Equações de Fluidos Magneto-micropolares: Existência, Unicidade, Regularidade e Aproximações da Solução

Elva Eliana Ortega Torres

IMECC
Matemática Aplicada
Orientador: Marko A. Rojas Medar
Doutorado em Matemática Aplicada

Equações de Fluidos Magneto-micropolares: Existência, Unicidade, Regularidade e Aproximações da Solução

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por ELVA ELIANA ORTEGA TORRES e aprovada pela comissão Julgadora.

Campinas, 20 de Julho de 1998.

Prof. Dr. Marko A. Rojas Medar
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTORA em MATEMÁTICA APLICADA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Ortega Torres, Elva Eliana

Or8e Equações de fluidos magneto-micropolares: existência, unicidade, regularidade e aproximações da solução / Elva Eliana Ortega Torres -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Marko A. Rojas Medar

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Mecânica dos fluidos. 2. Navier-Stokes, Equações de - Soluções numéricas. 3. Equações diferenciais parciais. I. Rojas Medar, Marko Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 20 de julho de 1998

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof (a). Dr (a). JORGE FERREIRA

Prof (a). Dr (a). GUSTAVO ALBERTO PERLA MENZALA

Prof (a). Dr (a). MANUEL ANTOLINO MILLA MIRANDA

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

AOS MEUS PAIS
E IRMÃOS.

Agradecimentos

Ao meu orientador Marko Rojas Medar pela sua paciência e acertada orientação.

A CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

Conteúdo

1 Preliminares **1**

1.1 Apresentação do problema 1

1.2 Espaços de funções e notações 2

1.3 Resultados conhecidos sobre o problema 9

2 Unicidade e regularidade da solução fraca **15**

2.1 Preliminares e resultados teóricos 15

2.2 Unicidade da solução fraca 20

2.3 Regularidade da solução fraca 25

3 Existência global de soluções fortes **32**

3.1 Existência global da solução no caso de forças externas sem decaimento . . 32

3.1.1 Existência e unicidade da solução 32

3.1.2 Mais regularidade da solução 44

3.2 Resultados sobre a pressão 52

3.3 Existência global da solução no caso de forças externas com decaimento expoencial 54

3.3.1 Existência e unicidade da solução 54

3.3.2 Mais regularidade da solução 58

3.4 Estimativas de erro 63

3.4.1 Estimativa de erro na norma $L^2(\Omega)$ 66

3.4.2 Estimativa de erro na norma $H^1(\Omega)$ 70

3.4.3 Melhores estimativas de erro na norma $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ 72

4 Existência de soluções fracas e fortes em um domínio não cilíndrico **75**

4.1 Espaços funcionais e notações 75

4.2 Existência de soluções fracas 85

4.3 Existência de soluções fortes 97

4.3.1 Existência e unicidade da solução 97

4.3.2 Mais regularidade da solução 112

4.4 Resultados sobre a pressão 125
4.5 Comentários sobre a existência e a unicidade da solução global forte 127

5 Existência e unicidade da solução forte usando um método iterativo - estimativas de erro 128
5.1 Formulação do problema aproximado e resultados conhecidos 128
5.2 Existência e estimativas a priori das soluções aproximadas 131
5.3 Existência da solução e estimativas de erro 151
5.4 Resultados sobre a pressão 172
5.4.1 Estimativas a priori 172
5.4.2 Estimativas de erro 175

6 Comentarios finais, perspectivas futuras 181
6.1 Comentarios finais 181
6.2 Pesquisas futuras 182

Introdução

Um dos objetivos do presente trabalho é estudar a existência, a unicidade e a regularidade da solução das equações que descrevem o movimento de um fluido magneto-micropolar viscoso incompressível (problema (1.1)-(1.3)), ocupando um domínio limitado $\Omega \subset I\!R^3$ (região de escoamento) durante um intervalo de tempo $(0,T)\,(0 < T \leq \infty)$. Estas equações formam um sistema de equações parabólicas não lineares, onde estão representados a velocidade do fluido u, a velocidade microrotacional w, o campo magnético b e a pressão hidrostática p.

Quando o campo magnético $b = 0$, o fluido é denominado fluido micropolar (fluido assimétrico, fluido com tensão assimétrico) e as equações clássicas de Navier Stokes, correspondem ao caso em que a velocidade microrotacional $w = 0$ e o campo magnético $b = 0$.

A seguir, fazemos uma breve exposição dos trabalhos conhecidos.

Para o problema (1.1)-(1.3) com $b = 0$, usando a técnica de linearização e um quase teorema de ponto fixo, Lukaszewics [24] apresenta um resultado de existência de soluções fracas, também, com a mesma técnica, o próprio Lukaszewics [25], sob certas relações entre as viscosidades, os dados iniciais e as forças externas, obteve a existência e a unicidade da solução global forte. Também, Galdi e Rionero [14] estabeleceram sem prova, resultados de existência e unicidade de soluções fortes.

Para o sistema completo (1.1)-(1.3), Rojas-Medar e Boldrini [33] provaram a existência das soluções fracas, Rojas-Medar [32] estabeleceu a existência e a unicidade da solução local forte e Ahmadi e Shahinpoor [2] estudaram a estabilidade das soluções.

Os resultados em [32] e [33], foram obtidos usando o método de Galerkin espectral e argumentos de compacidade, isto é, considerando soluções aproximadas (aproximações de Galerkin) construídas sobre a base das autofunções dos operadores de segunda ordem que aparecem nas equações do problema, são obtidas estimativas uniformes para a sequência destas soluções aproximadas, de onde pode-se deduzir a sua convergência (ou pelo menos a convergência de uma subsequência) e então usando argumentos de compacidade obter resultados de convergência forte que permitirão o passo ao limite nos termos não lineares e assim obter a solução do problema como o limite da sequência das aproximações de Galerkin.

Os resultados conhecidos sobre a existência global de soluções fortes do problema (1.1)-(1.3), requer de algum pequeno decaimento no tempo das forças externas associadas, mas no caso das equações clássicas de Navier-Stokes, esta classe de decaimento não é necessário (ver por exemplo, Heywood e Rannacher [16]), portanto, devería ser possível provar a existência global de soluções do problema (1.1)-(1.3) sem esta condição de decaimento. Isto é realmente possível e neste trabalho somente assumindo certa regularidade sobre os dados iniciais e as forças externas, usando o método de Galerkin espectral e argumentos de compacidade, provamos a existência e unicidade da solução global forte de problema (1.1)-(1.3), atingindo de esta forma resultados ao mesmo nível do que as obtidas para as equações de Navier-Stokes. Também, para as aproximações de Galerkin, são obtidas estimativas de erro uniformes no tempo.

Usando uma outra aproximação da solução e um método iterativo, no qual não precisamos de argumentos de compacidade, estabelecemos existência e unicidade da solução local forte do problema (1.1)-(1.3). Também, este método fornece taxas de convergência das soluções aproximadas.

O outro objetivo deste trabalho é estudar o problema (1.1)-(1.3) quando é definido sobre um domínio dependendo do tempo $\tilde{Q} = \cup_{0<t<T}\Omega_t \times \{t\} \subset I\!R^3 \times (0,T)$ (domínio não cilíndrico). A existência de soluções fracas em este tipo de domínios, para as equações clássicas de Navier-Stokes foi estudado por Milla-Miranda e Límaco [28] e para as equações de Boussinesq por Conca e Rojas-Medar [6]. Para o problema (1.1)-(1.3) provamos a existência da solução fraca, a existência e a unicidade da solução local forte, atingindo no caso das soluções fracas resultados ao mesmo nível de Milla-Miranda e Límaco [28] e no caso da solução local forte, obtemos resultados análogos aos obtidos por Rojas-Medar [32] em domínios cilíndricos. Também, são obtidos resultados de existência e unicidade da solução global forte.

Este trabalho está organizado como segue:

No Capítulo 1, apresentamos o sistema de equações (1.1)-(1.3) que governam o problema em estudo, fixamos as notações a serem usados e definimos os espaços funcionais sobre os quais trabalharemos. Enunciamos resultados teóricos que serão usados no desenvolvimento deste trabalho e também, damos os resultados já conhecidos sobre o problema.

No Capítulo 2, usando o resultado de existência da solução fraca estabelecida por Rojas-Medar e Boldrini [33], provamos que condicionalmente esta solução fraca é única. Também, damos resultados de regularidade da solução fraca, para o qual primeiro encontramos estimativas nos espaços de Nikolskii (baseados em um lema que estabelecemos e provamos usando fundamentalmente o Lema de Hardy-Littlewood) e logo usando um resultado que relaciona os espaços de Nikolskii e os espaços fracionários de Sobolev, provamos que a solução fraca do problema (1.1)-(1.3) possui derivadas fracionárias no tempo de qualquer ordem menor que 1/4 e condicionalmente possui derivadas fracionárias no tempo de qualquer ordem menor que 1/2.

No Capítulo 3, combinando argumentos usados por Rojas-Medar [32] (método de Galerkin espectral) e Heywood e Rannacher [16] (método de Galerkin espectral junto com exponenciais como funções peso), provamos a existência e a unicidade da solução global forte do problema (1.1)-(1.3) sem assumir decaimento nas forças externas associadas e também assumindo que as forças externas possuem decaimento exponencial. Logo, com estes resultados obtemos estimativas de erro para as aproximações de Galerkin, quando a solução é obtida sem assumir decaimento nas forças externas e mostramos que estas estimativas de erro são melhores quando as forças externas possuem decaimento exponencial. Convém fazer notar que em este capítulo, os resultados de existência da solução global forte serão obtidos sem nenhuma relação pre-estabelecida entre as viscosidades, os dados iniciais e as forças externas, relação que é necessária no trabalho de Lukaszewics [25]. Maiores comentários sobre estas diferenças serão feitas ao início do Capítulo 3.

No Capítulo 4, damos resultados de existência das soluções fracas e de existência e unicidade da solução local forte, quando o problema (1.1)-(1.3) é definido em um domínio não cilíndrico $\tilde{Q}$, isto é, um domínio dependendo do tempo. Para provar estes resultados, usamos uma mudança de variáveis conveniente, transformando as equações definidas em um domínio não cilíndrico em um sistema de equações definidas em um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0, T)$. Logo, para este novo problema transformado, usando o método de Galerkin espectral e argumentos de compacidade, provamos a existência das soluções fracas e também a existência e a unicidade da solução local forte. Então, usando a inversa da mudança de variáveis, retornamos ao problema (1.1)-(1.3) definido sobre o domínio não cilíndrico $\tilde{Q}$, obtendo assim os resultados desejados. Esta técnica foi introduzida por Dal Passo e Ughi [8], para o estudo de uma certa classe de equações parabólicas em um domínio não cilíndrico. Também, resultados da existência e a unicidade da solução global forte podem ser obtidos, atingindo resultados análogos aos obtidos no Capítulo 3.

No Capítulo 5, usando um método iterativo para as soluções aproximadas, provamos a existência e a unicidade da solução local forte, também são obtidas estimativas de erro e taxas de convergência das soluções aproximadas para diferentes normas.

O método iterativo que usamos é inspirado em um processo iterativo proposto por Zarubin [41], isto é, considerando uma solução aproximada do problema (1.1)-(1.3), linearizamos o problema, obtendo uma sequência de sistemas lineares que geram uma sequência de soluções aproximadas (a existência das quais, para cada sistema linear é obtida por exemplo, usando o método de Galerkin espectral), logo provamos estimativas a priori uniformes no tempo para a sequência de soluções aproximadas, a seguir, usando estas estimativas a priori, provamos que a sequência de soluções aproximadas é de Cauchy em determinados espaços de Banach, portanto a sequência converge fortemente a um elemento do mesmo espaço e então com estas convergências provamos que o elemento limite é a única solução do problema não linear (1.1)-(1.3). Como uma consequência, facilmente obtemos as estimativas de erro e as respectivas taxas de convergência para diferentes normas. Uma observação resaltante em este método iterativo é o não uso dos teoremas de compacidade, fato que é fundamental no método de Galerkin.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo para fixar a notação, faremos uma breve revisão dos principais conceitos teóricos e resultados a serem usados no estudo dos capítulos posteriores.

1.1 Apresentação do problema

Seja Ω um domínio limitado em $I\!R^3$ com contorno $\partial\Omega$ de classe $C^{1,1}$, um intervalo de tempo $[0,T), 0 < T \leq \infty$ e o cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$. As equações que governam o movimento de um fluido magneto-micropolar viscoso incompressível definidas sobre Q, são dadas por (veja [2], [7], [11]):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - (\mu + \chi)\Delta u + \nabla(p + \frac{1}{2} rb \cdot b) = \chi \mathrm{rot}\, w + rb \cdot \nabla b + f, \\
&j\frac{\partial w}{\partial t} - \gamma \Delta w - (\alpha + \beta)\nabla \mathrm{div}\, w + ju \cdot \nabla w + 2\chi w = \chi \mathrm{rot}\, u + g, \\
&\frac{\partial b}{\partial t} - \nu \Delta b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0, \\
&\mathrm{div}\, u = \mathrm{div}\, b = 0 \quad \text{em} \quad Q,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

onde $u(x,t) \in I\!R^3$ denota a velocidade do fluido em um ponto $x \in \Omega$ e no tempo $t \geq 0$; $w(x,t) \in I\!R^3$, $b(x,t) \in I\!R^3$ e $p(x,t) \in I\!R$ representam a velocidade microrotacional, o campo magnético e a pressão hidrostática respectivamente; $f(t,x),\ g(t,x) \in I\!R^3$ são campos de forças externas dadas; $\mu, \chi, r, \alpha, \beta, \gamma, j$ e ν são constantes positivas associadas às propriedades do material e por razões físicas estas constantes satisfazem $\min\{\mu, \chi, r, j, \nu, \alpha + \beta + \gamma\} > 0$. As expressões ∇, Δ, div e rot denotam o operador gradiente, Laplaciano, divergente e rotacional respectivamente (também denotaremos $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ por u_t); a i-ésima compoente de $u \cdot \nabla w$ é dada por $[u \cdot \nabla w]_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$.

Sobre o contorno $\partial\Omega$ de Ω assumimos as seguintes condições

$$u(x,t) = w(x,t) = b(x,t) = 0, \;\; (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T). \tag{1.2}$$

Por simplicidade temos assumido condições de contorno homogêneas, desde que no caso não homogêneo sob hipóteses convenientes pode ser tratado de um modo usual (veja [19]). As condições iniciais são:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad b(x,0) = b_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

A equação (1.1)-(i) tem a forma das equações de Navier-Stokes, mas está unida à equação (1.1)-(ii) a qual essencialmente descreve o movimento dentro dos macrovolumens no momento em que eles sofrem efeitos microrotacionais representado pela velocidade microrotacional w. Para fluidos sem microestrutura, a velocidade microrotacional w é nulo. Para fluidos Newtonianos, o parâmetro χ é nulo e então as equações (1.1)-(i) e (1.1)-(ii) são independentes.

Quando não existe campo magnético, isto é, $b = 0$, o problema foi estudado por Lukaszewicz [24], [25] e Padula e Russo [30].

O sistema completo (1.1)-(1.3), foi estudado por Galdi e Rionero [14], eles estabeleceram sem prova, resultados de existência e unicidade de soluções fortes. Também, para o sistema completo (1.1)-(1.3), usando o método de Galerkin espectral, Rojas-Medar e Boldrini [33] provaram a existência de soluções fracas. Usando a mesma técnica, Rojas-Medar [32] estabeleceu a existência e unicidade da solução local forte, alcançando resultados ao mesmo nível das conhecidas no caso das equações clássicas de Navier-Stokes. Ahmadi e Shahinpoor [2] estudaram a estabilidade de soluções do sistema (1.1)-(1.3).

1.2 Espaços de funções e notações

No que segue do trabalho denotaremos sempre por Ω um domínio limitado no espaço tri-dimensional $I\!R^3$.

A seguir, descreveremos os espaços funcionais a serem usados.

Sendo $\Omega \subset I\!R^3$ um domínio limitado com contorno $\partial\Omega$ suave, denotemos por $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach de funções Lebesque integráveis com as normas usuais:

$$\|u\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx \Big)^{1/p}, \; 1 \leq p < \infty \qquad \text{e} \qquad \|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |u(x)|,$$

onde $|.|$ é a norma Euclideana.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i(x)\, v_i(x)\, dx$$

e denotamos $||.||_{L^2} = ||.||$.

Quando E é um espaço de Banach e $0 < T \leq \infty$, $L^q(0, T; E)$ para $1 \leq q \leq \infty$, representa o espaço de Banach das funções com valores em E definidas no intervalo $[0, T)$ que são L^q integráveis no sentido de Bochner e $L^q_{Loc}(0, T; E)$ denota as funções com valores em E definidas no intervalo $[0, T)$ que são L^q integráveis em $[0, T_0]$ para qualquer $T_0 < T \leq \infty$; com as normas usuais:

$$\begin{aligned} ||u||_{L^q(0,T;E)} &= \left[\int_0^T ||u(t)||_E^q dt\right]^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty \\ ||u||_{L^\infty(0,T;E)} &= \sup_{t\in[0,T)} \text{ ess } ||u(t)||_E. \end{aligned}$$

Se E é reflexivo, temos que $L^q(0, T; E)$ para $1 < q < \infty$ é reflexivo. Se E é separável, temos que $L^q(0, T; E)$ para $1 \leq q < \infty$ é separável. O dual topológico de $L^q(0, T; E)$ identifica-se com o espaço de Banach $L^p(0, T; E^*)$, onde E^* é o dual topológico de E e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Se $E = L^q(\Omega)$ denotamos $L^q(0, T; L^q(\Omega)) = L^q(Q)$, onde $Q = \Omega \times (0, T)$.

Para $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, consideremos os espaços de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\, u \in L^p(\Omega) \ ; \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m \,\},$$

com a norma usual

$$||u||_{m,p} = (\sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u(t)||^p_{L^p(\Omega)})^{1/p}.$$

Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e $||.||_{m,p} = ||.||_{H^m}$.

Definimos

$$H^m_0(\Omega) = \text{ o fecho de } C^\infty_0(\Omega) \text{ na norma } H^m(\Omega)$$

onde

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega), k = 0, 1, 2, ... \text{ e soporte de } u \text{ compacto}\}.$$

Observe-se que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável e que $H^1_0(\Omega)$ é caracterizado por

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \, ; \, u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Também, consideremos os espaços de Sobolev $H^s(\Omega)$, $H^s_0(\Omega)$ com $s \in I\!R$, $s > 0$, como foi definido em Lions-Magenes [23], isto é,

$$H^s(\Omega) = \{v \ , \quad \text{tal que existe} \quad \tilde{v} \in H^s(I\!R^3) \quad \text{com} \quad \tilde{v}|_\Omega = v \quad \text{quase sempre}\}$$

com a norma

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\tilde{v}\in H^s(\mathbb{R}^3), \tilde{v}|_\Omega = v} \|\tilde{v}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)},$$

onde

$$H^s(\mathbb{R}^3) = \{v\ ;\ v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3),\ (1+|x|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^3_x)\}$$

com a norma

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \|(1+|x|^2)^{s/2}\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)},$$

onde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ é o espaço das distribuições temperadas sobre $\mathbb{R}^3$ e $\hat{v}$ é a transformada de Fourier de v. O espaço $H^s_0(\Omega)$ = o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma de $H^s(\Omega)$.

Denotamos por $\|.\|_s$ e $(.,.)_{H^s}$ a norma e o produto interno em $H^s(\Omega)$ (ou $H^s_0(\Omega)$ quando for apropriado) respectivamente.

Como estamos considerando Ω domínio limitado, temos a desigualdade de Poincaré-Friedrichs:

$$\text{Se } u \in H^1_0(\Omega) \text{ então } \|u\| \leq C_\Omega \|\nabla u\|$$

onde C_Ω depende apenas de Ω. Assim, resulta que em $H^1_0(\Omega)$ as normas $\|u\|_{H^1}$ e $\|\nabla u\|$ são equivalentes.

A seguir, enunciaremos as desigualdades de Sobolev e o Teorema de imersão de Sobolev, os quais serão muito usados.

Teorema 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com contorno $\partial\Omega$ localmente Lipschitz, $m = 0,1,2,\ldots$ e $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ onde $1 \leq r, q \leq \infty$. Para qualquer inteiro j, $0 \leq j \leq m$ e qualquer número α no intervalo $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$ satisfazendo*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{q},$$

têm-se

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C\|u\|^{\alpha}_{m,r}\|u\|^{(1-\alpha)}_{L^q} \quad se \quad m - j - \frac{N}{r} < 0$$

$$e \quad \|D^j u\|_{L^p} \leq C\|u\|^{j/m}_{m,r}\|u\|^{(m-j)/m}_{L^q} \quad com \quad \alpha = \frac{j}{m} \quad se \quad m - j - \frac{N}{r} \geq 0,$$

onde a constante C depende apenas de Ω, r, q, m, j, α.

(ver [1], p. 79).

Em particular se $u \in L^r(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq r \leq q \leq \infty$, tem-se que $u \in L^p(\Omega)$ para todo p com $r \leq p \leq q$ e além disso, com $\alpha \in [0,1]$, satisfazendo $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{q}$, tem-se a desigualdade de interpolação:

$$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^r}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q}.$$

Teorema 1.2 (Imersão de Sobolev) *Seja $\Omega \subset I\!R^N$ um domínio limitado com contorno $\partial\Omega$ localmente Lipschitz. Sejam m, n números inteiros e p um número real com $0 \leq n \leq m$ e $p \geq 1$. Então têm-se as injeções contínuas e densas:*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{n,q}(\Omega)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m-n}{N} &\quad se \ \ p(m-n) < N, \\ q \in [1, \infty) &\quad se \ \ p(m-n) = N, \\ q = \infty &\quad se \ \ p(m-n) > N. \end{aligned}$$

Além disso, a injeção de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{n,s}(\Omega)$ é compacta para cada $1 \leq s < q$, com q definido acima.

Também, se $mp > N$ e k é o maior inteiro tal que $0 \leq k < \frac{pm-N}{p}$, têm-se as injeções compactas

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}).$$

(ver [1], p. 97, p. 144).

Outros resultados que frequentemente usaremos nos próximos capítulos, são os seguintes:

Teorema 1.3 (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam $\Omega \subset I\!R^N$ um domínio limitado, $p_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3, ..., k$ e f_1, $f_2, ...,$ f_k funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ onde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1.f_2.f_3....f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$||f||_{L^p} \leq ||f_1||_{L^{p_1}} ||f_2||_{L^{p_2}} ||f_3||_{L^{p_3}} ... ||f_k||_{L^{p_k}}.$$

(ver [4], p. 57).

Lema 1.1 (Desigualdade de Young) *Sejam a, $b \in I\!R$ com $a \geq 0, b \geq 0$ e sejam p, $q \in I\!R$ tais que $1 \leq p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se*

$$a\, b \leq \varepsilon\, a^p + C_\varepsilon\, b^q, \quad onde \ \ C_\varepsilon = (\frac{p-1}{p^q}) \varepsilon^{1-q}.$$

Lema 1.2 *Sejam $\phi(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ e $h(t)$ funções suaves não negativas definidas para todo $t \geq 0$. Assumir que*

$$\phi'(t) + \psi(t) \leq g(\phi(t)) + f(t) \quad e \quad \phi(0) = \phi_0,$$

para todo $t \geq 0$, *onde* g *é uma função Lipschitz contínua não negativa definida para* $\phi \geq 0$. *Então*

$$\phi(t) \leq F(t; \phi_0), \quad \textit{para todo } t \in [0, T(\phi_0))$$

onde $F(\ .\ ; \phi_0)$ *é a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} F'(t) &= g(F(t)) + f(t), \\ F(0) &= \phi_0 \end{aligned}$$

e $[0, T(\phi_0))$ *é o maior intervalo de existência. Além disso, se* g *é não decrescente, então*

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \phi_0 + \int_0^t [g(F(\tau; \phi_0)) + f(\tau)] d\tau.$$

(ver [15], p. 656).

Uma variante do Lema de Gronwall é o seguinte lema:

Lema 1.3 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam as funções* $a(t) \geq 0$ *absolutamente contínua com* $a'(t) \geq 0$ *e* $b(t) \geq 0$ *somável em* $[0, T]$. *Assumir que é satisfeita a seguinte desigualdade integral:*

$$\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau) d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

para as funções contínuas positivas φ *e* φ^* *sobre* $[0, T]$ *com uma constante* $\lambda > 0$.

Então

$$\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\lambda} \Big(1 + \int_0^t b(\tau) d\tau \Big) a(t) \exp\Big(\int_0^t b(\tau) d\tau \Big).$$

(ver [31], p. 437).

Também precisaremos do seguinte resultado de compacidade.

Lema 1.4 (Aubin-Lions) *Sejam os espaços de Banach* B_0, B *e* B_1, *com* B_0, B_1 *espaços reflexivos, tais que* $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ *com injeções contínuas e a injeção* $B_0 \hookrightarrow B$ *compacta. Para* T *finito e* $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 0, 1$, *seja*

$$W = \{\ v;\ v \in L^{p_0}(0, T; B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\ \}$$

com a norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Então W *é um espaço de Banach e*

$$W \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; B)$$

com injeção compacta.

(ver [22] p. 58, para o caso $1 < p_i < \infty$ e [38] p. 1097, para o caso geral).

A seguir, introduzimos alguns espaços funcionais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Considerando

$$C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega) = \{v \in (C_0^{\infty}(\Omega))^3;\ \text{div } v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\},$$

definimos os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} H(\Omega) = & \quad \text{fecho de} \quad C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega) \quad \text{na} \quad (L^2(\Omega))^3\text{norma},\\ V(\Omega) = & \quad \text{fecho de} \quad C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega) \quad \text{na} \quad (H^1(\Omega))^3\text{norma},\\ V_s(\Omega) = & \quad \text{fecho de} \quad C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega) \quad \text{na} \quad (H^s(\Omega))^3\text{norma}. \end{aligned}$$

Em particular, quando $s = 1$, $V_1(\Omega) = V(\Omega)$.

As normas e os produtos internos em $H(\Omega)$ e $V_s(\Omega)$ são:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} u_i(x) v_i(x) dx, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2},\\ (u, v)_s &= \sum_{i=1}^{3} (u_i, v_i)_{H^s}, \quad \|u\|_s = (u, u)_s^{1/2}. \end{aligned}$$

Denotamos

$$H = H(\Omega), \quad V = V(\Omega) \quad \text{e} \quad V_s = V_s(\Omega).$$

Observe-se que V é caracterizado por

$$V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^3;\ \text{div}\, v = 0 \text{ em } \Omega\}$$

(ver [40], p. 18) e consequentemente a H^1-norma e a H_0^1-norma são equivalentes para $u \in V$. Assim, para $u \in V$ denotamos $\|u\|_V = \|\nabla u\|$.

Note que V e H são espaços de Hilbert com $V \hookrightarrow H$ inclusão contínua e densa, portanto, identificando H com o seu dual topológico H^*, tem-se $V \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow V^*$ inclusões contínuas e densas, onde V^* é o dual topológico de V.
Denotamos por V_s^* o dual topológico de V_s e por H^{-s} o dual topológico de $H_0^s(\Omega)$ onde $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$.

O complemento ortogonal de H em $(L^2(\Omega))^3$ pode ser caracterizado por

$$H^{\perp} = \{\phi \in (L^2(\Omega))^3\ ;\ \phi = \nabla p \ \text{ para algum } p \in H^1(\Omega)\}.$$

Assim, o espaço $(L^2(\Omega))^3$ tem a decomposição $(L^2(\Omega))^3 = H \oplus H^{\perp}$ (decomposição de Helmholtz) e podemos considerar a projeção ortogonal (definida por esta soma direta):

$$P\ :\ (L^2(\Omega))^3 \longrightarrow H,$$

consequentemente, $P(\nabla g) = 0, \ \forall g \in H^1(\Omega)$.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domínio limitado, a aplicação

$$b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $b(u, v, w) = (u \cdot \nabla v, w)$ é uma forma trilinear bem definida.

Umas propriedades interessantes sobre a forma trilinear b são as seguintes:

$$b(u, v, v) = (u \cdot \nabla v, v) = 0 \ \text{ e } \ (u \cdot \nabla v, w) = -(u \cdot \nabla w, v), \ \ \forall u \in V, \ \forall v, \ w \in (H_0^1(\Omega))^3. \quad (1.4)$$

(ver [40], p. 163).

Consideraremos o Operador de Stokes $A = -P\Delta$ com domínio $D(A) = (H^2(\Omega))^3 \cap V$ que é caracterizado pela relação

$$(Aw, v) = (\nabla w, \nabla v), \ \ \forall w \in D(A), \ \forall v \in V.$$

Desde que A é um operador autoadjunto, definido positivo com inversa $A^{-1} : H \longrightarrow H$ compacta, por resultados de análise funcional para o operador A, existe uma sequência de autovalores positivos $\lambda_j > 0$ e uma sequência de autofunções $\{\varphi^j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, tal que

$$A\varphi^j = \lambda_j \varphi^j \ , \ \varphi^j \in D(A)$$

e $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq ..., \lim_{j \to \infty} \lambda_j = +\infty$.

Além disso, $\{\varphi^j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal para H, $\{\frac{\varphi^j(x)}{\sqrt{\lambda_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ forma uma base ortonormal em V (com o produto interno $(\nabla u, \nabla v)$; $u, v \in V$) e $\{\frac{\varphi^j(x)}{\lambda_j}\}_{j=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal para $(H^2(\Omega))^3 \cap V$ (com o produto interno (Au, Av); $u, v \in D(A)$).

Também, consideramos o operador Laplaciano $B = -\Delta$ ou o operador fortemente elítico $L = -\gamma\Delta - (\alpha + \beta)\nabla \operatorname{div}$, com condições de contorno Dirichlet e domínio $D(B) = (H^2(\Omega))^3 \cap (H_0^1(\Omega))^3 = D(L)$. Para simplificar a notação denotamos com $\phi^i(x)$ e γ_i as autofunções e os autovalores de B ou L segundo o contexto.

Observe-se que para os operadores B e L são válidas considerações análogas às do operador A.

Usando resultados fortes de Amrouche e Girault [3], observemos que quando Ω é de classe $C^{1,1}$, temos que $||u||_{H^2}$ e $||Au||$, $||w||_{H^2}$ e $||Bw||$, $||\nabla u||$ e $||A^{1/2}u||$, $||\nabla w||$ e $||B^{1/2}w||$ são normas equivalentes. Além disso, desde que $||w||_{H^2}$ e $||Lw||$ são normas equivalentes temos que $||Bw||$ e $||Lw||$, $||L^{1/2}w||$ e $||\nabla w||$, $||L^{1/2}w||$ e $||B^{1/2}w||$ são também normas equivalentes.

O seguinte lema é um caso particular do teorema geral de interpolação de Lions-Magenes [23].

Lema 1.5 *Sejam os espaços de Hilbert V, H tal que $V \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow V^*$ com inclusões contínuas e densas. Se a função $u \in L^2(0,T;V)$ e $u' = \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V^*)$, então u é quase sempre igual a uma função de $C([0,T];H)$ e tem-se a seguinte desigualdade:*

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 = 2\langle u', u\rangle$$

no sentido das distribuições sobre $(0,T)$.

(ver [40], p. 260).

Denotamos por $C_{\rm w}([0,T];E)$ o espaço das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ sobre o espaço de Banach E, isto é,

$$C_{\rm w}([0,T];E) = \{u : [0,T] \to E;\ \forall\, v \in E,\ t \to \langle u(t), v\rangle \text{ é uma função escalar contínua}\}.$$

Lema 1.6 *Sejam X e Y dois espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$ com injeção contínua. Se $\phi \in L^\infty(0,T;X)$ e $\phi \in C_{\rm w}([0,T];Y)$, então $\phi \in C_{\rm w}([0,T];X)$.*

Observemos que os espaços de funções são espaços vetoriais ou reais e não serão distinguidas estas duas situações em nossas notações. Também os vetores serão considerados como vetores linha.

Finalmente, no que segue, c denotará uma constante positiva genérica dependendo apenas de Ω, dos parâmetros $\mu, \chi, r, j, \nu, \alpha, \beta,\ \gamma$ fixados no problema e das condições iniciais, e quando precisarmos distinguir as constantes denotaremos com $c_1, c_2, \ldots$ e C com subíndices.

1.3 Resultados conhecidos sobre o problema

Considerando o problema (1.1)-(1.3) com $0 < T < \infty$, T número real fixado, a seguir, damos a noção de solução fraca do problema.

Definição 1.1 *Para qualquer $f \in L^2(0,T;V^*)$, $g \in L^2(0,T;H^{-1})$, u_0, $b_0 \in H$ e $w_0 \in L^2(\Omega)$, diremos que uma tripla de funções (u, w, b) é uma solução fraca para o problema (1.1)-(1.3) se*

$$u, b \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H),$$
$$w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

e satisfaz

$$(u_t, \varphi) + (\mu+\chi)(\nabla u, \nabla\varphi) + (u\cdot\nabla u, \varphi) = r(b\cdot\nabla b, \varphi) + \chi(\operatorname{rot} w, \varphi) + \langle f, \varphi\rangle, \tag{1.5}$$

$$j(w_t, \phi) + \gamma(\nabla w, \nabla\phi) + (\alpha+\beta)(\operatorname{div} w, \operatorname{div}\phi) + 2\chi(w, \phi) + j(u\cdot\nabla w, \phi)$$
$$= \chi(\operatorname{rot} u, \phi) + \langle g, \phi\rangle, \tag{1.6}$$

$$(b_t, \psi) + \nu(\nabla b, \nabla\psi) + (u\cdot\nabla b, \psi) - (b\cdot\nabla u, \psi) = 0, \tag{1.7}$$

$\forall\, \varphi,\ \psi \in V,\ \ \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega)$ *e para todo* $0 < t < T$ *no sentido* $\mathcal{D}'(0,T)$, *com*

$$u(0) = u_0, \quad b(0) = b_0 \quad \text{e} \quad w(0) = w_0. \tag{1.8}$$

A existência de soluções fracas do problema (1.1)-(1.3) com $b = 0$, foi provada por Lukaszewicz [24], sob condições apropriadas usando a técnica de linearização e um Teorema de quase ponto fixo. Para o sistema completo (1.1)-(1.3), Rojas-Medar e Boldrini [33], provaram um resultado de existência de soluções fracas, usando o método de Galerkin espectral. Isto é, fixaram $s = 3/2$ e consideraram as bases Hilbertianas $\{\varphi^i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de $V_s(\Omega)$ e $\{\psi^i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ de $H_0^s(\Omega)$, onde os elementos foram escolhidos com sendo as soluções dos problemas espectrais:

$$\begin{aligned} (\varphi^i, v)_s &= \lambda_i(\varphi^i, v), \quad \forall\, v \in V_s(\Omega) \\ (\psi^i, w)_s &= \tilde{\lambda}_i(\psi^i, w), \quad \forall\, w \in H_0^s(\Omega). \end{aligned}$$

Para todo $k \geq 1$, consideraram $V^k = span\{\varphi^1(x), ..., \varphi^k(x)\} \subset V_s$ e $H_k = span\{\psi^1(x), ..., \psi^k(x)\} \subset H_0^s(\Omega)$ subespaços finitos dimensionais e as aproximações u^k, w^k e b^k de u, w e b respectivamente, definidas pelas seguintes expansões finitas:

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\varphi^i(x), \quad w^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} d_{ik}(t)\psi^i(x), \quad b^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} e_{ik}(t)\varphi^i(x), \tag{1.9}$$

satisfazendo as seguintes equações:

$$\begin{aligned} &(u_t^k, \varphi) + (\mu + \chi)\ (\nabla u^k, \nabla\varphi) + (u^k \cdot \nabla u^k, \varphi) = \chi(\operatorname{rot} w^k, \varphi) + r(b^k \cdot \nabla b^k, \varphi) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (f, \varphi), && (1.10) \\ &j(w_t^k, \phi) + \gamma(\nabla w^k, \nabla\phi) + (\alpha + \beta)\ (\operatorname{div} w^k, \operatorname{div}\phi) + j(u^k \cdot \nabla w^k, \phi) + 2\chi(w^k, \phi) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \chi(\operatorname{rot} u^k, \phi) + (g, \phi), && (1.11) \\ &(b_t^k, \psi) + \nu(\nabla b^k, \nabla\psi) + (u^k \cdot \nabla b^k, \psi) - (b^k \cdot \nabla u^k, \psi) = 0, && (1.12) \\ &u^k(0) = u_0^k,\ w^k(0) = w_0^k,\ b^k(0) = b_0^k, && (1.13) \\ &\forall\ \varphi, \psi \in V^k \text{ e } \forall\, \phi \in H_k. \end{aligned}$$

onde $u_0^k \longrightarrow u_0$ e $b_0^k \longrightarrow b_0$ em H e $w_0^k \longrightarrow w_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Assim, usando estas aproximações Rojas-Medar e Boldrini [33], obtiveram o seguinte teorema de existência:

Teorema 1.4 *Se* $u_0, b_0 \in H$, $w_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;V^*)$, $g \in L^2(0,T;H^{-1})$, *então existe uma solução fraca* (u, w, b) *do problema (1.1)-(1.3), isto é,*

$$u,\ b \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \quad \text{e} \quad w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Além disso, $u,\ b \in C([0,T];V_{1/4}^*)$ *e* $w \in C([0,T];H^{-1/4})$.

Observação 1.1 *Como* (u, w, b) *é solução fraca, têm-se que* u, $b \in L^\infty(0, T; H)$ *e* $w \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, *além disso,* u, $b \in C_w([0, T]; V^*_{1/4})$ *e* $w \in C_w([0, T]; H^{-1/4})$. *Então, desde que* $H \subset V^*_{1/4}$ *e* $L^2(\Omega) \subset H^{-1/4}$, *aplicando Lema 1.6, conclui-se*

u, $b \in C_w([0, T]; H)$ *e* $w \in C_w([0, T]; L^2(\Omega))$.

Agora, usando as propriedades da projeção $P : L^2(\Omega) \longrightarrow H$, podemos reformular o problema (1.1)-(1.3) como segue: encontrar u, w, b, em apropriados espaços (a serem definidos depois), satisfazendo

$$(u_t, \varphi) + (u \cdot \nabla u, \varphi) + (\mu + \chi)\ (Au, \varphi) = \chi(\operatorname{rot} w, \varphi) + r(b \cdot \nabla b, \varphi) + \langle f, \varphi \rangle, \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} j(w_t, \phi) + \gamma(Bw, \phi) - (\alpha + \beta)\ (\nabla \operatorname{div} w, \phi) + j(u \cdot \nabla w, \phi) + 2\chi(w, \phi) & \\ = \chi(\operatorname{rot} u, \phi) + \langle g, \phi \rangle, & \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$(b_t, \psi) + \nu(Ab, \psi) + (u \cdot \nabla b, \psi) - (b \cdot \nabla u, \psi) = 0, \tag{1.16}$$

para $0 < t < T$, $\forall\ \varphi, \psi \in V$, $\forall \phi \in H^1_0(\Omega)$,

$$u(x, 0) = u_0(x),\ w(x, 0) = w_0(x),\ b(x, 0) = b_0(x). \tag{1.17}$$

A seguir, damos a noção de solução forte (local e global) do problema (1.1)-(1.3).

Para a definição de solução local forte, considerar o problema (1.1)-(1.3) com T número real fixado, $0 < T < \infty$.

Definição 1.2 *Sejam* $u_0, b_0 \in V$, $w_0 \in H^1_0(\Omega)$ *e* f, $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. *Dizemos que* (u, w, b) *é uma solução local forte de (1.1)-(1.3), se* u, $b \in L^\infty(0, T_1; V) \cap L^2(0, T_1; D(A))$, $w \in L^\infty(0, T_1; H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0, T_1; D(B))$ *para algum* $0 < T_1 \leq T$ *e satisfaz (1.14)-(1.17).*

Para dar a noção de solução global forte, consideramos o problema (1.1)-(1.3) com $T = \infty$.

Definição 1.3 *Sejam* $u_0, b_0 \in V$, $w_0 \in H^1_0(\Omega)$ *e* $f, g \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$. *Uma solução global forte do problema (1.1)-(1.3), é uma terna de funções vetoriais (u,w,b) tais que* u, b *pertencem ao espaço* $L^\infty(0, \infty; V) \cap L^2_{loc}(0, \infty; D(A))$, w *pertence ao espaço* $L^\infty(0, \infty; H^1_0(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, \infty; D(B))$ *e satisfaz (1.14)-(1.17).*

Observação 1.2 *Se prova que se* (u, w, b) *é uma solução global forte do problema (1.1)-(1.3), então* $u_t, b_t \in L^2_{loc}(0, \infty; H)$ *e* $w_t \in L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega))$. *E assim, esta condição junto com* $u, b \in L^2_{loc}(0, \infty; D(A))$ *e* $w \in L^2_{loc}(0, \infty; D(B))$, *implicam por interpolação (ver Lema 1.5), que* u, b *são quase sempre iguais a uma função contínua de* $[0, T]$ *em* $V (0 < T < \infty)$; *analogamente,* w *é quase sempre igual a uma função contínua de* $[0, T]$ *em* $H^1_0(\Omega)$ $(0 < T < \infty)$. *Consequentemente, as condições iniciais* $u(0) = u_0$, $w(0) = w_0$, $b(0) = b_0$ *são bem definidas.*

Usando a técnica de linearização e um Teorema de quase ponto fixo, Lukaszewicz [25], estabeleceu (sob certas relações entre as viscosidades, os dados u_0, w_0 e as forças externas f, g) a existência e a unicidade da solução global forte do problema (1.1)-(1.3) quando $b = 0$.

No Capítulo 3, para provar a existência global de soluções fortes de (1.1)-(1.3) (equivalentemente de (1.14)-(1.17)), sem assumir as restrições feitas por Lukaszewics [25], aplicaremos o método de Galerkin espectral.

Isto é, consideramos os subespaços finito dimensionais $V^k = span\{\varphi^1(x), ..., \varphi^k(x)\} \subset V$ e $H_k = span\{\phi^1(x), ..., \phi^k(x)\} \subset H_0^1(\Omega)$, $k \in I\!N$, as correspondentes projeções ortogonais $P_k : L^2(\Omega) \to V^k$ e $R_k : L^2(\Omega) \to H_k$, e as soluções aproximadas:

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\varphi^i(x), \quad w^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} d_{ik}(t)\phi^i(x) \quad \text{e} \quad b^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} e_{ik}(t)\varphi^i(x), \tag{1.18}$$

desemvolvidos em termos das autofunções $\{\varphi^i\}$ do Operador de Stokes $A = -P\triangle$ e das autofunções $\{\phi^i\}$ do operador $L = \gamma B - (\alpha+\beta)\nabla\text{div}$ com $B = -\triangle$. Então, os coeficientes $c_{ik}(t), d_{ik}(t)$ e $e_{ik}(t)$ são determinados com a condição que u^k, w^k e b^k satisfaçam as seguintes equações:

$$u_t^k + (\mu+\chi)Au^k + P_k(u^k \cdot \nabla u^k) = \chi P_k \text{rot}\, w^k + rP_k(b^k \cdot \nabla b^k) + P_k f\ , \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} jw_t^k + \gamma Bw^k - (\alpha+\beta)\nabla\text{div}\, w^k + jR_k(u^k \cdot \nabla w^k) + 2\chi w^k & \\ = \chi R_k \text{rot}\, u^k + R_k g, & \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$b_t^k + \nu Ab^k + P_k(u^k \cdot \nabla b^k) - P_k(b^k \cdot \nabla u^k) = 0, \tag{1.21}$$

$$u^k(0) = P_k u_0,\ w^k(0) = R_k w_0,\ b^k(0) = P_k b_0, \tag{1.22}$$

desde que $P_k A = AP_k$ e $R_k L = LR_k$. Ou equivalentemente:

$$\begin{aligned} (u_t^k, \varphi) + (\mu+\chi)\ (Au^k, \varphi) + (u^k \cdot \nabla u^k, \varphi) = \chi(\text{rot}\, w^k, \varphi) + r(b^k \cdot \nabla b^k, \varphi) & \\ +(f, \varphi), & \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} j(w_t^k, \phi) + \gamma(Bw^k, \phi) - (\alpha+\beta)\ (\nabla\text{div}\, w^k, \phi) + j(u^k \cdot \nabla w^k, \phi) + 2\chi(w^k, \phi) & \\ = \chi(\text{rot}\, u^k, \phi) + (g, \phi), & \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$(b_t^k, \psi) + \nu(Ab^k, \psi) + (u^k \cdot \nabla b^k, \psi) - (b^k \cdot \nabla u^k, \psi) = 0, \tag{1.25}$$

$$u^k(0) = P_k u_0,\ w^k(0) = R_k w_0,\ b^k(0) = P_k b_0, \tag{1.26}$$

$\forall\ \varphi, \psi \in V^k$ e $\forall\ \phi \in H_k$.

Isto é equivalente à formulação fraca:

$$\begin{aligned} (u_t^k, \varphi) + (\mu+\chi)\ (\nabla u^k, \nabla\varphi) + (u^k \cdot \nabla u^k, \varphi) = \chi(\text{rot}\, w^k, \varphi) + r(b^k \cdot \nabla b^k, \varphi) & \\ +(f, \varphi), & \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$
\begin{aligned}
&j(w_t^k,\phi)+\gamma(\nabla w^k,\nabla\phi)+(\alpha+\beta)\,(\operatorname{div} w^k,\operatorname{div}\phi)+j(u^k\cdot\nabla w^k,\phi)+2\chi(w^k,\phi)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad= \chi(\operatorname{rot} u^k,\phi)+(g,\phi), &(1.28)\\
&(b_t^k,\psi)+\nu(\nabla b^k,\nabla\psi)+(u^k\cdot\nabla b^k,\psi)-(b^k\cdot\nabla u^k,\psi)=0, &(1.29)\\
&u^k(0)=P_k u_0,\ w^k(0)=R_k w_0,\ b^k(0)=P_k b_0, &(1.30)\\
&\forall\ \varphi,\psi\in V^k \text{ e } \forall\,\phi\in H_k.
\end{aligned}
$$

Usando as aproximações (1.18) (as quais existem para todo $t\geq 0$, segundo a estimativa energia para a solução fraca) com $\{\phi^i\}$ autofunções do Operador Laplaciano $B=-\triangle$ e (1.23)-(1.26), Rojas-Medar [32] estabeleceu resultados de existência e unicidade da solução local forte para (1.1)-(1.3). Os seus resultados foram os seguintes:

Teorema 1.5 *Sejam os valores iniciais $u_0, b_0\in V$, $w_0\in H_0^1(\Omega)$ e as forças externas $f,g\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $0<T<\infty$. Então, sobre um (possívelmente pequeno) intervalo de tempo $[0,T_1]$, $0<T_1\leq T$, o problema (1.1)-(1.3) tem uma única solução forte (u,w,b) e*

$$(u_t,w_t,b_t)\in L^2(0,T_1;H)\times L^2(0,T_1;L^2(\Omega))\times L^2(0,T_1;H).$$

Além disso, esta solução pertence ao $C([0,T_1];V)\times C([0,T_1];H_0^1(\Omega))\times C([0,T_1];V)$.

Também, existem C^1-funções $F_0(t),F_1(t)$ e $F_2(t)$ tais que para quaisquer $t\in[0,T_1]$, têm-se:

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|^2+j\|w(t)\|^2+r\|b(t)\|^2\\
&\qquad+\int_0^t((\mu+\chi)\|\nabla u(\tau)\|^2+\gamma\|\nabla w(\tau)\|^2+2r\nu\|\nabla b(\tau)\|^2)d\tau\\
&\qquad\qquad+\int_0^t(4\chi\|w(\tau)\|^2+2(\alpha+\beta)\|\operatorname{div} w(\tau)\|^2)d\tau\leq F_0(t),\\
&\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla b(t)\|^2+j\|\nabla w(t)\|^2\\
&\qquad\qquad+c\int_0^t(\|Au(\tau)\|^2+\|Ab(\tau)\|^2+\|Bw(\tau)\|^2)d\tau\leq F_1(t),\\
&\int_0^t(\|u_t(\tau)\|^2+\|b_t(\tau)\|^2+j\|w_t(\tau)\|^2)d\tau\leq F_2(t).
\end{aligned}
$$

Também, as mesmas classes de estimativas são válidas uniformemente em $k\in\mathbb{N}$ para as aproximações de Galerkin (u^k,w^k,b^k).

Com hipóteses mais fortes sobre os dados iniciais e as forças externas, obteve o seguinte teorema:

Teorema 1.6 *Além das hipóteses do Teorema 1.5, assumir que $u_0,b_0\in V\cap H^2(\Omega)$, $w_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e $f_t,g_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Então a solução (u,w,b) fornecida pelo*

Teorema 1.5, satisfaz u, $b \in L^\infty(0,T_1;D(A))$, $w \in L^\infty(0,T_1;D(B))$ *e*

$$u_t,\ b_t \in L^\infty(0,T_1;H)\cap L^2(0,T_1;V),\quad u_{tt},\ b_{tt}\in L^2(0,T_1;V^*),$$
$$w_t \in L^\infty(0,T_1;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)),\quad w_{tt}\in L^2(0,T_1;H^{-1}).$$

Além disso,

$$u,\ b\in C^1([0,T_1];H)\cap C([0,T_1];D(A)),\quad w\in C^1([0,T_1];L^2(\Omega))\cap C([0,T_1];D(B))$$

e têm-se as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
&\|u_t(t)\|^2 + j\|w_t(t)\|^2 + r\|b_t(t)\|^2\\
&\qquad + c\int_0^t (\|\nabla u_t(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t(\tau)\|^2)d\tau \le H_0(t);\\
&\|Au(t)\|^2 + \|Ab(t)\|^2 \le H_1(t);\\
&\|Bw(t)\|^2 \le H_2(t);\\
&\int_0^t (\|u_{tt}(\tau)\|^2_{V^*} + \|w_{tt}(\tau)\|^2_{H^{-1}} + \|b_{tt}(\tau)\|^2_{V^*})d\tau \le H_3(t)
\end{aligned}$$

para todo $t\in[0,T_1]$, *onde* $H_i(t), i=0,1,2,3$ *são funções contínuas em* $t\in[0,T_1]$.

Também, as mesmas classes de estimativas são válidas uniformemente em $k\in I\!N$ *para as aproximações de Galerkin* (u^k,w^k,b^k).

Como uma consequência de acima, usando resultados de Amrouche e Girault [3], para a pressão conclui-se:

Proposição 1.1 *Se as hipóteses do Teorema 1.5 são satisfeitas, então existe uma única função* $p\in L^2(0,T_1;H^1(\Omega)/I\!R)$ *tal que* (u,w,b,p) *é a única solução de (1.1)-(1.3), onde* (u,w,b) *é a solução dada pelo Teorema 1.5.*

Proposição 1.2 *Se as hipóteses do Teorema 1.6, são satisfeitas, então existe uma única função* $p\in L^\infty(0,T_1;H^1(\Omega)/I\!R)\cap C([0,T_1];L^2(\Omega)/I\!R)$, *tal que* (u,w,b,p) *é a única solução de (1.1)-(1.3), onde* (u,w,b) *é a solução fornecida pelo Teorema 1.6.*

Capítulo 2

Unicidade e regularidade da solução fraca

Damos um resultado de unicidade da solução fraca das equações do movimento de um fluido magneto-micropolar. Também, provamos que as soluções fracas possuem derivadas fracionárias no tempo de qualquer ordem menor que 1/4 e condicionalmente possuem derivadas fracionárias no tempo de ordem menor que 1/2.

2.1 Preliminares e resultados teóricos

Para fixar as notações, daremos as definições dos espaços e resultados a serem usados neste capítulo.

Seja I um intervalo de $I\!R$ e seja E um espaço de Banach. Os espaços de Sobolev fracionários são definidos para $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$ por

$$W^{s,p}(I;E) = \{f \in L^p(I;E)\,;\ \|f\|_{\tilde{W}^{s,p}} < \infty\}$$
$$\text{onde} \qquad \|f\|_{\tilde{W}^{s,p}} = \left(\int_{I\times I}\left(\frac{\|f(t)-f(\tau)\|_E}{|t-\tau|^s}\right)^p \frac{dtd\tau}{|t-\tau|}\right)^{1/p}.$$

$W^{s,p}(I;E)$ tem estrutura de espaço vetorial e com a norma $\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\tilde{W}^{s,p}}$ é um espaço de Banach.

