Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática Pura

Quocientes Simples dos Torneios Normais

Giuliano Gadioli La Guardia

Orientador Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl

Campinas, 20 de Fevereiro de 1998

Quocientes Simples dos Torneios de Douglas

Giuliano Gadioli La Guardia

Orientador
Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril – 1998

Quocientes Simples dos Torneios de Douglas.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por GIULIANO GADIOLI LA GUARDIA e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de Abril de 1998

Prof. Dr:. José Carlos de Souza Kiihl.
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 28 de abril de 1998

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL

Claudina Izepe Rodrigues

Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Caio José C. Negreiros

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

Agradecimentos

Agradeço

• aos meus pais e aos meus irmãos, pelo incentivo, pela força nos momentos difíceis e pelo carinho e compreenção

• a professora Claudina Izepe Rodrigues pela imensa ajuda que prestou para a realização deste trabalho, pelo auxílio no curso de mestrado e pela preocupação em me ajudar

• ao professor Alexandre Ananin, pela grande ajuda na digitação desse trabalho e pelo constante acompanhamento

• ao meu orientador José Carlos de Souza Kiihl, pelo apoio e pela força

• aos meus amigos Édson Donizete de Carvalho e Laudo Claumir Santos pela amizade e por tudo que aprendemos juntos nesse curso de mestrado

• a todos os professores que me ajudaram no curso de mestrado

Conteúdo

Introdução

Na Teoria de Grafos, a classe dos torneios é uma das mais estudadas dentre os digrafos. Como é sabido, dado um torneio T_n, de ordem n, a probabilidade que ele seja hamiltoniano (isto é, tenha um n-ciclo passando por todos os seus vértices) é quase um. Este fato justifica o grande interesse, e o enorme número de artigos de pesquisa, sobre a classe dos torneios hamiltonianos. Em 1966, J.W.Moon (veja [13]) estudou a seguinte questão:

"Dado um torneio hamiltoniano H_n, de ordem n, qual o número mínimo de k-ciclos, com $3 \leq k \leq n$?"

Em [23], J.W.Moon demonstrou que este número mínimo é exatamente $n-k+1$, exibindo um torneio A_n (bineutral) tal que para cada valor k, com $3 \leq k \leq n$, em A_n temos exatamente $n-k+1$ k-ciclos.

Na Teoria de Grafos, a caracterização de classes, satisfazendo propriedades extremais, é um assunto de muito interesse.

Em 1960, P.Camion (veja [3]) deu algumas caracterizações para os torneios hamiltonianos admitindo um único n-ciclo. Em 1970, R.J.Douglas apresentou uma caracterização (veja [5]) que permitiu a M.R.Garey fazer a enumeração destes torneios. Em [22], M.R.Garey mostra que o número dos torneios D_n que admitem um único n-ciclo é dado por F_{2n-6}, com $n \geq 4$, onde F_i denota o i-ésimo número de Fibonacci.

No presente trabalho, apresentamos uma outra caracterização para a classe destes torneios hamiltonianos admitindo um único n-ciclo (que serão chamados de torneios de Douglas), que foi apresentada por D.C.Demaria e J.C.S.Kiihl em 1990 (veja [8]).

Esta caracterização é estrutural, permitindo obter o mesmo resultado de enumeração de M.R.Garey, utilizando algumas variações do triângulo de

Pascal (veja [22]).

Este nosso trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e definições básicas para digrafos e torneios, bem como alguns resultados fundamentais.

No Capítulo 2, estudamos a classe dos D-torneios, isto é, dos torneios de Douglas.

No Capítulo 3, apresentamos as relações entre a classe dos torneios de Douglas e a classe dos torneios normais (que são os torneios hamiltonianos que possuem um único ciclo minimal — veja [4] e [5]). Concluindo este Capítulo apresentamos o

Teorema. *Seja H_n um torneio hamiltoniano com $cc(H_n) = k \geq 3$. Então H_n é um torneio de Douglas se e somente se H_n satisfaz as seguintes propriedades:*

(1.1) *H_n tem como quociente simples um torneio Q_m, $m \geq 5$, tal que:*

(a) *O torneio Q_m é normal*

(b) *O subtorneio de polos em Q_m é transitivo*

(c) *Todos os polos de Q_m são de classe* 1

(d) *Entre dois polos x_i e x_j de Q_m de classe* 1, *a seguinte regra de adjacências vale: $x_i \rightarrow x_j$ implica que $j \leq i+1$*

(1.2) *H_n pode ser construído a partir de Q_m substituindo-se os vértices de Q_m, exceto os vértices $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}$ de seu ciclo característico A_k, por algum torneio transitivo*

(2) *H_n é a composição de um singleton e dois torneios transitivos com um 3-ciclo*

o qual dá a caracterização estrutural dos torneios de Douglas, utilizando técnicas provenientes da Teoria de Homotopia Regular para Digrafos, desenvolvida por D.C.Demaria e seus colaboradores, nos anos 70 e 80.

Capítulo 1. Preliminares

Introduzimos aqui as definições preliminares na teoria de grafos. Lembramos que tais definições não são universais e, em certo aspecto, propiciam alguma confusão, pois o que é grafo para um autor, para outro é digrafo e para um terceiro é multigrafo. Contudo, as definições apresentadas são satisfatoriamente objetivas para o propósito do texto, e podem ser encontradas em [7]e [6].

Definição 1.1. Um *grafo* consiste numa dupla (V, A), onde V é um conjunto finito não vazio e A é uma família finita de pares não ordenados de V. Chamando G o grafo em questão, temos $G = (V, A)$, $V = V(G)$ é o conjunto dos vértices e $A = A(G)$ é a família das arestas. Se $\alpha \in A$, α está associada a dois vértices (não necessariamente distintos) $u, v \in V$, e dizemos que α liga u e v. Em alguns casos, por absurdo de linguagem, consideramos $G = V$ mas sempre subentendendo as arestas A. Portanto, um grafo se caracteriza por uma estrutura finita de pontos na maneira como se ligam estes pontos.

Se mantivermos a definição acima alterando uma característica de A, ou melhor, considerando A como uma família finita de pares ordenados de V, obtemos uma estrutura um pouco mais rica:

Definição 1.2. Um *digrafo* consiste numa dupla (V, A), onde V é um conjunto finito não vazio e A é uma família finita de pares ordenados de V.

Em ambos os casos acima definidos são permitidas arestas distintas associadas ao mesmo par de vértices, distintos ou não. Fazendo apenas a restrição de exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos (no digrafo) chegamos então à

Definição 1.3. Um *torneio* é uma dupla (V, A), com V conjunto finito não vazio, $A \subset V \times V$ um subconjunto que não intercepta a diagonal, e com a seguinte propriedade: dados $a, b \in V$ com $a \neq b$, então ou $(a, b) \in A$ ou $(b, a) \in A$ (exclusivamente). Assim, um torneio é um digrafo onde não se permitem *laços* (um vértice ligado a ele mesmo) nem arestas múltiplas, mas exige-se exatamente uma aresta entre dois vértices distintos.

A ordem de um torneio é o número de seus vértices. Em geral, designamos T_n um torneio de ordem n, e denotamos $|T_n| = n$. Quando $(a, b) \in A$, dizemos que a precede b, denotamos $a \to b$, e quando contrário, a sucede b, denotamos $a \leftarrow b$.

Definição 1.4. Um *homomorfismo* entre os torneios T_n e T'_k é uma função $f : T_n \to T'_k$ tal que se $a, b \in T_n$, com $a \to b$, então, ou $f(a) = f(b)$, ou $f(a) \to f(b)$. Um *epimorfismo* é um homomorfismo sobrejetor, um *monomorfismo* é um homomorfismo injetor e um *isomorfismo* é um homomorfismo bijetor.

Definição 1.5. Se $T = (V, A)$ é um torneio e $V' \subset V$, o torneio dado por $T' = (V', A')$, onde A' são as relações induzidas de A, é chamado *subtorneio* de T *induzido* por V', também denotado $T' = [V']$. Observe que A' é o maior subconjunto de A para o qual a definição de T' faz sentido. De fato, um subtorneio é a imagem de um monomorfismo entre torneios.

Definição 1.6. Dado um epimorfismo entre dois torneios, $f : T_n \to R_k$. Então f define uma partição com k classes sobre T_n. Se $V(R_k) = \{a_1, \ldots, a_k\}$, tome $U_i = f^{-1}(a_i)$. Se para i e j temos $a_i \to a_j$, então $w \to z$ para todo $w \in U_i$ e $z \in U_j$. Neste caso, existe uma relação bem definida entre estes dois conjuntos, e podemos escrever $U_i \to U_j$. Podemos também escrever $T_n = R_k(U_1, \ldots, U_k)$, onde cada U_i substitui o vértice a_i original.

Então R_k é um *quociente* de T_n. Falamos também que $T_n = R_k(U_1, \ldots, U_k)$ é a composição de k *componentes* $U_1, \ldots, U_k$ com o quociente R_k. Observe que se escolhermos k vértices de T_n, sejam $\{p_1, \ldots, p_k\}$, com $p_i \in U_i$ para todo $1 \leq i \leq k$, o subtorneio de T_n gerado por esses vértices será isomorfo a R_k pela restrição de f.

