ B_t \rangle_s \quad (2.45)$$

$$\langle S, S \rangle = \int_0^t (\sigma \cdot S)_s d\langle (\sigma \cdot S) \circ B_t, B_t \rangle_s \quad (2.46)$$

Aplicando novamente o teorema 2.6 ao termo  $\langle (\sigma \cdot S) \circ B_t, B_t \rangle$ , obtemos:

$$\langle (\sigma \cdot S) \circ B_t, B_t \rangle = \int_0^t (\sigma \cdot S)_s d\langle B_t, B_t \rangle_s \quad (2.47)$$

Pela proposição 2.8,

$$\langle (\sigma \cdot S) \circ B_t, B_t \rangle = \int_0^t (\sigma \cdot S)_s ds \quad (2.48)$$

Voltando a (2.46), temos que,

$$\langle S, S \rangle = \int_0^t (\sigma \cdot S)_s^2 ds = (\sigma \cdot S)^2 t \quad (2.49)$$

Vamos aplicar o lema de Itô usando o semimartingale  $X = S$ .

$$F(S, t) = F(S_0, 0) + \int_0^t \left( \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} \mu \cdot S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\sigma \cdot S)^2 \right) dt + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial S} \sigma \cdot S dB_t \quad (2.50)$$

escolhendo  $F(S, t) = \ln(S)$ , temos que:

$$\ln(S) - \ln(S_0) = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dB_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \quad (2.51)$$

Assim, o processo  $S$  no instante  $t = T$  é descrito por :

$$\ln(S_T) = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B_T \quad (2.52)$$

Assim, o logaritmo de  $S_T$  tem uma distribuição normal com média  $\mu_0 = \ln(S_0) + (\mu - 0.5\sigma^2)T$  e variância  $\sigma_0^2 = \sigma^2 T$ , ou seja,  $S_T$  tem uma distribuição **lognormal** com parâmetros  $\mu_0$  e  $\sigma_0$ , cuja função de densidade de probabilidade é dada por :

$$P(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \cdot \exp \left[ \frac{-(\ln(x) - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} \right] \quad (2.53)$$

Podemos calcular o valor médio da função *payoff* de uma opção de compra,  $f(S) = (S - E)^+$ . Este valor médio, que vamos denotar por  $f_T$ , é dado por:

$$f_T = E[f(S_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot P(x) dx = \int_E^{\infty} (x - E) \cdot P(x) dx \quad (2.54)$$

O prêmio desejado da opção de compra será o valor presente de  $f_T$ , ou seja :

$$c = f_T e^{-rT} \quad (2.55)$$

Podemos generalizar os resultados acima para qualquer instante de tempo inicial  $t$ , ao invés de começarmos em  $t = 0$ . Neste caso, a equação (2.52) modifica-se para:

$$\ln(S_T) = \ln(S_t) + \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + \sigma B_{T-t} \quad (2.56)$$

A expressão de  $P(x)$  é a mesma, sendo que agora  $\mu_o = \ln(S_t) + (\mu - 0.5\sigma^2)(T - t)$  e  $\sigma_o^2 = \sigma^2(T - t)$  a partir de (2.53). O preço da opção em (2.52) agora é dado por:

$$c = c(S, t) = f_T e^{-r(T-t)} \quad (2.57)$$

Embora os procedimentos realizados até este ponto estejam corretos, o resultado não será o mesmo da fórmula esperada, obtida em Black e Scholes (1973). A razão é que as hipóteses da seção 2.2 não foram plenamente utilizadas. Este problema é contornado adicionando a hipótese (justificada posteriormente) de que o mercado é neutro ao risco. Neste caso, o retorno da ação equivale ao retorno de qualquer outro ativo, em particular de um título sem riscos, que segundo a hipótese H2 tem retorno igual a  $r$ .

Isto ocasiona a substituição de  $\mu$  por  $r$  na equação (2.18). Esta mudança reflete na função de densidade  $P(x)$ , cujo parâmetro  $\mu_o$  muda para  $\mu_o = \ln(S_t) + (r - 0.5\sigma^2)(T - t)$ .

Calculando o valor de  $f_T$  em (2.51) e substituindo em (2.54), obtemos a fórmula de *Black-Scholes*:

$$c(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \quad , \quad (2.58)$$

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}} \quad (2.59)$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}} \quad (2.60)$$

A função  $N(x)$  é a função de distribuição acumulada da função de densidade normal padronizada. Ela surge quando aplicamos uma substituição do tipo

$\ln(x) = y$  na integral (2.51); sua expressão é dada por:

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.61)$$

## 2.7 Equação de Black-Scholes

Black e Scholes (1973) idealizaram um portfolio de ações e opções imune a variações de preços, de modo que o risco seja nulo. Em seguida, argumentando de que este portfolio deve ter o retorno igual à taxa de juros  $r$ , deduzem uma equação diferencial cuja solução fornece a fórmula de *Black-Scholes*.

Seja  $F(S, t)$  o prêmio da opção no instante  $t$ , quando a ação custa  $S = S_t$ . Suponha que  $F$  satisfaça as condições do Lema de Itô. Expressando (2.50) na forma diferencial, temos:

$$dF(S, t) = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S} \mu \cdot S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\sigma \cdot S)^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma \cdot S dB_t \quad (2.62)$$

Seja  $\Pi = F - \Delta \cdot S$  o valor de um portfolio  $P = (1, -\Delta)$  formado pela venda de uma opção e pela compra de  $\Delta$  ações.

Considerando uma variação infinitesimal  $dt$  do tempo, a variação  $d\Pi$  do valor do portfolio, mantendo fixa a razão  $\Delta$  durante o intervalo  $dt$ , é dada por  $d\Pi = dF - \Delta dS$ . Substituindo (2.62) e (2.18) em  $d\Pi$ , podemos expressar  $\Pi$  como solução da seguinte equação estocástica:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S} \mu \cdot S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\sigma \cdot S)^2 - \mu \cdot \Delta \cdot S \right) dt + \left( \frac{\partial F}{\partial S} - \Delta \right) dB_t \quad (2.63)$$

Observemos que a única incerteza associada ao portfolio (o coeficiente do termo  $dB_t$ ) pode ser eliminada com a seguinte escolha de  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial S} \quad (2.64)$$

Assim, a variação do portfolio reduz-se ao seguinte:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\sigma \cdot S)^2 \right) dt \quad (2.65)$$

Na forma de uma equação diferencial parcial,

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \quad (2.66)$$

O valor escolhido para  $\Delta$  também eliminou o parâmetro  $\mu$ , indicando que o portfolio resultante independe do retorno da ação-objeto.

De acordo com as hipóteses H2 e H4-H7, o portfolio deverá ter o mesmo retorno que a taxa de juros  $r$ . De fato, se durante algum intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$  o retorno de  $P$  fosse  $r' > r$ , Poderíamos tomar emprestado  $\Pi$ , investir esta quantia no portfolio comprando  $\Delta$  ações e vendendo uma opção, obtendo em  $t = t_1$  um lucro  $L = \Pi(e^{r'(t_1-t_0)} - e^{r(t_1-t_0)}) > 0$  sem imobilização de capital. Se  $r' > r$ , a oportunidade de arbitragem é análoga.

Sendo o retorno do portfolio  $P$  constante e igual a  $r$ , seu valor  $\Pi$  satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\Pi}{dt} = r\Pi \quad (2.67)$$

De (2.66) e (2.67) temos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = r \left( F - \frac{\partial F}{\partial S} S \right) \quad (2.68)$$

Reordenando (2.68), chegamos à equação de *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} - rF = 0 \quad (2.69)$$

Observando que as hipóteses utilizadas na dedução de (2.69) não fazem referência às propriedades da opção, podemos inferir que a equação de *Black-Scholes* seja válida para uma classe maior de derivativos. De fato, o preço de um derivativo que depende apenas de  $t$  e  $S_t$  num mercado sujeito às hipóteses H1-H7 deve satisfazer a equação de *Black-Scholes*.

O fato da equação não depender do retorno  $\mu$  revela que o mesmo resultado seria obtido se o retorno fosse substituído por uma constante arbitrária. Isto motivou a criação de métodos que usam constantes diferentes de  $\mu$ . Sem dúvida, a escolha mais conveniente é  $r$ , que implica a neutralidade ao risco.

Assim, podemos supor a neutralidade ao risco e determinar um prêmio que é válido também na ausência desta hipótese, conforme fizemos anteriormente. Cabe enfatizar que não faz sentido supor a neutralidade ao risco em

um mercado de ações. Ela apenas gera um modelo mais simples cuja solução sabemos *a priori* que se estende para mercados avessos ao risco.

A razão  $\Delta$ , que corresponde à derivada do prêmio com respeito ao tempo, tem grande importância prática. Ela mede a sensibilidade do prêmio de um derivativo com respeito à variação do preço do ativo-objeto no mercado.

Conhecendo a sensibilidade de cada derivativo que compõe um portfólio, podemos ter um maior controle do risco associado ao portfólio, e adotar estratégias de *hedging*. Um **hedge** de um portfólio é um conjunto de operações que visa a redução da sensibilidade do portfólio ao movimento dos preços.

Vamos obter a fórmula de *Black-Scholes* a partir da equação (2.69) na próxima seção. As variáveis  $S$  e  $t$  serão tratadas como variáveis independentes. Precisaremos de impor mais condições para determinar unicamente o prêmio de uma opção de compra européia. Em termos de equações diferenciais, tais condições traduzem-se em condições de fronteira da solução.

Vamos denotar por  $c = c(S, t)$  a solução de (2.69) que representa o prêmio de uma opção européia com data de vencimento  $T$  e preço de exercício  $E$ . Vamos considerar  $S \leq 0$  e  $0 \leq t \leq T$ . A variável  $t$  representa agora o tempo decorrido desde o instante presente.

A proposição 2.1 fornece uma condição sobre  $c$  no instante final:

$$c(S, T) = (S - E)^+ \quad (2.70)$$

A proposição 2.6 estabelece uma condição de limitação sobre a solução:

$$c(S, t) \leq S \quad (2.71)$$

Conforme veremos a seguir, a equação de *Black-Scholes* com as condições (2.70) e (2.71) determinam unicamente a função  $c(S, t)$ .

## 2.8 Pagamento de Dividendos

Uma adaptação simples na equação de *Black-Scholes* permite a inclusão de dividendos às ações. Os **dividendos** são pagamentos feitos pelas empresas emittentes das ações em função dos lucros obtidos.

Wilmott et al (1995) verifica que o prêmio de uma opção sobre ações que pagam dividendos continuamente a uma proporção constante  $\delta$  do preço atual (ou seja, pagamentos de  $\delta S_t \Delta t$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ ) é solução

da seguinte equação:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + (r - \delta)S \frac{\partial F}{\partial S} - rF = 0 \quad (2.72)$$

Os dividendos tem o efeito de redução do valor do prêmio de uma opção. Vide em Figlewski et al (1990) uma interpretação deste efeito.

## 2.9 Observações

Este capítulo é baseado essencialmente no artigo de Merton (1973), seguindo orientações em Wilmott et al (1995) e Duffie (1988). Os trabalhos de Merton (1973) e Black e Scholes (1973) requerem uma base teórica em integração estocástica. Neste sentido, utilizamos Revuz e Yor (1991).

A abordagem numérica sobre processos estocásticos apresentada consiste em uma integração das idéias contidas em Kloeden (1995), Silva Neto (1994) e Hull (1997).

Após 1973, diversos autores se dedicaram a generalizar ou reescrever sob outro ponto de vista as idéias pioneiras de Black-Scholes-Merton. Vide Duffie (1998) e Harisson e Kreps (1979).

Merton (1973) sintetiza as argumentações com arbitragem usando a idéia de dominância entre portfolios, embora este conceito não esteja absolutamente preciso no artigo. Harisson e Kreps (1979) apresentam uma definição de arbitragem baseada em martingales.

Wilmott et al (1995) afirma que a hipótese da taxa contínua de dividendos é adequada para opções sobre índices e sobre moedas estrangeiras.

# Capítulo 3 :

## Análise da Equação de Black-Scholes

Neste capítulo vamos procurar na equação de *Black-Scholes* propriedades comuns a outras equações diferenciais parciais (EDPs) e obter a fórmula de *Black-Scholes* para opções europeias resolvendo analiticamente a EDP associada.

### 3.1 Classificação e Comentários

Definimos a **ordem** de uma equação diferencial como o grau da derivada mais elevada presente na equação. Uma EDP de ordem  $n$  é **linear** se ela é uma equação linear com respeito à função incógnita e com respeito às derivadas parciais do primeiro ao  $n$ -ésimo grau.

Deste modo, a equação de BS é uma EDP linear de segunda ordem.

Vamos considerar EDPs com duas **variáveis independentes**. Frequentemente as variáveis independentes representam o espaço e o tempo, sendo denominadas variáveis espaciais e temporais, respectivamente. Na equação de *Black-Scholes* a variável preço faz o papel da variável espacial.

Uma EDP linear de segunda ordem com duas variáveis independentes tem a seguinte forma geral:

$$a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t)u + g(x, t) = 0 \quad (3.1)$$

Se o coeficiente  $g$  é identicamente nulo, dizemos que a equação é **homogênea**.

Definimos o discriminante  $\delta = \delta(x, t)$  associado à equação (3.1) como a seguinte função:

$$\delta(x, t) = b(x, t)^2 - 4a(x, t)c(x, t) \quad (3.2)$$

A EDP (3.1) é classificada como parabólica, hiperbólica ou elíptica se em  $(x, t)$  se  $\delta(x, t)$  for igual, maior ou menor que zero, respectivamente. Observe

que o discriminante da equação de *Black-Scholes* é igual a zero para todo  $(S, t)$ .

Podemos assim classificar a equação de *Black-Scholes* como uma EDP linear de segunda ordem do tipo parabólico para  $S > 0$

Um cuidado deve ser tomado no ponto  $S = 0$  : o termo de maior ordem anula-se em  $S = 0$ ; a equação (2.69) reduz-se a uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = rF \quad , \quad (3.3)$$

sobre a qual a classificação acima perde o sentido.

### 3.2 Equação de Difusão

Uma das idéias contidas na classificação de EDPs de segunda ordem é a possibilidade de reduzir a equação a uma forma canônica.

Para equações parabólicas, a forma canônica é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (3.4)$$

Para equações hiperbólicas, temos a seguinte forma canônica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (3.5)$$

No caso de equações elípticas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (3.6)$$

Classificamos a equação de *Black-Scholes* como parabólica. Estaremos portanto interessados em equações parabólicas na forma canônica cuja solução seja conhecida.

Vamos considerar a **equação de difusão** com coeficiente unitário:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.7)$$

Wilmott et al (1995) apresenta uma solução analítica para o seguinte problema de valor inicial envolvendo a equação de difusão:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} , \quad x \in \mathbb{R} , \quad \tau > 0 \quad (3.8)$$

$$u(x, 0) = f(x) , \quad f \in C(\mathbb{R}) \quad (3.9)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)e^{-ax^2} = 0 \quad \forall a > 0 \quad (3.10)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, \tau)e^{-ax^2} = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall \tau > 0 \quad (3.11)$$

Podemos estender o espaço das funções  $f$  admissíveis permitindo que ocorram descontinuidades de salto. O problema (3.8)-(3.11) tem uma única solução representada por:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \quad (3.12)$$

A equação de difusão é frequentemente associada ao problema de transferência de calor; observamos fisicamente que as diferenças de temperatura em um determinado meio são suavizadas de maneira contínua com o passar do tempo. Esta é a chamada propriedade de difusão, satisfeita pelas soluções da equação (3.7). Por esta razão, a solução  $u(x, \tau)$  é contínua independente da condição inicial  $f$  ser contínua ou descontínua.

### 3.3 Solução Analítica - Equação de Black-Scholes

#### 3.3.1 Opções de Compra

No final do capítulo 2 estabelecemos que o preço  $c(S, t)$  de uma opção europeia de compra é solução do seguinte problema:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 , \quad S > 0 , \quad 0 < t < T \quad (3.13)$$

$$c(S, T) = (S - E)^+ \quad (3.14)$$

$$c(S, t) \leq S \quad (3.15)$$

Vamos resolver o problema (3.13)-(3.15) transformando-o no "problema canônico" dado por (3.8)-(3.11). Observemos inicialmente que o problema (3.13)-(3.15) pode ser transformado em um problema de valor inicial com uma mudança na variável temporal do tipo  $\tau = T - t$ ; o problema é transformado no seguinte:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc, \quad S > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.16)$$

$$c(S, 0) = (S - E)^+ \quad (3.17)$$

$$c(S, \tau) \leq S \quad (3.18)$$

O problema (3.16)-(3.18) está numa forma padronizada, facilitando o uso de métodos analíticos e numéricos já desenvolvidos. Por esta razão, a equação (3.16) será frequentemente analisada que a equação de *Black-Scholes*; vamos indicar a equação (3.16) por (BS) e vamos também nos referir a ela como a equação de *Black-Scholes*.

A variável  $\tau$  representa o tempo que falta para o vencimento da opção, conforme denotamos na seção 2.1; embora o problema acima não necessite da condição  $\tau < T$ , o modelo pressupõe que vamos calcular o preço  $u$  até este limite.

Tomando  $E$  como o valor característico (ou valor médio) do preço da ação, podemos adimensionalizar a variável preço:

$$y = \frac{S}{E} \quad (3.19)$$

Aplicando uma transformação  $x = \ln(y)$  (**transformação logarítmica**), podemos tornar constantes os coeficientes da equação. Compondo as duas transformações acima, aplicamos a substituição  $S = Ee^x$  no problema (3.16-3.18) para obter

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial c}{\partial x} - rc, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0 \quad (3.20)$$

$$c(x, 0) = (Ee^x - E)^+ \quad (3.21)$$

$$c(x, \tau) \leq Ee^x \quad (3.22)$$

Para adimensionalizar completamente o problema, seria ainda necessário redefinir o tempo, dividindo por  $\sigma^2/2$ , e a variável dependente, dividindo por  $E$ . Resumindo as transformações, temos as seguintes mudanças de variáveis:

$$S = Ee^x \quad , \quad \tau = \frac{(T-t)}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad , \quad c(S, t) = Ev(x, \tau) \quad , \quad (3.23)$$

que transformam o problema (3.20)-(3.22) no seguinte:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (K - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - Kv \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad \tau > 0 \quad (3.24)$$

$$v(x, 0) = (e^x - 1)^+ \quad (3.25)$$

$$v(x, \tau) \leq e^x \quad , \quad (3.26)$$

onde  $K$  é dado por

$$K = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (3.27)$$

Uma segunda transformação do tipo  $v(x, t) = \exp(\alpha x + \beta \tau)u(x, \tau)$  leva a equação (3.24) à seguinte expressão :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [2\alpha - (K - 1)] \frac{\partial u}{\partial x} + [-\beta + \alpha^2 + \alpha(K - 1) - K] u \quad (3.28)$$

A seguinte escolha de  $\alpha$

$$\alpha = -\frac{1}{2}(K - 1) \quad (3.29)$$

faz com que o coeficiente de  $\partial u/\partial x$  seja reduzido a zero; o mesmo pode ser feito com o coeficiente de  $u$ , escolhendo o parâmetro  $\beta$  como sendo

$$\beta = \alpha^2 + \alpha(K - 1) - K = -\frac{1}{4}(K + 1)^2 \quad (3.30)$$

Deste modo, a substituição dada por

$$v(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}(K - 1)x - \frac{1}{4}(K + 1)^2\tau\right)u(x, \tau) \quad (3.31)$$

transforma o problema (3.24)-(3.26) na forma desejada:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0 \quad (3.32)$$

$$u(x, 0) = (e^{\frac{1}{2}(K+1)x} - e^{\frac{1}{2}(K-1)x})^+ \quad (3.33)$$

$$u(x, \tau) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(K+1)x - \frac{1}{4}(K+1)^2\tau\right) \quad (3.34)$$

Observando de (3.33) que  $f$  satisfaz a condição (3.10) e de (3.34) que  $u(x, \tau)$  satisfaz a condição (3.11), podemos afirmar que a única solução do problema (3.32)-(3.34) é dada por:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(K+1)s} + e^{\frac{1}{2}(K-1)s}\right)^+ e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \quad (3.35)$$

Calculando a integral acima, temos que:

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(K+1)x + \frac{1}{4}(K+1)^2\tau} N(\bar{d}_1) + e^{\frac{1}{2}(K-1)x + \frac{1}{4}(K-1)^2\tau} N(\bar{d}_2), \quad (3.36)$$

sendo  $N(x)$  conforme definido em (2.61) e  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_2$  dados por:

$$\bar{d}_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(K+1)\sqrt{2\tau} \quad \text{e} \quad \bar{d}_1 = \bar{d}_2 - \sqrt{2\tau} \quad (3.37)$$

Vamos retornar à variável  $v(x, \tau)$  com a substituição (3.31):

$$v(x, \tau) = e^x N(\bar{d}_1) + e^{-K\tau} N(\bar{d}_2) \quad (3.38)$$

Utilizando (3.23), podemos retornar à variável original  $c(S, t)$ :

$$c(x, t) = SN(d_1) + e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (3.39)$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$  dados por (2.59) e (2.60). Portanto, obtemos novamente a fórmula de *Black-Scholes*.

### 3.3.2 Opções de Venda

Podemos usar os mesmos procedimentos para obter uma fórmula para opções europeias de venda. Vamos denotar por  $p = p(S, t)$  a solução da equação de *Black-Scholes* que representa o prêmio de uma opção europeia de venda com data de vencimento  $T$  e preço de exercício  $E$ .

Analogamente às opções de compra, vamos determinar condições sobre  $p$  de acordo com os resultados da seção 2.1. De (2.11), temos que

$$p(S, T) = (E - S)^+ \quad (3.40)$$

Adicionando a hipótese H2 ao corolário 2.4 :

$$p(0, t) = Ee^{-rt} \text{ e } p(S, t) \leq Ee^{-rt} \quad (3.41)$$

Portanto, o prêmio  $p(S, t)$  é solução do seguinte problema:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + rS \frac{\partial p}{\partial S} - rp = 0, \quad S > 0, \quad 0 < t < T \quad (3.42)$$

$$p(S, T) = (E - S)^+ \quad (3.43)$$

$$p(S, t) \leq Ee^{-r(T-t)} \quad (3.44)$$

Resolvendo o problema (3.42)-(3.44) de modo análogo a (3.13)-(3.15), obtemos:

$$p(x, t) = -SN(-d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) \quad (3.45)$$

Uma abordagem muito mais simples consiste em usar a relação de paridade (2.14) adicionada à hipótese H2:

$$p(S, t) = c(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)} \quad (3.46)$$

Substituindo a fórmula de *Black-Scholes* em (3.47), obtemos a mesma expressão para  $p(S, t)$  em (3.46).

Black e Scholes (1973) encontram  $p(S, t)$  de modo semelhante, obtendo a solução de  $F(S, t) = c(S, t) - p(S, t)$  pela equação de *Black-Scholes*:

$$F(S, t) = S - Ee^{-r(T-t)} \quad (3.47)$$

Observemos que a fórmula (3.47) é idêntica a (3.46); a diferença reside apenas no fato de que (3.46) foi obtida por argumentos de arbitragem e (3.47) foi obtida resolvendo-se uma equação diferencial. A relação (3.46) é conhecida como *put-call parity formula*.

Apresentamos a seguir os gráficos de  $c(S, t)$  e  $p(S, t)$  segundo (2.58) e (3.46), considerando  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 5$ ,  $t = 20$  e  $t = 100$ .

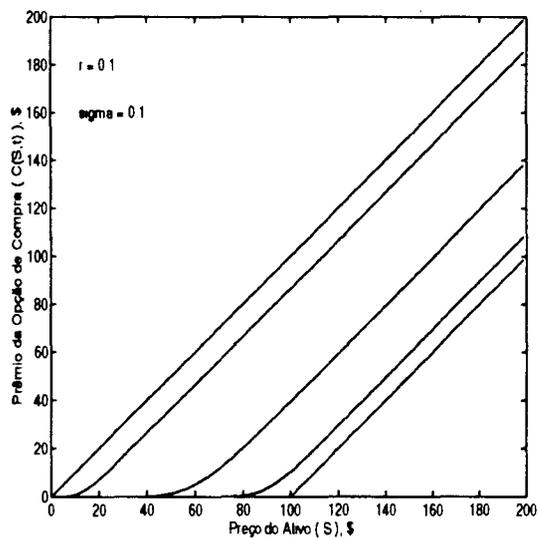


Figura 3.1: Opção de Compra segundo (2.58).

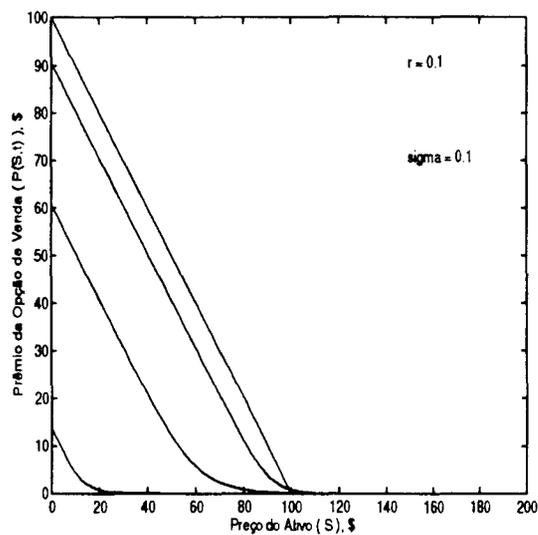


Figura 3.2: Opção de Venda segundo (3.46).

### 3.4 Observações

Um ponto bastante criticado no artigo de Black e Scholes (1973) foi o método utilizado para resolver analiticamente a equação de *Black-Scholes*. A solução analítica apresentada em Wilmott et al (1995) e utilizada neste capítulo representa o esforço de diversos autores em apresentar uma dedução clara desta equação.

Iório (1991) é uma referência adequada para EDPs; Wilmott et al (1995) incluem uma introdução intuitiva a este tema.

# Capítulo 4 :

## Métodos de Diferenças Finitas

Vamos discutir os aspectos básicos da implementação de métodos de diferenças finitas para a equação de *Black-Scholes* e analisar a estabilidade do método explícito de diferenças finitas para esta equação.

### 4.1 Método Explícito

Seja  $\Omega_h = \{0 = S_1 < S_2 < \dots S_N = L\} \times \{0 = t_1 < t_2 < \dots t_m = T\}$  uma discretização do conjunto  $\Omega = [0, L] \times [0, T]$ . Vamos supor a princípio que os intervalos sejam igualmente espaçados e tenham comprimento  $h$  na variável  $S$  e comprimento  $k$  na variável  $t$ . Assim,  $S_i = ih$  e  $t_n = nk$ .

Vamos representar por  $f_i^n$  o valor de uma função  $f$  no ponto  $(S_i, t_n) \in \Omega_h$ . O valor de uma função  $g(S)$  no ponto  $S_i$  é representada por  $g_i$ .

Os métodos de diferenças finitas para funções com valores em  $\mathbb{R}$  aproximam a solução  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de uma equação diferencial  $\mathcal{L}u = f$  no conjunto  $\Omega_h$ , gerando valores  $U_i^n$  tais que

$$U_i^n \approx u(S_i, t_n) = u_i^n \quad \forall (S_i, t_n) \in \Omega_h$$

Estabelecemos aproximações locais em  $(S_i, t_n) \in \Omega_h$  para as derivadas da solução presentes na equação diferencial, enquanto as funções presentes na equação (inclusive a solução) são avaliadas em  $(S_i, t_n)$ .

Deste modo, geramos a partir de  $\mathcal{L}u = f$  um conjunto de equações a diferenças cuja solução fornece as aproximações  $U_i^n$ . Em geral, as derivadas presentes na equação são aproximadas pela série de Taylor.