Quando $p = 2$, observemos que $W^{s,2}(I;E)$ coincide algebrica e topologicamente com $H^s(I;E)$ como definido no Cap. 1.

Agora, para qualquer $h \geq 0$ seja $I_h = \{t \in I\,;\, t+h \in I\}$ e denotamos por $u_h(.)$ a função $u_h(t) = u(t+h) - u(t)$. Logo, se $f \in L^p(I;E)(1 \leq p < \infty)$, então f, f_h e $f_h + f$ são todas bem definidas em I_h.

Os espaços de Nikolskii de ordem s, $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$, são definidos por

$$N^{s,p}(I;E) = \{f \in L^p(I;E)|\, ;\, \|f\|_{\tilde{N}^{s,p}} < \infty\}$$

onde

$$\|f\|_{\tilde{N}^{s,p}} = \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \left(\int_{I_h} \|f_h(t)\|_E^p dt \right)^{1/p}.$$

O espaço $N^{s,p}(I;E)$ com a norma $\|f\|_{N^{s,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\tilde{N}^{s,p}}$ é um espaço de Banach.

Observamos que se $I = (\alpha, \beta)$, então $I_h = (\alpha, \beta - h)$ para $h < \beta - \alpha$, $I_h = \phi$ para $h \geq \beta - \alpha$.

Quando $I = (0,T)$, denotamos

$$W^{s,p}(I;E) = W^{s,p}(0,T;E) \quad \text{e} \quad N^{s,p}(I;E) = N^{s,p}(0,T;E).$$

O seguinte resultado que compara espaços de Sobolev e espaços de Nikolskii, é devido a J. Simon ([39], p. 141, Corolário 24).

Proposição 2.1 *Suponha que $s > r$ ($0 < r < s < 1$, $1 \leq p < \infty$). Então*

$$W^{s,p}(I;E) \hookrightarrow N^{s,p}(I;E) \hookrightarrow W^{r,p}(I;E)$$

com injeções contínuas.

Os argumentos que usaremos para obter resultados de regularidade, será baseado sobre o clássico Lema de Hardy-Littlewood ([44], p. 32).

Lema 2.1 (Hardy-Littlewood) *Suponha que $\tilde{f}$ é integrável sobre $(0,a)$. Para todo t, $0 < t \leq a$, colocamos*

$$\theta(t) = \sup_{\xi} \frac{1}{t-\xi} \int_{\xi}^{t} \tilde{f}(\tau)d\tau, \qquad \text{onde } 0 \leq \xi < t,$$

$$\theta_1(t) = \sup_{\xi} \frac{1}{\xi - t} \int_{t}^{\xi} \tilde{f}(\tau)d\tau, \qquad \text{onde } t < \xi \leq a$$

e $M(t) = \max\{\theta(t), \theta_1(t)\} = \sup_{\xi\in[0,a]} \frac{1}{\xi - t} \int_t^{\xi} \tilde{f}(\tau)d\tau.$

Então, se $\tilde{f} \in L^r(0,a)$, $r > 1$, têm-se $M \in L^r(0,a)$ e

$$\int_0^a M^r(t)dt \leq 2\left(\frac{r}{r-1}\right)^r \int_0^a \tilde{f}^r(t)dt.$$

Um resultado que será fundamental para obter estimativas nos espaços de Nikolskii e consequentemente junto com a Proposição 2.1, para obter a ordem das derivadas fracionárias, é o seguinte lema:

Lema 2.2 *Sejam X, Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ continuamente e seja $u \in L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, satisfazendo a seguinte desigualdade integral:*

$$\int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_Y^p dt \leq \int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_X \int_t^{t+h} \tilde{g}(\tau)d\tau\, dt \tag{2.1}$$

onde $u_h(t) = u(t+h) - u(t)$. Então

a) Se $\tilde{g} \in L^1(0,T)$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, tem-se $u \in N^{\frac{1}{pq},p}(0,T;Y)$. Além disso,

$$\|u\|_{N^{\frac{1}{pq},p}(0,T;Y)} \leq c\, \|u\|_{L^p(0,T;X)}^{\frac{1}{p}}$$

onde c é uma constante positiva que apenas depende de $\|\tilde{g}\|_{L^1(0,T)}$.

b) Se $\tilde{g} \in L^q(0,T)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então $u \in N^{\frac{1}{p},p}(0,T;Y)$ e satisfaz

$$\|u\|_{N^{\frac{1}{p},p}(0,T;Y)} \leq c\, \|u\|_{L^p(0,T;X)}^{\frac{1}{p}}.$$

onde c é uma constante positiva que apenas depende de $\|\tilde{g}\|_{L^q(0,T)}$.

Prova.

Prova da parte (a):

Fazendo uso do Teorema de Fubini na integral do lado direito da desigualdade (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_X \int_t^{t+h} \tilde{g}(\tau)d\tau\, dt &= \int_0^h \tilde{g}(\tau) \int_0^\tau \|u_h(t)\|_X dt\, d\tau \\ &\quad + \int_h^{T-h} \tilde{g}(\tau) \int_{\tau-h}^{\tau} \|u_h(t)\|_X dt\, d\tau \\ &\quad + \int_{T-h}^{T} \tilde{g}(\tau) \int_{\tau-h}^{T-h} \|u_h(t)\|_X dt\, d\tau \\ &= \int_0^T \tilde{g}(\tau) \int_{\overline{\tau-h}}^{\overline{\tau}} \|u_h(t)\|_X dt\, d\tau, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\overline{\tau} = \begin{cases} 0 & \tau \leq 0, \\ \tau & 0 \leq \tau \leq T-h, \\ T-h & \tau > T-h. \end{cases}$

Observe-se que $\overline{\tau} \leq T-h$, $\overline{\tau-h} \geq 0$ e $\overline{\tau} - \overline{\tau-h} = \begin{cases} \tau & 0 \leq \tau \leq h, \\ h & h \leq \tau \leq T-h, \\ T-\tau & \tau > T-h. \end{cases}$

Agora, usando a desigualdade de Hölder no lado direito de (2.2), temos

$$\int_{\overline{\tau-h}}^{\overline{\tau}} \|u_h(t)\|_X dt \leq \left(\int_{\overline{\tau-h}}^{\overline{\tau}} 1^q dt\right)^{1/q} \left(\int_{\overline{\tau-h}}^{\overline{\tau}} \|u_h(t)\|_X^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \quad h^{1/q}\Big(\int_{\overline{\tau-h}}^{\overline{\tau}} \|u_h(t)\|_X^p dt\Big)^{1/p} \tag{2.3}$$

desde que $\overline{\tau} - \overline{\tau - h} \leq h$. Por outro lado, da definição de u_h temos

$\|u_h(t)\|_X \leq \|u(t+h)\|_X + \|u(t)\|_X$ e desde que $(a+b)^p \leq 2^p\,(a^p + b^p)$, resulta

$$\|u_h(t)\|_X^p \leq 2^p \|u(t+h)\|_X^p + 2^p \|u(t)\|_X^p,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_X^p dt &\leq 2^p \int_0^{T-h} \|u(t+h)\|_X^p dt + 2^p \int_0^{T-h} \|u(t)\|_X^p dt \\
&\leq 2^p \int_h^{T} \|u(t)\|_X^p dt + 2^p \int_0^{T} \|u(t)\|_X^p dt \\
&\leq 2^{p+1} \int_0^{T} \|u(t)\|_X^p dt = 2^{p+1}\, \|u\|_{L^p(0,T;X)}^p. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Assim, desde que $\overline{\tau - h} \geq 0$ e $\overline{\tau} \leq T - h$, observando (2.4), temos

$$\int_{\overline{\tau-h}}^{\overline{\tau}} \|u_h(t)\|_X^p dt \leq \int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_X^p dt \leq 2^{p+1}\, \|u\|_{L^p(0,T;X)}^p.$$

Logo, levando a desigualdade acima em (2.3), vem

$$\int_{\overline{\tau-h}}^{\overline{\tau}} \|u_h(t)\|_X dt \leq h^{1/q}\, 2^{1+1/p}\, \|u\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Portanto, a última desigualdade e (2.2), implicam

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_X \int_t^{t+h} \tilde{g}(\tau) d\tau\, dt &\leq \int_0^{T} \tilde{g}(\tau)\, h^{1/q}\, 2^{1+1/p}\, \|u\|_{L^p(0,T;X)} d\tau \\
&\leq h^{1/q}\, 2^{1+1/p}\, \|u\|_{L^p(0,T;X)} \int_0^{T} \tilde{g}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

e desde que por hipótese $\tilde{g} \in L^1(0,T)$, tem-se

$$\int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_X \int_t^{t+h} \tilde{g}(\tau) d\tau\, dt \leq h^{1/q}\, 2^{1+1/p}\, \|\tilde{g}\|_{L^1(0,T)} \|u\|_{L^p(0,T;X)}. \tag{2.5}$$

Agora, levando (2.5) em (2.1), resulta

$$\int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_Y^p dt \leq h^{1/q}\, 2^{1+1/p}\, \|\tilde{g}\|_{L^1(0,T)} \|u\|_{L^p(0,T;X)},$$

o qual implica

$$\frac{1}{h^{\frac{1}{qp}}}\Big(\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X^p dt\Big)^{1/p} \leq 2^{1/p+1/p^2}||\tilde{g}||_{L^1(0,T)}^{1/p}||u||_{L^p(0,T;X)}^{1/p}.$$

Portanto, com $c = 2^{1/p+1/p^2}||\tilde{g}||_{L^1(0,T)}^{1/p}$ e da hipótese sobre u junto com a definição dos espaços de Nikolskii, conclui-se os resultados da parte (a) do lema.
Prova da parte (b):

Neste caso, encontraremos melhores estimativas para o lado direito da desigualdade (2.1) do que as obtidas na prova da parte (a). Para isto, será fundamental o uso do Lema de Hardy-Littlewood.

Para o termo do lado direito de (2.1), temos

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X\int_t^{t+h}\tilde{g}(\tau)d\tau\,dt &= h\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X\Big(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\tilde{g}(\tau)d\tau\Big)dt\\ &\leq h\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X\theta_1(t)\,dt \qquad (2.6)\end{aligned}$$

onde $\theta_1(t) = \sup\limits_{h>0}\Big(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\tilde{g}(\tau)\,d\tau\Big)$.

Agora, usando a desigualdade de Hölder no lado direito de (2.6), tem-se

$$\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X\int_t^{t+h}\tilde{g}(\tau)d\tau\,dt \leq h\Big(\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X^p dt\Big)^{1/p}\Big(\int_0^{T-h}\theta_1^q(t)\,dt\Big)^{1/q}. \qquad (2.7)$$

Por hipótese $\tilde{g}\in L^q(0,T-h)$, então observando a definição de $\theta_1(t)$, aplicamos o Lema 2.1 (Hardy-Littlewood) à segunda integral do lado direito de (2.7), com $a = T-h$, $r = q$ e $\tilde{f} = \tilde{g}$, obtendo

$$\int_0^{T-h}\theta_1^q(t)dt \leq 2\Big(\frac{q}{q-1}\Big)^q\int_0^{T-h}\tilde{g}^q(t)\,dt \leq 2\Big(\frac{q}{q-1}\Big)^q\int_0^{T}\tilde{g}^q(t)dt = 2\Big(\frac{q}{q-1}\Big)^q||\tilde{g}||_{L^q(0,T)}^q.$$

Assim, levando a última desigualdade em (2.7), vem

$$\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X\int_t^{t+h}\tilde{g}(\tau)d\tau\,dt \leq h\Big(\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X^p dt\Big)^{1/p}2^{1/q}\Big(\frac{q}{q-1}\Big)||\tilde{g}||_{L^q(0,T)}$$

e observando (2.4), resulta

$$\int_0^{T-h}||u_h(t)||_X\int_t^{t+h}\tilde{g}(\tau)d\tau\,dt \leq h\,2^{1+1/p}\,||u||_{L^p(0,T;X)}\,2^{1/q}\Big(\frac{q}{q-1}\Big)||\tilde{g}||_{L^q(0,T)}$$

logo, com isto em (2.1), obtemos

$$\frac{1}{h}\int_0^{T-h}\|u_h(t)\|_Y^p dt \leq 4\left(\frac{q}{q-1}\right)\|\tilde{g}\|_{L^q(0,T)}\|u\|_{L^p(0,T;X)}$$

desde que $2^{1/q+1/p}=2$, e então

$$\sup_{h>0}\frac{1}{h^{1/p}}\left(\int_0^{T-h}\|u_h(t)\|_Y^p dt\right)^{1/p} \leq 4^{1/p}\left(\frac{q}{q-1}\right)^{1/p}\|\tilde{g}\|_{L^q(0,T)}^{1/p}\|u\|_{L^p(0,T;X)}^{1/p} \leq c\,\|u\|_{L^p(0,T;X)}^{1/p}$$

onde c é uma constante que depende de $\|\tilde{g}\|_{L^q(0,T)}$. Portanto, pela hipótese sobre u e da definição dos espaços de Nikolskii, segue-se os resultados da parte (b) do lema.

2.2 Unicidade da solução fraca

Com as notações do Cap. 1, nosso resultado é o seguinte:

Teorema 2.1 *Sejam u_0, $b_0 \in H$, $w_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;V^*)$ e $g \in L^2(0,T;H^{-1})$. Então, existe no máximo uma solução fraca do problema (1.1)-(1.3) tal que*

$$u,\, b \in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)\cap L^s(0,T;L^r(\Omega)),$$
$$w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty\,(0,T;L^2(\Omega))\cap L^s(0,T;L^r(\Omega)),$$

onde $\dfrac{2}{s}+\dfrac{3}{r}\leq 1$ com $r>3$.

Além disso, a solução (u,w,b), se existe, satisfaz

$$(u,w,b)\in C([0,T];H)\times C([0,T];L^2(\Omega))\times C([0,T];H).$$

Prova. A existência da solução fraca (u,w,b) do problema (1.1)-(1.3), satisfazendo

$$u,\, b \in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H) \quad \text{e} \quad w\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty\,(0,T;L^2(\Omega)),$$

foi provada por Rojas-Medar e Boldrini [33] (ver Teorema 1.4 do Cap. 1).

A seguir, assumindo que $(u,w,b)\in L^s(0,T;L^r(\Omega))$ provaremos que ela é única.

Para isto, suponhamos que $(u_1,w_1,b_1)\in L^s(0,T;L^r(\Omega))$ é outra solução fraca do problema (1.1)-(1.3) para os mesmos u_0, w_0, b_0, f e g. Também, denotemos

$$\rho = u-u_1, \quad \eta = w-w_1 \quad \text{e} \quad \xi = b-b_1.$$

Então, de (1.5)-(1.7), temos que ρ, η e ξ, satisfazem

$$\begin{aligned}
&(\rho_t, \varphi) + (\mu+\chi)(\nabla\rho, \nabla\varphi) = -(\rho\cdot\nabla u, \varphi) - (u_1\cdot\nabla\rho, \varphi) + r(\xi\cdot\nabla b, \varphi) \\
&\qquad\qquad + r(b_1\cdot\nabla\xi, \varphi) + \chi(\operatorname{rot}\eta, \varphi), \qquad (2.8)\\
&j(\eta_t, \phi) + \gamma(\nabla\eta, \nabla\phi) + (\alpha+\beta)(\operatorname{div}\eta, \operatorname{div}\phi) + 2\chi(\eta, \phi)\\
&\qquad\qquad = -j(\rho\cdot\nabla w, \phi) - j(u_1\cdot\nabla\eta, \phi) + \chi(\operatorname{rot}\rho, \phi), \qquad (2.9)\\
&(\xi_t, \psi) + \nu(\nabla\xi, \nabla\psi) = -(\rho\cdot\nabla b, \psi) - (u_1\cdot\nabla\xi, \psi) + (\xi\cdot\nabla u, \psi) + (b_1\cdot\nabla\rho, \psi), (2.10)\\
&\forall\ \varphi,\ \psi \in V \ \text{ e } \ \forall\ \phi \in H_0^1(\Omega)\\
&\rho(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \xi(0) = 0. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Colocando $\varphi = \rho$, $\phi = \eta$ e $\psi = r\,\xi$ em (2.8)-(2.10) respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\rho||^2 + (\mu+\chi)||\nabla\rho||^2 = -(\rho\cdot\nabla u, \rho) + r(\xi\cdot\nabla b, \rho) + r(b_1\cdot\nabla\xi, \rho) + \chi(\operatorname{rot}\eta, \rho),\\
&\frac{j}{2}\frac{d}{dt}||\eta||^2 + \gamma||\nabla\eta||^2 + (\alpha+\beta)||\operatorname{div}\eta||^2 + 2\chi||\eta||^2 = -j(\rho\cdot\nabla w, \eta) + \chi(\operatorname{rot}\rho, \eta),\\
&\frac{r}{2}\frac{d}{dt}||\xi||^2 + \nu\, r\, ||\nabla\xi||^2 = -r\,(\rho\cdot\nabla b, \xi) + r\,(\xi\cdot\nabla u, \xi) + r\,(b_1\cdot\nabla\rho, \xi),
\end{aligned}$$

desde que $(u_1\cdot\nabla\rho, \rho) = (u_1\cdot\nabla\eta, \eta) = (u_1\cdot\nabla\xi, \xi) = 0$.

Somando as igualdades acima, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||\rho||^2 + j||\eta||^2 + r||\xi||^2) + (\mu+\chi)||\nabla\rho||^2 + \gamma||\nabla\eta||^2 + \nu r\, ||\nabla\xi||^2\\
&\quad + (\alpha+\beta)||\operatorname{div}\eta||^2 + 2\chi||\eta||^2\\
&\qquad = -(\rho\cdot\nabla u, \rho) + r(\xi\cdot\nabla b, \rho) - j(\rho\cdot\nabla w, \eta) - r(\rho\cdot\nabla b, \xi) + r\,(\xi\cdot\nabla u, \xi)\\
&\qquad\quad + \chi(\operatorname{rot}\eta, \rho) + \chi(\operatorname{rot}\rho, \eta), \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

desde que $r(b_1\cdot\nabla\xi, \rho) + r(b_1\cdot\nabla\rho, \xi) = 0$.

Agora, para $r > 3$ e $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2}$, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$|(u.\nabla v, w)| \leq ||u||_{L^p}||\nabla v||\, ||w||_{L^r}, \qquad (2.13)$$

mas, por hipótese $\dfrac{2}{s} + \dfrac{3}{r} \leq 1$, então $\dfrac{1}{s} + \dfrac{3}{2\,r} \leq \dfrac{1}{2}$ e desde que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r}$, obtem-se

$$\frac{1}{p} \geq (\frac{1}{s} + \frac{3}{2\,r}) - \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2\,r} = \frac{2/s}{2} + \frac{3/r}{6}.$$

Assim, por interpolação (Teorema 1.4 do Capítulo 1), temos $\|u\|_{L^p} \leq c\,\|u\|^{2/s}\|u\|_{L^6}^{3/r}$ e então de (2.13), vem

$$|(u.\nabla v, w)| \leq c\,\|u\|^{2/s}\|u\|_{L^6}^{3/r}\|\nabla v\|\,\|w\|_{L^r} \tag{2.14}$$

([22], p. 84-85), logo usando a desigualdade de Young e a desigualdade de Hölder, primeiro com $p = q = 2$, logo com $p = \dfrac{s}{2}$ e $q = \dfrac{r}{3}$, resulta

$$\begin{aligned} |(u.\nabla v, w)\ | &\leq c\,\|u\|^{4/s}\|u\|_{L^6}^{6/r}\|w\|_{L^r}^2 + c\,\|\nabla v\|^2 \leq c\,\|u\|^{4/s}\|w\|_{L^r}^2\|\nabla u\|^{6/r} + c\,\|\nabla v\|^2 \\ &\leq c\,\|u\|^2\|w\|_{L^r}^s + c\,\|\nabla u\|^2 + c\,\|\nabla v\|^2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

para u, $v \in H_0^1(\Omega)$ e $w \in L^r(\Omega)$. Agora, usando (2.15) e (1.4) do Capítulo 1, estimaremos os termos do lado direito de (2.12), como segue

$$\begin{aligned} |-(\rho\cdot\nabla u, \rho)| = |(\rho\cdot\nabla\rho, u)| &\leq \varepsilon\,\|\nabla\rho\|^2 + C_\varepsilon\|\rho\|^2\|u\|_{L^r}^s, \\ |r(\xi\cdot\nabla b, \rho)| = |r(\xi\cdot\nabla\rho, b)| &\leq \varepsilon\,\|\nabla\rho\|^2 + \sigma\|\nabla\xi\|^2 + C_{\varepsilon,\sigma}\|\xi\|^2\|b\|_{L^r}^s, \\ |-j(\rho\cdot\nabla w, \eta)| = |j(\rho\cdot\nabla\eta, w)| &\leq \delta\|\nabla\eta\|^2 + \varepsilon\,\|\nabla\rho\|^2 + C_{\varepsilon,\delta}\|\rho\|^2\|w\|_{L^r}^s, \\ |-r(\rho\cdot\nabla b, \xi)| = |r(\rho\cdot\nabla\xi, b)| &\leq \sigma\|\nabla\xi\|^2 + \varepsilon\,\|\nabla\rho\|^2 + C_{\varepsilon,\sigma}\|\rho\|^2\|b\|_{L^r}^s, \\ |r\,(\xi\cdot\nabla u, \xi)| = |r\,(\xi\cdot\nabla\xi, u)| &\leq \sigma\|\nabla\xi\|^2 + C_\sigma\|\xi\|^2\|u\|_{L^r}^s, \end{aligned}$$

e para os outros termos, usando as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$\begin{aligned} |\chi(\mathrm{rot}\,\eta, \rho)| &\leq \chi\|\mathrm{rot}\,\eta\|\|\rho\| \leq C_\delta\|\rho\|^2 + \delta\|\nabla\eta\|^2, \\ |\chi(\mathrm{rot}\,\rho, \eta)| &\leq C_\varepsilon\|\eta\|^2 + \varepsilon\,\|\nabla\rho\|^2. \end{aligned}$$

Logo, levando as estimativas acima em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\rho\|^2 + j\|\eta\|^2 + r\|\xi\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla\rho\|^2 + \gamma\|\nabla\eta\|^2 + \nu r\,\|\nabla\xi\|^2 \\ &\qquad \leq 5\varepsilon\,\|\nabla\rho\|^2 + 2\,\delta\|\nabla\eta\|^2 + 3\,\sigma\|\nabla\xi\|^2 + C_\varepsilon\|\rho\|^2\|u\|_{L^r}^s + C_{\varepsilon,\sigma}\|\xi\|^2\|b\|_{L^r}^s \\ &\qquad\quad + C_{\varepsilon,\delta}\|\rho\|^2\|w\|_{L^r}^s + C_{\varepsilon,\sigma}\|\rho\|^2\|b\|_{L^r}^s + C_\sigma\|\xi\|^2\|u\|_{L^r}^s + C_\delta\|\rho\|^2 + C_\varepsilon\|\eta\|^2, \end{aligned}$$

escolhendo $\varepsilon = \dfrac{\mu+\chi}{10}$, $\delta = \dfrac{\gamma}{4}$ e $\sigma = \dfrac{\nu r}{6}$, tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\|\rho\|^2 + j\|\eta\|^2 + r\|\xi\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla\rho\|^2 + \gamma\|\nabla\eta\|^2 + \nu r\,\|\nabla\xi\|^2 \\ &\qquad \leq c\,(\|\rho\|^2 + j\|\eta\|^2 + r\|\xi\|^2)(\|u\|_{L^r}^s + \|w\|_{L^r}^s + \|b\|_{L^r}^s + 1), \end{aligned}$$

o qual implica

$$\frac{d}{dt}(\|\rho\|^2 + j\|\eta\|^2 + r\|\xi\|^2) \leq c\,(\|\rho\|^2 + j\|\eta\|^2 + r\|\xi\|^2)(\|u\|_{L^r}^s + \|w\|_{L^r}^s + \|b\|_{L^r}^s + 1)$$

onde $c > 0$ depende apenas dos parâmetros fixados no problema.

Então, integrando de 0 a t, resulta

$$\begin{aligned}||\rho(t)||^2 + j||\eta(t)||^2 + r||\xi(t)||^2 &\leq c\int_0^t (||\rho(\tau)||^2 + j||\eta(\tau)||^2 + r||\xi(\tau)||^2)\Phi(\tau)d\tau \\ &+||\rho(0)||^2 + j||\eta(0)||^2 + r||\xi(0)||^2 \qquad (2.16)\end{aligned}$$

onde $\Phi(t) = ||u(t)||^s_{L^r} + ||w(t)||^s_{L^r} + ||b(t)||^s_{L^r} + 1$.

Logo, usando a desigualdade de Gronwall em (2.16), para todo $t \in [0,T]$ tem-se

$$||\rho(t)||^2 + j||\eta(t)||^2 + r||\xi(t)||^2 \leq (||\rho(0)||^2 + j||\eta(0)||^2 + r||\xi(0)||^2)\ \exp(c\int_0^t \Phi(\tau)d\tau),$$

mas, como u, w, $b \in L^s(0,T;L^r(\Omega))$, resulta que $\int_0^t \Phi(\tau)d\tau) < \infty$ e então observando (2.11), a última desigualdade implica que $\rho(t) = \eta(t) = \xi(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$, consequentemente

$$u(t) = u_1(t), \quad w(t) = w_1(t) \quad \text{e} \quad b(t) = b_1(t) \quad \forall\, t \in [0,T],$$

demonstrando a unicidade.

Agora, observe-se que para provar a continuidade de (u,w,b) é suficiente mostrar que u_t, $b_t \in L^2(0,T;V^*)$ e $w_t \in L^2(0,T;H^{-1})$.

De fato, como u, $b \in L^2(0,T;V)$, $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e se u_t, $b_t \in L^2(0,T;V^*)$, $w_t \in L^2(0,T;H^{-1})$, então por interpolação (Lema 1.5 do Cap. 1) implicam u, $b \in C([0,T];H)$ e $w \in C([0,T];L^2(\Omega))$.

A seguir, demonstraremos que u_t, $b_t \in L^2(0,T;V^*)$ e $w_t \in L^2(0,T;H^{-1})$.

De (1.5)-(1.7), têm-se

$$\begin{aligned}|\langle u_t(t),\varphi\rangle| &\leq (\mu+\chi)|(\nabla u(t),\nabla\varphi)| + |(u(t)\cdot\nabla u(t),\varphi)| + r|(b(t)\cdot\nabla b(t),\varphi)| \\ &+\chi|(\operatorname{rot} w(t),\varphi)| + |\langle f(t),\varphi\rangle|, \qquad (2.17)\\ j|\langle w_t(t),\phi\rangle| &\leq \gamma|(\nabla w(t),\nabla\phi)| + (\alpha+\beta)|(\operatorname{div} w(t),\operatorname{div}\phi)| + 2\chi|(w(t),\phi)| \\ &+j|(u(t)\cdot\nabla w(t),\phi)| + \chi|(\operatorname{rot} u(t),\phi)| + |\langle g(t),\phi\rangle|, \qquad (2.18)\\ |\langle b_t(t),\psi\rangle| &\leq \nu|(\nabla b(t),\nabla\psi)| + |(u(t)\cdot\nabla b(t),\psi)| + |(b(t)\cdot\nabla u(t),\psi)|, \qquad (2.19)\end{aligned}$$

$\forall\ \varphi,\ \psi \in V$ e $\forall\ \phi \in H_0^1(\Omega)$.

Agora, observando (2.14), tem-se

$$|(u(t)\cdot\nabla b(t),\psi)| = |(u(t)\cdot\nabla\psi,b(t))| \leq c\,||u(t)||^{2/s}||u(t)||_V^{3/r}||\psi||_V||b(t)||_{L^r}$$

e desde que $u \in L^\infty(0,T;H)$, vem

$$|(u(t)\cdot\nabla b(t),\psi)| \leq c\,||u(t)||_V^{3/r}||b(t)||_{L^r}||\psi||_V.$$

Analogamente,

$$|(u(t)\cdot\nabla w(t),\phi)| = |(u(t)\cdot\nabla\phi, w(t))| \le c\,\|u(t)\|_V^{3/r}\|w(t)\|_{L^r}\|\phi\|_{H_0^1}.$$

Também, temos

$$\begin{aligned}
|(\nabla u(t),\nabla\varphi)| &\le \|u(t)\|_V\|\varphi\|_V,\\
|(\operatorname{div} w(t),\operatorname{div}\phi)| &\le \|\nabla w(t)\|\,\|\nabla\phi\| \le c\,\|w(t)\|_{H_0^1}\|\phi\|_{H_0^1},\\
|(\operatorname{rot} w(t),\varphi)| &\le \|\operatorname{rot} w(t)\|\,\|\varphi\| \le c\,\|\nabla w(t)\|\,\|\varphi\|_V \le c\,\|w(t)\|_{H_0^1}\|\varphi\|_V.
\end{aligned}$$

Então, levando em conta estas estimativas, estimamos os termos do lado direito de (2.17)-(2.19), como segue:

$$\begin{aligned}
|\langle u_t(t),\varphi\rangle| &\le c\,\|u(t)\|_V\|\varphi\|_V + c\,\|u(t)\|_V^{3/r}\|u(t)\|_{L^r}\|\varphi\|_V + c\,\|b(t)\|_V^{3/r}\|b(t)\|_{L^r}\|\varphi\|_V\\
&\quad + c\,\|w(t)\|_{H_0^1}\|\varphi\|_V + \|f(t)\|_{V^*}\|\varphi\|_V, \qquad (2.20)\\
j|\langle w_t(t),\phi\rangle| &\le 3\,c\,\|w(t)\|_{H_0^1}\|\phi\|_{H_0^1} + c\,\|u(t)\|_V^{3/r}\|w(t)\|_{L^r}\|\phi\|_{H_0^1}\\
&\quad + c\,\|u(t)\|_V\|\phi\|_{H_0^1} + \|g(t)\|_{H^{-1}}\|\phi\|_{H_0^1}, \qquad (2.21)\\
|\langle b_t(t),\psi\rangle| &\le c\,\|b(t)\|_V\|\psi\|_V + c\,\|u(t)\|_V^{3/r}\|b(t)\|_{L^r}\|\psi\|_V\\
&\quad + c\,\|b(t)\|_V^{3/r}\|u(t)\|_{L^r}\|\psi\|_V. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Mas, por definição

$$\|u_t(t)\|_{V^*} = \sup_{\|\varphi\|_V\le 1}|\langle u_t(t),\varphi\rangle| \quad \text{e} \quad \|w_t(t)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|\phi\|_{H_0^1}\le 1}|\langle w_t(t),\phi\rangle|,$$

então, de (2.20)-(2.22), temos

$$\begin{aligned}
\|u_t(t)\|_{V^*} &\le c\,(\|u(t)\|_V + \|u(t)\|_V^{3/r}\|u(t)\|_{L^r} + \|b(t)\|_V^{3/r}\|b(t)\|_{L^r}\\
&\quad + \|w(t)\|_{H_0^1} + \|f(t)\|_{V^*}), \qquad (2.23)\\
j\|w_t(t)\|_{H^{-1}} &\le c\,(\|w(t)\|_{H_0^1} + \|u(t)\|_V^{3/r}\|w(t)\|_{L^r} + \|u(t)\|_V + \|g(t)\|_{H^{-1}}), \qquad (2.24)\\
\|u_t(t)\|_{V^*} &\le c\,(\|b(t)\|_V + \|u(t)\|_V^{3/r}\|b(t)\|_{L^r} + \|b(t)\|_V^{3/r}\|u(t)\|_{L^r}), \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

onde $c > 0$ depende apenas dos parâmetros fixados no problema.

Por outro lado, desde que por hipótese u, w, $b \in L^s(0,T;L^r(\Omega))$, então

$$t \to \|u(t)\|_{L^r} \in L^s(0,T), \quad t \to \|w(t)\|_{L^r} \in L^s(0,T) \quad \text{e} \quad t \to \|b(t)\|_{L^r} \in L^s(0,T),$$

também, desde que u, $b \in L^2(0,T;V)$, temos

$$t \to \|u(t)\|_V^{\frac{3}{r}} \in L^{\frac{2r}{3}}(0,T) \quad \text{e} \quad t \to \|b(t)\|_V^{\frac{3}{r}} \in L^{\frac{2r}{3}}(0,T).$$

Consequentemente, como por hipótese $\dfrac{1}{s}+\dfrac{3}{2r}\leq\dfrac{1}{2}$, usando a desigualdade de Hölder generalizada (Teorema 1.3 do Cap. 1), obtemos

$$
\begin{aligned}
&t \to \|u(t)\|_{L^r}\|u(t)\|_V^{\frac{3}{r}} \in L^2(0,T), \qquad t \to \|b(t)\|_{L^r}\|b(t)\|_V^{\frac{3}{r}} \in L^2(0,T)\\
&t \to \|w(t)\|_{L^r}\|u(t)\|_V^{\frac{3}{r}} \in L^2(0,T), \qquad t \to \|b(t)\|_{L^r}\|u(t)\|_V^{\frac{3}{r}} \in L^2(0,T)\\
&t \to \|u(t)\|_{L^r}\|b(t)\|_V^{\frac{3}{r}} \in L^2(0,T).
\end{aligned}
$$

Portanto, como $u,\ b \in L^2(0,T;V)$ e $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, usando as conclusões acima junto com as hipóteses sobre f e g, de (2.23)-(2.25) conclui-se

$$u_t,\ b_t \in L^2(0,T;V^*) \ \text{ e } \ w_t \in L^2(0,T;H^{-1}),$$

completando a prova do teorema.

2.3 Regularidade da solução fraca

Os seguintes resultados estendem os principais resultados de [43] para equações de fluido magneto-micropolar.

Teorema 2.2 *Sejam $u_0,\ b_0 \in H$, $w_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;V^*)$ e $g \in L^2(0,T;H^{-1})$. Então, a solução fraca (u,w,b) do problema (1.1)-(1.3), pertence ao espaço de Nikolskii*

$$N^{\frac{1}{4},2}(0,T;H)\times N^{\frac{1}{4},2}(0,T;L^2(\Omega))\times N^{\frac{1}{4},2}(0,T;H).$$

Teorema 2.3 *Além das hipóteses do Teorema 2.2, assumir que a solução fraca (u,w,b) do problema (1.1)-(1.3) pertence ao $(L^4(0,T;L^4(\Omega)))^3$. Então (u,w,b) pertence ao espaço fracional de Nikolskii*

$$N^{\frac{1}{2},2}(0,T;H)\times N^{\frac{1}{2},2}(0,T;L^2(\Omega))\times N^{\frac{1}{2},2}(0,T;H).$$

O seguinte teorema é um resultado da regularidade da solução fraca:

Teorema 2.4 *Se as hipóteses do Teorema 2.2 são satisfeitas, então*
a) A solução fraca (u,w,b) do problema (1.1)-(1.3), possui derivadas fracionárias de qualquer ordem menor que $\dfrac{1}{4}$.
b) Se a solução fraca (u,w,b) do problema (1.1)-(1.3) pertence ao $(L^4(0,T;L^4(\Omega)))^3$, então (u,w,b) possui derivadas fracionárias de qualquer ordem menor que $\dfrac{1}{2}$.

Prova do Teorema 2.2

Com as notações da Seção 2.1, consideramos $I = (0, T)$. Então, lembrando a notação $u_h(t) = u(t+h) - u(t)$, integramos (1.5) - (1.7) de t a $t+h$, obtendo

$$\begin{aligned}
(u_h(t), \varphi) &= -(\mu+\chi)\int_t^{t+h} (\nabla u(\tau), \nabla\varphi)d\tau - \int_t^{t+h} (u(\tau)\cdot\nabla u(\tau), \varphi)d\tau \\
&\quad + r\int_t^{t+h} (b(\tau)\cdot\nabla b(\tau), \varphi)d\tau + \chi\int_t^{t+h} (\operatorname{rot} w(\tau), \varphi)d\tau + \int_t^{t+h} \langle f(\tau), \varphi\rangle d\tau, \\
j(w_h(t), \phi) &= -\gamma\int_t^{t+h} (\nabla w(\tau), \nabla\phi)d\tau - (\alpha+\beta)\int_t^{t+h} (\operatorname{div} w(\tau), \operatorname{div}\phi)d\tau \\
&\quad -2\chi\int_t^{t+h} (w(\tau), \phi)d\tau - j\int_t^{t+h} (u(\tau)\cdot\nabla w(\tau), \phi)d\tau \\
&\quad +\chi\int_t^{t+h} (\operatorname{rot} u(\tau), \phi)d\tau + \int_t^{t+h} \langle g(\tau), \phi\rangle d\tau, \\
(b_h(t), \psi) &= -\nu\int_t^{t+h} (\nabla b(\tau), \nabla\psi)d\tau - \int_t^{t+h} (u(\tau)\cdot\nabla b(\tau), \psi)d\tau \\
&\quad + \int_t^{t+h} (b(\tau)\cdot\nabla u(\tau), \psi)d\tau,
\end{aligned}$$

onde $h > 0$ é tal que $(t+h) \in (0, T)$.

Pondo $\varphi = u_h(t)$, $\phi = w_h(t)$ e $\psi = b_h(t)$ nas igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_h(t)\|^2 &\leq |\,(\mu+\chi)\int_t^{t+h} (\nabla u(\tau), \nabla u_h(t))\,d\tau\,| + |\int_t^{t+h} (u(\tau)\cdot\nabla u(\tau), u_h(t))\,d\tau\,| \\
&\quad +|\,r\int_t^{t+h} (b(\tau)\cdot\nabla b(\tau), u_h(t))\,d\tau\,| + |\,\chi\int_t^{t+h} (\operatorname{rot} w(\tau), u_h(t))\,d\tau\,| \\
&\quad +|\int_t^{t+h} \langle f(\tau), u_h(t)\rangle\,d\tau\,|, \qquad (2.26) \\
j\|w_h(t)\|^2 &\leq |\,\gamma\int_t^{t+h} (\nabla w(\tau), \nabla w_h(t))\,d\tau\,| + |\,(\alpha+\beta)\int_t^{t+h} (\operatorname{div} w(\tau), \operatorname{div} w_h(t))\,d\tau\,| \\
&\quad +|\,2\chi\int_t^{t+h} (w(\tau), w_h(t))\,d\tau\,| + |\,j\int_t^{t+h} (u(\tau)\cdot\nabla w(\tau), w_h(t))\,d\tau\,| \\
&\quad +|\,\chi\int_t^{t+h} (\operatorname{rot} u(\tau), w_h(t))\,d\tau\,| + |\int_t^{t+h} \langle g(\tau), w_h(t)\rangle\,d\tau\,|, \qquad (2.27) \\
\|b_h(t)\|^2 &\leq |\,\nu\int_t^{t+h} (\nabla b(\tau), \nabla b_h(t))\,d\tau\,| + |\int_t^{t+h} (u(\tau)\cdot\nabla b(\tau), b_h(t))\,d\tau\,| \\
&\quad +|\int_t^{t+h} (b(\tau)\cdot\nabla u(\tau), b_h(t))\,d\tau\,|. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, estimaremos os termos do lado direito de (2.26)-(2.28), como segue:

$$
\begin{aligned}
\left| (\mu+\chi)\int_t^{t+h} (\nabla u(\tau), \nabla u_h(t))\, d\tau \right| &\leq c\int_t^{t+h} |(\nabla u(\tau), \nabla u_h(t))|\, d\tau \\
&\leq c\int_t^{t+h} \|\nabla u(\tau)\|\, \|\nabla u_h(t)\|\, d\tau \\
&\leq c\, \|u_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \|u(\tau)\|_V\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\left| \gamma\int_t^{t+h} (\nabla w(\tau), \nabla w_h(t)) d\tau \right| &\leq c\, \|w_h(t)\|_{H_0^1} \int_t^{t+h} \|w(\tau)\|_{H_0^1}\, d\tau, \\
\left| \int_t^{t+h} (\nabla b(\tau), \nabla b_h(t))\, d\tau \right| &\leq c\, \|b_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \|b(\tau)\|_V\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\left| (\alpha+\beta)\int_t^{t+h} (\operatorname{div} w(\tau), \operatorname{div} w_h(t))\, d\tau \right| &\leq c\int_t^{t+h} |(\operatorname{div} w(\tau), \operatorname{div} w_h(t))|\, d\tau \\
&\leq c\int_t^{t+h} \|\nabla w(\tau)\|\, \|\nabla w_h(t)\|\, d\tau \\
&\leq c\, \|w_h(t)\|_{H_0^1} \int_t^{t+h} \|w(\tau)\|_{H_0^1}\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Também, observando que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
\left| 2\chi\int_t^{t+h} (w(\tau), w_h(t))\, d\tau \right| &\leq c\int_t^{t+h} |(w(\tau), w_h(t))|\, d\tau \\
&\leq c\int_t^{t+h} \|w(\tau)\|\, \|w_h(t))\|\, d\tau \\
&\leq c\, \|w_h(t)\|_{H_0^1} \int_t^{t+h} \|w(\tau)\|_{H_0^1}\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\left| \int_t^{t+h} (u(\tau)\cdot\nabla u(\tau), u_h(t))\, d\tau \right| &\leq \int_t^{t+h} |(u(\tau)\cdot\nabla u(\tau), u_h(t))|\, d\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} |(u(\tau).\nabla u_h(t), u(\tau))|\, d\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} \|u(\tau)\|_{L^4}^2 \|\nabla u_h(t))\|\, d\tau \\
&\leq c\, \|u_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \|u(\tau)\|_{L^4}^2\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$| r \int_t^{t+h} (b(\tau) \cdot \nabla b(\tau), u_h(t))\, d\tau \,| \leq c\, \|u_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \|b(\tau)\|_{L^4}^2\, d\tau.$$

Também, usando as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$\begin{aligned}
| j \int_t^{t+h} (u(\tau) \cdot \nabla w(\tau), w_h(\tau))\, d\tau \,| &\leq c \int_t^{t+h} |\, (u(\tau) \cdot \nabla w_h(t), w(\tau))\,|\, d\tau \\
&\leq c \int_t^{t+h} \|u(\tau)\|_{L^4} \|\nabla w_h(t)\|\, \|w(\tau)\|_{L^4}\, d\tau \\
&\leq c\, \|w_h(t)\|_{H_0^1} \int_t^{t+h} \|u(\tau)\|_{L^4} \|w(\tau)\|_{L^4}\, d\tau \\
&\leq c\, \|w_h(t)\|_{H_0^1} \int_t^{t+h} (\|u(\tau)\|_{L^4}^2 + \|w(\tau)\|_{L^4}^2)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
| \int_t^{t+h} (u(\tau) \cdot \nabla b(\tau), b_h(t))\, d\tau \,| &\leq c\, \|b_h(t)\|_V \int_t^{t+h} (\|u(\tau)\|_{L^4}^2 + \|b(\tau)\|_{L^4}^2)\, d\tau \\
| \int_t^{t+h} (b(\tau) \cdot \nabla u(\tau), b_h(t))\, d\tau \,| &\leq c\, \|b_h(t)\|_V \int_t^{t+h} (\|u(\tau)\|_{L^4}^2 + \|b(\tau)\|_{L^4}^2)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Também, desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $V \hookrightarrow H \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
| \chi \int_t^{t+h} (\operatorname{rot} w(\tau), u_h(t))\, d\tau \,| &\leq c \int_t^{t+h} |\, (w(\tau), \operatorname{rot} u_h(t))\,|\, d\tau \\
&\leq c \int_t^{t+h} \|w(\tau)\|\, \|\operatorname{rot} u_h(t)\|\, d\tau \\
&\leq c \int_t^{t+h} \|w(\tau)\|_{H_0^1}\, \|\nabla u_h(t)\|\, d\tau \\
&\leq c\, \|u_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \|w(\tau)\|_{H_0^1}\, d\tau, \\
| \chi \int_t^{t+h} (\operatorname{rot} u(\tau), w_h(t))\, d\tau \,| &\leq c\, \|w_h(t)\|_{H_0^1} \int_t^{t+h} \|u(\tau)\|_V\, d\tau.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
| \int_t^{t+h} \langle f(\tau), u_h(t) \rangle\, d\tau \,| &\leq \int_t^{t+h} |\, \langle f(\tau), u_h(t) \rangle\,|\, d\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} \|f(\tau)\|_{V^*} \|u_h(t)\|_V d\tau \\
&\leq \|u_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \|f(\tau)\|_{V^*} d\tau.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$|\int_t^{t+h}\langle g(\tau), w_h(t)\rangle\, d\tau\,| \le \|w_h(t)\|_{H_0^1}\int_t^{t+h}\|g(\tau)\|_{H^{-1}}d\tau.$$

Então, levando estas estimativas em (2.26)-(2.28), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_h(t)\|^2 &\le c\,\|u_h(t)\|_V\int_t^{t+h}(\|u(\tau)\|_V+\|u(\tau)\|_{L^4}^2+\|b(\tau)\|_{L^4}^2\\
&\qquad +\|w(\tau)\|_{H_0^1}+\|f(\tau)\|_{V^*})\,d\tau, \qquad (2.29)\\
\|w_h(t)\|^2 &\le c\,\|w_h(t)\|_{H_0^1}\int_t^{t+h}(\|w(\tau)\|_{H_0^1}+\|u(\tau)\|_{L^4}^2+\|w(\tau)\|_{L^4}^2\\
&\qquad +\|u(\tau)\|_V+\|g(\tau)\|_{H^{-1}})\,d\tau, \qquad (2.30)\\
\|b_h(t)\|^2 &\le c\,\|b_h(t)\|_V\int_t^{t+h}(\|b(\tau)\|_V+\|u(\tau)\|_{L^4}^2+\|b(\tau)\|_{L^4}^2)\,d\tau, \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

onde $c>0$ é uma constante genérica que depende apenas dos parâmetros fixados no problema.

Agora, observando que $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ e integrando com respeito a t desde 0 a $T-h$ as desigualdades (2.29)-(2.31), resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-h}\|u_h(t)\|^2\,dt &\le \int_0^{T-h}\|u_h(t)\|_V\int_t^{t+h}c\,(\|u(\tau)\|_V+\|u(\tau)\|_V^2+\|b(\tau)\|_V^2\\
&\qquad +\|w(\tau)\|_{H_0^1}+\|f(\tau)\|_{V^*})\,d\tau\,dt,\\
\int_0^{T-h}\|w_h(t)\|^2\,dt &\le \int_0^{T-h}\|w_h(t)\|_{H_0^1}\int_t^{t+h}c\,(\|w(\tau)\|_{H_0^1}+\|u(\tau)\|_V^2+\|w(\tau)\|_{H_0^1}^2\\
&\qquad +\|u(\tau)\|_V+\|g(\tau)\|_{H^{-1}})\,d\tau\,dt,\\
\int_0^{T-h}\|b_h(t)\|^2\,dt &\le \int_0^{T-h}\|b_h(t)\|_V\int_t^{t+h}c\,(\|b(\tau)\|_V+\|u(\tau)\|_V^2+\|b(\tau)\|_V^2)\,d\tau\,dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-h}\|u_h(t)\|^2\,dt &\le \int_0^{T-h}\|u_h(t)\|_V\int_t^{t+h}g_1(\tau)\,d\tau\,dt, \qquad (2.32)\\
\int_0^{T-h}\|w_h(t)\|^2\,dt &\le \int_0^{T-h}\|w_h(t)\|_{H_0^1}\int_t^{t+h}g_2(\tau)\,d\tau\,dt, \qquad (2.33)\\
\int_0^{T-h}\|b_h(t)\|^2\,dt &\le \int_0^{T-h}\|b_h(t)\|_V\int_t^{t+h}g_3(\tau)\,d\tau\,dt, \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= c\,(\|u(t)\|_V+\|u(t)\|_V^2+\|b(t)\|_V^2+\|w(t)\|_{H_0^1}+\|f(t)\|_{V^*}),\\
g_2(t) &= c\,(\|w(t)\|_{H_0^1}+\|u(t)\|_V^2+\|w(t)\|_{H_0^1}^2+\|u(t)\|_V+\|g(t)\|_{H^{-1}}),\\
g_3(t) &= c\,(\|b(t)\|_V+\|u(t)\|_V^2+\|b(t)\|_V^2).
\end{aligned}$$

Mas, $u,\, b \in L^2(0,T;V)$ e $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então

$$t \to \|u(t)\|_V^2 \in L^1(0,T), \quad t \to \|b(t)\|_V^2 \in L^1(0,T), \quad t \to \|w(t)\|_{H_0^1}^2 \in L^1(0,T),$$

logo, desde que $f \in L^1(0,T;V^*)$ e $g \in L^1(0,T;H^{-1})$, concluimos que $g_1,\, g_2,\, g_3 \in L^1(0,T)$.

Portanto, aplicando o Lema 2.2-(a) em (2.32) e (2.34) com $p=2$, $Y=H$ e $X=V$, resulta $u,\, b \in N^{\frac{1}{4},2}(0,T;H)$. Similarmente, usando Lema 2.2-(a) em (2.33) com $p=2$, $Y=L^2(\Omega)$ e $X=H_0^1(\Omega)$, temos $w \in N^{\frac{1}{4},2}(0,T;L^2(\Omega))$. Assim, a prova do teorema está completa.

Prova do Teorema 2.3

Integrando as desigualdades (2.29)-(2.31) com respeito a t desde 0 a $T-h$, obtemos

$$\int_0^{T-h} \|u_h(t)\|^2\, dt \le \int_0^{T-h} \|u_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \tilde{g}_1(\tau)\, d\tau\, dt, \tag{2.35}$$

$$\int_0^{T-h} \|w_h(t)\|^2\, dt \le \int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_{H_0^1} \int_t^{t+h} \tilde{g}_2(\tau)\, d\tau\, dt, \tag{2.36}$$

$$\int_0^{T-h} \|b_h(t)\|^2\, dt \le \int_0^{T-h} \|b_h(t)\|_V \int_t^{t+h} \tilde{g}_3(\tau)\, d\tau\, dt, \tag{2.37}$$

onde
$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1(t) &= c\,(\|u(t)\|_V + \|u(t)\|_{L^4}^2 + \|b(t)\|_{L^4}^2 + \|w(t)\|_{H_0^1} + \|f(t)\|_{V^*}),\\
\tilde{g}_2(t) &= c\,(\|w(t)\|_{H_0^1} + \|u(t)\|_{L^4}^2 + \|w(t)\|_{L^4}^2 + \|u(t)\|_V + \|g(t)\|_{H^{-1}}),\\
\tilde{g}_3(t) &= c\,(\|b(t)\|_V + \|u(t)\|_{L^4}^2 + \|b(t)\|_{L^4}^2).
\end{aligned}$$

Agora, como $u,\, w,\, b \in L^4(0,T;L^4(\Omega))$, temos

$$t \to \|u(t)\|_{L^4}^2 \in L^2(0,T), \quad t \to \|b(t)\|_{L^4}^2 \in L^2(0,T), \quad t \to \|w(t)\|_{L^4}^2 \in L^2(0,T),$$

logo, desde que $u,\, b \in L^2(0,T;V)$, $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $f \in L^2(0,T;V^*)$ e $g \in L^2(0,T;H^{-1})$, concluimos que $\tilde{g}_1,\, \tilde{g}_2,\, \tilde{g}_3 \in L^2(0,T)$.

Portanto, aplicando o Lema 2.2-(b) em (2.35) e (2.37) com $p=q=2$, $Y=H$ e $X=V$, obtemos $u,\, b \in N^{\frac{1}{2},2}(0,T;H)$. Também, com $p=q=2$, $Y=L^2(\Omega)$ e $X=H_0^1(\Omega)$, o Lema 2.2-(b) junto com (2.36), implicam $w \in N^{\frac{1}{2},2}(0,T;L^2(\Omega))$.

Isto completa a prova do teorema.