Definição 1.7. Se $T' \subset T$ é um subtorneio e $v \in V(T) - V(T')$, dizemos que v *cona* T' caso $v \rightarrow T'$ ou $v \leftarrow T'$.

Definição 1.8. Um *caminho* é uma sequência de vértices de um torneio da forma $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \ldots \rightarrow a_k$. Isto é:

- Se $i \neq j$, então $a_i \neq a_j$
- Para todo i, $1 \leq i \leq k-1$, temos $a_i \rightarrow a_{i+1}$

Definição 1.9. Um caminho L que passe por todos os vértices de um torneio é um *caminho hamiltoniano.*

Definição 1.10. Um *ciclo* é um caminho fechado, ou seja, com a notação da definição 1.8, teríamos $a_k \rightarrow a_1$. Neste caso, consideramos dois ciclos iguais se passarem pelos mesmos vértices e na mesma sequência, a menos de rotação dos índices. É melhor definir o ciclo como um subtorneio do tipo indicado.

Definição 1.11. Um torneio é dito *hamiltoniano* se existe um ciclo passante (uma só volta) atravessando todos os vértices, sendo genericamente designado H_n, com n sua ordem.

Definição 1.12. Um torneio T_n com $n > 1$ é dito *simples* quando tem só dois quocientes: T_n e T_1, onde T_1 denota o torneio formado por um único vértice.

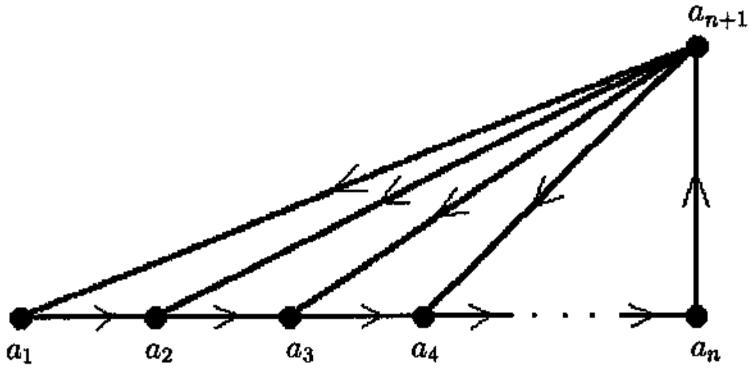
Definição 1.13. Sejam H_n um torneio hamiltoniano e C um ciclo em H_n. Caso não exista vértice de $H_n - C$ conando C, o ciclo C é dito *não-conado* em H_n e os vértices de $H_n - C$ são chamados *polos* associados a C. Um ciclo C não-conado em H_n é *minimal* se cada ciclo C_1 tal que $V(C_1) \subset V(C)$ e $V(C_1) \neq V(C)$ é conado por no mínimo um vértice de H_n. Um ciclo minimal é *característico* se possui o menor comprimento dos ciclos minimais. O comprimento $\text{cc}(H_n)$ de um ciclo característico é a *característica cíclica* de H_n. A diferença $n - \text{cc}(H_n)$ é chamada *diferença cíclica* de H_n e denotada por $\text{cd}(H_n)$.

Definição 1.14. Dados um torneio hamiltoniano H_n e $v \in V(H_n)$. Dizemos que v é vértice *neutro* de H_n quando $[H_n - v]$ for hamiltoniano. Indicamos por $\nu(H_n)$ o número de vértices neutros de H_n. Entre $\nu(H_n)$ e $\text{cd}(H_n)$, temos a relação $\nu(H_n) \geq \text{cd}(H_n)$.

Definição 1.15. Um torneio T_n é dito *normal* se é hamiltoniano e tem um único ciclo minimal (o ciclo característico) ou, equivalentemente, $\text{cd}(H_n) = \nu(H_n)$.

Definição 1.16. O torneio A_n, $n \geq 4$, com o conjunto de vértices $V(A_n) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e o conjunto de arestas $E(A_n) = \{a_i \to a_j \mid j < i - 1 \text{ ou } j = i + 1\}$ é chamado *torneio bineutral* de *ordem n*.

Observação 1.17. A_n é o único torneio hamiltoniano que tem exatamente dois vértices neutros. Além disso, para $n \geq 5$, $\{a_{n-1}, a_n, a_1, a_2\}$ é seu subtorneio maximal transitivo formado por vértices consecutivos do ciclo hamiltoniano.



Definição 1.18. Os vértices de um subtorneio S de um torneio T são *equivalentes* se cada vértice, não em $V(S)$, cona $V(S)$.

Se os vértices de T_n podem ser particionados em subtorneios disjuntos $S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}$ de vértices equivalentes e R_m denota o torneio de m vértices $w_1, \ldots, w_n$ tais que $w_i \to w_j$ se e somente se $S^{(i)} \to S^{(j)}$, então $T_n = R_m(S^{(1)}, \ldots, S^{(m)})$ é a composição de m componentes $S^{(1)}, \ldots, S^{(m)}$ com o quociente R_m.

Observação 1.19. Sempre posso particionar (no mínimo o torneio trivial).

Os resultados a seguir, conquanto sejam pré-requisitos à teoria dos torneios, e estejam quase todos nas referências, são apresentados para que o leitor tenha uma idéia do gênero das demonstrações na teoria de grafos diretos.

Proposição 1.20. *Todo torneio T_n, $n > 1$, admite um quociente simples*

Demonstração: Se T_n for simples, nada há para demonstrar. Se não, existe k, $1 < k < n$, e um epimorfismo $f : T_n \to T_k$. Se T_k for simples, está demonstrado. Se não, encontramos s, $1 < s < k$, e um epimorfismo

$g : T_k \to T_s$. Não é difícil ver que a composta de g com f é um epimorfismo de T_n sobre T_s. Repetimos o mesmo argumento para T_s, obtendo, se necessário, m com $1 < m < s$ e um torneio T_m em condições análogas. Com tal procedimento só temos possibilidade de acabar num torneio simples. Concluimos que este torneio (que é um quociente simples de T_n) existe, pois o processo tem no máximo $n-1$ etapas.

Teorema 1.21. *Todo torneio T_n admite exatamente um quociente simples. Se T'_k é esse quociente simples e $p_s : T_n \to T''_s$ é um epimorfismo sobre outro torneio T''_s, então T'_k é também quociente simples de T''_s*

Demonstração: Sendo $p_k : T_n \to T'_k$ um epimorfismo sobre algum quociente simples T'_k, tome U_k e U_s sendo os conjuntos das partições associadas a p_k e p_s respectivamente. Coloque $T'_k = T'_k(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ e $T''_k = T''_k(v_1, v_2, \ldots, v_s)$, $\alpha_j = p_k^{-1}(u_j)$, $\beta_i = p_s^{-1}(v_i)$, para j e i satisfazendo $1 \leq j \leq k$ e $1 \leq i \leq s$.

Afirmamos que se existem índices $t \neq r$ e i com $\beta_i \cap \alpha_t \neq \emptyset$ e $\beta_i \cap \alpha_r \neq \emptyset$, então $\beta_i \cap \alpha_m \neq \emptyset$ para $1 \leq m \leq k$. O caso $k = 2$ é consequência das próprias sentenças anteriores. Se $k > 2$, tome $x_t \in \beta_i \cap \alpha_t$ e $x_r \in \beta_i \cap \alpha_r$. Suponha que exista h com $\beta_i \cap \alpha_h = \emptyset$. Agora tome x_m em α_m arbitrariamente, com $1 \leq m \leq k$ e $m \notin \{t, r\}$. Podemos ver que o subtorneio $L_k = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ é isomorfo a T'_k; logo é simples. Mas $\{v_i, p_s(x_h)\} \subset p_s(L_k)$ e, de $p_s(x_h) \neq v_i$, concluimos que $2 \leq |p_s(L_k)|$. Temos $|p_s(L_k)| < k$, pois $p_s(x_t) = p_s(x_r)$. Portanto a imagem de L_k por p_s é um subtorneio não trivial e menor que L_k, contrariando sua simplicidade. Para não ocorrer isto, devemos ter

$$\beta_i \cap \alpha_m \neq \emptyset \quad \text{para cada } m \text{ tal que } 1 \leq m \leq k. \qquad (*)$$

(i) Se houver alguma classe β_i satisfazendo $(*)$, ela será única. Se não, supor por absurdo que existam i e j, índices com β_i e β_j satisfazendo $(*)$, $i \neq j$, e tome duas classes α_r e α_t com $r \neq t$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\beta_i \to \beta_j$ e $\alpha_r \leftarrow \alpha_t$. Tome $u \in \beta_i \cap \alpha_r$ e $u' \in \beta_j \cap \alpha_t$, então $u \to u'$ e simultaneamente $u \leftarrow u'$, um absurdo. Há portanto no máximo uma classe β_i satisfazendo $(*)$.