O método **explícito** de diferenças finitas com diferenças centradas no espaço é um dos mais simples para equações parabólicas. Este método utiliza as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} \\ \frac{\partial u}{\partial S} &\approx \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \approx \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}$$

Substituindo (5.1) na equação (BS), temos que:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + rS_i \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} - rU_i^n \quad (4.2)$$

Reordenando (4.2) e observando que  $S_i = ih$ ,

$$U_i^{n+1} = c_{-1}U_{i-1}^n + c_o U_i^n + c_1 U_{i+1}^n, \quad (4.3)$$

em que os coeficientes  $c_j = c_j(i)$  são dados por:

$$c_{-1} = \frac{1}{2}k(\sigma^2 i^2 - ri) \quad c_o = 1 - k(\sigma^2 i^2 + r)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}k(\sigma^2 i^2 + ri) \quad (4.4)$$

Considere um problema com condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  e condições de contorno do tipo  $u(0, t) = \phi(t)$  e  $u(L, t) = \psi(t)$ .

Podemos calcular a solução aproximada no nível de tempo zero ( $t = t_o$ ) avaliando  $u$  nos pontos  $(S_i, 0)$ :

$$u_i^o = f_i, \quad 0 \leq i \leq N \quad (4.5)$$

Do mesmo modo, as condições de contorno implicam que:

$$u_o^n = \phi_n \text{ e } u_L^n = \psi_n, \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.6)$$

A solução aproximada nos pontos interiores é calculada usando (4.3) para  $1 \leq i < N$  em cada nível de tempo  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , usando a solução já conhecida do nível de tempo  $n - 1$ . Por esta razão, o método é denominado explícito.

## 4.2 Método de Crank-Nicolson

Uma mudança natural no esquema explícito é avaliar as derivadas parciais com respeito a  $S$  no nível de tempo  $n + 1$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} \approx \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \approx \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

De modo análogo, obtemos

$$b_{-1}U_{i-1}^{n+1} + b_o U_i^{n+1} + b_1 U_{i+1}^{n+1} = U_i^n \quad (4.8)$$

Os coeficientes  $b_j$  são os seguintes :  $b_{-1} = -c_{-1}$ ,  $b_o = 2 - c_o$  e  $b_1 = -c_1$ ; os coeficientes  $c_i$  são os mesmos em (4.4).

A solução aproximada nos pontos interiores é calculada em cada nível de tempo  $n + 1$ ,  $0 \leq n < N$ , resolvendo-se um sistema linear cujas equações são dadas por (4.8) e as incógnitas são  $U_i^{n+1}$ ,  $1 \leq i < N$ . Observe que a matriz do sistema será tridiagonal. Este método é chamado **implícito**.

Apesar do custo computacional ser maior do que o custo associado ao método explícito, o método implícito torna-se atrativo quando as condições de estabilidade do método explícito (relacionadas com a relação entre  $h$  e  $k$ ) são restritivas.

O **método de Crank-Nicolson** com parâmetro  $\alpha \in [0, 1]$  faz uma ponderação entre os métodos explícito e implícito da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} \approx \alpha \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} + (1 + \alpha) \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \approx \alpha \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1 + \alpha) \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}$$

Daqui em diante vamos adotar  $\alpha = 1/2$ . Deste modo,

$$b_{-1}U_{i-1}^{n+1} + b_o U_i^{n+1} + b_1 U_{i+1}^{n+1} = c_{-1}U_{i-1}^n + c_o U_i^n + c_1 U_{i+1}^n \quad (4.10)$$

Os coeficientes  $b_j$  e  $c_j$  são dados por:

$$c_{-1} = \frac{1}{4}k(\sigma^2 i^2 - ri) \quad c_o = 1 - \frac{1}{2}k(\sigma^2 i^2 + r)$$

$$c_1 = \frac{1}{4}k(\sigma^2 i^2 + ri) \quad (4.11)$$

$$b_{-1} = -c_{-1} \quad , \quad b_o = 2 - c_o \quad , \quad b_1 = -c_1$$

O cálculo de  $U_i^{n+1}$  nos pontos interiores é semelhante ao realizado no método implícito, sendo que as equações são formadas por (10). O método de Crank-Nicolson é caracterizado como um método implícito em que a solução utiliza mais informações do nível de tempo anterior.

### 4.3 Condições de Contorno

Quando resolvemos a equação de *Black-Scholes* para obter o prêmio de opções europeias, não foram necessárias condições de contorno na solução do problema, como vimos em (3.13)-(3.15) e (3.42)-(3.44). Na prática, não há interesse em se determinar o prêmio quando os preços da ação assumem valores extremos, pois em geral os preços têm uma probabilidade desprezível de assumir tais valores.

Entretanto, os métodos de diferenças finitas precisam de condições de contorno. Uma condição é obtida facilmente em  $S = 0$ . O corolário 2.1 estabelece uma condição de contorno em  $S = 0$  para  $c(S, t)$  :

$$c(0, t) = 0 \tag{4.12}$$

Adicionando a hipótese H2 ao corolário 2.3, obtemos :

$$p(0, t) = Ee^{-r(T-t)} \tag{4.13}$$

O domínio da variável preço não é limitado superiormente, de modo que devemos determinar o comportamento de  $c$  quando  $S \rightarrow \infty$ . Conforme discutimos na seção 2.6, o preço  $S = S_t$  é um semi-martingale contínuo, de modo que suas trajetórias são contínuas quase sempre, ou seja  $S$  é contínua com relação a  $t$  quase sempre.

Assim,  $S \rightarrow \infty$  implica que a opção não pode ser limitada no tempo pela data de vencimento, ou seja, devemos ter  $T \rightarrow \infty$ . De fato, se tivéssemos  $T \in \mathbb{R}$ , existiria  $\bar{t} \in [0, T]$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} S_t = \infty \quad , \tag{4.14}$$

contradizendo a continuidade de  $S_t$ . Portanto, somente faz sentido para o modelo calcular limites quando  $S \rightarrow \infty$  em opções perpétuas. Representando

as opções perpétuas européias de compra por  $c_\infty(S, t)$  e de venda por  $p_\infty(S, t)$ , temos dos corolários 2.2 e 2.5 que

$$c_\infty(S, t) = S \text{ e } p_\infty(S, t) = 0 \quad (4.15)$$

Parece razoável supor que nas situações em que  $S \gg 0$  o prêmio de uma opção arbitrária se aproxima do prêmio de uma opção perpétua, o que equivale a afirmar que:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} c(S, t) = \lim_{S \rightarrow \infty} c_\infty(S, t) \quad (4.16)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S, t) = \lim_{S \rightarrow \infty} p_\infty(S, t) \quad (4.17)$$

Verificamos que as condições (4.16) e (4.17) são consistentes com a soluções de (3.13)-(3.15) e (3.42)-(3.44).

Podemos portanto usar a relação existente entre  $S$  e  $t$  como uma fonte de informações sobre a solução, apesar do problema estar na forma de uma equação determinística em que  $S$  independe de  $t$ . Por exemplo, a conclusão de que  $p(S, t) \rightarrow 0$  quando  $S \rightarrow \infty$  não parece óbvia se  $S$  e  $t$  são tratadas como variáveis independentes.

O passo seguinte é aproximar o domínio  $[0, \infty]$  por um domínio finito  $[0, L]$ . Deste modo, a situação em que  $S \rightarrow 0$  requer a escolha de um valor suficientemente grande para  $L$ ; a escolha deve levar em conta a precisão da aproximação e o custo computacional. Valores de  $L$  entre  $2E$  e  $3E$  apresentam bons resultados. Uma questão em aberto é determinar  $L$  em função dos parâmetros da equação e do erro máximo admitido.

As condições (12) e (16) formuladas para opções de compra são impostas da seguinte maneira :

$$C_o^n = c(0, t_n) = 0 \text{ , } 0 \leq n \leq N \quad (4.18)$$

$$C_N^n = c_\infty(L, t_n) = S_N \text{ , } 0 \leq n \leq N \quad (4.19)$$

Analogamente, para opções de venda temos de (13) e (17) que

$$P_o^n = p(0, t_n) = Ee^{-\tau(T-t_n)} \text{ , } 0 \leq n \leq N \quad (4.20)$$

$$P_N^n = p_\infty(S_N, t_n) = 0 \text{ , } 0 \leq n \leq N \quad (4.21)$$

Temos a seguinte alternativa à condição (4.19) :

$$C_N^n = c_\infty(L, t_n) = S_N - Ee^{-r(T-t_n)} , \quad 0 \leq i \leq N \quad (4.22)$$

A condição (4.22) é justificada pela fórmula de paridade (3.52).

Há outras maneiras de se lidar com as condições de contorno. Por exemplo, aproximando convenientemente a função derivada e derivada segunda com respeito ao preço, podemos determinar os valores de  $U_0^n$  a partir dos pontos  $S_i > 0$  e os valores de  $U_N^n$  a partir dos pontos  $S_i < L$ . Assim, o próprio esquema de diferenças finitas descreve a tendência do prêmio nos extremos baseando-se apenas na equação e na condição inicial .

#### 4.4 Estabilidade

A idéia central de estabilidade de um método de diferenças finitas para equações de evolução é que os procedimentos numéricos do método devem limitar a amplificação dos dados iniciais

Vamos nos concentrar na questão da estabilidade do método explícito. Os métodos implícito e de Crank-Nicolson comportam-se como métodos incondicionalmente estáveis.

O fato dos coeficientes dados por (4.4) não serem constantes torna a análise de estabilidade tradicional (usando transformada discreta de Fourier) extremamente complexa. Apresentamos aqui as definições básicas de estabilidade e uma análise de estabilidade alternativa.

Seja  $\mathcal{L}_h$  uma aproximação do operador  $\mathcal{L}$  dada por :

$$\mathcal{L}_h(u) = u(x, t + k) - \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j u(x + jh, t) . \quad (4.23)$$

Seja  $U^{n+1} = [U_{1,n+1}, U_{2,n+1}, \dots, U_{N,n+1}]$  o vetor que contém a solução  $U$  de  $\mathcal{L}_h = 0$  em cada ponto  $(x_i, t_{n+1})$  de  $\Omega_h$  . Podemos representar (4.23) na forma matricial usando os vetores  $U^n$  e  $U^{n+1}$  :

$$U^{n+1} = AU^n + c^n , \quad (4.24)$$

sendo que  $c^n = [c_1^n, 0, \dots, 0, c_N^n]$  resulta das condições de contorno no nível de tempo  $n$ .

**Definição 4.1 :** Dizemos que o operador  $\mathcal{L}_h$  é estável se existe  $M > 0$  tal que, para cada  $n$  fixo,

$$\|U^{n+1}\| \leq M \quad \forall h, k > 0 \quad (4.25)$$

Esta definição é um caso particular do conceito de estabilidade no sentido de Lax-Richtmyer para equações lineares.

Observe que uma condição necessária para que  $U^{n+1}$  satisfaça (7) é que  $\|A\| \leq 1$ . Seja  $\rho(C)$  o raio espectral de uma matriz quadrada  $C$ . Assim, uma condição equivalente de estabilidade é a seguinte:

$$\rho(A) \leq 1 \quad (4.26)$$

A noção de consistência ou compatibilidade está associada à precisão com que o operador  $\mathcal{L}_h$  aproxima  $\mathcal{L}$ .

Em geral, temos que a solução  $u^*$  de  $\mathcal{L}u = 0$  satisfaz<sup>1</sup>  $\mathcal{L}_h(u^*) \neq \mathcal{L}(u^*)$ , ou seja,  $\mathcal{L}_h(u^*) \neq 0$ . Seja  $T_{i,n}$  definido da seguinte forma:

$$T_{i,n} = \mathcal{L}_h(u^*(x, t))|_{(x_i, t_n)} \quad (4.27)$$

$T_{i,n}$  é denominado **erro de truncamento local** no ponto  $(x_i, t_n)$ .

Observe que  $T_{i,n}$  representa uma medida da diferença entre a solução analítica  $u^*$  e a solução aproximada  $U$  ( $U$  satisfaz  $\mathcal{L}_h(U) = 0$ ) em cada ponto  $(x_i, t_n)$ .

Como em geral não conhecemos a solução  $u^*$ , podemos comparar os dois operadores utilizando uma função  $v \in C^2[a, b]$  arbitrária, em que não necessariamente  $\mathcal{L}_h(v) = 0$ . Definimos assim a **função erro de truncamento local** em  $(x_i, t_n)$ :

$$\tau_{i,n}(v) = (\mathcal{L}_h(v(x, t)) - \mathcal{L}(v(x, t)))|_{(x_i, t_n)} \quad (4.28)$$

**Definição 4.2 :** O esquema definido por  $\mathcal{L}_h$  é dito consistente se

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \tau_{i,n}(v) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq N \quad , \quad 1 \leq m \leq m \quad (4.29)$$

Utilizaremos uma definição particular de consistência (Forsythe (1960) ) em que a razão  $\lambda = k/h^2$  é constante :

<sup>1</sup>a menos que  $u^*$  pertença ao núcleo do operador  $\mathcal{L}_h$

**Definição 4.3 :** Dizemos que  $\mathcal{L}_h$  é uma **aproximação formal** de  $\mathcal{L}$  se para toda função  $v \in C^2[a, b]$ , temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{k} \mathcal{L}_h(v) = \mathcal{L}(v) \quad , \quad \frac{k}{h^2} = \lambda = \text{cte.} \quad (4.30)$$

**Definição 4.4 :** Uma solução aproximada  $U$  definida por  $\mathcal{L}_h(U) = 0$  converge para a solução  $u^*$  de (1) se

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \|U(x, t) - u^*(x, t)\| = 0 \quad (4.31)$$

Em equações lineares, as propriedades de consistência e estabilidade são condições suficientes para a convergência da solução aproximada.

**Definição 4.5 :** Um operador  $\mathcal{L}_h$  definido por (4.23) é do tipo positivo se existe  $h_1 > 0$  tal que  $c_j \geq 0$ ,  $-n_1 \leq j \leq n_2$ , para todo  $(x, t)$  e para todo  $h$ ,  $0 \leq h \leq h_1$ .

Temos que, sob certas condições de regularidade, todo operador positivo é estável (vide Oliveira e Pulino (1997)). Deste modo, positividade dos coeficientes  $c_i$  em (4.4) são uma condição suficiente de estabilidade.

O coeficiente  $c_1$  é sempre positivo. A imposição de positividade sobre o coeficiente  $c_0$  nos leva a seguinte condição:

$$\lambda \leq \frac{1 - rk}{\sigma^2 S_i^2} \quad (4.32)$$

Esta condição pode ser substituída por uma restrição maior:

$$\lambda \leq \frac{1 - rk}{\sigma^2 L^2} \quad (4.33)$$

Temos que (4.33) é uma condição suficiente para a convergência do método explícito. Como em geral temos  $r$  e  $k \ll 1$ , esperamos que a seguinte condição também seja suficiente:

$$\lambda \leq \frac{1}{\sigma^2 L^2} \quad (4.34)$$

Analogamente, a condição  $c_{-1} \geq 0$  implica que

$$\frac{\sigma^2 S_i}{h} \geq r \quad (4.35)$$

Tomando  $i = 1$ , ou seja,  $S_i = h$ , obtemos :

$$\frac{\sigma^2}{r} \geq 1 \quad (4.36)$$

Esta é uma condição extremamente restritiva. A instabilidade causada pela violação de (4.26) somente é observável quando o parâmetro  $r$  tem um valor alto se comparado com  $\sigma$ ; para este caso, precisamos de métodos de diferenças finitas específicos para estes casos (vide Zvan et al (1996) ).

Temos em Oliveira e Pulino (1997) uma análise da sensibilidade do raio espectral da matriz do sistema aos valores de  $\lambda$ . Os resultados indicam que a condição dada em (4.34) deve estar próxima da condição mínima de estabilidade, enfatizando sua utilidade prática.

## 4.5 Observações

O trabalho de Brennan e Schwartz (1978) foi um dos primeiros a apresentar a precificação de opções por diferenças finitas; uma introdução genérica é apresentada em Smith (1985), enquanto Wilmott et al (1995) e Hull (1997) fazem uma abordagem específica para o problema de precificação de opções.

Apresentamos neste capítulo algumas idéias não encontradas em outros trabalhos, a utilização das propriedades estocásticas do preço da ação para formalizar as condições de contorno em  $S \rightarrow \infty$  e a análise de estabilidade da equação de *Black-Scholes*, desenvolvida em Oliveira e Pulino (1997).

Os trabalhos sobre estabilidade em diferenças finitas trazem abordagens extremas sobre o assunto: ou analisam a estabilidade no caso simples em que as equações têm com coeficientes constantes (como a equação de difusão) ou estabelecem resultados genéricos que são dificilmente aplicáveis ao estudo de uma equação em particular.

# Capítulo 5 :

## Adaptações para Diferenças Finitas

O objetivo deste capítulo é aumentar a eficiência dos métodos explícito e de Crank-Nicolson incorporando novas características que dão origem a diversos métodos, presentes em publicações sobre finanças e análise numérica ou desenvolvidos neste trabalho.

### 5.1 Solução de Equações Transformadas

O procedimento geral de utilizar transformações de variáveis em conjunto com Diferenças Finitas é o seguinte:

- Mudança das variáveis independentes (no caso,  $S$  e  $t$ ) e/ou da variável independente ( $V(S, t)$ );
- Transformação da equação diferencial e das condições iniciais e de contorno para as novas variáveis;
- Resolução da equação transformada pelos métodos tradicionais, como o explícito e o de Crank-Nicolson;
- Transformação da solução numérica obtida de volta às variáveis originais;

Há um consenso quanto às vantagens da transformação logarítmica, cujo problema associado é dado por (3.20)-(3.22). Observe que o termo  $\ln(S/E)$  aparece naturalmente na fórmula de *Black-Scholes*. Uma vantagem desta abordagem é que a equação transformada (3.20) tem coeficientes constantes, aumentando a estabilidade. A transformação  $S = Ee^x$  de volta às variáveis originais também é simples, contribuindo para um algoritmo claro.

Segundo Hull e White (1990), a eficiência desta transformação é favorecida pelo fato de que o desvio padrão de  $\ln(S)$  em um intervalo infinitesimal de tempo independe de  $S$  e  $t$ , o que podemos verificar observando a forma diferencial de (2.51).

Wilmott et al (1993) propõe resolver numericamente a equação de difusão, considerando o problema (3.32)-(3.34). A vantagem deste procedimento é a eliminação dos parâmetros da equação, ou seja, a solução numérica da

equação transformada não depende de  $E, \sigma^2, r$  ou  $T$ ; tais parâmetros são transferidos para as equações de mudança para as variáveis originais.

Vamos propor uma abordagem que tenta conciliar a simplicidade do algoritmo à eliminação dos parâmetros da equação. Vimos no capítulo 3 que algumas mudanças de variáveis intermediárias são usadas até chegarmos à equação de difusão. Uma delas é a transformação logarítmica.

A transformação seguinte adimensionaliza o problema, sem entretanto envolver os termos exponenciais na variável dependente que aparecem na mudança de variáveis seguinte. A alternativa proposta é resolver o problema associado a esta transformação, que é dado por (3.24)-(3.26).

Novamente, serão necessárias condições de contorno para a equação transformada. Vamos apresentar as condições de contorno para opções de compra para cada uma das transformações analisadas.

Para o método associado à transformação logarítmica, que vamos denominar método explícito (de Crank-Nicolson) logarítmico, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x, \tau) = 0 \quad (5.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x, \tau) = \lim_{x \rightarrow +\infty} Ee^x \quad (5.2)$$

Para o método associado à transformação que leva à equação de difusão, que vamos denominar método explícito (de Crank-Nicolson) na equação de difusão, as condições de contorno são as seguintes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, \tau) = 0 \quad (5.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x, \tau) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(K+1)x - \frac{1}{4}(K+1)^2\tau\right) \quad (5.4)$$

Finalmente para o último método proposto, que será denominado método explícito (de Crank-Nicolson) adimensional:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = 0 \quad (5.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, \tau) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \quad (5.6)$$

Como o domínio da variável preço é transformado para  $\mathbb{R}$  nos métodos acima, temos que considerar um intervalo  $[-L^-, L^+]$ , sendo que  $L^-$  e  $L^+$  são positivos e suficientemente grandes. Uma escolha adequada é tomar  $L^+$  entre  $2E$  e  $3E$  e  $L^-$  tal que, ao aplicarmos uma transformação de volta para a variável  $S$  original,  $L^-$  seria levado em  $S_1 = h$ . Por exemplo, na transformação logarítmica, podemos tomar  $L^- = \ln(h/E)$ .

## 5.2 Malhas não Uniformes

Retiremos a suposição feita no capítulo 4 de que os intervalos entre os pontos de  $\Omega_h$  são igualmente espaçados, ou seja, de que a malha é uniforme. Vamos considerar uma malha  $\Omega_h = \{0 = S_1 < S_2 < \dots < S_N = L\} \times \{0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = T\}$  com  $h_i = S_{i+1} - S_i$ ,  $0 \leq i < N$  e  $k = t_{n+1} - t_n$ ,  $0 \leq n < M$ .

No caso do método explícito com diferenças centradas no espaço, as derivadas são aproximadas no ponto  $(S_i, t_n)$  por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} \\ \frac{\partial u}{\partial S} &\approx \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{h_{i-1} + h_i} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} &\approx 2 \frac{h_{i-1}U_{i+1}^n - (h_{i-1} + h_i)U_i^n + h_i U_{i-1}^n}{(h_i)(h_{i-1})(h_{i-1} + h_i)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Substituindo (5.7) em (BS), obtemos:

$$U_i^{n+1} = c_{-1}U_{i-1}^n + c_o U_i^n + c_1 U_{i+1}^n, \quad (5.8)$$

Os coeficientes  $c_j$ , que agora dependem de  $S_i$ , são dados por:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{kS_i}{h_{i+1} - h_i} \left( \frac{\sigma^2 S_i^2}{h_{i-1}} - ri \right) \\ c_o &= 1 - k \left( \frac{\sigma^2 S_i^2}{h_i h_{i-1}} - r \right) \\ c_1 &= \frac{kS_i}{h_{i+1} - h_i} \left( \frac{\sigma^2 S_i^2}{h_i} + ri \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para o método de Crank-Nicolson, a idéia é a mesma do capítulo 4: temos um sistemas linear cujas equações são as seguintes:

$$\bar{b}_{-1}U_{i-1}^{n+1} + \bar{b}_o U_i^{n+1} + \bar{b}_1 U_{i+1}^{n+1} = \bar{c}_{-1}U_{i-1}^n + \bar{c}_o U_i^n + \bar{c}_1 U_{i+1}^n, \quad 0 \leq i \leq N \quad (5.10)$$

Expressando os coeficientes  $\bar{b}_j, \bar{c}_j$  por meio dos coeficientes  $c_j$  em (5.9), temos que:

$$\bar{b}_{-1} = -\frac{1}{2}c_{-1}, \quad \bar{b}_o = 1 + \frac{1}{2}(1 - c_o), \quad \bar{b}_1 = -\frac{1}{2}c_1 \quad (5.11)$$

$$\bar{c}_{-1} = -\bar{b}_{-1} \quad , \quad \bar{b}_o = 2 - \bar{b}_o \quad , \quad \bar{b}_1 = \bar{b}_1 \quad (5.12)$$

O objetivo de uma malha não uniforme é refinar determinadas regiões do domínio em que a solução deve ser mais precisa. Em nosso problema, esta região é a vizinhança de  $S = E$ .

Há duas razões pela qual desejamos refinar a malha próximo próximo ao preço de exercício. A condição inicial não é derivável em  $S = E$  tanto para opções de compra quanto para opções de venda. Isto pode comprometer a precisão da solução na vizinhança deste ponto. A outra razão é que na prática, a informação mais relevante sobre o prêmio está em torno de  $S = E$ . A razão é que o preço de exercício  $E$  geralmente é fixado em torno do preço  $S$  do ativo (vide Hull (1997) ).

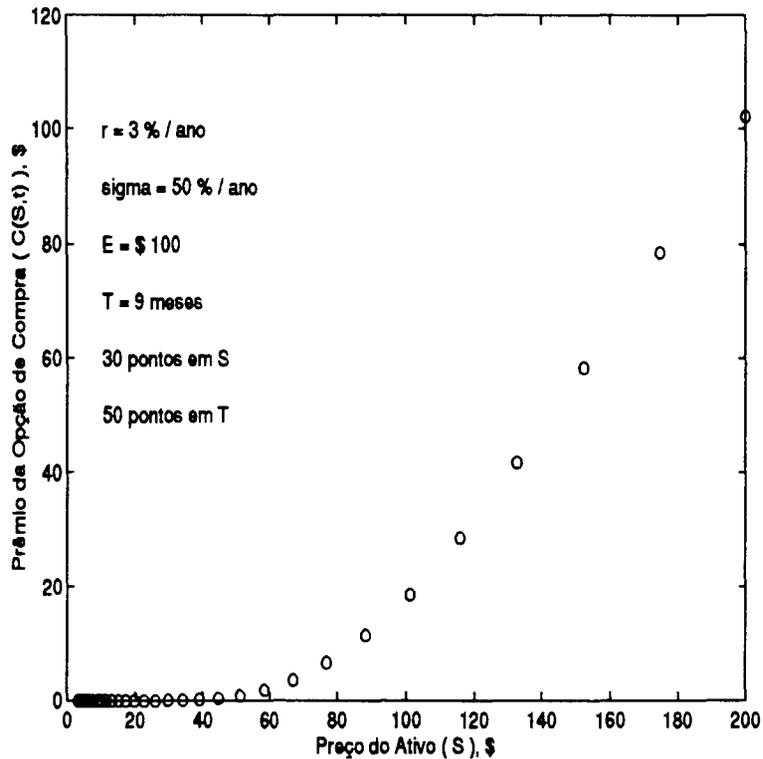
### 5.3 Distorções nas Equações Transformadas

As transformações da seção 5.1 têm em comum o fato de que a variável preço é modificada para  $x = \ln(S/E)$ , o que ocasiona a extensão do domínio para toda a reta. ( $x \in \mathbb{R}$ ). Outra consequência indesejável é o fato de que o uso de uma malha uniforme em equações transformadas resulta em uma solução cujos pontos na variável original  $S$  não estão uniformemente distribuídos, ou seja, a malha uniforme é transformada em outra malha não-uniforme.

O problema é ainda maior porque devido a mudança de variáveis ser logarítmica, a malha não-uniforme obtida é extremamente refinada na região próxima a  $S = 0$ , enquanto que o espaçamento aumenta rapidamente com  $S$  conforme indicam os experimentos.

Tal situação impõe uma redução do valor  $\Delta S$  na equação transformada para que possamos obter uma precisão adequada na região de interesse ( $S \approx E$ ). Além disso, o refinamento é acentuado num segmento do domínio onde não há necessidade.

Podemos perceber este efeito traçando a solução aproximada por exemplo do método explícito adimensional sem interpolar os pontos:



**Figura 5.1:** Solução da equação de *Black-Scholes* aproximada pelo método explícito adimensional

### 5.3.1 Transformação E-Concentrante

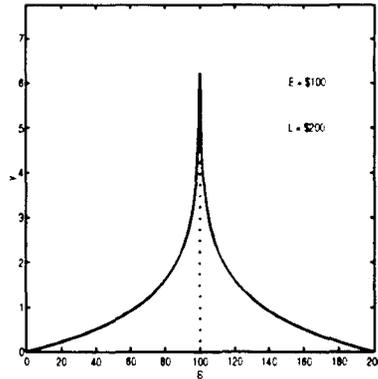
Poderíamos pensar se não seria possível deslocar o refinamento natural dos métodos acima para a região desejada, por meio de uma transformação logarítmica centrada em  $S = E$ . Temos assim a expectativa de obter uma transformação que naturalmente promova um refinamento em  $S = E$  e que ainda simplifique os coeficientes da equação (BS).