Prova do Teorema 2.4

Parte (a): Usando o Teorema 2.2, junto com a Proposição 2.1 com $s=\frac{1}{4}, p=2$ e $r=\alpha$, obtemos para $0<\alpha<\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
&u,\, b \in N^{\frac{1}{4},2}(0,T;H) \hookrightarrow W^{\alpha,2}(0,T;H) = H^\alpha(0,T;H),\\
&w \in N^{\frac{1}{4},2}(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow W^{\alpha,2}(0,T;L^2(\Omega)) = H^\alpha(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Parte (b): Usando o Teorema 2.3, junto com a Proposição 2.1 com $s = \frac{1}{2}, p = 2$ e $r = \alpha$, obtemos para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$u,\, b \in N^{\frac{1}{2},2}(0,T;H) \hookrightarrow W^{\alpha,2}(0,T;H) = H^{\alpha}(0,T;H),$$
$$w \in N^{\frac{1}{2},2}(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow W^{\alpha,2}(0,T;L^2(\Omega)) = H^{\alpha}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por outro lado, $u, b \in W^{\alpha,2}(0,T;H)$ se e somente se $(1+\tau^{\alpha})\hat{u^*}$, $(1+\tau^{\alpha})\hat{b^*} \in L^2(I\!R_{\tau};H)$, onde $u^*(t) = u(t)$ para $t \in [0,T]$ e $u^*(t) = 0$ em outro caso, $\hat{u^*}$ é a transformada de Fourier de u^* em t, analogamente para b^*. Também, $w \in W^{\alpha,2}(0,T;L^2(\Omega))$ se e somente se $(1+\tau^{\alpha})\hat{w^*} \in L^2(I\!R_{\tau};L^2(\Omega))$.

Isto mostra que a solução fraca (u, w, b) tem derivada fracional de ordem α definido por

$$D_t^{\alpha} z(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{z(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds$$

onde $z = u$, $z = w$ ou $z = b$ pertencem ao $L^2(0,T;H) \times L^2(0,T;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T;H)$.

Isto completa a prova do Teorema 2.4.

Capítulo 3

Existência global de soluções fortes

Usando o método de Galerkin espectral, provamos a existência de uma única solução global no tempo para as equações do movimento de um fluido magneto-micropolar sem assumir que as forças externas possuem decaimento no tempo e também quando as forças externas possuem decaimento exponencial no tempo. Além disso, obtemos estimativas uniformes no tempo da solução que são usadas para obter estimativas de erro para as soluções aproximadas.

Para provar os resultados de existência, usaremos as aproximações de Galerkin u^k, w^k e b^k desemvolvidos em termos das autofunções do Operador de Stokes A e do operador $L = -\gamma\Delta - (\alpha + \beta)\nabla\text{div}$ (ver (1.18) do Cap. 1), também combinaremos os argumentos usados por Rojas-Medar[32] e Heywood e Rannacher [16]. Com esta técnica, a solução obtida tem maior regularidade (que é necessária para obter estimativas de erro) do que a atingida por Lukaszewics [25], além disso, estabelemos a existência da solução sem impor nenhuma relação entre as viscosidades, os dados iniciais e as forças externas, condição que Lukaszewics [25] precisa para obter os seus resultados.

3.1 Existência global da solução no caso de forças externas sem decaimento

A existência global de soluções fortes sem assumir decaimento exponencial nas forças externas, será obtida usando exponenciais como funções peso, a qual é uma forma de trabalhar inspirada de Heywood e Rannacher [16].

3.1.1 Existência e unicidade da solução

Um análogo ao Teorema 1.5 do Capítulo 1 (com $T = \infty$), é o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Sejam os valores iniciais* $u_0, b_0 \in V$, $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ *e as forças externas* $f, g \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$. *Se* $\|u_0\|_V$, $\|w_0\|_{H_0^1}$, $\|b_0\|_V$, $\|f\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}$ *e* $\|g\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}$ *são suficientemente pequenas, então a única solução forte* (u, w, b) *do problema (1.1)-(1.3) existe globalmente no tempo e satisfaz* $u, b \in C([0,\infty); V)$ *e* $w \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega))$. *Além disso, para qualquer* $\theta > 0$ *existem algumas constantes positivas* M, M_1 *e* M_2, *tais que*

$$\sup_{t\geq 0}\{\|\nabla u(t)\|^2 + j\|\nabla w(t)\|^2 + \|\nabla b(t)\|^2\} \leq M, \tag{3.1}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\{\|Au(\tau)\|^2 + \|Bw(\tau)\|^2 + \|Ab(\tau)\|^2\}d\tau \leq M_1, \tag{3.2}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\{\|u_t(\tau)\|^2 + \|w_t(\tau)\|^2 + \|b_t(\tau)\|^2\}d\tau \leq M_2. \tag{3.3}$$

Também, as mesmas classes de estimativas são válidas uniformemente em $k \in I\!N$ *para as aproximações de Galerkin.*

Prova. Começamos provando as estimativas no tempo de $\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla w(t)\|^2 + \|\nabla b(t)\|^2$.

Primeiro encontraremos estimativas para as aproximações de Galerkin (ver (1.18) do Cap.1) e logo para a solução no limite.

Considerando $\varphi = Au^k$ em (1.23) e $\upsilon = Ab^k$ em (1.25), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2 + (\mu+\chi)\|Au^k\|^2 &= \chi(\operatorname{rot} w^k, Au^k) + r(b^k\cdot\nabla b^k, Au^k) + (f, Au^k) \\
&\quad -(u^k\cdot\nabla u^k, Au^k), \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla b^k\|^2 + \nu\|Ab^k\|^2 &= -(u^k\cdot\nabla b^k, Ab^k) + (b^k\cdot\nabla u^k, Ab^k).
\end{aligned}$$

Agora, usando as desigualdades de Young e Hölder, a imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e a desigualdade de Sobolev $\|u\|_{L^3} \leq c\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}$, para qualquer $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, obtemos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
|\chi(\operatorname{rot} w^k, Au^k)| &\leq C_\varepsilon\|\nabla w^k\|^2 + \varepsilon\|Au^k\|^2, \\
|r(b^k\cdot\nabla b^k, Au^k)| &\leq c\|b^k\|_{L^6}\|\nabla b^k\|_{L^3}\|Au^k\| \leq c\|\nabla b^k\|^{3/2}\|Ab^k\|^{1/2}\|Au^k\| \\
&\leq C_{\varepsilon,\delta}\|\nabla b^k\|^6 + \delta\|Ab^k\|^2 + \varepsilon\|Au^k\|^2, \\
|(f, Au^k)| &\leq C_\varepsilon\|f\|^2 + \varepsilon\|Au^k\|^2, \\
|(u^k\cdot\nabla u^k, Au^k)| &\leq c\|u^k\|_{L^6}\|\nabla u^k\|_{L^3}\|Au^k\| \leq c\|\nabla u^k\|^{3/2}\|Au^k\|^{3/2} \\
&\leq C_\epsilon\|\nabla u^k\|^6 + \varepsilon\|Au^k\|^2, \\
|(u^k\cdot\nabla b^k, Ab^k)| &\leq c\|u^k\|_{L^6}\|\nabla b^k\|_{L^3}\|Ab^k\| \leq c\|\nabla u^k\|\|\nabla b^k\|^{1/2}\|Ab^k\|^{3/2} \\
&\leq C_\delta\|\nabla u^k\|^4\|\nabla b^k\|^2 + \delta\|Ab^k\|^2, \\
|(b^k\cdot\nabla u^k, Ab^k)| &\leq c\|b^k\|_{L^6}\|\nabla u^k\|_{L^3}\|Ab^k\| \leq c\|\nabla b^k\|\|\nabla u^k\|^{1/2}\|Au^k\|^{1/2}\|Ab^k\| \\
&\leq C_{\varepsilon,\delta}\|\nabla b^k\|^4\|\nabla u^k\|^2 + \varepsilon\|Au^k\|^2 + \delta\|Ab^k\|^2.
\end{aligned}$$

Levando estas estimativas nas identidades acima e somando, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||\nabla u^k||^2 + ||\nabla b^k||^2) + (\mu+\chi)||Au^k||^2 + \nu||Ab^k||^2 \\
&\leq C_\varepsilon||\nabla w^k||^2 + C_{\varepsilon,\delta}||\nabla b^k||^6 + C_\varepsilon||\nabla u^k||^6 + C_\delta||\nabla u^k||^4||\nabla b^k||^2 \\
&\quad + C_{\varepsilon,\delta}||\nabla b^k||^4||\nabla u^k||^2 + C_\varepsilon||f||^2 + 5\varepsilon||Au^k||^2 + 3\delta||Ab^k||^2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, observemos que $Lw = \gamma Bw - (\alpha+\beta)\nabla \mathrm{div}\, w$ é um operador fortemente elítico, consequentemente

$$(Lw, Bw) \geq \gamma||Bw||^2 - N_0||\nabla w||^2 \tag{3.5}$$

onde $N_0 > 0$ depende apenas de γ, $\alpha+\beta$ e $\partial\Omega$ ([17], p. 70).

Logo, pondo $\phi = Bw^k$ em (1.24) e usando (3.5), para qualquer $\sigma > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{j}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w^k||^2 + \gamma||Bw^k||^2 \\
&\leq N_0||\nabla w^k||^2 + \chi(\mathrm{rot}\, u^k, Bw^k) + (g, Bw^k) - j(u^k\cdot\nabla w^k, Bw^k) - 2\chi(w^k, Bw^k) \\
&\leq N_0||\nabla w^k||^2 + c_\sigma||\nabla u^k||^2 + c_\sigma||g||^2 + c_\sigma||\nabla u^k||^4||\nabla w^k||^2 \\
&\quad + c_\sigma||\nabla w^k||^2 + 4\sigma||Bw^k||^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e $\sigma > 0$ suficientemente pequenos, somando (3.4) e (3.6), resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||\nabla u^k||^2 + j||\nabla w^k||^2 + ||\nabla b^k||^2) + (\mu+\chi)||Au^k||^2 + \gamma||Bw^k||^2 + \nu||Ab^k||^2 \\
&\leq c(||\nabla b^k||^6 + ||\nabla u^k||^6 + ||\nabla u^k||^4||\nabla b^k||^2 + ||\nabla b^k||^4||\nabla u^k||^2 + ||\nabla u^k||^4||\nabla w^k||^2) \\
&\quad c(||\nabla u^k||^2 + ||\nabla w^k||^2) + c(||f||^2 + ||g||^2).
\end{aligned}$$

Então, tem-se

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||\nabla u^k||^2 + j||\nabla w^k||^2 + ||\nabla b^k||^2) + ((\mu+\chi)||Au^k||^2 + \gamma||Bw^k||^2 + \nu||Ab^k||^2) \\
&\leq c_3(||\nabla u^k||^2 + j||\nabla w^k||^2 + ||\nabla b^k||^2)^3 + c_2(||\nabla u^k||^2 + j||\nabla w^k||^2 + ||\nabla b^k||^2) \\
&\quad + c\,(||f||^2 + ||g||^2).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Isto leva à desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) + \zeta(t) \leq c_3\xi^3(t) + c_2\xi(t) + c_1 \tag{3.8}$$

onde $\xi(t) = ||\nabla u^k(t)||^2 + j||\nabla w^k(t)||^2 + ||\nabla b^k(t)||^2$, $\zeta(t) = (\mu+\chi)||Au^k(t)||^2 + \gamma||Bw^k(t)||^2 + \nu||Ab^k(t)||^2$ e $c_1 = c\sup_{t\geq 0}(||f(t)||^2 + ||g(t)||^2)$.

Por outro lado, desde que $||u||_{H^2}$ é equivalente a $||Au||$ e $||w||_{H^2}$ é equivalente a $||Bw||$, existem constantes positivas c_4, c_5 e c_6, tais que

$$c_4||\nabla u^k||^2 \leq (\mu+\chi)||Au^k||^2, \quad c_5||\nabla w^k(t)||^2 \leq \gamma||Bw^k||^2, \quad c_6||\nabla b^k(t)||^2 \leq \nu||Ab^k||^2,$$

então, considerando $c_7 = \min\{c_4,\ c_5,\ c_6\} > 0$, tem-se

$$c_7\xi(t) \leq c_4||\nabla u^k||^2 + c_5||\nabla w^k(t)||^2 + c_6||\nabla b^k(t)||^2 \leq \zeta(t), \tag{3.9}$$

levando isto em (3.8), vem
$$\frac{d}{dt}\xi(t) \leq c_3\xi^3(t) + c_2\xi(t) - c_7\xi(t) + c_1. \tag{3.10}$$
Observe-se que se $\xi(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$ o resultado (3.1) é obvio. Então, suponhamos que existe um $t_1 > 0$ e um intervalo $[t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$ tal que

$$\xi(t) \leq 1 \text{ para todo } t \in [0, t_1), \quad \xi(t_1) = 1 \quad \text{e} \quad \xi(t) > 1 \text{ para todo } t \in (t_1, t_2).$$

Logo, desde que $\xi(t) \leq \xi^3(t)$ para todo $t \in [t_1, t_2)$, de (3.10) tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\xi(t) \leq c_8\xi^3(t) - c_7\xi(t) + c_1, \\ &\xi(t_1) = 1. \end{aligned}$$

Consideremos a equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta(t) &= c_8\eta^3(t) - c_7\eta(t) + c_1 = G(c_1, \eta(t)), \\ \eta(t_1) &= \xi(t_1). \end{aligned}$$

Então, a última desigualdade diferencial, implica que $1 \leq \xi(t) \leq \eta(t)$ para todo t no intervalo de existência $[t_1, t_2)$.

Agora, observemos que quando $c_1 = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = c_8\eta^3(t) - c_7\eta(t) = G(0, \eta(t)).$$

As raizes de $G(0,\eta)$ são $\eta = 0$ e $\eta = (\frac{c_7}{c_8})^{1/2}$, então existe $t^* \in [t_1, t_2)$ tal que $\eta(t^*) = (\frac{c_7}{c_8})^{1/2}$.

Assim, η atinge o máximo em t^*, isto é, $r(0) = (\frac{c_7}{c_8})^{1/2}$ é uma raiz simples inestável de $G(0,\eta)$. Logo, para c_1 suficientemente pequeno, $G(c_1, \eta)$ também tem uma raiz simples inestável $r(c_1)$ perto de $r(0)$. Então, temos que $1 \leq \xi(t) \leq \eta(t) \leq r(c_1) < +\infty$ para todo $t \in [t_1, t_2)$. Portanto, se $0 < \xi(0) < 1$, existe uma constante $M = \max\{1, r(c_1)\} > 0$, tal que $0 \leq \xi(t) \leq \eta(t) \leq r(c_1) < +\infty$ para todo $t \geq 0$. Isto é,

$$\sup_{t\geq 0}\{\ \|\nabla u^k(t)\|^2 + j\|\nabla w^k(t)\|^2 + \|\nabla b^k(t)\|^2\ \} \leq M. \tag{3.11}$$

Multiplicando a desigualdade (3.8) por $e^{\theta t}$, $\theta > 0$, e integrando no tempo de 0 a t, temos

$$\begin{aligned}
&e^{\theta t}(\|\nabla u^k(t)\|^2 + j\|\nabla w^k(t)\|^2 + \|\nabla b^k(t)\|^2)\\
&\quad + \int_0^t e^{\theta\tau}((\mu+\chi)\|Au^k(\tau)\|^2 + \gamma\|Bw^k(\tau)\|^2 + \nu\|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau\\
&\qquad \leq \|\nabla u^k(0)\|^2 + j\|\nabla w^k(0)\|^2 + \|\nabla b^k(0)\|^2\\
&\qquad\quad + c_3\int_0^t e^{\theta\tau}[\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + j\|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2]^3 d\tau\\
&\qquad\quad + c_2\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + j\|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau\\
&\qquad\quad + \theta\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + j\|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau + c_1\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau.
\end{aligned}$$

Logo, observando (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
&e^{\theta t}(\|\nabla u^k(t)\|^2 + j\|\nabla w^k(t)\|^2 + \|\nabla b^k(t)\|^2)\\
&\quad + \int_0^t e^{\theta\tau}((\mu+\chi)\|Au^k(\tau)\|^2 + \gamma\|Bw^k(\tau)\|^2 + \nu\|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau\\
&\qquad \leq \|\nabla u_0\|^2 + j\|\nabla w_0\|^2 + \|\nabla b_0\|^2 + (c_3M^3 + c_2M + \theta M + c_1)\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau.
\end{aligned}$$

Então, considerando o $\min\{1, j, \mu+\chi, \gamma, \nu\}$ e multiplicando por $e^{-\theta t}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u^k(t)\|^2 + \|\nabla w^k(t)\|^2 + \|\nabla b^k(t)\|^2\\
&\quad + e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|Au^k(\tau)\|^2 + \|Bw^k(\tau)\|^2 + \|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau\\
&\qquad \leq c\,e^{-\theta t}(\|\nabla u_0\|^2 + j\|\nabla w_0\|^2 + \|\nabla b_0\|^2) + c\,e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau \leq M_1
\end{aligned}$$

desde que $0 < e^{-\theta t} \leq 1$ e $e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau = \theta^{-1}(1 - e^{-\theta t}) \leq \theta^{-1}$.

Portanto, conclui-se que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|Au^k(\tau)\|^2 + \|Bw^k(\tau)\|^2 + \|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau \leq M_1. \tag{3.12}$$

Além disso, desde que $e^{\theta\tau} \geq 1$ para todo $\tau \geq 0$, (3.12) implica

$$\begin{aligned}
&\int_0^t(\|Au^k(\tau)\|^2 + \|Bw^k(\tau)\|^2 + \|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau\\
&\qquad \leq \int_0^t e^{\theta\tau}(\|Au^k(\tau)\|^2 + \|Bw^k(\tau)\|^2 + \|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau \leq M_1 e^{\theta t}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Assim, de (3.11) e (3.13), resulta que

$$\{u^k\}, \{b^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,\infty;V)\cap L^2_{Loc}(0,\infty;D(A)) \quad (3.14)$$

$$\text{e } \{w^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega))\cap L^2_{Loc}(0,\infty;D(B)). \quad (3.15)$$

Agora, provaremos as outras estimativas, as devemos provar primeiro para as aproximações (u^k, w^k, b^k) e então levar para a solução (u, w, b) no limite.

Considerando $\varphi = u_t^k$ em (1.23), $\phi = w_t^k$ em (1.24) e $\psi = b_t^k$ em (1.25), obtemos

$$\begin{aligned} ||u_t^k||^2 &= \chi(\operatorname{rot} w^k, u_t^k) + r(b^k\cdot\nabla b^k, u_t^k) - (u^k\cdot\nabla u^k, u_t^k) \\ &\quad -(\mu+\chi)\ (Au^k, u_t^k) + (f, u_t^k), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d}{dt}||\operatorname{div} w^k||^2 + j||w_t^k||^2 &= \chi(\operatorname{rot} u^k, w_t^k) - 2\chi(w^k, w_t^k) - j(u^k\cdot\nabla w^k, w_t^k) \\ &\quad -\gamma(Bw^k, w_t^k) + (g, w_t^k), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$||b_t^k||^2 = (b^k\cdot\nabla u^k, b_t^k) - (u^k\cdot\nabla b^k, b_t^k) - \nu(Ab^k, b_t^k). \quad (3.18)$$

Para o lado direito de (3.16)-(3.18), usando as desigualdades de Hölder e Young, a imersão de Sobolev $H^2(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e (3.11), temos:

$$\begin{aligned}
|\chi(\operatorname{rot} w^k, u_t^k)| &\le C_\varepsilon||\nabla w^k||^2 + \varepsilon||u_t^k||^2,\\
|r(b^k\cdot\nabla b^k, u_t^k)| &\le c||b^k||_{L^\infty}||\nabla b^k||||u_t^k|| \le C_\varepsilon||\nabla b^k||^2||Ab^k||^2 + \varepsilon||u_t^k||^2\\
&\le C_\varepsilon||Ab^k||^2 + \varepsilon||u_t^k||^2,\\
|(u^k\cdot\nabla u^k, u_t^k)| &\le c||u^k||_{L^\infty}||\nabla u^k||||u_t^k|| \le C_\varepsilon||Au^k||^2 + \varepsilon||u_t^k||^2,\\
|(\mu+\chi)\ (Au^k, u_t^k)| &\le C_\varepsilon||Au^k||^2 + \varepsilon||u_t^k||^2,\\
|(f, u_t^k)| &\le C_\varepsilon||f||^2 + \varepsilon||u_t^k||^2,\\
\chi(\operatorname{rot} u^k, w_t^k)| &\le C_\delta||\nabla u^k||^2 + \delta||w_t^k||^2,\\
|2\chi(w^k, w_t^k)| &\le C_\delta||\nabla w^k||^2 + \delta||w_t^k||^2,\\
|j(u^k\cdot\nabla w^k, w_t^k)| &\le C_\delta||Au^k||^2||\nabla w^k||^2 + \delta||w_t^k||^2 \le C_\delta||Au^k||^2 + \delta||w_t^k||^2,\\
|\gamma(Bw^k, w_t^k)| &\le C_\delta||Bw^k||^2 + \delta||w_t^k||^2,\\
|(g, w_t^k)| &\le C_\delta||g||^2 + \delta||w_t^k||^2,\\
|(b^k\cdot\nabla u^k, b_t^k)| &\le C_\sigma||Ab^k||^2||\nabla u^k||^2 + \sigma||b_t^k||^2 \le C_\sigma||Ab^k||^2 + \sigma||b_t^k||^2,\\
|(u^k\cdot\nabla b^k, b_t^k)| &\le C_\sigma||Au^k||^2||\nabla b^k||^2 + \sigma||b_t^k||^2 \le C_\sigma||Au^k||^2 + \sigma||b_t^k||^2,\\
|\nu(Ab^k, b_t^k)| &\le C_\sigma||Ab^k||^2 + \sigma||b_t^k||^2.
\end{aligned}$$

Logo, levando estas estimativas em (3.16)-(3.18) e somando, tem-se

$$\begin{aligned} &||u_t^k||^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d}{dt}||\operatorname{div} w^k||^2 + j||w_t^k||^2 + ||b_t^k||^2 \\ &\le C_{\varepsilon,\delta}||\nabla w^k||^2 + C_\delta||\nabla u^k||^2 + C_{\varepsilon,\delta,\sigma}||Au^k||^2 + C_\delta||Bw^k||^2 + C_{\varepsilon,\sigma}||Ab^k||^2 \\ &\quad + C_\varepsilon||f||^2 + C_\delta||g||^2 + 5\varepsilon||u_t^k||^2 + 5\delta||w_t^k||^2 + 3\sigma||b_t^k||^2 \end{aligned}$$

e escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\delta = \frac{j}{10}$ e $\sigma = \frac{1}{6}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&||u_t^k||^2 + (\alpha+\beta)\frac{d}{dt}||\operatorname{div} w^k||^2 + j||w_t^k||^2 + ||b_t^k||^2 \\
&\leq c||\nabla w^k||^2 + c||\nabla u^k||^2 + c||Au^k||^2 + c||Bw^k||^2 + c||Ab^k||^2 + c||f||^2 + c||g||^2, \quad (3.19)
\end{aligned}$$

logo, observando (3.11), multiplicando por $e^{\theta t}$ e integrando de 0 a t, obtem-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\theta\tau}(||u_t^k(\tau)||^2 + j||w_t^k(\tau)||^2 + ||b_t^k(\tau)||^2)d\tau + (\alpha+\beta)e^{\theta t}||\operatorname{div} w^k(t)||^2 \\
&\leq (\alpha+\beta)||\operatorname{div} w^k(0)||^2 + (\alpha+\beta)\theta\int_0^t e^{\theta\tau}||\operatorname{div} w^k(\tau)||^2 d\tau + cM\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau \\
&+c\int_0^t e^{\theta\tau}(||Au^k(\tau)||^2 + ||Bw^k(\tau)||^2 + ||Ab^k(\tau)||^2)d\tau \\
&+c\sup_{t\geq 0}\{||f(t)||^2 + ||g(t)||^2\}\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau
\end{aligned}$$

desde que $e^{\theta t}\frac{d}{dt}||\operatorname{div} w^k||^2 = \frac{d}{dt}(e^{\theta t}||\operatorname{div} w^k||^2) - \theta e^{\theta t}||\operatorname{div} w^k||^2$.

Assim, multiplicando por $e^{-\theta t}$ e observando (3.12), resulta

$$e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(||u_t^k(\tau)||^2 + ||w_t^k(\tau)||^2 + ||b_t^k(\tau)||^2)d\tau \leq M_2. \quad (3.20)$$

Logo, de (3.20), conclui-se

$$\{u_t^k\}, \{b_t^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^2_{loc}(0,\infty;H) \quad (3.21)$$
$$\text{e } \{w_t^k\} \text{ é uniformememte limitada em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)). \quad (3.22)$$

Agora, de (3.14) e (3.21), temos que existem u, $b \in L^\infty(0,\infty;V) \cap L^2_{loc}(0,\infty;D(A))$ e subsequências de $\{u^k\}$ e $\{b^k\}$ tais que quando $k \longrightarrow \infty$, têm-se:

$$\begin{aligned}
&u^k \longrightarrow u \text{ e } b^k \longrightarrow b \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,\infty;V), \\
&u^k \longrightarrow u \text{ e } b^k \longrightarrow b \text{ fraco em } L^2_{loc}(0,\infty;D(A)), \\
&u_t^k \longrightarrow u_t \text{ e } b_t^k \longrightarrow b_t \text{ fraco em } L^2_{loc}(0,\infty;H).
\end{aligned}$$

Analogamente, de (3.15) e (3.22), existe $w \in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0,\infty;D(B))$ e uma subsequência de $\{w^k\}$, tal que quando $k \longrightarrow \infty$, temos:

$$\begin{aligned}
&w^k \longrightarrow w \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)), \\
&w^k \longrightarrow w \text{ fraco em } L^2_{loc}(0,\infty;D(B)), \\
&w_t^k \longrightarrow w_t \text{ fraco em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Então, usando o Lema de Aubin-Lions (Lema 1.4, Cap. 1) com $B_0 = D(A)$, $p_0 = 2$, $B_1 = H$, $p_1 = 2$ e $B = V$, temos que

$$u^k \longrightarrow u \quad \text{e} \quad b^k \longrightarrow b \quad \text{forte em} \quad L^2_{Loc}(0,\infty;V).$$

Analogamente, considerando $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $p_0 = 2$, $B_1 = L^2(\Omega)$, $p_1 = 2$ e $B = H_0^1(\Omega)$, resulta

$$w^k \longrightarrow w \quad \text{forte em} \quad L^2_{Loc}(0,\infty;H_0^1(\Omega)).$$

Assim, uma vez estabelecidas as convergências acima, passando ao limite em (1.23)-(1.25) de um modo usual (ver [40], [22]), conclui-se que (u,w,b) é uma solução global forte do problema (1.1)-(1.3).

Para provar a unicidade da solução, suponhamos que (u_1,w_1,b_1) é outra solução do problema (1.1)-(1.3) para os mesmos u_0, w_0 e b_0. Denotemos

$$\rho = u - u_1, \quad \eta = w - w_1, \quad \xi = b - b_1.$$

Então, de (1.14)-(1.17), temos que ρ, η e ξ satisfazem

$$\begin{aligned}
&(\rho_t,\varphi) + (\mu+\chi)(A\rho,\varphi) = -(\rho\cdot\nabla u,\varphi) - (u_1\cdot\nabla\rho,\varphi) + \chi(\operatorname{rot}\eta,\varphi) + r(\xi\cdot\nabla b,\varphi)\\
&\qquad\qquad + r(b_1\cdot\nabla\xi,\varphi),\\
&j(\eta_t,\phi) + \gamma(B\eta,\phi) - (\alpha+\beta)(\nabla\operatorname{div}\eta,\phi) + 2\,\chi(\eta,\phi)\\
&\qquad\qquad = -j(\rho\cdot\nabla w,\phi) - j(u_1\cdot\nabla\eta,\phi) + \chi(\operatorname{rot}\rho,\phi),\\
&(\xi_t,\psi) + \nu(A\xi,\psi) = -(\rho\cdot\nabla b,\psi) - (u_1\cdot\nabla\xi,\psi) + (\xi\cdot\nabla u,\psi) + (b_1\cdot\nabla\rho,\psi),\\
&\rho(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \xi(0) = 0.
\end{aligned}$$

Colocando $\varphi = \rho$, $\phi = \eta$ e $\psi = r\,\xi$, resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla\rho\|^2 = -(\rho\cdot\nabla u,\rho) + \chi(\operatorname{rot}\eta,\rho) + r(\xi\cdot\nabla b,\rho) + r(b_1\cdot\nabla\xi,\rho),\\
&\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|\eta\|^2 + \gamma\|\nabla\eta\|^2 + (\alpha+\beta)\|\operatorname{div}\eta\|^2 + 2\chi\|\eta\|^2 = -j(\rho\cdot\nabla w,\eta) + \chi(\operatorname{rot}\rho,\eta),\\
&\frac{r}{2}\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + r\,\nu\|\nabla\xi\|^2 = -r(\rho\cdot\nabla b,\xi) + r(\xi\cdot\nabla u,\xi) + r(b_1\cdot\nabla\rho,\xi)
\end{aligned}$$

Somando as identidades acima, vem

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\rho\|^2 + j\|\eta\|^2 + r\|\xi\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla\rho\|^2 + \gamma\|\nabla\eta\|^2 + r\,\nu\|\nabla\xi\|^2\\
&\qquad \le |(\rho\cdot\nabla u,\rho)| + |\chi(\operatorname{rot}\eta,\rho)| + |r(\xi\cdot\nabla b,\rho)| + |j(\rho\cdot\nabla w,\eta)|\\
&\qquad\quad + |\chi(\operatorname{rot}\rho,\eta)| + |r(\rho\cdot\nabla b,\xi)| + |r(\xi\cdot\nabla u,\xi)|
\end{aligned}$$

e usando as desigualdades de Hölder e Young, no lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||\rho||^2 + j||\eta||^2 + r||\xi||^2) + (\mu+\chi)||\nabla\rho||^2 + \gamma||\nabla\eta||^2 + r\,\nu||\nabla\xi||^2 \\
&\qquad \leq C_\varepsilon||Au||^2||\rho||^2 + \varepsilon||\nabla\rho||^2 + \delta||\nabla\eta||^2 + C_\delta||\rho||^2 + C_\sigma||Ab||^2||\rho||^2 + \sigma||\nabla\xi||^2 \\
&\qquad\quad + C_\varepsilon||Bw||^2||\eta||^2 + \varepsilon||\nabla\rho||^2 + C_\varepsilon||\eta||^2 + \varepsilon||\nabla\rho||^2 + C_\varepsilon||Ab||^2||\xi||^2 \\
&\qquad\quad + \varepsilon||\nabla\rho||^2 + C_\sigma||Au||^2||\xi||^2 + \sigma||\nabla\xi||^2.
\end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\varepsilon = \dfrac{\mu+\chi}{8}$, $\delta = \dfrac{\gamma}{2}$ e $\sigma = \dfrac{r\,\nu}{4}$, vem

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||\rho||^2 + j||\eta||^2 + r||\xi||^2) + (\mu+\chi)||\nabla\rho||^2 + \gamma||\nabla\eta||^2 + r\,\nu||\nabla\xi||^2 \\
&\qquad \leq c\,(||Au||^2 + ||Bw||^2 + ||Ab||^2 + 1)(||\rho||^2 + ||\eta||^2 + ||\xi||^2),
\end{aligned}$$

isto, implica

$$\frac{d}{dt}(||\rho||^2 + j||\eta||^2 + r||\xi||^2) \leq c\,(||Au||^2 + ||Bw||^2 + ||Ab||^2 + 1)(||\rho||^2 + ||\eta||^2 + ||\xi||^2).$$

Agora, $\forall\, n \in I\!N$, integrando a última desigualdade de $(n-1)T$ a t, $\forall\, t \in [(n-1)T, nT]$, temos

$$\begin{aligned}
&||\rho(t)||^2 + ||\eta(t)||^2 + ||\xi(t)||^2 \\
&\leq c\int_{(n-1)T}^{t}(||Au(\tau)||^2 + ||Bw(\tau)||^2 + ||Ab(\tau)||^2 + 1)(||\rho(\tau)||^2 + ||\eta(\tau)||^2 + ||\xi(\tau)||^2)\,d\tau \\
&\quad + c\,(||\rho((n-1)T)||^2 + j||\eta((n-1)T)||^2 + r||\xi((n-1)T)||^2)
\end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Gronwall, resulta

$$\begin{aligned}
&||\rho(t)||^2 + ||\eta(t)||^2 + ||\xi(t)||^2 \\
&\leq c\,(||\rho((n-1)T)||^2 + j||\eta((n-1)T)||^2 + r||\xi((n-1)T)||^2)\exp(c\int_{(n-1)T}^{t}\beta(\tau)\,d\tau)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [(n-1)T, nT]$ e onde $\beta(t) = ||Au(t)||^2 + ||Bw(t)||^2 + ||Ab(t)||^2 + 1$.

Mas, de (3.2) temos que $u, b \in L^2_{Loc}(0,\infty; D(A))$ e $w \in L^2_{Loc}(0,\infty; D(B))$, então $\forall\, n \in I\!N$ e $\forall\, t \in [(n-1)T, nT]$ tem-se $\displaystyle\int_{(n-1)T}^{t}\beta(\tau)\,d\tau < \infty$. Consequentemente, a última desigualdade implica

$$||\rho(t)||^2 + ||\eta(t)||^2 + ||\xi(t)||^2 \leq c\,(||\rho((n-1)T)||^2 + j||\eta((n-1)T)||^2 + r||\xi((n-1)T)||^2)$$

para todo $t \in [(n-1)T, nT]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, para $n = 1$, desde que $\rho(0) = \eta(0) = \xi(0) = 0$, resulta

$$\rho(t) = 0, \quad \eta(t) = 0 \;\text{ e }\; \xi(t) = 0, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Para $n = 2$, temos

$$\|\rho(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + \|\xi(t)\|^2 \leq c\,(\|\rho(T)\|^2 + j\|\eta(T)\|^2 + r\|\xi(T)\|^2), \;\; \forall\, t \in [T, 2T]$$

e desde que $\rho(T) = \eta(T) = \xi(T) = 0$, resulta

$$\rho(t) = 0, \quad \eta(t) = 0 \;\text{ e }\; \xi(t) = 0, \quad \forall\, t \in [T, 2T].$$

Assim, $\rho(t) = 0$, $\eta(t) = 0$ e $\xi(t) = 0$ para todo $t \in [0, 2T]$, logo continuando com o processo, obtemos

$$\rho(t) = 0, \quad \eta(t) = 0 \;\text{ e }\; \xi(t) = 0, \quad \forall\, t \in [0, nT], \; \forall\, n \in \mathbb{N},$$

isto implica

$$u(t) = u_1(t), \quad w(t) = w_1(t) \;\text{ e }\; b(t) = b_1(t), \quad \forall\, t \in [0, nT], \; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

mostrando a unicidade da solução global forte.

Para provar a continuidade da solução, observemos que $u,\, b \in L^2_{Loc}(0, \infty; D(A))$ e $u_t,\, b_t \in L^2_{Loc}(0, \infty; H)$, então usando o Lema 1.5 (Cap. 1), temos que $u,\, b \in C([0, \infty); V)$. Similarmente, tem-se que $w \in C([0, \infty); H^1_0(\Omega))$.

Finalmente, as estimativas (3.1)-(3.3) do teorema são obtidas tomando o limite quando $k \longrightarrow \infty$ nas desigualdades (3.11), (3.12) e (3.20) respectivamente. Isto completa a prova do teorema.

Observação 3.1 *As estimativas anteriores são válidas para $\theta \geq 0$ se elas são consideradas em intervalos de tempo $[0, T], 0 < T < \infty$ (naturalmente com o supremo dependendo de T). Isto vem da forma como a prova foi feita.*

Observação 3.2 *As duas últimas estimativas do Teorema 3.1, são válidas com $\theta = 0$ sobre o intervalo de tempo $[0, \infty)$ se também são dadas as hipóteses $f, g \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$.*

De fato, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Além das hipóteses do Teorema 3.1, assumimos que $f, g \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$. Então, a única solução (u, w, b) dada pelo Teorema 3.1, satisfaz as seguintes* *estimativas:*

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t (\|\nabla u(\tau)\|^2 + \|\nabla w(\tau)\|^2 + \|\nabla b(\tau)\|^2)d\tau \leq M_3, \tag{3.23}$$

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t (\|Au(\tau)\|^2 + \|Bw(\tau)\|^2 + \|Ab(\tau)\|^2)d\tau \leq M_4, \tag{3.24}$$

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t (\|u_t(\tau)\|^2 + \|w_t(\tau)\|^2 + \|b_t(\tau)\|^2)d\tau \leq M_5, \tag{3.25}$$

onde M_3, M_4 e M_5 são constantes independentes de t.

Também, as mesmas classes de estimativas são válidas uniformemente em $k \in I\!N$ para as aproximações de Galerkin.

Prova. Considerando $\varphi = u^k, \phi = w^k$ e $\psi = rb^k$ em (1.23)-(1.25) e somando as igualdades, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u^k\|^2 + j\|w^k\|^2 + r\|b^k\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla u^k\|^2 + \gamma\|\nabla w^k\|^2 + r\nu\|\nabla b^k\|^2 + 2\chi\|w^k\|^2 \\
&\leq |\chi(\text{rot } w^k, u^k)| + |(f, u^k)| + |\chi(\text{rot } u^k, w^k)| + |(g, w^k)| \\
&\leq \chi\|w^k\| \, \|\text{rot } u^k\| + C_\Omega\|f\| \, \|\nabla u^k\| + \chi\|\text{rot } u^k\| \, \|w^k\| + C_\Omega\|g\| \, \|\nabla w^k\| \\
&\leq \chi\|w^k\|^2 + \frac{\chi}{4}\|\nabla u^k\|^2 + \frac{C_\Omega^2}{2\mu}\|f\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla u^k\|^2 + \chi\|w^k\|^2 \\
&\quad + \frac{\chi}{4}\|\nabla u^k\|^2 + \frac{C_\Omega^2}{2\gamma}\|g\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|\nabla w^k\|^2,
\end{aligned}$$

onde temos usado as desigualdades de Hölder, Young e Poincaré. Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|u^k\|^2 + j\|w^k\|^2 + r\|b^k\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla u^k\|^2 + \gamma\|\nabla w^k\|^2 + 2r\nu\|\nabla b^k\|^2 \\
&\qquad \leq c\,(\|f\|^2 + \|g\|^2).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Integrando (3.26) de 0 a t, e considerando o $\min\{1, j, r, \mu+\chi, \gamma, 2r\nu\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u^k(t)\|^2 + \|w^k(t)\|^2 + \|b^k(t)\|^2 + \int_0^t (\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\quad \leq c\int_0^t (\|f(\tau)\|^2 + \|g(\tau)\|^2)d\tau + c\,(\|u_0\|^2 + j\|w_0\|^2 + \|b_0\|^2).
\end{aligned}$$

Logo, desde que $f,\ g \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$, vem

$$\begin{aligned}
&\|u^k(t)\|^2 + \|w^k(t)\|^2 + \|b^k(t)\|^2 + \int_0^t (\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\quad \leq c\sup_{t\geq 0}\{\int_0^t (\|f(\tau)\|^2 + \|g(\tau)\|^2)d\tau\} + c\,(\|u_0\|^2 + j\|w_0\|^2 + \|b_0\|^2) \leq c.
\end{aligned}$$

Portanto, concluimos

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t (||\nabla u^k(\tau)||^2 + ||\nabla w^k(\tau)||^2 + ||\nabla b^k(\tau)||^2)d\tau \leq M_3. \tag{3.27}$$

Agora, integrando (3.7) de 0 a t, considerando o $\min\{1, j, \mu+\chi, \gamma, \nu\}$ e observando (3.11), temos

$$\begin{aligned}
&||\nabla u^k(t)||^2 + ||\nabla w^k(t)||^2 + ||\nabla b^k(t)||^2 + \int_0^t (||Au^k(\tau)||^2 + ||Bw^k(\tau)||^2 + ||Ab^k(\tau)||^2)d\tau \\
&\quad \leq c\,[\sup_{t\geq 0}(||\nabla u^k(t)||^2 + j||\nabla w^k(t)||^2 + ||\nabla b^k(t)||^2)]^2 \int_0^t (||\nabla u^k(\tau)||^2 + j||\nabla w^k(\tau)||^2 \\
&\quad\quad + ||\nabla b^k(\tau)||^2)d\tau + c\int_0^t (||\nabla u^k(\tau)||^2 + j||\nabla w^k(\tau)||^2 + ||\nabla b^k(\tau)||^2)d\tau \\
&\quad\quad + c\int_0^t (||f(\tau)||^2 + ||g(\tau)||^2)d\tau + c\,(||\nabla u_0||^2 + j||\nabla w_0||^2 + ||\nabla b_0||^2) \\
&\quad \leq (c\,M^2 + c)\max\{1, j\}\int_0^t (||\nabla u^k(\tau)||^2 + ||\nabla w^k(\tau)||^2 + ||\nabla b^k(\tau)||^2)d\tau \\
&\quad\quad + c\int_0^t (||f(\tau)||^2 + ||g(\tau)||^2)d\tau + c\,(||\nabla u_0||^2 + j||\nabla w_0||^2 + ||\nabla b_0||^2).
\end{aligned}$$

Assim, observando (3.27) e desde que $f, g \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$, conclui-se

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t (||Au^k(\tau)||^2 + ||Bw^k(\tau)||^2 + ||Ab^k(\tau)||^2)d\tau \leq M_4. \tag{3.28}$$

A seguir, integrando (3.19) de 0 a t, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (||u_t^k(\tau)||^2 + j||w_t^k(\tau)||^2 + ||b_t^k(\tau)||^2)d\tau + (\alpha+\beta)||\text{div } w^k(t)||^2 \\
&\quad \leq (\alpha+\beta)||\text{div } w_0||^2 + c\int_0^t (||\nabla w^k(\tau)||^2 + ||\nabla u^k(\tau)||^2)d\tau \\
&\quad\quad + c\int_0^t (||Au^k(\tau)||^2 + ||Bw^k(\tau)||^2 + ||Ab^k(\tau)||^2)d\tau + c\int_0^t (||f(\tau)||^2 + ||g(\tau)||^2)d\tau.
\end{aligned}$$

Logo, tendo em conta (3.27)-(3.28) e o fato que $f, g \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$, obtemos

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t (||u_t^k(\tau)||^2 + ||w_t^k(\tau)||^2 + ||b_t^k(\tau)||^2)d\tau \leq M_5. \tag{3.29}$$

Portanto, tomando o limite quando $k \longrightarrow \infty$ nas desigualdades (3.27), (3.28) e (3.29) respectivamente, obtêm-se as estimativas dadas na proposição.

Observação 3.3 *Observe-se que a condição que os dados sejam pequenos, somente foram usados para obter a primeira estimativa do Teorema 3.1. Portanto, as duas últimas estimativas do Teorema 3.1 e as estimativas da Proposição 3.1, são válidas se assumimos que* $||\nabla u(t)||^2 + ||\nabla w(t)||^2 + ||\nabla b(t)||^2 \leq M$ *e* $\int_0^t (||f(\tau)||^2 + ||g(\tau)||^2)d\tau \leq C,\ \forall\ t \geq 0.$

3.1.2 Mais regularidade da solução

O seguinte resultado é um análogo ao Teorema 1.6 do Cap. 1 (com $T = \infty$).

Teorema 3.2 *Com as hipóteses do Teorema 3.1, assumimos que* $u_0, b_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $w_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *e* $f_t, g_t \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$. *Então, a única solução dada pelo Teorema 3.1 satisfaz*

$$u, b \in C([0,\infty); V \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H),$$
$$w \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

Além disso, para qualquer $\theta > 0$ *existem constantes positivas* M_6, M_7 *e* M_8, *tais que*

$$\sup_{t\geq 0}\{\|u_t(t)\|^2 + \|b_t(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2\} \leq M_6, \tag{3.30}$$

$$\sup_{t\geq 0}\{\|Au(t)\|^2 + \|Bw(t)\|^2 + \|Ab(t)\|^2\} \leq M_7, \tag{3.31}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t(\tau)\|^2)d\tau \leq M_6, \tag{3.32}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_{tt}(\tau)\|_{V^*}^2 + \|w_{tt}(\tau)\|_{H^{-1}}^2 + \|b_{tt}(\tau)\|_{V^*}^2)d\tau \leq M_8. \tag{3.33}$$

Também, as mesmas classes de estimativas são válidas uniformemente em $k \in \mathbb{N}$ *para as aproximações de Galerkin.*

Prova. Precisaremos de melhores estimativas para u^k, w^k e b^k. Para isto, derivamos (1.23), (1.24) e (1.25) com respeito a t e colocamos $\varphi = u_t^k$, $\phi = w_t^k$ e $\psi = rb_t^k$ respectivamente, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^k\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla u_t^k\|^2 = {}& \chi(\operatorname{rot} w_t^k, u_t^k) + r(b_t^k\cdot\nabla b^k, u_t^k) + r(b^k\cdot\nabla b_t^k, u_t^k)\\ & -(u_t^k\cdot\nabla u^k, u_t^k) + (f_t, u_t^k),\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|w_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla w_t^k\|^2 + (\alpha+\beta)\|\operatorname{div} w_t^k\|^2 + 2\chi\|w_t^k\|^2 = {}& \chi(\operatorname{rot} u_t^k, w_t^k)\\ & -j(u_t^k\cdot\nabla w^k, w_t^k) + (g_t, w_t^k),\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\frac{r}{2}\frac{d}{dt}\|b_t^k\|^2 + r\nu\|\nabla b_t^k\|^2 = r(b_t^k\cdot\nabla u^k, b_t^k) + r(b^k\cdot\nabla u_t^k, b_t^k) - r(u_t^k\cdot\nabla b^k, b_t^k)\ , \tag{3.36}$$

desde que $(u^k\cdot\nabla u_t^k, u_t^k) = (u^k\cdot\nabla w_t^k, w_t^k) = (u^k\cdot\nabla b_t^k, b_t^k) = 0$.

Logo, somando as igualdades (3.34)-(3.36), obtem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_t^k\|^2 + j\|w_t^k\|^2 + r\|b_t^k\|^2)$$

$$
\begin{aligned}
&+(\mu+\chi)\|\nabla u_t^k\|^2+\gamma\|\nabla w_t^k\|^2+r\nu\|\nabla b_t^k\|^2+(\alpha+\beta)\|\operatorname{div} w_t^k\|^2+2\chi\|w_t^k\|^2\\
&\quad=\chi(\operatorname{rot} w_t^k,u_t^k)+r(b_t^k\cdot\nabla b^k,u_t^k)-(u_t^k\cdot\nabla u^k,u_t^k)+(f_t,u_t^k)+\chi(\operatorname{rot} u_t^k,w_t^k)\\
&\qquad-j(u_t^k\cdot\nabla w^k,w_t^k)+(g_t,w_t^k)+r(b_t^k\cdot\nabla u^k,b_t^k)-r(u_t^k\cdot\nabla b^k,b_t^k), \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

desde que $r(b^k\cdot\nabla b_t^k,u_t^k)+r(b^k\cdot\nabla u_t^k,b_t^k)=0$. Agora, usando as desigualdades de Hölder e Young, com uma constante genérica $c>0$, têm-se:

$$
\begin{aligned}
|\chi(\operatorname{rot} w_t^k,u_t^k)| &\le c\|u_t^k\|^2+\frac{\gamma}{6}\|\nabla w_t^k\|^2,\\
|\chi(\operatorname{rot} u_t^k,w_t^k)| &\le c\|w_t^k\|^2+\frac{(\mu+\chi)}{12}\|\nabla u_t^k\|^2,\\
|(f_t,u_t^k)| &\le c\|f_t\|^2+\frac{(u+\chi)}{12}\|\nabla u_t^k\|^2,\\
|(g_t,w_t^k)| &\le c\|g_t\|^2+\frac{\gamma}{6}\|\nabla w_t^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Também, usando a desigualdade de Sobolev $\|\varphi\|_{L^4}\le c\|\varphi\|^{1/4}\|\nabla\varphi\|^{3/4}$ e a imersão de Sobolev $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
|(u_t^k\cdot\nabla u^k,u_t^k)| &\le \|\nabla u^k\|\|u_t^k\|_{L^4}^2\le c\|\nabla u^k\|\|u_t^k\|^{1/2}\|\nabla u_t^k\|^{3/2}\\
&\le c\|\nabla u^k\|^4\|u_t^k\|^2+\frac{(\mu+\chi)}{12}\|\nabla u_t^k\|^2,\\
|r(b_t^k\cdot\nabla b^k,u_t^k)| &\le r\|b_t^k\|_{L^4}\|\nabla b^k\|\|u_t^k\|_{L^4}\le c\|b_t^k\|_{L^4}\|\nabla b^k\|\|\nabla u_t^k\|\\
&\le c\|b_t^k\|^{1/4}\|\nabla b_t^k\|^{3/4}\|\nabla b^k\|\|\nabla u_t^k\|\\
&\le c\|\nabla b^k\|^2\|b_t^k\|^{1/2}\|\nabla b_t^k\|^{3/2}+\frac{(\mu+\chi)}{12}\|\nabla u_t^k\|^2\\
&\le c\|\nabla b^k\|^8\|b_t^k\|^2+\frac{r\nu}{6}\|\nabla b_t^k\|^2+\frac{(\mu+\chi)}{12}\|\nabla u_t^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Analogamente, podemos provar

$$
\begin{aligned}
|r(b_t^k\cdot\nabla u^k,b_t^k)| &\le c\|\nabla u^k\|^4\|b_t^k\|^2+\frac{r\nu}{6}\|\nabla b_t^k\|^2,\\
|j(u_t^k\cdot\nabla w^k,w_t^k)| &\le c\|\nabla w^k\|^8\|w_t^k\|^2+\frac{\gamma}{6}\|\nabla w_t^k\|^2+\frac{(\mu+\chi)}{12}\|\nabla u_t^k\|^2,\\
|r(u_t^k\cdot\nabla b^k,b_t^k)| &\le c\|\nabla b^k\|^8\|b_t^k\|^2+\frac{r\nu}{6}\|\nabla b_t^k\|^2+\frac{(\mu+\chi)}{12}\|\nabla u_t^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Usando as estimativas acima em (3.37) e observando (3.11), obtemos a seguinte desigualdade diferencial

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|u_t^k\|^2+j\|w_t^k\|^2+r\|b_t^k\|^2)+(\mu+\chi)\|\nabla u_t^k\|^2+\gamma\|\nabla w_t^k\|^2+r\nu\|\nabla b_t^k\|^2\\
&\qquad\le c(M)(\|u_t^k\|^2+\|w_t^k\|^2+\|b_t^k\|^2)+c(\|f_t\|^2+\|g_t\|^2), \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

onde $c > 0$ é uma constante genérica e $c(M)$ é uma constante positiva que depende de M.

Então, multiplicando a desigualdade acima por $e^{\theta t}$, integrando no tempo de 0 a t e logo considerando o $\min\{1, j, r, \mu+\chi, \gamma, r\nu\}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& e^{\theta t}(\|u_t^k(t)\|^2 + \|w_t^k(t)\|^2 + \|b_t^k(t)\|^2) \\
& + \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\tau)\|^2)d\tau \\
& \quad \leq c\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_t^k(\tau)\|^2 + \|w_t^k(\tau)\|^2 + \|b_t^k(\tau)\|^2)d\tau \\
& \quad\quad + c\sup_{t\geq 0}(\|f_t(t)\|^2 + \|g_t(t)\|^2)\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau + c\,(\|u_t^k(0)\|^2 + j\|w_t^k(0)\|^2 + r\|b_t^k(0)\|^2) \\
& \quad\quad + c\theta\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_t^k(\tau)\|^2 + j\|w_t^k(\tau)\|^2 + r\|b_t^k(\tau)\|^2)d\tau,
\end{aligned}
$$

desde que $e^{\theta t}\dfrac{d}{dt}h(t) = \dfrac{d}{dt}(e^{\theta t}h(t)) - \theta e^{\theta t}h(t)$.