(ii) No caso $k > 2$, não há nenhuma classe β_i satisfazendo $(*)$; pois se existisse, ela seria única e poderíamos construir L_k de forma análoga a (i) tomando $k-1$ vértices em β_i e um fora. Assim, $p_s(L_k)$ seria isomorfo a T_2, contrariando novamente sua simplicidade. Então, neste caso, para cada i, existe j com $\beta_i \subset \alpha_j$. Para todo i, escolha qualquer $x_i \in \beta_i$ e $J_s = [x_1, x_2, \ldots, x_s]$ será isomorfo a T''_s com $p_k(J_s) = T'_k$.

(iii) No caso $k = 2$ temos $U_k = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ e $\alpha_1 \to \alpha_2$. Se para nenhum índice i valer $(*)$, fazemos como no caso anterior e obtemos um epimorfismo $T''_s \to T_2$. Se houver algum β_i verificando $(*)$, defina $f : T''_s \to T_2$ por $f(v_j) = \alpha_1$ se $\beta_j \subset \alpha_1$, por $f(v_j) = \alpha_2$ se $\beta_j \subset \alpha_2$ e ponhamos $f(v_i) = \alpha_1$ ou α_2 para obter f sobrejetiva. Então f é epimorfismo.

Por **(ii)** e **(iii)**, concluimos que T''_s será epimorfo a T'_k e, portanto, T'_k é um quociente simples de qualquer outro quociente não trivial de T_n. Mas dado outro quociente simples R_d de T_n, este será quociente simples de T'_k. Logo será o próprio T'_k, o que prova a unicidade do quociente simples.

Teorema 1.22. *Dado um torneio T_n. Entao são equivalentes:*

(1) *T_n é hamiltoniano*

(2) *O quociente simples R_m de T_n é diferente de T_2*

(3) *Cada um dos quocientes de T_n é hamiltoniano*

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2). Se T_n for hamiltoniano, seja $x_1 \to x_2 \to$

$\ldots \to x_n \to x_1$ um ciclo hamiltoniano. Se houver um epimorfismo $f : T_n \to T_2$, então existe i com $f(x_i) = a_2$ e $f(x_j) = a_1$, onde $j = i + 1 \bmod n$. Neste caso, $x_i \to x_j$ mas $f(x_i) \leftarrow f(x_j)$, um absurdo. Logo $R_m \neq T_2$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Suponhamos $R_m \neq T_2$. Primeiramente provemos que existe um 3-ciclo em T_n. Tome então um vértice $a \in T_n$, e defina $U = \{\text{vértices de } T_n \text{ que não precedem } a\}$ e $U' = \{\text{vértices de } T_n \text{ que sucedem } a\}$. Como a não cona $T_n - a$, então $U, U' \neq \emptyset$. Se para todo $w \in U$ e $v \in U'$ tivéssemos $w \to v$, então $[U \cup \{a\}] \to U'$, uma contradição. Devido a isso, existem $w \in U$ e $v \in U'$ formando o ciclo $v \to w \to a \to v$.

Considere agora um ciclo C de comprimento máximo em T_n, $|C| = k$. Todo vértice de $T_n - C$ deverá conar C; pois se um vértice v não cona C, isto é, $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to a_1$, então podemos encontrar um índice i com $v \leftarrow a_i$ e $v \to a_j$ com $j = i+1 \bmod k$ e obtemos um ciclo de comprimento $k+1$ passando por $V(C) \cup \{v\}$. Então, ponhamos $U = \{\text{vértices que precedem } C\}$ e $U' = \{\text{vértices que sucedem } C\}$. Temos $T_n - C = [U \cup U']$ e queremos provar que $U = U' = \emptyset$.

Se for apenas um deles vazio, por exemplo, U', então $T_n = U \to C$, contrariando a hipótese. Sejam então ambos não vazios. Se $U \to U'$, novamente teríamos $T_n = [(U \cup C) \to U']$, um absurdo. Logo, existem $w \in U$ e $v \in U'$ com $w \leftarrow v$. Então o ciclo $w \to a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to v \to w$ contraria ser a maximalidade de C.

(3) $\Longrightarrow$ (1) é óbvio.

(1) $\Longrightarrow$ (3) T_n induz a mesma ordem em seus torneios quocientes

Proposição 1.23. *Sejam H_n um torneio hamiltoniano e Q_m um de seus torneios quocientes. Então* $\mathrm{cc}(H_n) = \mathrm{cc}(Q_m)$

Demonstração: Ver [2], [4] e [5].

Lema 1.24. *Todo torneio T_n admite um caminho que passe por todos os seus vértices* (caminho hamiltoniano)

Demonstração: Por indução. Os casos $n = 2, 3$ são triviais. Suponha o lema válido para todo T_k, $k < n$. Dado T_n. Se for hamiltoniano, um de seus ciclos máximos já será o caminho pedido. Se não for hamiltoniano, então $T_n = T_2(S^1, S^2)$ com $|S^1|, |S^2| < n$. Podemos então usar a hipótese de indução e tomar caminhos em S^1 e S^2, ou melhor, $V(S^1) = \{a_1, \ldots, a_r\}$ e $V(S^2) = \{b_1, \ldots, b_s\}$ com $r + s = n$, $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_r$ e $b_1 \to b_2 \to \ldots \to b_s$. Como $S^1 \to S^2$, necessariamente $a_r \to b_1$ e, justapondo ambos os caminhos por essa adjacência, obtemos o caminho hamiltoniano em T_n.

Dizemos que um torneio T é transitivo se T não possui nenhum ciclo passando por um subconjunto de vértices. O resultado a seguir define completamente os torneios transitivos de ordem n.

Lema 1.25. *Para cada n, existe apenas um torneio transitivo de ordem n, Tr_n*

Demonstração: Se T_n é transitivo, tome $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n$ um caminho hamiltoniano em T_n. Dados i e j com $1 \leq i < j \leq n$. Mostremos que $x_i \to x_j$. Com efeito, negando tal, obteríamos o ciclo C: $x_i \to x_{i+1} \to \ldots \to x_j \to x_i$, o que contradiz a transitividade de T_n. Então as únicas relações de adjacência possíveis neste torneio são da forma $x_i \to x_j$ sempre que $i < j$. Se T'_n é outro torneio transitivo de ordem n, denotando $T'_n = T'_n(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ com vértices satisfazendo as mesmas relações de adjacência segundo o índice que T_n, a aplicação que leva x_i em x'_i é um isomorfismo de T_n em T'_n.

Chamaremos Tr_n o único torneio transitivo de ordem n. Estabelecemos a seguinte convenção quanto à numeração dos vértices de Tr_n:

$$Tr_n = Tr_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \implies x_i \to x_j \text{ se } i > j.$$

Assim, o único caminho hamiltoniano de Tr_n, por essa convenção, é $x_n \to x_{n-1} \to \ldots \to x_1$. Para o caso $n = 2$, entretanto, denotamos $T_2 = T_2(a, b)$ para indicar $a \to b$.

Definicão 1.26. Dado um torneio T_n, definimos a sua *condensação* como um quociente transitivo de T_n da forma $T_n = Tr_k^*(S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(k)})$, onde cada componente $S^{(i)}$ é *strong*, ou seja, hamiltoniano ou trivial (T_1). Para $k > 1$, o torneio Tr_k é sempre epimorfo a T_2. Portanto, a condensação de um torneio hamiltoniano é sempre T_1. Relativo a condensação, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.27. *Todo torneio não hamiltoniano T_n admite uma única condensação Tr_k^*, $1 < k \leq n$, a menos de isomorfismo*

Demonstração: Inicialmente, vamos construir uma condensação para T_n. Como T_n não é hamiltoniano, temos $T_n = T_2(S^{(2)}, S^{(1)}) = Tr_2(S^{(1)}, S^{(2)})$. Se forem $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ strong, obtemos Tr_2, uma condensação para T_n. Se não, ou $S^{(1)}$ ou $S^{(2)}$ será não trivial e não hamiltoniano. Seja, por exemplo, $S^{(1)}$ nessas condições. Então $S^{(1)} = T_2(J^{(2)}, J^{(1)})$. Dai $J^{(2)} \to J^{(1)}$ e $S^{(2)} \to J^{(s)}$ para $s = 1, 2$. Podemos reorganizar os vértices de T_n de modo seguinte $T_n = Tr_3(J^{(1)}, J^{(2)}, S^{(2)})$. Em geral: na etapa t, teremos $T_n = Tr_1(S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(t)})$. Se todo $S^{(i)}$ for strong, $1 \leq i \leq t$, uma condensação de T_n é Tr_1. Se houver algum i com $S^{(i)}$ não strong, implica $S^{(i)} = T_2(P^{(2)}, P^{(1)})$. Considere a reenumeração

$$S^{(j)'} = \begin{cases} S^{(j)} & \text{se} \quad j < i \\ P^{(1)} & \text{se} \quad j = i \\ P^{(2)} & \text{se} \quad j = i+1 \\ S^{(j-1)} & \text{se} \quad j > i+1 \end{cases}$$

Vendo que $S^{(r)'} \to S^{(q)'}$ caso $r > q$, podemos reagrupar os vértices $T_n = Tr_{t+1}(S^{(1)'}, S^{(2)'}, \ldots, S^{(t+1)'})$. O processo deve parar após um número finito de etapas, pois em cada uma o número de componentes $S^{(i)}$, todas não vazias, aumenta em uma unidade e a soma de todas as suas ordens é igual a n. Como tal processo só termina quando todas as componentes $S^{(i)}$ forem strong, para $1 \leq i \leq k$, obtemos o torneio transitivo Tr_k^* sendo uma condensação de T_n.