Entre as tentativas realizadas, duas transformações na variável  $S$  puderam ser aproveitadas:

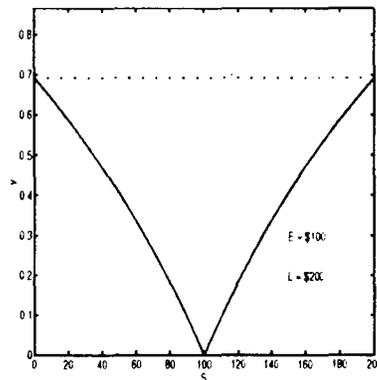
$$S = E(1 \pm e^{-y}) \quad (5.13)$$

$$S = E \pm E(e^y - 1) \quad (5.14)$$

Tanto (5.13) quanto (5.14) conseguem levar uma malha uniforme na malha refinada em  $E$ . Vejamos o gráfico  $y \times S$  de ambas as transformações:



**Figura 5.2:** Gráfico  $y \times S$  da transformação dada por (5.13)



**Figura 5.3:** Gráfico  $y \times S$  da transformação dada por (5.14)

As duas transformações não são injetivas, e a transformação (5.13) sequer é contínua. Isto seria suficiente para desistir da abordagem, porém vamos tentar prosseguir com a transformação (5.14).

Vamos contornar a dificuldade da transformação não ser injetiva (e portanto não invertível) dividindo o domínio :

**Problema 1 :** consideramos o domínio  $[0, E]$ , no qual a transformação será dada por:

$$S = E - E(e^y - 1) = E(2 - e^y) \quad , \quad \tau = \frac{(T - t)}{\sigma^2/2} \quad (5.15)$$

A equação é transformada na seguinte:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = g(y)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g(y)(k - g(y)) \frac{\partial v}{\partial y} - kv \quad , \quad g(y) = 1 - 2e^{-y} \quad (5.16)$$

A condição inicial e a condição de contorno em  $y_N \approx 0$  são dadas por:

$$V_i^0 = 0 \quad \text{e} \quad V_N^n = 0 \quad (5.17)$$

**Problema 2 :** o domínio agora é  $[E, L]$ ; temos a seguinte transformação:

$$S = E + E(e^x - 1) = Ee^x \quad , \quad \tau = \frac{(T - t)}{\sigma^2/2} \quad (5.18)$$

A equação transformada é idêntica a (3.27):

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial w}{\partial x} - kw \quad (5.19)$$

Temos como condição inicial e condição de contorno em  $x_N = L$ :

$$W_i^0 = e^x - 1 \quad \text{e} \quad W_N^n = e^x \quad (5.20)$$

Para ambos os problemas a condição de contorno não é fornecida quando  $i = 0$ , que equivale nos dois casos ao ponto  $S = E$ . A formulação original do problema não pode fornecer o valor da solução deste ponto, por estar localizado no interior do domínio.

Esta nova dificuldade é contornada usando a simetria da transformação (5.14): a solução dos dois problemas acima concentram-se em direção a  $S =$

$E$  da mesma forma. Em particular, a distância entre  $y_1$  e  $y_o = E$  é a mesma entre  $x_1$  e  $x_o = E$ . Isto sugere que os dois problemas poderiam compartilhar os pontos  $y_1$  e  $x_1$ .

Isto ocorre da seguinte maneira : o ponto  $x_1$  torna-se um ponto artificial da malha do problema 1 :  $x_1 = y_{-1}$ . Se impomos uma condição de contorno em  $y_{-1}$ , o valor de  $y_o$  é facilmente calculado. Propomos utilizar a própria aproximação da solução em  $x_1$  como condição de contorno, ou seja,

$$V_{-1}^n = W_1^n \quad (5.21)$$

Analogamente,

$$W_{-1}^n = V_1^n \quad (5.22)$$

Não conseguimos simplificar a equação conforme desejado, e ainda foram necessários artifícios para estabelecer as condições de contorno. Entretanto, a implementação desta transformação (que vamos chamar de E-concentrante) como um método do tipo explícito surpreendeu com um erro de aproximação menor que a maioria dos métodos, embora não haja controle sobre a estabilidade.

Portanto, o método proposto, a princípio uma curiosidade do ponto de vista teórico, pode se tornar uma boa alternativa se for melhor analisado e implementado.

Aproveitamos a idéia da transformação E-concentrante sem modificar a equação original, gerando uma malha não uniforme avaliando os pontos de uma malha uniforme em  $y$  na transformação (5.14) para em seguida utilizá-la em um dos métodos adaptados para malhas não-uniformes, dados por (5.8) ou (5.10). Esta abordagem rendeu os melhores resultados de aproximação de todo o trabalho.

## 5.4 Observações

A adaptação de métodos de diferenças finitas envolveu diversos autores nos anos 80. Vide Courtedon (1982), Geske e Shastri (1985) e Hull e White (1990).

Cabe notar que cada um dos métodos transformados da seção 5.1 tem uma vantagem própria. O método logarítmico é caracterizado pela simplicidade com que transforma a equação de *Black-Scholes* numa equação com

coeficientes constantes. O método adimensionalizado pode ser útil em dificuldades com a ordem de grandeza dos parâmetros, enquanto que o método transformado para a equação de difusão tem como grande atrativo a **simetria** do sistema resultante.

Experimentos numéricos realizados sugerem que as malhas não-uniformes geradas por transformações contínuas (como a transformação E-concentrante) levam vantagem sobre malhas com refinamento localizado (por exemplo, dobrando o número de pontos em uma faixa  $[E - \Delta, E + \Delta]$  do domínio da variável preço). Vide em Knupp (1994) uma discussão sobre malhas geradas por transformações contínuas.

# Capítulo 6 :

## Experimentos Numéricos

Veremos aqui o desempenho dos vários métodos propostos para o cálculo do prêmio de opções européias pela equação (BS), comparando os resultados com a solução analítica, dada pela fórmula de *Black-Scholes*.

### 6.1 Descrição e Resultados

Os métodos avaliados, implementados no ambiente MATLAB for Windows, foram os seguintes:

1. Método Explícito (EXP) ;
2. Método de Crank-Nicolson (CKN);
3. Método Explícito Logarítmico (EXPLG);
4. Método Explícito na Equação de Difusão (EXPDF);
5. Método Explícito Adimensional (EXPAD)
6. Método de Crank-Nicolson Adimensional (CKNAD);
7. Método Explícito com Malha não Uniforme (EXPNU);
8. Método de Crank-Nicolson com Malha não Uniforme (CKNNU);
9. Método Explícito E-Concentrante (EXPEC);

Realizamos testes em opções de venda com os seguintes parâmetros :

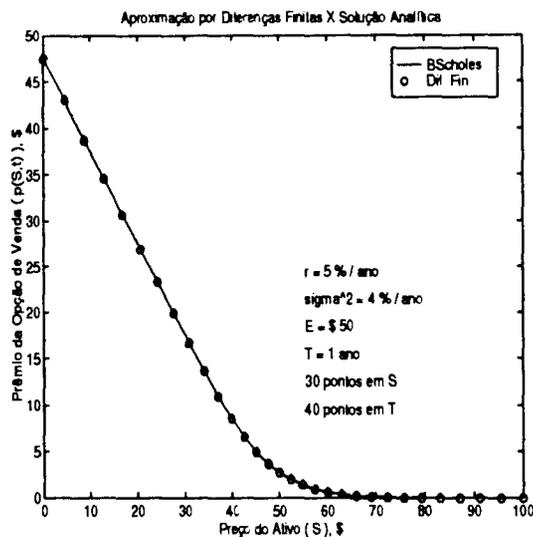
$$r = 5\%/ano, \sigma^2 = 4\%/ano, E = \$50, T = 1 ano$$

Os testes foram feitos com duas discretizações do domínio: na primeira discretização, usamos 30 pontos no domínio do preço e 40 pontos no domínio do tempo; no segundo conjunto, usamos 200 pontos no preço e 1500 no tempo para os métodos explícitos<sup>1</sup> e 1000 pontos no preço e 500 no tempo para os métodos de Crank-Nicolson;

---

<sup>1</sup>Estas escolhas satisfazem a condição de estabilidade dada por (4.34).

Vejamos por exemplo a solução aproximada pelo método EXPEC, comparada com a solução dada pela fórmula de *Black-Scholes*:



**Figura 6.1** Método EXPEC × *Black-Scholes*

Os gráficos a seguir mostram o erro absoluto da solução numérica com respeito à solução analítica. Apresentamos também uma tabela com os erros relativos máximos de todos os métodos nas mesmas condições.

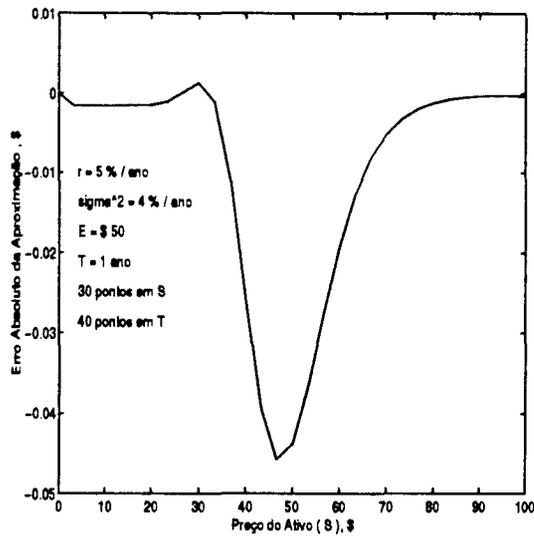


Figura 6.2: Método EXP,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

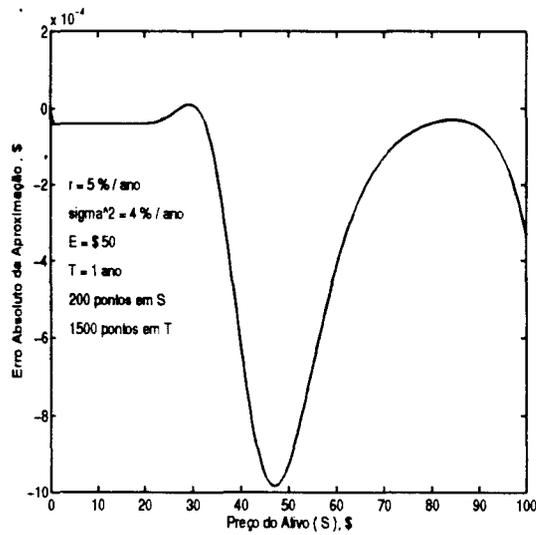


Figura 6.3: Método EXP,  $N = 100$  e  $M = 500$ .

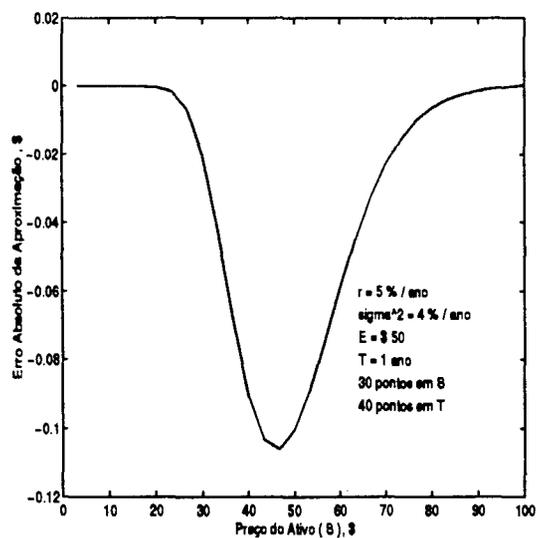


Figura 6.4: Método CKN ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

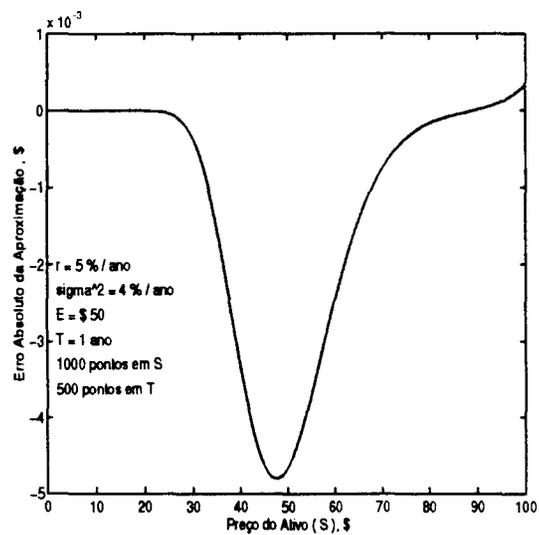


Figura 6.5: Método CKN ,  $N = 200$  e  $M = 200$ .

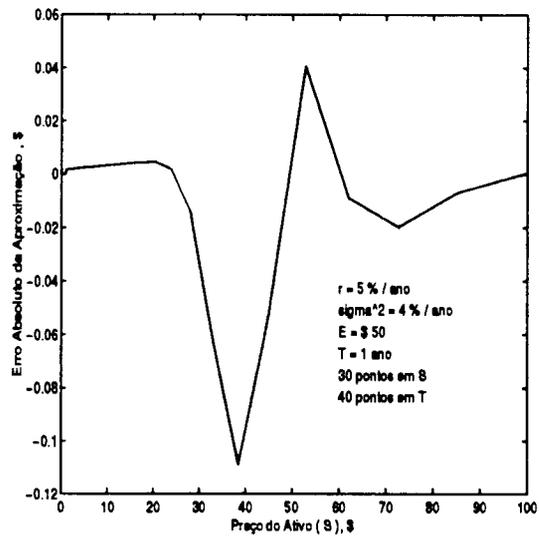


Figura 6.6: Método EXPLG ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

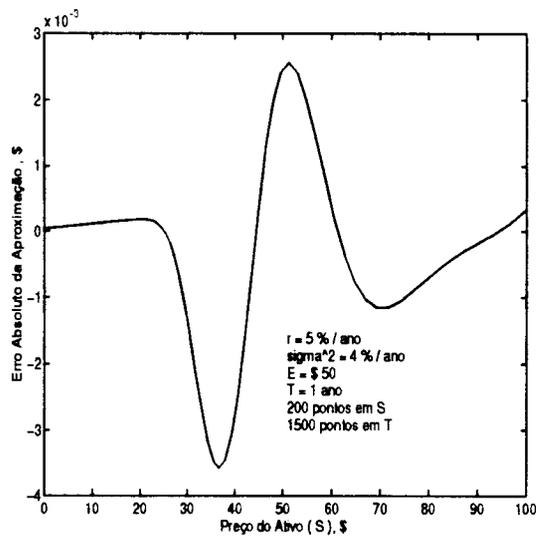


Figura 6.7: Método EXPLG ,  $N = 100$  e  $M = 500$ .

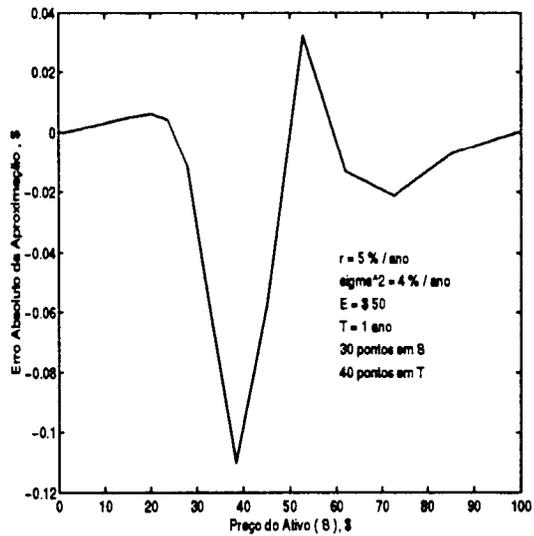


Figura 6.8: Método EXPDF ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

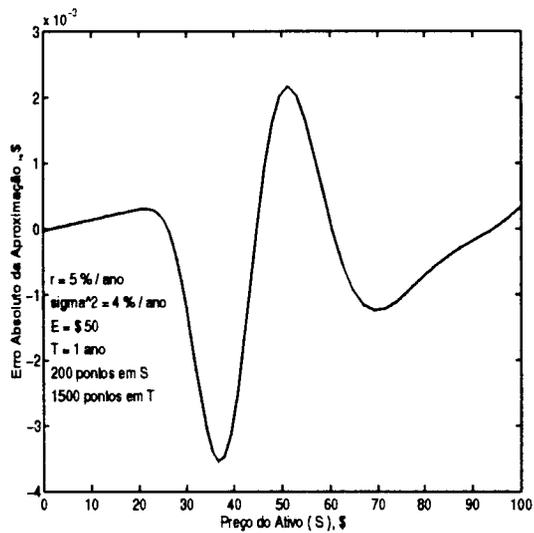


Figura 6.9: Método EXPDF ,  $N = 100$  e  $M = 500$ .

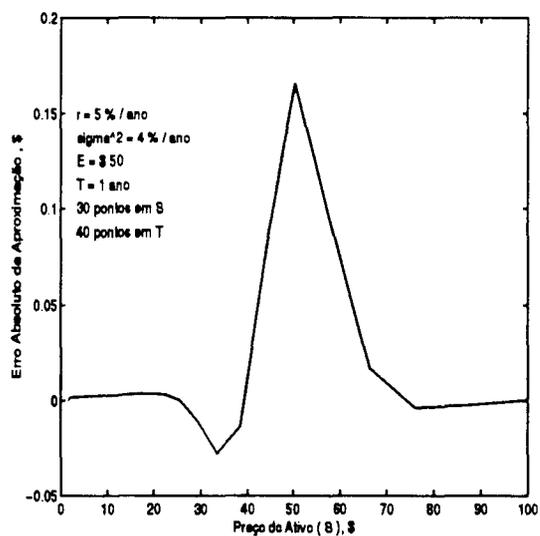


Figura 6.10: Método EXPAD ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

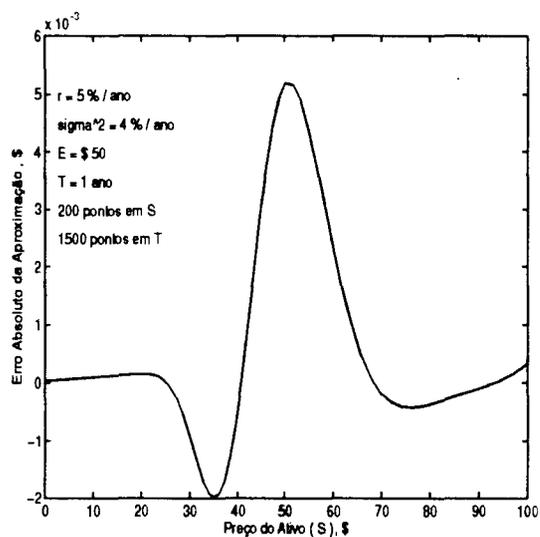


Figura 6.11: Método EXPAD ,  $N = 100$  e  $M = 500$ .

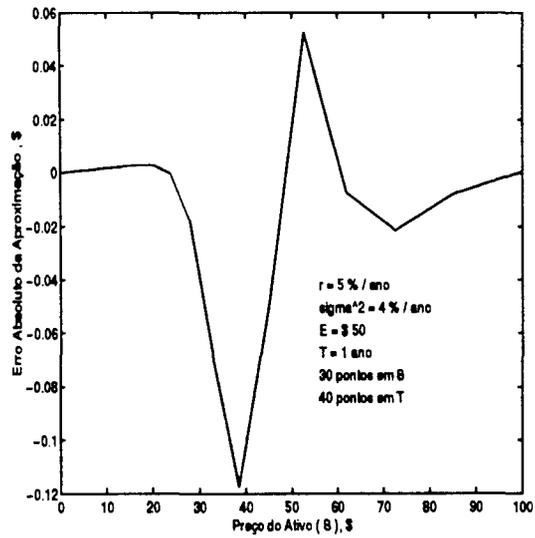


Figura 6.12: Método CKNAD ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

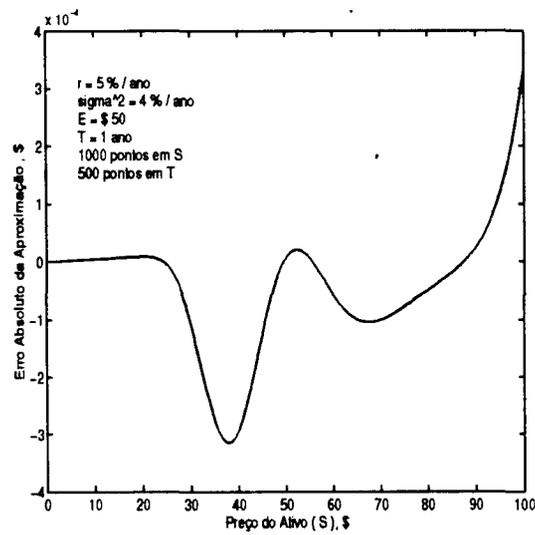


Figura 6.13: Método CKNAD ,  $N = 200$  e  $M = 200$ .

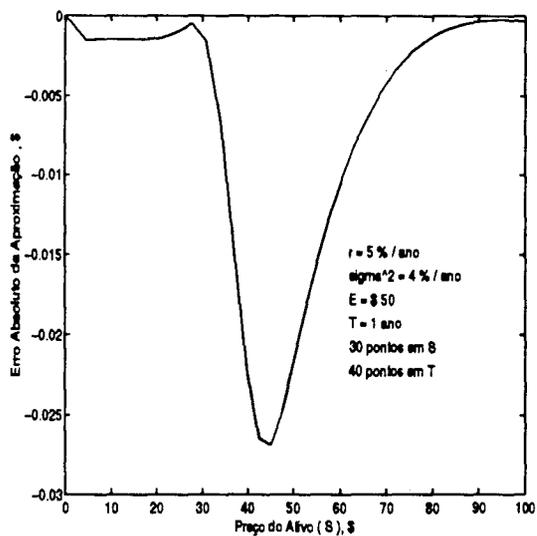


Figura 6.14: Método EXPNU ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

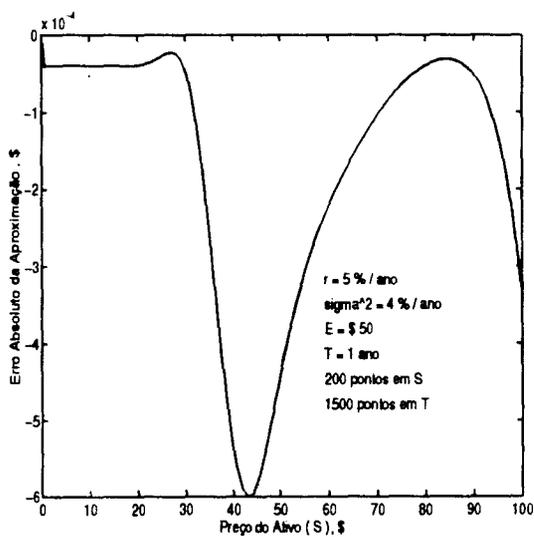


Figura 6.15: Método EXPNU ,  $N = 100$  e  $M = 500$ .

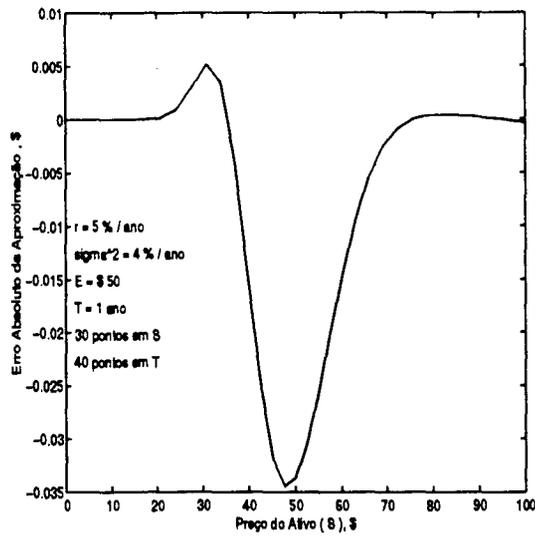


Figura 6.16: Método CKNNU ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

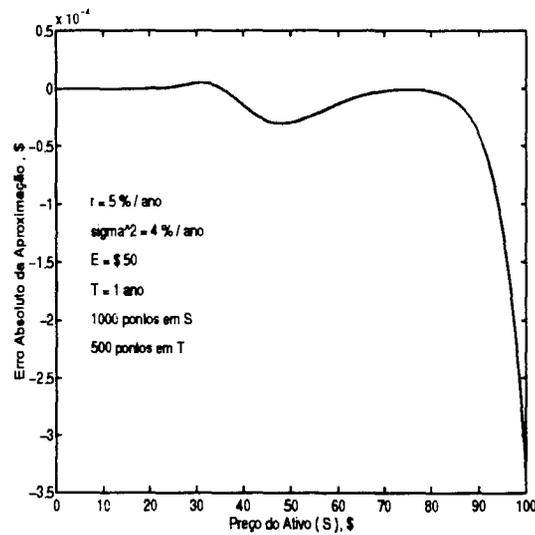


Figura 6.17: Método CKNNU ,  $N = 200$  e  $M = 200$ .

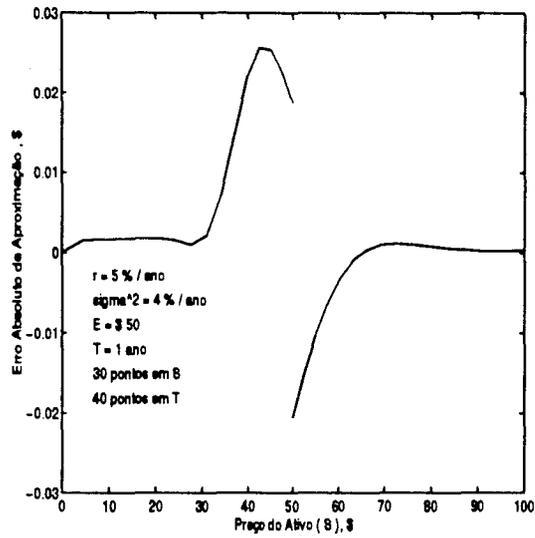


Figura 6.18: Método EXPEC ,  $N = 30$  e  $M = 40$ .

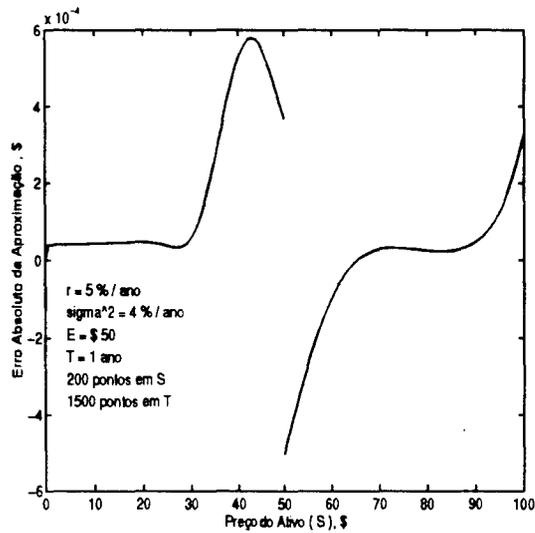


Figura 6.19: Método EXPEC ,  $N = 100$  e  $M = 500$ .

Método:	C1	V1	C2	V2
Direto	$8.44 \times 10^{-4}$	$9.62 \times 10^{-4}$	$1.80 \times 10^{-5}$	$2.07 \times 10^{-5}$
Logarítmico	$2.23 \times 10^{-3}$	$2.29 \times 10^{-3}$	$7.42 \times 10^{-5}$	$7.52 \times 10^{-5}$
Eq. Difusão	$2.44 \times 10^{-3}$	$2.31 \times 10^{-3}$	$7.85 \times 10^{-5}$	$7.46 \times 10^{-5}$
Adimensional	$3.01 \times 10^{-3}$	$3.48 \times 10^{-3}$	$9.25 \times 10^{-5}$	$1.09 \times 10^{-4}$
Não-Uniforme	$4.84 \times 10^{-4}$	$5.65 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-5}$	$1.26 \times 10^{-5}$
E-Concentrante	$8.28 \times 10^{-4}$	$5.39 \times 10^{-4}$	$1.97 \times 10^{-5}$	$1.21 \times 10^{-5}$

**Tabela 6.1 :** Erro Relativo dos Métodos Explícitos

C: compra ; V: venda ; 1:  $N = 30$  e  $m = 40$ ; 2:  $N = 200$  e  $m = 1500$ ;

Método:	C1	V1	C2	V2
Direto	$2.01 \times 10^{-3}$	$2.23 \times 10^{-4}$	$9.16 \times 10^{-5}$	$1.01 \times 10^{-4}$
Adimensional	$2.36 \times 10^{-3}$	$2.47 \times 10^{-3}$	$6.34 \times 10^{-6}$	$6.63 \times 10^{-6}$
Não-Uniforme	$7.25 \times 10^{-4}$	$7.25 \times 10^{-4}$	$5.81 \times 10^{-7}$	$6.41 \times 10^{-7}$

**Tabela 6.2 :** Erro Relativo dos Métodos de Crank-Nicolson

C: compra ; V: venda ; 1:  $N = 30$  e  $m = 40$ ; 2:  $N = 1000$  e  $m = 500$ ;

## 6.2 Observações

Os gráficos de erro absoluto indicam que a maior fonte de erro localiza-se em torno de  $S_N = E$ , confirmando a necessidade de um maior refinamento do domínio nesta região. Isto justifica o melhor desempenho do método CKNNU face aos demais.