Então, multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\theta t}$, levando em conta as estimativas anteriores e as hipóteses sobre f_t e g_t, obtem-se

$$
\begin{aligned}
& \|u_t^k(t)\|^2 + \|w_t^k(t)\|^2 + \|b_t^k(t)\|^2 \\
& + e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\tau)\|^2)d\tau \\
& \quad \leq c\,(1+\theta)e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_t^k(\tau)\|^2 + \|w_t^k(\tau)\|^2 + \|b_t^k(\tau)\|^2)d\tau \\
& \quad\quad + c\,e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau + c\,e^{-\theta t}(\|u_t^k(0)\|^2 + \|w_t^k(0)\|^2 + \|b_t^k(0)\|^2) \\
& \quad \leq c + c\,e^{-\theta t}(\|u_t^k(0)\|^2 + \|w_t^k(0)\|^2 + \|b_t^k(0)\|^2)
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

onde temos considerado a estimativa (3.20).

Assim, observando (3.39), é suficiente encontrar estimativas para $\|u_t^k(0)\|^2$, $\|w_t^k(0)\|^2$ e $\|b_t^k(0)\|^2$, para obter as estimativas uniformes de u_t^k, w_t^k e b_t^k.

Para isto, colocando $\varphi = u_t^k$, $\phi = w_t^k$ e $\psi = b_t^k$ em (1.23), (1.24) e (1.25) respectivamente, temos

$$
\begin{aligned}
\|u_t^k\|^2 &= \chi(\mathrm{rot}\,w^k, u_t^k) + r(b^k\cdot\nabla b^k, u_t^k) + (f, u_t^k) - (u^k\cdot\nabla u^k, u_t^k) - (\mu+\chi)(Au^k, u_t^k), \\
j\|w_t^k\|^2 &= \chi(\mathrm{rot}\,u^k, w_t^k) + (g, w_t^k) + (\alpha+\beta)(\nabla\mathrm{div}\,w^k, w_t^k) - 2\chi(w^k, w_t^k) \\
&\quad -\gamma(Bw^k, w_t^k) - j(u^k\cdot\nabla w^k, w_t^k), \\
\|b_t^k\|^2 &= (b^k\cdot\nabla u^k, b_t^k) - (u^k\cdot\nabla b^k, b_t^k) - \nu(Ab^k, b_t^k).
\end{aligned}
$$

Logo, lembrando que $u_0^k, b_0^k \in V\cap H^2(\Omega)$ e $w_0^k \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, as igualdades acima, implicam

$$
\|u_t^k(0)\| \;\leq\; \chi\|\nabla w_0^k\| + c\,\|Ab_0^k\|\|\nabla b_0^k\| + \|f(0)\| + c\,\|Au_0^k\|\|\nabla u_0^k\| + c\,\|Au_0^k\| \leq c,
$$

$$
\begin{aligned}
j\|w_t^k(0)\| &\leq \chi\|\nabla u_0^k\| + \|g(0)\| + c\,\|\nabla \mathrm{div}\, w_0^k\| + 2\chi\|w_0^k\| \\
&\quad + \gamma\|Bw_0^k\| + c\,\|Au_0^k\|\|\nabla w_0^k\| \leq c, \\
\|b_t^k(0)\| &\leq c\,\|Ab_0^k\|\|\nabla u_0^k\| + c\,\|Au_0^k\|\|\nabla b_0^k\| + \nu\|Ab_0^k\| \leq c,
\end{aligned}
$$

desde que $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Consequentemente, levando isto em (3.39), concluimos

$$
\sup_{t\geq 0}(\|u_t^k(t)\|^2 + \|w_t^k(t)\|^2 + \|b_t^k(t)\|^2) \leq M_6 \tag{3.40}
$$

$$
\text{e} \quad \sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\tau)\|^2)d\tau \leq M_6. \tag{3.41}
$$

Agora, pondo $\varphi = Au^k$ e $\psi = Ab^k$ em (1.23) e (1.25) respectivamente, têm-se

$$
\begin{aligned}
(\mu+\chi)\|Au^k\|^2 &= \chi(\mathrm{rot}\ w^k, Au^k) + r(b^k\cdot\nabla b^k, Au^k) + (f, Au^k) - (u^k\cdot\nabla u^k, Au^k) \\
&\quad -(u_t^k, Au^k), \\
\nu\|Ab^k\|^2 &= (b^k\cdot\nabla u^k, Ab^k) - (u^k\cdot\nabla b^k, Ab^k) - (b_t^k, Ab^k).
\end{aligned}
$$

Então, usando as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$
\begin{aligned}
(\mu+\chi)\|Au^k\|^2 &\leq C_\varepsilon\|\nabla w^k\|^2 + C_\varepsilon\|b^k\cdot\nabla b^k\|^2 + C_\varepsilon\|f\|^2 + C_\varepsilon\|u^k\cdot\nabla u^k\|^2 \\
&\quad + C_\varepsilon\|u_t^k\|^2 + 5\varepsilon\|Au^k\|^2, \qquad (3.42) \\
\nu\|Ab^k\|^2 &\leq C_\sigma\|b^k\cdot\nabla u^k\|^2 + C_\sigma\|u^k\cdot\nabla b^k\|^2 + C_\sigma\|b_t^k\|^2 + 3\sigma\|Ab^k\|^2. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\|u^k\cdot\nabla u^k\|^2 &\leq \|u^k\|_{L^4}^2\|\nabla u^k\|_{L^4}^2 \leq c\|\nabla u^k\|^2\|\nabla u^k\|^{1/2}\|Au^k\|^{3/2} \\
&\leq C_\varepsilon\|\nabla u^k\|^{10} + \varepsilon\|Au^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|b^k\cdot\nabla b^k\|^2 &\leq C_\sigma\|\nabla b^k\|^{10} + \sigma\|Ab^k\|^2, \\
\|b^k\cdot\nabla u^k\|^2 &\leq \|b^k\|_{L^4}^2\|\nabla u^k\|_{L^4}^2 \leq c\|\nabla b^k\|^2\|\nabla u^k\|^{1/2}\|Au^k\|^{3/2} \\
&\leq C_\varepsilon\|\nabla b^k\|^8\|\nabla u^k\|^2 + \varepsilon\|Au^k\|^2, \\
\|u^k\cdot\nabla b^k\|^2 &\leq C_\sigma\|\nabla u^k\|^8\|\nabla b^k\|^2 + \sigma\|Ab^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Levando estas estimativas em (3.42) e (3.43), obtêm-se

$$
\begin{aligned}
(\mu+\chi)\|Au^k\|^2 &\leq C_\varepsilon\|\nabla w^k\|^2 + C_{\sigma,\varepsilon}\|\nabla b^k\|^{10} + C_\varepsilon\|f\|^2 + C_\varepsilon\|\nabla u^k\|^{10} \\
&\quad + C_\varepsilon\|u_t^k\|^2 + 6\varepsilon\|Au^k\|^2 + \sigma\|Ab^k\|^2, \\
\nu\|Ab^k\|^2 &\leq C_{\varepsilon,\sigma}\|\nabla b^k\|^8\|\nabla u^k\|^2 + C_\sigma\|\nabla u^k\|^8\|\nabla b^k\|^2 + C_\sigma\|b_t^k\|^2 \\
&\quad + 4\sigma\|Ab^k\|^2 + \varepsilon\|Au^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Logo, escolhendo $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ suficientemente pequenos e somando as duas últimas desigualdades, tem-se

$$\begin{aligned}(\mu+\chi)||Au^k||^2+\nu||Ab^k||^2 \;\leq\;& c||\nabla w^k||^2+c||\nabla b^k||^{10}+c||\nabla u^k||^{10}+c||\nabla b^k||^8||\nabla u^k||^2\\ &+c||\nabla u^k||^8||\nabla b^k||^2+c||f||^2+c||u_t^k||^2+c||b_t^k||^2. \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Assim, observando (3.11), (3.40) e a hipótese sobre f, de (3.44) conclui-se

$$\sup_{t\geq 0}(||Au^k(t)||^2+||Ab^k(t)||^2)\leq c. \qquad (3.45)$$

Agora, considerando $\phi = Bw^k$ em (1.24) e usando (3.5), temos

$$\begin{aligned}\gamma||Bw^k||^2 \;\leq\;& N_0||\nabla w^k||^2+C_\delta||\nabla w^k||^2+C_\delta||g||^2+C_\delta||w^k||^2\\ &+C_\delta||u^k\cdot\nabla w^k||^2+C_\delta||w_t^k||^2+5\delta||Bw^k||^2.\end{aligned}$$

Desde que $||u^k\cdot\nabla w^k||^2 \leq ||u^k||^2_{L^\infty}||\nabla w^k||^2 \leq c||Au^k||^2||\nabla w^k||^2$ e $||w^k||^2 \leq c||\nabla w^k||^2$, tomando $\delta = \dfrac{\gamma}{10}$, tem-se

$$\gamma||Bw^k||^2 \leq c||\nabla w^k||^2+c||g||^2+c||Au^k||^2||\nabla w^k||^2+c||w_t^k||^2. \qquad (3.46)$$

Portanto, usando as estimativas (3.11), (3.40), (3.45) e a hipótese sobre g, temos

$$\sup_{t\geq 0}||Bw^k(t)||^2 \leq c. \qquad (3.47)$$

A seguir, derivamos com respeito a t a equação (1.19), obtendo

$$\begin{aligned}u_{tt}^k \;=\;& \chi P_k(\mathrm{rot}\, w_t^k)+rP_k(b_t^k\cdot\nabla b^k)+rP_k(b^k\cdot\nabla b_t^k)-(\mu+\chi)Au_t^k\\ &-P_k(u_t^k\cdot\nabla u^k)-P_k(u^k\cdot\nabla u_t^k)+P_kf_t\equiv h. \qquad (3.48)\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}||u_{tt}^k(\tau)||^2_{V^*}d\tau \leq e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}||h(\tau)||^2_{V^*}d\tau,$$

então, é suficiente estimar o lado direito de (3.48). Para fazer isso, observemos que

$$||rP_k(b_t^k\cdot\nabla b^k)||_{V^*} = r\sup_{||v||_V\leq 1}|(b_t^k\cdot\nabla b^k,P_kv)| \leq r\sup_{||v||_V\leq 1}||b_t^k||_{L^4}||\nabla b^k||||v||_{L^4}\leq c\,||\nabla b_t^k||||\nabla b^k||$$

Também, temos

$$
\begin{aligned}
\|\chi P_k(\operatorname{rot} w_t^k)\|_{V^*} &= \chi \sup_{\|v\|_V\leq 1} |(\operatorname{rot} w_t^k, P_k v)| \leq c\,\|\nabla w_t^k\|,\\
\|r P_k(b^k\cdot\nabla b_t^k)\|_{V^*} &= r \sup_{\|v\|_V\leq 1} |(b^k\cdot\nabla b_t^k, P_k v)| \leq c\,\|\nabla b^k\|\|\nabla b_t^k\|,\\
\|(\mu+\chi)Au_t^k\|_{V^*} &= (\mu+\chi)\sup_{\|v\|_V\leq 1} |(Au_t^k, v)| = (\mu+\chi)\sup_{\|v\|_V\leq 1} |(\nabla u_t^k, \nabla v)| \leq c\,\|\nabla u_t^k\|,\\
\|P_k(u_t^k\cdot\nabla u^k)\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1} |(u_t^k\cdot\nabla u^k, P_k v)| \leq c\,\|\nabla u_t^k\|\|\nabla u^k\|,\\
\|P_k(u^k\cdot\nabla u_t^k)\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1} |(u^k\cdot\nabla u_t^k, P_k v)| \leq c\,\|\nabla u^k\|\|\nabla u_t^k\|,\\
\|P_k f_t\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1} |(f_t, P_k v)| \leq c\,\|f_t\|.
\end{aligned}
$$

Com estas estimativas em (3.48), vem

$$
\|u_{tt}^k\|_{V^*} \leq c\|\nabla w_t^k\| + c\|\nabla b_t^k\|\|\nabla b^k\| + c\|\nabla u_t^k\| + c\|\nabla u_t^k\|\|\nabla u^k\| + c\|f_t\|. \tag{3.49}
$$

Logo, observando (3.11) e elevando ao quadrado a estimativa (3.49), temos

$$
\|u_{tt}^k\|_{V^*}^2 \leq c\|\nabla w_t^k\|^2 + c\|\nabla b_t^k\|^2 + c\|\nabla u_t^k\|^2 + c\|f_t\|^2.
$$

Da desigualdade acima, multiplicando por $e^{\theta t}$, $t\geq 0$ e integrando de 0 a t, obtem-se

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{\theta\tau}\|u_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \;&\leq\; c\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla w_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla u_t^k(\tau)\|^2)d\tau\\
&\quad + c\int_0^t e^{\theta\tau}\|f_t(\tau)\|^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Então, multiplicando por $e^{-\theta t}$ e levando em conta a estimativa (3.41), temos

$$
e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|u_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \leq c + c\,(\sup_{t\geq 0}\|f_t(t)\|^2)\,e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau.
$$

Portanto, levando em conta a hipótese sobre f_t, resulta

$$
\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|u_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \leq c. \tag{3.50}
$$

Agora, derivando (1.20) com respeito a t, temos

$$
\begin{aligned}
j w_{tt}^k \;&=\; -\gamma B w_t^k + (\alpha+\beta)\nabla \operatorname{div} w_t^k - jR_k(u_t^k\cdot\nabla w^k) - jR_k(u^k\cdot\nabla w_t^k)\\
&\quad -2\chi w_t^k + \chi R_k \operatorname{rot} u_t^k + R_k g_t.
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

Para o lado direito de (3.51), têm-se:

$$\begin{aligned}
\|\gamma B w_t^k\|_{H^{-1}} &= \gamma \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(Bw_t^k, v)| = \gamma \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(\nabla w_t^k, \nabla v)| \le c\,\|\nabla w_t^k\|,\\
\|(\alpha+\beta)\nabla \mathrm{div}\, w_t^k\|_{H^{-1}} &= (\alpha+\beta) \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(\mathrm{div}\, w_t^k, \mathrm{div}\, v)|\\
&\le c \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} \|\nabla w_t^k\|\|\nabla v\| \le c\,\|\nabla w_t^k\|,\\
\|jR_k(u_t^k\cdot\nabla w^k)\|_{H^{-1}} &= j \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(u_t^k\cdot\nabla w^k, R_k v)| \le c \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} \|u_t^k\|_{L^4}\|\nabla w^k\|\|v\|_{L^4}\\
&\le c\,\|\nabla u_t^k\|\|\nabla w^k\|,\\
\|jR_k(u^k\cdot\nabla w_t^k)\|_{H^{-1}} &= j \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(u^k\cdot\nabla w_t^k, R_k v)| \le c\,\|\nabla u^k\|\|\nabla w_t^k\|,\\
\|2\chi w_t^k\|_{H^{-1}} &= 2\chi \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(w_t^k, v)| \le c\,\|w_t^k\| \le c\,\|\nabla w_t^k\|,\\
\|\chi R_k \mathrm{rot}\, u_t^k\|_{H^{-1}} &= \chi \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(\mathrm{rot}\, u_t^k, R_k v)| \le c\,\|\nabla u_t^k\|,\\
\|R_k g_t\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\le 1} |(g_t, R_k v)| \le c\,\|g_t\|,
\end{aligned}$$

levando estas estimativas em (3.51), obtemos

$$j\|w_{tt}^k\|_{H^{-1}} \le c\|\nabla u_t^k\| + c\|\nabla w_t^k\| + c\|\nabla u_t^k\|\|\nabla w^k\| + c\|\nabla u^k\|\|\nabla w_t^k\| + c\|g_t\|, \tag{3.52}$$

logo, observando (3.11) e elevando ao quadrado a desigualdade (3.52), tem-se

$$\|w_{tt}^k\|_{H^{-1}}^2 \le c\|\nabla u_t^k\|^2 + c\|\nabla w_t^k\|^2 + c\|g_t\|^2.$$

Multiplicando por $e^{\theta t}$ e integrando de 0 a t, temos

$$\int_0^t e^{\theta\tau}\|w_{tt}^k(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau \le c\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\tau)\|^2)d\tau + c\sup_{t\ge 0}\|g_t(t)\|^2\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau,$$

logo, multiplicando por $e^{-\theta t}$ para todo $t\ge 0$ e observando (3.41), vem

$$e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|w_{tt}^k(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau \le c + c\,(\sup_{t\ge 0}\|g_t(t)\|^2)e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau.$$

Assim, lembrando a hipótese sobre g_t, resulta

$$\sup_{t\ge 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|w_{tt}^k(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau \le c. \tag{3.53}$$

Também, derivando (1.21) com respeito a t, tem-se

$$b_{tt}^k = P_k(b_t^k \cdot \nabla u^k) + P_k(b^k \cdot \nabla u_t^k) - P_k(u_t^k \cdot \nabla b^k) - P_k(u^k \cdot \nabla b_t^k) - \nu A b_t^k. \tag{3.54}$$

Então, analogamente como para (3.48), tem-se

$$\|b_{tt}^k\|_{V^*} \leq c\,\|\nabla b_t^k\|\|\nabla u^k\| + c\,\|\nabla b^k\|\|\nabla u_t^k\| + c\,\|\nabla b_t^k\|. \tag{3.55}$$

Assim, observando (3.11), obtem-se

$$\|b_{tt}^k\|_{V^*}^2 \leq c\,\|\nabla b_t^k\|^2 + c\,\|\nabla u_t^k\|^2.$$

Logo, para qualquer $\theta > 0$ e para todo $t \geq 0$, temos

$$e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|b_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \leq c\, e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla b_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla u_t^k(\tau)\|^2)d\tau$$

e levando em conta a estimativa (3.41), resulta

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|b_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \leq c. \tag{3.56}$$

Portanto, de (3.45) e (3.47), temos que

$$\begin{aligned}&\{u^k\}, \{b^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^\infty(0,\infty; D(A))\\ &\text{e} \ \ \{w^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; D(B)),\end{aligned}$$

de (3.40) e (3.41), resulta que

$$\begin{aligned}&\{u_t^k\}, \{b_t^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^\infty(0,\infty; H) \cap L^2_{Loc}(0,\infty; V)\\ &\text{e} \ \ \{w_t^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2_{Loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega)),\end{aligned}$$

de (3.50), (3.53) e (3.56), têm-se que

$$\begin{aligned}&\{u_{tt}^k\}, \{b_{tt}^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^2_{Loc}(0,\infty; V^*)\\ &\text{e} \ \ \{w_{tt}^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^2_{Loc}(0,\infty; H^{-1}).\end{aligned}$$

Com todas as conclusões acima, temos que a solução (u, w, b) fornecida pelo Teorema 3.1, satisfaz:

$$\begin{aligned}&u,\ b \in L^\infty(0,\infty; D(A)) \text{ e } u_t,\ b_t \in L^\infty(0,\infty; H) \cap L^2_{Loc}(0,\infty; V),\\ &w \in L^\infty(0,\infty; D(B)) \text{ e } w_t \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2_{Loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega)),\\ &u_{tt},\ b_{tt} \in L^2_{Loc}(0,\infty; V^*) \text{ e } w_{tt} \in L^2_{Loc}(0,\infty; H^{-1}).\end{aligned}$$

Além disso, como u_t, $b_t \in L^2_{loc}(0,\infty;V)$ e u_{tt}, $b_{tt} \in L^2_{loc}(0,\infty;V^*)$, usando o Lema 1.5 (Cap. 1), resulta que u_t, $b_t \in C([0,\infty);H)$; analogamente, mostra-se que $w_t \in C([0,\infty);L^2(\Omega))$. Consequentemente,

$$u,\ b \in C^1([0,\infty);H) \ \text{ e } \ w \in C^1([0,\infty);L^2(\Omega)).$$

Para finalizar a prova temos que demonstrar a continuidade de $u(t)$, $w(t)$ e $b(t)$ na norma $H^2(\Omega)$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
(\mu+\chi)Au(t) &= \chi P(\operatorname{rot} w(t)) + Pf(t) + rP(b(t)\cdot\nabla b(t)) - P(u(t)\cdot\nabla u(t)) - u_t(t)\\
&\equiv X(t).\\
\nu Ab(t) &= P(b(t)\cdot\nabla u(t)) - P(u(t)\cdot\nabla b(t)) - b_t(t) \equiv Y(t).
\end{aligned}$$

Lembrando que $w \in C([0,\infty);H^1_0(\Omega))$ tem-se $\operatorname{rot} w \in C([0,\infty);L^2(\Omega))$ e então

$$P(\operatorname{rot} w) \in C([0,\infty);H).$$

Agora, desde que f, $f_t \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$, por interpolação (Lema 1.5, Cap. 1) temos que $f \in C([0,\infty);L^2(\Omega))$ e consequentemente, $Pf \in C([0,\infty);H)$.

Também, $u \in C([0,\infty);V)$ e a estimativa $\|Au\| \le c$ implicam que o termo $u\cdot\nabla u \in C([0,\infty);L^2(\Omega))$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\cdot\nabla u(t) - u(t_0)\cdot\nabla u(t_0)\|\\
&\qquad \le \|(u(t)-u(t_0))\cdot\nabla u(t)\| + \|u(t_0)\cdot\nabla(u(t)-u(t_0))\|\\
&\qquad \le c\,\|Au(t)\|\|\nabla u(t) - \nabla u(t_0)\| + c\,\|Au(t_0)\|\|\nabla(u(t)-u(t_0)\|\\
&\qquad \le c\,\|\nabla(u(t)-u(t_0))\| \to 0,
\end{aligned}$$

quando $t \to t_0$.

Finalmente, concluimos

$$P(u\cdot\nabla u) \in C([0,\infty);H).$$

Analogamente, obtemos $P(b\cdot\nabla b) \in C([0,\infty);H)$, e desde que $u_t \in C([0,\infty);H)$, concluimos que $X \in C([0,\infty);H)$. Consequentemente, $Au \in C([0,\infty);H)$, isto implica que $u \in C([0,\infty);D(A))$. Analogamente, provamos a continuidade de w e b.

3.2 Resultados sobre a pressão

De um modo usual podemos obter informação sobre a pressão. De fato, temos

Proposição 3.2 *Se as hipóteses do Teorema 3.1 são satisfeitas, então existe uma única função* $p^* \in L^2_{Loc}(0,\infty; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ *tal que tomando* $p = p^* - \frac{1}{2}rb\cdot b$ *tem-se que* (u, w, b, p) *é solução de (1.1)-(1.3) e para qualquer* $\theta > 0$, *satisfaz*

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|p(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}d\tau \leq C, \tag{3.57}$$

onde $C > 0$ *é uma constante genérica que independe de* t.

Com as hipóteses do Teorema 3.2,

$$p^* \in L^\infty(0,\infty; H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \cap C([0,\infty); L^2(\Omega)/\mathbb{R})$$

e $p = p^* - \frac{1}{2}rb\cdot b$, *satisfaz*

$$\sup_{t\geq 0}\|p(t)\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C, \tag{3.58}$$

onde $C > 0$ *é uma constante genérica que independe de* t.

Prova. Observemos que (1.1) é equivalente a

$$(\mu + \chi)Au = P(F),$$

onde $F = f + \chi \operatorname{rot} w + rb\cdot\nabla b - u\cdot\nabla u - u_t$.

Também, temos que

$$\|u\cdot\nabla u\|^2 \leq \|u\|^2_{L^4}\|\nabla u\|^2_{L^4} \leq \|\nabla u\|^2\|\nabla u\|^{1/2}\|Au\|^{3/2} \leq c\|\nabla u\|^{10} + c\|Au\|^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}\|F\|^2 &\leq c\|f\|^2 + c\|\nabla w\|^2 + c\|b\cdot\nabla b\|^2 + c\|u\cdot\nabla u\|^2 + c\|u_t\|^2\\ &\leq c\sup_{t\geq 0}(\|f\|^2 + \|\nabla w\|^2 + \|\nabla b\|^{10} + \|\nabla u\|^{10}) + c\|Ab\|^2 + c\|Au\|^2 + c\|u_t\|^2.\end{aligned}$$

Agora, observemos que com as hipóteses do Teorema 3.1 (respectivamente do Teorema 3.2), temos $F \in L^2_{Loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$ (respectivamente $F \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$).

Portanto, os resultados de Amrouche e Girault [3], implicam que existe uma única $p^* \in L^2_{Loc}(0,\infty; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ (respectivamente, $p^* \in L^\infty(0,\infty; H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \cap C([0,\infty); L^2(\Omega)/\mathbb{R})$) tal que

$$\begin{aligned}-(\mu+\chi)\Delta u + \nabla p^* &= F,\\ \operatorname{div} u &= 0,\\ u|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

e $\|p^*\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c\|F\|^2$.

Logo, com as hipóteses do Teorema 3.1, para todo $\theta > 0$, temos

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta\tau}\|p^*(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}d\tau \leq c, \tag{3.59}$$

e com as hipóteses do Teorema 3.2,

$$\sup_{t\geq 0}\|p^*(t)\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c. \tag{3.60}$$

Agora, consideramos $p = p^* - \frac{r}{2}b\cdot b$ e observemos que

$$\begin{aligned}
\|b\cdot b\|^2_{H^1} &\leq \|b\cdot b\|^2 + \|\nabla(b\cdot b)\|^2 \leq \|b\|^4_{L^4} + c\|b\cdot(\nabla b)^t\|^2 \\
&\leq c\,\|\nabla b\|^4 + c\,\|b\|^2_{L^4}\|\nabla b\|^2_{L^4} \leq c\,\|\nabla b\|^4 + c\,\|\nabla b\|^2\|\nabla b\|^{1/2}\|Ab\|^{3/2} \\
&\leq c\,\|\nabla b\|^4 + c\,\|\nabla b\|^{10} + c\,\|Ab\|^2 \leq c + c\,\|Ab\|^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$\|p\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \|p^*\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} + c\|b\cdot b\|^2_{H^1} \leq \|p^*\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} + c\,\|Ab\|^2 + c.$$

Portanto, usando (3.2) e (3.59) (respectivamente (3.31) e (3.60)), segue-se (3.57) (respectivamente (3.58)). Isto completa a prova da proposição.

3.3 Existência global da solução no caso de forças externas com decaimento exponencial

Assumindo que as forças externas decaem exponencialmente no tempo, mostraremos que as soluções de (1.1)-(1.3). possuem melhor regularidade que as obtidas em Teorema 3.1 e Teorema 3.2.

3.3.1 Existência e unicidade da solução

Um análogo ao Teorema 3.1, é o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Com as hipóteses do Teorema 3.1, assumimos que para alguma constante* $\overline{\gamma} > 0$, $e^{\overline{\gamma}t}f \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$ *e* $e^{\overline{\gamma}t}g \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$, *com* $\|e^{\overline{\gamma}t}f\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}$ *e* $\|e^{\overline{\gamma}t}g\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}$ *suficientemente pequenas. Então, a única solução global forte do problema (1.1)-(1.3) dada pelo Teorema 3.1, satisfaz*

$$u,\, b \in L^2(0,\infty;D(A)) \;\text{ e }\; w \in L^2(0,\infty;D(B)).$$

Além disso, existe uma constante positiva $\gamma^* \leq \overline{\gamma}$ tal que para qualquer $0 \leq \theta < \gamma^*$, têm-se

$$\sup_{t\geq 0} e^{\gamma^* t}(\|\nabla u(t)\|^2 + j\|\nabla w(t)\|^2 + \|\nabla b(t)\|^2) \leq C, \tag{3.61}$$

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u(\tau)\|^2 + \|\nabla w(\tau)\|^2 + \|\nabla b(\tau)\|^2)d\tau \leq C, \tag{3.62}$$

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{\theta\tau}(\|Au(\tau)\|^2 + \|Bw(\tau)\|^2 + \|Ab(\tau)\|^2)d\tau \leq C, \tag{3.63}$$

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_t(\tau)\|^2 + \|w_t(\tau)\|^2 + \|b_t(\tau)\|^2)d\tau \leq C \tag{3.64}$$

onde $C > 0$ é uma constante genérica que independe de t.

Também, as mesmas classes de estimativas são válidas uniformemente em $k \in \mathbb{N}$ para as aproximações de Galerkin.

Prova. Multiplicando a equação diferencial (3.7) por $e^{\gamma t}$ com $0 \leq \gamma \leq \overline{\gamma}$, temos

$$\frac{d}{dt}(e^{\gamma t}\xi(t)) + e^{\gamma t}\zeta(t) \leq c_3 e^{\gamma t}\xi^3(t) + c_2 e^{\gamma t}\xi(t) + \gamma e^{\gamma t}\xi(t) + ce^{\gamma t}(\|f\|^2 + \|g\|^2), \tag{3.65}$$

onde $\xi(t) = \|\nabla u^k(t)\|^2 + j\|\nabla w^k(t)\|^2 + \|\nabla b^k(t)\|^2$, $\zeta(t) = (\mu+\chi)\|Au^k(t)\|^2 + \gamma\|Bw^k(t)\|^2 + \nu\|Ab^k(t)\|^2$.

Desde que $1 \leq e^{\gamma t}$, temos que $e^{\gamma t}\xi^3(t) \leq e^{3\gamma t}\xi^3(t)$ e então,

$$\frac{d}{dt}(e^{\gamma t}\xi(t)) + e^{\gamma t}\zeta(t) \leq c_3 e^{3\gamma t}\xi^3(t) + c_2 e^{\gamma t}\xi(t) + \gamma e^{\gamma t}\xi(t) + ce^{\gamma t}(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Analogamente como para (3.9), temos que existe $c_7 > 0$ tal que $c_7\xi(t) \leq \zeta(t)$, logo,

$$\frac{d}{dt}(e^{\gamma t}\xi(t)) \leq c_3\, e^{3\gamma t}\xi^3(t) + c_2\, e^{\gamma t}\xi(t) - (c_7 - \gamma)e^{\gamma t}\xi(t) + c\; e^{\gamma t}(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Agora, escolhendo $\gamma^* = \min\{\overline{\gamma}, \frac{c_7}{2}\}$ e $\phi(t) = e^{\gamma^* t}\xi(t)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(t) &\leq c_3\,\phi^3(t) + c_2\,\phi(t) - (c_7 - \gamma^*)\phi(t) + c\; e^{\overline{\gamma}t}(\|f\|^2 + \|g\|^2) \\ &\leq c_3\,\phi^3(t) + c_2\,\phi(t) - \overline{c}_7\phi(t) + c_1, \\ \phi(0) &= \xi(0) \end{aligned}$$

onde $\overline{c}_7 = \frac{c_7}{2}$ (pela escolha de γ^*) e $c_1 = c\, \sup_{t\geq 0} e^{\overline{\gamma}t}(\|f(t)\|^2 + \|g(t)\|^2)$ é suficientemente pequena.

Assim, na última desigualdade diferencial, fazendo um análise similar como para (3.10), podemos concluir que existe uma constante $C > 0$ tal que $\sup_{t\geq 0} \phi(t) \leq C$. Isto é,

$$\sup_{t\geq 0} e^{\gamma^* t}(\|\nabla u^k(t)\|^2 + j\|\nabla w^k(t)\|^2 + \|\nabla b^k(t)\|^2) \leq C. \tag{3.66}$$

A seguir, multiplicando (3.26) por $e^{\theta t}$, com $0 \leq \theta < \gamma^* \leq \overline{\gamma}$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e^{\theta t}(\|u^k\|^2 + j\|w^k\|^2 + r\|b^k\|^2)) + e^{\theta t}((\mu+\chi)\|\nabla u^k\|^2 + \gamma\|\nabla w^k\|^2 + 2r\nu\|\nabla b^k\|^2) \\
&\quad \leq \theta\, e^{\theta t}(\|u^k\|^2 + j\|w^k\|^2 + r\|b^k\|^2) + c\, e^{\theta t}(\|f\|^2 + \|g\|^2) \\
&\quad \leq C_\Omega \theta\, e^{\gamma^* t}(\|\nabla u^k\|^2 + j\|\nabla w^k\|^2 + r\|\nabla b^k\|^2)\, e^{(\theta-\gamma^*)t} \\
&\qquad + c \sup_{t\geq 0}\{e^{\overline{\gamma} t}(\|f(t)\|^2 + \|g(t)\|^2)\}\, e^{(\theta-\overline{\gamma})t}.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t e logo considerando o $\min\{1, j, r, \mu+\chi, \gamma, 2r\nu\}$, temos

$$\begin{aligned}
&e^{\theta t}(\|u^k(t)\|^2 + \|w^k(t)\|^2 + \|b^k(t)\|^2) \\
&\quad + \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\qquad \leq c \sup_{t\geq 0}\{e^{\gamma^* t}(\|\nabla u^k\|^2 + j\|\nabla w^k\|^2 + r\|\nabla b^k\|^2)\} \int_0^t e^{(\theta-\gamma^*)\tau} d\tau \\
&\qquad\quad + c \sup_{t\geq 0}\{e^{\overline{\gamma} t}(\|f(t)\|^2 + \|g(t)\|^2)\} \int_0^t e^{(\theta-\overline{\gamma})\tau} d\tau + c\,(\|u_0\|^2 + j\|w_0\|^2 + r\|b_0\|^2).
\end{aligned}$$

Assim, observando (3.66), o fato que $\theta - \overline{\gamma} < 0$ e as hipóteses sobre f e g, concluimos

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau \leq C. \tag{3.67}$$

Considerando (3.65) com $0 \leq \gamma = \theta < \gamma^* \leq \overline{\gamma}$, e integrando de 0 a t, resulta

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\theta\tau}(\|Au^k(\tau)\|^2 + \|Bw^k(\tau)\|^2 + \|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\quad \leq c\, M^2 \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + j\|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\qquad + c\,(1+\theta) \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + j\|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\qquad + c_1 \int_0^t e^{(\theta-\overline{\gamma})\tau} d\tau + c\,(\|\nabla u_0\|^2 + j\|\nabla w_0\|^2 + \|\nabla b_0\|^2) \\
&\quad \leq c \int_0^t e^{(\theta-\gamma^*)\tau} e^{\gamma^*\tau}(\|\nabla u^k(\tau)\|^2 + j\|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\qquad + c_1 \int_0^t e^{(\theta-\overline{\gamma})\tau} d\tau + c\,(\|\nabla u_0\|^2 + j\|\nabla w_0\|^2 + \|\nabla b_0\|^2)
\end{aligned}$$

onde M vem de (3.1) e $c_1 = c\sup_{t\geq 0}(\|f(t)\| + \|g(t)\|)\sup_{t\geq 0}\{e^{\overline{\gamma}t}(\|f(t)\| + \|g(t)\|)\}$.

Portanto, observando (3.66), o fato que $\theta - \overline{\gamma} < 0$ e $\theta - \gamma^* < 0$, conclui-se

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|Au^k(\tau)\|^2 + \|Bw^k(\tau)\|^2 + \|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau \leq C. \tag{3.68}$$

Agora, multiplicando (3.19) por $e^{\theta t}$ $(0 \leq \theta < \gamma^* \leq \overline{\gamma})$ e integrando de 0 a t, vem

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_t^k(\tau)\|^2 + j\|w_t^k(\tau)\|^2 + \|b_t^k(\tau)\|^2)d\tau + (\alpha+\beta)e^{\theta t}\|\operatorname{div} w^k(t)\|^2 \\
&\quad\leq c\,\|\operatorname{div} w_0\|^2 + c\,\theta\int_0^t e^{\theta\tau}\|\operatorname{div} w^k(\tau)\|^2 d\tau + c\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla w^k(\tau)\|^2 + \|\nabla u^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\quad\quad + c\int_0^t e^{\theta\tau}(\|Au^k(\tau)\|^2 + \|Bw^k(\tau)\|^2 + \|Ab^k(\tau)\|^2)d\tau + c_1\int_0^t e^{(\theta-\overline{\gamma})\tau}d\tau.
\end{aligned}$$

Assim, desde que $\|\operatorname{div} w\| \leq c\|\nabla w\|$ e $\theta - \overline{\gamma} < 0$, levando em conta (3.67) e (3.68), obtem-se

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_t^k(\tau)\|^2 + \|w_t^k(\tau)\|^2 + \|b_t^k(\tau)\|^2)d\tau \leq C. \tag{3.69}$$

De (3.66) e (3.68), temos que

$$\begin{aligned}
&\{u^k\},\ \{b^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,\infty;V)\cap L^2(0,\infty;D(A)) \\
&\text{e } \{w^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,\infty;D(B)).
\end{aligned}$$

Também, de (3.69) conclui-se que

$$\begin{aligned}
&\{u_t^k\},\ \{b_t^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^2(0,\infty;H) \\
&\text{e } \{w_t^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,\infty;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Então, existem $u,\, b \in L^\infty(0,\infty;V)\cap L^2(0,\infty;D(A))$ e $w \in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,\infty;D(B))$, tais que quando $k \longrightarrow \infty$, têm-se

$$\begin{aligned}
&u^k \longrightarrow u \text{ e } b^k \longrightarrow b \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,\infty;V), \\
&u^k \longrightarrow u \text{ e } b^k \longrightarrow b \text{ fraco em } L^2(0,\infty;D(A)), \\
&u_t^k \longrightarrow u_t \text{ e } b_t^k \longrightarrow b_t \text{ fraco em } L^2(0,\infty;H), \\
&w^k \longrightarrow w \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)), \\
&w^k \longrightarrow w \text{ fraco em } L^2(0,\infty;D(B)), \\
&w_t^k \longrightarrow w_t \text{ fraco em } L^2(0,\infty;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Assim, usando o Lema de Aubin-Lions (Lema 1.4 do Cap.1) com $B_0 = D(A)$, $p_0 = 2$, $B_1 = H$, $P_1 = 2$ e $B = V$, temos que

$$u^k \longrightarrow u \text{ e } b^k \longrightarrow b \text{ forte em } L^2_{Loc}(0,\infty;V).$$

Analogamente, podemos concluir que $w^k \longrightarrow w$ forte em $L^2_{loc}(0, \infty; H_0^1(\Omega))$.

Também, usando o Lema 1.5 (Cap. 1) deduz-se que

$$u,\ b \in C([0, \infty); V) \ \text{ e } \ w \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega)).$$

Então, passando ao limite de modo usual em (1.23)-(1.25) (ver [40], [22]), conclui-se que (u, w, b) é uma solução forte do problema (1.1)-(1.3), satisfazendo

$$\begin{aligned}
&u,\ b \in L^\infty(0, \infty; V) \cap L^2(0, \infty; D(A)) \cap C([0, \infty); V),\\
&w \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; D(B)) \cap C([0, \infty); H_0^1(\Omega)),\\
&u_t,\ b_t \in L^2(0, \infty; H) \ \text{ e } \ w_t \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Finalmente, as estimativas dadas no teorema, são obtidas tomando o limite quando $k \longrightarrow \infty$ nas desigualdades (3.66)-(3.69) respectivamente.

3.3.2 Mais regularidade da solução

Assumindo mais regularidade sobre os dados, análogo ao Teorema 3.2, temos:

Teorema 3.4 *Além das hipóteses dos Teoremas 3.2 e 3.3, assumimos que $e^{\overline{\gamma}t} f_t$, $e^{\overline{\gamma}t} g_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$. Então, a única solução global forte (u, w, b) dada pelo Teorema 3.2, para os mesmos γ^* e θ do Teorema 3.3, satisfaz as seguintes estimativas*

$$\sup_{t\geq 0} e^{\theta t}(\|u_t(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + \|b_t(t)\|^2) \leq C, \tag{3.70}$$

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t(\tau)\|^2) d\tau \leq C, \tag{3.71}$$

$$\sup_{t\geq 0} e^{\theta t}(\|Au(t)\|^2 + \|Bw(t)\|^2 + \|Ab(t)\|^2) \leq C, \tag{3.72}$$

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_{tt}(\tau)\|^2_{V^*} + \|w_{tt}(\tau)\|^2_{H^{-1}} + \|b_{tt}(\tau)\|^2_{V^*}) d\tau \leq C, \tag{3.73}$$

$$\sup_{t\geq 0} \sigma(t)(\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\nabla w_t(t)\|^2 + \|\nabla b_t(t)\|^2) \leq C, \tag{3.74}$$

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t \sigma(\tau)(\|u_{tt}(\tau)\|^2 + \|w_{tt}(\tau)\|^2 + \|b_{tt}(\tau)\|^2) d\tau \leq C, \tag{3.75}$$

onde $\sigma(t) = \min\{1, t\}\, e^{\theta t}$ e $C > 0$ é uma constante genérica que independe de t.

Também, as mesmas classes de estimativas são válidas uniformemente em $k \in I\!N$ para as aproximações de Galerkin.

Prova. Multiplicando (3.38) por $e^{\theta t}$ $(0 \leq \theta < \gamma^* \leq \overline{\gamma})$, vem

$$\frac{d}{dt}(e^{\theta t}(\|u_t^k\|^2 + j\|w_t^k\|^2 + r\|b_t^k\|^2)) + e^{\theta t}((\mu+\chi)\|\nabla u_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla w_t^k\|^2 + r\nu\|\nabla b_t^k\|^2)$$
$$\leq (c(M) + c\,\theta)\, e^{\theta t}(\|u_t^k\|^2 + \|w_t^k\|^2 + \|b_t^k\|^2) + c\, e^{\overline{\gamma}t}(\|f_t\|^2 + \|g_t\|^2)\, e^{(\theta-\overline{\gamma})t}$$
$$\leq c\, e^{\theta t}(\|u_t^k\|^2 + \|w_t^k\|^2 + \|b_t^k\|^2) + c\, \sup_{t\geq 0}\{e^{\overline{\gamma}t}(\|f_t\|^2 + \|g_t\|^2)\}\, e^{(\theta-\overline{\gamma})t}.$$

Logo, integrando de 0 a t, observando (3.69), considerando o $\min\{1, j, r, \mu+\chi, \gamma, r\nu\}$ e as hipóteses sobre f_t e g_t, obtem-se

$$e^{\theta t}(\|u_t^k\|^2 + \|w_t^k\|^2 + \|b_t^k\|^2) + \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\tau)\|^2)d\tau$$
$$\leq c + c_2 \int_0^t e^{(\theta-\overline{\gamma})\tau} d\tau + c\,(\|u_t^k(0)\|^2 + j\|w_t^k(0)\|^2 + r\|b_t^k(0)\|^2), \tag{3.76}$$

onde $c_2 = c\,\sup_{t\geq 0}(\|f_t(t)\| + \|g_t(t)\|)\sup_{t\geq 0}\{e^{\overline{\gamma}t}(\|f_t(t)\| + \|g_t(t)\|)\}$. Mas, similarmente como para (3.39), tem-se $\|u_t^k(0)\|^2 + j\|w_t^k(0)\|^2 + r\|b_t^k(0)\|^2 \leq c$, então de (3.76), conclui-se que

$$\sup_{t\geq 0} e^{\theta t}(\|u_t^k(t)\|^2 + \|w_t^k(t)\|^2 + \|b_t^k(t)\|^2) \leq C \tag{3.77}$$

$$\text{e} \quad \sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\tau)\|^2)d\tau \leq C \tag{3.78}$$

desde que $\theta - \overline{\gamma} < 0$.

Agora, somando (3.44) e (3.46), temos

$$\|Au^k\|^2 + \|Ab^k\|^2 + \|Bw^k\|^2 \leq c\,(1 + \|Au^k\|^2)\|\nabla w^k\|^2 + c\,(\|u_t^k\|^2 + \|w_t^k\|^2 + \|b_t^k\|^2)$$
$$+ c\,(\|\nabla u^k\|^8 + \|\nabla b^k\|^8)(\|\nabla u^k\|^2 + \|\nabla b^k\|^2) + c\,(\|f\|^2 + \|g\|^2),$$

logo, multiplicando por $e^{\theta t}$ $(0 \leq \theta < \gamma^* \leq \overline{\gamma})$, resulta

$$e^{\theta t}(\|Au^k\|^2 + \|Ab^k\|^2 + \|Bw^k\|^2)$$
$$\leq c\,\sup_{t\geq 0}\{1 + \|Au^k\|^2\}\, e^{\theta t}\|\nabla w^k\|^2 + c\, e^{\theta t}(\|u_t^k\|^2 + \|w_t^k\|^2 + \|b_t^k\|^2)$$
$$+ c\,(\sup_{t\geq 0}\{\|\nabla u^k\|^2 + \|\nabla b^k\|^2\})^4\, e^{\theta t}(\|\nabla u^k\|^2 + \|\nabla b^k\|^2)$$
$$+ c\,\sup_{t\geq 0}(\|f(t)\| + \|g(t)\|)\,\sup_{t\geq 0}\{e^{\overline{\gamma}t}(\|f\| + \|g\|)\}\, e^{(\theta-\overline{\gamma})t}.$$

Portanto, de (3.11), (3.45), (3.66), (3,77), as hipóteses sobre f e g, concluimos que

$$\sup_{t\geq 0} e^{\theta t}(\,\|Au^k\|^2 + \|Bw^k\|^2 + \|Ab^k\|^2\,) \leq C \tag{3.79}$$

desde que $\theta - \overline{\gamma} < 0$.

Agora, de (3.49), (3.52) e (3.55), levando em conta (3.61), vem

$$\begin{aligned}
\|u_{tt}^k\|_{V^*}^2 &\leq c\|\nabla w_t^k\|^2 + c\|\nabla b_t^k\|^2 + c\|\nabla u_t^k\|^2 + c\|f_t\|^2, \\
\|w_{tt}^k\|_{H^{-1}}^2 &\leq c\|\nabla u_t^k\|^2 + c\|\nabla w_t^k\|^2 + c\|g_t\|^2, \\
\|b_{tt}^k\|_{V^*}^2 &\leq c\|\nabla b_t^k\|^2 + c\|\nabla u_t^k\|^2.
\end{aligned}$$

Então, somando as desigualdades acima, multiplicando por $e^{\theta t}$ para todo $t \geq 0$ e integrando de 0 a t, tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2 + \|w_{tt}^k(\tau)\|_{H^{-1}}^2 + \|b_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2)d\tau \\
&\leq \int_0^t e^{\theta\tau}(\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2)d\tau + c\sup_{t\geq 0}\{e^{\overline{\gamma}t}(\|f_t\|^2 + \|g_t\|^2)\}\int_0^t e^{(\theta-\overline{\gamma})\tau}d\tau.
\end{aligned}$$

Logo, das hipóteses sobre f_t e g_t, do fato que $\theta - \overline{\gamma} < 0$ e da estimativa (3.78), conclui-se

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{\theta\tau}(\|u_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2 + \|w_{tt}^k(\tau)\|_{H^{-1}}^2 + \|b_{tt}^k(\tau)\|_{V^*}^2)d\tau \leq C. \tag{3.80}$$

A seguir, tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$ de (3.48) com u_{tt}^k, de (3.51) com w_{tt}^k e de (3.54) com b_{tt}^k, temos

$$\begin{aligned}
\|u_{tt}^k\|^2 + \frac{\mu+\chi}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t^k\|^2 &= \chi(\operatorname{rot} w_t^k, u_{tt}^k) + r(b_t^k \cdot \nabla b^k, u_{tt}^k) + r(b^k \cdot \nabla b_t^k, u_{tt}^k) \\
&\quad -(u_t^k \cdot \nabla u^k, u_{tt}^k) - (u^k \cdot \nabla u_t^k, u_{tt}^k) + (f_t, u_{tt}^k), \\
j\|w_{tt}^k\|^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_t^k\|^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} w_t^k\|^2 &= \chi(\operatorname{rot} u_t^k, u_{tt}^k) - 2\chi(w_t^k, u_{tt}^k) \\
&\quad -j(u_t^k \cdot \nabla w^k, u_{tt}^k) - j(u^k \cdot \nabla w_t^k, u_{tt}^k) + (g_t, u_{tt}^k), \\
\|b_{tt}^k\|^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla b_t^k\|^2 &= (b_t^k \cdot \nabla u^k, b_{tt}^k) + (b^k \cdot \nabla u_t^k, b_{tt}^k) - (u_t^k \cdot \nabla b^k, b_{tt}^k) - (u^k \cdot \nabla b_t^k, b_{tt}^k).
\end{aligned}$$

Somando as últimas identidades e usando as desigualdades de Hölder e Young, resulta

$$\begin{aligned}
&\|u_{tt}^k\|^2 + j\|w_{tt}^k\|^2 + \|b_{tt}^k\|^2 + \frac{\mu+\chi}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t^k\|^2 \\
&+\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_t^k\|^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla b_t^k\|^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} w_t^k\|^2 \\
&\quad \leq C_\varepsilon\|\nabla w_t^k\|^2 + C_\varepsilon\|b_t^k \cdot \nabla b^k\|^2 + C_\varepsilon\|b^k \cdot \nabla b_t^k\|^2 + C_\varepsilon\|u_t^k \cdot \nabla u^k\|^2 + C_\varepsilon\|u^k \cdot \nabla u_t^k\|^2 \\
&\quad +C_\varepsilon\|f_t\|^2 + C_\delta\|\nabla u_t^k\|^2 + C_\delta\|\nabla w_t^k\|^2 + C_\delta\|u_t^k \cdot \nabla w^k\|^2 + C_\delta\|u^k \cdot \nabla w_t^k\|^2 \\
&\quad +C_\delta\|g_t\|^2 + C_\xi\|b_t^k \cdot \nabla u^k\|^2 + C_\xi\|b^k \cdot \nabla u_t^k\|^2 + C_\xi\|u_t^k \cdot \nabla b^k\|^2 \\
&\quad +C_\xi\|u^k \cdot \nabla b_t^k\|^2 + 6\varepsilon\|u_{tt}^k\|^2 + 5\delta\|w_{tt}^k\|^2 + 4\xi\|b_{tt}^k\|^2.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
\|b_t^k \cdot \nabla b^k\|^2 &\le \|b_t^k\|_{L^4}^2 \|\nabla b^k\|_{L^4}^2 \le c\,\|\nabla b_t^k\|^2 \|Ab^k\|^2,\\
\|b^k \cdot \nabla b_t^k\|^2 &\le \|b^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla b_t^k\|^2 \le c\,\|Ab^k\|^2 \|\nabla b_t^k\|^2,\\
\|u_t^k \cdot \nabla w^k\|^2 &\le \|u_t^k\|_{L^4}^2 \|\nabla w^k\|_{L^4}^2 \le c\,\|\nabla u_t^k\|^2 \|Bw^k\|^2,\\
\|u^k \cdot \nabla w_t^k\|^2 &\le \|u^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla w_t^k\|^2 \le c\,\|Au^k\|^2 \|\nabla w_t^k\|^2,\\
\|b_t^k \cdot \nabla u^k\|^2 &\le \|b_t^k\|_{L^4}^2 \|\nabla u^k\|_{L^4}^2 \le c\,\|\nabla b_t^k\|^2 \|Au^k\|^2,\\
\|b^k \cdot \nabla u_t^k\|^2 &\le \|b^k\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u_t^k\|^2 \le c\,\|Ab^k\|^2 \|\nabla u_t^k\|^2,
\end{aligned}$$

desde que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Então, escolhendo $\varepsilon = \dfrac{1}{12}$, $\delta = \dfrac{j}{10}$ e $\xi = \dfrac{1}{8}$, usando as estimativas anteriores e (3.31), de (3.81) obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u_{tt}^k\|^2 + j\|w_{tt}^k\|^2 + \|b_{tt}^k\|^2 + \frac{d}{dt}((\mu+\chi)\|\nabla u_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla w_t^k\|^2 + \nu\|\nabla b_t^k\|^2)\\
&\quad +(\alpha+\beta)\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} w_t^k\|^2 \le c\,(\|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2 + \|\nabla u_t^k\|^2) + c\,(\|f_t\|^2 + \|g_t\|^2).
\end{aligned}$$

Logo, multiplicando por $\sigma(t) = \min\{1,t\}\, e^{\theta t}$ $(0 \le \theta < \gamma^* \le \overline{\gamma})$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\sigma(t)(\|u_{tt}^k\|^2 + j\|w_{tt}^k\|^2 + \|b_{tt}^k\|^2) + \frac{d}{dt}(\sigma(t)\,((\mu+\chi)\|\nabla u_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla w_t^k\|^2 + \nu\|\nabla b_t^k\|^2))\\
&\quad +(\alpha+\beta)\frac{d}{dt}(\sigma(t)\|\operatorname{div} w_t^k\|^2) \le c\,\sigma'(t)(\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2 + \|\operatorname{div} w_t^k\|^2)\\
&\qquad +c\,\sigma(t)\,(\|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2 + \|\nabla u_t^k\|^2) + c\,\sigma(t)\,(\|f_t\|^2 + \|g_t\|^2)
\end{aligned}$$

desde que $\sigma(t)\dfrac{d}{dt}\varphi(t) + \sigma'(t)\varphi(t) = \dfrac{d}{dt}(\sigma(t)\,\varphi(t))$ quase sempre.