Seja então Tr'_m um outro quociente transitivo de T_n, em outras palavras, $T_n = Tr'_m(G^{(1)}, \ldots, G^{(m)})$. Para $1 \leq i \leq k$, existe apenas um j com $P^{(i)} \cap G^{(j)} \neq \emptyset$. Se não, suponhamos haver j com $P^{(i)} \cap (G^{(1)} \cup G^{(2)} \cup \ldots \cup G^{(j)}) = A^{(1)} \neq \emptyset$ e $P^{(i)} \cap (G^{(j+1)} \cup G^{(j+2)} \cup \ldots \cup G^{(m)}) = A^{(2)} \neq \emptyset$. Naturalmente, $P^{(i)} = T_2(A^{(2)}, A^{(1)})$, o que contraria $P^{(i)}$ ser strong. Mas se $G^{(j)} \supset P^{(i)}$ e $G^{(j)} \supset P^{(s)}$ para $i < s$, então $G^{(j)} \supset P^{(t)}$ para $i \leq t \leq s$. Se negarmos isto, teremos $P^{(t)} \subset G^{(h)}$ para algum $h \neq j$. Se $h > j$, segue de $G^{(j)} \leftarrow G^{(h)}$ que $P^{(s)} \leftarrow P^{(t)}$, o que é um absurdo pois $t \leq s$. Analogamente, $h < j$ implica $G^{(h)} \leftarrow G^{(j)}$, o que implica $P^{(t)} \leftarrow P^{(i)}$, nova contradição pois $t \geq i$. Logo, cada componente tem forma $G^{(j)} = [P_j^{(d)} \cup P_j^{(d+1)} \cup \ldots \cup P_j^{(d+s)}]$ para algum d_j. Em particular, se Tr_m^* é outra condensação de T_n, cada uma se suas componentes é exatamente igual a alguma componente de Tr_k^*. Portanto, $k = m$ e obtemos a unicidade desejada.

Teorema 1.28. *Sendo $\nu(H_n)$ o número de vértices neutros de H_n, vale $2 \leq \nu(H_n) \leq n$ para cada $n \geq 4$*

Demonstração: Existe um 3-ciclo em H_n, seguindo à mesma prova do teorema 1.22. Então existe um ciclo C de comprimento máximo $r \leq n-2$. Suponhamos que $|C| < n-2$.

Cada $v \in V(H_n) - V(C)$ cona C. Definamos $U = \{v \in V(H_n - C) \mid v \to C\}$ e $U' = \{v \in V(H_n - C) \mid v \leftarrow C\}$. Novamente obtemos $U, U' \neq \emptyset$. Como $U \to C \to U'$, a relação $U \to U'$ não pode ser válida. Caso contrário, existiriam $v \in U$ e $w \in U'$ com $v \to C \to w \to v$ e, escrevendo $C : x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_r \to x_1$, obteríamos o ciclo $v \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_r \to w \to v$ de comprimento $r+1 \leq n-2$, contradizendo a escolha de C. Logo, $|C| = n-2$ e $V(H_n) = V(C) \cup \{v_1, v_2\}$.

(i) Se v_1 e v_2 não conam C, ambos são neutros;

(ii) Se v_1 não cona C e v_2 cona, então v_2 é neutro. Podemos supor $v_2 \to C$ (implicando $v_1 \to v_2$). Escrevendo $C : x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_{n-2} \to x_1$, tome i com $x_i \to v_1$ e $x_{i+2} \leftarrow v_1$. Então x_{i+1} é neutro devido ao ciclo $x_i \to v_1 \to x_{i+2} \to \ldots \to x_{i-1} \to x_i$. Agora v_2 e x_{i+1} são dois vértices neutros.

(iii) Se v_1 e v_2 conarem C, com raciocínio análogo, obtemos dois vértices x_i e x_j do ciclo C, ambos neutros.

Observamos que, por um resultado de [2], para cada ordem $n \geq 5$, o único torneio hamiltoniano H_n que possui somente dois vértices neutros é o bineutral A_n.

Proposição 1.29. *Seja H_n um torneio normal. Então o ciclo característico c_k é ou 3-ciclo A_3, $k = 3$, ou um torneio bineutral A_k, $k \geq 4$*

Demonstração: Ver [4].

Proposição 1.30. *Seja H_n um torneio normal de característica cíclica k, $k \geq 3$, com ciclo característico A_k. Um polo z associado a A_k deve ter as seguintes propriedades com respeito a A_k:*

(1) $(a_{i+1}, \ldots, a_k) \to z \to (a_1, \ldots, a_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$

(2) $(a_i, \ldots, a_k) \to z \to (a_1, \ldots, a_{i+1})$, $i = 1, \ldots, k-1$

Demonstração: Ver [4] e [9].

Definição 1.31. O polo z é chamado *polo* do *tipo* i e de *classe* 1 ou 2, denotado por x_i ou y_i, se suas propriedades são dadas pelas condições **(1)** e **(2)** da proposição 1.30 respectivamente.

Teorema 1.32. *Um torneio H_n é normal se e somente se as condições seguintes são satisfeitas:*

(1) *H_n permite um ciclo bineutral A_k, $k \geq 4$, ou o 3-ciclo A_3 como o ciclo minimal*

(2) *Os polos associados a A_k são do tipo $k-1$ de classe 1 $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ e do tipo $k-1$ de classe 2 $(y_1, \ldots, y_{k-1})$, considerados na definição 1.31*

(3) *O subtorneio P_{n-k} de polos associados a A_k não é hamiltoniano*

(4) *P_{n-k} permite a seguinte composição transitiva:*

$$P_{n-k} = Tr^*_{k+1}(T^{(0)}, \ldots, T^{(k)}) \quad (\text{isto é } T^{(i)} \to T^{(j)} \iff i \geq j),$$

onde:

$T^{(0)}$ *é formado por polos do tipo* x_1

$T^{(1)}$ *é formado por polos do tipo* x_1, x_2, y_1

$T^{(2)}$ *é formado por polos do tipo* x_1, x_2, x_3, y_2

...

$T^{(i)}$ é formado por polos do tipo x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_i

...

$T^{(k-2)}$ é formado por polos do tipo x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, y_{k-2}

$T^{(k-1)}$ é formado por polos do tipo x_{k-2}, x_{k-1}, y_{k-1}

$T^{(k)}$ é formado por polos do tipo x_{k-1}

e cada componente diferente de $T_{(0)}$ ou $T_{(k)}$ pode ser ou não vazia

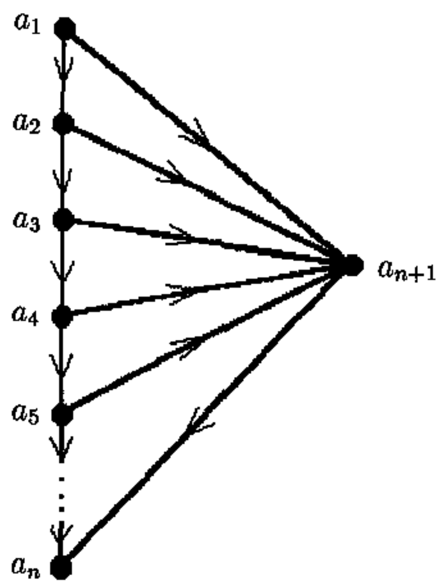
Demonstração: Ver [4].

Capítulo 2. Torneios de Douglas

Definição 2.1. Chamamos de torneio de Douglas cada torneio que admite exatamente um ciclo hamiltoniano. Denotamos por D_n um desses torneios de ordem n e por $\mathcal{D}$ a classe de todos os torneios acima mensionados. Denotamos $v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_n \Rightarrow v_1$ o ciclo hamiltoniano de D_n e chamamos seus subcaminhos $v_i \Rightarrow v_j$ juntando v_i a v_j de caminho padrão a partir de v_i até v_j (usamos o símbolo $\Rightarrow$ no lugar de $\rightarrow$ indicando unicidade).