Observamos também que houve poucas diferenças entre os métodos transformados, com exceção da transformação E-concentrante.

Resultados mais expressivos podem ser obtidos variando a discretização do domínio. Um estudo interessante é a determinação experimental do valor ideal da extremidade  $S = L$  para cada conjunto de parâmetros.

Vide em Geske e Sharstri (1985) uma análise de erros de métodos de diferenças finitas e outras técnicas para a equação de *Black-Scholes*.

# Capítulo 7 :

## Opções Americanas de Venda

Voltemos ao problema de precificação de opções americanas de venda, mantendo as hipóteses anteriores. Vamos verificar que em opções de venda o prêmio  $P(S, t)$  de uma opção americana pode ser estritamente maior que o prêmio  $p(S, t)$  da opção européia equivalente. Isto implica que  $P(S, t)$  não pode ser determinado pela fórmula de *Black-Scholes* para opções de venda. Fazemos em seguida uma previsão de modelo a ser estudado para este novo problema.

### 7.1 Exercício Prematuro em Opções de Venda

Como vimos no teorema 2.2, uma opção americana de compra sem dividendos **nunca** é exercida antes do vencimento, de modo que seu prêmio é o mesmo de uma opção européia, dentro das hipóteses tomadas. Vamos verificar que existem valores de  $S$  para os quais  $P(S, t) > p(S, t)$ , concluindo que a opção americana de venda **pode** ser exercida prematuramente.

Vamos inicialmente estabelecer que  $P(S^*, t) > p(S^*, t)$  para algum  $S^* > 0$  implica que é possível a ocorrência do exercício prematuro. De fato, se esta possibilidade não existisse, poderíamos comprar uma opção européia e vender uma opção americana quando a ação estiver valendo  $S^*$ , obtendo um lucro  $L = p(S^*, t) - P(S^*, t) > 0$ .

Como a opção vendida somente será exercida no vencimento, teremos nesta data uma despesa de  $(E - S)^+$  com a opção vendida e um rendimento também de  $(E - S)^+$  com a opção comprada. Assim, as operações acima garantiram um lucro  $L$  no instante inicial, contradizendo a hipótese de não arbitragem.

O resultado a seguir fornece um intervalo de preços  $S^*$  que satisfazem  $P(S^*, t) > p(S^*, t)$ :

**Proposição 7.1 :** Dado  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P(S^*, t) > p(S^*, t)$  para todo  $S^* < E(1 - e^{-r(T-t)})$ .

*Demonstração :* Seja  $S^* < E(1 - e^{-r(T-t)})$ . Como  $c(S, t) \leq S$ , temos que

$$c(S^*, t) < E(1 - e^{-r(T-t)}) \quad (7.1)$$

Somando  $Ee^{-r(T-t)} - S^*$  aos dois lados da desigualdade (7.1):

$$c(S^*, t) - S^* - Ee^{-r(T-t)} < E - S^* = (E - S^*)^+ \quad (7.2)$$

Da relação de paridade (3.46),

$$p(S^*, t) < (E - S^*)^+ \quad (7.3)$$

De (2.13), concluímos que:

$$P(S^*, t) \geq (E - S^*)^+ > p(S^*, t) . \quad (7.4)$$

**Observação:** A relação de paridade (3.46) não vale para opções americanas. Podemos verificar, de modo análogo aos resultados da seção 2.1, as seguintes desigualdades:

$$P(S, t) \geq C(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)} \quad (7.5)$$

$$P(S, t) \leq C(S, t) - S + E \quad (7.6)$$

## 7.2 Formulação como Problema de Fronteira Livre

Inicialmente vamos considerar a proposição 7.1 sob o ponto de vista do exercício prematuro.

Se em algum instante  $t^* < T$  o preço da ação-objeto é  $S^* < E(1 - e^{-r(T-t^*)})$ , a opção deve ser imediatamente exercida, pois o rendimento  $L$  gerado pelo exercício prematuro satisfaz:

$$L = E - S^* > Ee^{-r(T-t^*)} \geq p^*(S^*, t) , \quad (7.7)$$

em que  $p^*(S^*, t)$  é o prêmio de uma opção de venda européia com preço de exercício  $E$  e vencimento em  $T - t^*$  anos; como qualquer portfolio que produza um rendimento  $(E - S)^+$  em  $t = T$  tem o mesmo valor presente que

esta opção européia, temos que nenhum portfolio representa uma alternativa melhor que o exercício prematuro. Observemos que neste caso o prêmio  $P(S^*, t^*)$  deve valer  $E - S^*$  para que não haja arbitragem.

Em particular, temos para  $S^* = 0$ :

$$P(0, t) = E \quad (7.8)$$

Utilizando argumentos de arbitragem, podemos verificar que

$$P(S, t) > (E - S)^+ = 0 \quad \forall S \geq E \quad (7.9)$$

Vamos verificar que, para cada instante  $t$  os preços que levam ao exercício prematuro formam um intervalo  $[0, S_f]$ , cujo limitante superior será denominado **ponto ótimo de exercício**.

**Teorema 7.1** : Se  $\bar{S} \leq E$  é tal que  $P(\bar{S}, t) > (E - \bar{S})^+$ , então  $P(S, t) > (E - S)^+$  para todo  $S$  tal que  $\bar{S} \leq S \leq E$ .

*Demonstração* :

Suponha que exista  $S' \in [\bar{S}, E]$  tal que  $P = (E - S)^+$ . Como  $S' > \bar{S} > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\bar{S} = \lambda S' = \lambda S' + (1 - \lambda)0 \quad (7.10)$$

Temos, portanto que:

$$\begin{aligned} P(\lambda S' + (1 - \lambda)0, t) &= P(\bar{S}, t) > (E - \bar{S})^+ \\ &= E - \bar{S} \\ &= E - \lambda S' + (1 - \lambda)0 \\ &= \lambda(E - S') + (1 - \lambda)(E - 0) \\ &= \lambda P(S', t) + (1 - \lambda)P(0, t) \end{aligned} \quad (7.11)$$

A desigualdade acima contradiz o fato de que a função  $P$  é convexa.

**Corolário 7.1** : Existe um único ponto  $S_f = S_F(t)$  tal que:

$$\begin{cases} P(S, t) = (E - S)^+ , & S \leq S_f(t) \\ P(S, t) > (E - S)^+ , & S \geq S_f(t) \end{cases} \quad (7.12)$$

*Demonstração :*

De (7.9),  $P(S, t) > (E - S)^+$  para todo  $S \geq E$ . Do Teorema 7.1,  $P(S, t) > (E - S)^+$  para  $S_f \leq S \leq E$ .

O ponto  $S_f(t)$  separa o domínio em um segmento onde a opção é exercida e outro em que é conveniente exercê-la posteriormente. Assim, o problema de precificação de opções americanas pode ser visto como um **problema de fronteira livre** em que a fronteira livre é dada por  $S_f = S_f(t)$ .

Formulamos este problema da seguinte maneira:

$$P(S, t) = (E - S)^+ \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0 \quad , \quad 0 \leq S < S_f \quad (7.14)$$

$$P(S, t) > (E - S)^+ \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \quad , \quad S_f < S < \infty \quad (7.16)$$

$$P(S_f(t), t) = (E - S_f(t))^+ \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1 \quad (7.18)$$

$$P(S, 0) = (E - S)^+ \quad (7.19)$$

$$P(0, t) = E \quad (7.20)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0 \quad (7.21)$$

A condições (7.17)-(7.18) representam a continuidade da solução e da primeira derivada parcial com respeito a  $S$ . Vide em Wilmott et al (1993) , (1995) uma dedução intuitiva destas condições.

A desigualdade sobre  $(E - S)^+$  deve-se à condição (2.13), enquanto a desigualdade (7.14) vem do argumento de que o retorno do portfólio  $\Pi$  definido da seção 2.7 não pode ser maior do que a taxa de juros  $r$  para todo  $S \geq 0$ <sup>1</sup>.

Quando  $S < S_f(t)$ , a opção é exercida imediatamente, de modo que seu preço deve ser dado por (7.13). Quando  $S > S_f(t)$ , o portfólio  $\Pi$  não é afetado pelo exercício prematuro, fazendo com que  $P$  satisfaça a equação de *Black-Scholes* neste subdomínio.

<sup>1</sup>Observe também que  $P(S, t) = (E - S)^+$  satisfaz a inequação (7.14)

### 7.3 Formulação de Complementaridade

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dois operadores lineares associados às equações diferenciais lineares  $\mathcal{A}u = 0$  e  $\mathcal{B}u = 0$ . Considere o seguinte problema :

Encontrar  $u \in M$  tal que

$$(\mathcal{A}u)(\mathcal{B}u) = 0 \quad (7.22)$$

$$\mathcal{A}u \geq 0 \quad (7.23)$$

$$\mathcal{B}u \geq 0 \quad (7.24)$$

Estão incluídos no espaço  $M$  as condições de fronteira e de continuidade exigidas para a solução  $u$ . Vamos denominar o problema (7.22)-(7.24) como **formulação de complementaridade**<sup>2</sup>.

É conveniente formular assim um problema de fronteira livre pelo fato de que a fronteira livre, que é também uma incógnita, não precisa ser conhecida em problemas na forma (7.22)-(7.24).

O problema (7.13)-(7.21) na formulação de complementaridade é dado por:

Encontrar  $P = P(S, t) \in M$  tal que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP\right)(P - (E - S)^+) = 0 \quad (7.25)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP\right) \geq 0 \quad (7.26)$$

$$(P - (E - S)^+) \geq 0, \quad (7.27)$$

onde  $M$  é o espaço das funções  $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

$$u(S, 0) = (E - S)^+ \quad (7.28)$$

$$u(0, t) = E \quad (7.29)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} u(S, t) = 0 \quad (7.30)$$

Veremos no capítulo 9 como reescrever um problema na formulação de complementaridade como uma inequação variacional.

---

<sup>2</sup>Wilmott et al (1995) denomina este problema como Problema de Complementaridade Linear (LCP), mas reservamos esta designação para sistemas lineares.

## 7.4 Opções Americanas com Dividendos

No capítulo 2 vimos que as opções americanas de compra são idênticas às opções européias quando as ações não pagam dividendos. Vimos também a modificação da equação de *Black-Scholes* para ações com dividendos, cuja solução tende a reduzir o valor da opção.

A redução causada pelos dividendos pode fazer com que o preço de uma opção européia de compra fique abaixo do *payoff* a partir de um certo preço  $\bar{S}$  da ação, como nas opções de venda. Neste caso, o prêmio deverá ser diferente e um ponto ótimo de exercício será observado.

O problema associado às opções americanas de compra é formulado de modo análogo a (7.25-7.30):

Encontrar  $C = C(S, t) \in M'$  tal que

$$\left( \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r - \delta) S \frac{\partial C}{\partial S} + rC \right) (C - (S - E)^+) = 0 \quad (7.31)$$

$$\left( \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r - \delta) S \frac{\partial C}{\partial S} + rC \right) \geq 0 \quad (7.32)$$

$$(C - (S - E)^+) \geq 0, \quad (7.33)$$

onde  $M'$  é o espaço das funções  $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

$$u(S, 0) = (S - E)^+ \quad (7.34)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (7.35)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} u(S, t) = \lim_{S \rightarrow \infty} (S - E) \quad (7.36)$$

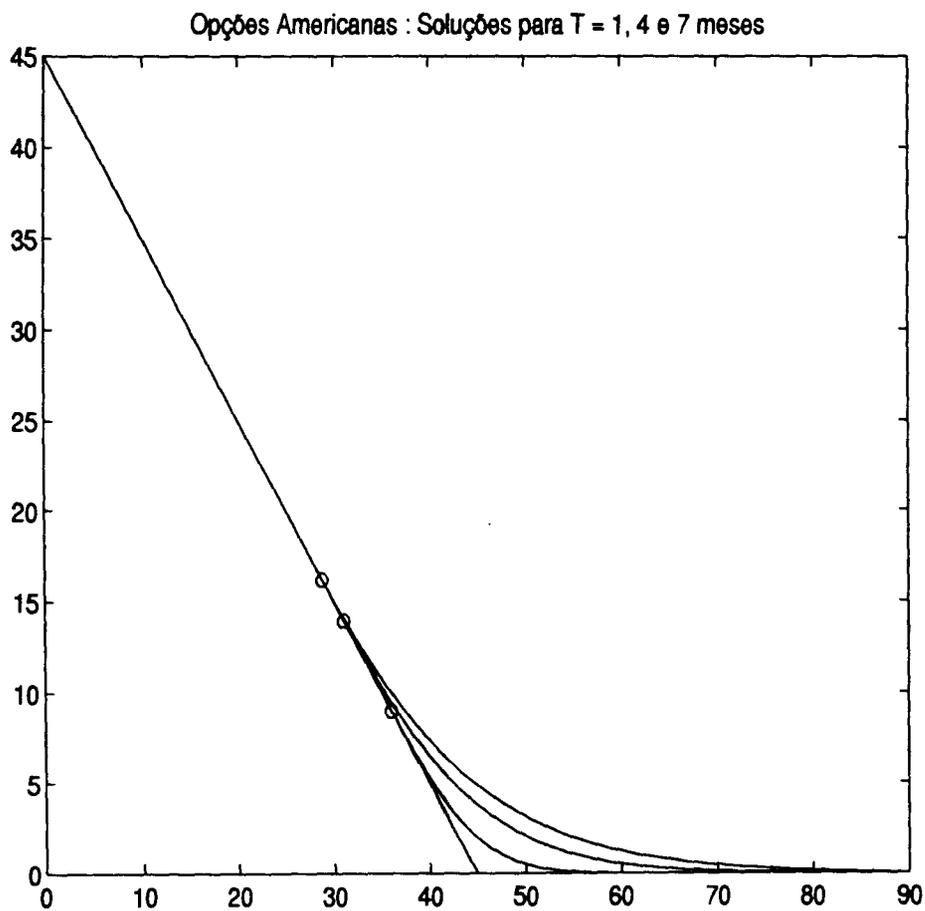
## 7.5 Observações

As referências básicas utilizadas neste capítulo foram Wilmott et al (1993), (1995) e Merton (1973).

Um terceiro tipo de formulação para opções americanas é baseado em problemas de tempo de parada ótimo. Vide Van Moerbeke (1976) e Myneni (1992). Esta formulação permite uma demonstração formal da continuidade da derivada parcial da função-prêmio com respeito ao preço.

O modelo de opções americanas de compra com dividendos é facilmente ajustado para determinar o preço de títulos conversíveis em ações com possibilidade de exercício prematuro. Vide Wilmott et al (1995).

A dedução da unicidade de fronteira livre a partir da convexidade da função-preço foi desenvolvida neste trabalho. Uma razão da verificação não aparecer na literatura é que esta unicidade tem forte apelo intuitivo, sendo aceita naturalmente. Em outros problemas de fronteira livre a fronteira não tem uma configuração tão simples, reforçando ainda mais a necessidade de métodos em que a fronteira é calculada *a posteriori*.



**Figura 7.1:** Exemplo de opção americana de venda os pontos em destaque representam a fronteira livre.

# Capítulo 8 :

## Solução por Diferenças Finitas

Seguindo a abordagem dos capítulos 4 e 5, vamos calcular o prêmio de uma opção americana utilizando métodos de diferenças finitas. Embora estes métodos aproximem diretamente as equações, a fronteira livre não fará parte das incógnitas do problema aproximado. Vimos que o problema considerado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP\right) \geq 0 \quad (8.1)$$

$$(P - (E - S)^+) = (P - g(S)) \geq 0 \quad (8.2)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP\right)(P - g(S)) = 0 \quad (8.3)$$

$$u(S, 0) = g(S) \quad (8.4)$$

$$u(0, t) = E \quad \text{e} \quad \lim_{S \rightarrow \infty} u(S, t) = 0 \quad (8.5)$$

Novamente, aproximamos o domínio  $\Omega = [0, L] \times [0, T]$  por uma malha uniforme dada por  $\Omega_h = \{(S_i, t_n) ; 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq m\}$ , com  $S_i = ih$  e  $t_n = nk$ . Conforme o capítulo 4, utilizamos as notações  $f_i^n = f(S_i, t_n)$  e  $g_k = g(S_k)$ . Denotamos por  $U_i^n$  a solução aproximada no ponto  $(S_i, t_n) \in \Omega_h$ .

### 8.1 Método Explícito

No método explícito com diferenças centradas no espaço, aproximamos as equações (8.1)-(8.5) utilizando as diferenças finitas dadas em (4.1):

$$U_i^{n+1} \geq Y_i = c_{-1}U_{i-1}^n + c_0U_i^n + c_1U_{i+1}^n \quad (8.6)$$

$$U_i^{n+1} \geq g_i \quad (8.7)$$

$$(U_i^{n+1} - Y_i)(U_i^{n+1} - g_i) = 0 \quad (8.8)$$

$$(1 \leq n \leq m - 1, \quad 2 \leq i \leq N - 1)$$

$$U_i^0 = g_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (8.9)$$

$$U_1^{n+1} = E \quad \text{e} \quad U_N^{n+1} = 0, \quad 1 \leq n \leq m \quad (8.10)$$

Os coeficientes  $c_j = c_j(i)$  são dados por (4.4). Observemos que se  $Y_i > g_i$ , então  $U_i^{n+1} \geq Y_i > g_i$ . De (8.8),  $U_i^{n+1} = Y_i$ . Se  $Y_i < g_i$ , segue que  $U_i^{n+1} > Y_i$  e de (8.8),  $U_i^{n+1} = g_i$ . No caso  $Y_i = g_i$ , temos  $U_i^{n+1} = Y_i = g_i$ .

Portanto, a solução  $(U_i^{n+1})_{i=1}^N$  do sistema (8.6)-(8.10) também é solução de (8.9)-(8.10) mais as seguintes equações:

$$Y_i = c_{-1}U_{i-1}^n + c_0U_i^n + c_1U_{i+1}^n \quad (8.11)$$

$$U_i^{n+1} = \max\{Y_i, g_i\} \quad (8.12)$$

Vamos verificar a equivalência observando que de (3.12) temos que  $U_i^{n+1} \geq Y_i$  e  $U_i^{n+1} \geq g_i$ , de modo que (8.6) e (8.7) são satisfeitas. Além disso,  $U_i^{n+1} = Y_i$  ou  $U_i^{n+1} = g_i$ , resultando em (8.8).

Podemos assim construir um algoritmo segundo as equações (8.9)-(8.12), que calculam a cada nível de tempo a solução  $(U_i^{n+1})_{i=1}^N$  em função da restrição  $g_i$  e da solução  $(U_i^n)_{i=1}^N$  do nível de tempo anterior.

## 8.2 Método de Crank-Nicolson

Utilizando as aproximações dadas por (4.9) em (8.1)-(8.5), obtemos:

$$b_{-1}U_{i-1}^{n+1} + b_0U_i^{n+1} + b_1U_{i+1}^{n+1} \geq Z_i^n = c_{-1}U_{i-1}^n + c_0U_i^n + c_1U_{i+1}^n \quad (8.13)$$

$$U_i^{n+1} \geq g_i \quad (8.14)$$

$$(b_{-1}U_{i-1}^{n+1} + b_0U_i^{n+1} + b_1U_{i+1}^{n+1} - Z_i^n)(U_i^{n+1} - g_i) = 0 \quad (8.15)$$

$$U_i^{n+1}0 = g(i) \quad (8.16)$$

$$(1 \leq n \leq m-1, \quad 2 \leq i \leq N-1)$$

Os coeficientes  $b_k$  e  $c_k$  são dados por (4.11). Vamos definir os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= (U_{i+1}^{n+1}) \quad 1 \leq i \leq N-2 \\ g &= (g_{i+1}) \quad 1 \leq i \leq N-2 \end{aligned} \quad (8.17)$$

De (8.13), definimos a seguinte matriz:

$$C = (C_{i,j}), \quad C_{i,j} = \begin{cases} b_{-1}, & j = i-1 \\ b_0, & j = i \\ b_1, & j = i+1 \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N-2 \quad (8.18)$$

As componentes do vetor-solução  $u^{n+1}$  são os valores da solução nos pontos interiores do domínio. Vamos formar um vetor com as informações do passo anterior. De (8.13), temos que:

$$b_0 U_2^{n+1} + b_1 U_3^{n+1} \geq Z_2^n - b_{-1} U_1^{n+1} = Z_2^n - b_{-1} g_1 \quad (8.19)$$

$$b_{-1} U_{N-2}^{n+1} + b_0 U_{N-1}^{n+1} \geq Z_{N-1}^n - b_1 U_N^{n+1} = Z_{N-1}^n - b_1 g_N \quad (8.20)$$

Podemos assim definir:

$$b^n = \begin{pmatrix} Z_2^n \\ Z_3^n \\ \vdots \\ Z_{N-2}^n \\ Z_{N-1}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{-1} g_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 g_N \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

O problema aproximado pode ser então escrito na formulação de um Problema de Complementaridade Linear (LCP):

$$\begin{cases} C u^{n+1} \geq b^n \\ u^{n+1} \geq g \\ (C u^{n+1} - b^n)^t (u^{n+1} - g) = 0 \\ u^0 = g \end{cases} \quad (8.22)$$

Discutiremos este problema num contexto de inequações variacionais, no capítulo seguinte.

### 8.3 Métodos Adaptados

Dentre as adaptações desenvolvidas no capítulo 5, é natural tentarmos aquela que proporcionou os melhores resultados, a adaptação para malhas não-uniformes E-concentrantes.

Outra adaptação particularmente interessante é a transformação para a equação de difusão. A razão por esta preferência é a simetria proporcionada ao sistema. Diversos métodos numéricos para solução de LCPs foram desenvolvidos exclusivamente para matrizes simétricas.

As adaptações são realizadas de modo análogo aos métodos para solução da equação de *Black-Scholes*. Devemos enfatizar que na transformação para

a equação de difusão, a restrição  $g_i$  passa a depender do nível de tempo atual, visto que a função *payoff* é transformada para:

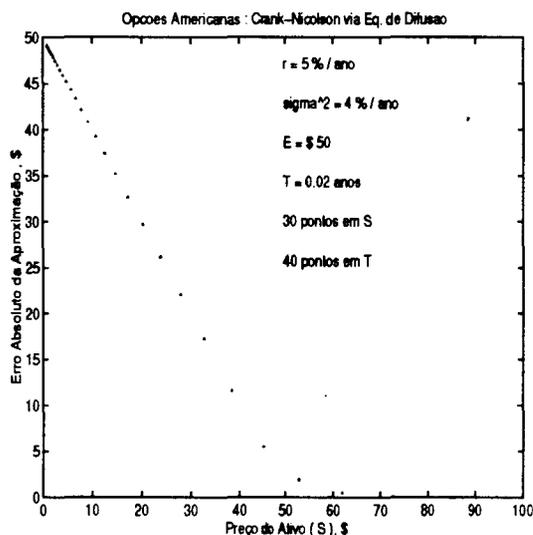
$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}(K+1)^2\tau} (e^{\frac{1}{2}(K-1)x} - e^{\frac{1}{2}(K+1)x}) + \quad (8.23)$$

As opções americanas apresentam uma facilidade com relação às opções européias que pode ser explorada: as condições de contorno de uma das extremidades é determinada pelo payoff, que é conhecido com precisão. No caso de opções de venda, podemos impor valores **exatos** da condição de contorno em pontos mais distantes da extremidade  $S = 0$ . Mais precisamente, a proposição 7.1 estabelece que:

$$P(S^*, t) > p(S^*, t) \quad \forall S^* < E(1 - e^{-r(T-t)}) \quad (8.24)$$

Temos portanto que  $u(S, t) = (S^* - E)^+$  em  $S^* = E(1 - e^{-r(T-t)})$ . O ponto  $S^*$  substitui perfeitamente a extremidade  $S = 0$ , pois sabemos o valor de  $P(S, t)$  neste ponto para todo  $t \leq T$ .

Isto representa uma vantagem significativa, por amenizar o problema de concentração de pontos nas proximidades de  $S = 0$  nas malhas transformadas, como mostram as figuras a seguir:



**Figura 8.1:** Equação de Difusão com contorno em  $S \approx 0$ .

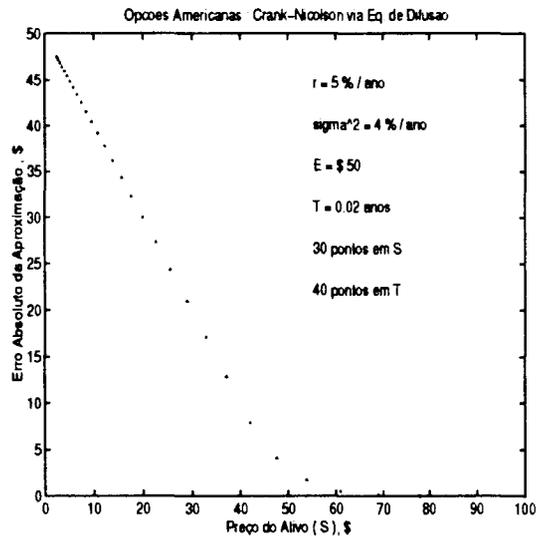


Figura 8.2: Equação de Difusão com contorno em  $S = \bar{S}$ .

## 8.4 Observações

Os métodos de diferenças finitas para opções americanas são apresentados em Brennan e Schwartz (1978) (método explícito) e Wilmott et al (1995) (método explícito e implícito para o problema transformado para a equação do calor).

A análise de convergência dos métodos de diferenças finitas não é uma tarefa simples. Wilmott et al (1995) aproveita as propriedades de convergência provenientes do método de elementos finitos, afirmando que o método de diferenças finitas é um método de elementos finitos com uma escolha particular da regra de quadratura.

# Capítulo 9 :

## Inequações Variacionais Lineares

Este capítulo tem por objetivo descrever a teoria de inequações variacionais do tipo linear de forma genérica, afastando-se no momento do problema de precificação.

As duas seções introdutórias apresentam um resumo de diversos resultados clássicos de análise funcional e um problema simples cujo modelo é formulado como uma inequação variacional.

As quatro seções seguintes apresentam os principais resultados teóricos de existência e unicidade para problemas estacionários, seguidos de métodos numéricos que surgem da construção de tais demonstrações.

Apresentamos as inequações variacionais para problemas de evolução do tipo parabólico como uma extensão do caso estacionário; embora as questões de existência e unicidade de solução de problemas parabólicos sejam muito mais complexas, os métodos de aproximação obtidos para problemas estacionários são estendidos naturalmente para esta classe de problemas.

### 9.1 Conceitos Iniciais

A teoria envolvida com inequações variacionais tem como fundamento algumas definições e teoremas clássicos de Análise Funcional, que enunciamos a seguir. Todos os resultados a seguir são apresentados na versão para espaços vetoriais reais.