Observemos que $\sigma(t) \le e^{\theta t}$ e $\sigma'(t) \le (1+\theta)e^{\theta t}$ quase sempre para todo $t \ge 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&\sigma(t)(\|u_{tt}^k\|^2 + j\|w_{tt}^k\|^2 + \|b_{tt}^k\|^2) + \frac{d}{dt}(\sigma(t)\,((\mu+\chi)\|\nabla u_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla w_t^k\|^2 + \nu\|\nabla b_t^k\|^2))\\
&\quad +(\alpha+\beta)\frac{d}{dt}(\sigma(t)\|\operatorname{div} w_t^k\|^2)\\
&\qquad \le c\,e^{\theta t}\,(\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2) + c\,e^{\theta t}\,(\|f_t\|^2 + \|g_t\|^2)\\
&\qquad \le c\,e^{\theta t}\,(\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2) + c\,\{\sup_{t\ge 0} e^{\overline{\gamma} t}\,(\|f_t\|^2 + \|g_t\|^2)\}\, e^{(\theta-\overline{\gamma})t}.
\end{aligned}$$

Integrando no tempo de $\varepsilon > 0$ a t e logo considerando o $\min\{1, j, \mu+\chi, \gamma, \nu\}$, vem

$$\int_\varepsilon^t \sigma(\tau)(\|u_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|w_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|b_{tt}^k(\tau)\|^2)d\tau + \sigma(t)\,(\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2)$$

$$\leq c\,\sigma(\varepsilon)\,(\|\nabla u_t^k(\varepsilon)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\varepsilon)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\varepsilon)\|^2) + c\,\sigma(\varepsilon)\,\|\mathrm{div}\, w_t^k(\varepsilon)\|^2$$
$$+c\int_\varepsilon^t e^{\theta\tau}\,(\|\nabla w_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla u_t^k(\tau)\|^2)d\tau + c_3\int_\varepsilon^t e^{(\theta-\overline{\gamma})\tau}d\tau$$

onde $c_3 = c\,\sup\limits_{t\geq 0}(\|f_t\| + \|g_t\|)\,\{\sup\limits_{t\geq 0} e^{\overline{\gamma}t}\,(\|f_t\| + \|g_t\|)\}$.

Agora, observando (3.78) e o fato que $\theta - \overline{\gamma} < 0$, temos

$$\int_\varepsilon^t \sigma(\tau)(\|u_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|w_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|b_{tt}^k(\tau)\|^2)d\tau + \sigma(t)\,(\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2)$$
$$\leq c\,\sigma(\varepsilon)\,(\|\nabla u_t^k(\varepsilon)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\varepsilon)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\varepsilon)\|^2) + c. \tag{3.82}$$

Também de (3.78), temos que existem sequências $\varepsilon_n \longrightarrow 0^+$, tal que

$$\varepsilon_n\,[\,e^{\theta\varepsilon_n}\,(\|\nabla u_t^k(\varepsilon_n)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\varepsilon_n)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\varepsilon_n)\|^2)\,] \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Então, tomando $\varepsilon_n \longrightarrow 0^+$ (ε_n sequência conveniente) em (3.82), vem

$$\int_0^t \sigma(\tau)(\|u_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|w_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|b_{tt}^k(\tau)\|^2)d\tau + \sigma(t)\,(\|\nabla u_t^k\|^2 + \|\nabla w_t^k\|^2 + \|\nabla b_t^k\|^2)$$
$$\leq c\lim_{\varepsilon_n\longrightarrow 0^+}\sigma(\varepsilon_n)\,(\|\nabla u_t^k(\varepsilon_n)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\varepsilon_n)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\varepsilon_n)\|^2)\; + \; c$$
$$\leq c\lim_{\varepsilon_n\longrightarrow 0^+}\varepsilon_n\, e^{\theta\,\varepsilon_n}\,(\|\nabla u_t^k(\varepsilon_n)\|^2 + \|\nabla w_t^k(\varepsilon_n)\|^2 + \|\nabla b_t^k(\varepsilon_n)\|^2)\; + \; c \leq C.$$

Logo, a desigualdade acima, implica que

$$\sup_{t\geq 0}\sigma(t)\,(\|\nabla u_t^k(t)\|^2 + \|\nabla w_t^k(t)\|^2 + \|\nabla b_t^k(t)\|^2) \leq C \tag{3.83}$$
$$\text{e}\quad \sup_{t\geq 0}\int_0^t \sigma(\tau)(\|u_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|w_{tt}^k(\tau)\|^2 + \|b_{tt}^k(\tau)\|^2)d\tau \leq C. \tag{3.84}$$

Assim, de (3.79) deduzimos que

$$\{u^k\},\ \{b^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^\infty(0,\infty;D(A))$$
$$\text{e}\ \ \{w^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;D(B)),$$

de (3.77) e (3.78), conclui-se que

$$\{u_t^k\},\ \{b_t^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^\infty(0,\infty;H)\cap L^2(0,\infty;V)$$
$$\text{e}\ \ \{w_t^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))\cap L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)),$$

de (3.80), obtêm-se que

$$\{u_{tt}^k\},\ \{b_{tt}^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^2(0,\infty;V^*)$$
$$\text{e}\ \ \{w_{tt}^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^2(0,\infty;H^{-1}),$$

de (3.83) e (3.84), $\forall \varepsilon > 0$, têm-se que

$$\begin{aligned}
&\{u_t^k\},\ \{b_t^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^\infty([\varepsilon,\infty); V), \\
&\{w_t^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^\infty([\varepsilon,\infty); H_0^1(\Omega)), \\
&\{u_{tt}^k\},\ \{b_{tt}^k\} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad L^2([\varepsilon,\infty); H) \\
&\text{e} \ \{w_{tt}^k\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^2([\varepsilon,\infty); L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Então, com estas conclusões, temos que a solução (u, w, b) dada pelo Teorema 3.3, satisfaz:

$$\begin{aligned}
&u,\ b \in L^\infty(0,\infty; D(A)), \quad w \in L^\infty(0,\infty; D(B)), \\
&u_t,\ b_t \in L^\infty(0,\infty; H) \cap L^2(0,\infty; V) \cap L^\infty([\varepsilon,\infty); V),\ \forall \varepsilon > 0, \\
&w_t \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty([\varepsilon,\infty); H_0^1(\Omega)),\ \forall \varepsilon > 0, \\
&u_{tt},\ b_{tt} \in L^2(0,\infty; V^*) \cap L^2([\varepsilon,\infty); H),\ \forall \varepsilon > 0, \\
&\text{e} \ w_{tt} \in L^2(0,\infty; H^{-1}) \cap L^2([\varepsilon,\infty); L^2(\Omega)).\ \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Além disso, desde $u_t,\ b_t \in L^2(0,\infty; V)$ e $u_{tt},\ b_{tt} \in L^2(0,\infty; V^*)$, usando o Lema 1.5 (Cap. 1), temos que $u_t,\ b_t \in C([0,\infty); H)$. Analogamente, $w_t \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$.

Portanto,

$$u,\ b \in C^1([0,\infty); H) \quad \text{e} \quad w \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

Finalmente, as estimativas dadas no teorema, são obtidas tomando o limite quando $k \longrightarrow \infty$ nas desigualdades (3.77)-(3.79), (3.80), (3.83) e (3.84) respectivamente.

3.4 Estimativas de erro

Com as mesmas notações do Capítulo 1, consideramos $\{\varphi^i\}$ e $\{\lambda_i\}$ as autofunções e os correspondentes autovalores do Operador de Stokes A; $\{\phi^i\}$ e $\{\gamma_i\}$ as autofunções e os correspondentes autovalores do operador $L = -\gamma\Delta - (\alpha+\beta)\nabla\text{div}$; as projeções ortogonais $P_k : L^2(\Omega) \longrightarrow V^k = span\{\varphi^1, ..., \varphi^k\}$ e $R_k : L^2(\Omega) \longrightarrow H_k = span\{\phi^1, ..., \phi^k\}$.

Então, para qualquer $v \in L^2(\Omega)$, têm-se:

$$P_k v = \sum_{i=1}^{k} (v, \varphi^i)\varphi^i \quad \text{e} \quad R_k v = \sum_{i=1}^{k} (v, \phi^i)\phi^i,$$

também, para estas expansões em termos das autofunções, são obtidas as seguintes estimativas de erro (ver [31]):

Lema 3.1 *Se $v \in V$ e $w \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$\|v - P_k v\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{k+1}}\|\nabla v\|^2, \qquad \|w - R_k w\|^2 \le \frac{1}{\gamma_{k+1}}\|\nabla w\|^2.$$

Se $v \in V \cap H^2(\Omega)$ e $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então

$$\|v - P_k v\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{k+1}^2}\|Av\|^2, \qquad \|w - R_k w\|^2 \le \frac{1}{\gamma_{k+1}^2}\|Lw\|^2,$$
$$\|\nabla v - \nabla P_k v\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{k+1}}\|Av\|^2, \qquad \|\nabla w - \nabla R_k w\|^2 \le \frac{1}{\gamma_{k+1}}\|Lw\|^2.$$

Agora, sejam (u, w, b) a solução global forte do problema (1.1)-(1.3) (equivalentemente (1.14)-(1.17)) dada pelo Teorema 3.2 e (u^k, w^k, b^k) as soluções aproximadas do problema (satisfazem (1.23)-(1.26)).

Considerando as projeções ortogonais P_k e R_k, definimos

$$v^k = P_k u - u^k, \quad z^k = R_k w - w^k, \quad h^k = P_k b - b^k,$$
$$\eta^k = u - P_k u, \quad \varepsilon^k = w - R_k w, \quad \xi^k = b - P_k b.$$

Com estas variáveis temos que

$$\begin{aligned} \|u - u^k\| &\le \|u - P_k u\| + \|P_k u - u^k\| = \|\eta^k\| + \|v^k\|, \\ \|w - w^k\| &\le \|\varepsilon^k\| + \|z^k\|, \\ \|b - b^k\| &\le \|\xi^k\| + \|h^k\|. \end{aligned}$$

Logo, levando em conta Lema 3.1, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.3 *Com as hipóteses da Proposição 3.1, existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $k \in I\!N$ (suficientemente grande) e para todo $t \ge 0$, temos*

$$\int_0^t \|\eta^k(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{c}{\lambda_{k+1}^2}, \qquad \int_0^t \|\varepsilon^k(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{c}{\gamma_{k+1}^2}, \qquad \int_0^t \|\xi^k(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{c}{\lambda_{k+1}^2},$$
$$\int_0^t \|\nabla\eta^k(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{c}{\lambda_{k+1}}, \qquad \int_0^t \|\nabla\varepsilon^k(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{c}{\gamma_{k+1}}, \qquad \int_0^t \|\nabla\xi^k(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{c}{\lambda_{k+1}}.$$

Proposição 3.4 *Com as hipóteses do Teorema 3.2, existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $k \in I\!N$ (suficientemente grande) e para todo $t \ge 0$, têm-se*

$$\|\eta^k\|^2 \le \frac{c}{\lambda_{k+1}^2}, \qquad \|\varepsilon^k\|^2 \le \frac{c}{\gamma_{k+1}^2}, \qquad \|\xi^k\|^2 \le \frac{c}{\lambda_{k+1}^2},$$
$$\|\nabla\eta^k\|^2 \le \frac{c}{\lambda_{k+1}}, \qquad \|\nabla\varepsilon^k\|^2 \le \frac{c}{\gamma_{k+1}}, \qquad \|\nabla\xi^k\|^2 \le \frac{c}{\lambda_{k+1}}.$$

Proposição 3.5 *Com as hipóteses do Teorema 3.3, existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $k \in I\!N$ (suficientemente grande), $0 \leq \theta < \gamma^*$ e para todo $t \geq 0$, temos*

$$
\begin{array}{lll}
e^{\gamma^* t}\|\eta^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}}, & e^{\gamma^* t}\|\varepsilon^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\gamma_{k+1}}, & e^{\gamma^* t}\|\xi^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}}, \\
\displaystyle\int_0^t e^{\theta\tau}\|\eta^k(\tau)\|^2 d\tau \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}^2}, & \displaystyle\int_0^t e^{\theta\tau}\|\varepsilon^k(\tau)\|^2 d\tau \leq \dfrac{c}{\gamma_{k+1}^2}, & \displaystyle\int_0^t e^{\theta\tau}\|\xi^k(\tau)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}^2}, \\
\displaystyle\int_0^t e^{\theta\tau}\|\nabla\eta^k(\tau)\|^2 d\tau \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}}, & \displaystyle\int_0^t e^{\theta\tau}\|\nabla\varepsilon^k(\tau)\|^2 d\tau \leq \dfrac{c}{\gamma_{k+1}}, & \displaystyle\int_0^t e^{\theta\tau}\|\nabla\xi^k(\tau)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}}.
\end{array}
$$

Proposição 3.6 *Com as hipóteses do Teorema 3.4, existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $k \in I\!N$ (suficientemente grande), $0 \leq \theta < \gamma^*$ e para todo $t \geq 0$, têm-se*

$$
\begin{array}{lll}
e^{\theta t}\|\eta^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}^2}, & e^{\theta t}\|\varepsilon^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\gamma_{k+1}^2}, & e^{\theta t}\|\xi^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}^2}, \\
e^{\theta t}\|\nabla\eta^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}}, & e^{\theta t}\|\nabla\varepsilon^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\gamma_{k+1}}, & e^{\theta t}\|\nabla\xi^k(t)\|^2 \leq \dfrac{c}{\lambda_{k+1}}.
\end{array}
$$

Agora, com $L = -\gamma\Delta - (\alpha+\beta)\nabla\text{div}$, de (1.14)-(1.16) temos que $P_k u$, $R_k w$ e $P_k b$ satisfazem

$$
\begin{aligned}
&(P_k u_t, \varphi) + (u \cdot \nabla u, \varphi) + (\mu + \chi)(AP_k u, \varphi) = \chi(\text{rot}\, w, \varphi) + r(b \cdot \nabla b, \varphi) + (f, \varphi), && (3.85)\\
&j(R_k w_t, \phi) + (LR_k w, \phi) + j(u \cdot \nabla w, \phi) + 2\chi(R_k w, \phi) = \chi(\text{rot}\, u, \phi) + (g, \phi), && (3.86)\\
&(P_k b_t, \psi) + \nu(AP_k b, \psi) + (u \cdot \nabla b, \psi) - (b \cdot \nabla u, \psi) = 0, && (3.87)\\
&\forall\, \varphi,\ \psi \in V^k \subset V,\ \forall\, \phi \in H_k \subset H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

desde que $P_k\varphi = \varphi$, $R_k\phi = \phi$, $P_k\psi = \psi$, $P_k A = AP_k$ e $R_k L = LR_k$.

Subtraindo (1.23) de (3.85), (1.24) de (3.86) e (1.25) de (3.87), temos que v^k, z^k e h^k satisfazem

$$
\begin{aligned}
(v_t^k, \varphi) + (\mu + \chi)(Av^k, \varphi) &= \chi(\text{rot}\, \varepsilon^k, \varphi) + \chi(\text{rot}\, z^k, \varphi) - (u \cdot \nabla\eta^k, \varphi) - (u \cdot \nabla v^k, \varphi)\\
&\quad -(\eta^k \cdot \nabla u^k, \varphi) - (v^k \cdot \nabla u^k, \varphi) + r(\xi^k \cdot \nabla b, \varphi)\\
&\quad +r(h^k \cdot \nabla b, \varphi) + r(b^k \cdot \nabla\xi^k, \varphi) + r(b^k \cdot \nabla h^k, \varphi), \quad (3.88)\\
j(z_t^k, \phi) + (Lz^k, \phi) + 2\chi(z^k, \phi) &= \chi(\text{rot}\, \eta^k, \phi) + \chi(\text{rot}\, v^k, \phi) - j(\eta^k \cdot \nabla w, \phi)\\
&\quad -j(u^k \cdot \nabla z^k, \phi) - j(v^k \cdot \nabla w, \phi) - j(u^k \cdot \nabla\varepsilon^k, \phi), \quad (3.89)\\
(h_t^k, \psi) + \nu(Ah^k, \psi) &= -(\eta^k \cdot \nabla b, \psi) - (u^k \cdot \nabla h^k, \psi) - (v^k \cdot \nabla b, \psi) - (u^k \cdot \nabla\xi^k, \psi)\\
&\quad +(h^k \cdot \nabla u^k, \psi) + (\xi^k \cdot \nabla u^k, \psi) + (b \cdot \nabla\eta^k, \psi) + (b \cdot \nabla v^k, \psi), \quad (3.90)
\end{aligned}
$$

desde que $\text{rot}\,(w - w^k) = \text{rot}\,(\varepsilon^k + z^k)$.

3.4.1 Estimativa de erro na norma $L^2(\Omega)$

Lema 3.2 *Com as hipóteses do Teorema 3.2 e da Proposição 3.1, existe uma constante* $c > 0$, *independente de* $t \geq 0$ *e de* $k \in \mathbb{N}$ *(suficientemente grande), tal que*

$$\begin{aligned}&\|v^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2 \\ &+ \int_0^t (\|\nabla v^k(\tau)\|^2 + \|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla h^k(\tau)\|^2) d\tau \leq \frac{c}{\lambda_{k+1}^2} + \frac{c}{\gamma_{k+1}^2}.\end{aligned}$$

Prova. Considerando $\varphi = v^k$, $\phi = z^k$ e $\psi = h^k$ em (3.88)-(3.90) respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^k\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla v^k\|^2 &= \chi(\operatorname{rot}\varepsilon^k, v^k) + \chi(\operatorname{rot} z^k, v^k) - (u\cdot\nabla\eta^k, v^k) \\ &-(\eta^k\cdot\nabla u^k, v^k) - (v^k\cdot\nabla u^k, v^k) + r(\xi^k\cdot\nabla b, v^k) \\ &+r(h^k\cdot\nabla b, v^k) + r(b^k\cdot\nabla\xi^k, v^k) + r(b^k\cdot\nabla h^k, v^k), \quad (3.91)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|z^k\|^2 + \gamma\|\nabla z^k\|^2 + (\alpha+\beta)\|\operatorname{div} z^k\|^2 + 2\chi\|z^k\|^2 \\ &\qquad = \chi(\operatorname{rot}\eta^k, z^k) + \chi(\operatorname{rot} v^k, z^k) - j(\eta^k\cdot\nabla w, z^k) \\ &\qquad\quad -j(v^k\cdot\nabla w, z^k) - j(u^k\cdot\nabla\varepsilon^k, z^k), \qquad (3.92)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|h^k\|^2 + \nu\|\nabla h^k\|^2 &= -(\eta^k\cdot\nabla b, h^k) - (v^k\cdot\nabla b, h^k) - (u^k\cdot\nabla\xi^k, h^k) \\ &+(h^k\cdot\nabla u^k, h^k) + (\xi^k\cdot\nabla u^k, h^k) + (b\cdot\nabla\eta^k, h^k) + (b\cdot\nabla v^k, h^k). \quad (3.93)\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$|\chi(\operatorname{rot}\varepsilon^k, v^k)| = |\chi(\varepsilon^k, \operatorname{rot} v^k)| \leq C_\varepsilon\|\varepsilon^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla v^k\|^2.$$

Similarmente,

$$|\chi(\operatorname{rot} z^k, v^k)| = |\chi(z^k, \operatorname{rot} v^k)| \leq \chi\|z^k\|\|\nabla v^k\| \leq \chi\|z^k\|^2 + \frac{\chi}{4}\|\nabla v^k\|^2.$$

Das desigualdades de Hölder e Young, junto com a imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos

$$|(u\cdot\nabla\eta^k, v^k)| = |(u\cdot\nabla v^k, \eta^k)| \leq \|u\|_{L^\infty}\|\nabla v^k\|\|\eta^k\| \leq C_\varepsilon\|Au\|^2\|\eta^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla v^k\|^2.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}|(\eta^k\cdot\nabla u^k, v^k)| &\leq C_\varepsilon\|\eta^k\|^2\|Au^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla v^k\|^2, \\ |r(\xi^k\cdot\nabla b, v^k)| &\leq C_\varepsilon\|\xi^k\|^2\|Ab\|^2 + \varepsilon\|\nabla v^k\|^2, \\ |r(b^k\cdot\nabla\xi^k, v^k)| &\leq C_\varepsilon\|Ab^k\|^2\|\xi^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla v^k\|^2.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Sobolev $||\varphi||_{L^4} \leq c\,||\varphi||^{1/4}||\nabla\varphi||^{3/4}$ e as desigualdades de Hölder e Young, tem-se

$$(v^k \cdot \nabla u^k, v^k)| \leq ||v^k||^2_{L^4}||\nabla u^k|| \leq c||v^k||^{1/2}||\nabla v^k||^{3/2}||\nabla u^k|| \leq C_\varepsilon||\nabla u^k||^4||v^k||^2 + \varepsilon||\nabla v^k||^2.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
|r(h^k \cdot \nabla b, v^k)| &\leq c||h^k||_{L^4}||\nabla b||||v^k||_{L^4} \leq c||\nabla h^k||||\nabla b||||v^k||^{1/4}||\nabla v^k||^{3/4} \\
&\leq C_\sigma||\nabla b||^2||v^k||^{1/2}||\nabla v^k||^{3/2} + \sigma||\nabla h^k||^2 \\
&\leq C_{\sigma,\varepsilon}||\nabla b||^8||v^k||^2 + \varepsilon||\nabla v^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2, \\
|r(b^k \cdot \nabla h^k, v^k)| &\leq c||b^k||_{L^4}||\nabla h^k||||v^k||_{L^4} \leq c||\nabla b^k||||\nabla h^k||||v^k||^{1/4}||\nabla v^k||^{3/4} \\
&\leq C_\sigma||\nabla b^k||^2||v^k||^{1/2}||\nabla v^k||^{3/2} + \sigma||\nabla h^k||^2 \\
&\leq C_{\sigma,\varepsilon}||\nabla b^k||^8||v^k||^2 + \varepsilon||\nabla v^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
|\chi(\operatorname{rot}\eta^k, z^k)| &\leq C_\delta||\eta^k||^2 + \delta||\nabla z^k||^2, \\
|\chi(\operatorname{rot} v^k, z^k)| &\leq \chi||z^k||^2 + \frac{\chi}{4}||\nabla v^k||^2, \\
|j(\eta^k \cdot \nabla w, z^k)| &\leq C_\delta||Lw||^2||\eta^k||^2 + \delta||\nabla z^k||^2, \\
|j(v^k \cdot \nabla w, z^k)| &\leq C_{\varepsilon,\delta}||\nabla w||^8||z^k||^2 + \delta||\nabla z^k||^2 + \varepsilon||\nabla v^k||^2, \\
|j(u^k \cdot \nabla z^k, z^k)| &\leq C_\delta||Au^k||^2||z^k||^2 + \delta||\nabla z^k||^2.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
|(\eta^k \cdot \nabla b, h^k)| &\leq C_\sigma||\eta^k||^2||Ab||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2, \\
|(v^k \cdot \nabla b, h^k)| &\leq C_{\varepsilon,\sigma}||\nabla b||^8||h^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2 + \varepsilon||\nabla v^k||^2, \\
|(u^k \cdot \nabla\xi^k, h^k)| &\leq C_\sigma||Au^k||^2||\xi^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2, \\
|(h^k \cdot \nabla u^k, h^k)| &\leq C_\sigma||\nabla u^k||^4||h^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2, \\
|(\xi^k \cdot \nabla u^k, h^k)| &\leq C_\sigma||\xi^k||^2||Au^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2, \\
|(b \cdot \nabla\eta^k, h^k)| &\leq C_\sigma||Ab||^2||\eta^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2, \\
|(b \cdot \nabla v^k, h^k)| &\leq C_{\varepsilon,\sigma}||\nabla b||^8||h^k||^2 + \sigma||\nabla h^k||^2 + \varepsilon||\nabla v^k||^2.
\end{aligned}$$

Levando todas estas estimativas em (3.91)-(3.93), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v^k||^2 + (\mu+\chi)||\nabla v^k||^2 \leq C_\varepsilon||z^k||^2 + \chi||z^k||^2 + C_\varepsilon(||Au||^2 + ||Au^k||^2)||\eta^k||^2 \\
+(C_\varepsilon||\nabla u^k||^4 + C_{\sigma,\varepsilon}||\nabla b||^8 + C_{\sigma,\varepsilon}||\nabla b^k||^8)||v^k||^2
\end{aligned}$$

$$+C_\varepsilon(||Ab||^2+||Ab^k||^2)||\xi^k||^2+(8\varepsilon+\frac{\chi}{4})||\nabla v^k||^2$$
$$+2\sigma||\nabla h^k||^2,$$
$$\frac{j}{2}\frac{d}{dt}||z^k||^2+\gamma||\nabla z^k||^2+2\chi||z^k||^2\leq C_\delta(1+||Lw||^2)||\eta^k||^2+\chi||z^k||^2+(\varepsilon+\frac{\chi}{4})||\nabla v^k||^2$$
$$+C_{\varepsilon,\delta}||\nabla w||^8||z^k||^2+C_\delta||Au^k||^2||\varepsilon^k||^2+4\delta||\nabla z^k||^2,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||h^k||^2+\nu||\nabla h^k||^2\leq(2C_{\varepsilon,\sigma}||\nabla b||^8+C_\sigma||\nabla u^k||^4)||h^k||^2+2C_\sigma||Ab||^2||\eta^k||^2$$
$$+2C_\sigma||Au^k||^2||\xi^k||^2+7\sigma||\nabla h^k||^2+2\varepsilon||\nabla v^k||^2.$$

Agora, escolhendo $\varepsilon=\frac{\mu}{22}$, $\delta=\frac{\gamma}{8}$, $\sigma=\frac{\nu}{18}$ e somando as tres últimas desigualdades, obtemos

$$\frac{d}{dt}(||v^k||^2+j||z^k||^2+||h^k||^2)+(\mu+\chi)||\nabla v^k||^2+\gamma||\nabla z^k||^2+\nu||\nabla h^k||^2$$
$$\leq c(1+||Au^k||^2)||\varepsilon^k||^2+c(||Au||^2+||Au^k||^2+1+||Lw||^2+||Ab||^2)||\eta^k||^2$$
$$+c(||Ab||^2+||Ab^k||^2+||Au^k||^2)||\xi^k||^2+c||\nabla w||^8||z^k||^2$$
$$+c(||\nabla u^k||^4+||\nabla b||^8+||\nabla b^k||^8)||v^k||^2+c(||\nabla b||^8+||\nabla u^k||^4)||h^k||^2,$$

onde $c>0$ é uma constante genérica independente de k.

Logo, desde que $||Bw||$ e $||Lw||$ são normas equivalentes, usando a estimativa (3.31) dada no Teorema 3.2, resulta

$$\frac{d}{dt}(||v^k||^2+j||z^k||^2+||h^k||^2)+((\mu+\chi)||\nabla v^k||^2+\gamma||\nabla z^k||^2+\nu||\nabla h^k||^2)$$
$$\leq c(||\varepsilon^k||^2+||\eta^k||^2+||\xi^k||^2)$$
$$+c(||\nabla u^k||^4+||\nabla b||^8+||\nabla b^k||^8+||\nabla w||^8)(||v^k||^2+||z^k||^2+||h^k||^2)$$
$$\leq c(||\varepsilon^k||^2+||\eta^k||^2+||\xi^k||^2)$$
$$+c\,\alpha(t)\,(||\nabla u^k||^2+||\nabla b||^2+||\nabla b^k||^2+||\nabla w||^2)\,(||v^k||^2+||z^k||^2+||h^k||^2)$$

onde $\alpha(t)=||\nabla u^k(t)||^2+||\nabla b(t)||^6+||\nabla b^k(t)||^6+||\nabla w(t)||^6$.

Da estimativa (3.1), temos $\alpha(t)\leq c(M)$ onde $c(M)>0$ constante genérica que depende apenas de M. Logo

$$\frac{d}{dt}(||v^k||^2+j||z^k||^2+||h^k||^2)+((\mu+\chi)||\nabla v^k||^2+\gamma||\nabla z^k||^2+\nu||\nabla h^k||^2)$$
$$\leq c\,||\varepsilon^k||^2+c\,(||\eta^k||^2+||\xi^k||^2)+c(M)\beta(t)(||v^k||^2+||z^k||^2+||h^k||^2),\quad(3.94)$$

onde $\beta(t)=||\nabla u^k(t)||^2+||\nabla b(t)||^2+||\nabla b^k(t)||^2+||\nabla w(t)||^2$.

Integrando de 0 a t, logo considerando o $\min\{1, j, \mu+\chi, \gamma, \nu\}$ e levando em conta a Proposição 3.3, obtemos

$$\|v^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2 + \int_0^t (\|\nabla v^k(\tau)\|^2 + \|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla h^k(\tau)\|^2) d\tau$$
$$\leq \frac{c}{\gamma_{k+1}^2} + \frac{c}{\lambda_{k+1}^2} + c\int_0^t \beta(\tau)(\|v^k(\tau)\|^2 + \|z^k(\tau)\|^2 + \|h^k(\tau)\|^2) d\tau.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|v^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2 + \int_0^t (\|\nabla v^k(\tau)\|^2 + \|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla h^k(\tau)\|^2) d\tau$$
$$\leq (\frac{c}{\gamma_{k+1}^2} + \frac{c}{\lambda_{k+1}^2}) \exp(\int_0^t c\beta(\tau) d\tau).$$

Finalmente, da estimativa (3.23), temos que $\int_0^t c\beta(\tau)d\tau \leq c$, completando a prova do lema.

Agora, damos o seguinte resultado:

Teorema 3.5 *Com as hipóteses do Teorema 3.2 e da Proposição 3.1, as aproximações* (u^k, w^k, b^k) *satisfazem*

$$\|u(t) - u^k(t)\|^2 + \|w(t) - w^k(t)\|^2 + \|b(t) - b^k(t)\|^2 \leq \frac{c}{\gamma_{k+1}^2} + \frac{c}{\lambda_{k+1}^2}$$

para todo $t \geq 0$, *onde* $c > 0$ *é uma constante que independe de* $k \in I\!N$.

Prova. Observemos que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u^k(t)\|^2 &\leq 2(\|u(t) - P_k u(t)\|^2 + \|P_k u(t) - u^k(t)\|^2) = 2(\|\eta^k(t)\|^2 + \|v^k(t)\|^2), \\
\|w(t) - w^k(t)\|^2 &\leq 2(\|\varepsilon^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2), \\
\|b(t) - b^k(t)\|^2 &\leq 2(\|\xi^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2).
\end{aligned}$$

Então,

$$\|u(t) - u^k(t)\|^2 + |w(t) - w^k(t)\|^2 + \|b(t) - b^k(t)\|^2$$
$$\leq 2(\|\eta^k(t)\|^2 + \|\varepsilon^k(t)\|^2 + \|\xi^k(t)\|^2) + 2(\|v^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2).$$

Logo, usando a Proposição 3.4 e o Lema 3.2, obtemos o resultado.

3.4.2 Estimativa de erro na norma $H^1(\Omega)$

Lema 3.3 *Com as hipóteses do Teorema 3.2 e da Proposição 3.1, existe uma constante $c > 0$, independente de $t \geq 0$ e de $k \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande), tal que*

$$\begin{aligned}&\|\nabla v^k(t)\|^2 + \|\nabla z^k(t)\|^2 + \|\nabla h^k(t)\|^2\\ &+ \int_0^t (\|v_t^k(\tau)\|^2 + \|z_t^k(\tau)\|^2 + \|h_t^k(\tau)\|^2) d\tau \leq \frac{c}{\gamma_{k+1}} + \frac{c}{\lambda_{k+1}}.\end{aligned}$$

Prova. Tomando $\varphi = v_t^k$, $\phi = z_t^k$ e $\psi = h_t^k$ em (3.88)-(3.90), temos

$$\begin{aligned}
&\|v_t^k\|^2 + \frac{\mu+\chi}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v^k\|^2\\
&= \chi(\operatorname{rot} \varepsilon^k, v_t^k) + \chi(\operatorname{rot} z^k, v_t^k) - (u \cdot \nabla \eta^k, v_t^k) - (u \cdot \nabla v^k, v_t^k)\\
&\quad -(\eta^k \cdot \nabla u^k, v_t^k) - (v^k \cdot \nabla u^k, v_t^k) + r(\xi^k \cdot \nabla b, v_t^k) + r(h^k \cdot \nabla b, v_t^k)\\
&\quad + r(b^k \cdot \nabla \xi^k, v_t^k) + r(b^k \cdot \nabla h^k, v_t^k)\\
&\leq C_\varepsilon\|\nabla \varepsilon^k\|^2 + C_\varepsilon\|\nabla z^k\|^2 + C_\varepsilon\|Au\|^2\|\nabla \eta^k\|^2 + C_\varepsilon\|Au\|^2\|\nabla v^k\|^2\\
&\quad + C_\varepsilon\|Au^k\|^2\|\nabla \eta^k\|^2 + C_\varepsilon\|Au^k\|^2\|\nabla v^k\|^2 + C_\varepsilon\|Ab\|^2\|\nabla \xi^k\|^2\\
&\quad + C_\varepsilon\|Ab\|^2\|\nabla h^k\|^2 + C_\varepsilon\|Ab^k\|^2\|\nabla \xi^k\|^2 + C_\varepsilon\|Ab^k\|^2\|\nabla h^k\|^2 + 10\varepsilon\|v_t^k\|^2,\\
&j\|z_t^k\|^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z^k\|^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} z^k\|^2 + \chi\frac{d}{dt}\|z^k\|^2\\
&= \chi(\operatorname{rot} \eta^k, z_t^k) + \chi(\operatorname{rot} v^k, z_t^k) - j(\eta^k \cdot \nabla w, z_t^k) - j(u^k \cdot \nabla z^k, z_t^k)\\
&\quad - j(v^k \cdot \nabla w, z_t^k) - j(u^k \cdot \nabla \varepsilon^k, z_t^k)\\
&\leq C_\delta\|\nabla \eta^k\|^2 + C_\delta\|\nabla v^k\|^2 + C_\delta\|Lw\|^2\|\nabla \eta^k\|^2 + C_\delta\|Au^k\|^2\|\nabla z^k\|^2\\
&\quad + C_\delta\|Lw\|^2\|\nabla v^k\|^2 + C_\delta\|Au^k\|^2\|\nabla \varepsilon^k\|^2 + 6\delta\|z_t^k\|^2,\\
&\|h_t^k\|^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla h^k\|^2\\
&= -(\eta^k \cdot \nabla b, h_t^k) - (v^k \cdot \nabla b, h_t^k) - (u^k \cdot \nabla h^k, h_t^k) - (u^k \cdot \nabla \xi^k, h_t^k)\\
&\quad + (h^k \cdot \nabla u^k, h_t^k) + (\xi^k \cdot \nabla u^k, h_t^k) + (b \cdot \nabla \eta^k, h_t^k) + (b \cdot \nabla v^k, h_t^k)\\
&\leq C_\sigma\|Ab\|^2\|\nabla \eta^k\|^2 + C_\sigma\|Au^k\|^2\|\nabla h^k\|^2 + C_\sigma\|Ab\|^2\|\nabla v^k\|^2\\
&\quad + C_\sigma\|Au^k\|^2\|\nabla \xi^k\|^2 + C_\sigma\|Au^k\|^2\|\nabla h^k\|^2 + C_\sigma\|Au^k\|^2\|\nabla \xi^k\|^2\\
&\quad + C_\sigma\|Ab\|^2\|\nabla \eta^k\|^2 + C_\sigma\|Ab\|^2\|\nabla v^k\|^2 + 8\sigma\|h_t^k\|^2,
\end{aligned}$$

onde temos usado as desigualdades de Hölder e Young, as imersões de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{20}$, $\delta = \frac{j}{12}$, $\sigma = \frac{1}{16}$, e somando as desigualdades anteriores, obtemos

$$\|v_t^k\|^2 + j\|z_t^k\|^2 + \|h_t^k\|^2 + \frac{d}{dt}((\mu+\chi)\|\nabla v^k\|^2 + \gamma\|\nabla z^k\|^2 + \nu\|\nabla h^k\|^2)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{d}{dt}(2\chi\|z^k\|^2+(\alpha+\beta)\|\operatorname{div} z^k\|^2)\\
&\quad\le c(1+\|Au^k\|^2)\|\nabla\varepsilon^k\|^2+c(\|Au\|^2+\|Au^k\|^2+1+\|Lw\|^2+\|Ab\|^2)\|\nabla\eta^k\|^2\\
&\quad\quad+c(\|Ab\|^2+\|Ab^k\|^2+\|Au^k\|^2)\|\nabla\xi^k\|^2+c(1+\|Au^k\|^2)\|\nabla z^k\|^2\\
&\quad\quad+c(\|Au\|^2+\|Au^k\|^2+1+\|Lw\|^2+\|Ab\|^2)\|\nabla v^k\|^2\\
&\quad\quad+c(\|Ab\|^2+\|Ab^k\|^2+\|Au^k\|^2)\|\nabla h^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Logo, considerando (3.31) dada no Teorema 3.2 e o fato que $\|Bw\|$ e $\|Lw\|$ são normas equivalentes, obtem-se

$$
\begin{aligned}
&\|v_t^k\|^2+j\|z_t^k\|^2+\|h_t^k\|^2+\frac{d}{dt}((\mu+\chi)\|\nabla v^k\|^2+\gamma\|\nabla z^k\|^2+\nu\|\nabla h^k\|^2)\\
&\quad+\frac{d}{dt}(2\chi\|z^k\|^2+(\alpha+\beta)\|\operatorname{div} z^k\|^2)\\
&\quad\quad\le c\|\nabla\varepsilon^k\|^2+c\|\nabla\eta^k\|^2+c\|\nabla\xi^k\|^2+c(\|\nabla v^k\|^2+\|\nabla z^k\|^2+\|\nabla h^k\|^2). \qquad (3.95)
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 a t, observando que $v^k(0)=z^k(0)=h^k(0)=0$ (pela definição), considerando o $\min\{1,j,\mu+\chi,\gamma,\nu\}$ e levando em conta a Proposição 3.3 e o Lema 3.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t(\|v_t^k(\tau)\|^2+\|z_t^k(\tau)\|^2+\|h_t^k(\tau)\|^2)d\tau+\|\nabla v^k(t)\|^2+\|\nabla z^k(t)\|^2+\|\nabla h^k(t)\|^2\\
&\quad\le c\int_0^t\|\nabla\varepsilon^k(\tau)\|^2d\tau+c\int_0^t\|\nabla\eta^k(\tau)\|^2d\tau+c\int_0^t\|\nabla\xi^k(\tau)\|^2d\tau\\
&\quad\quad+c\int_0^t(\|\nabla v^k(\tau)\|^2+\|\nabla z^k(\tau)\|^2+\|\nabla h^k(\tau)\|^2)d\tau\\
&\quad\le(\frac{c}{\gamma_{k+1}}+\frac{c}{\lambda_{k+1}})+(\frac{c}{\gamma_{k+1}^2}+\frac{c}{\lambda_{k+1}^2})\ \le\ \frac{c}{\gamma_{k+1}}+\frac{c}{\lambda_{k+1}}.
\end{aligned}
$$

Isto completa a prova do lema.

Assim, o Lema 3.3, nos leva ao seguinte resultado:

Teorema 3.6 *Com as hipóteses do Teorema 3.2 e da Proposição 3.1, as aproximações* (u^k,w^k,b^k) *satisfazem*

$$
\|\nabla u(t)-\nabla u^k(t)\|^2+\|\nabla w(t)-\nabla w^k(t)\|^2+\|\nabla b(t)-\nabla b^k(t)\|^2\le\frac{c}{\gamma_{k+1}}+\frac{c}{\lambda_{k+1}}
$$

para todo $t\ge 0$, *onde* $c>0$ *é uma constante que independe de* $k\in I\!N$.

Prova. Deduz-se do Lema 3.3 e da Proposição 3.4.

3.4.3 Melhores estimativas de erro na norma $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$

Com as estimativas da Seção 3.4, podemos obter melhores estimativas de erro do que nas Subseções 3.5.1 e 3.5.2.

Lema 3.4 *Com as hipóteses do Teorema 3.2 e do Teorema 3.3, sejam* $c_1 = \min\{\mu + \chi, \frac{\gamma}{j}, \nu\}$, C_Ω *a constante de Poincaré* ($\|u\| \leq C_\Omega \|\nabla u\|$, *para* $u \in H_0^1(\Omega)$) *e* γ^* *definido como no Teorema 3.3. Então, para qualquer constante* $\overline{\mu}$ *tal que* $0 < \overline{\mu} < \min\{\gamma^*, \frac{c_1}{C_\Omega}\}$, *existe uma constante c independente de* $k \in \mathbb{N}$ *(suficientemente grande), tal que*

$$\begin{aligned}&e^{\overline{\mu}t}(\|v^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2)\\ &\quad + \int_0^t e^{\overline{\mu}\tau}(\|\nabla v^k(\tau)\|^2 + \|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla h^k(\tau)\|^2)d\tau \leq \frac{c}{\lambda_{k+1}^2} + \frac{c}{\gamma_{k+1}^2}.\end{aligned}$$

Prova. Multiplicando (3.94) por $e^{\overline{\mu}t}$, obtem-se

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(e^{\overline{\mu}t}(\|v^k\|^2 + j\|z^k\|^2 + \|h^k\|^2)) + c_1 e^{\overline{\mu}t}(\|\nabla v^k\|^2 + j\|\nabla z^k\|^2 + \|\nabla h^k\|^2)\\ &\quad \leq c\, e^{\overline{\mu}t}(\|\varepsilon^k\|^2 + \|\eta^k\|^2 + \|\xi^k\|^2) + c(M)\beta(t)\, e^{\overline{\mu}t}(\|v^k\|^2 + \|z^k\|^2 + \|h^k\|^2)\\ &\quad + \overline{\mu} e^{\overline{\mu}t}(\|v^k\|^2 + j\|z^k\|^2 + \|h^k\|^2).\end{aligned}$$

Como $0 < \overline{\mu} < \frac{c_1}{C_\Omega}$, então $c_2 = c_1 - \overline{\mu}C_\Omega > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(e^{\overline{\mu}t}(\|v^k\|^2 + j\|z^k\|^2 + \|h^k\|^2)) + c_2 e^{\overline{\mu}t}(\|\nabla v^k\|^2 + j\|\nabla z^k\|^2 + \|\nabla h^k\|^2)\\ &\quad \leq c\, e^{\overline{\mu}t}(\|\varepsilon^k\|^2 + \|\eta^k\|^2 + \|\xi^k\|^2) + c(M)\beta(t)\, e^{\overline{\mu}t}(\|v^k\|^2 + \|z^k\|^2 + \|h^k\|^2).\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, considerando o $\min\{1, j, c_2, jc_2\}$ e usando a Proposição 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}&e^{\overline{\mu}t}(\|v^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2)\\ &\quad + \int_0^t e^{\overline{\mu}\tau}(\|\nabla v^k(\tau)\|^2 + \|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla h^k(\tau)\|^2)d\tau\\ &\quad \leq \frac{c}{\gamma_{k+1}^2} + \frac{c}{\lambda_{k+1}^2} + \int_0^t c(M)\beta(\tau)e^{\overline{\mu}\tau}(\|v^k(\tau)\|^2 + \|z^k(\tau)\|^2 + \|h^k(\tau)\|^2)d\tau.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, temos

$$\begin{aligned}&e^{\overline{\mu}t}(\|v^k(t)\|^2 + \|z^k(t)\|^2 + \|h^k(t)\|^2)\\ &\quad + \int_0^t e^{\overline{\mu}\tau}(\|\nabla v^k(\tau)\|^2 + \|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla h^k(\tau)\|^2)d\tau\\ &\quad \leq \left(\frac{c}{\gamma_{k+1}^2} + \frac{c}{\lambda_{k+1}^2}\right)\exp\left(\int_0^t c(M)\beta(\tau)d\tau\right).\end{aligned}$$

Agora, da estimativa (3.62) dada no Teorema 3.3, temos que $\int_0^t c(M)\beta(\tau)d\tau \leq c$. Então, da última desigualdade conclui-se o resultado.

Agora, podemos estabelecer uma melhor estimativa de erro na norma $L^2(\Omega)$:

Teorema 3.7 *Com as hipóteses do Teorema 3.4, para $\overline{\mu}$ como no Lema 3.4, as aproximações (u^k, w^k, b^k) satisfazem*

$$e^{\overline{\mu}t}(||u(t) - u^k(t)||^2 + ||w(t) - w^k(t)||^2 + ||b(t) - b^k(t)||^2) \leq \frac{c}{\gamma_{k+1}^2} + \frac{c}{\lambda_{k+1}^2}$$

para todo $t \geq 0$, onde $c > 0$ é uma constante que independe de $k \in I\!N$.

Prova. Usando o Lema 3.4 e a Proposição 3.6 segue-se o resultado.

A seguir, damos o seguinte lema:

Lema 3.5 *Com as hipóteses do Teorema 3.2 e do Teorema 3.3, para $\overline{\mu}$ como no Lema 3.4, existe uma constante $c > 0$, independente de $t \geq 0$ e de $k \in I\!N$ (suficientemente grande), tal que*

$$\begin{aligned} &e^{\overline{\mu}t}(||\nabla v^k(t)||^2 + ||\nabla z^k(t)||^2 + ||\nabla h^k(t)||^2) \\ &\quad + \int_0^t e^{\overline{\mu}\tau}(||v_t^k(\tau)||^2 + ||z_t^k(\tau)||^2 + ||h_t^k(\tau)||^2)d\tau \leq \frac{c}{\gamma_{k+1}} + \frac{c}{\lambda_{k+1}}. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando (3.95) por $e^{\overline{\mu}t}$, temos

$$\begin{aligned} &e^{\overline{\mu}t}(||v_t^k||^2 + j||z_t^k||^2 + ||h_t^k||^2) + \frac{d}{dt}(e^{\overline{\mu}t}((\mu + \chi)||\nabla v^k||^2 + \gamma||\nabla z^k||^2 + \nu||\nabla h^k||^2)) \\ &+\frac{d}{dt}(2\chi\, e^{\overline{\mu}t}||z^k||^2 + (\alpha + \beta)\, e^{\overline{\mu}t}||\mathrm{div}\, z^k||^2) \\ &\quad \leq ce^{\overline{\mu}t}(||\nabla z^k||^2 + ||\nabla \eta^k||^2 + ||\nabla \xi^k||^2) + 2\chi\,\overline{\mu}C_\Omega e^{\overline{\mu}t}||\nabla z^k||^2 \\ &\qquad +(\alpha + \beta)\,\overline{\mu}\, e^{\overline{\mu}t}\, ||\mathrm{div}\, z^k||^2 + (c + c\,\overline{\mu})e^{\overline{\mu}t}(||\nabla v^k||^2 + ||\nabla z^k||^2 + ||\nabla h^k||^2) \\ &\quad \leq c\, e^{\overline{\mu}t}(||\nabla z^k||^2 + ||\nabla \eta^k||^2 + ||\nabla \xi^k||^2) + c\, e^{\overline{\mu}t}(||\nabla v^k||^2 + ||\nabla z^k||^2 + ||\nabla h^k||^2). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, considerando o $\min\{1, j, \mu + \chi, \gamma, \nu\}$, observando o Lema 3.4 e a Proposição 3.5, obtemos

$$\begin{aligned} &e^{\overline{\mu}t}(||\nabla v^k(t)||^2 + ||\nabla z^k(t)||^2 + ||\nabla h^k(t)||^2) \\ &\quad + \int_0^t e^{\overline{\mu}\tau}(||v_t^k(\tau)||^2 + ||z_t^k(\tau)||^2 + ||h_t^k(\tau)||^2)d\tau \\ &\qquad \leq \frac{c}{\gamma_{k+1}} + \frac{c}{\lambda_{k+1}} + c\int_0^t e^{\overline{\mu}\tau}(||\nabla v^k(\tau)||^2 + ||\nabla z^k(\tau)||^2 + ||\nabla h^k(\tau)||^2)d\tau \\ &\qquad \leq (\frac{c}{\gamma_{k+1}} + \frac{c}{\lambda_{k+1}}) + (\frac{c}{\gamma_{k+1}^2} + (\frac{c}{\lambda_{k+1}^2}), \end{aligned}$$

de onde segue-se o resultado.

Agora, estabelecemos o seguinte:

Teorema 3.8 *Com as hipóteses do Teorema 3.4, para $\overline{\mu}$ como no Lema 3.4, as aproximações (u^k, w^k, b^k) satisfazem*

$$e^{\overline{\mu}t}(\|\nabla u(t) - \nabla u^k(t)\|^2 + \|\nabla w(t) - \nabla w^k(t)\|^2 + \|\nabla b(t) - \nabla b^k(t)\|^2) \leq \frac{c}{\gamma_{k+1}} + \frac{c}{\lambda_{k+1}}$$

para todo $t \geq 0$, onde $c > 0$ é uma constante que independe de $k \in \mathbb{N}$.

Prova. Usando o Lema 3.5 e a Proposição 3.6 obtem-se o resultado.

Capítulo 4

Existência de soluções fracas e fortes em um domínio não cilíndrico

Usando o método de Galerkin espectral provamos a existência de soluções fracas e a existência e a unicidade da solução forte para as equações do movimento de um fluido magneto-micropolar em uma classe de domínios não cilíndricos tri-dimensionais.

4.1 Espaços funcionais e notações

Seja $0 < T < \infty$ un número real fixo e $\{\Omega_t\}_{0 \le t \le T}$ uma família de conjuntos limitados de $I\!R^3$ com contorno $\partial\Omega_t$. Consideremos o domínio não cilíndrico

$$\tilde{Q} = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\} \quad \text{com contorno lateral} \quad \partial\tilde{Q} = \bigcup_{0<t<T} \partial\Omega_t \times \{t\} \text{ suave}$$

Estudamos a existência de soluções fracas e fortes para as equações que descrevem o movimento de um fluido magneto-micropolar viscoso incompressível em um domínio dependendo do tempo $\Omega_t \subset I\!R^3$ num intervalo de tempo $[0, T]$. Isto é as equações (1.1)-(1.3) definidas em $\tilde{Q}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - (\mu + \chi)\Delta u + \nabla(p + \frac{1}{2} rb \cdot b) = \chi \text{rot}\, w + rb \cdot \nabla b + f, \\
&j\frac{\partial w}{\partial t} - \gamma\Delta w - (\alpha + \beta)\nabla \text{ div } w + ju \cdot \nabla w + 2\chi w = \chi \text{rot}\, u + g, \qquad (4.1)\\
&\frac{\partial b}{\partial t} - \nu\Delta b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u = 0, \\
&\text{div } u = \text{ div } b = 0 \qquad \text{em} \qquad \tilde{Q},
\end{aligned}$$

$$u(x,t) = w(x,t) = b(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\tilde{Q}, \qquad (4.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad b(x,0) = b_0(x), \quad x \in \Omega_0. \qquad (4.3)$$

Para provar a existência de soluções fracas e a existência da solução forte, fazemos uso de uma apropriada mudança de variáveis para transformar o problema (4.1)-(4.3) definido em $\tilde{Q}$ em um sistema definido sobre um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0,T)$ onde a variável espacial não depende do tempo, logo, usando o método de Galerkin espectral (aproximações de Galerkin) junto com o Lema de Aubin-Lions (Cap. 1), resolvemos o problema neste domínio Q e retornamos para $\tilde{Q}$ usando a inversa da mudança de variáveis.

No que segue do capítulo, os vetores serão considerados como vetores linha, também as funções serão reais ou vetoriais e não serão distinguidas estas duas situações em nossas notações.

Agora damos a definição precisa do domínio espacial dependendo do tempo Ω_t onde o problema de valor de contorno-inicial tem sido formulado.

Sendo $T > 0$, seja a função

$$R : [0,T] \longrightarrow I\!R^{n^2} \text{ com } n = 3,$$

isto é, $R(t)$ é uma 3×3 matriz. Para Ω como no Cap. 1, consideremos os conjuntos

$$\Omega_t = \{x = yR(t) \ ; \ y \in \Omega\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

com contorno

$$\partial\Omega_t = \{x = yR(t) \ ; \ y \in \partial\Omega\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Observe-se que tais domínios Ω_t geram um domínio não cilíndrico de $I\!R^3 \times I\!R$:

$$\tilde{Q} = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\} \quad \text{com contorno lateral} \quad \partial\tilde{Q} = \bigcup_{0<t<T} \partial\Omega_t \times \{t\} \quad \text{suave.}$$

Sobre $R(t)$ damos as seguintes hipóteses:

$R(t) = \sigma(t)M$, onde σ é uma função real de classe C^1 sobre $[0,T], \sigma(t) > 0$ e M é uma 3×3 matriz inversível com entradas constantes reais.