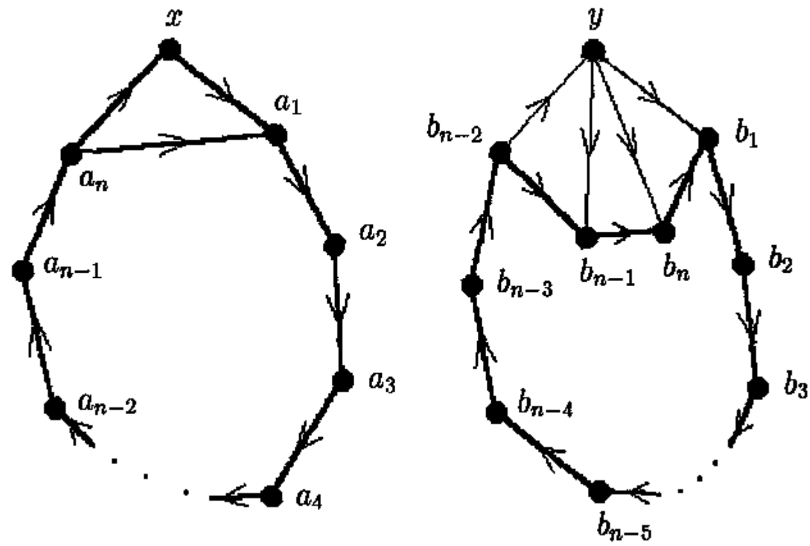
Proposição 2.2.*Cada componente $S^{(i)}$ de um torneio D_n é transitivo*

Demonstração: De fato, se existe um $S^{(i)}$ não-transitivo, então nós teríamos no mínimo dois caminhos hamiltonianos distintos em $S^{(i)}$ e assim dois ciclos hamiltonianos em D_n. Em qualquer torneio existe um caminho passando por todos os vértices:



Proposição 2.3. *Cada subtorneio hamiltoniano H_m de um torneio D_n é um D_m subtorneio*

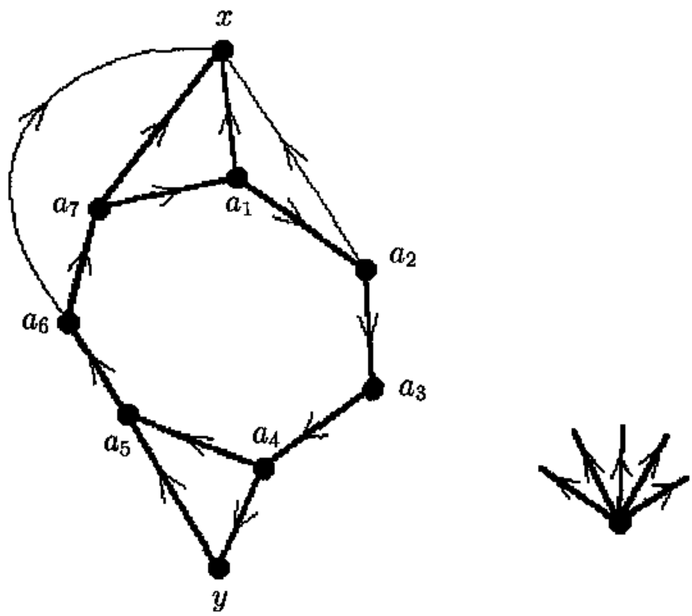
Demonstração: Se $m = n - 1$ isso é verdade; porque, caso contrário, cada ciclo hamiltoniano de D_m poderia ser extendido a um ciclo hamiltoniano de D_n.



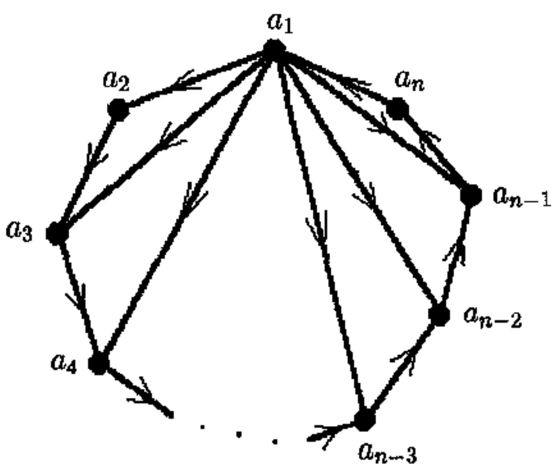
Se $m < n - 1$, considere duas diferenças possíveis:

(i) Existe uma cadeia de subtorneios hamiltonianos $C_{m+1}, \ldots, C_{n-1}$ tal que $V(H_m) \subset V(C_{m+1}) \subset \ldots \subset V(C_{n-1}) \subset V(H_n)$. Então passo por passo segue que: $C_{n-1} \in \mathcal{D}, C_{n-2} \in \mathcal{D}, \ldots, H_n \in \mathcal{D}$.

(ii) Existe um subtorneio hamiltoniano C_s, $m \leq s < n - 1$, tal que entre H_m e C_s existe uma cadeia de subtorneios hamiltonianos como em (1), já que, para cada subtorneio K_{s+1} tal que $V(C_s) \subset V(K_{s+1})$, o torneio K_{s+1} não é hamiltoniano, isto é, C_s é conado por todos os vértices de $V(H_n) - V(C_s) = \{v_1, \ldots, v_{n-s}\}$.

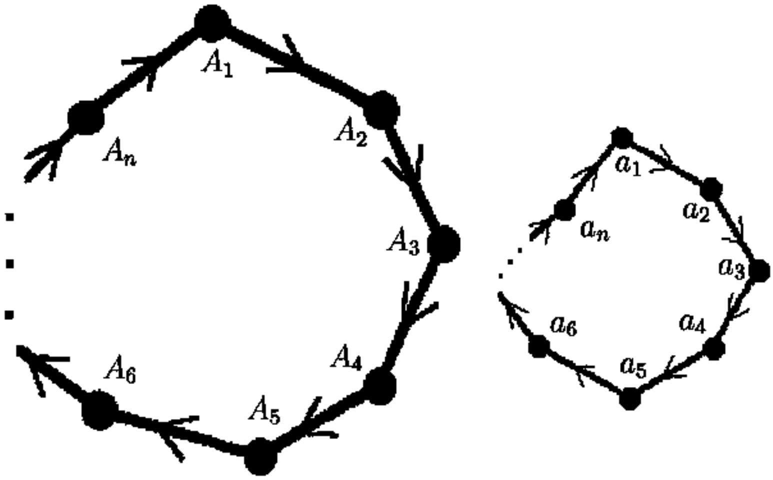


Então H_n deve ser composição $H_n = C_{n-s+1}(v_1, \ldots, v_{n-s}, C_s)$, o que é um absurdo pela proposição 2.2 acima. Observemos que todo torneio hamiltoniano não é transitivo:



Corolário 2.4. *Se $D_n \in \mathcal{D}$ é uma composição $D_n = R_m(S^{(1)}, \ldots, S^{(m)})$, então $R_m \in \mathcal{D}$*

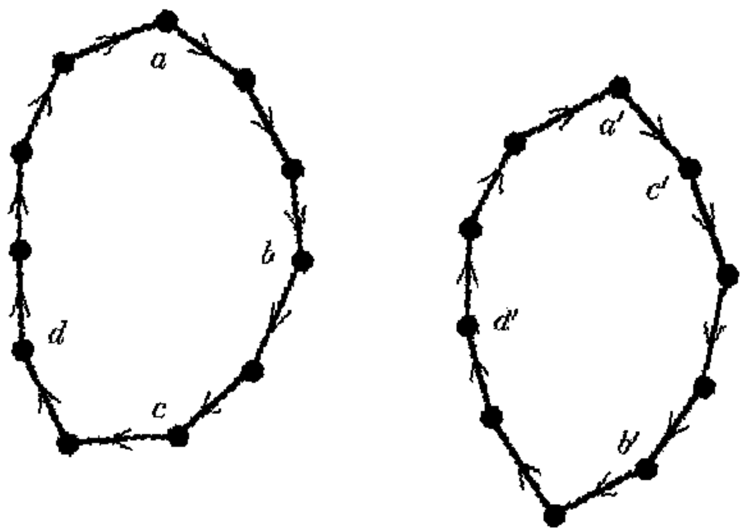
Demonstração: Visto que R_m é isomorfo a um subtorneio hamiltoniano de D_n, concluimos que $R_m \in \mathcal{D}$ pela proposição 2.3.



Corolário 2.5. *Um torneio hamiltoniano T_n, $n \geq 4$, é um torneio D_n se e somente se, para cada quádrupla de vértices distintos a, b, c, d tal que os pares (a, b) e (c, d) são separados dentro de um ciclo de T_n, os mesmos pares são separados em cada ciclo de T_n contendo eles*

Demonstração: Se T_n é um torneio D_n, então o resultado é óbvio, visto que a ordem induzida é a mesma em todos os subtorneios hamiltonianos de D_n.