**Definição 9.1 :** Sejam  $(H_1, \|\cdot\|_1)$ ,  $(H_2, \|\cdot\|_2)$  espaços normados. Dizemos que um operador  $L : H_1 \rightarrow H_2$  é **limitado** se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|L(u)\|_2 \leq C\|u\|_1 \quad \forall u \in H \quad (9.1)$$

O espaço  $B(H_1, H_2)$  dos operadores lineares limitados é um espaço normado com a seguinte norma:

$$\|L\|_{B(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1} \frac{\|L(u)\|_2}{\|u\|_1} \quad (9.2)$$

**Definição 9.2 :** Seja  $(H, \|\cdot\|)$  um espaço normado. Dizemos que um funcional  $L : H \rightarrow \mathbb{R}$  é **limitado** se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|L(u)| \leq C\|u\| \quad \forall u \in H \quad (9.3)$$

Denominamos o espaço  $H'$  dos funcionais lineares limitados como o **espaço dual** de  $H$ .  $H'$  é um espaço normado com a seguinte norma:

$$\|L\|_{H'} = \sup_{u \in H} \frac{|L(u)|}{\|u\|} \quad (9.4)$$

**Definição 9.3 :** Sejam  $(H_1, \|\cdot\|_1)$ ,  $(H_2, \|\cdot\|_2)$  espaços normados. Dizemos que uma forma bilinear  $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_1\|v\|_2 \quad \forall u \in H_1, v \in H_2 \quad (9.5)$$

A norma de uma forma bilinear limitada  $a$  é dada por

$$\|a\| = \sup_{u, v} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_1\|v\|_2} \quad (9.6)$$

**Teorema 9.1 (Teorema de Representação de Riesz):** Todo funcional linear e limitado  $L$  de um espaço de Hilbert  $H$  pode ser representado em termos do produto interno da seguinte forma:

$$F(x) = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in H, \quad (9.7)$$

sendo que  $f \in H$  é determinado unicamente por  $L$  e  $\|f\| = \|L\|_{H'}$ .

**Teorema 9.2 (Teorema de Representação de Riesz Generalizado):** Sejam  $H_1, H_2$  espaços de Hilbert e  $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear limitada. A forma  $a(\cdot, \cdot)$  tem uma representação dada por:

$$a(x, y) = \langle S(x), y \rangle, \quad (9.8)$$

sendo que  $S : H_1 \rightarrow H_2$  é operador linear limitado.  $S$  é unicamente determinado por  $a$  e  $\|S\| = \|a\|$ .

**Teorema 9.3 :** Seja  $V$  um espaço de Hilbert e  $K \neq \emptyset$  um conjunto convexo e fechado. Dado  $x \in V$ , existe um único elemento  $z \in K$  tal que

$$\delta = \inf_{y \in K} \|x - y\| = \|x - z\| \quad (9.9)$$

Além disso,  $r = x - z$  é ortogonal a  $K$ . O vetor  $z$  é conhecido como a **projeção** de  $x$  em  $K$  e será denotado por  $z = P_K x$ .

**Proposição 9.1 :** Se  $z_1 = P_K x$ , então  $\langle x - z, y - z \rangle \leq 0$  para todo  $y \in K$

**Proposição 9.2 :** Se  $z_1 = P_K x_1$  e  $z_2 = P_K x_2$ , então  $\|z_1 - z_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$

**Definição 9.4 :** Seja  $(x_n)$  uma sequência em um espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  e  $X'$  o dual de  $X$ . Dizemos que  $x_n \xrightarrow{w} x$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(x_n) = L(x) \quad \forall L \in X' \quad (9.10)$$

**Lema 9.1 :** Seja  $(x_n)$  uma sequência contida em um espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$ . Se  $\|x_n\| \leq \infty$ , existe  $x \in X$  tal que  $x_n \xrightarrow{w} x$ .

**Lema 9.2 :** Seja  $K$  um subconjunto convexo e fechado de um espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  e  $(x_n)$  uma sequência contida em  $K$ . Se  $x_n \xrightarrow{w} x$ , então  $x \in K$ .

**Teorema 9.4 (Teorema do Ponto Fixo<sup>1</sup>):** Seja  $(H, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach e  $T : H \rightarrow H$  uma contração em  $H$ , ou seja, existe  $\gamma < 1$  tal que

$$\|Tu - Tv\| \leq \gamma \|u - v\|. \quad (9.11)$$

Existe um único ponto  $u^* \in H$  tal que  $Tu^* = u^*$ , ou seja,  $T$  tem um único ponto fixo  $u^*$ .

**Teorema 9.5 (Lema de Lax-Milgram):** Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço de Hilbert com norma  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ ,  $b(\cdot)$  um funcional linear limitado e  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear tal que :

(i)  $\exists C > 0$  ;  $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$  ( $a(\cdot, \cdot)$  é contínua)

(ii)  $\exists \alpha > 0$  ;  $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$  ( $a(\cdot, \cdot)$  é coerciva)

Existe uma única solução  $u^*$  do seguinte problema:

$$a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in V \quad (9.12)$$

---

<sup>1</sup> Este teorema é válido para espaços métricos completos.

## 9.2 Problema do Obstáculo

O Problema do Obstáculo é um exemplo clássico de inequações variacionais. De modo análogo ao caso de problemas variacionais (vide Baiocchi e Capelo (1982)), vamos mostrar as relações de equivalência entre as várias formulações do problema do obstáculo: inequação variacional, problema de complementaridade linear e problema de minimização com restrições.

### 9.2.1 Introdução

Inicialmente, vamos considerar o problema na forma unidimensional:

(D) Encontrar  $u \in H_o^1[0, L]$  tal que, dado  $\psi \in H_o^1[0, L]$  :

$$\begin{cases} -u''(x) \geq 0 & , 0 < x < L \quad (\text{D1}) \\ u(x) \geq \psi(x) & , 0 < x < L \quad (\text{D2}) \\ [u(x) - \psi(x)]u''(x) = 0 & , 0 < x < L \quad (\text{D3}) \end{cases}$$

A solução  $u(x)$  descreve em condições ideais a deformação de um fio elástico com massa desprezível quando suas extremidades são presas em dois pontos distintos  $x = 0$  e  $x = L$  e há uma barreira ou **obstáculo**  $\psi(x)$  impedindo que o fio ligue os dois pontos na forma de uma linha reta.

A condição (D3) é equivalente à seguinte:

$$u(x) > \psi(x) \Rightarrow u''(x) = 0 \quad (9.13)$$

De fato, se  $u$  satisfaz (D3) e  $u(x) - \psi(x) > 0$ , então  $u''(x) = 0$ . Por outro lado, seja  $u$  satisfazendo (9.13) e  $x \in [0, L]$ . Se  $u(x) - \psi(x) = 0$ ,  $u$  satisfaz (D3). Se  $u(x) - \psi(x) \neq 0$ , de (D2),  $u(x) - \psi(x) > 0$  e portanto  $u''(x) = 0$ . Portanto,  $[u(x) - \psi(x)]u''(x) = 0 \quad \forall x \in [0, L]$ .

Este problema tem uma solução intuitiva : o fio ou permanece esticado (na região do domínio em que  $u'' \equiv 0$ ) ou contorna o obstáculo (na região em que  $u \equiv \psi$ ), preservando a inclinação na passagem entre as regiões de contato.

Observe que a solução pode ser separada em duas regiões: uma região  $I$  em que  $u(x) = \psi(x)$  e a região complementar  $I^c$  em que  $u(x) > \psi(x)$ , ou segundo (9.13),  $u''(x) = 0$ . Deste modo, definindo

$$I = \{x \in [0, l] ; u(x) = \psi(x)\} , \quad (9.14)$$

podemos reescrever o problema (D1)-(D3) da seguinte forma:

$$\begin{cases} u(x) = \psi(x) & , x \in \bar{I} & \text{(D4)} \\ -u''(x) = 0 & , x \in I^c & \text{(D5)} \\ u(x) = \psi(x) & , x \in \partial I^c & \text{(D6)} \end{cases}$$

A condição de continuidade (D6), resultante do fato de que  $u \in H_o^1(\Omega)$ , funciona como uma **condição de contorno** para a equação (D5). A formulação (D4)-(D6) expressa o problema (D) como um **problema de fronteira livre**.

Embora seja uma formulação mais familiar do ponto de vista de equações diferenciais, o problema de fronteira livre requer a determinação da fronteira  $\partial I^c$  do conjunto  $I^c$ , denominada fronteira livre, para que possamos calcular a solução. Assim, a fronteira livre passa a ser mais uma incógnita do problema.

Cabe observar que a existência da solução  $u$  pode ser comprometida se a função  $\psi$  não estiver no mesmo espaço de  $u$ , como no exemplo acima. Por exemplo, se  $\psi(0), \psi(L) > 0$ , as condições (D2) e (D4) são incompatíveis e a solução não existe ( vide Baiocchi e Capelo (1982) ).

Estabelecemos a seguir uma definição conveniente para desigualdades entre funções em um dado ponto  $x_o$  do domínio  $[0, 1]$ .

Sejam  $u, v \in H_o^1([0, L])$  tais que  $u \geq v$ . Dizemos que  $u > v$  em  $x_o \in [0, L]$  se existem  $\rho > 0$  e  $\alpha_{x_o} \in \mathcal{D}_o([0, L])^+$  tais que  $u - \alpha_{x_o} \geq v$  e :

$$\begin{cases} \alpha_{x_o}(x) > 0 & , |x - x_o| < \rho \\ \alpha_{x_o}(x) = 0 & , |x - x_o| \geq \rho \end{cases} \quad (9.15)$$

Dizemos que  $u \equiv v$  em  $x_o$  quando não existem  $\rho > 0$ ,  $\alpha_{x_o}$  satisfazendo (9.15), ou seja, para toda função  $\alpha \in \mathcal{D}_o([0, L])^+$  existe  $M = M(\alpha) > 0$  tal que:

$$u - \alpha \geq v \Rightarrow \alpha(x) = 0 \quad , \quad |x - x_o| < M \quad (9.16)$$

### 9.2.2 Problema de Minimização

Dada que a única energia envolvida no sistema fio-obstáculo deve-se à deformação elástica do fio, o **Princípio da Energia Mínima** nos garante que a deformação  $u(x)$  do fio é aquela que minimiza a energia potencial elástica entre todas as deformações admissíveis. Deste modo, chegamos à seguinte formulação:

(M) Encontrar  $u \in K$  tal que  $J(u) \leq J(v) \forall v \in K$ ,

Sendo  $K$  um conjunto convexo dado por  $K = \{v \in H_0^1[0, L]; v \geq \psi\}$  e  $J(\cdot)$  um funcional convexo dado por:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^L v'(x)^2 dx \quad (9.17)$$

A existência e unicidade de solução para (M) é garantida pela convexidade do conjunto  $K$  e da convexidade estrita do funcional  $J$ .

### 9.2.3 Inequação Variacional

Um problema de minimização pode ser resolvido por métodos iterativos de busca (que geram uma sequência  $(u^k)$  tal que  $J(u^{k+1}) \leq J(u^k)$ ) ou calculando o elemento  $u$  que satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem (que são suficientes quando  $J$  é estritamente convexo). O segundo modo nos leva a uma nova formulação, no caso uma inequação variacional.

Consideremos inicialmente uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $x_o$  é um mínimo local de  $f$ ,  $x_o$  deverá satisfazer:

$$f'(x_o) = 0 \quad , x_o \in (a, b) \quad (9.18)$$

$$f'(x_o) \geq 0 \quad , x_o = a \quad (9.19)$$

$$f'(x_o) \leq 0 \quad , x_o = b \quad (9.20)$$

Agora, se  $u \in K$  é o mínimo global de  $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ , e  $v$  é um elemento qualquer de  $K$ , podemos associar a  $J$  a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$g(\lambda) = J((1 - \lambda)u + \lambda v) \quad (9.21)$$

Temos que  $w_\lambda = (1 - \lambda)u + \lambda v \in K$  e  $J(u) \leq J(w(\lambda)) \forall \lambda \in [0, 1]$ . Deste modo,  $g(\cdot)$  tem um mínimo em  $\lambda = 0$ . De (2.8),

$$g'(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [J((1 - \lambda)u + \lambda v) - J(u)] \geq 0 \quad (9.22)$$

É conveniente expressar o funcional  $J(\cdot)$  na seguinte forma:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) \quad , \quad a(u, v) = \int_0^L u'v' dx \quad (9.23)$$

Utilizando a bilinearidade de  $a(.,.)$ , temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}[J((1-\lambda)u + \lambda v) - J(u)] &= \frac{1}{2\lambda}[(1-\lambda)^2 a(u, u) + \\ &\quad + 2\lambda(1-\lambda)a(u, v) + \lambda^2 a(v, v) - a(u, u)] = \\ &= -a(u, u) + \frac{\lambda}{2}a(u, u) + (1-\lambda)a(u, v) + \frac{\lambda}{2}a(v, v) = \\ &= a(u, v - u) + \frac{\lambda}{2}[a(u, u) - 2a(u, v) + a(v, v)] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda}[J((1-\lambda)u + \lambda v) - J(u)] = a(u, v - u) + \frac{\lambda}{2}a(u - v, u - v) \quad (9.24)$$

Portanto,  $g'(0) = a(u, v - u)$ , de modo que a solução de (M) também é solução do seguinte problema:

$$(V) \text{ Encontrar } u \in K \text{ tal que } a(u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

Esta é a formulação do problema de obstáculo como inequação variacional<sup>2</sup>. Assim como no problema de minimização, a formulação de (D) como uma inequação variacional não depende diretamente da fronteira livre, algo bastante atrativo quando a fronteira livre esperada é complexa.

Para estes problemas, a solução é obtida diretamente, e a fronteira livre é calculada a partir da solução, localizando os pontos que separam localmente a solução em duas regiões, uma pertencendo ao conjunto  $I$ , outra pertencendo ao conjunto  $I^c$ . No exemplo acima, resolvemos a inequação variacional correspondente ao invés de resolver diretamente o problema de fronteira livre.

Obtemos a equivalência entre (V) e (M) verificando que uma solução  $u$  de (V) também é solução de (M). De fato, seja  $v \in K$  arbitrário e  $w = (1-\lambda)u + \lambda v \in K$ . Temos de (9.24) que:

$$J(w) - J(u) = \lambda a(u, v - u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v - u, v - u) \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (9.25)$$

Assim,  $J(w) \geq J(u) \quad \forall w \in K$ , ou seja,  $u$  é o mínimo global de  $J$ .

---

<sup>2</sup>A notação (V) é característica de problemas variacionais, como (9.12). Como estes são pouco frequentes no trabalho, não há riscos de confusão das notações.

### 9.2.4 Equivalência entre (V) e (D)

Seja  $u \in H_o^1([0, L])$  a solução do problema (V). Como  $u \in K$ , temos que  $u$  satisfaz (D2).

Vamos admitir que  $u \in H_o^2([0, L])$ , de modo que  $u''$  seja integrável. Como  $u \in K$ , temos que  $u \geq \psi$  e  $u(0) = u(L) = 0$ . Seja  $\bar{v} = u(x) + \varphi(x)$ , com  $\varphi(x) \in \mathcal{D}_o([0, L])^+$ . Observemos que  $\bar{v} \in H_o^1([0, L])$  e  $v(x) \geq u(x) \geq \psi(x)$ , ou seja,  $\bar{v} \in K$ . Deste modo:

$$0 \leq a(u, \bar{v} - u) = \int_0^L u'(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^L u''(x)\varphi(x)dx \quad (9.26)$$

Portanto, para toda função  $\varphi(x) \in \mathcal{D}_o([0, L])^+$ , temos que:

$$\int_0^L (-u''(x))\varphi(x)dx \geq 0 \quad (9.27)$$

Temos assim que  $-u''(x) \geq 0$  para todo  $x \in [0, L]$ , verificando a condição (D1).

Vamos obter (D3) a partir da condição equivalente (9.13). Seja  $x_o \in [0, L]$  tal que  $u(x_o) > \psi(x_o)$ . Então existem  $\rho > 0$  e  $\alpha \in \mathcal{D}_o([0, L])^+$  tais que  $u - \alpha \in K$  e :

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0 & , |x - x_o| < \rho \\ \alpha(x) = 0 & , |x - x_o| \geq \rho \end{cases} \quad (9.28)$$

Escolhendo  $\bar{v} = u - \alpha$ , obtemos de modo semelhante a (9.26) a seguinte desigualdade:

$$0 \geq \int_0^L (-u''(x))\alpha(x)dx = \int_{|x-x_o|<\rho} (-u''(x))\alpha(x)dx \quad (9.29)$$

Como  $(-u''(x)) \geq 0$  e  $\alpha \geq 0$ , temos que:

$$\int_{|x-x_o|<\rho} (-u''(x))\alpha(x)dx = 0 \quad (9.30)$$

Como  $\alpha(x) > 0$  para  $|x - x_o| < \rho$ , temos que  $u''(x) = 0$  para  $|x - x_o| < \rho$ , ou seja,  $u''(x_o) = 0$ .

De fato, suponha que exista um subconjunto  $A \subset \{x \in [0, L] ; |x - x_o| < \rho\}$  de medida positiva tal que  $u''(x) > 0$  para todo  $x \in A$ . De (9.28), temos que  $\alpha(x) > 0 \forall x \in A$ . Isto nos leva à seguinte contradição:

$$0 = \int_{|x-x_o|<\rho} (-u''(x))\alpha(x)dx \geq \int_A (-u''(x))\alpha(x)dx > 0 \quad (9.31)$$

Portanto,  $u(x_o) > v(x_o)$  implica  $u''(x_o) = 0$ .

Vamos demonstrar a recíproca. Seja  $u \in C_o^2[0, L] \in H_o^1([0, L])$  solução do problema (D). De (D2),  $u \in K$ . Basta portanto verificar que

$$\int_0^I u'(x)[v'(x) - u'(x)]dx \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (9.32)$$

Considere o conjunto  $I$  dado por (9.14). Como  $u''(x) = 0$  se  $x \notin I$ :

$$\begin{aligned} \int_0^I u'(x)[v'(x) - u'(x)]dx &= \int_0^I (-u''(x))[v(x) - u(x)]dx \\ \int_0^I u'(x)[v'(x) - u'(x)]dx &= \int_I (-u''(x))[v(x) - \psi(x)]dx \end{aligned}$$

Temos que  $-u''(x) \geq 0$ . Se  $v \in K$ , então  $v \geq \psi$ , logo:

$$\int_0^I u'(x)[v'(x) - u'(x)]dx = \int_I (-u''(x))[v(x) - \psi(x)]dx \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (9.33)$$

### 9.3 Existência e Unicidade

Vamos abordar questões de existência e unicidade de solução para inequações variacionais abstratas, de modo que os resultados sejam válidos em qualquer espaço vetorial real. Vamos considerar também propriedades gerais para a forma bilinear utilizada, de modo que possamos estender os resultados para uma larga classe de problemas.

Vamos agora apresentar o problema. Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço de Hilbert real com norma  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$  e  $K \subset V$  um subconjunto convexo fechado de  $V$ . Seja  $V'$  o espaço dual de  $V$ .

Seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear contínua :

- (i)  $a(u + \lambda w, v) = a(u, v) + \lambda a(w, v)$
- (ii)  $a(u, v + \lambda w) = a(u, v) + \lambda a(u, w)$
- (iii)  $\exists C > 0 ; |a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$

Seja  $b(\cdot)$  um funcional linear limitado:

- (iv)  $b(u + \lambda w) = b(u) + \lambda b(w)$
- (v)  $|b(u)| \leq B\|u\|$

Seja  $f$  um elemento de  $V$  associado ao funcional linear  $b \in V'$  com norma  $\|f\| = \|b\|_{V'} \leq B$ , segundo o Teorema 1.1 .

Consideremos o seguinte problema:

$$\text{Encontrar } u \in K \text{ tal que } a(u, v - u) \geq b(v - u) \quad \forall v \in K$$

O problema (V) é frequentemente escrito na seguinte forma equivalente:

$$(V) \text{ Encontrar } u \in K \text{ tal que } a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K$$

Esta será a representação de uma inequação variacional abstrata que utilizaremos ao longo do texto.

Se  $K = V$ , o problema reduz-se a uma igualdade, que corresponde ao problema variacional clássico. De fato, suponha que exista  $v \in V$  tal que

$$a(u, v - u) > \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in V \quad (9.34)$$

Tomando  $w = 2u - v \in V$ , temos que

$$a(u, w - u) = a(u, u - v) < \langle f, u - v \rangle = \langle f, w - u \rangle, \quad (9.35)$$

o que contradiz (V). Portanto, devemos ter  $a(u, v - u) = \langle f, v - u \rangle$ , o que equivale a  $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ ,  $\forall v \in V$ . A existência e unicidade de solução de (V) no caso em que  $K = V$  é verificada pelo Lema de Lax-Milgram, no caso em que  $a(., .)$  é coerciva.

Discutiremos o problema de existência e unicidade da solução de (V), considerando diversas hipóteses sobre a forma bilinear.

Verificamos a seguir a existência e unicidade no caso em que  $a(., .)$  é coerciva, usando argumentos análogos ao do Teorema 9.5 .

### 9.3.1 1o. Caso: Forma Bilinear Coerciva

**Teorema 9.6 (Lions-Stampacchia):** Seja  $a(., .)$  uma forma bilinear satisfazendo:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad (9.36)$$

Existe uma única solução  $u^* \in K$  de (V). Além disso, a solução varia continuamente com o elemento  $f \in V$ .

*Demonstração :*

(I) Continuidade com respeito a  $f$ :

Sejam  $u_i \in K$  e  $f_i \in V$ ,  $i = 1, 2$ , tais que

$$a(u_i, v - u_i) \geq \langle f_i, v - u_i \rangle \quad \forall v \in V, \quad i = 1, 2 \quad (9.37)$$

Escolhendo  $v = u_2$  para  $i = 1$ ,  $v = u_1$  para  $i = 2$  e somando as desigualdades, obtemos:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq |\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle| \quad (9.38)$$

Usando (9.36) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\| \quad (9.39)$$

(II) Unicidade:

Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  sejam soluções de (V). Fixando  $f_1 = f_2 = f$  em (9.39), obtemos

$$\|u_1 - u_2\| \leq 0 \quad (9.40)$$

Portanto,  $\|u_1 - u_2\| = 0$ , ou seja,  $u_1 = u_2$ .

(III) Existência:

Seja  $A : V \rightarrow V$  um operador linear limitado associado a  $a(., .)$  de acordo com o Teorema 9.2:

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle, \quad \|A\| = \|a\| \quad (9.41)$$

Vamos inicialmente demonstrar a existência da solução para  $a(u, v) = \langle u, v \rangle$ . Neste caso, o problema (V) equivale a encontrar  $u \in V$  tal que:

$$\langle u - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (9.42)$$

Observe que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u - f, v - u \rangle = \langle u - f, v - f \rangle - \|u - f\|^2 \\ 0 &\leq (\|v - f\| - \|u - f\|) \|u - f\| \end{aligned} \quad (9.43)$$

Assim, o problema (V) equivale a encontrar  $u \in V$  tal que:

$$\|v - f\| \geq \|u - f\| \quad \forall v \in K \quad (9.44)$$

Pelo Teorema 9.3, o problema dado por (9.44) tem solução única  $u$  que corresponde à **projeção ortogonal**  $P_K f$  de  $f$  no conjunto  $K$ . Para verificar a existência da solução para  $a(., .)$  genérico, vamos utilizar o seguinte lema:

**Lema 9.3 :** Para todo  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \rho < 2\alpha/\|A\|^2$ , existe  $\gamma \in ]0, 1[$  tal que

$$|\langle u, v \rangle - \rho a(u, v)| \leq \gamma \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V \quad (9.45)$$

*Demonstração :*

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle - \rho a(u, v)| &= |\langle u, v \rangle - \rho \langle A(u), v \rangle| = |\langle u - \rho A(u), v \rangle| \\ |\langle u, v \rangle - \rho a(u, v)| &\leq \|u - \rho A(u)\| \|v\| \end{aligned} \quad (9.46)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \|u - \rho A(u)\|^2 &= \|u\|^2 - 2\rho \langle A(u), u \rangle + \rho^2 \|A(u)\|^2 \\ \|u - \rho A(u)\|^2 &= \|u\|^2 - 2\rho \alpha + \rho^2 \|A(u)\|^2 \\ \|u - \rho A(u)\|^2 &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \|u\|^2 \end{aligned} \quad (9.47)$$

Deste modo,

$$|\langle u, v \rangle - \rho a(u, v)| \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \|u\| \|v\| = \gamma \|u\| \|v\| \quad (9.48)$$

Como  $\|u - \rho A(u)\| \geq 0$ , temos que  $\gamma \geq 0$ . Além disso, observando que  $\gamma$  é uma função quadrática com respeito a  $\rho$ , podemos verificar que  $\gamma < 1$  para  $0 < \rho < 2\alpha/\|A\|^2$ .

□

Para  $0 < \rho < 2\alpha/\|A\|^2$ , definimos  $\Phi_u(.) \in V'$  por

$$\Phi_u(v) = \langle u, v \rangle - \rho a(u, v) + \rho \langle f, v \rangle \quad (9.49)$$

Pelo Lema 9.3, podemos verificar que  $\Phi_u(.)$  é um funcional limitado:

$$|\Phi_u(v)| \leq |\langle u, v \rangle - \rho a(u, v)| + |\rho \langle f, v \rangle| \leq (\gamma \|u\| + \rho B) \|v\| \quad (9.50)$$

Seja  $\phi_u \in V$  associado a  $\Phi_u(\cdot)$  com norma  $\|\phi_u\| = \|\Phi_u\|_{V'}$ , segundo o Teorema 9.1 . Já demonstramos que o problema a seguir tem solução única :

$$a(w, v - w) = \langle w, v - w \rangle \geq \langle \phi_u, v - w \rangle \quad \forall v \in K \quad (9.51)$$

Vamos definir um operador  $T : K \rightarrow K$  que associa a todo  $u \in K$  a solução  $w = P_K \phi_u$  de (9.51). Pela Proposição 9.2,

$$\|Tu - Tw\| = \|P_K \phi_u - P_K \phi_w\| \leq \|\phi_u - \phi_w\| \quad (9.52)$$

Novamente pelo lema 9.3,

$$|\Phi_u(v) - \Phi_w(v)| \leq |\langle u - w, v \rangle - \rho a(u - w, v)| \leq \gamma \|u - w\| \|v\| \quad (9.53)$$

Deste modo,

$$\|\phi_u - \phi_w\| = \|\Phi_u - \Phi_w\|_{V'} \leq \gamma \|u - w\| \quad (9.54)$$

Portanto,  $\|Tu - Tw\| \leq \gamma \|u - w\|$ , com  $\gamma < 1$ , ou seja,  $T$  é uma contração. Pelo Teorema 9.4, existe um único elemento  $u \in V$  tal que  $Tu = u$ . Como  $Tu = P_K \phi_u \in K$  para todo  $u \in V$ . temos que  $u = Tu \in K$ , e al ém disso:

$$\begin{aligned} \langle u, v - u \rangle &= \langle Tu, v - u \rangle \geq \langle \phi_u, v - u \rangle = \Phi_u(v - u) \\ \langle u, v - u \rangle &\geq \langle u, v - u \rangle - \rho [a(u, v - u) - \langle f, v - u \rangle] \\ \rho [a(u, v - u) - \langle f, v - u \rangle] &\geq 0 \end{aligned} \quad (9.55)$$

Como  $\rho > 0$ ,  $a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle$ , ou seja,  $u$  é solução de (V).

□

### 9.3.2 2o. Caso: Forma Bilinear não Negativa

Vamos fazer a seguinte hipótese sobre a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ :

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V \quad (9.56)$$

Vamos verificar a existência de solução em conjuntos convexos limitados, generalizando em seguida o resultado para quaisquer conjuntos convexos.

Vamos denotar por  $X$  o subconjunto de  $K$  que contém as soluções de (V) quando  $a(u, u)$  satisfaz (9.56).