Esta classe de domínios foi introduzida por Milla-Miranda e Límaco [28] no estudo das equações clássicas de Navier-Stokes. Veja também Medeiros e Milla-Miranda [26], e as referências alí.

Para $\Omega \subset I\!R^3$, domínio limitado com contorno $\partial\Omega$ suficientemente regular (ver Cap. 1) e $M_{3\times 3} = (m_{ij})_{i,j=1,2,3}$ matriz fixa (com as hipóteses acima), considerando

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \, ; \, \operatorname{div}(vM^{-1}) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\},$$

define-se

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\Omega) &= \text{o fecho de } \mathcal{V}(\Omega) \text{ na } (L^2(\Omega))^3 \text{ norma,} \\ \tilde{V}(\Omega) &= \text{o fecho de } \mathcal{V}(\Omega) \text{ na } (H^1(\Omega))^3 \text{ norma,} \\ \tilde{V}_s(\Omega) &= \text{o fecho de } \mathcal{V}(\Omega) \text{ na } (H^s(\Omega))^3 \text{ norma.} \end{aligned}$$

Os produtos internos e as normas em $\tilde{H}(\Omega)$ e $\tilde{V}_s(\Omega)$ são dados por:

$$\begin{aligned}
(u,v) &= (u,v)_{\tilde{H}(\Omega)} = \sum_{i}^{3} \int_\Omega u_i(y)v_i(y)dy, \quad \|u\| = (u,u)^{1/2}, \\
(u,v)_s &= (u,v)_{\tilde{V}(\Omega)} = \sum_{i}^{3} (u_i,v_i)_{H^s}, \quad \|u\|_s = (u,u)_s^{1/2}.
\end{aligned}$$

onde $(.,.)_{H^s}$ é o produto usual em $H^s(\Omega)$.

Em particular, denotamos $\tilde{V}_1(\Omega) = \tilde{V}(\Omega)$ e $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1}$.

Com estas notações junto com as notações dadas para $H(\Omega)$ e $V(\Omega)$ no Cap. 1, tem-se:

Proposição 4.1 *Seja $M = (m_{ij})$, $i,j = 1,2,3$, matriz fixa, inversível com entradas constantes reais. Então as aplicações*

$$\begin{array}{ccc}
\phi_1 : V(\Omega) \longrightarrow \tilde{V}(\Omega) & e & \phi_2 : H(\Omega) \longrightarrow \tilde{H}(\Omega) \\
u \longrightarrow \phi_1 u = uM & & v \longrightarrow \phi_2 v = vM
\end{array}$$

são isomorfismos.

Prova. A aplicação ϕ_1 é linear e injetora (pois M é inversível) de $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ em $\mathcal{V}(\Omega)$. Agora, dada a função $v \in \mathcal{V}(\Omega)$ existe $vM^{-1} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ tal que $\phi_1(vM^{-1}) = v$. Portanto, $\phi_1 : C^\infty_{0,\sigma}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}(\Omega)$ é linear e bijetora. Também, para $u \in V(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\|\phi_1 u\|^2_{\tilde{V}(\Omega)} &= \|\phi_1 u\|^2_{H^1} = \sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha(uM)\|^2 = \sum_{|\alpha|\le 1}\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |D^\alpha(\sum_{i=1}^{3} u_i m_{ij})|^2 dx \\
&= \sum_{|\alpha|\le 1}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |D^\alpha(u_i m_{ij})|^2 dx = \sum_{|\alpha|\le 1}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} |m_{ij}|^2 \int_\Omega |D^\alpha u_i|^2 dx.
\end{aligned}$$

Logo, desde que M é inversível, para $i = 1,2,3$, tem-se que $\sum_{j=1}^{3} |m_{ij}|^2 > 0$. Então considerando $C_1 = \min_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^{3} |m_{ij}|^2 > 0$ e $C_2 = \max_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^{3} |m_{ij}|^2 > 0$, a última igualdade fornece

$$C_1 \sum_{|\alpha|\le 1}\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |D^\alpha u_i|^2 dx \le \|\phi_1 u\|^2_{\tilde{V}(\Omega)} \le C_2 \sum_{|\alpha|\le 1}\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |D^\alpha u_i|^2 dx.$$

Assim,

$$C_1\|u\|^2_{V(\Omega)} \le \|\phi_1 u\|^2_{\tilde{V}(\Omega)} \le C_2\|u\|^2_{V(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Agora, veamos que $\phi_1 : V(\Omega) \longrightarrow \tilde{V}(\Omega)$ é injetora. Se $\phi_1 = 0$, então por (4.4) tem-se $u = 0$ e desde que ϕ_1 é linear, resulta que ϕ_1 é injetora.

A seguir, demonstraremos que ϕ_1 é sobrejetora. De fato, se $v \in \tilde{V}(\Omega)$ então (pela definição de $\tilde{V}(\Omega)$) existe $\{v_n\} \subset \mathcal{V}(\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow v$ em $\tilde{V}(\Omega)$, mas como $\phi_1 : C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}(\Omega)$ é sobrejetora, temos que existe $\{u_n\} \subset C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$ tal que $\phi_1 u_n = v_n$, portanto, $\phi_1 u_n \longrightarrow v$ em $\tilde{V}(\Omega)$, o qual implica que $\{\phi_1 u_n\} \subset \tilde{V}(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy. Logo, observando (4.4), tem-se que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $V(\Omega)$, assim existe $u \in V(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $V(\Omega)$ e observando o lado direito de (4.4) e a linearidade de ϕ_1, tem-se que $\phi_1 u_n \longrightarrow \phi_1 u$ em $\tilde{V}(\Omega)$.

Finalmente, pela unicidade do limite resulta $\phi_1 u = v$. Similarmente, demonstra-se que $\phi_2 : H(\Omega) \longrightarrow \tilde{H}(\Omega)$ é um isomorfismo.

Então, em virtude da Proposição 4.1, $\tilde{V}(\Omega)$ pode ser caracterizado por:

$$\tilde{V}(\Omega) = \{v \in (H^1_0(\Omega))^3 \,;\, \operatorname{div}(v\, M^{-1}) = 0 \,\}.$$

Também, levando em conta a caracterização de $H^{\perp}(\Omega)$ (ver Cap. 1) e a Proposição 4.1, têm-se

$$\begin{aligned} &\tilde{H}^{\perp}(\Omega) = \{\, \phi \in (L^2(\Omega))^3 \,;\, \phi = \nabla q\, M^{-t} \text{ para algum } q \in H^1(\Omega)\,\} \\ &\text{e} \quad (L^2(\Omega))^3 = \tilde{H}(\Omega) \oplus \tilde{H}^{\perp}(\Omega). \end{aligned}$$

De fato, se $\phi \in \tilde{H}^{\perp}(\Omega)$, então $\forall\, u \in \tilde{H}(\Omega)$ tem-se $(\phi, u) = 0$, isto é, $(\phi, uM^{-1}M) = 0$, o qual implica $(\phi M^t, uM^{-1}) = 0$, $\forall\, uM^{-1} \in H(\Omega)$, logo $\phi M^t \in H^{\perp}(\Omega)$, consequentemente, existe $q \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi M^t = \nabla q$, assim, $\phi = \nabla q M^{-t}$. Agora, seja $\phi = \nabla q M^{-t}$ com $q \in H^1(\Omega)$, então $\forall\, u \in \tilde{H}(\Omega)$, tem-se

$$(\phi, u) = (\nabla q M^{-t}, u) = (\nabla q, uM^{-1}) = -(q, \operatorname{div}(uM^{-1})) = 0,$$

portanto $\phi = \nabla q M^{-t} \in \tilde{H}^{\perp}(\Omega)$. Finalmente, se $u \in \tilde{H}(\Omega) \cap \tilde{H}^{\perp}(\Omega)$, então $u = \nabla q M^{-t}$ e $\operatorname{div}(uM^{-1}) = 0$, logo $\|u\|^2 = (\nabla q M^{-t}, u) = (\nabla q, uM^{-1}) = 0$, o qual implica $u = 0$, de onde conclui-se que $\tilde{H}(\Omega) \cap \tilde{H}^{\perp}(\Omega) = \{0\}$.

Assim, podemos considerar a projeção ortogonal (definida pela soma direta acima):

$$\tilde{P} \,:\, (L^2(\Omega))^3 \longrightarrow \tilde{H}(\Omega),$$

portanto, $\tilde{P}(\nabla g M^{-t}) = 0$, $\forall\, g \in H^1(\Omega)$ com $\nabla g \in (L^2(\Omega))^3$.

A seguir, introduz-se algums espaços funcionais que serão necessários para estabelecer os nossos resultados.

Seja $\mathcal{V}_t = \{u \in (C^{\infty}_0(\Omega_t))^3 \,;\, \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega_t\}$, então define-se

$$\begin{aligned} H(\Omega_t)) &= \text{o fecho de } \mathcal{V}_t \text{ na } (L^2(\Omega_t))^3 \text{ norma}, \\ V_s(\Omega_t) &= \text{o fecho de } \mathcal{V}_t \text{ na } (H^s(\Omega_t))^3 \text{ norma}, \end{aligned}$$

para $s \in I\!R, s > 0$. Em particular, denotamos $V(\Omega_t) = V_1(\Omega_t)$.

Os produtos internos em $H(\Omega_t)$ e $V(\Omega_t)$ são dados por:

$$
\begin{aligned}
(u, v)_t &= (u, v)_{H(\Omega_t)} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_t} u_i(x) v_i(x) dx, \\
((u, v))_t &= (u, v)_{V(\Omega_t)} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_t} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} dx.
\end{aligned}
$$

Observamos que $V_s(\Omega_t) \hookrightarrow (H_0^1(\Omega_t))^3$ contínuamente para $s > \frac{1}{2}$ e

$$V(\Omega_t) = \{u \in (H_0^1(\Omega_t))^3 \, ; \, \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega_t\}.$$

Agora, seja B uma bola em $I\!R^3$ tal que $\Omega_t \subset B$, para todo $t \in [0, T]$. Então, para $1 \le p \le \infty$, define-se:

$$L^p(0, T; V(\Omega_t)) = \{u \in L^p(0, T; V(B)); \; u(x, t) = 0 \text{ q.s. em } \; B - \Omega_t \text{ quase } \forall t \in [0, T]\}$$

com norma

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(0,T;V(\Omega_t))} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_{V(\Omega_t)}^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty \quad \text{e} \\
\|u\|_{L^\infty(0,T;V(\Omega_t))} &= \sup_{t \in [0,T]} \text{ess} \, \|u(t)\|_{V(\Omega_t)}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, define-se $L^p(0, T; H(\Omega_t))$.

A seguir, com a definição dada para Ω_t e com as hipóteses sobre $R(t) = \sigma(t) M$, consideramos a transformação

$$
\begin{aligned}
\phi_t : \Omega_t &\longrightarrow \Omega \\
x = (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \phi_t(x) = y; \; y = x R^{-1}(t),
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

logo, para cada $t \in [0, T]$ tem-se que ϕ_t é um difeomorfismo de classe C^1. O Jacobiano de ϕ_t, denotado por $J\phi_t$ é $R(t)^t$, satisfaz $det\,(J\phi_t) = det\, R(t) = \sigma^3(t)\, det\, M \neq 0$.

Observe-se que $\phi_t(\Omega_t) = \Omega$, $dy = [det\,(J\phi_t)]^{-1} dx$ e que a inversa de ϕ_t é definida por

$$
\begin{aligned}
\phi_t^{-1} : \Omega &\longrightarrow \Omega_t \\
y = (y_1, y_2, y_3) &\longrightarrow \phi_t^{-1}(y) = x; \; x = y R(t),
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

com $det\,(J\phi_t^{-1}) = det\, R^{-1}(t) = (\sigma^3(t))^{-1}\, det\, M^{-1}$.

Assim, levando em conta a transformação ϕ_t, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.2 *Seja ϕ_t a transformação definida em (4.5). Então para cada $t \in (0,T)$, as aplicações*

$$\begin{array}{lcl} \tilde{V}(\Omega) \longrightarrow V(\Omega_t) & e & \tilde{H}(\Omega) \longrightarrow H(\Omega_t) \\ v(y) \longrightarrow u(x) = v \circ \phi_t(x) = v(xR^{-1}(t)) & & h(y) \longrightarrow b(x) = h \circ \phi_t(x) = b(xR^{-1}(t)) \end{array}$$

são isomorfismos.

Prova. A aplicação é bem definida, desde que $u \in V(\Omega_t)$ para cada $t \in (0,T)$. De fato, como $v \in \tilde{V}(\Omega)$, pela definição de $\tilde{V}(\Omega)$, existe $\{v_n\} \subset \mathcal{V}(\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow v$ em $(H^1(\Omega))^3$ e desde que t é fixo tem-se $u_n(x) = v_n \circ \phi_t(x) = v_n(xR^{-1}(t)) \in (C_0^\infty(\Omega_t))^3$.

Agora, como $R(t) = \sigma(t)\, M$ tem-se $R^{-1}(t) = \dfrac{1}{\sigma(t)} M^{-1}$, assim, denotando $y = xR^{-1}(t)$, $M = (m_{ij})_{i,j=1,2,3}$ e $M^{-1} = (\eta_{ij})_{i,j=1,2,3}$, resulta $y_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\eta_{ij}}{\sigma(t)}$ e $x_j = \sum_{i=1}^{3} \sigma(t)\, y_i\, m_{ij}$, $j = 1,2,3$. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u_n(x) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_{n_i}}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_{n_i}}{\partial y_j}(y) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_{n_i}}{\partial y_j}(y) \frac{\eta_{ij}}{\sigma(t)} = \frac{1}{\sigma(t)} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\sum_{i=1}^{3} v_{n_i}(y)\eta_{ij}\Big) = \frac{1}{\sigma(t)} \operatorname{div}\,(v_n(y) M^{-1}) \end{aligned}$$

e desde que $\{v_n\} \subset \mathcal{V}(\Omega)$, conclui-se $\operatorname{div} u_n(x) = 0$, isto é, $\{u_n\} \subset \mathcal{V}_t$.

Logo, como $v_n \longrightarrow v$ em $(H^1(\Omega))^3$, tem-se que $u_n = v_n \circ \phi_t \longrightarrow u = v \circ \phi_t$ em $(H^1(\Omega_t))^3$. Portanto, $u_n \longrightarrow u = v \circ \phi_t$ em $V(\Omega_t)$ e como $V(\Omega_t)$ é fechado, conclui-se que $u = v \circ \phi_t \in V(\Omega_t)$.

A seguir, demonstraremos que $\|v\|_{\tilde{V}(\Omega)}$ e $\|u\|_{V(\Omega_t)}$ são normas equivalentes.

Observando que $v(y) = u \circ \phi_t^{-1}(y)$, temos

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{\tilde{V}(\Omega)} &= \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \|\frac{\partial v}{\partial y_i}\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial y_i}(y)|^2 dy \\ &= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} |\frac{\partial u}{\partial x_j}(\phi_t^{-1}(y))\, \frac{\partial x_j}{\partial y_i}|^2 dy = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} |\sigma(t)|^2 |m_{ij}|^2 |\frac{\partial u}{\partial x_j}(\phi_t^{-1}(y))|^2 dy \\ &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{|m_{ij}|^2 |\sigma(t)|^2}{det\, R(t)} \int_\Omega det\, R(t)\, |\frac{\partial u}{\partial x_j}(\phi_t^{-1}(y))|^2 dy \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} \{\frac{|\sigma(t)|^2}{det\, R(t)}\} \max_{j=1,2,3} \{\sum_{i=1}^{3} |m_{ij}|^2\} \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega det\,(J\phi_t^{-1})\, |\frac{\partial u}{\partial x_j}(\phi_t^{-1}(y))|^2 dy \\ &= \frac{1}{det\, M} \sup_{t\in[0,T]} \{\frac{1}{|\sigma(t)|}\} \max_{j=1,2,3} \{\sum_{i=1}^{3} |m_{ij}|^2\} \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega_t} |\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|^2 dx = \frac{1}{c_1}\, \|u\|_{V(\Omega_t)} \end{aligned}$$

onde $c_1 = det\,M\left[\sup_{t\in[0,T]}\{\frac{1}{|\sigma(t)|}\}\max_{j=1,2,3}\{\sum_{i=1}^{3}|m_{ij}|^2\}\right]^{-1}$.

Por outro lado, desde que $u(x) = v\circ\phi_t(x)$, resulta

$$\begin{aligned}
||u||_{V(\Omega_t)} &= \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_t}|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^2dx = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}|\frac{\partial v}{\partial y_j}(\phi_t(x))\,\frac{\partial y_j}{\partial x_i}|^2dx \\
&= \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{3}\frac{|\eta_{ij}|^2}{|\sigma(t)|^2}|\frac{\partial v}{\partial y_j}(\phi_t(x))|^2dx \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{|\eta_{ij}|^2}{|\sigma(t)|^2\,det\,R^{-1}(t)}\int_{\Omega_t}det\,R^{-1}(t)\,|\frac{\partial v}{\partial y_j}(\phi_t(x))|^2dx \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]}\{\frac{det\,R(t)}{|\sigma(t)|^2}\}\max_{j=1,2,3}\{\sum_{i=1}^{3}|m_{ij}|^2\}\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega_t}det\,(J\phi_t)\,|\frac{\partial v}{\partial y_j}(\phi_t(x))|^2dx \\
&= det\,M\sup_{t\in[0,T]}\{|\sigma(t)|^2\}\max_{j=1,2,3}\{\sum_{i=1}^{3}|m_{ij}|^2\}\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}|\frac{\partial v}{\partial y_j}(y)|^2dy = c_2\,||v||^2_{\tilde V(\Omega)}
\end{aligned}$$

onde $c_2 = det\,M\sup_{t\in[0,T]}\{|\sigma(t)|^2\}\max_{j=1,2,3}\{\sum_{i=1}^{3}|m_{ij}|^2\}$. Portanto,

$$c_1\,||v||^2_{\tilde V(\Omega)} \leq ||u||_{V(\Omega_t)} \leq c_2\,||v||^2_{\tilde V(\Omega)}.$$

Como uma consequência da Proposição 4.1, temos o seguinte resultado:

Lema 4.1 *Com as hipóteses da Proposição 4.1, têm-se que as aplicações*

$$\begin{aligned}
L^2(0,T;V(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0,T;\tilde V(\Omega)), \\
L^\infty(0,T;V(\Omega)) &\longrightarrow L^\infty(0,T;\tilde V(\Omega)), \\
L^\infty(0,T;H(\Omega)) &\longrightarrow L^\infty(0,T;\tilde H(\Omega))
\end{aligned}$$

são isomorfismos.

Também, levando em conta a Proposição 4.2, tem-se:

Lema 4.2 *Com as hipóteses da Proposição 4.2, as aplicações*

$$\begin{aligned}
L^2(0,T;\tilde V(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0,T;V(\Omega_t)), \\
v(y,t) &\longrightarrow u(x,t) = v(xR^{-1}(t),t) \\
h(y,t) &\longrightarrow b(x,t) = h(xR^{-1}(t),t) \\
L^\infty(0,T;\tilde V(\Omega)) &\longrightarrow L^\infty(0,T;V(\Omega_t)),
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
L^\infty(0,T;\tilde{H}(\Omega)) & \longrightarrow & L^\infty(0,T;H(\Omega_t)),\\
L^2(0,T:\tilde{V}(\Omega)\cap H^2(\Omega)) & \longrightarrow & L^2(0,T;V(\Omega_t)\cap H^2(\Omega_t)),\\
L^\infty(0,T;\tilde{V}(\Omega)\cap H^2(\Omega)) & \longrightarrow & L^\infty(0,T;V(\Omega_t)\cap H^2(\Omega_t)),\\
L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) & \longrightarrow & L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)),\\
z(y,t) & \longrightarrow & w(x,t)=z(xR^{-1}(t),t)\\
L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) & \longrightarrow & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t)),\\
L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) & \longrightarrow & L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)),\\
L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) & \longrightarrow & L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)\cap H^2(\Omega_t)),\\
L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) & \longrightarrow & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t)\cap H^2(\Omega_t)),
\end{array}
$$

são bijeções de classe C^1.

A seguir, damos a noção de solução fraca e de solução forte do problema (4.1)-(4.3).

Definição 4.1 *Sejam u_0, $b_0 \in H(\Omega_0)$ e $w_0 \in L^2(\Omega_0)$. Dizemos que (u,w,b) definidas em $\tilde{Q}$ é uma solução fraca do problema (4.1)-(4.3) se e somente se*

$$
\begin{array}{l}
u\,,\,b \in L^2(\,0,T;V(\Omega_t)\,)\cap L^\infty(\,0,T;H(\Omega_t)\,),\\
w \in L^2(\,0,T;H_0^1(\Omega_t)\,)\cap L^\infty(\,0,T;L^2(\Omega_t)\,)
\end{array}
$$

e satisfaz:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (u,\varphi_t)_t dt + (\mu+\chi)\int_0^T (\nabla u,\nabla\varphi)_t dt + \int_0^T (u\cdot\nabla u,\varphi)_t dt - r\int_0^T (b\cdot\nabla b,\varphi)_t dt\\
&\qquad\qquad = \chi\int_0^T (\mathrm{rot} w,\varphi)_t dt + \int_0^T (f,\varphi)_t dt,\\
&-j\int_0^T (w,\phi_t)_t dt + \gamma\int_0^T (\nabla w,\nabla\phi)_t dt + (\alpha+\beta)\int_0^T (\mathrm{div} w,\mathrm{div}\phi)_t dt\\
&\qquad + \int_0^T (u\cdot\nabla w,\phi)_t dt + 2\chi\int_0^T (w,\phi)_t dt = \chi\int_0^T (\mathrm{rot} u,\phi)_t dt + \int_0^T (g,\phi)_t dt,\\
&-\int_0^T (b,\psi_t)_t dt + \nu\int_0^T (\nabla b,\nabla\psi)_t dt + \int_0^T (u\cdot\nabla b,\psi)_t dt - \int_0^T (b\cdot\nabla u,\psi)_t dt = 0,\\
&\forall\ \varphi,\ \phi,\ \psi\ \in (C^1(\bar{\tilde{Q}}))^3 \text{ com soporte compacto } \subset \tilde{Q},\ \mathrm{div}\,\varphi = 0\ \ \mathrm{div}\,\psi = 0,\\
&u(0)=u_0,\quad w(0)=w_0,\quad b(0)=b_0.
\end{aligned}
$$

Observação 4.1 *Como é usual, as condições de regularidade acima são suficientes para garantir que as condições iniciais façam sentido.*

Definição 4.2 *Sejam* u_0, $b_0 \in V(\Omega_0)$ *e* $w_0 \in H_0^1(\Omega_0)$. *Dizemos que* (u, w, b) *definidas em* $\tilde{Q}$ *é uma solução forte do problema (4.1)-(4.3) se e somente se*

$$u\,,\, b \in L^\infty(\,0,T; V(\Omega_t)\,) \cap L^2(\,0,T; H^2(\Omega_t) \cap V(\Omega_t)),$$
$$w \in L^\infty(\,0,T; H_0^1(\Omega_t)\,) \cap L^2(\,0,T; H^2(\Omega_t) \cap H_0^1(\Omega_t))$$

e satisfaz:

$$\int_0^T (u_t, \varphi)_t dt - (\mu + \chi) \int_0^T (\Delta u, \varphi)_t dt + \int_0^T (u \cdot \nabla u, \varphi)_t dt - r \int_0^T (b \cdot \nabla b, \varphi)_t dt$$
$$= \chi \int_0^T (\operatorname{rot} w, \varphi)_t dt + \int_0^T (f, \varphi)_t dt,$$
$$j \int_0^t (w_t, \phi)_t dt - \gamma \int_0^T (\Delta w, \phi)_t dt + \int_0^T (u \cdot \nabla w, \phi)_t dt + 2\chi \int_0^T (w, \phi)_t dt$$
$$-(\alpha + \beta) \int_0^T (\nabla \operatorname{div} w, \phi)_t dt = \chi \int_0^T (\operatorname{rot} u, \phi)_t dt + \int_0^T (g, \phi)_t dt,$$
$$\int_0^T (b_t, \psi)_t dt - \nu \int_0^T (\Delta b, \psi)_t dt + \int_0^T (u \cdot \nabla b, \psi)_t dt - \int_0^T (b \cdot \nabla u, \psi)_t dt = 0,$$

$\forall\ \varphi,\ \phi,\ \psi\ \in (C^1(\bar{\tilde{Q}}))^3$ *com soporte compacto* $\subset \tilde{Q}$, $\operatorname{div} \varphi = 0$, $\operatorname{div} \psi = 0$ *e* $u(0) = u_0$, $w(0) = w_0$, $b(0) = b_0$.

Observação 4.2 *Demonstra-se que se* (u, w, b) *é uma solução forte do problema (4.1)-(4.3), então* u_t, $b_t \in L^2(0, T; H(\Omega_t))$ *e* $w_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$.

Com uma mudança apropriada de variáveis o problema (4.1)-(4.3) definido sobre o domínio não cilíndrico $\tilde{Q}$, pode ser transformado em um problema definido sobre um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0, T)$. De fato, seja a transformação ϕ_t definida em (4.5) e a aplicação Φ, definida por

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{Q} &\longrightarrow Q \\ (x,t) &\longrightarrow (y,t) = (\phi_t(x), t) = (xR^{-1}(t), t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Com as hipóteses dadas sobre $R(t)$, deduz-se que Φ é um difeomorfismo de classe C^1 com inversa Φ^{-1} dada por

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : Q &\longrightarrow \tilde{Q} \\ (y,t) &\longrightarrow (x,t) = (\phi_t^{-1}(y), t) = (yR(t), t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde ϕ_t^{-1} é a transformação inversa de ϕ_t definida em (4.6). Além disso, $det\,(J\Phi) = det\,R(t)$ e $det\,(J\Phi^{-1}) = det\,R^{-1}(t)$.

Logo, usando a transformação Φ definimos as funções sobre o domínio cilíndrico Q:

$$\begin{aligned} v(y,t) &= u \circ \Phi^{-1}(y,t) = u(yR(t),t), & z(y,t) &= w \circ \Phi^{-1}(y,t) = w(yR(t),t), \\ h(y,t) &= b \circ \Phi^{-1}(y,t) = b(yR(t),t), & q(y,t) &= p \circ \Phi^{-1}(y,t) = p(yR(t),t), \\ \tilde{f}(y,t) &= f \circ \Phi^{-1}(y,t) = f(yR(t),t), & \tilde{g}(y,t) &= g \circ \Phi^{-1}(y,t) = g(yR(t),t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Desde que $R(t)R^{-1}(t) = I$, temos

$$R(t)(R^{-1}(t))' = -R'(t)R^{-1}(t). \tag{4.10}$$

Denotemos $R(t) = (\sigma_{ij}(t))_{i,j=1,2,3}$, $R^{-1}(t) = (\beta_{ij}(t))_{i,j=1,2,3}$ e $K(t) = (R^{-1}(t))^t$. Então, como $x = yR(t)$ e $y = xR^{-1}(t)$, com as notações sobre $R(t)$, têm-se:

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} y_j\, \sigma_{ji}(t) \quad \text{e} \quad y_j = \sum_{i=1}^{3} x_i\, \beta_{ij}(t), \quad \text{para } i,j = 1,2,3. \tag{4.11}$$

Assim, usando (4.9)-(4.11), obtêm-se as seguintes identidades:

$$u_t = -\sum_{i,k,l=1}^{3} \beta_{il}(t)\sigma'_{ki}(t) y_k \frac{\partial v}{\partial y_l} + v_t = -yR'(t)R^{-1}(t)\cdot \nabla v + v_t,$$

$$u \cdot \nabla u = \sum_{l=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} \beta_{il}(t) v_i\Big)\frac{\partial v}{\partial y_l} = vR^{-1}(t)\cdot \nabla v,$$

$$\triangle u = \sum_{i,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\sum_{k=1}^{3} \beta_{kl}(t)\beta_{ki}(t)\frac{\partial v}{\partial y_l}\Big) = \tilde{\triangle} v \quad \text{com} \quad \tilde{\triangle} = \sum_{i,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\sum_{k=1}^{3} \beta_{kl}(t)\beta_{ki}(t)\frac{\partial}{\partial y_l}\Big),$$

$$\nabla p = \sum_{j=1}^{3} (\beta_{1j}(t), \beta_{2j}(t), \beta_{3j}(t))\frac{\partial q}{\partial y_j} = \nabla q\, K(t),$$

$$\nabla (b\cdot b) = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij}(t)\frac{\partial}{\partial y_j}(h\cdot h) = \nabla (h\cdot h)\, K(t),$$

$$\nabla \mathrm{div}\, w = \sum_{j=1}^{3} (\beta_{1j}(t), \beta_{2j}(t), \beta_{3j}(t))\frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\sum_{k,l=1}^{3} \beta_{kl}(t)\frac{\partial z_k}{\partial y_l}\Big) = \nabla \mathrm{div}(zR^{-1}(t))\, K(t),$$

$$\mathrm{div}\, u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\sum_{i=1}^{3} \beta_{ij}(t) v_i\Big) = \mathrm{div}\,(vR^{-1}(t)),$$

$$\mathrm{rot}\, w = \sum_{k=1}^{3}\Big(\beta_{2k}(t)\frac{\partial z_3}{\partial y_k} - \beta_{3k}(t)\frac{\partial z_2}{\partial y_k}, \beta_{3k}(t)\frac{\partial z_1}{\partial y_k} - \beta_{1k}(t)\frac{\partial z_3}{\partial y_k}, \beta_{1k}(t)\frac{\partial z_2}{\partial y_k} - \beta_{2k}(t)\frac{\partial z_1}{\partial y_k}\Big),$$

isto é, $\mathrm{rot}\, w = \sum_{i=1}^{3} \nabla z_i A_i(t)$ onde $A_i(t) = K(t)K_{ii}(-1)K_{\alpha_i}(-1)K_{\alpha_i\gamma_i}$ com

$$\alpha_i = (-1)^i + \Big(\frac{4+(2-i)(3-i)}{2}\Big), \quad \gamma_i = (-1)^{i+1} + \Big(\frac{4+(2-i)(i-1)}{2}\Big)$$

e $K_{ii}(-1)$, $K_{\alpha_i}(-1)$, $K_{\alpha_i\gamma_i}$ transformações elementares de matrizes:

$K_{ik}(\theta)$ multiplica por θ a $k-$ésima coluna e logo soma na $i-$ésima coluna,

$K_{\alpha_i}(\theta)$ multiplica por θ a α_i-ésima coluna,

$K_{\alpha_i\gamma_i}$ intercambia a α_i-ésima coluna com a γ_i-ésima coluna.

Portanto, usando as identidades acima, o sistema (4.1)-(4.3) definido sobre $\tilde{Q}$ é transformado no seguinte sistema definido sobre Q:

$$v_t - (\mu+\chi)\tilde{\triangle}v + vR^{-1}(t)\cdot\nabla v - yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v + \nabla(q+\frac{r}{2}h\cdot h)K(t)$$
$$= \tilde{f} + rhR^{-1}(t)\cdot\nabla h + \chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i A_i(t), \tag{4.12}$$
$$jz_t - \gamma\tilde{\triangle}z - (\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(zR^{-1}(t))K(t) + jvR^{-1}(t)\cdot\nabla z$$
$$-jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z + 2\chi z = \tilde{g} + \chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i A_i(t), \tag{4.13}$$
$$h_t - \nu\tilde{\triangle}h - yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h + vR^{-1}(t)\cdot\nabla h - hR^{-1}(t)\cdot\nabla v = 0, \tag{4.14}$$
$$\mathrm{div}\,(vM^{-1}) = 0,\quad \mathrm{div}\,(hM^{-1}) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.15}$$
$$v(y,t) = z(y,t) = h(y,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T), \tag{4.16}$$
$$v(y,0) = v_0(y),\quad z(y,0) = z_0(y),\quad h(y,0) = h_0(y) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{4.17}$$

Observação 4.3 *No que segue do capítulo, a norma de uma matriz será denotada por* $||.||$, *desde que em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Também,* c *denotará uma constante genérica dependendo apenas de* Ω, *dos parâmetros fixados no problema* μ, χ, j, ν, r, α, β *e de* $\max_{0\le t\le T}\{||R(t)||, ||R^{-1}(t)||, ||R'(t)||\}$. *Quando precisarmos distinguir as constantes ou fazer notar a dependência de algum parâmetro, denotaremos a constante por* C *com subíndices.*

4.2 Existência de soluções fracas

A seguir, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Com as hipóteses sobre* Ω_t. *Se* $u_0, b_0 \in H(\Omega_0)$, $w_0 \in L^2(\Omega_0)$ *e* $f, g \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$, *então existe uma solução fraca* (u,w,b) *de (4.1)-(4.3). Além disso,* $u, b \in C_{\mathrm{w}}([0,T];H(\Omega_t))\cap C([0,T];V^*_{3/2}(\Omega_t))$ *e* $w \in C_{\mathrm{w}}([0,T];L^2(\Omega_t))\cap C([0,T];H^{-3/2}(\Omega_t))$ *quase sempre.*

Para demonstrar o Teorema 4.1, primeiro usando a aplicação Φ definida em (4.7), transforma-se o problema (4.1)-(4.3) definido sobre $\tilde{Q}$ no problema (4.12)-(4.17) definido sobre o domínio cilíndrico Q. A seguir, encontra-se a existência das soluções fracas do problema transformado e logo usando Φ^{-1} definida em (4.8), retorna-se ao problema (4.1)-(4.3), demonstrando assim, em virtude do Lema 4.2 a existência de soluções fracas no domínio não cilíndrico $\tilde{Q}$.

Para provar a existência de soluções fracas do sistema transformado (4.12)-(4.17), usaremos o método de Galerkin espectral. Para isto, fixamos $s = 3/2$ e consideramos as bases Hilbertianas $\{\varphi^i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ de $\tilde{V}_s(\Omega)$ e $\{\psi^i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ de $H_0^s(\Omega)$, onde os elementos foram escolhidos com sendo as soluções dos problemas espectrais:

$$(\varphi^i, v)_s = \lambda_i(\varphi^i, v), \quad \forall\ v \in \tilde{V}_s(\Omega)$$
$$(\psi^i, w)_s = \tilde{\lambda}_i(\psi^i, w), \quad \forall\ w \in H_0^s(\Omega).$$

Seja $\tilde{V}^k = span\{\varphi^1(y), ..., \varphi^k(y)\} \subset \tilde{V}_s(\Omega)$ e $H_k = span\{\psi^1(y), ..., \psi^k(y)\} \subset H_0^s(\Omega)$. Para todo $k \geq 1$, definimos aproximações v^k, z^k e h^k de v, z e h respectivamente por meio das seguintes expansões finitas:

$$v^k(y,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\varphi^i(y), \quad z^k(y,t) = \sum_{i=1}^{k} d_{ik}(t)\psi^i(y), \quad h^k(y,t) = \sum_{i=1}^{k} e_{ik}(t)\varphi^i(y), \quad t \in (0,T),$$

satisfazendo as seguintes equações:

$$(v_t^k, \varphi) + (\mu + \chi)\tilde{a}(t; v^k, \varphi) + \tilde{b}(t; v^k, v^k, \varphi) - \tilde{c}(t; v^k, \varphi) = (\tilde{f}, \varphi)$$
$$+ r\tilde{b}(t; h^k, h^k, \varphi) + \chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i^k A_i(t), \varphi), \tag{4.18}$$

$$j(z_t^k, \phi) + \gamma\tilde{a}(t; z^k, \phi) + (\alpha + \beta)(\operatorname{div}(z^k R^{-1}(t)), \operatorname{div}(\phi^k R^{-1}(t))) + j\tilde{b}(t; v^k, z^k, \phi)$$
$$- j\tilde{c}(t; z^k, \phi) + 2\chi(z^k, \phi) = (\tilde{g}, \phi) + \chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i^k A_i(t), \phi), \tag{4.19}$$

$$(h_t^k, \psi) + \nu\tilde{a}(t; h^k, \psi) - \tilde{c}(t; h^k, \psi) + \tilde{b}(t; v^k, h^k, \psi) - \tilde{b}(t; h^k, v^k, \psi) = 0, \tag{4.20}$$

$\forall\ \varphi,\ \psi \in \tilde{V}^k$ e $\forall\ \phi \in H_k$,

$$v^k(0) = v_0^k, \quad z^k(0) = z_0^k, \quad h^k(0) = h_0^k, \tag{4.21}$$

onde $v_0^k \longrightarrow v_0,\ h_0^k \longrightarrow h_0$ em $\tilde{H}(\Omega)$ e $z_0^k \longrightarrow z_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$, com

$$\tilde{a}(t; u, w) = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \sum_{i,l=1}^{3} (\sum_{k=1}^{3} \beta_{kl}(t)\beta_{ki}(t)) \frac{\partial u_j}{\partial y_l} \frac{\partial w_j}{\partial y_i} dy = (\nabla u\, K(t), \nabla w\, K(t)),$$

$$\tilde{b}(t; u, v, w) = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \sum_{i,l=1}^{3} \beta_{il}(t) u_i \frac{\partial v_j}{\partial y_l} w_j dy = (uR^{-1}(t) \cdot \nabla v, w),$$

$$\tilde{c}(t; u, w) = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \sum_{i,l,k=1}^{3} \sigma'_{ki}(t)\beta_{il}(t) y_k \frac{\partial u_j}{\partial y_l} w_j dy = (yR'(t)R^{-1}(t) \cdot \nabla u, w),$$

para u, v, w no qual as integrais são bem definidas.

Observe-se que em (4.18) temos usado a igualdade

$$(\nabla(q + \frac{r}{2}h \cdot h)K(t), \varphi) = -(q + \frac{r}{2}h \cdot h, \operatorname{div}(\varphi R^{-1}(t))) = 0, \ \forall\ \varphi \in \tilde{V}^k.$$

Também, observe que para a forma trilinear $\tilde{b}$, pela Proposição 4.1 e (1.4), temos

$$\tilde{b}(t; u, v, v) = 0 \ \text{ e } \ \tilde{b}(t; u, v, w) = -\tilde{b}(t; u, w, v), \ \ \forall u \in \tilde{V}(\Omega), \ \forall v, w \in H_0^1(\Omega). \qquad (4.22)$$

Agora, note que as equações (4.18)-(4.21) formam um sistema de equações diferenciais ordinárias para os coeficientes $c_{ik}(t)$, $d_{ik}(t)$ e $e_{ik}(t)$, os quais definem as aproximações v^k, z^k e h^k em um intervalo de tempo $[0, t_k)$. Então, encontraremos algumas estimativas a priori independentes de k e t, que nos permitirão considerar $t_k = T$, também provaremos que (v^k, z^k, h^k) converge em algum sentido apropriado para a solução de (4.12)-(4.17) quando $k \longrightarrow \infty$.

Existência da solução fraca do problema transformado

De forma análoga à noção de solução fraca do problema (4.1)-(4.3), pode ser introduzida a definição de solução fraca para o problema (4.12)-(4.17). Com isto em mente, provaremos o seguinte lema:

Lema 4.3 *Com as hipóteses do Teorema 4.1, o sistema transformado (4.12)-(4.17) admite pelo menos uma solução fraca (v, z, h), com*

$$v, h \in L^2(0, T; \tilde{V}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \tilde{H}(\Omega)) \quad e \quad z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Prova. Como f, $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$, então $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, também $v_0, h_0 \in \tilde{H}(\Omega)$ e $z_0 \in L^2(\Omega)$. Assim, com estas hipóteses demonstraremos que (4.12)-(4.17) tem pelo menos uma solução fraca.

Colocando $\varphi = v^k$, $\phi = z^k$ e $\psi = rh^k$ em (4.18)-(4.20) respectivamente, têm-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^k\|^2 + (\mu + \chi)\|\nabla v^k K(t)\|^2 = (\tilde{f}, v^k) + \tilde{c}(t; v^k, v^k) + r\tilde{b}(t; h^k, h^k, v^k)$$
$$+\chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i^k A_i(t), v^k),$$

$$\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|z^k\|^2 + \gamma\|\nabla z^k K(t)\|^2 + (\alpha + \beta)|\operatorname{div}(z^k R^{-1}(t))|^2 + 2\chi\|z^k\|^2$$
$$= (\tilde{g}, z^k) + j\tilde{c}(t; z^k, z^k) + \chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i^k A_i(t), z^k),$$

$$\frac{r}{2}\frac{d}{dt}\|h^k\|^2 + r\nu\|\nabla h^k K(t)\|^2 = r\tilde{c}(t; h^k, h^k) + r\tilde{b}(t; h^k, v^k, h^k),$$

desde que por (4.22), $\tilde{b}(t; v^k, w, w) = 0$.

Somando as equações acima e observando que $\tilde{b}(t; h^k, h^k, v^k) + \tilde{b}(t; h^k, v^k, h^k) = 0$, obtem-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v^k\|^2 + j\|z^k\|^2 + r\|h^k\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla v^k K(t)\|^2 + \gamma\|\nabla z^k K(t)\|^2 \\
&\quad + r\nu\|\nabla h^k K(t)\|^2 + (\alpha+\beta)\|\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))\|^2 + 2\chi\|z^k\|^2 \\
&\quad = (\tilde{f}, v^k) + (\tilde{g}, z^k) + \tilde{c}(t; v^k, v^k) + j\tilde{c}(t; z^k, z^k) + r\tilde{c}(t; h^k, h^k) \\
&\qquad + \chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i^k A_i(t), v^k) + \chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i^k A_i(t), z^k).
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

A seguir, estimaremos o lado direito de (4.23). Usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
&|(\tilde{f}, v^k)| \le \|\tilde{f}\|\|v^k\| \le \frac{1}{2}\|\tilde{f}\|^2 + \frac{1}{2}\|v^k\|^2, \\
&|(\tilde{g}, z^k)| \le \|\tilde{g}\|\|z^k\| \le \frac{1}{4\chi}\|\tilde{g}\|^2 + 2\chi\|z^k\|^2, \\
&|\tilde{c}(t; v^k, v^k)| \le \frac{\mu+\chi}{4}\|\nabla v^k K(t)\|^2 + (\frac{\|R'(t)\|^2\|R^{-1}(t)\|^2\|R(t)\|^2}{\mu+\chi}\|y\|_{L^\infty}^2)\|v^k\|^2, \\
&|j\tilde{c}(t; z^k, z^k)| \le \frac{\gamma}{4}\|\nabla z^k K(t)\|^2 + (\frac{j\|R'(t)\|^2\|R^{-1}(t)\|^2\|R(t)\|^2}{\gamma}\|y\|_{L^\infty}^2)j\|z^k\|^2, \\
&|r\tilde{c}(t; h^k, h^k)| \le \frac{r\,\nu}{2}\|\nabla h^k K(t)\|^2 + (\frac{\|R'(t)\|^2\|R^{-1}(t)\|^2\|R(t)\|^2}{2\,\nu}\|y\|_{L^\infty}^2)r\|h^k\|^2, \\
&|\chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i^k A_i(t), v^k)| \le \frac{\gamma}{4}\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \frac{\chi^2}{\gamma}\|v^k\|^2, \\
&|\chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i^k A_i(t), z^k)| \le \frac{\mu+\chi}{4}\|\nabla v^k K(t)\|^2 + (\frac{\chi^2}{j(\mu+\chi)})j\|z^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Assim, levando estas estimativas em (4.23), resulta

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|v^k\|^2 + j\|z^k\|^2 + r\|h^k\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla v^k K(t)\|^2 + \gamma\|\nabla z^k K(t)\|^2 \\
&\quad + r\nu\|\nabla h^k K(t)\|^2) + 2(\alpha+\beta)\|\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))\|^2 \\
&\quad \le c\,(\|\tilde{f}\|^2 + \|\tilde{g}\|^2) + c\,(\|v^k\|^2 + j\|z^k\|^2 + r\|h^k\|^2),
\end{aligned}
$$

onde c é uma constante que depende de $\chi, \mu, \gamma, j, \|y\|_{L^\infty}$, $\max\limits_{0\le t\le T}\|R'(t)\|$, $\max\limits_{0\le t\le T}\|R^{-1}(t)\|$ e $\max\limits_{0\le t\le T}\|R(t)\|$.

Logo, integrando a última desigualdade de 0 a t, com $0 \leq t \leq T$, tem-se:

$$\begin{aligned}
&||v^k(t)||^2 + j||z^k(t)||^2 + r||h^k(t)||^2 + (\mu+\chi)\int_0^t ||\nabla v^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad +\gamma \int_0^t ||\nabla z^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau + r\nu \int_0^t ||\nabla h^k(\tau)K(\tau)|^2 d\tau \\
&\qquad \leq c \int_0^t (||\tilde{f}(\tau)||^2 + ||\tilde{g}(\tau)||^2) d\tau + c\int_0^t (||v^k(\tau)||^2 + j||z^k(\tau)||^2 + r||h^k(\tau)||^2) d\tau \\
&\qquad +||v^k(0)||^2 + j||z^k(0)||^2 + r||h^k(0)||^2. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Agora, pela escolha de v_0^k, z_0^k e h_0^k, existe uma constante c_1 independente de k tal que

$$||v_0^k|| \leq c_1||v_0||, \quad ||z_0^k|| \leq c_1||z_0|| \quad \text{e} \quad ||h_0^k|| \leq c_1||h_0||.$$

Então, desde que v_0, h_0, $z_0 \in L^2(\Omega)$ e $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, (4.24) implica

$$\begin{aligned}
&||v^k(t)||^2 + j||z^k(t)||^2 + r||h^k(t)||^2 + (\mu+\chi)\int_0^t ||\nabla v^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad +\gamma \int_0^t ||\nabla z^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau + r\nu \int_0^t ||\nabla h^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau \\
&\qquad \leq c + c\int_0^t (||v^k(\tau)||^2 + j||z^k(\tau)||^2 + r||h^k(\tau)||^2) d\tau.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall, temos

$$\begin{aligned}
&||v^k(t)||^2 + j||z^k(t)||^2 + r||h^k(t)||^2 + (\mu+\chi)\int_0^t ||\nabla v^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad +\gamma \int_0^t ||\nabla z^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau + r\nu \int_0^t ||\nabla h^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau \leq c. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Assim, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, temos que v^k, z^k e h^k existem globalmente em $t \in [0,T]$. Agora denotando $N = \max\limits_{0\leq t\leq T} ||R(t)||$, observamos que

$$\frac{1}{N^2}||\nabla v^k||^2 \leq \frac{1}{||R(t)||^2}||\nabla v^k||^2 = \frac{1}{||R(t)||^2}||\nabla v^k K(t)R(t)^t||^2 \leq ||\nabla v^k K(t)||^2,$$

logo,

$$\int_0^t ||\nabla v^k(\tau)||^2 d\tau \leq N^2 c.$$

Portanto, de (4.25) conclui-se

$$\{v^k\},\ \{h^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,T;\tilde{H}(\Omega)) \cap L^2(0,T;\tilde{V}(\Omega)) \qquad (4.26)$$

$$\text{e}\ \ \{z^k\}\ \text{é uniformemente limitada em}\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.27}$$

A seguir, mostraremos que $\{v_t^k\}$ e $\{h_t^k\}$ são uniformemente limitadas em $L^2(0,T;\tilde{V}_s^*(\Omega))$ e que $\{z_t^k\}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))$.

Consideremos $P_k : \tilde{H}(\Omega) \longrightarrow \tilde{V}^k$ e $R_k : L^2(\Omega) \longrightarrow H_k$, projeções definidas por

$$P_k u = \sum_{i=1}^{k}(u,\varphi^i)\varphi^i \quad \text{e} \quad R_k w = \sum_{i=1}^{k}(w,\psi^i)\psi^i.$$

Desde que $\tilde{V}_s(\Omega) \hookrightarrow \tilde{H}(\Omega)$ e $\tilde{V}^k \hookrightarrow \tilde{V}_s(\Omega)$; $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $H_k \hookrightarrow H_0^s(\Omega)$, podemos considerar as restrições

$$P_k : \tilde{V}_s(\Omega) \longrightarrow \tilde{V}_s(\Omega) \qquad \text{e} \qquad R_k : H_0^s(\Omega) \longrightarrow H_0^s(\Omega),$$

que são lineares e contínuas, portanto

$$P_k^* : \tilde{V}_s^*(\Omega) \longrightarrow \tilde{V}_s^*(\Omega) \qquad \text{e} \qquad R_k^* : H^{-s}(\Omega) \longrightarrow H^{-s}(\Omega),$$

definidas por:

$$\begin{aligned}
\langle P_k^* v,\omega\rangle &= \langle v, P_k\omega\rangle,\ \forall\, v\in \tilde{V}_s^*(\Omega),\ \forall\,\omega\in\tilde{V}_s(\Omega)\quad \text{e}\\
\langle R_k^* u,\theta\rangle &= \langle u, R_k\theta\rangle,\ \forall\, u\in H^{-s}(\Omega),\ \forall\,\theta\in H_0^s(\Omega),
\end{aligned}$$

são lineares e contínuas, também $\|P_k^*\| \le \|P_k\| \le 1$ e $\|R_k^*\| \le \|R_k\| \le 1$. Além disso,

$$P_k(\varphi^i) = \varphi^i \qquad \text{e} \qquad R_k(\psi^i) = \psi^i.$$

Então, para u, w, b apropriados, denotando

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(t;u,w) &= \langle -\tilde{\Delta} u, w\rangle,\\
\tilde{b}(t;u,b,w) &= \langle uR^{-1}(t)\cdot\nabla b, w\rangle,\\
\tilde{c}(t;u,w) &= \langle yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla b, w\rangle
\end{aligned}$$

e observando (4.18)-(4.20), $\forall\,\omega,\ \eta\in\tilde{V}^k$ e $\forall\,\xi\in H_k$, têm-se:

$$\begin{aligned}
(v_t^k,\omega) &= \langle\ (\mu+\chi)\tilde{\Delta}v^k - v^kR^{-1}(t)\cdot\nabla v^k + yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k + \tilde{f}\\
&\qquad + rh^kR^{-1}(t)\cdot\nabla h^k + \chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t),\omega\ \rangle,\\
j(z_t^k,\xi) &= \langle\ \gamma\tilde{\Delta}z^k - jv^kR^{-1}(t)\cdot\nabla z^k + jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k - 2\chi z^k\\
&\qquad + (\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^kR^{-1}(t))K(t) + \tilde{g} + \chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t),\xi\ \rangle,\\
(h_t^k,\eta) &= \langle\ \nu\tilde{\Delta}h^k + yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k - v^kR^{-1}(t)\cdot\nabla h^k + h^kR^{-1}(t)\cdot\nabla v^k,\eta\ \rangle.
\end{aligned}$$

Tomando $\omega = P_k u$, $\eta = P_k b$ com $u, b \in \tilde{V}_s(\Omega)$ e $\xi = R_k w$ com $w \in H_0^s(\Omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
(v_t^k, u) = \langle\ & P_k^*(\,(\mu+\chi)\tilde{\Delta} v^k) - P_k^*(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) + P_k^*(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) \\
& + P_k^*(\tilde{f}) + P_k^*(rh^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) + P_k^*(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t)), u\ \rangle, \qquad (4.28)\\
j(z_t^k, w) = \langle\ & R_k^*(\gamma\tilde{\Delta} z^k) - R_k^*(jv^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k) + R_k^*(jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k) \\
& - R_k^*(2\chi z^k) + R_k^*((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))K(t)) + R_k^*(\tilde{g}) \\
& + R_k^*(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t)), w\ \rangle, \qquad (4.29)\\
(h_t^k, b) = \langle\ & P_k^*(\nu\tilde{\Delta} h^k) + P_k^*(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) - P_k^*(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) \\
& + P_k^*(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k), b\ \rangle. \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

A seguir, observe-se que

$$
\begin{aligned}
\|P_k^*(\,(\mu+\chi)\tilde{\Delta} v^k\,)\|_{\tilde{V}_s^*} &\le (\mu+\chi)\sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} |<\tilde{\Delta} v^k, u>| \\
&\le (\mu+\chi)\sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} |(\,\nabla v^k K(t), \nabla u K(t)\,)| \\
&\le (\mu+\chi)\sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} \|\nabla v^k K(t)\|\|\nabla u K(t)\| \\
&\le (\mu+\chi)\|R^{-1}(t)\|^2 \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} \|\nabla v^k\|\|\nabla u\| \\
&\le c\,(\mu+\chi)\max_{0\le t\le T}\{\|R^{-1}(t)\|^2\}\|\nabla v^k\| \le c\,\|\nabla v^k\|,
\end{aligned}
$$

então, tendo em conta (4.26), tem-se

$$
\int_0^t \|P_k^*(\,(\mu+\chi)\tilde{\Delta} v^k(\tau)\,)\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \le c\int_0^t \|\nabla v^k(\tau)\|^2 d\tau \le c. \qquad (4.31)
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\|P_k^*(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k)\|_{\tilde{V}_s^*} &\le \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} |<yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, u>| \\
&\le \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} \|R'(t)\|\|R^{-1}(t)\|\|y\|_\infty\|\nabla v^k\|\|u\| \\
&\le c\,\|R'(t)\|\|R^{-1}(t)\|\|y\|_\infty\|\nabla v^k\| \\
&\le c\max_{0\le t\le T}\{\|R'(t)\|\|R^{-1}(t)\|\}\|y\|_\infty\|\nabla v^k\|,
\end{aligned}
$$

então,

$$
\int_0^t \|P_k^*(yR'(\tau)R^{-1}(\tau)\cdot\nabla v^k(\tau))\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \le c\int_0^t \|\nabla v^k(\tau)\|^2 d\tau \le c. \qquad (4.32)
$$

Também,

$$\int_0^t \|P_k^*\tilde{f}(\tau)\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \le c\int_0^t \|\tilde{f}(\tau)\|^2 d\tau \le c. \tag{4.33}$$

Observando que

$$\begin{aligned}\|P_k^*(\chi\sum_{i=1}^3 \nabla z_i^k A_i(t))\|_{\tilde{V}_s^*} &\le \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} |<\chi\sum_{i=1}^3 \nabla z_i^k A_i(t), u>| \\ &\le c\,\|R^{-1}(t)\|\|\nabla z^k\| \le c\,\|\nabla z^k\|,\end{aligned}$$

e levando em conta (4.27), temos

$$\int_0^t \|P_k^*(\chi\sum_{i=1}^3 \nabla z_i^k(\tau)A_i(\tau))\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \le c\int_0^t \|\nabla z^k(\tau)\|^2 d\tau \le c. \tag{4.34}$$

Agora, para estimar o termo $P_k^*(v^k R^{-1}(t).\nabla v^k)$, usaremos o seguinte lema ([22], p. 73):

Lema 4.4 *Se $\{u^k\}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;V(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, então $\{u^k\}$ é limitada em $L^4(0,T;L^p(\Omega))$ onde $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.*

Observe-se que em virtude do Lema 4.1, podemos usar o resultado dado no Lema 4.4, desde que $\{v^k\}$ é limitada em $L^2(0,T;\tilde{V}(\Omega))\cap L^\infty(0,T;\tilde{H}(\Omega))$.