Por outro lado, se nós considerarmos um torneio hamiltoniano T_n o qual não é um torneio de Douglas e tomarmos C e H sendo dois ciclos hamiltonianos, então existirão dois vértices consecutivos a e c em C e não consecutivos em H. Disso, existe um vértice b no caminho em H juntando a a c e um vértice d no caminho H de c para a. Conseqüentemente, os pares (a, b) e (c, d) são separados em H e não em C, contradizendo o corolário 2.4.


a
b
c
d
a′
c′
d′
b′

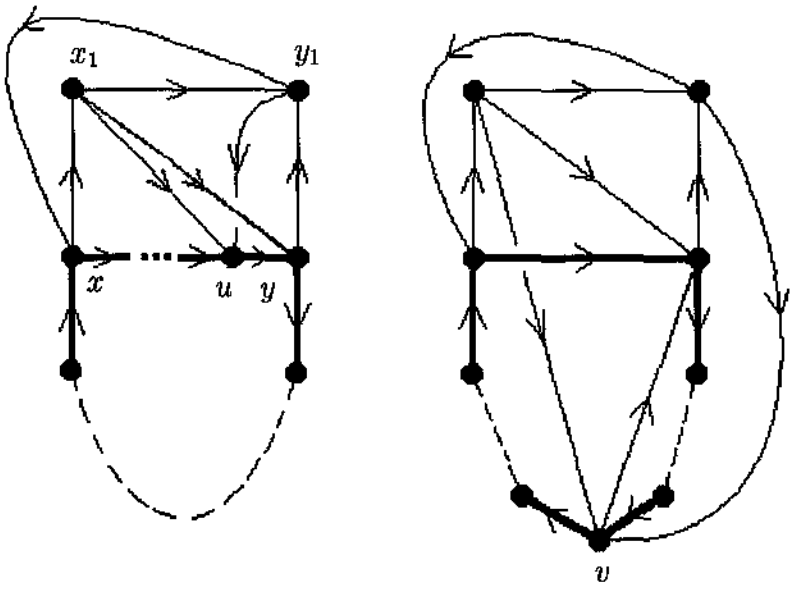
Capítulo 3. Relações entre Torneios de Douglas e Torneios Normais

Caracterizaremos os torneios de Douglas em termos de torneios normais.

Teorema 3.1. *Cada ciclo característico C_k de um torneio D_n (com $\mathrm{cc}(D_n) = k \geq 4$) é bineutral*

Demonstração: Por absurdo. Assuma que existam três vértices neutros em C_k, a saber, x, y e z. Então existem três polos, digamos x_1, y_1 e z_1, conando $C_k - x$, $C_k - y$ e $C_k - z$, respectivamente (veja lema 15 de [2]). Se, por exemplo, $x_1 \to y_1$, $x \to x_1$ e $y \to y_1$; então obtemos $x \to x_1 \to (C_k - x)$ e $y \to y_1 \to (C_k - y)$. Consideremos dois casos diferentes:

(i) O caminho padrão de x para y em C_k contém outros vértices, vamos dizer u com $u \Rightarrow y$ em C_k. Então temos os ciclos (veja o primeiro desenho):



com $x \to x_1 \to y \to y_1 \to x$ e $x \to x_1 \to y_1 \to u \Rightarrow y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x$. Mas, olhando os pares (x, y) e (x_1, y_1), obtemos uma contradição ao corolário 2.5.

(ii) A outra possibilidade seria $x \Rightarrow y$ em C_k. Então devemos considerar as possibilidades:

a. Se v é um vértice tal que $v \neq x$ e $v \to y$, então temos os ciclos (veja o segundo desenho acima) com $v \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \to x_1 \to y \to y_1 \to v$ e $v \to y \to y_1 \to x \to x_1 \to v$. Mas, olhando os pares (x, y) e (x_1, v), obtemos uma contradição ao corolário 2.5.

b. Se não existe tal vértice v (em outras palavras, para cada vértice v tal que $v \neq x$, temos $v \to x$), então x não é um vértice neutro de C_k, o que implica que y deveria conar $C_k - x$. Similarmente. Se $x_1 \to y_1$, $x_1 \to x$ e $y_1 \to y$; então, por dualidade, também obteríamos uma contradição.

Como conseqüência desse resultado, temos o seguinte resultado:

Sendo A_k o ciclo característico (bineutral, pelo teorema 3.1), a_1 e a_k seus dois vértices neutros, x e y dois de seus respectivos polos associados; obtemos a

Proposição 3.2. *O torneio H_{k+2} obtido de A_k por juntar x com y é bineutral e tem A_k como ciclo característico*

Demonstração: Primeiramente sabemos que não podemos ter nem $x \to a_1$ e $y \to a_k$, nem $a_1 \to x$ e $a_k \to y$ (pela prova do teorema 3.1). Agora, consideremos o ciclo hamiltoniano $a_1 \Rightarrow a_2 \ldots \Rightarrow a_k \Rightarrow a_1$.

O caso $a_1 \to x$ e $y \to a_k$ é impossível, pois temos os ciclos $x \to a_k \to a_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_{k-1} \to a_1 \to x$ e $x \to a_2 \to y \to a_k \Rightarrow a_1 \to x$. Daqui temos os pares (x, a_2) e (a_k, a_1), contradizendo o corolário 2.5.

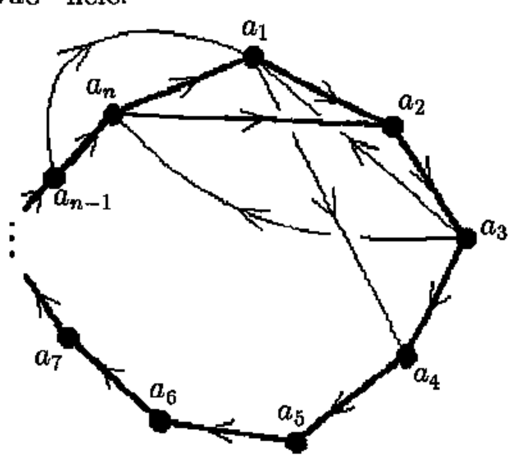
Finalmente, o caso $a_k \to y$, $x \to a_1$ e $x \to y$ é também impossível. Isso devido ao fato de termos os dois ciclos $a_1 \Rightarrow a_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_{k-1} \Rightarrow a_k \to x \to y \to a_1$ e $a_2 \to x \to y \to a_{k-1} \to a_1 \to a_2$, que dão os pares (a_2, x) e (a_{k-1}, y) e uma contradição com o corolário 2.5.

Daqui temos $a_k \to y$, $x \to a_1$ e $y \to x$. Então H_{k-2} é bineutral.

Proposição 3.3. *O subtorneio de D_n induzido pelos vértices do caminho padrão de a_k a a_1 é transitivo*

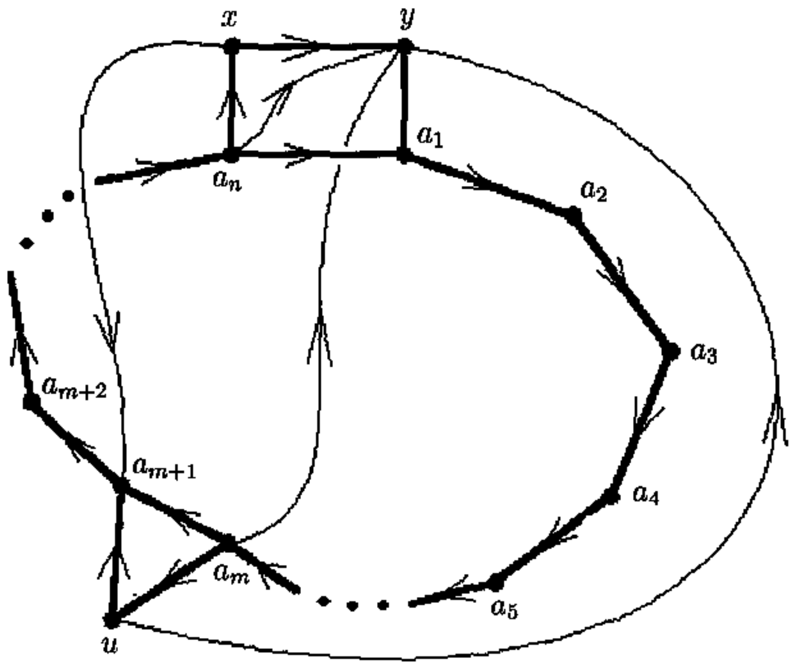
Demonstração: Tome $P(a_k, a_1)$: $a_k \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1$, sendo o caminho padrão de a_k a a_1. Devemos mostrar que a ordem natural induzida em $P(a_k, a_1)$ pelo ciclo ordenado de D_n satisfaz a propriedade seguinte: A desigualdade $u < v$ é válida se e somente se $u \to v$. De fato, existe um torneio hamiltoniano $\{A_k, u, v\}$ com o ciclo $a_1 \to \ldots \to a_k \to u \to v \to a_1$, visto que u e v são polos.

Observação 3.4. Todo torneio bineutral é de Douglas. Se H_n é bineutral, então $H_n = A_n$. Suponhamos que $A_n \notin \mathcal{D}$. Logo, existe um caminho tal que $a_k \not\to a_{k+1}$; o que é um absurdo, pois a_k só pode ir em a_{k+1}, porque os outros vértices "vão" nele.



Proposição 3.5. *Seja A_k, $k \geq 4$, sendo um ciclo de D_n. Então no caminho padrão de a_2 a a_{k-1} em D_n existem somente os vértices $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}$*

Demonstração: Primeiro construimos o subtorneio H_{k+2} a partir de A_k por juntar x e y. Assumamos que existe um vértice u em D_n entre a_m e a_{m-1} com $2 \leq m \leq k-1$. Visto que u é um polo de A_k, o subtorneio $A_k \cup \{u\}$ é hamiltoniano. Assim, tome $a_m \to u \to a_{m+1}$.