**Teorema 9.7 :** O conjunto  $X$  é um subconjunto convexo e fechado de  $K$

*Demonstração :*

Da continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , temos que  $X$  é fechado. Sejam  $u_1, u_2 \in V$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  e  $w = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$ . Podemos verificar que:

$$a(w, v - w) = \lambda a(u_1, v - u_1) + (1 - \lambda)a(u_2, v - u_2) + \lambda(1 - \lambda)a(u_2 - u_1, u_2 - u_1)$$

De (9.56), temos que

$$a(w, v - w) \geq \lambda a(u_1, v - u_1) + (1 - \lambda)a(u_2, v - u_2) \quad (9.57)$$

Se  $u_1, u_2 \in X$ , temos também :

$$\begin{aligned} a(w, v - w) &\geq \lambda \langle f, v - u_1 \rangle + (1 - \lambda) \langle f, v - u_2 \rangle \\ a(w, v - w) &\geq \langle f, v - [\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2] \rangle = \langle f, v - w \rangle \end{aligned} \quad (9.58)$$

Portanto,  $w \in X$  para todo  $u_1, u_2 \in X$  e  $\lambda \in [0, 1]$ .

□

Seja  $q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear contínua satisfazendo a seguinte condição de coercividade:

$$q(v, v) \geq \beta \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (9.59)$$

Dado  $g \in V$ , considere o seguinte problema:

$$(V2) \text{ Encontrar } u_o \in X \text{ tal que } q\langle u, v - u \rangle \geq \langle g, v - u \rangle \quad \forall v \in X$$

Da convexidade de  $X$  e do teorema 9.6, o problema (V2) tem uma única solução  $u_o \in X$ . Consideremos agora a seguinte forma bilinear contínua:

$$a_\epsilon \langle u, v \rangle = a(u, v) + \epsilon q \langle u, v \rangle, \quad \epsilon > 0 \quad (9.60)$$

Temos que  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  é coerciva:

$$a_\epsilon(v, v) = a(v, v) + \epsilon q(v, v) \geq \epsilon \beta \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (9.61)$$

Pelo teorema 9.6, existe uma única solução  $u_\epsilon \in K$  do seguinte problema:

(V $\epsilon$ ) Encontrar  $u \in K$  tal que  $a_\epsilon \langle u, v - u \rangle \geq \langle f + \epsilon g, v - u \rangle \quad \forall v \in K$

Vamos extrair uma solução para (V) tomando o limite da sequência  $(u_\epsilon)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Inicialmente vamos verificar os seguintes lemas:

**Lema 9.4 :** Seja  $a(.,.)$  uma forma bilinear satisfazendo (9.56) e  $J(u) = a(u, u)$ . Para todo  $u \in V$  e para toda sequência  $u_n \in V$  com  $u_n \xrightarrow{w} u$ , temos que  $J$  é semicontínua inferior com respeito à topologia fraca de  $V$ , ou seja:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} ; J(u_n) \geq J(u) - \epsilon \quad \forall n \geq N \quad , \quad (9.62)$$

*Demonstração :*

Seja  $J(u) = a(u, u)$  e  $u_n \xrightarrow{w} u$ . Temos que

$$\begin{aligned} J(u_n) &= J(u) + a(u_n - u, u) + a(u, u_n - u) + a(u_n - u, u_n - u) \\ J(u_n) &\geq J(u) + a(u_n - u, u) + a(u, u_n - u) \end{aligned} \quad (9.63)$$

Como  $a(.,.)$  é contínua, os funcionais lineares

$$f_1(v) = a(v, u) \quad \text{e} \quad f_2(v) = a(u, v) \quad (9.64)$$

são contínuos, logo  $f_1, f_2 \in V'$ . Como  $u_n \xrightarrow{w} u$ ,

$$\exists N \in \mathbb{N} ; |f_1(u_n - u)| < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad |f_2(u_n - u)| < \epsilon/2 \quad \forall n \geq N \quad (9.65)$$

Deste modo,

$$a(u_n - u, u) > -\epsilon/2 \quad \text{e} \quad a(u, u_n - u) > -\epsilon/2 \quad \forall n \geq N \quad (9.66)$$

Portanto,  $J(u_n) \geq J(u) - \epsilon \quad \forall n \geq N$ .

**Lema 9.5 :** Seja  $(u_\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$  uma família limitada em  $V$ . Se para toda subsequência convergente  $(u_\eta)$  de  $(u_\epsilon)$  temos  $u_\eta \rightarrow u_o$ , então  $u_\epsilon \rightarrow u_o$ .

*Demonstração :*

suponha que  $u_\epsilon$  não convirja para  $u_o$ . Então, existe  $L > 0$  tal que

$$\forall \delta > 0 \exists \tau(\delta) > 0, |\tau| < \delta \text{ t.q. } \|u_\tau - u_o\| \geq L \quad (9.67)$$

seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $k = \tau(1/n)$  segundo (9.67). Deste modo, a sequência  $(u_k)$  satisfaz

$$\|u_k - u_o\| \geq L, \quad \forall k > 0 \quad (9.68)$$

Como  $(u_k) \subset (u_\ell)$ ,  $(u_k)_{k \geq 0}$  também é uma família limitada. Assim,  $(u_k)$  possui uma subsequência  $(u_h)$  convergente, pelo Lema 9.1. Como  $(u_h) \subset (u_\ell)$ , temos por hipótese  $u_h \rightarrow u_o$ . Em particular, existe  $\bar{\delta} > 0$  tal que

$$\|u_h - u_o\| < L, \quad |h| < \bar{\delta} \quad (9.69)$$

Porém,  $(u_h) \subset (u_k)$  nos leva a seguinte contradição:

$$L \leq \|u_h - u_o\| < L, \quad |h| < \bar{\delta} \quad (9.70)$$

Portanto,  $u_\epsilon \rightarrow u_o$ .

□

**Teorema 9.8 :** Suponha que o conjunto  $X$  das soluções de (V) para  $a(., .)$  satisfazendo (9.56) seja não-vazio. Seja  $u_o$  a solução de (V2) para  $g \in V$  dado e para todo  $\epsilon > 0$  seja  $u_\epsilon$  a solução de (V $\epsilon$ ). Temos que  $u_\epsilon \rightarrow u_o$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

*Demonstração :*

Como  $u_o \in X$ ,  $u_o$  satisfaz (V):

$$a(u_o, v - u_o) \geq \langle f, v - u_o \rangle \quad \forall v \in K \quad (9.71)$$

Escolhendo  $v = u_o \in V$  em (V $\epsilon$ ):

$$a(u_\epsilon, u_o - u_\epsilon) + \epsilon q(u_\epsilon, u_o - u_\epsilon) \geq \langle f + \epsilon g, u_o - u_\epsilon \rangle \quad (9.72)$$

Escolhendo  $v = u_\epsilon$  em (9.71) e somando a (9.72), obtemos:

$$-a(u_\epsilon - u_o, u_\epsilon - u_o) + \epsilon q(u_\epsilon, u_o - u_\epsilon) \geq \epsilon \langle g, u_o - u_\epsilon \rangle \quad (9.73)$$

De (9.56),

$$q(u_\epsilon, u_o - u_\epsilon) \geq \langle g, u_o - u_\epsilon \rangle \quad (9.74)$$

Vamos verificar que  $u_\epsilon$  é uma sequência limitada. De (9.74),

$$q(u_\epsilon, u_o) - q(u_\epsilon, u_\epsilon) \geq \langle g, u_o - u_\epsilon \rangle$$

$$q(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq q(u_\epsilon, u_o) + \langle g, u_o - u_\epsilon \rangle$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} q(u_\epsilon, u_\epsilon) &\leq \|q\| \|u_\epsilon\| \|u_o\| + \|g\| \|u_o - u_\epsilon\| \\ q(u_\epsilon, u_\epsilon) &\leq \|q\| \|u_\epsilon\| \|u_o\| + \|g\| \|u_o\| + \|g\| \|u_\epsilon\| \\ q(u_\epsilon, u_\epsilon) &\leq (\|q\| \|u_o\| + \|g\|) \|u_\epsilon\| + \|g\| \|u_o\| \end{aligned}$$

Definindo  $C = \max\{\|q\| \|u_o\| + \|g\|, \|g\| \|u_o\|\}$ , da coercividade de  $q(\cdot, \cdot)$ ,

$$\begin{aligned} \beta \|u_\epsilon\|^2 &\leq q(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq C(1 + \|u_\epsilon\|) \\ \|u_\epsilon\|^2 &\leq \frac{C}{\beta}(1 + \|u_\epsilon\|) \end{aligned} \tag{9.75}$$

Se  $\|u_\epsilon\| \geq 1$ , temos que

$$\|u_\epsilon\|^2 \leq \frac{2C}{\beta} \|u_\epsilon\| \implies \|u_\epsilon\| \leq \frac{2C}{\beta} \tag{9.76}$$

Deste modo,

$$\|u_\epsilon\| \leq \bar{C}, \quad \bar{C} = \max\left\{1, \frac{2C}{\beta}\right\} \tag{9.77}$$

Pelo Lema 9.1, podemos extrair uma subsequência  $u_\eta$  da família  $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$  tal que  $u_\eta \xrightarrow{w} \bar{u} \in V$ . Pelo Lema 9.2,  $\bar{u} \in K$ . Agora, pelo Lema 9.4,

$$\liminf q(u_\eta, u_\eta) \geq q(\bar{u}, \bar{u}) \tag{9.78}$$

Substituindo  $u_\epsilon$  por  $u_\eta$  em (9.74) e aplicando o limite inferior para  $\eta \rightarrow 0$ , temos que:

$$\begin{aligned} \liminf [q(u_\eta, u_o) - q(u_\eta, u_\eta)] &\geq \liminf [\langle g, u_o \rangle - \langle g, u_\eta \rangle] \\ \liminf q(u_\eta, u_o) - q(\bar{u}, \bar{u}) &\geq \langle g, u_o \rangle - \liminf \langle g, u_\eta \rangle \end{aligned} \tag{9.79}$$

Como  $u_\eta \xrightarrow{w} \bar{u}$ ,

$$\begin{aligned} q(\bar{u}, u_o) - q(\bar{u}, \bar{u}) &\geq \langle g, u_o \rangle - \langle g, \bar{u} \rangle \\ q(\bar{u}, u_o - \bar{u}) &\geq \langle g, u_o - \bar{u} \rangle \end{aligned} \tag{9.80}$$

Vamos verificar que  $\bar{u} \in X$ . Aplicando o limite inferior para  $\eta \rightarrow 0$  em  $(V_\epsilon)$ :

$$a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq \langle f, v - \bar{u} \rangle \quad \forall v \in K \tag{9.81}$$

Como  $\bar{u} \in K$ ,  $\bar{u}$  é solução de (V), ou seja,  $\bar{u} \in X$ . Assim, podemos substituir  $\bar{u}$  em (V2), obtendo:

$$q(u_o, \bar{u} - u_o) \geq \langle g, \bar{u} - u_o \rangle \quad (9.82)$$

Somando (9.80) e (9.82):

$$q(\bar{u} - u_o, \bar{u} - u_o) \leq 0 \quad (9.83)$$

Da coercividade de  $q(.,.)$ ,  $\bar{u} - u_o = 0$ , de modo que  $u_\eta \xrightarrow{w} u_o$ . Para mostrar que  $u_\eta \rightarrow u_o$ , observemos que:

$$\begin{aligned} \beta \|u_\eta - u_o\|^2 &\leq q(u_\eta - u_o, u_\eta - u_o) = q(u_\eta, u_\eta - u_o) - q(u_o, u_\eta - u_o) \\ \beta \|u_\eta - u_o\|^2 &\leq \langle g, u_\eta - u_o \rangle - q(u_o, u_\eta - u_o) \end{aligned} \quad (9.84)$$

Como  $f_1(x) = \langle g, x \rangle \in V'$  e  $f_2(x) = q(u_o, x) \in V'$ ,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \beta \|u_\eta - u_o\|^2 \leq 0 \quad (9.85)$$

Portanto,  $\|u_\eta - u_o\| \rightarrow 0$ . Como a subsequência  $u_\eta$  é arbitrária, temos que  $\|u_\xi - u_o\| \rightarrow 0$  para toda subsequência convergente  $(u_\xi)$ . Pelo Lema 9.5,  $\|u_\epsilon - u_o\| \rightarrow 0$ .

□

Este teorema garante, portanto, a convergência das soluções do problema aproximado  $(V_\epsilon)$  para a solução  $u$  do problema (V), sugerindo inclusive um método iterativo para problemas desta classe. Este resultado aparentemente não contribui para a verificação da existência de solução. Sua utilidade fica mais clara adicionando o seguinte teorema:

**Teorema 9.9 :** Nas hipóteses do teorema anterior, o problema (V) tem solução se e somente se existe uma constante  $L > 0$  tal que a solução  $u_\epsilon$  de  $(V_\epsilon)$  satisfaça:

$$\|u_\epsilon\| \leq L \quad \forall \epsilon \geq 0 \quad (9.86)$$

*Demonstração :*

$\Rightarrow$ ) Se existe uma solução  $u_o \in X$ , temos  $L = C$  segundo o teorema anterior.

⇐) Suponha que  $(u_\epsilon)$  seja limitada. Pelos Lemas 9.1 e 9.2, existe uma subseqüência  $(u_\eta) \subset (u_\epsilon)$  tal que  $u_\eta \xrightarrow{w} \bar{u} \in K$ .

Substituindo  $u_\epsilon$  por  $u_\eta$  em  $(V_\epsilon)$  e reordenando os termos da inequação, obtemos:

$$a(u_\eta, u_\eta) + \eta q(u_\eta, u_\eta) \geq a(u_\eta, v) + \eta q(u_\eta, v) + \langle f + \eta g, u_\eta - v \rangle \quad (9.87)$$

Aplicando o limite inferior, obtemos:

$$a(\bar{u}, \bar{u}) \geq a(\bar{u}, v) + \langle f, \bar{u} - v \rangle \quad \forall v \in K, \text{ ie, } \bar{u} \in X$$

□

Uma maneira imediata de se limitar as soluções de  $(V_\epsilon)$  é limitar o próprio convexo  $K$ , como veremos a seguir:

**Corolário 9.1 :** Seja  $a(., .)$  satisfazendo (9.56) e  $K \in V$  limitado. Então, existe solução  $u$  para  $(V)$ .

Vejamos agora o caso em que  $K$  é ilimitado. Definimos

$$K_R = \{v \in K ; \|v\| \leq R\} \quad (9.88)$$

Considere o seguinte problema:

$$(V_R) \text{ Encontrar } u \in K_R \text{ tal que } a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K_R$$

Seja  $X_R$  o conjunto das soluções de  $(V_R)$ . Pelo Corolário 9.1,  $X_R \neq \emptyset \quad \forall R \geq 0$ . Veremos no teorema a seguir que  $X_R \subset X$ , o que garante a existência de solução para  $(V)$  quando  $K$  é ilimitado.

**Teorema 9.10 :** Seja  $R > 0$ . Se  $u \in X_R$  com  $\|u\| < R$ , então  $u \in X$ .

*Demonstração :*

Sejam  $u \in X_R$  e  $\bar{u} \in K$  fixos, com  $\bar{u}$  arbitrário. Temos que  $v = (1 - \lambda)u + \lambda\bar{u} \in K$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Além disso,

$$\|v\| \leq \|u\| + \lambda\|\bar{u} - u\| < R, \quad 0 < \lambda < \frac{R - \|u\|}{\|\bar{u} - u\|} = \bar{\lambda} \quad (9.89)$$

Para  $0 < \lambda < \bar{\lambda}$  temos, portanto, que  $v \in K_R$ .

Substituindo  $v$  em (V), temos que  $v - u = \lambda(\bar{u} - u)$  e

$$\begin{aligned} a(u, v - u) &= a(u, \lambda(\bar{u} - u)) \geq \langle f, \lambda(\bar{u} - u) \rangle \\ a(u, \bar{u} - u) &\geq \langle f, \bar{u} - u \rangle \end{aligned} \quad (9.90)$$

Como  $\bar{u} \in K$  foi arbitrário,

$$a(u, \bar{u} - u) \geq \langle f, \bar{u} - u \rangle \quad \forall \bar{u} \in K, \text{ ie, } \bar{u} \in X$$

□

### 9.3.3 Caso Particular: Operador Não-Singular

Seja  $a(.,.)$  uma forma bilinear contínua com  $a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in V$  e que admite a seguinte propriedade adicional:

$$a(u, u) = 0 \Rightarrow u \equiv \mathbf{0} \quad (9.91)$$

Se  $a(.,.)$  é uma forma simétrica, podemos definir um novo produto interno  $\langle u, v \rangle_a = a(u, v)$  e afirmar que o núcleo do operador  $A(u)$  satisfazendo  $\langle A(u), v \rangle = a(u, v)$  é o elemento  $\mathbf{0}$ , ou seja,  $A(u)$  é não-singular. Definindo  $g = A^{-1}(f)$ , o problema (V) equivale ao seguinte:

$$\langle u - g, v - u \rangle_a \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (9.92)$$

Conforme verificamos em (9.42)-(9.44), o problema acima tem solução única.

No ausência de simetria, a existência da solução é garantida pelo Corolário 9.1 e pelo Teorema 9.10. A unicidade é verificada da maneira usual: sejam  $u_1, u_2$  soluções de (V). Procedendo de modo análogo a (9.38), obtemos:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \quad (9.93)$$

Da não-negatividade de  $a(.,.)$ , temos que  $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ . De (9.91),  $u_1 - u_2 \equiv \mathbf{0}$ .

## 9.4 Penalização

O método de penalização é uma ferramenta útil tanto para resultados analíticos quanto para esquemas numéricos. A idéia surge da aproximação de um problema de minimização com restrições por uma sequência de problemas irrestritos.

No caso em que a forma bilinear  $a(.,.)$  é simétrica, inequações e problemas (equações) variacionais são equivalentes respectivamente a problemas de minimização com restrições e a problemas de minimização irrestritos. Deste modo, utilizaremos a estratégia de penalização para aproximar uma inequação variacional por uma sequência de problemas variacionais.

Seja  $(V, (.,.))$  um espaço de Hilbert e  $K \subset V$  um conjunto fechado e convexo. Vamos considerar operadores não-lineares  $A : V \rightarrow V$  que satisfazem as seguintes propriedades:

(i)  $A$  é uma função monótona, ou seja:

$$(A(u) - A(v), u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V \quad (9.94)$$

(ii)  $A$  é hemicontínua, isto é, para quaisquer vetores  $u, v, w \in V$  fixos, a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = (A(u + t \cdot v), w) \quad (9.95)$$

é uma função contínua. (iii) Para todo  $u \in V$ , temos que:

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(A(u), u)}{\|u\|} = +\infty \quad (9.96)$$

observe que se existe  $\gamma > 0$  tal que  $(A(u), u) \geq \gamma \|u\|$ , então  $A$  satisfaz (1.3).

Vamos definir um operador de penalização  $\beta : V \rightarrow V$ , em geral não-linear, satisfazendo:

(iv) O conjunto  $K \subset V$  é o núcleo de  $\beta$ , isto é, :

$$\beta(v) = \mathbf{0} \Leftrightarrow v \in K \quad (9.97)$$

(v) Os elementos  $v$  e  $\beta(v)$  satisfazem a seguinte relação:

$$(\beta(v), v) = (\beta(v), \beta(v)) \quad (9.98)$$

Considerando as mesmas condições do Teorema de Lions-Stampacchia, veremos que as propriedades de (i) a (iii) são necessárias para garantir a existência de solução do problema penalizado:

(V<sub>ε</sub>) Encontrar  $u_ε \in V$  tal que  $a(u_ε, v) + \frac{1}{ε}(\beta(u_ε), v) = (f, v) \quad \forall v \in V$

A adição das propriedades (iv) e (v) garante a convergência da solução do problema penalizado para a solução de (V). A quinta propriedade é utilizada para simplificar os resultados e pode ser substituída por outra hipótese.

Quando a função de penalização é não-linear, o problema (V<sub>ε</sub>) não satisfaz as condições do Teorema de Lax-Milgram. Os resultados a seguir, apresentados em Zeider (1990), contornam esta dificuldade e são baseados na teoria de operadores monótonos.

**Teorema 9.11 (Monotonicidade Maximal):** Uma aplicação  $A$  monótona e hemicontínua é monótona maximal, ou seja,

$$(b - A(v), u - v) \geq 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow b = A(u) \quad (9.99)$$

**Corolário 9.2 :** Se  $u_n \xrightarrow{w} u \in V$  e  $A(u_n) \rightarrow b \in V$ , então  $A(u) = b$ .

**Teorema 9.12 :** Se  $A$  satisfaz (i)-(iii), então, dado  $b \in V$ , existe um único  $u \in V$  tal que  $A(u) = b$ . Além disso,

$$\exists! u \in V ; (A(u), v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (9.100)$$

**Proposição 9.3 :** Se  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear contínua e coerciva, então  $A(v) = a(u, v)$  satisfaz (i)-(iii). Em particular, se  $\beta$  satisfaz (i), (ii) e  $(\beta(u), u) \geq 0$ , então  $A(v) + k(\beta(u), v)$  satisfaz (i)-(iii) para  $k > 0$ .

De (v), temos que  $(\beta(u), u) = (\beta(u), \beta(u)) \geq 0$ , de modo que o problema (V<sub>ε</sub>) tem solução única. O teorema a seguir mostra a convergência fraca da solução  $u_ε$  de (V<sub>ε</sub>) para a solução de (V) quando  $ε \rightarrow 0$ .

**Teorema 9.13 :** Dada uma família  $(u_ε)_{ε \geq 0}$  de soluções do problema (V<sub>ε</sub>), existe uma subsequência  $(u_η)$  de  $(u_ε)$  que converge fracamente para a solução  $u \in K$  de (V).

*Demonstração :*

Pela propriedade (v) e do fato que  $u_ε$  satisfaz (V<sub>ε</sub>), obtemos:

$$a(u_ε, u_ε) \leq a(u_ε, u_ε) + \frac{1}{ε}(\beta(u_ε), \beta(u_ε)) = a(u_ε, u_ε) + \frac{1}{ε}(\beta(u_ε), u_ε)$$

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq (f, u_\epsilon) \leq \|f\| \|u_\epsilon\| \quad (9.101)$$

da coercividade de  $a(.,.)$ ,

$$\|u_\epsilon\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\| \quad (9.102)$$

Como  $V$  é um espaço de Hilbert, existe uma subsequência  $u_\eta$  de  $(u_\epsilon)$  com  $u_\eta \xrightarrow{w} \bar{u} \in V$ . Analogamente a (1.8) podemos mostrar que  $\beta(u_\epsilon)$  satisfaz:

$$\|\beta(u_\epsilon)\|^2 = (\beta(u_\epsilon), u_\epsilon) \leq \epsilon [(f, u_\epsilon) - a(u_\epsilon, u_\epsilon)] \quad (9.103)$$

De (1.9),

$$\|\beta(u_\epsilon)\|^2 \leq \epsilon \|f\| \|u_\epsilon\| \leq \epsilon \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \quad (9.104)$$

Portanto,  $\beta(u_\epsilon) \rightarrow 0$ . Pelo Corolário 1.1,  $\beta(\bar{u}) = 0$ . De (iv),  $\bar{u} \in K$ .

Resta mostrar que  $\bar{u}$  satisfaz a desigualdade do problema (V). De fato, seja  $w \in K$ . Substituindo  $v = w - u_\eta \in V$  no problema (V $_\epsilon$ ):

$$a(u_\eta; w - u_\eta) + \frac{1}{\eta} (\beta(u_\eta), w - u_\eta) = (f, w - u_\eta) \quad (9.105)$$

Das propriedades (i) e (iv):

$$a(u_\eta, w - u_\eta) + \frac{1}{\eta} (\beta(u_\eta) - \beta(w), w - u_\eta) = (f, w - u_\eta)$$

$$a(u_\eta, w - u_\eta) - (f, w - u_\eta) = \frac{1}{\eta} (\beta(w) - \beta(u_\eta), w - u_\eta) \geq 0 \quad (9.106)$$

Aplicando o limite inferior sobre (1.13), obtemos:

$$a(\bar{u}, w) - (f, w - \bar{u}) \geq \liminf_{\eta \rightarrow 0} a(u_\eta, u_\eta) \geq a(\bar{u}, \bar{u}) \quad (9.107)$$

Portanto,  $a(\bar{u}, w - \bar{u}) \geq (f, w - \bar{u}) \quad \forall w \in K$ , ou seja,  $\bar{u}$  é solução de (V).

□

Este teorema pode ser utilizado numa situação geral:

- Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ; o espaço de Hilbert  $(V, (.,.))$  é dado por

$$V = H_o^1(\Omega) \quad \text{e} \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad (9.108)$$

- Seja  $K \subset V$  o seguinte conjunto fechado e convexo:

$$K = \{v \in V; v(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega\} \quad (9.109)$$

- a função de penalização  $\beta : V \rightarrow V$  é dada por:

$$\beta(u) = (u)^- = \min\{u, 0\} = \frac{1}{2}[u(x) - |u(x)|] \quad (9.110)$$

Para tanto, precisamos verificar as propriedades (i),(ii),(iv) e (v):

- (i) Sejam  $q_1, q_2 \in V$  e  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  definidos por:

$$\Omega_i = \{x \in \Omega; q_i(x) < 0\}, \quad i = 1, 2 \quad (9.111)$$

Temos que:

$$(\beta(q_1) - \beta(q_2), q_1 - q_2) = \int_{\Omega_1} (q_1)(q_1 - q_2)dx - \int_{\Omega_2} (q_2)(q_1 - q_2)dx$$

$$\begin{aligned} (\beta(q_1) - \beta(q_2), q_1 - q_2) &= \int_{\Omega_1} (q_1)^2 dx + \int_{\Omega_2} (q_2)^2 dx - \\ &\quad - \int_{\Omega_1} (q_1)(q_2)dx - \int_{\Omega_2} (q_2)(q_1)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta(q_1) - \beta(q_2), q_1 - q_2) &\geq \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} (q_1)^2 dx + \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} (q_2)^2 dx - \\ &\quad - \int_{\Omega_1} (q_1)(q_2)dx - \int_{\Omega_2} (q_2)(q_1)dx \end{aligned}$$

Observando que as duas integrais com termos cruzados são idênticas em  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , temos que:

$$\begin{aligned} (\beta(q_1) - \beta(q_2), q_1 - q_2) &\geq \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} [(q_1) - (q_2)]^2 dx - \\ &\quad - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2^c} (q_1)(q_2)dx - \int_{\Omega_2 \cap \Omega_1^c} (q_2)(q_1)dx \\ &\geq - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2^c} (q_1)(q_2)dx - \int_{\Omega_2 \cap \Omega_1^c} (q_2)(q_1)dx \end{aligned}$$

Como  $q_2 \geq 0$  em  $\Omega_2^c$  e  $q_1 \geq 0$  em  $\Omega_1^c$ , temos que

$$(\beta(q_1) - \beta(q_2), q_1 - q_2) \geq 0 \quad (9.112)$$

(ii) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = \int_{\Omega} (u + tv)^- w dx \quad (9.113)$$

Vamos verificar a continuidade de  $f$ :

$$|f(t) - f(t_o)| \leq \|w\|_{\infty} \int_{\Omega} |(u + tv)^- - (u + t_o v)^-| dx \quad (9.114)$$

Seja  $g(t) = (u + tv)^- - (u + t_o v)^-$ . Observemos que:

$$\begin{aligned} 2g(t) &= (u + tv) - |u(x) + tv(x)| - [(u + t_o v) - |u(x) + t_o v(x)|] \\ 2g(t) &= (t - t_o)v(x) - |u(x) + tv(x)| + |u(x) + t_o v(x)| \\ 2g(t) &\leq (t - t_o)v(x) + |(t - t_o)v(x)| \leq 2|(t - t_o)v(x)| \end{aligned} \quad (9.115)$$

De (1.21) e (1.22), temos que:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_o)| &\leq \|w\|_{\infty} \int_{\Omega} |(t - t_o)| |v(x)| dx \\ |f(t) - f(t_o)| &\leq |\Omega| \|w\|_{\infty} \|v\|_{\infty} |t - t_o| \end{aligned} \quad (9.116)$$

(iv) Se  $u \in K$ , então  $u \geq 0$ , logo  $\beta(u) = (u)^- = 0$ .

(v) Como  $(u)^- \cdot u = (u)^- \cdot (u)^-$ , temos que  $(\beta(u), u) = (\beta(u), \beta(u))$ .