Então, usando a imersão de Sobolev $H^{s-1}\hookrightarrow L^3(\Omega)$ $(s=\frac{3}{2})$, temos

$$\begin{aligned}\|P_k^*(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k)\|_{\tilde{V}_s^*} &\le \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} |<v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, u>| \\ &\le \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1} \|v^k R^{-1}(t)\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^3}\|v^k\|_{L^3} \\ &\le c\,\|R^{-1}(t)\|\|v^k\|_{L^3}^2 \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1}\|\nabla u\|_{H^{s-1}} \\ &\le c\,\|R^{-1}(t)\|\|v^k\|_{L^3}^2 \sup_{\|u\|_{\tilde{V}_s}\le 1}\|u\|_{H^s} \\ &\le c\,\|R^{-1}(t)\|\|v^k\|_{L^3}^2 \le c\,\|v^k\|_{L^3}^2,\end{aligned}$$

e de (4.26) usando o Lema 4.4 $(n=3)$, temos que $\{v^k\}$ é limitada em $L^4(0,T;L^3(\Omega))$. Portanto, obtem-se

$$\int_0^t \|P_k^*(v^k(\tau)R^{-1}(\tau)\cdot\nabla v^k(\tau))\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \le c\int_0^t \|v^k(\tau)\|_{L^3}^4 d\tau \le c. \tag{4.35}$$

Similarmente,

$$\int_0^t \|P_k^*(rh^k(\tau)R^{-1}(\tau)\cdot\nabla h^k(\tau))\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \le c\int_0^t \|h^k(\tau)\|_{L^3}^4 d\tau \le c. \tag{4.36}$$

Portanto, levando (4.31)-(4.36) em (4.28), implica que

$$\int_0^t \|v_t^k(\tau)\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \leq c.$$

De forma análoga, demonstra-se que

$$\int_0^t \|h_t^k(\tau)\|_{\tilde{V}_s^*}^2 d\tau \leq c.$$

Assim, conclui-se que

$$\{v_t^k\} \text{ e } \{h_t^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^2(0,T;\tilde{V}_s^*(\Omega)). \tag{4.37}$$

De (4.29), tem-se

$$\begin{aligned} j\|z_t^k\|_{H^{-s}} \leq\ & \|R_k^*(\gamma\tilde{\Delta}z^k)\|_{H^{-s}} + \|R_k^*(g_1)\|_{H^{-s}} + \|R_k^*(jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k)\|_{H^{-s}} \\ & + \|R_k^*(jv^kR^{-1}(t)\cdot\nabla z^k)\|_{H^{-s}} + \|R_k^*(2\chi z^k)\|_{H^{-s}} + \|R_k^*(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t))\|_{H^{-s}} \\ & + \|R_k^*((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^kR^{-1}(t))K(t))\|_{H^{-s}} \end{aligned} \tag{4.38}$$

Estimaremos somente o último termo de (4.38), desde que os outros termos são estimados de forma análoga às obtidas anteriormente.

Temos que

$$\begin{aligned} & \|R_k^*((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^kR^{-1}(t))K(t))\|_{H^{-s}} \\ & \quad \leq c \sup_{\|w\|_{H^s}\leq 1} |<\nabla\mathrm{div}(z^kR^{-1}(t))K(t), w>| \\ & \quad \leq c \sup_{\|w\|_{H^s}\leq 1} |(\mathrm{div}(z^kR^{-1}(t)), \mathrm{div}(wR^{-1}(t)))| \\ & \quad \leq c \sup_{\|w\|_{H^s}\leq 1} \|\nabla(z^kR^{-1}(t))\|\|\nabla(wR^{-1}(t))\| \\ & \quad \leq c\|R^{-1}(t)\|^2\|\nabla z^k\| \sup_{\|w\|_{H^s}\leq 1} \|w\|_{H^1} \leq c\|\nabla z^k\| \end{aligned}$$

e observando (4.27), obtemos

$$\int_0^t \|R_k^*((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^k(\tau)R^{-1}(\tau))K(\tau))\|_{H^{-s}}^2 d\tau \leq c\int_0^t \|\nabla z^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c.$$

Portanto, conclui-se que

$$\{z_t^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)). \tag{4.39}$$

Assim, de (4.26) e (4.37), usando o Lema de Aubin-Lions (Lema 1.4, Cap. 1), com $B_0 = \tilde{V}(\Omega)$, $p_0 = 2$, $B = \tilde{H}(\Omega)$, $B_1 = \tilde{V}_s^*(\Omega)$ e $p_1 = 2$, temos que existem $v,\ h \in L^2(0,T;\tilde{V}(\Omega))$ e subsequências de $\{v^k\}$ e $\{h^k\}$ tais que quando $k \longrightarrow \infty$, têm-se

$$\begin{aligned}
&v^k \longrightarrow v \ \text{ e } \ h^k \longrightarrow h \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;\tilde{V}(\Omega)),\\
&v^k \longrightarrow v \ \text{ e } \ h^k \longrightarrow h \ \text{ fraco} -* \text{ em } \ L^\infty(0,T;\tilde{H}(\Omega)),\\
&v_t^k \longrightarrow v_t \ \text{ e } \ h_t^k \longrightarrow h_t \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;\tilde{V}_s^*(\Omega)),\\
&v^k \longrightarrow v \ \text{ e } \ h^k \longrightarrow h \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;\tilde{H}(\Omega)),
\end{aligned}$$

Analogamente, de (4.27) e (4.39) com $B_0 = H_0^1(\Omega)$, $p_0 = 2$, $B_1 = H^{-s}(\Omega)$, $p_1 = 2$ e $B = L^2(\Omega)$, temos que existe $z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e uma subsequência de $\{z^k\}$ tal que quando $k \longrightarrow \infty$, têm-se

$$\begin{aligned}
&z^k \longrightarrow z \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&z^k \longrightarrow z \ \text{ fraco} -* \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&z_t^k \longrightarrow z_t \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)),\\
&z^k \longrightarrow z \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Passando ao limite em (4.18)-(4.20) de forma usual como em Lions ([22], p. 76), obtem-se que (v,z,h) é uma solução fraca do problema (4.12)-(4.17), satisfazendo

$$\begin{aligned}
&(v_t(t),\varphi) + (\mu+\chi)(\nabla v(t)K(t),\nabla\varphi K(t)) + (v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t),\varphi)\\
&\qquad -(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t),\varphi) = (\tilde{f}(t),\varphi) + r(h(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h(t),\varphi)\\
&\qquad +\chi\Big(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i(t)A_i(t),\varphi\Big), \qquad (4.40)\\
&j(z_t(t),\phi) + \gamma(\nabla z(t)K(t),\nabla\phi K(t)) + (\alpha+\beta)(\operatorname{div}(z(t)R^{-1}(t)),\operatorname{div}(\phi R^{-1}(t)))\\
&\qquad +j(v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z(t),\phi) - j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z(t),\phi) + 2\chi(z(t),\phi)\\
&\qquad = (\tilde{g}(t),\phi) + \chi\Big(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i(t)A_i(t),\phi\Big), \qquad (4.41)\\
&(h_t(t),\psi) + \nu(\nabla h(t)K(t),\nabla\psi K(t)) - (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h(t),\psi)\\
&\qquad +(v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h(t),\psi) - (h(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t),\psi) = 0, \qquad (4.42)\\
&\forall\,\varphi,\ \psi \in \tilde{V}(\Omega) \ \text{ e } \ \forall\,\phi \in H_0^1(\Omega),\\
&v(0) = v_0,\ z(0) = z_0,\ h(0) = h_0, \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

no sentido das distribuições sobre $(0,T)$. Isto completa a prova do Lema 4.3.

Observe-se que (4.40) e (4.42) são válidos $\forall\ \varphi,\ \psi\ \in \mathcal{V}(\Omega)$.

Prova do Teorema 4.1

Pelo Lema 4.3, tem-se que existe uma solução fraca (v, z, h) do problema transformado (4.12)-(4.17). Logo, para provar o teorema, observe-se que a solução fraca (v, z, h), satisfaz:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (v,\tilde{\varphi}_t)dt + (\mu+\chi)\int_0^T \tilde{a}(t;v,\tilde{\varphi})dt + \int_0^T \tilde{b}(t;v,v,\tilde{\varphi})dt - \int_0^T \tilde{c}(t;v,\tilde{\varphi})dt \\
&\qquad = \int_0^T (\tilde{f},\tilde{\varphi})dt + r\int_0^T \tilde{b}(t;h,h,\tilde{\varphi})dt + \chi\int_0^T (\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i A_i(t),\tilde{\varphi})dt, \qquad (4.44)\\
&-j\int_0^T (z,\tilde{\phi}_t)dt + \gamma\int_0^T \tilde{a}(t;z,\tilde{\phi})dt + (\alpha+\beta)\int_0^T (\mathrm{div}(zR^{-1}(t)), \mathrm{div}\,(\tilde{\phi}R^{-1}(t)))dt \\
&\qquad +j\int_0^T \tilde{b}(t;v,z,\tilde{\phi})dt - j\int_0^T \tilde{c}(t;z,\tilde{\phi})dt + 2\chi\int_0^T (z,\tilde{\phi})dt \\
&\qquad\qquad = \int_0^T (\tilde{g},\tilde{\phi})dt + \chi\int_0^T (\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i A_i(t),\tilde{\phi})dt, \qquad (4.45)\\
&-\int_0^T (h,\tilde{\psi}_t)dt + \nu\int_0^T \tilde{a}(t;h,\tilde{\psi})dt - \int_0^T \tilde{c}(t;h,\tilde{\psi})dt + \int_0^T \tilde{b}(t;v,h,\tilde{\psi})dt \\
&\qquad\qquad -\int_0^T \tilde{b}(t;h,v,\tilde{\psi})dt = 0, \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

$\forall\, \tilde{\varphi},\ \tilde{\psi},\ \tilde{\phi}\ \in (C^1(\bar{Q}))^3$ com soporte compacto $\subset Q$, $\mathrm{div}\,(\tilde{\varphi}M^{-1}) = \mathrm{div}\,(\tilde{\psi}M^{-1}) = 0$.

A seguir, consideremos as funções testes $\varphi,\ \phi,\ \psi\ \in\ (C^1(\bar{\tilde{Q}}))^3$ com soportes compactos contidos em $\tilde{Q}$ tais que $\mathrm{div}\,\varphi = 0$, $\mathrm{div}\,\psi = 0$ e definimos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(y,t) &= det\, R(t)\, \varphi(yR(t),t),\\
\tilde{\phi}(y,t) &= det\, R(t)\, \phi(yR(t),t),\\
\tilde{\psi}(y,t) &= det\, R(t)\, \psi(yR(t),t).
\end{aligned}
$$

Verifica-se que $\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi},\ \tilde{\phi} \in (C^1(\bar{Q}))^3$, que os soportes de $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\phi}$ são compactos contidos em Q e que $\mathrm{div}\,(\tilde{\varphi}M^{-1}) = 0$, $\mathrm{div}\,(\tilde{\psi}M^{-1}) = 0$.

Integrando por partes têm-se que

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (v,\tilde{\varphi}_t)dt - \int_0^T \tilde{c}(t;v,\tilde{\varphi})dt = -\int_0^T det\, R(t)\,(v,\varphi_t)dt,\\
&\int_0^T \tilde{a}(t;v,\tilde{\varphi})dt = \int_0^T det\, R(t) \sum_{j=1}^{3}\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{kl}(t)\frac{\partial v_j}{\partial y_l}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}dy\, dt,
\end{aligned}
$$

$$\int_0^T \tilde{b}(t; v, v, \tilde{\varphi})dt = -\sum_{k,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t)\, (v_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} v_j) dy dt,$$

$$\int_0^T (\mathrm{div}(zR^{-1}(t)), \mathrm{div}\,(\tilde{\phi}R^{-1}(t)))dt = \int_0^T det\, R(t)\, (\sum_{k,l=1}^{3} \beta_{kl}(t) \frac{\partial z_k}{\partial y_l},\ \mathrm{div}\phi)dt,$$

onde x_k é a k-ésima coordenada de $yR(t)$. Usando as identidades obtidas acima em (4.44)-(4.46), temos

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T det\, R(t)\, (v, \varphi_t)dt + (\mu + \chi) \sum_{j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t) \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{kl}(t) \frac{\partial v_j}{\partial y_l} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dy dt \\
&- \sum_{k,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t)\, (v_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} v_j) dy dt = \int_0^T det\, R(t)\, (\tilde{f}, \varphi)\, dt \\
&-r \sum_{k,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t)\, (h_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} h_j) dy dt + \chi \int_0^T det\, R(t)\, (\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i A_i(t), \varphi)\, dt,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
&-j \int_0^T det\, R(t)\, (z, \phi_t)dt + \gamma \sum_{j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t) \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{kl}(t) \frac{\partial z_j}{\partial y_l} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} dy dt \\
&\quad +(\alpha + \beta) \int_0^T det\, R(t)\, (\sum_{k,l=1}^{3} \beta_{kl}(t) \frac{\partial z_k}{\partial y_l}, \mathrm{div}\, \phi)\, dt \\
&\quad\quad -j \sum_{k,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t)\, (v_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} z_j) dy dt + 2\chi \int_0^T det\, R(t)\, (z, \phi) dt \\
&\quad\quad\quad = \int_0^T detR(t)(\tilde{g}, \phi)dt + \chi \int_0^T det\, R(t)\, (\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i A_i(t), \phi)dt,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T det\, R(t)\, (h, \psi_t)dt + \nu \sum_{j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t) \sum_{k,l=1}^{3} \beta_{kl}(t) \frac{\partial h_j}{\partial y_l} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} dy dt \\
&+ \sum_{k,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t)\, (h_k \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} v_j) dy dt = \sum_{k,j=1}^{3} \int_0^T \int_\Omega det\, R(t)\, (v_k \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} h_j) dy dt.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Agora, consideremos a transformação inversa

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1} : Q &\longrightarrow \tilde{Q} \\
(y, t) &\longrightarrow (yR(t), t),
\end{aligned}$$

e observemos que $det\,(J\Phi^{-1}) = det\,R^{-1}(t)$. Portanto, tendo em conta (4.9) e fazendo uma mudança de variáveis nas integrais acima, temos:

$$-\int_0^T (u,\varphi_t)_t\,dt + (\mu+\chi)\sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\,dx\,dt - \sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t}u_k\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}u_j\,dx\,dt$$

$$= \int_0^T (f,\varphi)_t\,dt - r\sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t} b_k\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}b_j + \chi\int_0^T(\mathrm{rot}\,w,\varphi)_t\,dt, \qquad (4.50)$$

$$-j\int_0^T (w,\phi_t)_t\,dt + \gamma\sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t}\frac{\partial w_j}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}\,dx\,dt + (\alpha+\beta)\int_0^T(\mathrm{div}\,w,\mathrm{div}\,\phi)_t\,dt$$

$$-j\sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t}u_k\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}w_j\,dx\,dt + 2\chi\int_0^T(w,\phi)_t\,dt$$

$$= \int_0^T (g,\phi)_t\,dt + \chi\int_0^T(\mathrm{rot}\,u,\phi)_t\,dt, \qquad (4.51)$$

$$-\int_0^T (b,\psi_t)_t\,dt + \nu\sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t}\frac{\partial b_j}{\partial x_k}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}\,dx\,dt + \sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t}b_k\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}u_j\,dx\,dt$$

$$= \sum_{k,j=1}^{3}\int_0^T\int_{\Omega_t}u_k\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}b_j\,dx\,dt. \qquad (4.52)$$

Assim, (4.50)-(4.52) e o Lema 4.2, mostra que (u, w, b) é uma solução fraca de (4.1)-(4.3) e segue-se que

$$u,\, b \in L^2(0,T;V(\Omega_t)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega_t))$$
$$w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)).$$

Por argumentos usuais demonstra-se que $u(0) = u_0$, $w(0) = w_0$ e $b(0) = b_0$.

4.3 Existência de soluções fortes

4.3.1 Existência e unicidade da solução

Un análogo ao Teorema 1.5, é o seguinte resultado:

Teorema 4.2 *Com as hipóteses sobre Ω_t. Se $u_0, b_0 \in V(\Omega_0)$, $w_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ e $f, g \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$, então existe $T_1, 0 < T_1 \leq T$, tal que o problema (4.1)-(4.3) tem uma única solução forte (u, w, b). Além disso,*

$$u,\, b \in C([0,T_1];V(\Omega_t)) \quad e \quad w \in C([0,T_1];H_0^1(\Omega_t)).$$

Existência e unicidade da solução forte do problema transformado

Considerando a projeção ortogonal $\tilde{P} : (L^2(\Omega))^3 \longrightarrow \tilde{H}(\Omega)$, reformulamos o problema (4.12)-(4.17) como segue: encontrar

$$\begin{aligned} &v,\, h \in C([0,T]; \tilde{V}(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(\tilde{A})) \\ \text{e} \quad &z \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(\tilde{B})), \end{aligned}$$

satisfazendo:

$$\begin{aligned} &v_t + (\mu+\chi)\tilde{A}v + \tilde{P}(vR^{-1}(t)\cdot\nabla v) - \tilde{P}(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v) \\ &\qquad = \tilde{P}(\tilde{f}) + \tilde{P}(rhR^{-1}(t)\cdot\nabla h) + \tilde{P}(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i A_i(t)), \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} &jz_t + \gamma\tilde{B}z - (\alpha+\beta)\nabla\text{div}(zR^{-1}(t))K(t) + jvR^{-1}(t)\cdot\nabla z \\ &\qquad -jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z + 2\chi z = \tilde{g} + \chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i A_i(t), \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} &h_t + \nu\tilde{A}h - \tilde{P}(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h) + \tilde{P}(vR^{-1}(t)\cdot\nabla h) \\ &\qquad -\tilde{P}(hR^{-1}(t)\cdot\nabla v) = 0, \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$v(y,0) = v_0(y), \quad z(y,0) = z_0(y), \quad h(y,0) = h_0(y) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{4.56}$$

onde

$$\tilde{A} = -\tilde{P}\tilde{\triangle} \quad \text{e} \quad \tilde{B} = -\tilde{\triangle} \quad \text{com} \quad \tilde{\triangle} = \sum_{i,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_i}(\sum_{k=1}^{3}\beta_{kl}(t)\beta_{ki}(t)\frac{\partial}{\partial y_l}).$$

Observe-se que $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \hookrightarrow \tilde{H}(\Omega) \longrightarrow \tilde{H}(\Omega)$ e $\tilde{B} : D(\tilde{B}) \hookrightarrow L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ com domínio $D(\tilde{A}) = \tilde{V}(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e $D(\tilde{B}) = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ respectivamente, são operadores elíticos de segunda ordem e eles são caracterizados por:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}v, w) &= (\nabla v\, K(t), \nabla w\, K(t)), \quad \forall\, v \in D(\tilde{A}), \forall\, w \in \tilde{V}(\Omega), \\ (\tilde{B}z, u) &= (\nabla z\, K(t), \nabla u\, K(t)), \quad \forall\, z \in D(\tilde{B}), \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Também, temos que $\tilde{A}$ é um operador autoadjunto, positivo definido, com inversa $\tilde{A}^{-1} : \tilde{H}(\Omega) \longrightarrow \tilde{H}(\Omega)$ compacta.

De fato, para $u,\, w \in \tilde{V}(\Omega)$, facilmente mostra-se que

$$|(\tilde{A}v, w)| \le c\,\|v\|_{H^1}\|w\|_{H^1} \quad \text{e} \quad (\tilde{A}v, v) \ge c\,\|v\|_{H^1}^2.$$

Então, pelo Lema de Lax-Milgram, para cada $f \in \tilde{H}(\Omega) \equiv \tilde{H}^*(\Omega) \hookrightarrow \tilde{V}^*(\Omega)$, existe uma única $v \in \tilde{V}(\Omega)$ tal que

$$(\tilde{A}v, u) = (f, u), \quad \forall\, u \in \tilde{V}(\Omega), \quad \text{isto é} \quad (\tilde{A}v - f, u) = 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Logo, $-\tilde{\Delta}v - f = \nabla p M^{-t}$ para algum $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e desde que $\tilde{\Delta}v \in L^2(\Omega)$, resulta $p \in H^1(\Omega)$ ([40], p. 14).

Portanto, para cada $f \in \tilde{H}(\Omega)$, existe uma única $v \in \tilde{V}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tal que $\tilde{A}v = f$, assim, existe $\tilde{A}^{-1} : \tilde{H}(\Omega) \longrightarrow D(\tilde{A})$, além disso,

$$\|\tilde{A}^{-1}f\|_{H^1}^2 = \|\nabla v\|^2 \leq c\,\|\nabla v K(t)\|^2 = c\,|(\tilde{A}v, v)| = c\,|(f, v)| \leq c\,\|f\|\|v\| \leq \|f\|\|\tilde{A}^{-1}f\|_{H^1},$$

isto é, $\|\tilde{A}^{-1}f\|_{H^1} \leq c\,\|f\|$, o qual implica que $\tilde{A}^{-1}$ é contínua.

Agora, desde que $D(\tilde{A}) \hookrightarrow \tilde{V}(\Omega)$ denso e a injeção $\tilde{V}(\Omega) \hookrightarrow \tilde{H}(\Omega)$ é compacta (pois $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta) temos que $\tilde{A}^{-1} : \tilde{H}(\Omega) \longrightarrow \tilde{H}(\Omega)$ é compacta. Também é autoadjunta.

Então, por un resultado conhecido de analise funcional, o operador $\tilde{A}^{-1}$ tem uma sequência decrescente de autovalores positivos $\{\mu_i\}$ com $\mu_i \to 0$ quando $i \to \infty$, e uma sequência de autofunções $\{\tilde{\varphi}^i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\tilde{A}^{-1}\tilde{\varphi}^i = \mu_i\,\tilde{\varphi}^i$, logo considerando $\tilde{\lambda}_i = \dfrac{1}{\mu_i}$ e desde que $\tilde{A}^{-1}$ tem rango em $D(\tilde{A})$, temos

$$\tilde{A}\,\tilde{\varphi}^i = \tilde{\lambda}_i\,\tilde{\varphi}^i, \quad \tilde{\varphi}^i \in D(\tilde{A})$$

onde $0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \ldots \leq \tilde{\lambda}_i \leq \tilde{\lambda}_{i+1} \leq \ldots,\ \lim\limits_{i\to\infty} \tilde{\lambda}_i = \infty$.

Também, temos que $\{\tilde{\varphi}^i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal em $\tilde{H}(\Omega)$, $\{\frac{\tilde{\varphi}^i(y)}{\tilde{\lambda}_i^{1/2}}\}_{i=1}^{\infty}$ forma uma base ortonormal em $\tilde{V}(\Omega)$ (com produto interno $(\nabla u\,K(t), \nabla v\,K(t))$; $u, v \in \tilde{V}(\Omega)$) e $\{\frac{\tilde{\varphi}^i(y)}{\tilde{\lambda}_i}\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal em $H^2(\Omega) \cap \tilde{V}(\Omega)$ (com produto interno $(\tilde{A}u, \tilde{A}v)$; $u, v \in D(\tilde{A})$). Considerações análogas são válidas para o operador $\tilde{B}$ e denotaremos com $\tilde{\gamma}_i$ os autovalores e com $\tilde{\phi}^i(y)$ as respectivas autofunções de $\tilde{B}$.

Agora, para provar a existência da solução forte do sistema transformado (4.53)-(4.56) usaremos o método de Galerkin espectral, para isto, consideremos as bases Hilbertianas $\{\tilde{\varphi}^i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ de $\tilde{V}(\Omega)$ e $\{\tilde{\phi}^i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ de $H_0^1(\Omega)$, os subespaços $\tilde{V}^k = span\{\tilde{\varphi}^1(y), \ldots, \tilde{\varphi}^k(y)\} \subset \tilde{V}(\Omega)$ e $H_k = span\{\tilde{\phi}^1(y), \ldots, \tilde{\phi}^k(y)\} \subset H_0^1(\Omega)$ e as correspondentes projeções ortogonais $P_k : L^2(\Omega) \longrightarrow \tilde{V}^k$ e $R_k : L^2(\Omega) \longrightarrow H_k$.

Para todo $k \geq 1$, definimos aproximações v^k, z^k e h^k de v, z e h respectivamente por meio das seguintes expansões finitas:

$$v^k(y,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\tilde{\varphi}^i(y), \quad z^k(y,t) = \sum_{i=1}^{k} d_{ik}(t)\tilde{\phi}^i(y), \quad h^k(y,t) = \sum_{i=1}^{k} e_{ik}(t)\tilde{\varphi}^i(y), \quad t \in (0,T),$$

satisfazendo as seguintes equações:

$$v_t^k + (\mu + \chi)\tilde{A}v^k + P_k(v^k R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k) - P_k(y\,R'(t)\,R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k)$$

$$
\begin{aligned}
&= P_k(\tilde{f}) + rP_k(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) + P_k\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t)),\\
&j\, z_t^k + \gamma\tilde{B}z^k - (\alpha+\beta)R_k(\nabla\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))K(t)) + jR_k(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k)\\
&\quad -jR_k(y\,R'(t)\,R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k) + 2\,\chi\,R_k(z^k) = R_k(\tilde{g}) + \chi R_k(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t)),\\
&h_t^k + \nu\tilde{A}h^k - P_k(y\,R'(t)\,R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) + P_k(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k)\\
&\qquad -P_k(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) = 0,\\
&v^k(0) = P_k v_0 = v_0^k, \quad z^k(0) = R_k z_0 = z_0^k, \quad h^k(0) = P_k h_0 = h_0^k.
\end{aligned}
$$

Isto é equivalente à formulação fraca:

$$
\begin{aligned}
&(v_t^k,\varphi) + (\mu+\chi)(\tilde{A}v^k,\varphi) + (v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k,\varphi) - (y\,R'(t)\,R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k,\varphi)\\
&\qquad = (\tilde{f},\varphi) + r(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k,\varphi) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t),\varphi), \qquad (4.57)\\
&j(z_t^k,\phi) + \gamma(\tilde{B}z^k,\phi) - (\alpha+\beta)(\nabla\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))K(t),\phi) + j(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k,\phi)\\
&\qquad -j(y\,R'(t)\,R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k,\phi) + 2\chi(z^k,\phi)\\
&\qquad = (\tilde{g},\phi) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t),\phi), \qquad (4.58)\\
&(h_t^k,\psi) + \nu(\tilde{A}h^k,\psi) - (y\,R'(t)\,R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k,\psi) + (v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k,\psi)\\
&\qquad -(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k,\psi) = 0, \qquad (4.59)\\
&\forall\ \varphi,\ \psi\in\tilde{V}^k \quad \text{e} \quad \forall\ \phi\in H_k,\\
&v^k(0) = v_0^k, \quad z^k(0) = z_0^k, \quad h^k(0) = h_0^k. \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

A noção de solução forte para o problema (4.53)-(4.56) é dada de forma análoga à definição de solução forte do problema (4.1)-(4.3). Com isto em mente, a seguir provaremos o seguinte lema:

Lema 4.5 *Com as hipóteses do Teorema 4.2, o sistema transformado (4.53)-(4.56) admite uma única solução forte* (v,z,h) *em um intervalo* $[0,T_1]$ *com* $v,h\in L^\infty(0,T_1;\tilde{V}(\Omega))\cap L^2(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ *e* $z\in L^\infty(0,T_1;\, H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$. *Além disso,*

$$
\begin{aligned}
&v,h\in C([0,T_1];\tilde{V}(\Omega)), \quad z\in C([0,T_1];H_0^1(\Omega)),\\
&v_t,h_t\in L^2(0,T_1;\tilde{H}(\Omega)), \quad z_t\in L^2(0,T_1;L^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Prova. Como $f,\ g\in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$ então $\tilde{f},\ \tilde{g}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, também $v_0,h_0\in\tilde{V}(\Omega)$ e $z_0\in H_0^1(\Omega)$. Com estas hipóteses mostraremos que (4.53)-(4.56) tem uma única solução forte.

Colocando $\varphi = \tilde{A}v^k$ em (4.57), temos

$$(v_t^k, \tilde{A}v^k) + (\mu+\chi)\|\tilde{A}v^k\|^2 = -(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k) + (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k)$$
$$+(\tilde{f}, \tilde{A}v^k) + r(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, \tilde{A}v^k) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t), \tilde{A}v^k),$$

mas,

$$(v_t^k, \tilde{A}v^k) = (\nabla v_t^k K(t), \nabla v^k K(t)) \text{ e}$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v^k K(t)\|^2 = (v_t^k, \tilde{A}v^k) + (\nabla v^k K'(t), \nabla v^k K(t)),$$

então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v^k K(t)\|^2 + (\mu+\chi)\|\tilde{A}v^k\|^2 = (\nabla v^k K'(t), \nabla v^k K(t))$$
$$-(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k) + (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k) + (\tilde{f}, \tilde{A}v^k)$$
$$+r(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, \tilde{A}v^k) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t), \tilde{A}v^k). \tag{4.61}$$

Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Sobolev $\|u\|_{L^3} \le c\,\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}$ e a desigualdade de Young, estimaremos o lado direito de (4.61), como segue:

$$|(\nabla v^k K'(t), \nabla v^k K(t))| \le \|\nabla v^k K'(t)\|\|\nabla v^k K(t)\|$$
$$\le \|R'(t)\|\|R^{-1}(t)\|\|\nabla v^k K(t)\|^2 \le c\,\|\nabla v^k K(t)\|^2,$$
$$|(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k)| \le \|v^k R^{-1}(t)\|_{L^6}\|\nabla v^k\|_{L^3}\|\tilde{A}v^k\|$$
$$\le c\,\|\nabla(v^k R^{-1}(t))\|\,\|R(t)\|\,\|\nabla v^k K(t)\|_{L^3}\,\|\tilde{A}v^k\|$$
$$\le c\,\|R^{-1}(t)\|\|R(t)\|^2\|\nabla v^k K(t)\|^{3/2}\|\nabla(\nabla v^k K(t))\|^{1/2}\|\tilde{A}v^k\|$$
$$\le c\,\|R^{-1}(t)\|\|R(t)\|^2\|\nabla v^k K(t)\|^{3/2}\|\tilde{A}v^k\|^{3/2}$$
$$\le C_\epsilon\|\nabla v^k K(t)\|^6 + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2,$$
$$|(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k)| \le \|R'(t)\|\,\|R^{-1}(t)\|\,\|R(t)\|\,\|y\|_\infty\|\nabla v^k K(t)\|\,\|\tilde{A}v^k\|$$
$$\le C_\epsilon\|\nabla v^k K(t)\|^2 + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2,$$
$$|(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, \tilde{A}v^k)| \le C_\epsilon\|\nabla h^k K(t)\|^2\|\nabla h^k\|_{L^3}^2 + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2$$
$$\le C_\epsilon\|R(t)\|^2\|\nabla h^k K(t)\|^2\|\nabla h^k K(t)\|\|\nabla(\nabla h^k K(t))\| + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2$$
$$\le C_\epsilon\|R(t)\|^2\|\nabla h^k K(t)\|^3\|\tilde{A}h^k\| + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2$$
$$\le C_{\epsilon,\delta}\|\nabla h^k K(t)\|^6 + \delta\|\tilde{A}h^k\|^2 + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2,$$
$$|(\tilde{f}, \tilde{A}v^k)| \le C_\epsilon\|\tilde{f}\|^2 + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2,$$
$$|(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t), \tilde{A}v^k)| \le \|R^{-1}(t)\|\|R(t)\|\|\nabla z^k K(t)\|\|\tilde{A}v^k\|$$
$$\le C_\epsilon\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2,$$

desde que $K'(t) = -K(t)(R'(t))^t K(t)$, $\nabla(v^k R^{-1}(t)) = K(t)\nabla v^k$ e $\|\nabla(\nabla v^k K(t))\| \leq c\,\|\tilde{A}v^k\|$.

Usando estas estimativas em (4.61), para qualquer $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v^k K(t)\|^2 &+ (\mu+\chi)\|\tilde{A}v^k\|^2 \\ &\leq c\,\|\nabla v^k K(t)\|^2 + c\,\|\nabla z^k K(t)\|^2 + c\,\|\nabla v^k K(t)\|^6 \\ &\quad + c\,\|\nabla h^k K(t)\|^6 + 5\epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2 + \delta\|\tilde{A}h^k\|^2 + c\,\|\tilde{f}\|^2. \qquad (4.62)\end{aligned}$$

Observemos que $\tilde{L}z = \gamma\tilde{B}z - (\alpha+\beta)\nabla\text{div}\,(zR^{-1}(t))K(t)$ é um operador fortemente elítico de segunda ordem, então

$$(\tilde{L}z, \tilde{B}z) \geq \gamma\|\tilde{B}z\|^2 - N_0\,\|\nabla z\,K(t)\|^2, \qquad (4.63)$$

onde N_0 depende apenas de γ, $\alpha+\beta$, $\|R^{-1}(t)\|$ e $\partial\Omega$ ([17], p. 70).

Logo, colocando $\phi = \tilde{B}z^k$ em (4.58) e usando (4.63), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \gamma\|\tilde{B}z^k\|^2 &\leq N_0\|\nabla z^k K(t)\|^2 + j(\nabla z^k K'(t), \nabla z^k K(t)) \\ &\quad - j(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, \tilde{B}z^k) + j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, \tilde{B}z^k) \\ &\quad - 2\chi(z^k, \tilde{B}z^k) + (\tilde{g}, \tilde{B}z^k) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t), \tilde{B}z^k). \qquad (4.64)\end{aligned}$$

Para os termos do lado direito de (4.64), temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}|(\nabla z^k K'(t), \nabla z^k K(t))| &\leq c\,\|\nabla z^k K(t)\|^2 \\ |(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, \tilde{B}z^k)| &\leq C_\sigma\|\nabla v^k K(t)\|^4\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \sigma\|\tilde{B}z^k\|^2 \\ |(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, \tilde{B}z^k)| &\leq C_\sigma\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \sigma\|\tilde{B}z^k\|^2 \\ |(z^k, \tilde{B}z^k)| &\leq C_\sigma\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \sigma\|\tilde{B}z^k\|^2 \\ |(\tilde{g}, \tilde{B}z^k)| &\leq C_\sigma\|\tilde{g}\|^2 + \sigma\|\tilde{B}z^k\|^2 \\ |(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t), \tilde{B}z^k)| &\leq C_\sigma\|\nabla v^k K(t)\|^2 + \sigma\|\tilde{B}z^k\|^2.\end{aligned}$$

Levando estas estimativas em (4.64), para qualquer $\sigma > 0$, obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \gamma\|\tilde{B}z^k\|^2 &\leq c\,\|\nabla z^k K(t)\|^2 + c\,\|\nabla v^k K(t)\|^2 + 5\sigma\|\tilde{B}z^k\|^2 \\ &\quad + c\,\|\nabla v^k K(t)\|^4\|\nabla z^k K(t)\|^2 + c\,\|\tilde{g}\|^2. \qquad (4.65)\end{aligned}$$

Analogamente como para (4.62), pondo $\psi = \tilde{A}h^k$ em (4.59), tem-se

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla h^k K(t)\|^2 + \nu\|\tilde{A}h^k\|^2 \\
&\qquad\qquad \leq c\,\|\nabla h^k K(t)\|^2 + c\,\|\nabla v^k K(t)\|^4\|\nabla h^k K(t)\|^2 + 3\,\delta\|\tilde{A}h^k\|^2 \\
&\qquad\qquad\quad + c\,\|\nabla h^k K(t)\|^4\|\nabla v^k K(t)\|^2 + \epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2. \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

Logo, somando (4.62), (4.65) e (4.66), resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla v^k K(t)\|^2 + j\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \|\nabla h^k K(t)\|^2) \\
&\quad + (\mu+\chi)\|\tilde{A}v^k\|^2 + \gamma\|\tilde{B}z^k\|^2 + \nu\|\tilde{A}h^k\|^2 \\
&\quad \leq c\,\|\nabla v^k K(t)\|^2 + c\,\|\nabla v^k K(t)\|^4 j\|\nabla z^k K(t)\|^2 + c\,j\|\nabla z^k K(t)\|^2 \\
&\qquad + c\,\|\nabla v^k K(t)\|^4\|\nabla h^k K(t)\|^2 + c\,\|\nabla h^k K(t)\|^2 + c\,\|\nabla h^k K(t)\|^4\|\nabla v^k K(t)\|^2 \\
&\qquad + c\,\|\nabla v^k K(t)\|^6 + c\,\|\nabla h^k K(t)\|^6 + c\,\|\tilde{f}\|^2 + c\,\|\tilde{g}\|^2 + 6\epsilon\|\tilde{A}v^k\|^2 \\
&\qquad + 4\,\delta\,\|\tilde{A}h^k\|^2 + 5\,\sigma\,\|\tilde{B}z^k\|^2
\end{aligned}$$

e considerando $\epsilon = \dfrac{\mu+\chi}{12}$, $\delta = \dfrac{\nu}{8}$ e $\sigma = \dfrac{\gamma}{10}$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\nabla v^k K(t)\|^2 + j\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \|\nabla h^k K(t)\|^2) \\
&\qquad + (\mu+\chi)\|\tilde{A}v^k\|^2 + \gamma\|\tilde{B}z^k\|^2 + \nu\|\tilde{A}h^k\|^2 \\
&\qquad \leq c\,(\|\nabla v^k K(t)\|^2 + j\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \|\nabla h^k K(t)\|^2)^3 \\
&\qquad\quad + c\,(\|\nabla v^k K(t)\|^2 + j\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \|\nabla h^k K(t)\|^2) + c\,\|\tilde{f}\|^2 + c\,\|\tilde{g}\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\theta^k(t) + \zeta^k(t) \leq c\,\theta^k(t)^3 + c\,\theta^k(t) + c_1, \qquad (4.67)$$

onde, $\theta^k(t) = \|\nabla v^k K(t)\|^2 + j\|\nabla z^k K(t)\|^2 + \|\nabla h^k K(t)\|^2$ e $\zeta^k(t) = (\mu+\chi)\|\tilde{A}v^k\|^2 + \gamma\|\tilde{B}z^k\|^2 + \nu\|\tilde{A}h^k\|^2$. Em particular,

$$\frac{d}{dt}\theta^k(t) \leq c\,\theta^k(t)^3 + c\,\theta^k(t) + c_1.$$

Consideremos a equação diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= c\,\xi(t)^3 + c\,\xi(t) + c_1 \\
\xi(0) &= \theta_0,
\end{aligned}$$

com $\theta_0 = \|\nabla v_0\, K(0)\|^2 + j\|\nabla z_0\, K(0)\|^2 + \|\nabla h_0\, K(0)\|^2$. Então, aplicando o Lema 3 dado em Heywood([15], p. 656), existe $T_1 \in (0,T], (T_1 < T(\theta_0))$, tal que $\theta^k(t) \leq \xi(t,\theta_0)$, $\forall\, t \in [0,T_1]$.

Portanto, integrando a desigualdade diferencial (4.67) de 0 a $t\,(t \in [0,T_1]\,)$, tem-se

$$\begin{aligned} &\|\nabla v^k(t)K(t)\|^2 + j\|\nabla z^k(t)K(t)\|^2 + \|\nabla h^k(t)K(t)\|^2 \\ &\quad +(\mu+\chi)\int_0^t \|\tilde{A}v^k(\tau)\|^2 d\tau + \gamma\int_0^t \|\tilde{B}z^k(\tau)\|^2 d\tau + \nu\int_0^t \|\tilde{A}h^k(\tau)\|^2 d\tau \\ &\qquad \leq \|\nabla v_0\, K(0)\|^2 + j\|\nabla z_0\, K(0)\|^2 + \|\nabla h_0\, K(0)\|^2 \\ &\qquad\quad + c\int_0^t \xi^3(\tau,\theta_0)\,d\tau + c\int_0^t \xi(\tau,\theta_0)\,d\tau + c_1 t \equiv F_0(t). \end{aligned} \tag{4.68}$$

Mas, como

$$\|\nabla v^k(t)\| \leq \|R(t)\|^2\|\nabla v^k(t)K(t)\|^2 \leq \sup_{0\leq t\leq T_1}\{\|R(t)\|^2 F_0(t)\} \leq c,$$

de (4.68), concluimos que

$$\{v^k\},\ \{h^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;D(\tilde{A})) \tag{4.69}$$

$$\text{e } \{z^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T_1;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;D(\tilde{B})). \tag{4.70}$$

Agora, colocando $\varphi = v_t^k$ em (4.57), $\phi = z_t^k$ em (4.58) e $\psi = h_t^k$ em (4.59), temos

$$\begin{aligned} \|v_t^k\|^2 &= -(\mu+\chi)(\tilde{A}v^k, v_t^k) - (v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, v_t^k) + (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, v_t^k) \\ &\quad +(\tilde{f}, v_t^k) + r(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, v_t^k) + \chi(\sum_{i=1}^3 \nabla z_i^k A_i(t), v_t^k), \\ j\|z_t^k\|^2 + (\frac{\alpha+\beta}{2})\frac{d}{dt}\|\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))\|^2 &= -\gamma(\tilde{B}z^k, z_t^k) - j(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, z_t^k) \\ &\quad +(\alpha+\beta)(\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t)), \mathrm{div}(z^k(R^{-1}(t))')) + j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, z_t^k) \\ &\quad -2\chi(z^k, z_t^k) + (\tilde{g}, z_t^k) + \chi(\sum_{i=1}^3 \nabla v_i^k A_i(t), z_t^k), \\ \|h_t^k\|^2 &= -\nu(\tilde{A}h^k, h_t^k) + (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, h_t^k) - (v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, h_t^k) \\ &\quad +(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, h_t^k). \end{aligned}$$

De isto, usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \|v_t^k\|^2 &\leq c\,\|\tilde{A}v^k\|^2 + c\,\|v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k\|^2 + c\,\|yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k\|^2 + c\,\|\tilde{f}\|^2 \\ &\quad + c\,\|h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k\|^2 + c\,\|\sum_{i=1}^3 \nabla z_i^k A_i(t)\|^2, \end{aligned} \tag{4.71}$$

$$
\begin{aligned}
j\|z_t^k\|^2 + (\alpha+\beta)\frac{d}{dt}\|\mathrm{div}(z^kR^{-1}(t))\|^2 &\le c\,\|\tilde{B}z^k\|^2 + c\,\|v^kR^{-1}(t)\cdot\nabla z^k\|^2 \\
&+c\,\|\mathrm{div}(z^kR^{-1}(t))\|\,\|\mathrm{div}(z^k(R^{-1}(t))')\| + c\,\|yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k\|^2 \\
&+c\,\|z^k\|^2 + c\,\|\tilde{g}\|^2 + c\,\|\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^kA_i(t)\|^2, \qquad (4.72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|h_t^k\|^2 \le c\,\|\tilde{A}h^k\|^2 + c\,\|yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k\|^2 + c\,\|v^kR^{-1}(t)\cdot\nabla h^k\|^2 \\
+c\,\|h^kR^{-1}(t)\cdot\nabla v^k\|^2. \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

Logo, tendo em conta (4.69) e a imersão de Sobolev $H^2(\Omega)\hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, obtemos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\|v^kR^{-1}(t)\cdot\nabla v^k\|^2 &\le \|v^kR^{-1}(t)\|^2_{L,\infty}\|\nabla v^k\|^2 \le c\,\|R^{-1}(t)\|^2\|\tilde{A}v^k\|^2\|\nabla v^k\|^2 \\
&\le c\,(\sup_{0\le t\le T_1}\|R^{-1}(t)\|^2)\|\nabla v^k\|^2\|\tilde{A}v^k\|^2 \le c\,\|\tilde{A}v^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\|h^kR^{-1}(t)\cdot\nabla h^k\|^2 &\le c\,\|\tilde{A}h^k\|^2, \\
\|v^kR^{-1}(t)\cdot\nabla z^k\|^2 &\le c\,\|\tilde{A}v^k\|^2, \\
\|v^kR^{-1}(t)\cdot\nabla h^k\|^2 &\le c\,\|\tilde{A}v^k\|^2, \\
\|h^kR^{-1}(t)\cdot\nabla v^k\|^2 &\le c\,\|\tilde{A}h^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
\|yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k\|^2 &\le \|R'(t)\|^2\|R^{-1}(t)\|^2\|y\|^2_{L,\infty}\|\nabla v^k\|^2 \le c\,\|\nabla v^k\|^2, \\
\|yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k\|^2 &\le c\,\|\nabla z^k\|^2, \\
\|yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k\|^2 &\le c\,\|\nabla h^k\|^2, \\
\|\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^kA_i(t)\|^2 &\le c\,\|\nabla z^k\|^2, \\
\|\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^kA_i(t)\|^2 &\le c\,\|\nabla v^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Observando que

$$
K(t) = (R^{-1}(t))^t,\quad \nabla(z^kR^{-1}(t)) = K(t)\nabla z^k \text{ e } K'(t) = -K(t)R'(t)K(t), \text{ têm-se}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{div}\,(z^kR^{-1}(t))\| &\le \|\nabla(z^kR^{-1}(t))\| = \|K(t)\nabla z^k\| \le c\,\|\nabla z^k\|, \\
\|\mathrm{div}(z^k(R^{-1}(t))')\| &\le \|\nabla(z^k(R^{-1}(t))')\| = \|K'(t)\nabla z^k\| \le c\,\|\nabla z^k\|.
\end{aligned}
$$

Então, levando estas estimativas nas desigualdades (4.71)-(4.73), e integrando de 0 a t ($t \in [0,T_1]$), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|v_t^k(\tau)\|^2 d\tau &\le c\int_0^t (\|\tilde{A}v^k(\tau)\|^2 + \|\tilde{A}h^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\quad + c\int_0^t (\|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla v^k(\tau)\|^2)d\tau + c\int_0^t \|\tilde{f}(\tau)\|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\int_0^t \|z_t^k(\tau)\|^2 d\tau + (\alpha+\beta)\|\mathrm{div}(z^k(t)R^{-1}(t))\|^2 &\le c\int_0^t (\|\tilde{A}v^k(\tau)\|^2 + \|\tilde{B}z^k(\tau)\|^2)d\tau \\
&\quad + c\int_0^t (\|\nabla z^k(\tau)\|^2 + \|\nabla v^k(\tau)\|^2)d\tau + c\int_0^t (\|z^k(\tau)\|^2 + \|\tilde{g}(\tau)\|^2)d\tau \\
&\quad + (\alpha+\beta)\|\mathrm{div}(z^k(0)R^{-1}(0))\|^2,
\end{aligned}$$

$$\int_0^t \|h_t^k(\tau)\|^2 d\tau \le c\int_0^t \|\nabla h^k(\tau)\|^2 d\tau + c\int_0^t (\|\tilde{A}v^k(\tau)\|^2 + \|\tilde{A}h^k(\tau)\|^2)d\tau.$$

Observando (4.69),(4.70), (4.26),(4.27) e que $\|\mathrm{div}(z^k(0)R^{-1}(0))\| \le c\|\nabla z_0\|$, obtemos

$$\int_0^t (\|v_t^k(\tau)\|^2 + j\|z_t^k(\tau)\|^2 + \|h_t^k(\tau)\|^2)d\tau \le F_1(t), \tag{4.74}$$

para qualquer $t \in [0,T_1]$. Portanto,

$$\{v_t^k\} \text{ e } \{h_t^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^2(0,T_1;\tilde{H}(\Omega)) \tag{4.75}$$

$$\text{e } \{z_t^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T_1;L^2(\Omega)). \tag{4.76}$$

De (4.69) e (4.75), concluimos que existem $v,\, h \in L^\infty(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;D(\tilde{A}))$ e subsequências de $\{v^k\}$ e $\{h^k\}$, tais que quando $k \longrightarrow \infty$, têm-se

$$\begin{aligned}
&v^k \longrightarrow v \;\text{ e }\; h^k \longrightarrow h \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T_1;D(\tilde{A})),\\
&v^k \longrightarrow v \;\text{ e }\; h^k \longrightarrow h \;\text{ fraco }-*\text{ em }\; L^\infty(0,T_1;\tilde{V}(\Omega))\\
&v_t^k \longrightarrow v_t \;\text{ e }\; h_t^k \longrightarrow h_t \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T_1;\tilde{H}(\Omega)).
\end{aligned}$$

Similarmente, de (4.70) e (4.76), existe $z \in L^\infty(0,T_1;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;D(\tilde{B}))$ e uma subsequência de $\{z^k\}$ tal que quando $k \longrightarrow \infty$, têm-se

$$\begin{aligned}
&z^k \longrightarrow z \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T_1;D(\tilde{B})),\\
&z^k \longrightarrow z \;\text{ fraco }-*\text{ em }\; L^\infty(0,T_1;H_0^1(\Omega))\\
&z_t^k \longrightarrow z_t \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T_1;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Logo, usando o Lema de Aubin-Lions (Lema 1.4, Cap. 1), com $B_0 = D(\tilde{A})$, $p_0 = 2$, $B_1 = \tilde{H}(\Omega)$, $p_1 = 2$ e $B = \tilde{V}(\Omega)$, temos que

$$v^k \longrightarrow v \;\text{ e }\; h^k \longrightarrow h \;\text{ forte em }\; L^2(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)).$$

Analogamente, tomando $B_0 = D(\tilde{B})$, $p_0 = 2$, $B_1 = L^2(\Omega)$, $p_1 = 2$ e $B = H_0^1(\Omega)$, temos

$$z^k \longrightarrow z \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)).$$

Agora passando ao limite (4.57)-(4.59) em forma usual como em Lions ([22], p. 76), temos que (v, z, h) é solução forte do problema (4.53)-(4.56) satisfazendo

$$\begin{aligned}
&(v_t(t),\varphi) - (\mu+\chi)(\tilde{\Delta} v(t),\varphi) + (v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t),\varphi) - (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t),\varphi) \\
&\qquad = (\tilde{f}(t),\varphi) + r(h(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h(t),\varphi) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i(t)A_i(t),\varphi), \qquad (4.77)\\
&j(z_t(t),\phi) - \gamma(\tilde{\Delta} z(t),\phi) - (\alpha+\beta)(\nabla\mathrm{div}(z(t)R^{-1}(t))K(t),\phi)\\
&\qquad +j(v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z(t),\phi) - j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z(t),\phi) + 2\chi(z(t),\phi)\\
&\qquad = (\tilde{g}(t),\phi) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i(t)A_i(t),\phi), \qquad (4.78)\\
&(h_t(t),\psi) - \nu(\tilde{\Delta} h(t),\psi) - (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h(t),\psi) + (v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h(t),\psi)\\
&\qquad -(h(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t),\psi) = 0, \qquad (4.79)\\
&\forall\ \varphi,\ \psi\in\tilde{V}(\Omega) \quad \text{e} \quad \forall\ \phi\in H_0^1(\Omega),
\end{aligned}$$

no sentido das distribuições sobre $(0,T_1)$. Observe-se que (4.77) e (4.79) são válidos $\forall\ \varphi,\ \psi\in \mathcal{V}(\Omega)$.