Temos que considerar dois casos:

(i) Se $x \to u$, então existem os ciclos: $x \to a_1 \to \ldots \to a_m \to u \to a_{m+1} \to \ldots \to a_k \to y \to x$ e $x \to u \to a_{m+1} \to \ldots \to a_k \to a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_m \to x$. Mas, temos (a_m, a_{m+1}) e (u, x), o que contradiz o corolário 2.5.

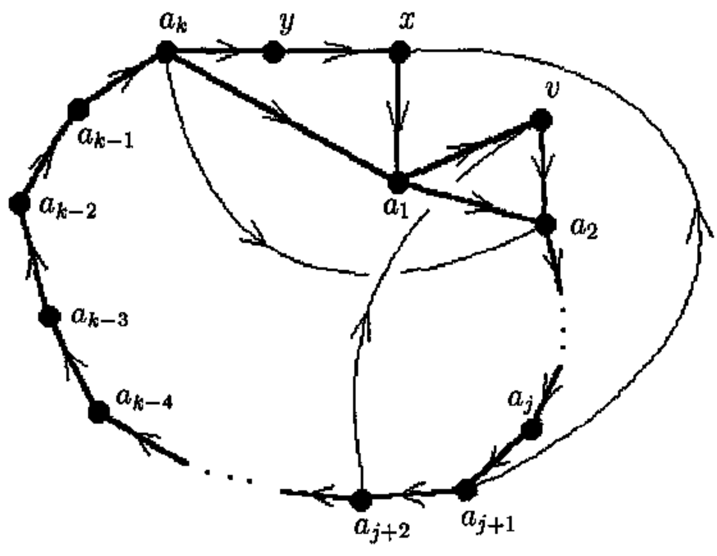
(ii) Se $u \to x$, então há duas possibilidades:

a. Se $y \to u$, então obviamente temos dois ciclos em $H_{k+2} \cup \{u\}$.

b. Se $u \to y$, então similarmente temos dois ciclos $x \to a_1 \to \ldots \to a_m \to u \to a_{m+1} \to \ldots \to a_k \to y \to x$ e $x \to a_1 \to \ldots \to a_m \to u \to y \to a_{m+1} \to \ldots \to a_k \to x$.

Proposição 3.6. *Seja A_k, $k \geq 4$, um ciclo característico de D_n. Então cada vértice entre a_1 e a_2 é equivalente a a_1*

Demonstração: Construimos um subtorneio H_{k+2} a partir de A_k adicionando-se x e y. Seja v um vértice entre a_1 e a_2. Como na proposição 3.5, vemos que $a_1 \to v \to a_2$. Suponhamos que v não é equivalente a a_1.



Temos as seguintes possibilidades:

(i) Existe um vértice a_j com $2 < j \leq k$ tal que $a_j \to a_1$ e $v \to a_j$. Neste caso, temos os ciclos $x \to a_1 \to v \to a_2 \to \ldots \to a_k \to y \to x$ e $a_1 \to v \to a_j \to a_{j+1} \to \ldots \to a_k \to a_2 \to \ldots \to a_{j-1} \to x \to a_1$ e obtemos os pares (a_1, a_2) e (v, a_k), o que contradiz o corolário 2.5. Concluimos também que $a_j \to v$ para qualquer j, $2 < j \leq k$.

(ii) Existe um vértice z no caminho padrão de a_{k-1} a a_1 em D_n tal que

$v \to z$. Argumentando dualmente a **(i)** (e pela proposição 3.3), chegamos a $z \to a_1$ e obtemos os ciclos $z \to a_1 \to v \to a_2 \to \ldots \to a_{k-1} \to z$ (ou $\ldots \to a_{k-1} \to a_k \to z$) e $a_k \to v \to z \to a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k$. Mas, os pares (v, z) e (a_1, a_2) levam a uma contradição ao corolário 2.5. Como não é necessário considerar adjacências entre vértices equivalentes, a afirmação é verdadeira.

Por dualidade temos o seguinte

Corolário 3.7. *Seja A_k, $k \geq 4$, sendo um ciclo característico de D_n. Então cada vértice entre a_{k-1} e a_k é equivalente a a_k*

Teorema 3.8. *O quociente simples Q_m de um torneio D_n de característica cíclica $k \geq 4$ é normal*

Demonstração: Consideremos todos os ciclos característicos de D_n. Pelo corolário 3.6, o caminho padrão $a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_{k-1}$ coincide em todos os ciclos característicos, pois seu complemento em D_n é o subtorneio transitivo maximal formado pelos vértices consecutivos. Por outro lado, podemos ter vários vértices a_1 e a_k, mas eles são equivalentes entre eles mesmos.

Agora construiremos o quociente simples Q_m do torneio D_n. Pela proposição 1.23, $\mathrm{cc}(D_n) = \mathrm{cc}(Q_m)$. Denotamos por a'_i a componente $\{a_i\}$ e por A'_k o ciclo característico de Q_m. Então o predecessor u de a'_1 e o sucessor v de a'_k no ciclo hamiltoniano de Q_m são polos associados a a'_1 e a'_k respectivamente, isto é, $A'_k - a'_1 \to u \to a'_1$ e $a'_k \to v \to A'_k - a'_k$. De outro modo, se por exemplo, u não é associado a a'_1, consideremos dois polos associados x e y (dados pela proposição 3.2) e assumamos que o índice i, $2 \leq i \leq k$, é o maior tal que $u \to a'_i$. Assim feito, chegamos às seguintes possibilidades:

(i) Se $i = 2$, então u é equivalente a a'_1, mas isso é uma contradição devido ao fato de Q_m ser simples.

(ii) Se $3 \leq i \leq k$, então existem os ciclos $u \to a'_1 \to a'_2 \to \ldots \to a'_k \to y \to x \to u$ e $u \to a'_i \to a'_{i+1} \to \ldots \to a'_k \to y \to a'_1 \to a'_2 \to x \to u$. Entretanto, os pares (a'_1, x) e (u, y) conduzem a uma contradição ao corolário 2.5.

Finalmente, nenhum vértice a'_i que pertence a A'_k pode ser vértice neutro de Q_m. De fato, se, por absurdo, o torneio $A'_k - a'_i$ fosse hamiltoniano, ele deveria ter o ciclo passante $u \Rightarrow a'_1 \Rightarrow a'_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a'_{i-1} \Rightarrow a'_{i+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow a'_k \Rightarrow v \Rightarrow \ldots \Rightarrow u$ induzido pela ordenação cíclica do ciclo hamiltoniano de Q_m (pela proposição 2.3 e pelo corolário 2.5). Mas, isso contradiz o fato de termos $a'_{i+1} \to a'_{i-1}$. Daqui $\mathrm{cd}(Q_m) = m - k = \nu(Q_m)$ e, conseqüentemente, o quociente simples Q_m é normal.

Teorema 3.9. *Sejam D_n um torneio com $\mathrm{cc}(D_n) = k \geq 4$ e Q_m o seu quociente simples. Então são válidas as afirmações:*

(1) *Q_m é normal*

(2) *O subtorneio dos polos de Q_m é transitivo*

(3) *Cada polo de Q_m é de classe 1*

(4) *Entre dois polos x_i e x'_j de Q_m de classe 1, as seguintes regras de adjacência valem:*

$$x_i \to x'_j \implies j \leq i + 1$$

Demonstração: **(1)** e **(2)** são óbvios.

(3) Assumamos, por absurdo, que exista um polo de classe 2 em Q_m. Então temos os ciclos $a'_1 \to a'_2 \to \ldots \to a'_i \to a'_{i+1} \to \ldots \to a'_k \to y_i \to a'_1$

e $a'_1 \to a'_2 \to \ldots \to a'_i \to y_i \to a'_{i+1} \to \ldots \to a'_k \to a'_1$. Mas, em vista de (a'_1, a'_{i+1}) e (a'_i, y_i), obtemos uma contradição com o corolário 2.5.

(4) Se existem dois polos x_i e x_{i+2} de classe 1 tais que $x_i \to x_{i+2}$, então temos os ciclos $x_i \to x'_{i+2} \to a'_1 \to \ldots \to a'_i \to a'_{i+1} \to a'_{i+2} \to \ldots \to a'_k \to x_i$ e $x_i \to x'_{i+2} \to a'_{i+2} \to a'_i \to a'_{i+1} \to x_i$. Mas (x_i, a'_i) e (a'_{i+2}, x'_{i+2}) dão uma contradição ao corolário 2.5.

Teorema 3.10. *Seja H_n um torneio simples satisfazendo às quatro condições do teorema 3.9. Então H_n é um torneio de Douglas*

Demonstração: Observemos que os vértices a_1 e a_k têm, com respeito a $a_2, \ldots, a_{k-1}$, as adjacências dos polos do tipo 2 e do tipo $k-2$, respectivamente.