Cabe observar que os resultados podem ser estendidos para o caso em que o subconjunto  $K$  é dado por:

$$K = \{v \in V; v(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in \Omega\} , \quad (9.117)$$

bastando para isto aplicar a transformação  $w(x) = u(x) - \psi(x)$  na inequação original.

O método de penalização é bastante atrativo para problemas unidimensionais: a inequação variacional é transformada em uma sequência de problemas variacionais, cujas soluções aproximadas reduzem-se a sistemas lineares; as matrizes dos sistemas lineares resultantes de equações com uma dimensão no espaço, por sua vez, têm uma estrutura de banda bem definida, favorável ao uso de métodos diretos.

## 9.5 Método de Galerkin

Vamos obter uma aproximação da inequação variacional abstrata (V) pelo método de Galerkin. Seja  $V_h \subset V$  um subespaço de  $V$  e  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  uma base nodal para  $V_h \subset V$ . Vamos considerar que o espaço vetorial  $V$  é um espaço de funções definidas em um domínio  $\Omega$

A abordagem realizada é um pouco diferente da aproximação de equações variacionais: ao invés de tomarmos  $v_i = \varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tomamos uma função-teste genérica em  $V_h$ :

$$v_h = \sum_{j=1}^n v_j \varphi_j \quad (9.118)$$

Vamos considerar que as funções de base  $\varphi_i$  estão associadas a nós  $x_i$  de uma discretização  $\Omega_h$  do domínio  $\Omega$  pela relação  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ , de modo que  $v(x_i) = v_i$ . Dado que a função interpolante  $\psi_h$  de  $\psi$  em  $V_h$  é expressa por:

$$\psi_h = \sum_{j=1}^n \psi_j(x_j) \varphi_j = \sum_{j=1}^n \psi_j \varphi_j \quad (9.119)$$

Temos a seguinte aproximação  $K_h$  para o conjunto  $K$ :

$$K_h = \left\{ v = \sum_{j=1}^n v_j \varphi_j \in V ; v_j \geq \psi_j, 1 \leq j \leq n \right\} \quad (9.120)$$

A solução aproximada do problema também é expressa por uma combinação linear das funções de base:

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j \quad (9.121)$$

Assim, o problema aproximado consiste no seguinte:

(V<sub>h</sub>) Encontrar  $u_h \in K_h$  tal que  $a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v \in K_h$

Substituindo (9.118), (9.121) em (V<sub>h</sub>), temos que:

$$\begin{aligned} a \left( \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n (v_i - u_i) \varphi_i \right) &\geq \left\langle f, \sum_{i=1}^n (v_i - u_i) \varphi_i \right\rangle \\ \sum_{i=1}^n (v_i - u_i) \sum_{j=1}^n u_j a(\varphi_j, \varphi_i) &\geq \sum_{i=1}^n (v_i - u_i) \langle f, \varphi_i \rangle \end{aligned}$$

Na forma matricial, temos  $(y - x)^t Ax \geq b^t(y - x) \quad \forall y \geq c$ , sendo que:

$$\begin{aligned} x &= (u_1, \dots, u_n) & v &= (v_1, \dots, v_n) \\ c &= (\psi_1, \dots, \psi_n) & b &= (\langle f, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle f, \varphi_n \rangle) \\ A &= [a_{ij}], & a_{ij} &= a(\varphi_j, \varphi_i) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (9.122)$$

Vamos reescrever a inequação obtida de modo a extrair condições suficientes para  $x$ :

$$\begin{aligned} u^t A^t ((y - c) - (x - c)) &\geq b^t ((y - c) - (x - c)) \\ u^t A^t (y - c) - b^t (y - c) &\geq u^t A^t (x - c) - b^t (x - c) \\ (Ax - b)^t (y - c) &\geq (Ax - b)^t (x - c) \quad \forall y \geq c \end{aligned} \quad (9.123)$$

Dado que  $(y - c) \geq 0$ , temos as seguintes condições suficientes para (9.123):

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq c \\ (Ax - b)^t (x - c) = 0 \end{cases} \quad (9.124)$$

Portanto, a aplicação do método de Galerkin à inequação variacional (V) nos leva ao **Problema de Complementaridade Linear** dado por (9.124), no sentido em que uma solução do do problema (9.124) também é uma solução do problema aproximado  $(V_h)$ .

## 9.6 Métodos de Elementos Finitos

Uma forma natural de construir o subespaço de dimensão finita requerido no Método de Galerkin é proporcionada pelos métodos de elementos finitos.

A idéia central destes métodos é construir uma partição do domínio em subregiões denominadas **elementos**, estabelecer pontos nesta partição, denominados **nós**, nos quais a solução aproximada será avaliada e construir uma base de funções polinomiais em geral associadas a cada nó da partição e caracterizadas por não se anularem apenas nos elementos adjacentes ao nó associado. A determinação de cada função de base é obtida pela imposição de um conjunto de restrições (geralmente condições de interpolação) nos nós.

Podemos construir diversos métodos de elementos finitos a depender do tipo de partição do domínio, do posicionamento dos nós e das condições

sobre as funções de base. Temos em Johnson (1987) os fundamentos teóricos e detalhes sobre a implementação de métodos de elementos finitos.

Diversos aspectos operacionais estão envolvidos na implementação dos elementos finitos. Por exemplo, devemos decidir a regra de quadratura para calcular as integrais envolvidas na forma bilinear  $a(.,.)$ . Temos ainda a questão de como lidar com a esparsidade do sistema resultante e como padronizar os cálculos de modo a aproveitar o caráter local das funções de base

Os testes apresentados no próximo capítulo referem-se à implementação tradicional de elementos finitos (elementos de Lagrange lineares), que em nosso caso divide o domínio do preço da mesma forma que no método de diferenças finitas e utiliza uma base de funções lineares por partes, determinadas por condições de interpolação nas extremidades (que correspondem aos nós) de cada subintervalo. As condições de contorno não homogêneas são impostas também de maneira análoga ao método de diferenças finitas.

## 9.7 Problema de Complementaridade Linear

A aproximação de uma inequação variacional com abordagens como o método de Galerkin levam a uma inequação associada em dimensão finita.

Vamos considerar o espaço de Hilbert formado pelo espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno euclidiano  $\langle ., . \rangle$ , definido como  $\langle u, v \rangle = v^t u$ . A norma  $\|.\|$  associada a  $(\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$  será a norma euclidiana:  $\|u\|^2 = u^t u$ . Cabe também observar que o espaço dual de  $\mathbb{R}^n$  é o próprio  $\mathbb{R}^n$ .

O conjunto convexo  $K$  considerado é formado pelos vetores  $x \in \mathbb{R}^n$  cujas componente  $x_i$  são limitadas separadamente, ou seja:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n ; c_i \leq x_i \leq d_i , 1 \leq i \leq n\}$$

Na forma de produto cartesiano, temos

$$K = \prod_{i=1}^n K_i ; K_i = [c_i, d_i]$$

Consideramos o caso em que  $K_i = [c_i, +\infty)$ . Os resultados podem ainda ser estendidos para  $K_i = (-\infty, d_i]$  ou  $K_i = \mathbb{R}$ .

Associamos à forma bilinear contínua  $a(.,.)$  uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  segundo a representação de Riesz :

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle = v^t Au$$

se  $a(., .)$  é coerciva, temos que a matriz  $A = [a_{ij}]$  é positiva definida:

$$u^t A u = a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 > 0, \quad \text{se } u \neq 0$$

Trataremos, portanto do seguinte problema:

$$(V_n) \quad \text{Dados } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^n, \text{ encontrar } u \in K \text{ tal que} \\ (v - u)^t A u \geq (v - u)^t b \quad \forall v \in K$$

Se  $A$  é definida positiva, o teorema de Lions-Stampacchia garante uma solução única para o problema  $(V_n)$ .

Como vimos na seção anterior, no caso em que  $K_i = [c_i, +\infty)$ , uma condição suficiente (e necessária, quando a matriz  $A$  é simétrica) para que  $u$  seja uma solução do problema  $(V_n)$  é que  $u$  seja uma solução do seguinte problema de complementaridade linear:

$$\begin{cases} A^t x \geq b \\ x \geq c, \quad c = (c_1, \dots, c_n) \\ (A^t x - b)^t (x - c) = 0 \end{cases} \quad (9.125)$$

Deste modo, podemos utilizar os diversos métodos iterativos existentes para problemas de complementaridade linear para resolver diretamente o problema  $(V_n)$ . Veremos nos resultados a seguir que alguns destes métodos podem ser construídos do ponto de vista das inequações variacionais, sugerindo que a hipótese de simetria pode ser suprimida.

### 9.7.1 Projeções

Vamos obter explicitamente a projeção de um vetor  $b \in \mathbb{R}^n$  no convexo  $K$ . Isto equivale a encontrar a única solução  $u$  do problema  $(V_n)$  quando  $A = I$ :

**Lema 9.6 :** Seja  $u^* = P_K b$  solução da seguinte inequação variacional:

$$\langle u, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (9.126)$$

Então, cada componente  $u_i^*$ ,  $1 \leq i \leq n$ , é dada por:

$$u_i^* = \min\{\max\{f_i, c_i\}, d_i\} \quad (9.127)$$

Se  $K = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i \geq c_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$ , temos que:

$$u_i^* = \max\{f_i, c_i\} \quad (9.128)$$

*Demonstração :*

Seja  $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i \geq c_i, 1 \leq i \leq n\}$ . Escolhendo  $v$  de modo que  $v_j = u_j$  para  $j \neq i$  e que  $v_i$  seja arbitrário, temos que (9.126) se reduz a encontrar  $u_i \geq c_i$  satisfazendo a seguinte inequação em  $\mathbb{R}$ :

$$u_i(v_i - u_i) \geq f_i(v_i - u_i) \quad \forall v_i \geq c_i \quad (9.129)$$

Seja  $w_i^* = \max\{f_i, c_i\} \geq c_i$ . Se  $c_i \geq f_i$ , então  $w_i^* = c_i$  e

$$w_i^*(v_i - w_i^*) = c_i(v_i - w_i^*) \geq f_i(v_i - w_i^*) \quad (9.130)$$

Se  $c_i \leq f_i$ , então  $w_i^* = f_i$  e

$$w_i^*(v_i - w_i^*) = f_i(v_i - w_i^*) \quad (9.131)$$

Portanto,  $w_i^*$  satisfaz (9.128). Seja  $u$  a solução de (9.126) com  $K = K_1$ . Das escolhas anteriores de  $v$  e da unicidade da solução de (9.126), temos que  $u_i = w_i^*$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Do mesmo modo, definindo  $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i \leq d_i, 1 \leq i \leq n\}$ , temos que  $z^* \in \mathbb{R}^n$  definida por:

$$z_i^* = \min\{f_i, d_i\} \quad (9.132)$$

é a solução de (9.126) com  $K = K_2$ .

Assim,  $w^* = P_{K_1}f$  e  $z^* = P_{K_2}f$ . Como  $K = K_1 \cap K_2$ , temos que:

$$P_K f = P_{K_1}(P_{K_2}f) = P_{K_2}(P_{K_1}f) \quad (9.133)$$

Assim, a solução  $u^*$  de (9.126) satisfaz:

$$u_i^* = P_{K_2}w^* = \min\{w_i^*, d_i\} = \min\{\max\{f_i, c_i\}, d_i\} \quad (9.134)$$

□

## 9.7.2 Método do Ponto Fixo

Pelo teorema de Lions-Stampacchia, a solução  $u$  de  $(V_n)$  é o único ponto fixo do operador

$$\begin{aligned} T : K &\rightarrow K \\ u \in K &\mapsto T(u) = P_k \phi_u \end{aligned} \quad (9.135)$$

O vetor  $\phi_u = \phi_u(\rho)$  satisfaz a seguinte relação:

$$\langle \phi_u, v \rangle = \langle u, v \rangle - \rho[\langle Au, v \rangle - \langle f, v \rangle], \quad 0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}, \quad \forall v \in V \quad (9.136)$$

Deste modo,  $\phi_u = u - \rho[Au - f]$ . Pelo Lema 9.6, temos que

$$P_k \phi_u = \min \left\{ \max \left\{ u_i - \rho \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j - f_i \right), c_i \right\}, d_i \right\} \quad (9.137)$$

Temos que  $u$  é a única solução da equação  $u = T(u)$ , o que sugere um procedimento iterativo  $u^{k+1} = T(u^k)$  iniciando de um vetor  $u^0$  dado. De (9.127), temos que:

$$u_i^{k+1} = \min \left\{ \max \left\{ u_i^k - \rho \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^k - f_i \right), c_i \right\}, d_i \right\}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (9.138)$$

A convergência de  $u^k$  para a solução  $u$  é garantida pela propriedade de contração do operador  $T$ :

$$\exists \gamma \in ]0, 1[; \quad \|T(u) - T(v)\| \leq \gamma \|u - v\| \quad (9.139)$$

Deste modo,

$$\|u^{k+1} - u^k\| = \|T(u^k) - T(u^{k-1})\| \leq \gamma \|u^k - u^{k-1}\| \quad (9.140)$$

Repetindo progressivamente o argumento acima, obtemos:

$$\|u^{k+1} - u^k\| \leq \gamma^k \|u^1 - u^0\| = \gamma^k \|T(u^0) - u^0\| = C \gamma^k \quad (9.141)$$

Seja  $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o operador identidade. Aplicando o limite para  $k \rightarrow \infty$ , obtemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(T - I)(u^k)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{k+1} - u^k\| \leq C \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n = 0 \quad (9.142)$$

Como  $u^k = P_K \phi_{u^{k-1}} \in K$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , e  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de dimensão finita, temos que a sequência  $u^k$  converge fortemente para um vetor  $u^* \in K$ . Deste modo,

$$\|(T - I)(u^*)\| \leq \|(T - I)(u^k)\| + \|(T - I)(u^* - u^k)\| \longrightarrow 0 \quad (9.143)$$

Portanto,  $(T - I)(u^*) = \mathbf{0}$ , ou seja,  $T(u^*) = u^*$ .

### 9.7.3 Método de Relaxação Pontual

Trataremos agora de um problema de minimização em conjuntos convexos. Seja  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional estritamente convexo e  $K$  o conjunto convexo definido anteriormente. Neste caso, existe uma única solução  $u$  do seguinte problema:

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \quad (9.144)$$

Seja  $u^0 = (u_i^0) \in K$ . Vamos definir um método iterativo calculando  $u_i^{k+1}$  de modo que

$$J(u_1^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, \mathbf{u}_i^{k+1}, u_{i+1}^k, \dots, u_n^k) = \inf_{v_i \in K_i} J(u_1^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, v_i, u_{i+1}^k, \dots, u_n^k) \quad (9.145)$$

O método iterativo baseado neste princípio é denominado método de relaxação pontual.

**Teorema 9.14 (Convergência):** Seja  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional estritamente convexo de classe  $C^1$  satisfazendo a seguinte condição:

$$J(u) \rightarrow +\infty ; \|u\| \rightarrow +\infty \quad (9.146)$$

Então, a sequência  $(u^k)$  gerada pelo método de relaxação pontual converge para a solução  $u$  de (9.1260).

*Demonstração :* vide Glowinski et al (1976).

### 9.7.4 Problema Simétrico

No caso em que a matriz  $A$  de  $(V_n)$  é simétrica, temos que  $(V_n)$  equivale ao problema (9.126) para  $J$  dado por:

$$J(u) = \frac{1}{2} u^t A u - f^t u \quad (9.147)$$

Podemos verificar que o método de relaxação pontual leva ao seguinte cálculo iterativo das componentes de  $u$ :

$$u_i^{k+1} = \min \left\{ \max \left\{ \frac{1}{A_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right), c_i \right\}, d_i \right\}$$

Este método é conhecido como método iterativo de Gauss-Siedel com projeção. Uma forma mais conhecida é o método SOR Projetado, que faz uma combinação com parâmetro  $\omega$ ,  $0 < \omega < 2$ , entre a componente obtida no passo atual e a componente do passo anterior; esta combinação é então projetada no conjunto  $K$ :

$$u_i^{k+1} = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\omega}{A_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right) + (1 - \omega) u_i^k, c_i \right\}, d_i \right\}$$

Reescrevendo o passo acima, obtemos:

$$u_i^{k+1} = \min \left\{ \max \left\{ u_i^k - \rho \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} + \sum_{j=i}^n a_{ij} u_j^k - f_i \right), c_i \right\}, d_i \right\} \quad (9.148)$$

onde a constante  $\rho$  é dada por:

$$\rho = \frac{\omega}{A_{ii}} \quad (9.149)$$

Observemos a semelhança do passo (9.148) com o passo (9.138) do método do ponto fixo. Esta comparação foi apresentada por Oden e Kikushi (1980), que ainda sugerem que, se o passo (9.138) do método do ponto fixo fosse adaptado para o passo (9.148), ainda garantiríamos a convergência (para um valor adequado de  $\rho$ ) em função do método SOR Projetado para o caso de matrizes simétricas.

Poderíamos fazer o raciocínio inverso: esperando que a propriedade de ponto fixo seja preservada na substituição de (9.138) por (9.148), garantiríamos a convergência do método SOR Projetado para matrizes não-simétricas baseando-se na convergência do método do ponto fixo para uma escolha adequada do parâmetro  $\rho$ .

Usamos esta abordagem para obter a convergência de outro método baseado no problema de minimização, o método de Gauss-Jacobi com projeções, independente da simetria da matriz:

$$u_i^{k+1} = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\omega}{A_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right) + (1 - \omega) u_i^k, c_i \right\}, d_i \right\}$$

Fazendo a mesma adaptação realizada para levar o método de Gauss-Siedel com projeções ao SOR Projetado (vamos denominar esta adaptação

como método SOR-Jacobi Projetado), obtemos:

$$u_i^{k+1} = \min \left\{ \max \left\{ u_i^k - \rho \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^{k+1} - f_i \right), c_i \right\}, d_i \right\} \quad (9.150)$$

onde a constante  $\rho$  é dada por (9.149). Portanto, o método SOR-Jacobi Projetado é **equivalente** ao método do ponto fixo. O intervalo de variação de  $\omega$ , contudo, é diferente do método SOR Projetado:

$$0 < \omega < \frac{2\alpha \min\{A_{ii}, i = 1, \dots, n\}}{\|A\|^2} \quad (9.151)$$

### 9.7.5 Métodos Iterativos para LCPs

Os métodos iterativos para solução aproximada de problemas de complementaridade linear são baseados nos princípios mencionados anteriormente ou em técnicas de minimização com restrições. Temos ainda o método de penalização, discutido na seção 9.4.

Os testes realizados consideram dois dos métodos iterativos apresentados em Pissarra (1997): o método SOR projetado, que discutimos anteriormente, e um método denominado **método de gradientes conjugados quadrático projetado**.

Os métodos iterativos de solução de sistemas lineares  $Ax = b$  em geral calculam a norma do resíduo  $r = b - Ax$  da solução aproximada e verificam se esta norma atingiu um valor que torna a solução aceitável, ou seja, a norma do resíduo é um **critério de parada** do método.

No caso de LCPs, é conveniente substituir a norma do resíduo pela condição de complementaridade  $(Ax - b)^t(x - c) = 0$ , pois em geral a sequência de soluções geradas por estes métodos satisfazem automaticamente as demais condições ( $Ax \geq b$  e  $x \geq c$ ).

## 9.8 Inequações Variacionais de Evolução

Alguns problemas de evolução do tipo parabólico também podem ser expressos como inequações variacionais. Temos, por exemplo, o modelo clássico de mudança de estado sólido para líquido de um bloco de gelo, conhecido como Problema de Stefan. Problemas em finanças, como o cálculo do prêmio de opções americanas, conduzem a uma formulação semelhante.

Nesta seção vamos fazer uma análise semelhante àquela realizada com o problema do obstáculo em uma dimensão, apresentar o problema geral e tratar de questões numéricas como a aproximação do problema pelo método de Galerkin e uma estimativa de convergência da solução aproximada.

### 9.8.1 Difusão-Convecção Unidimensional

Vamos generalizar a equação estudada no problema do obstáculo adicionando termos de transporte e reação, uma fonte externa e tornando o problema parabólico. Por conveniência, a variável temporal  $t$  estará limitada ao intervalo  $[0, T]$ , com  $T > 0$  dado. Denotando o domínio no espaço-tempo  $]0, L[ \times (0, T)$  por  $\Omega$ , o problema (D) é escrito da seguinte forma:

(D) Encontrar  $u \in H_o^1[0, L]$  tal que, dado  $f, g \in H_o^1[0, L]$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - (\alpha(x)u_x)_x + \beta(x)u_x + \gamma(x)u \geq f(x) & , (x, t) \in \Omega & \text{(D1)} \\ u(x, t) \geq g(x) & , (x, t) \in \Omega & \text{(D2)} \\ [u - g(x)][\mathcal{L}u - f(x)] = 0 & , (x, t) \in \Omega & \text{(D3)} \\ u(x, 0) = u_o(x) & , 0 < x < L & \text{(D4)} \end{cases}$$

Seja  $W = H_o^1([0, L])$ . Definimos  $V$  como um espaço de funções que associam a cada instante  $t \in [0, T]$  uma função  $v(\cdot, t) \in W$ , ou seja, funções  $v : [0, T] \rightarrow W$ . A regularidade com respeito à variável  $t$  exigida pelo problema é satisfeita fracamente se adotarmos um espaço de funções  $L_2$  com respeito a  $t$ , que vamos representar por  $V = L_2([0, T]; W)$ .

O conjunto  $K$  será naturalmente definido como o subconjunto das funções limitadas inferiormente por  $g(x)$ :

$$K = \{v \in W ; v(x, t) \geq g(x) \text{ q.s. em } [0, L]\} \quad (9.152)$$

Esta definição é estendida para o espaço  $V$ :

$$K_V = \{v \in V ; v(\cdot, t) \in K \text{ q.s. em } [0, T] \text{ e } v(x, 0) = u_o(x)\} \quad (9.153)$$

Definimos em  $W$  o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_W = \int_0^L u(x)v(x)dx \quad (9.154)$$

Temos que  $(W, (\cdot, \cdot))$  forma um espaço de Hilbert. O produto interno em  $V$  é definido de forma semelhante:

$$\langle u, v \rangle_V = \int_0^T (u, v)_W dt = \int_0^T \left( \int_0^L u(x, t)v(x, t) dx \right) dt \quad (9.155)$$

Colocamos a condição inicial no subconjunto  $K_V$  ao invés de  $V$  para que  $V$  continue sendo um espaço vetorial, que ainda forma um espaço de Hilbert com o produto interno  $(\cdot, \cdot)_V$ . Vamos construir a formulação variacional a partir do problema (D).

De (D2) e (D4), temos que  $u \in K_V$ . Integrando o produto de  $\mathcal{L}u - f \geq 0$  por  $v - g(x) \geq 0$ , onde  $v$  uma função-teste em  $K$ , temos que:

$$\int_0^L [\mathcal{L}u - f](v - g(x)) dx \geq 0 \quad (9.156)$$

Observando a condição (D3), temos também que

$$\int_0^L [\mathcal{L}u - f](u - g(x)) dx \geq 0 \quad (9.157)$$

Subtraindo (9.156) e (9.157) e trazendo a fonte  $f(x)$  para o lado direito:

$$\int_0^L \mathcal{L}u(v - u) dx \geq \int_0^L f(x)(v - u) dx \quad \forall v \in K \quad (9.158)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \int_0^L -(\alpha(x)u_x)_x(v - u) dx &= [-(\alpha(x)u_x)(v - u)]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L -\alpha(x)u_x(v - u)_x dx \\ \int_0^L -(\alpha(x)u_x)_x(v - u) dx &= \int_0^L \alpha(x)u_x(v - u)_x dx = (\alpha(x)u_x, (v - u)_x) \end{aligned} \quad (9.159)$$

Deste modo, temos que a solução  $u$  de (D) é solução do seguinte problema:

(V) Para todo  $t \in (0, T]$ , encontrar  $u = u(\cdot, t) \in K$  tal que

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad , \quad (9.160)$$

Com a condição adicional

$$\langle u(x, 0), v(x) \rangle = \langle u_o(x), v(x) \rangle \quad \forall v \in K \quad (9.161)$$

A condição (9.161) vem de (D4). A forma bilinear  $a(.,.)$  é dada por:

$$a(u, v) = \langle u_t, v \rangle + \langle \alpha(x)u_x, v_x \rangle + \langle \beta(x), v \rangle + \langle \gamma(x)u, v \rangle \quad (9.162)$$

A formulação acima é a mais conveniente para se manipular do ponto de vista numérico, mas não está na forma usual de uma inequação variacional, pois a solução de (V) não corresponde à função  $u$ , mas sim o conjunto de todas as soluções de (V) para cada  $t \in [0, T]$ .

Uma formulação mais geral é obtida integrando (9.160) com respeito à variável  $t$ , chegando no seguinte problema:

(V<sub>T</sub>) Encontrar  $u \in K_V$  tal que

$$\int_0^T a(u(t), v - u(t))dt \geq \int_0^T \langle f, v - u(t) \rangle dt \quad \forall v \in K \quad (9.163)$$

Para concluir a equivalência entre (V) e (D), vamos verificar que (V) implica (D).

A propriedade (D2) segue do fato de que  $u(\cdot, t) \in K \quad \forall t \in [0, T]$ . As condições (D1) e (D4) são equivalentes a (9.160) e (9.161) respectivamente, adicionando a hipótese de que  $(\alpha(x)u_x)_x$  seja contínua.

Resta verificar (D3). Seja  $(x_o, t_o) \in \Omega$  tal que  $u(x_o, t_o) > g(x_o)$ . Então existem  $\rho > 0$  e  $\alpha \in \mathcal{D}_o([0, L])^+$  tais que  $u - \alpha = u(\cdot, t_o) - \alpha \in K$  e :

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0 & , |x - x_o| < \rho \\ \alpha(x) = 0 & , |x - x_o| \geq \rho \end{cases} \quad (9.164)$$

Escolhendo  $\bar{v} = u - \alpha \in K$ , obtemos de (9.160) a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \langle f, -\alpha \rangle &\leq a(u, -\alpha) = \langle \mathcal{L}u, -\alpha \rangle \\ \langle \mathcal{L}u - f, \alpha \rangle &= \int_{|x-x_o| < \rho} [\mathcal{L}u - f(x)]\alpha(x)dx \leq 0 \end{aligned} \quad (9.165)$$

Suponha que exista  $0 < \bar{\rho} < \rho$  tal que

$$(\mathcal{L}u - f)(x) > 0 \quad , \quad |x - x_o| < \bar{\rho} \quad (9.166)$$

De (9.164), teríamos que:

$$\int_{|x-x_o| < \bar{\rho}} [\mathcal{L}u - f(x)]\alpha(x)dx \geq \int_{|x-x_o| < \bar{\rho}} [\mathcal{L}u - f(x)]\alpha(x)dx > 0 \quad (9.167)$$

Isto leva a uma contradição com (9.165). Assim, a afirmação (9.166) é incorreta, ou seja,  $(\mathcal{L}u - f)(x_o) = 0$ .

Mostramos que  $u(x_o, t_o) - g(x_o) > 0$  implica  $(\mathcal{L}u - f)(x_o) = 0$ . Como  $u(x, t) - g(x) \geq 0$  para todo  $(x, t) \in \Omega$ , podemos afirmar que  $(u - g(x))(\mathcal{L}u - f(x)) = 0$  para todo  $(x, t) \in \Omega$ , estabelecendo a condição (D3).

### 9.8.2 Problema Genérico

Inequações variacionais parabólicas apresentam dificuldades do ponto de vista analítico. Observemos no exemplo anterior que há dois espaços vetoriais envolvidos, um que contém a solução num instante de tempo fixo além das funções-testes, e outro que contém a solução em todo o domínio do tempo.

Vamos estabelecer o problema abstrato: sejam  $J = [0, T]$ ,  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço de Hilbert com norma  $\|u\|_X = \langle u, u \rangle$  e  $K \subset X$  um conjunto convexo e fechado.