Como as condições do teorema 3.9 são satisfeitas, vemos que em D_n, exceto para os caminhos padrões, são válidas as afirmações:

(i) Não há caminho de a_r a a_s com $r < s$ (veja [4], teorema 4.5)

(ii) Não há caminhos de u a v, pertencendo ao complemento transitivo de $\{a_1, \ldots, a_k\}$, tal que $v \to u$

Agora, seja $a \to b \to c \to d \to a$ um ciclo de quatro vértices em D_n dado na ordenação cíclica na qual os vértices aparecem em D_n. Pelo corolário 2.5, só temos que provar que em D_n não se pode ter algum ciclo o qual possa separar os dois pares (a, c) e (b, d).

De fato, visto que a quádrupla a, b, c, d deve ter dois ou mais vértices no caminho $a_2 \Rightarrow a_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_{k-1}$ ou no mínimo dois vértices em seu complemento e considerando-se (1) e (2), vemos que tal ciclo não pode existir.

Teorema 3.11. *Seja H_n um torneio hamiltoniano com* $\mathrm{cc}(H_n) = k \geq 4$. *Então H_n é um torneio de Douglas se e somente se H_n satisfaz as condições:*

(1) *O quociente simples Q_m de H_n satisfaz as condições do teorema 3.9*

(2) *H_n pode ser construido a partir de Q_m pela troca de todos os vértices de Q_m, exceto $a_2, \ldots, a_{k-1}$, por algum torneio transitivo*

Demonstração: De fato, pelo teorema 3.10, as únicas classes de equivalências as quais são singletones devem ser as pré-imagens de $a_2, \ldots, a_{k-1}$ do ciclo característico A_k de Q_m.

Teorema 3.12. *Seja H_n um torneio hamiltoniano com* $\mathrm{cc}(H_n) = 3$. *Então H_n é um torneio de Douglas se e somente se um dos dois casos seguintes são verificados:*

(1) *H_n é a composição de um singleton e de dois torneios transitivos, cada com um 3-ciclo*

(2) *O quociente simples Q_m, $m \geq 5$, de H_n é um torneio normal tal que*

(a) *O subtorneio dos polos de Q_m é transitivo*

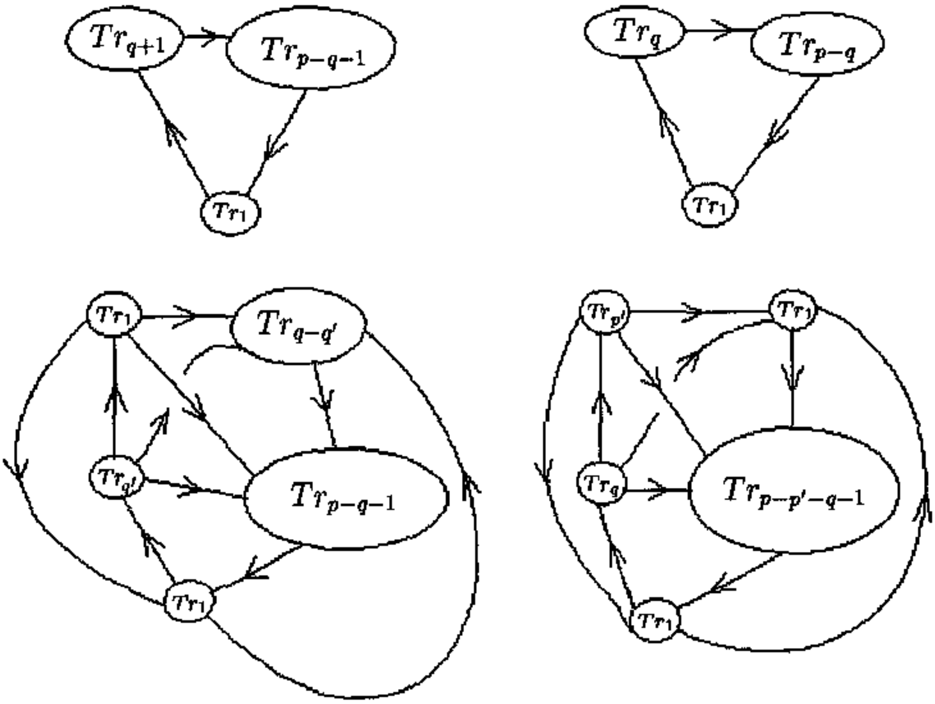
(b) *Os polos de Q_m são todos de classe* 1

(c) *H_n pode ser construido a partir de Q_m por substituir todos os vértices de Q_m, exceto o vértice a_2 de seu ciclo característico A_3, por algum torneio transitivo*

Demonstração: Dado H_n, consideremos seu quociente Q_m. Então aparecem duas possibilidades:

(i) Se Q_m é um 3-ciclo, então é óbvio que temos um único ciclo se no mínimo um de seus componentes não possui mais do que um elemento.

(ii) Se $m \geq 5$; então consideremos uma sequência de subtorneios de Douglas $D_3 \subset D_4 \subset D_5 \subset \ldots \subset D_n$ e assumamos que D_p tem como seu quociente o 3-ciclo e o quociente simples de D_{p+1} tem ordem > 3. Observando que D_p tem como componentes um singleton, um subtorneio transitivo de ordem q e outro de ordem $p-q-1$ com $1 \leq q \leq p-2$, chegamos a quatro possibilidades para D_{p+1}. A saber, veja o desenho abaixo, onde Tr_i é o torneio transitivo de ordem i:



$q \geq 2, \quad 1 \leq q' \leq q-1 \qquad\qquad p-q \geq 2, \quad 1 \leq p' \leq p-q-2$

Visto que D_{p+1} é de um dos dois últimos tipos, seu quociente é isomorfo a A_5 e daqui Q_m contém um subtorneio isomorfo a A_5. Assim, se repetirmos o mesmo argumento usado na proposição 3.4 e os seguintes argumentos chegamos ao resultado.

Referências

[1] L.W.Beineke and K.B.Reid, *Tournaments*, Selected Topics in Grafh Teory. Edited by L.W.Beineke and R.J.Wilson, Academic Press, New York, 1978

[2] M.Burzio and D.C.Demaria, *On a classification of hamiltonian tournament*, Acta Univ. Carol. Math. Phys., Prague, **29** (1988), No. 2, 3–14

[3] P.Camion, *Quelques propriétés des chemins et circuits Hamiltoniens dans la théorie des graphes*, Cahiers Centre Études Rech. Oper., **2** (1960), 5–36

[4] D.C.Demaria and G.M.Gianella, *On normal tournaments*, Conf. Semin. Matem. Univ. Bari, No. 232 (1989), 1–29

[5] R.J.Douglas, *Tournaments that admit exactly one Hamiltonian circuit*, Proc. London Math. Soc., **21** (1970), 716–30

[6] T.E.Barros, *Homotopia Regular de Grafos*, Tese de Mestrado -IMECC-UNICAMP (1991)

[7] N.A.Lima, *Uma classificação para os torneios hamiltonianos*, Tese de Mestrado -IMECC- UNICAMP (1995)

[8] D.C.Demaria and J.C.Kiihl, *On the simple quocient of tournaments which admit exactly one hamiltonian cycle*, Acta Accad. Scienze de Torino, vol 124 (1990), 94–108

[9] D.C.Demaria and C.S.Guido, *On the reconstruction of Normal Tournaments*, J. Comb. Inf. and Sys. Sci., vol 15 (1990), 301–323

[10] R.J.Wilson, *Introduction of Graph Theory*, Academic Press, New York

[11] M.Burzio and D.C.Demaria, *Hamiltonian Tournaments with the Least Number of 3-cycles*, Journal of Graph Theory

[12] D.Cartwright, F.Harary, R.Z.Norman, *Introduction a la théorie des*

graphes orientés - Modèles Structuraux, Dunod, Paris, 1968

[13] J.W.Moon, *On Subtournaments of a Tournament*, Canad. Math. Bull., vol 9, No 3 (1966)

[14] V.Fernandes, *Uma caracterização dos torneios hamiltonianos com o número mínimo de 3-ciclos*, Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, -IMECC- UNICAMP (1995)

[15] M.Burzio and D.C.Demaria, *A normalization theorem for regular homotopy of finite directed graphs*, Rend. Circ. Matem. Palermo, 30 (1981), 255–286

[16] M.Burzio and D.C.Demaria, *Characterization of tournaments by coned 3-cycles*, Acta Univ. Math. Phys., 28 (1987), 25–30

[17] M.Burzio and D.C.Demaria, *On simply disconnected tournaments*, Proc. Catania Confer. Ars Combinatória, 24 A (1988), 149–161

[18] D.C.Demaria and J.C.S.Kiihl, *On the complete digraphs which are simply disconnected*, Publicacions Mathemàtiques, vol. 35 (1991), 517–525

[19] D.C.Demaria and J.C.S.Kiihl, *Some remarks on the enumeration of Douglas tournaments*, Atti Accad. Scienze Torino, vol. 124 (1990), 169–185

[20] J.W.Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1978)

[21] J.W.Moon, *On subtournaments of a tournament*, Canad. Math. Bull., vol. 9 (3) (1966), 297–301

[22] M.R.Garey, *On enumerating tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit*, J. Combin. Theory, Ser. B, 13 (1972), 266–269

[23] J.W.Moon, *Tournaments whose subtournaments are irreducible or transitive*, Canad. Math. Bull., 21 (1) (1979), 75–79