Dado  $v : J \rightarrow X$ , definimos:

$$\|v\|_{L_p(J; X)} = \left( \int_0^T \|v(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (9.168)$$

$$\|v\|_{L_\infty(J; X)} = \sup_{t \in J} \|v(t)\|_X \quad (9.169)$$

$$L_p(J; X) = \{v : J \rightarrow X ; \|v\|_{L_p(J; X)} < \infty\} \quad (9.170)$$

Dados  $f, u_o \in X$ , consideremos a seguinte inequação :

(V<sub>t</sub>) Encontrar  $u : J \rightarrow K = \{v \in X ; v \geq 0 \text{ q.s. em } \Omega\}$  tal que

$$\langle u_t, v - u \rangle + a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (9.171)$$

$$\langle u(0), v \rangle = \langle u_o, v \rangle \quad \forall v \in K \quad (9.172)$$

O fato de lidarmos com espaços distintos torna necessária a utilização de ferramentas mais complexas de Análise Funcional no estudo da existência e unicidade de solução de (V<sub>t</sub>). Assim, esta discussão será omitida.

### 9.8.3 Método de Galerkin

A aproximação da solução de uma inequação variacional parabólica pelo método de Galerkin será semelhante ao caso elíptico se considerarmos uma **semi-discretização no tempo**.

Consideremos o problema abstrato  $(V_t)$  visto anteriormente. Aproximamos o domínio do tempo  $[0, T]$  por uma partição  $\tau : 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$  com intervalos uniformes de comprimento  $\Delta t$ . Utilizaremos aproximações  $U : \tau \rightarrow K$  de  $u : [0, T] \rightarrow K$  da forma:

$$U_t^n \approx \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \quad U^n = U(t_n) = U(t_n, x) \quad (9.173)$$

Isto sugere a seguinte aproximação do problema  $(V_t)$ :

$(V_\tau)$  Encontrar  $U : \tau \rightarrow K$  tal que, para todo  $v \in K$ ,

$$\begin{cases} \left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, v - U^{n+1} \right\rangle + a(U^{n+1}, v - U^{n+1}) \geq \langle f, v - U^{n+1} \rangle \\ \langle U^0, v \rangle = \langle u_0, v \rangle \end{cases} \quad (9.174)$$

Sejam  $a_\tau(\cdot, \cdot)$  e  $f_n$  dados por:

$$a_\tau\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle + \Delta t a\langle u, v \rangle, \quad f_n = U^n + \Delta t f \quad (9.175)$$

Temos que a solução  $U^* = U^{n+1}$  de (9.174) para  $n$  fixo, dado que  $U^n$  é conhecida, satisfaz a seguinte inequação variacional elíptica:

$$a_\tau(U^*, v - U^*) \geq \langle f_n, v - U^* \rangle \quad \forall v \in K \quad (9.176)$$

A inequação (9.176) pode então ser aproximada pelo método de Galerkin conforme a abordagem anterior.

O método de solução apresentado acima é denominado método implícito. Esta abordagem é generalizada no método de Crank-Nicolson, que utiliza uma ponderação dos níveis de tempo  $n$  e  $n + 1$ , dado  $\theta \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, v - U^{n+1} \right\rangle + \theta a(U^{n+1}, v - U^{n+1}) + \\ & + (1 - \theta)a(U^n, v - U^{n+1}) \geq \langle f, v - U^{n+1} \rangle \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

#### 9.8.4 Estimativa de Convergência

Vamos apresentar a estimativa obtida em um artigo de Claes Johson (1976). Embora este resultado tenha levado em consideração uma forma



## 9.9 Observações

Este capítulo foi baseado fundamentalmente no artigo de Lions e Stampacchia (1967), um dos artigos pioneiros na área. Contribuições de caráter intuitivo foram obtidas em Baiocchi e Capelo (1982) e Oden e Kikushi (1980).

A abordagem desenvolvida apresenta alguns assuntos pouco explorados na literatura, como inequações variacionais cuja forma bilinear associada é não-singular (este caso corresponde ao problema de precificação estudado), a relação entre os métodos iterativos com projeções e o método do ponto fixo para inequações variacionais e a utilização do método de Galerkin para problemas não-simétricos.

Aplicações de inequações variacionais no problema de precificação são apresentadas em Myneni (1992) e Wilmott et al (1993).

Vide em Pissarra (1997) uma coletânea de métodos numéricos para Problemas de Complementaridade Linear. Alguns destes métodos foram utilizados neste trabalho.

# Capítulo 10 :

## Experimentos Numéricos (II)

Vamos verificar o desempenho de alguns métodos propostos para o cálculo do prêmio de opções americanas, comparando os resultados com valores propostos por Sullivan (1997).

### 10.1 Descrição e Resultados

Os métodos avaliados foram os seguintes:

1. Método Explícito (EXP) ;
2. Método Explícito com Malha não-Uniforme (EXPNU) ;
3. Método SOR-Projetado (SOR-P);
4. Método SOR-Projetado com deslocamento do contorno (SOR-P2);
5. Método de Elementos Finitos com Gradiente Quadrático Projetado (SCGP);
6. Método de Elementos Finitos com Gradiente Quadrático Projetado com Malha não-Uniforme (SCGPNU);
7. Método de Penalização (PENALZ);

Os métodos SCGP e SCGPNU foram implementados em linguagem FORTRAN, enquanto os demais foram desenvolvidos em MATLAB for Windows.

O método de gradientes conjugado quadrático projetado, adequado para LCPs cuja matriz é não simétrica, é apresentado em Pissarra (1997). Apresentamos a seguir os gráficos de cada método, em que utilizamos os seguintes parâmetros :

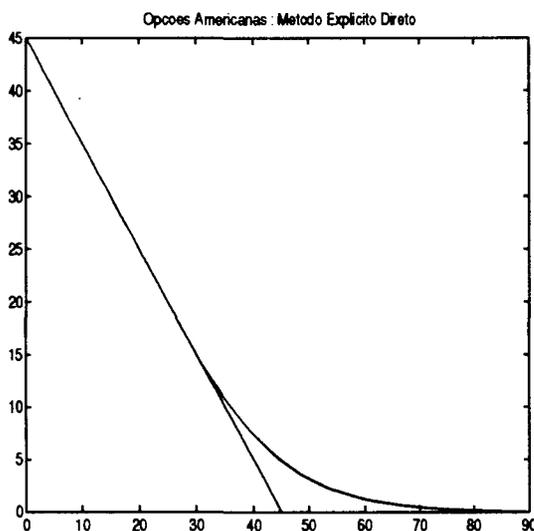
$$r = 0.048\%/ano, \sigma^2 = 16\%/ano, E = \$45, S = \$40. T = 7 meses$$

Utilizamos 100 pontos no preço e 500 no tempo para os métodos explícitos e o método de penalização e 200 pontos no preço e 100 no tempo para os demais métodos.

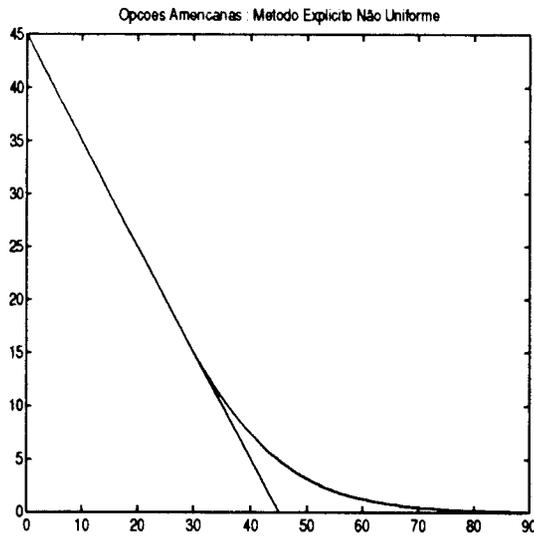
Comparamos ainda os resultados de cada método com os valores do prêmio obtidos pelo método binomial com 10000 pontos (Sullivan (1997)), que vamos simbolizar por BINOM ; calculamos o erro relativo dos métodos implementados com respeito a estes valores. Os testes foram realizados com o mesmo números de pontos no domínio dos gráficos e para diferentes valores de  $E$  e  $T$ . Permanecem fixos os seguintes parâmetros:

$$r = 0.048\%/ano, \sigma^2 = 16\%/ano, S = \$40$$

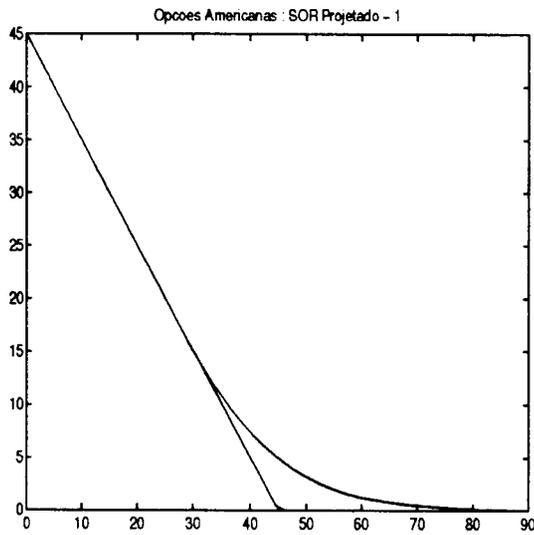
Nos testes realizados, consideramos o preço fixo em  $S_0 = 40$ . Quando  $S_0$  não pertencia à partição do domínio, o valor do prêmio neste ponto era calculado por interpolação linear do prêmio nos pontos vizinhos.



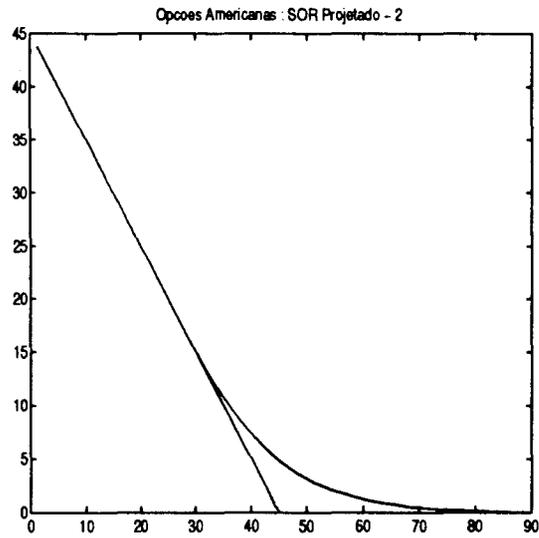
**Figura 10.1:** Método EXP



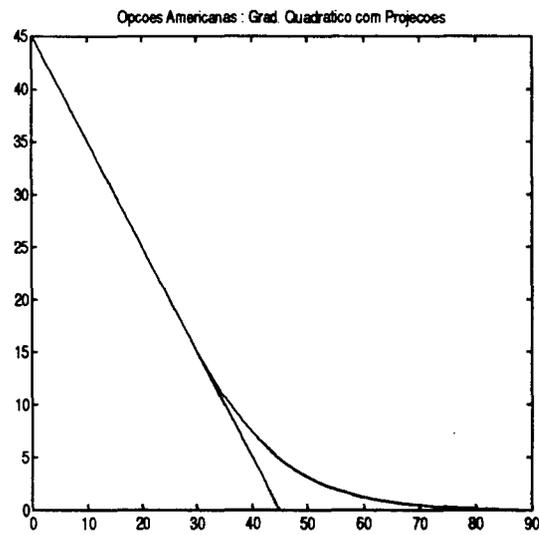
**Figura 10.2:** Método EXPNU



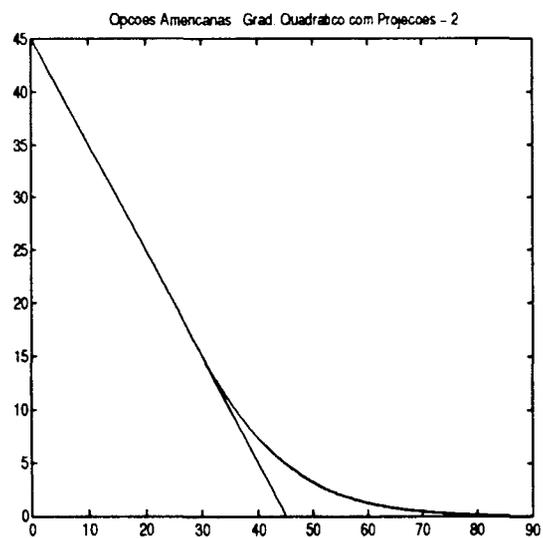
**Figura 10.3:** Método SOR-P



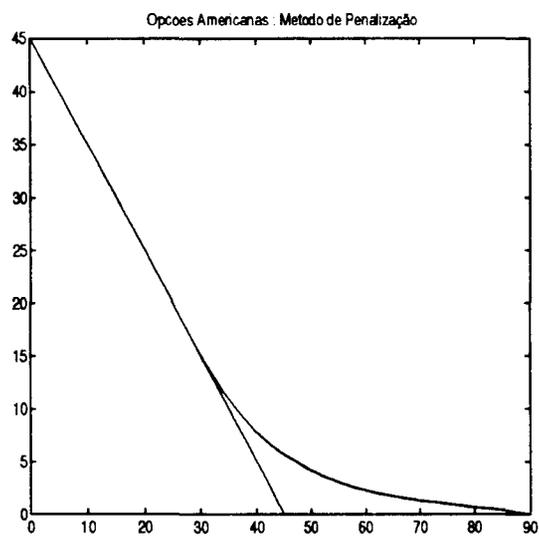
**Figura 10.4:** Método SOR-P2



**Figura 10.5:** Método SCGP



**Figura 10.6:** Método SCGPNU



**Figura 10.7:** Método PENALZ

<b>Método:</b>	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
BINOM	0.2466	1.3460	2.1594
EXP	0.2464	1.3479	2.1598
EXPNU	0.2474	1.3490	2.1606
SOR-P	0.2553	1.3524	2.1622
SOR-P2	0.2486	1.3499	2.1602
CGSP	0.2472	1.3454	2.1540
CGSPNU	0.2472	1.3452	2.1538
PENALZ	0.2652	1.7906	2.5178

**Tabela 10.1 :** Valores do Prêmio com  $E = 35$ .

<b>Método:</b>	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
EXP	$8.1103 \times 10^{-4}$	$1.4116 \times 10^{-3}$	$1.8524 \times 10^{-4}$
EXPNU	$3.2441 \times 10^{-3}$	$2.2288 \times 10^{-3}$	$5.5571 \times 10^{-4}$
SOR-P	$3.5280 \times 10^{-2}$	$4.7548 \times 10^{-3}$	$1.2967 \times 10^{-3}$
SOR-P2	$8.1103 \times 10^{-3}$	$2.8975 \times 10^{-3}$	$3.7047 \times 10^{-4}$
CGSP	$2.4331 \times 10^{-3}$	$4.4577 \times 10^{-4}$	$2.5007 \times 10^{-3}$
CGSPNU	$2.4331 \times 10^{-3}$	$5.9435 \times 10^{-4}$	$2.5933 \times 10^{-3}$
PENALZ	$7.5426 \times 10^{-2}$	$3.3031 \times 10^{-1}$	$1.6597 \times 10^{-1}$

**Tabela 10.2 :** Erros Relativos com Respeito ao Método BINOM.

<b>Método:</b>	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
SOR-P	$-1.3890 \times 10^{-12}$	$-2.7384 \times 10^{-12}$	$-3.6615 \times 10^{-12}$
SOR-P2	$-1.7495 \times 10^{-12}$	$-3.8895 \times 10^{-12}$	$-4.1444 \times 10^{-12}$
CGSP	$3.5020 \times 10^{-11}$	$0.1186 \times 10^{-9}$	$-0.3439 \times 10^{-9}$
CGSPNU	$-0.1149 \times 10^{-12}$	$0.6518 \times 10^{-10}$	$4.5484 \times 10^{-10}$
PENALZ	$-0.9568 \times 10^{-3}$	$0.5206 \times 10^{-1}$	$0.3701 \times 10^{-1}$

**Tabela 10.3 :** Condição de Complementaridade Linear.

Método:	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
BINOM	1.7681	3.3874	4.3526
EXP	1.7627	3.3894	4.3572
EXPNU	1.7661	3.3909	4.3602
SOR-P	1.7787	3.3957	4.3627
SOR-P2	1.7795	3.3949	4.3620
CGSP	1.7663	3.3854	4.3514
CGSPNU	1.7665	3.3855	4.3514
PENALZ	1.7608	3.7775	4.8811

**Tabela 10.4 :** Valores do Prêmio com  $E = 40$ .

Método:	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
EXP	$3.0541 \times 10^{-3}$	$5.9042 \times 10^{-4}$	$1.0568 \times 10^{-3}$
EXPNU	$1.1312 \times 10^{-3}$	$1.0332 \times 10^{-3}$	$1.7461 \times 10^{-3}$
SOR-P	$5.9951 \times 10^{-3}$	$2.4503 \times 10^{-3}$	$2.3205 \times 10^{-3}$
SOR-P2	$6.4476 \times 10^{-3}$	$2.2141 \times 10^{-3}$	$2.1596 \times 10^{-3}$
CGSP	$1.0180 \times 10^{-3}$	$5.9042 \times 10^{-4}$	$2.7570 \times 10^{-4}$
CGSPNU	$9.0493 \times 10^{-4}$	$5.6090 \times 10^{-4}$	$2.7570 \times 10^{-4}$
PENALZ	$4.1287 \times 10^{-3}$	$1.1516 \times 10^{-1}$	$1.2142 \times 10^{-1}$

**Tabela 10.5 :** Erros Relativos com Respeito ao Método BINOM.

Método:	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
SOR-P	$-1.3890 \times 10^{-12}$	$-2.7384 \times 10^{-12}$	$-3.6615 \times 10^{-12}$
SOR-P2	$-1.7495 \times 10^{-12}$	$-3.8895 \times 10^{-12}$	$-4.1444 \times 10^{-12}$
CGSP	$0.8089 \times 10^{-10}$	$0.7984 \times 10^{-10}$	$-0.1294 \times 10^{-9}$
CGSPNU	$0.6598 \times 10^{-12}$	$1.1846 \times 10^{-10}$	$4.4070 \times 10^{-10}$
PENALZ	$0.1247 \times 10^{-2}$	$0.6800 \times 10^{-1}$	0.1291

**Tabela 10.6 :** Condição de Complementaridade Linear.

Método:	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
BINOM	5.2868	6.5099	7.3830
EXP	5.2902	6.5171	7.2899
EXPNU	5.2895	6.5167	7.3940
SOR-P	5.2959	6.5192	7.3949
SOR-P2	5.2908	6.5190	7.3926
CGSP	5.2874	6.5101	7.3841
CGSPNU	5.2877	6.5102	7.3841
PENALZ	5.2928	6.7151	7.8429

**Tabela 10.7 :** Valores do Prêmio com  $E = 45$ .

Método:	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
EXP	$6.4311 \times 10^{-4}$	$1.1060 \times 10^{-3}$	$1.2610 \times 10^{-2}$
EXPNU	$5.1071 \times 10^{-4}$	$1.0446 \times 10^{-3}$	$1.4899 \times 10^{-3}$
SOR-P	$1.7213 \times 10^{-3}$	$1.4286 \times 10^{-3}$	$1.6118 \times 10^{-3}$
SOR-P2	$7.5660 \times 10^{-4}$	$1.3979 \times 10^{-3}$	$1.3003 \times 10^{-3}$
CGSP	$1.1349 \times 10^{-4}$	$3.0722 \times 10^{-5}$	$1.4899 \times 10^{-4}$
CGSPNU	$1.7024 \times 10^{-4}$	$4.6084 \times 10^{-5}$	$1.4899 \times 10^{-4}$
PENALZ	$1.1349 \times 10^{-3}$	$3.1521 \times 10^{-2}$	$6.2292 \times 10^{-2}$

**Tabela 10.8 :** Erros Relativos com Respeito ao Método BINOM.

Método:	$T = 1/12$	$T = 4/12$	$T = 7/12$
SOR-P	$-1.3890 \times 10^{-12}$	$-2.7384 \times 10^{-12}$	$-3.6615 \times 10^{-12}$
SOR-P2	$-1.7495 \times 10^{-12}$	$-3.8895 \times 10^{-12}$	$-4.1444 \times 10^{-12}$
CGSP	$-0.2097 \times 10^{-10}$	$-0.3603 \times 10^{-10}$	$0.3650 \times 10^{-9}$
CGSPNU	$0.1180 \times 10^{-12}$	$1.2650 \times 10^{-10}$	$5.4427 \times 10^{-10}$
PENALZ	$0.1578 \times 10^{-2}$	$0.86017 \times 10^{-1}$	0.2799

**Tabela 10.9 :** Condição de Complementaridade Linear.

## 10.2 Observações

Assim como no capítulo 6, usamos a relação de estabilidade (4.34) como critério de escolha do número de pontos no preço e no tempo.

O aumento dos valores dos parâmetros  $E$  e  $T$  fazem com que o domínio  $S \times t$  aumente de tamanho, piorando o refinamento. Isto justifica o crescimento do erro absoluto e do valor da condição de complementaridade à medida que o valor destes parâmetros aumenta nas tabelas acima.

As diferenças entre os valores da condição de complementaridade dos métodos transformados (SOR-P e SOR-P2) e dos métodos não-transformados (SCGP e SCGP-2) deve-se especialmente ao fator de escala  $E$  observado em (3.23).

Os melhores resultados foram obtidos com o métodos de elementos finitos SCGP e SCGP-2. Tanto no caso de elementos finitos como no método explícito de diferenças finitas, não observamos melhorias na substituição da malha não-uniforme pela malha E-concentrante. Entretanto, a adaptação utilizada pelo método SOR-P2 mostrou-se significativa, dado o desempenho face ao SOR-P.

Os valores negativos da condição de complementaridade observados especialmente nos métodos SOR-P e SOR-P2 foram observadas graficamente como violações da restrição  $P \geq (E - S)^+$ .

Sullivan (1997) faz uma comparação dos resultados de diversos métodos numéricos com o mesmo conjunto de dados utilizado neste capítulo. Neste artigo, o erro relativo mínimo para o método de diferenças finitas é  $-5.0 \times 10^{-4}$ , enquanto o máximo é de 0.1959. A menos do método de penalização, que não apresentou um desempenho satisfatório, os métodos testados nesta seção tiveram resultados bem melhores que os resultados de diferenças finitas citados no artigo. Esta diferença de desempenho deve-se principalmente ao fato de que Sullivan (1997) utilizou o mesmo número de pontos no espaço e no tempo, reduzindo a eficiência do método.

## Comentários Finais

Temos que boa parte dos objetivos estabelecidos foram alcançados: os métodos de diferenças finitas foram intensivamente utilizados e a solução por inequações variacionais foi implementada com o método de elementos finitos, proporcionando a valiosa adição de métodos de solução de LCPs no problema particular de precificação de opções.

Observando os resultados numéricos relativos às opções européias e americanas, notamos o quanto a solução pode ser aprimorada com o uso de modificações adequadas nos métodos.

Os resultados indicam que os métodos de solução que não transformam a equação podem ser mais adequados que os métodos transformados. O fato dos coeficientes da equação de *Black-Scholes* serem variáveis não representou grandes dificuldades ao problema.

Os temas discutidos neste trabalho servem como ponto de partida para modelos sofisticados para opções, como modelos com custos de transações, que causam a adição de um termo não-linear na equação.

Poderíamos ter analisado o desempenho dos métodos de diferenças finitas face a outros métodos, como o Binomial e o método de Monte Carlo, o que seria atraente para fins práticos.

Os aspectos teóricos foram bastante satisfatórios. Apesar do pouco aprofundamento nos assuntos discutidos (exceção feita às inequações variacionais, um tema que, mesmo sendo bastante pesquisado, não possui a disponibilidade de livros-textos dos demais assuntos), vários pequenos resultados contribuíram para esclarecer a teoria envolvida na precificação de opções.

## Bibliografia

- [1] Baiocchi, C. e Capelo, A. (1984). *Variational and Quasivariational Inequalities*. John Wiley & Sons.
- [2] Black, F. e Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol 4, 323-38.
- [3] Brennan, M. J. e Schwartz, E.S. (1978). Finite Difference Methods Arising in the Pricing of Contingent Claims: a Synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 13, 461-74.
- [4] Broadie, M. e Detemple, J. (1996). American Option Valuation: new bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods. *The Review of Financial Studies*, Vol 9, 1211-1250.
- [5] Courtedon, G. (1982). A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 17, 697-705.
- [6] Duffie, D. (1988). *Security Markets: Stochastic Models*. Academic Press
- [7] Figlewski, S. , Siber, W. L. e Subrahmanyam, M. G. (ed) (1990). *Financial Options - From Theory to Practice*. Irwin.
- [8] Forsythe, G. E. e Wasow, W.R. (1978). *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc.
- [9] Geske, R. e Shastri, K. (1985). Valuation by Approximation : A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 20, 45-71.
- [10] Glowinski, R. ,Lions, J. L. e Trémolières (1976). *Analyse Numérique de Inéquations Variationnelles, Tome 1*. Dunod.
- [11] Forsythe, G. E. e Wasow, W.R. (1978). *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc.

- [12] Harrison, J. M. e Kreps, D. M. (1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, Vol 20, 381-408.
- [13] Hull, J. (1997). *Options, Futures and Other Derivatives, 3rd. Edition*. Prentice Hall.
- [14] Hull, J. e White, A. (1990). Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 25, 87-100.
- [15] Iório, V. (1991). *EDP, um Curso de Graduação*. IMPA, CNPq.
- [16] James, B. R. (1981). *Probabilidade; um Curso em nível intermediário*. IMPA, CNPq.
- [17] Johnson, C. (1976). A Convergence Estimate for an Approximation of a Parabolic Variational Inequality. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 13, 599-606.
- [18] Johnson, C. (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press.
- [19] Kloeden, P. E. e Platen, E. (1995). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.
- [20] Knup, P. e Steinberg, S. (1994). *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press.
- [21] Lions, J. L. e Stampacchia, G. (1967). Variational Inequalities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 20, 493-519.
- [22] Malliaris, A. G. e Brock, W. A. (1982). *Stochastic Methods in Economics and Finance*. North-Holland.
- [23] Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol 4, 141-83.
- [24] Myneni, R. (1992). The Pricing of the American Option. *The Annals of Applied Probability*, Vol 2, 1-23.

- [25] Oden, J. T. e Kikushi, K (1980). Theory of Variational Inequalities with Applications to Problems of Flow through Porous Media *Int. J. of Engr. Science*, Vol 18, pp1173-1284
- [26] Oliveira, S. P. e Pulino, P (1997). *Análise de Estabilidade para Métodos de Diferenças Finitas - Equações Parabólicas Lineares* . Relatório de Pesquisa RP 94/97. IMECC/UNICAMP.
- [27] Pissarra, C. A. (1997). *Problemas de Complementaridade Linear: Aspectos Teóricos, Computacionais e Aplicações* . Tese de Mestrado. IMECC/UNICAMP.
- [28] Revuz, D. e Yor, M. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer.
- [29] Silva Neto, L. A. (1994). *Opções : do Tradicional ao Exótico*. Atlas.
- [30] Smith, (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations - Finite Difference Methods* , 3rd Ed.. Claredon Press - Oxford.
- [31] Sullivan, M. A. (1997). Valuing American Options Using Gaussian Quadrature. *Third International Conference on Computing in Economics and Finance*. Stanford, USA.
- [32] Van Moerbeke, P. (1976). On Optimal Stopping and Free Boundary Problems. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, Vol 60,101-148
- [33] Vieira Sobrinho, J. D. (1984). *Matemática Financeira, 2a. ed.* Atlas.
- [34] Wilmott, P. , Howison, S. e Dewynne, J. (1993). *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press.
- [35] Wilmott, P. , Howison, S. e Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press.
- [36] Zeidler, E. (1990). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B: Nonlinear Monotone Operators..* Springer.
- [37] Zvan, R., Forsyth, P. A. e Vetzal, K. (1996). *Robust Numerical Methods for PDE models of Asian Options*. University of Waterloo.