Para provar a continuidade, temos que v_t, $h_t \in L^2(0,T_1;\tilde{H}(\Omega))$ e v, $h \in L^2(0,T_1; D(\tilde{A}))$, então por interpolação (Lema 1.5, Cap. 1) tem-se que v, $h\in C([0,T_1];\tilde{V}(\Omega))$ quase sempre. Analogamente, o fato que $z\in L^2(0,T_1;D(\tilde{B}))$ e $z_t\in L^2(0,T_1;L^2(\Omega))$, implicam por interpolação que $z\in C([0,T_1];H_0^1(\Omega))$ quase sempre.

Agora demonstraremos a unicidade da solução.

Suponhamos que (v^1,z^1,h^1) e (v^2,z^2,h^2) são duas soluções de (4.53)-(4.56) para os mesmos v_0, z_0 e h_0. Definimos

$$v = v^1 - v^2, \quad z = z^1 - z^2, \quad h = h^1 - h^2.$$

Então, temos que v, z, h, satisfazem:

$$\begin{aligned}
(v_t,\varphi) + (\mu+\chi)(\tilde{A}v,\varphi) &= -(v^1R^{-1}(t)\cdot\nabla v,\varphi) - (vR^{-1}(t)\cdot\nabla v^2,\varphi)\\
&\quad +(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v,\varphi) + r(h^2R^{-1}(t)\cdot\nabla h,\varphi)\\
&\quad +r(hR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1,\varphi) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_iA_i(t),\varphi),\\
j(z_t,\phi) + \gamma(\tilde{B}z,\phi) + 2\chi(z,\phi) &- (\alpha+\beta)(\nabla\mathrm{div}(zR^{-1}(t))K(t),\phi)\\
&= -j(vR^{-1}(t)\cdot\nabla z^1,\phi) - j(v^2R^{-1}(t)\cdot\nabla z,\phi)
\end{aligned}$$

$$+j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z,\phi)+\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_iA_i(t),\phi),$$

$$(h_t,\psi)+\nu(\tilde{A}h,\psi)=(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h,\psi)-(vR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1,\psi)-(v^2R^{-1}(t)\cdot\nabla h,\psi)$$
$$+(hR^{-1}(t)\cdot\nabla v^1,\psi)+(h^2R^{-1}(t)\cdot\nabla v,\psi),$$

$\forall\ \varphi,\ \psi\in\tilde{V}(\Omega)$ e $\forall\ \phi\in H_0^1(\Omega)$,

$v(0)=0,\ z(0)=0,\ h(0)=0.$

Agora, colocando $\varphi=v,\ \phi=z$ e $\psi=rh$ nas igualdades acima, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v||^2+(\mu+\chi)||\nabla vK(t)||^2=-(vR^{-1}(t)\cdot\nabla v^2,v)+r(h^2R^{-1}(t)\cdot\nabla h,v)$$
$$+(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v,v)+r(hR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1,v)+\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_iA_i(t),v),$$

$$\frac{j}{2}\frac{d}{dt}||z||^2+\gamma||\nabla zK(t)||^2+2\chi||z||^2+(\alpha+\beta)||\mathrm{div}(zR^{-1}(t))||^2$$
$$=-j(vR^{-1}(t)\cdot\nabla z^1,z)+j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z,z)+\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_iA_i(t),z),$$

$$\frac{r}{2}\frac{d}{dt}||h||^2+r\nu||\nabla hK(t)||^2=r\,(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h,h)-r(vR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1,h)$$
$$+r(hR^{-1}(t)\cdot\nabla v^1,h)+r(h^2R^{-1}(t)\cdot\nabla v,h).$$

Logo, somando as igualdades acima e observando que

$$r(h^2R^{-1}(t)\cdot\nabla h,v)+r(h^2R^{-1}(t)\cdot\nabla v,h)=0,$$

tem-se

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||v||^2+j||z||^2+r||h||^2)+(\mu+\chi)||\nabla vK(t)||^2+\gamma||\nabla zK(t)||^2\\&\quad+r\nu||\nabla hK(t)||^2+2\chi||z||^2+(\alpha+\beta)||\mathrm{div}(zR^{-1}(t))||^2\\&\quad=-(vR^{-1}(t)\cdot\nabla v^2,v)+(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v,v)+r(hR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1,v)\\&\qquad-j(vR^{-1}(t)\cdot\nabla z^1,z)+j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z,z)+r\,(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h,h)\\&\qquad-r(vR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1,h)+r(hR^{-1}(t)\cdot\nabla v^1,h)+\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_iA_i(t),v)\\&\qquad+\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_iA_i(t),z).\end{aligned}\tag{4.80}$$

Usando a imersão de Sobolev $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos a seguinte estimativa:

$$|(hR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1,v)|\ \leq\ ||hR^{-1}(t)||_{L^4}||\nabla h^1||_{L^4}||v||\leq c\,||\nabla(hR^{-1}(t))||\,||\tilde{A}h^1||\,||v||$$

$$
\begin{aligned}
&\le c\,||K(t)\nabla h||||\tilde{A}h^1||||v|| \le c\,||\nabla hK(t)||||\tilde{A}h^1||||v|| \\
&\le C_\delta||\tilde{A}h^1||^2||v||^2 + \delta||\nabla hK(t)||^2.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
|(vR^{-1}(t)\cdot\nabla v^2, v)| &\le C_\varepsilon||\tilde{A}v^2||^2||v||^2 + \varepsilon||\nabla vK(t)||^2, \\
|(vR^{-1}(t)\cdot\nabla z^1, z)| &\le C_\varepsilon||\tilde{B}z^1||^2||z||^2 + \varepsilon||\nabla vK(t)||^2, \\
|(vR^{-1}(t)\cdot\nabla h^1, h)| &\le C_\varepsilon||\tilde{A}h^1||^2||h||^2 + \varepsilon||\nabla vK(t)||^2, \\
|(hR^{-1}(t)\cdot\nabla v^1, h)| &\le C_\delta||\tilde{A}v^1||^2||h||^2 + \delta||\nabla hK(t)||^2.
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
|(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v, v)| &\le C_\varepsilon||v||^2 + \varepsilon||\nabla vK(t)||^2, \\
|(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z, z)| &\le C_\sigma||z||^2 + \sigma||\nabla zK(t)||^2, \\
|(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h, h)| &\le C_\delta||h||^2 + \delta\,||\nabla hK(t)||^2, \\
|(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i A_i(t), v)| &\le C_\sigma||v||^2 + \sigma||\nabla zK(t)||^2, \\
|(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i A_i(t), z)| &\le C_\varepsilon||z||^2 + \varepsilon||\nabla vK(t)||^2.
\end{aligned}
$$

Então, com apropriados $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ e $\delta > 0$, levamos as estimativas obtidas acima em (4.80), obtendo

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||v||^2 + j||z||^2 + r||h||^2) + (\mu+\chi)||\nabla vK(t)||^2 + \gamma||\nabla zK(t)||^2 \\
&\quad + r\nu||\nabla hK(t)||^2 + 4\chi||z||^2 + 2(\alpha+\beta)||\mathrm{div}(zR^{-1}(t))||^2 \\
&\qquad \le c\,(||v||^2 + j||z||^2 + r||h||^2)(||\tilde{A}v^1||^2 + ||\tilde{A}h^1||^2 + ||\tilde{A}v^2||^2 + ||\tilde{B}z^1||^2 + 1)
\end{aligned}
$$

e integrando de 0 a t, tem-se

$$
\begin{aligned}
||v(t)||^2 + j||z(t)||^2 + r||h(t)||^2 &\le ||v(0)||^2 + j||z(0)||^2 + r||h(0)||^2 \\
&\quad + c\int_0^t (||v(\tau)||^2 + j||z(\tau)||^2 + r||h(\tau)||^2)\xi(\tau)d\tau,
\end{aligned}
$$

onde $\xi(t) = ||\tilde{A}v^1(t)||^2 + ||\tilde{A}h^1(t)||^2 + ||\tilde{A}v^2(t)||^2 + ||\tilde{B}z^1(t)||^2 + 1$.

Aplicando a desigualdade de Gronwall, vem

$$
||v(t)||^2 + j||z(t)||^2 + r||h(t)||^2 \le (||v(0)||^2 + j||z(0)||^2 + r||h(0)||^2)\exp(\int_0^t \xi(\tau)d\tau)
$$

e usando (4.69)-(4.70), tem-se que $\int_0^t \xi(\tau)d\tau \leq c$.

Portanto, a última desigualdade implica $v(t) = z(t) = h(t) = 0$, isto é, $v^1 = v^2$, $z^1 = z^2$ e $h^1 = h^2$, mostrando a unicidade da solução (v, z, h).

Isto completa a prova do lema.

Prova do Teorema 4.2

Observe-se que a solução forte (v, z, h) do problema transformado (4.53)-(4.56), satisfaz (4.77)-(4.79) $\forall\ \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\forall \varphi,\ \psi \in \mathcal{V}(\Omega)$ e no sentido das distribuições sobre $(0, T_1)$. Então (v, z, h) satisfaz:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T_1} (v_t, \tilde{\varphi})dt - (\mu+\chi)\int_0^{T_1} (\tilde{\Delta} v, \tilde{\varphi})dt - \int_0^{T_1} (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v, \tilde{\varphi})dt \\
&\qquad + \int_0^{T_1} (vR^{-1}(t)\cdot\nabla v, \tilde{\varphi})dt = \int_0^{T_1} (\tilde{f}, \tilde{\varphi})dt + r\int_0^{T_1} (hR^{-1}(t)\cdot\nabla h, \tilde{\varphi})dt \\
&\qquad\qquad + \chi\int_0^{T_1} (\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i A_i(t), \tilde{\varphi})dt, \qquad (4.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&j\int_0^{T_1} (z_t, \tilde{\phi})dt - \gamma\int_0^{T_1} (\tilde{\Delta} z, \tilde{\phi})dt - j\int_0^{T_1} (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z, \tilde{\phi})dt \\
&\quad -(\alpha+\beta)\int_0^{T_1} (\nabla \mathrm{div}(zR^{-1}(t))K(t), \tilde{\phi})dt + j\int_0^{T_1} (vR^{-1}(t)\cdot\nabla z, \tilde{\phi})dt + 2\chi\int_0^{T_1} (z, \tilde{\phi})dt \\
&\qquad = \int_0^{T_1} (\tilde{g}, \tilde{\phi})dt + \chi\int_0^{T_1} (\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i A_i(t), \tilde{\phi})dt, \qquad (4.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T_1} (h_t, \tilde{\psi})dt - \nu\int_0^{T_1} (\tilde{\Delta} h, \tilde{\psi})dt - \int_0^{T_1} (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h, \tilde{\psi})dt \\
&\qquad + \int_0^{T_1} (vR^{-1}(t)\cdot\nabla h, \tilde{\psi})dt - \int_0^{T_1} (hR^{-1}(t)\cdot\nabla v, \tilde{\psi})dt = 0, \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

$\forall\, \tilde{\varphi},\ \tilde{\psi},\ \tilde{\phi} \in (C^1(\bar{Q}))^3$ com soporte compacto $\subset Q$, $\mathrm{div}\,(\tilde{\varphi}M^{-1}) = 0$, $\mathrm{div}\,(\tilde{\psi}M^{-1}) = 0$.

A seguir, consideremos as funções testes $\varphi,\ \phi,\ \psi \in (C^1(\bar{\tilde{Q}}))^3$ com soportes compactos contidos em $\tilde{Q}$ tais que $\mathrm{div}\,\varphi = 0$, $\mathrm{div}\,\psi = 0$ e definimos

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(y,t) &= \det R(t)\,\varphi(yR(t),t), \\
\tilde{\phi}(y,t) &= \det R(t)\,\phi(yR(t),t), \\
\tilde{\psi}(y,t) &= \det R(t)\,\psi(yR(t),t).
\end{aligned}$$

Verifica-se que $\tilde{\varphi},\ \tilde{\phi},\ \tilde{\psi} \in (C^1(\bar{Q}))^3$, que os soportes de $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ são compactos contidos em Q e que $\mathrm{div}\,(\tilde{\varphi}M^{-1}) = \mathrm{div}\,(\tilde{\psi}M^{-1}) = 0$.

Então, usando as identidades obtidas acima em (4.81)-(4.83), temos

$$\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(v_t - yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v,\varphi)dt - (\mu+\chi)\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\tilde{\Delta} v,\varphi)dt$$
$$+\int_0^{T} det\,R(t)\,(vR^{-1}(t)\cdot\nabla v,\varphi)dt = \int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\tilde{f},\varphi)dt$$
$$+r\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(hR^{-1}(t)\cdot\nabla h,\varphi)dt + \chi\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i A_i(t),\varphi)dt, \quad (4.84)$$

$$j\int_0^{T} det\,R(t)\,(z_t - yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z,\phi)dt - \gamma\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\tilde{\Delta} z,\phi)dt$$
$$-(\alpha+\beta)\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\nabla\mathrm{div}(zR^{-1}(t))K(t),\phi)dt$$
$$+j\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(vR^{-1}(t)\cdot\nabla z,\phi)dt + 2\chi\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(z,\phi)dt$$
$$= \int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\tilde{g},\phi)dt + \chi\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i A_i(t),\phi)dt, \quad (4.85)$$

$$\int_0^{T} det\,R(t)\,(h_t - yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h,\psi)dt - \nu\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(\tilde{\Delta} h,\psi)dt$$
$$+\int_0^{T_1} det\,R(t)\,(vR^{-1}(t)\cdot\nabla h,\psi)dt - \int_0^{T_1} det\,R(t)\,(hR^{-1}(t)\cdot\nabla v,\psi)dt = 0. \quad (4.86)$$

Agora, considerando as definições dadas em (4.9) e a transformação $\Phi^{-1} : Q \longrightarrow \tilde{Q}$ definida em (4.8) (isto é, $\Phi^{-1}(y,t) = (yR(t),t)$, com $det(J\Phi^{-1}) = det\,R^{-1}(t)$), fazemos uma mudança de variáveis nas integrais de (4.84)-(4.86), obtendo:

$$\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} u_t\,\varphi dx\,dt - (\mu+\chi)\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t}\Delta u\,\varphi dx\,dt + \int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} u\cdot\nabla u\,\varphi dx\,dt$$
$$= \int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} f\,\varphi dx\,dt + r\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} h\cdot\nabla h\,\varphi dx\,dt + \chi\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t}\mathrm{rot}\,w\,\varphi\,dx\,dt, \quad (4.87)$$

$$j\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} w_t\,\phi\,dx\,dt - \gamma\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t}\Delta w\,\phi\,dx\,dt - (\alpha+\beta)\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t}\nabla\mathrm{div}\,w\;\phi\,dx\,dt$$
$$+j\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} u\cdot\nabla w\,\phi\,dx\,dt + 2\chi\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} w\,\phi\,dx\,dt$$
$$= \int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} g\,\phi\,dx\,dt + \chi\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t}\mathrm{rot}\,u\;\phi\,dx\,dt, \quad (4.88)$$

$$\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} b_t\;\psi\,dx\,dt - \nu\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t}\Delta b\,\psi dx\,dt + \int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} u\cdot\nabla b\,\psi\,dx\,dt$$
$$-\int_0^{T_1}\int_{\Omega_t} b\cdot\nabla u\,\psi\,dx\,dt = 0, \quad (4.89)$$

$\forall\varphi,\ \phi,\ \psi \in (C^1(\bar{\tilde{Q}}))^3$ com $\mathrm{div}\,\varphi = \mathrm{div}\,\psi = 0$.

Também, desde que pelo Lema 4.5, v, $h \in L^2(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T_1;\tilde{V}(\Omega))$ e $z \in L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T_1;H_0^1(\Omega))$, então dos resultados do Lema 4.2, segue-se que

$$u,\ b \in L^2(0,T;V(\Omega_t)\cap H^2(\Omega_t))\cap L^\infty(0,T;H(\Omega_t)),$$
$$w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)\cap H^2(\Omega_t))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)).$$

Por argumentos usuais mostra-se que $u(0)=u_0$, $w(0)=w_0$ e $b(0)=b_0$, demonstrando assim que (u,w,b) é a única solução forte do problema (4.1)-(4.3).

4.3.2 Mais regularidade da solução

Dando hipóteses mais fortes sobre os dados iniciais e a matriz $R(t)$ (que define os conjuntos Ω_t), temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Além das hipóteses do Teorema 4.2, assumimos que* $u_0, b_0 \in V(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0)$, $w_0 \in H_0^1(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0)$, $\sigma \in C^2[0,T]$ *e* f_t, $g_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$. *Então a solução* (u,w,b) *satisfaz*

$$u,\ b \in L^\infty(0,T_1;H^2(\Omega_t)\cap V(\Omega_t)), u_t,\ b_t \in L^\infty(0,T_1;H(\Omega_t))\cap L^2(0,T_1;V(\Omega_t)),$$
$$w \in L^\infty(0,T_1;H^2(\Omega_t)\cap H_0^1(\Omega_t)),\ w_t \in L^\infty(0,T_1;L^2(\Omega_t))\cap L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega_t)).$$

Além disso, temos que

$$u,\ b \in C^1([0,T_1];H(\Omega_t))\cap C([0,T_1];H^2(\Omega_t)\cap V(\Omega_t)),$$
$$w \in C^1([0,T_1];L^2(\Omega_t))\cap C([0,T_1];H^2(\Omega_t)\cap H_0^1(\Omega_t)).$$

Mais regularidade da solução do problema transformado

Lema 4.6 *Com as hipóteses do Teorema 4.3, a solução* (v,z,h) *do problema transformado (4.53)-(4.58) dada pelo Lema 4.5, satisfaz*

$$v,\ h \in L^\infty(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \quad e \quad z \in L^\infty(0,T_1;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)).$$

Além disso,

$$v,\ h \in C^1([0,T_1];\tilde{H}(\Omega))\cap C([0,T_1];\tilde{V}(\Omega)\cap H^2(\Omega)),$$
$$z \in C^1([0,T_1];L^2(\Omega))\cap C([0,T_1];H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)).$$

Prova. Por hipótese f_t, $g_t \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega_t))$ então $\tilde{f}_t$, $\tilde{g}_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e desde que u_0, $b_0 \in V(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0)$, $w_0 \in H_0^1(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0)$ temos que v_0, $h_0 \in V(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e $w_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Para provar o lema, precisaremos de melhores estimativas para v^k, z^k e h^k.

Para isto, derivamos (4.57)-(4.59) com respeito a t, logo colocando $\varphi = v_t^k$, $\phi = z_t^k$ e $\psi = rh_t^k$ respectivamente, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t^k\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla v_t^k K(t)\|^2 = -(\mu+\chi)(\nabla v^k K'(t), \nabla v_t^k K(t))\\
&\quad -(\mu+\chi)(\nabla v^k K(t), \nabla v_t^k K'(t)) - (v_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, v_t^k) - (v^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla v^k, v_t^k)\\
&\quad +(yR''(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, v_t^k) + (yR'(t)(R^{-1}(t))'\cdot\nabla v^k, v_t^k) + (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v_t^k, v_t^k)\\
&\quad +(\tilde{f}_t, v_t^k) + r(h_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, v_t^k) + r(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h_t^k, v_t^k) + r(h^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k, v_t^k)\\
&\quad +\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_{i_t}^k A_i(t), v_t^k) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i'(t), v_t^k),
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|z_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla z_t^k K(t)\|^2 + 2\chi\|z_t^k\|^2 + (\alpha+\beta)\|\mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t))\|^2\\
&= -\gamma(\nabla z^k K'(t), \nabla z_t^k K(t)) - \gamma(\nabla z^k K(t), \nabla z_t^k K'(t)) - j(v_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, z_t^k)\\
&\quad -j(v^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla z^k, z_t^k) + j(yR''(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, z_t^k) + j(yR'(t)(R^{-1}(t))'\cdot\nabla z^k, z_t^k)\\
&\quad +j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z_t^k, z_t^k) + (\tilde{g}_t, z_t^k) - (\alpha+\beta)(\mathrm{div}(z^k(R^{-1}(t))'), \mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t)))\\
&\quad -(\alpha+\beta)(\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t)), \mathrm{div}(z_t^k(R^{-1}(t))')) + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_{i_t}^k A_i(t), z_t^k)\\
&\quad +\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i'(t), z_t^k),
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{r}{2}\frac{d}{dt}\|h_t^k\|^2 + r\nu\|\nabla h_t^k K(t)\|^2 = -r\nu(\nabla h^k K'(t), \nabla h_t^k K(t)) - r\nu(\nabla h^k K(t), \nabla h_t^k K'(t))\\
&\quad -r(yR''(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, h_t^k) - r(yR'(t)(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k, h_t^k)\\
&\quad -r(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h_t^k, h_t^k) - r(v_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, h_t^k) - r(v^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k, h_t^k)\\
&\quad +r(h_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, h_t^k) + r(h^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla v^k, h_t^k) + r(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v_t^k, h_t^k).
\end{aligned}
\tag{4.92}
$$

A seguir, estimaremos o lado direito de (4.90)-(4.92).

Observando que $K'(t) = -K(t)(R'(t))^t K(t)$, para qualquer $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e $\sigma > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
|(\mu+\chi)(\nabla v^k K'(t), \nabla v_t^k K(t))| &\le c\|\nabla v^k K'(t)\|\|\nabla v_t^k K(t)\|\\
&\le C_\varepsilon\|\nabla v^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla v_t^k K(t)\|^2,\\
|(\mu+\chi)(\nabla v^k K(t), \nabla v_t^k K'(t))| &\le C_\varepsilon\|\nabla v^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla v_t^k K(t)\|^2,\\
|r\nu(\nabla h^k K'(t), \nabla h_t^k K(t)| &\le C_\sigma\|\nabla h^k\|^2 + \sigma\|\nabla h_t^k K(t)\|^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|r\nu(\nabla h^k K(t), \nabla h_t^k K'(t))| &\leq C_\sigma \|\nabla h^k\|^2 + \sigma \|\nabla h_t^k K(t)\|^2, \\
|\gamma(\nabla z^k K'(t), \nabla z_t^k K(t))| &\leq C_\delta \|\nabla z^k\|^2 + \delta \|\nabla z_t^k K(t)\|^2, \\
|\gamma(\nabla z^k K(t), \nabla z_t^k K'(t))| &\leq C_\delta \|\nabla z^k\|^2 + \delta \|\nabla z_t^k K(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

Para os outros termos, observando que $(R^{-1}(t))' = -R^{-1}(t)R'(t)R^{-1}(t)$ e usando as imersões de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, para qualquer $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e $\sigma > 0$, têm-se

$$
\begin{aligned}
|(v_t^k R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k, v_t^k)| &\leq \|v_t^k R^{-1}(t)\|_{L^4} \|\nabla v^k\|_{L^4} \|v_t^k\| \\
&\leq c \|\nabla v_t^k K(t)\| \|\tilde{A} v^k\| \|v_t^k\| \\
&\leq C_\varepsilon \|\tilde{A} v^k\|^2 \|v_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla v_t^k K(t)\|^2, \\
|(v^k (R^{-1}(t))' \cdot \nabla v^k, v_t^k)| &\leq c \|v^k\| \|\nabla v^k\|_{L^4} \|v_t^k\|_{L^4} \\
&\leq C_\varepsilon \|\tilde{A} v^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla v_t^k K(t)\|^2, \\
|(y R''(t) R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k, v_t^k)| &\leq c \|\nabla v^k\| \|v_t^k\| \leq C_\eta \|\nabla v^k\|^2 + \eta \|v_t^k\|^2, \\
|(y R'(t) (R^{-1}(t))' \cdot \nabla v^k, v_t^k)| &\leq C_\eta \|\nabla v^k\|^2 + \eta \|v_t^k\|^2, \\
|(y R'(t) R^{-1}(t) \cdot \nabla v_t^k, v_t^k)| &\leq C_\varepsilon \|v_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla v_t^k K(t)\|^2, \\
|(\tilde{f}_t, v_t^k)| &\leq C_\eta \|\tilde{f}_t\|^2 + \eta \|v_t^k\|^2, \\
|r(h_t^k R^{-1}(t) \cdot \nabla h^k, v_t^k)| &\leq C_\varepsilon \|\tilde{A} h^k\|^2 \|h_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla v_t^k K(t)\|^2, \\
|r(h^k (R^{-1}(t))' \cdot \nabla h^k, v_t^k)| &\leq C_\varepsilon \|\tilde{A} h^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla v_t^k K(t)\|^2, \\
|\chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla z_{i_t}^k A_i(t), v_t^k)| &\leq C_\delta \|v_t^k\|^2 + \delta \|\nabla z_t^k K(t)\|^2, \\
|\chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla z_i^k A_i'(t), v_t^k)| &\leq C_\eta \|\nabla z^k\|^2 + \eta \|v_t^k\|^2, \\
|j(v_t^k R^{-1}(t) \cdot \nabla z^k, z_t^k)| &\leq C_\varepsilon \|\tilde{B} z^k\|^2 \|z_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla v_t^k K(t)\|^2, \\
|j(v^k (R^{-1}(t))' \cdot \nabla z^k, z_t^k)| &\leq C_\delta \|\tilde{B} z^k\|^2 + \delta \|\nabla z_t^k K(t)\|^2, \\
|j(y R''(t) R^{-1}(t) \cdot \nabla z^k, z_t^k)| &\leq C_\eta \|\nabla z^k\|^2 + \eta\, j\, \|z_t^k\|^2, \\
|j(y R'(t) (R^{-1}(t))' \cdot \nabla z^k, z_t^k)| &\leq C_\eta \|\nabla z^k\|^2 + \eta\, j\, \|z_t^k\|^2, \\
|j(y R'(t) R^{-1}(t) \cdot \nabla z_t^k, z_t^k)| &\leq C_\delta \|z_t^k\|^2 + \delta \|\nabla z_t^k K(t)\|^2, \\
|(\tilde{g}_t, z_t^k)| &\leq C_\eta \|\tilde{g}_t\|^2 + \eta\, j\, \|z_t^k\|^2, \\
|(\alpha + \beta)(\operatorname{div}(z^k (R^{-1}(t))'), \operatorname{div}(z_t^k R^{-1}(t)))| &\leq C_\delta \|\nabla z^k\|^2 + \delta \|\nabla z_t^k K(t)\|^2, \\
|(\alpha + \beta)(\operatorname{div}(z^k R^{-1}(t)), \operatorname{div}(z_t^k (R^{-1}(t))'))| &\leq C_\delta \|\nabla z^k\|^2 + \delta \|\nabla z_t^k K(t)\|^2, \\
|\chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla v_{i_t}^k A_i(t), z_t^k)| &\leq C_\varepsilon \|z_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla v_t^k K(t)\|^2,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
|\chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i'(t), z_t^k)| &\leq C_\eta\|\nabla v^k\|^2 + \eta\, j\,\|z_t^k\|^2,\\
|r(yR''(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, h_t^k)| &\leq C_\eta\|\nabla h^k\|^2 + \eta\, r\,\|h_t^k\|^2,\\
|r(yR'(t)(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k, h_t^k)| &\leq C_\eta\|\nabla h^k\|^2 + \eta\, r\,\|h_t^k\|^2,\\
|r(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h_t^k, h_t^k)| &\leq C_\sigma r\,\|h_t^k\|^2 + \sigma\|\nabla h_t^k K(t)\|^2,\\
|r(v_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, h_t^k)| &\leq C_\varepsilon\|\tilde{A}h^k\|^2\|h_t^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla v_t^k K(t)\|^2,\\
|r(v^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k, h_t^k)| &\leq C_\sigma\|\tilde{A}h^k\|^2 + \sigma\|\nabla h_t^k K(t)\|^2,\\
|r(h_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, h_t^k)| &\leq C_\sigma\|\tilde{A}v^k\|^2\|h_t^k\|^2 + \sigma\|\nabla h_t^k K(t)\|^2,\\
|r(h^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla v^k, h_t^k)| &\leq C_\sigma\|\tilde{A}v^k\|^2 + \sigma\|\nabla h_t^k K(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Levando estas estimativas em (4.90)-(4.92), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t^k\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla v_t^k K(t)\|^2\\
&\quad\leq 7\varepsilon\|\nabla v_t^k K(t)\|^2 + \delta\|\nabla z_t^k K(t)\|^2 + C_{\varepsilon,\eta}\|\nabla v^k\|^2 + C_\eta\|\nabla z^k\|^2 + C_\eta\|\tilde{f}_t\|^2\\
&\qquad + C_\varepsilon(\|\tilde{A}v^k\|^2 + \|\tilde{A}h^k\|^2) + C_\varepsilon\|\tilde{A}h^k\|^2\|h_t^k\|^2 + C_\varepsilon\|\tilde{A}v^k\|^2\|v_t^k\|^2 + C_{\varepsilon,\delta,\eta}\|v_t^k\|^2,\\
&\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|z_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla z_t^k K(t)\|^2 + 2\chi\|z_t^k\|^2 + (\alpha+\beta)\|\mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t))\|^2\\
&\quad\leq 6\delta\|\nabla z_t^k K(t)\|^2 + 2\varepsilon\|\nabla v_t^k K(t)\|^2 + C_\eta\|\nabla v^k\|^2 + C_{\delta,\eta}\|\nabla z^k\|^2 + C_\eta\|\tilde{g}_t\|^2\\
&\qquad + C_\delta\|\tilde{B}z^k\|^2 + C_\varepsilon\|\tilde{B}z^k\|^2\|z_t^k\|^2 + C_{\varepsilon,\delta,\eta}\, j\,\|z_t^k\|^2,\\
&\frac{r}{2}\frac{d}{dt}\|h_t^k\|^2 + r\nu\|\nabla h_t^k K(t)\|^2\\
&\quad\leq 6\sigma\|\nabla h_t^k K(t)\|^2 + \varepsilon\|\nabla v_t^k K(t)\|^2 + C_\sigma\|\nabla h^k\|^2 + C_\sigma\|\tilde{A}v^k\|^2\\
&\qquad + C_\varepsilon\|\tilde{A}h^k\|^2\|h_t^k\|^2 + C_\sigma\|\tilde{A}v^k\|^2\|h_t^k\|^2 + C_{\sigma,\eta}\, r\,\|h_t^k\|^2.
\end{aligned}$$

Somando as desigualdades anteriores, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v_t^k\|^2 + j\|z_t^k\|^2 + r\|h_t^k\|^2) + (\mu+\chi)\|\nabla v_t^k K(t)\|^2 + \gamma\|\nabla z_t^k K(t)\|^2\\
&\quad + r\nu\|\nabla h_t^k K(t)\|^2 + 2\chi\|z_t^k\|^2 + (\alpha+\beta)\|\mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t))\|^2\\
&\qquad \leq 10\varepsilon\|\nabla v_t^k K(t)\|^2 + 7\delta\|\nabla z_t^k K(t)\|^2 + 6\sigma\|\nabla h_t^k K(t)\|^2\\
&\qquad\quad + c\,(\|\nabla v^k\|^2 + \|\nabla z^k\|^2 + \|\nabla h^k\|^2) + c\,(\|\tilde{f}_t\|^2 + \|\tilde{g}_t\|^2)\\
&\qquad\quad + c\,(\|\tilde{A}h^k\|^2\|h_t^k\|^2 + \|\tilde{A}v^k\|^2\|v_t^k\|^2 + \|\tilde{B}z^k\|^2\|z_t^k\|^2 + \|\tilde{A}v^k\|^2\|h_t^k\|^2)\\
&\qquad\quad + c\,(\|\tilde{A}v^k\|^2 + \|\tilde{B}z^k\|^2 + \|\tilde{A}h^k\|^2) + c\,(\|v_t^k\|^2 + j\,\|z_t^k\|^2 + r\,\|h_t^k\|^2).
\end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\varepsilon = \dfrac{\mu+\chi}{20}$, $\delta = \dfrac{\gamma}{14}$ e $\sigma = \dfrac{r\nu}{12}$, tem-se a seguinte desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt}\theta^k(t) + \zeta^k(t) \leq \xi^k(t) + \theta^k(t)\eta^k(t), \tag{4.93}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\theta^k(t) &= \|v_t^k(t)\|^2 + j\|z_t^k(t)\|^2 + r\|h_t^k(t)\|^2,\\
\zeta^k(t) &= (\mu+\chi)\|\nabla v_t^k(t)K(t)\|^2 + \gamma\|\nabla z_t^k(t)K(t)\|^2 + r\nu\|\nabla h_t^k(t)K(t)\|^2,\\
\eta^k(t) &= c\,(\|\tilde{A}v^k(t)\|^2 + \|\tilde{B}z^k(t)\|^2 + \|\tilde{A}h^k(t)\|^2 + 1),\\
\xi^k(t) &= c\,(\|\nabla v^k(t)\|^2 + \|\nabla z^k(t)\|^2 + \|\nabla h^k(t)\|^2 + \|\tilde{f}_t(t)\|^2 + \|\tilde{g}_t(t)\|^2 + \|\tilde{A}v^k(t)\|^2\\
&\quad + \|\tilde{B}z^k(t)\|^2 + \|\tilde{A}h^k(t)\|^2).
\end{aligned}
$$

Agora, observando (4.26), (4.27), (4.69), (4.70) e as hipóteses sobre $\tilde{f}_t$, $\tilde{g}_t$, integramos (4.93) de 0 a t, obtendo

$$\theta^k(t) + \int_0^t \zeta^k(\tau)d\tau \leq \int_0^t \theta^k(\tau)\eta^k(\tau)d\tau + c + \theta^k(0). \tag{4.94}$$

Podemos provar que $\theta^k(0) = \|v_t^k(0)\|^2 + j\|z_t^k(0)\|^2 + r\|h_t^k(0)\|^2 \leq c$. De fato, de (4.57) com $\varphi = v_t^k(0)$, temos

$$
\begin{aligned}
\|v_t^k(0)\|^2 \;\leq\;& c\,\|\tilde{A}v^k(0)\|\|v_t^k(0)\| + c\,\|v^k(0)\|_{L^6}\|\nabla v^k(0)\|_{L^3}\|v_t^k(0)\| + c\,\|v^k(0)\|\|v_t^k(0)\|\\
&+\|\tilde{f}(0)\|\|v_t^k(0)\| + c\,\|h^k(0)\|_{L^6}\|\nabla h^k(0)\|_{L^3}\|v_t^k(0)\| + c\,\|\nabla z^k(0)\|\|v_t^k(0)\|,
\end{aligned}
$$

logo, usando a desigualdade de Sobolev $\|u\|_{L^3} \leq c\,\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}$ e a desigualdade de Young, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|v_t^k(0)\| \;\leq\;& c\,\|\tilde{A}v^k(0)\| + c\,\|\nabla v^k(0)\|\|\tilde{A}v^k(0)\|^{1/2}\|\nabla v^k(0)\|^{1/2} + c\,\|\nabla v^k(0)\|\\
&+\|\tilde{f}(0)\| + c\,\|\nabla h^k(0)\|\|\tilde{A}h^k(0)\|^{1/2}\|\nabla h^k(0)\|^{1/2} + c\,\|\nabla z^k(0)\|\\
\leq\;& c\,\|\tilde{A}v^k(0)\| + c\,\|\nabla v^k(0)\|^3 + c\,\|\nabla v^k(0)\| + \|\tilde{f}(0)\| + c\,\|\tilde{A}h^k(0)\|\\
&+c\,\|\nabla h^k(0)\|^3 + c\,\|\nabla z^k(0)\|.
\end{aligned}
$$

Mas, pela escolha de v_0^k, z_0^k e h_0^k, temos

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde{A}v^k(0)\| \leq \|\tilde{A}v_0\|, \qquad \|\tilde{A}h^k(0)\| \leq \|\tilde{A}h_0\|, \qquad \|\nabla v^k(0)\| \leq \|\nabla v_0\|,\\
&\|\nabla z^k(0)\| \leq \|\nabla z_0\|, \qquad \|\nabla h^k(0)\| \leq \|\nabla h_0\|,
\end{aligned}
$$

portanto, como v_0, $h_0 \in H^2(\Omega) \cap \tilde{V}(\Omega)$, $z_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\tilde{f} \in C([0,T_1]; L^2(\Omega))$, deduz-se uma estimativa para $\|v_t^k(0)\|$, isto é,

$$\|v_t^k(0)\| \leq c\,\|\tilde{A}v_0\| + c\,\|\nabla v_0\|^3 + c\,\|\nabla v_0\| + c\,\|\tilde{A}h_0\| + c\,\|\nabla h_0\|^3 + c\,\|\nabla z_0\| + c \,\leq c.$$

De forma análoga, obtem-se uma estimativa para $\|z_t^k(0)\|$ e $\|h_t^k(0)\|$. Assim $\theta^k(0) \leq c$ e (4.94) implica

$$\theta^k(t) + \int_0^t \zeta^k(\tau)d\tau \leq c + \int_0^t \theta^k(\tau)\eta^k(\tau)d\tau.$$

Agora, observando (4.68), temos

$$\int_0^t \eta^k(\tau)d\tau \leq c\,F_0(t) + c\,t.$$

Então, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtem-se

$$\theta^k(t) + \int_0^t \zeta^k(\tau)d\tau \leq c\,\exp(c\,F_0(t) + c\,t) \equiv G(t), \quad \forall\, t \in (0, T_1].$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||v_t^k(t)||^2 + j||z_t^k(t)||^2 + r||h_t^k(t)||^2 + c\int_0^t ||\nabla v_t^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau \\ + c\int_0^t ||\nabla z_t^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau + c\int_0^t ||\nabla h_t^k(\tau)K(\tau)||^2 d\tau \leq c. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Logo, observando que $||\nabla v_t^k||^2 \leq c\,||\nabla v_t^k K(t)||^2$, concluimos de (4.95) que

$$\{v_t^k\}, \{h_t^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0, T_1; \tilde{H}(\Omega)) \cap L^2(0, T_1; \tilde{V}(\Omega)) \tag{4.96}$$

$$\text{e} \quad \{z_t^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T_1; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_1; H_0^1(\Omega)). \tag{4.97}$$

Agora, colocando $\varphi = \tilde{A}v^k$ e $\psi = \tilde{A}h^k$ em (4.57) e (4.59) respectivamente, temos

$$\begin{aligned} (\mu + \chi)||\tilde{A}v^k||^2 &= -(v_t^k, \tilde{A}v^k) - (v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k) + (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}v^k) \\ &\quad + (\tilde{f}, \tilde{A}v^k) + r(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, \tilde{A}v^k) + \chi(\sum_{i=1}^3 \nabla z_i^k A_i(t), \tilde{A}v^k), \\ \nu||\tilde{A}h^k||^2 &= -(h_t^k, \tilde{A}h^k) + (yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, \tilde{A}h^k) - (v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k, \tilde{A}h^k) \\ &\quad + (h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k, \tilde{A}h^k). \end{aligned}$$

Usando estimativas análogas às estimativas obtidas para o lado direito de (4.61), como também o fato que $|(v_t^k, \tilde{A}v^k)| \leq C_\varepsilon||v_t^k||^2 + \varepsilon||\tilde{A}v^k||^2$, têm-se

$$\begin{aligned} (\mu + \chi)||\tilde{A}v^k||^2 &\leq C_\varepsilon||v_t^k||^2 + C_\varepsilon||\nabla v^k||^6 + C_\varepsilon||\nabla v^k||^2 + C_\varepsilon||\tilde{f}||^2 + C_{\varepsilon,\delta}||\nabla h^k||^6 \\ &\quad + C_\varepsilon||\nabla z^k||^2 + \delta||\tilde{A}h^k||^2 + 6\varepsilon||\tilde{A}v^k||^2, \\ \nu||\tilde{A}h^k||^2 &\leq C_\delta||h_t^k||^2 + C_\delta||\nabla h^k||^2 + C_\delta||\nabla v^k||^4||\nabla h^k||^2 + C_{\varepsilon,\delta}||\nabla v^k||^2||\nabla h^k||^4 \\ &\quad + \varepsilon||\tilde{A}v^k||^2 + 4\delta||\tilde{A}h^k||^2. \end{aligned}$$

Somando as desigualdades acima e escolhendo $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ apropriados, obtemos

$$\begin{aligned} ||\tilde{A}v^k||^2 + ||\tilde{A}h^k||^2 &\leq c\,||\nabla v^k||^2 + c\,||\nabla z^k||^2 + c\,||\nabla h^k||^2 + c\,||\nabla v^k||^6 + c\,||\nabla h^k||^6 + c\,||v_t^k||^2 \\ &\quad + c\,||h_t^k||^2 + c\,||\tilde{f}||^2 + c\,||\nabla v^k||^4||\nabla h^k||^2 + c\,||\nabla v^k||^2||\nabla h^k||^4 \equiv G_1(t). \end{aligned}$$

Logo, da desigualdade acima junto com (4.69), (4.70), (4.96) e o fato que $\tilde{f} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, conclui-se

$$\{v^k\},\ \{h^k\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,T_1;D(\tilde{A})). \tag{4.98}$$

A seguir, pondo $\phi = \tilde{B}z^k$ em (4.58) e usando (4.63), tem-se

$$\begin{aligned}\gamma\|\tilde{B}z^k\|^2 \leq\ & N_0\|\nabla z^k\|^2 + |j(z_t^k, \tilde{B}z^k)| + |j(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, \tilde{B}z^k)| \\ & + |j(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k, \tilde{B}z^k)| + |2\chi(z^k, \tilde{B}z^k)| + |(\tilde{g}, \tilde{B}z^k)| \\ & + |\chi(\sum_{i=1}^{3} \nabla v_i^k A_i(t), \tilde{B}z^k)|,\end{aligned}$$

logo, usando estimativas análogas às obtidas para (4.64), para qualquer $\sigma > 0$, obtem-se

$$\begin{aligned}\gamma\|\tilde{B}z^k\|^2 \leq\ & C_\sigma\|\nabla z^k\|^2 + C_\sigma\|z_t^k\|^2 + C_\sigma\|\nabla v^k\|^4\|\nabla z^k\|^2 + C_\sigma\|z^k\|^2 + C_\sigma\|\tilde{g}\|^2 \\ & + C_\sigma\|\nabla v^k\|^2 + 6\sigma\|\tilde{B}z^k\|^2.\end{aligned}$$

Escolhendo $\sigma = \dfrac{\gamma}{12}$, da última desigualdade, resulta

$$\|\tilde{B}z^k\|^2 \leq c\,\|\nabla z^k\|^2 + c\,\|\nabla v^k\|^2 + c\,\|z_t^k\|^2 + c\,\|\nabla v^k\|^4\|\nabla z^k\|^2 + c\,\|z^k\|^2 + c\,\|\tilde{g}\|^2 \equiv G_2(t)$$

e observando (4.69), (4.70), (4.97) e o fato que $\tilde{g} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, concluimos que

$$\{z^k\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T_1;D(\tilde{B})). \tag{4.99}$$

Então, de (4.96), (4.97), (4.98) e (4.99), passando ao limite (4.57)-(4.59) de forma usual como em Lions ([22], p. 76) e pela unicidade do limite, podemos concluir que a solução (v,z,h) fornecida pelo Lema 4.5, satisfaz

$$\begin{aligned}& v,\ h \in L^\infty(0,T_1;D(\tilde{A})),\quad w \in L^\infty(0,T_1;D(\tilde{B})),\\ & v_t,\ h_t \in L^\infty(0,T_1;\tilde{H}(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)),\\ & z_t \in L^\infty(0,T_1;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)).\end{aligned}$$

Para provar a continuidade de v_t, h_t e z_t é suficiente mostrar que $v_{tt},\ h_{tt} \in L^2(0,T_1;\tilde{V}^*(\Omega))$ e $z_{tt} \in L^2(0,T_1;H^{-1}(\Omega))$, onde $\tilde{V}^*(\Omega)$ é o dual topológico de $\tilde{V}(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$ é o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$. De fato, como $v_t,\ h_t \in L^2(0,T_1;\tilde{V}(\Omega))$ e $z_t \in L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega))$, se $v_{tt},\ h_{tt} \in L^2(0,T_1;\tilde{V}^*(\Omega))$ e $z_{tt} \in L^2(0,T_1;H^{-1}(\Omega))$, o Lema 1.5 (Cap. 1) implica que $v,\ h \in C^1([0,T_1];\tilde{H}(\Omega))$ e $z \in C^1([0,T_1];L^2(\Omega))$.

Agora, para provar que $v_{tt},\ h_{tt} \in L^2(0,T_1;\tilde{V}^*(\Omega))$ e $z_{tt} \in L^2(0,T_1;H^{-1}(\Omega))$ é suficiente mostrar a existência de uma constante $c > 0$ (independente de k) tal que

$$\int_0^{T_1} (\|v_{tt}^k(\tau)\|_{\tilde{V}^*}^2 + \|h_{tt}^k(\tau)\|_{\tilde{V}^*}^2 + \|z_{tt}^k(\tau)\|_{H^{-1}}^2)d\tau \leq c.$$

De (4.57)-(4.59), temos

$$
\begin{aligned}
& v_t^k + (\mu+\chi)\tilde{A}v^k + P_k(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) - P_k(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) \\
& \quad = P_k\tilde{f} + P_k(rh^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) + P_k(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i(t)), \qquad (4.100) \\
& jz_t^k + \gamma\tilde{B}z^k - R_k((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))K(t)) + R_k(jv^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k) \\
& \quad -R_k(jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k) + R_k(2\chi z^k) = R_k\tilde{g} + R_k(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i(t)), \quad (4.101) \\
& h_t^k + \nu\tilde{A}h^k - P_k(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) + P_k(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) \\
& \qquad -P_k(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) = 0. \qquad (4.102)
\end{aligned}
$$

Derivando (4.100)-(4.102) com respeito a t e desde que $\frac{\partial}{\partial t}P_k = P_k\frac{\partial}{\partial t}$, têm-se

$$
\begin{aligned}
v_{tt}^k = & -(\mu+\chi)\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}v^k) - P_k(v_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) - P_k(v^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla v^k) \\
& -P_k(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v_t^k) + P_k(yR''(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) + P_k(yR'(t)(R^{-1}(t))'\cdot\nabla v^k) \\
& +P_k(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v_t^k) + P_k(\tilde{f}_t) + P_k(rh_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) \\
& +P_k(rh^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k) + P_k(rh^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h_t^k) + P_k(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_{i_t}^k A_i(t)) \\
& +P_k(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i^k A_i'(t)), \qquad (4.103) \\
jz_{tt}^k = & -\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{B}z^k) - R_k(jv_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k) - R_k(jv^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla z^k) \\
& -R_k(jv^k R^{-1}(t)\cdot\nabla z_t^k) + R_k((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t))K(t)) \\
& +R_k((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^k(R^{-1}(t))')(R^{-1}(t))^t) + R_k(jyR''(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z^k) \\
& +R_k((\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}(z^k R^{-1}(t))K'(t)) + R_k(jyR'(t)(R^{-1}(t))'\cdot\nabla z^k) \\
& +R_k(jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z_t^k) - R_k(2\chi z_t^k) + R_k(\tilde{g}_t) \\
& +R_k(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_{i_t}^k A_i(t)) + R_k(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i^k A_i'(t)), \qquad (4.104) \\
h_{tt}^k = & -\nu\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}h^k) + P_k(yR''(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) + P_k(yR'(t)(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k) \\
& +P_k(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h_t^k) - P_k(v_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h^k) - P_k(v^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla h^k) \\
& -P_k(v^k R^{-1}(t)\cdot\nabla h_t^k) + P_k(h_t^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v^k) + P_k(h^k(R^{-1}(t))'\cdot\nabla v^k) \\
& +P_k(h^k R^{-1}(t)\cdot\nabla v_t^k). \qquad (4.105)
\end{aligned}
$$

Agora, observemos que para $u \in \tilde{V}(\Omega)$

$$(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}v^k), u) = \frac{d}{dt}(\tilde{A}v^k, u) = \frac{d}{dt}(\nabla v^k\, K(t), \nabla u\, K(t)),$$

portanto,

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}v^k), u) &= (\nabla v_t^k\, K(t), \nabla u\, K(t)) + (\nabla v^k\, K'(t), \nabla u\, K(t)) \\ &\quad +(\nabla v^k\, K(t), \nabla u\, K'(t)).\end{aligned} \tag{4.106}$$

A seguir, demonstraremos que o lado direito de (4.103) é uniformemente limitada em $L^2(0, T_1; \tilde{V}^*(\Omega))$.

Levando em conta (4.106), temos

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}v^k)\|_{\tilde{V}^*} &= \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} |(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}v^k), u)| \\ &\leq \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} \|\nabla v_t^k K(t)\| \|\nabla u\, K(t)\| + \sup_{\|u\|_{V}\leq 1} |\nabla v^k K'(t)| |\nabla u\, K(t)| \\ &\quad + \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} |\nabla v^k K(t)| |\nabla u\, K'(t)| \\ &\leq c\,(\|\nabla v_t^k\| + 2\|\nabla v^k\|) \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} \|\nabla u\| \leq c\,(\|\nabla v_t^k\| + \|\nabla v^k\|).\end{aligned}$$

Logo, observando (4.26) e (4.96), tem-se

$$\int_0^t \| - (\mu + \chi)\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}v^k(\tau))\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c \int_0^t (\|\nabla v_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla v^k(\tau)\|^2) d\tau \leq c. \tag{4.107}$$

Observando (4.98), vem

$$\begin{aligned}\|P_k(v_t^k R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k)\|_{\tilde{V}^*} &= \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} |(v_t^k R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k, P_k u)| \\ &\leq \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} \|v_t^k R^{-1}(t)\|_{L^4} \|\nabla v^k\|_{L^4} \|u\| \leq c\, \|\nabla v_t^k\| \|\tilde{A}v^k\| \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} \|u\| \\ &\leq c\,(\sup_{0\leq t\leq T_1} \|\tilde{A}v^k\|) \|\nabla v_t^k\| \sup_{\|u\|_{\tilde{V}}\leq 1} \|\nabla u\| \leq c\, \|\nabla v_t^k\|,\end{aligned}$$

portanto, levando em conta (4.96), resulta

$$\int_0^t \|P_k(v_t^k(\tau) R^{-1}(\tau) \cdot \nabla v^k(\tau))\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla v_t^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c, \tag{4.108}$$

$$\int_0^t \|P_k(r h_t^k(\tau) R^{-1}(\tau) \cdot \nabla h^k(\tau))\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla h_t^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.109}$$

Analogamente, observando (4.26), têm-se

$$\int_0^t \|P_k(v^k(\tau)(R^{-1}(\tau))' \cdot \nabla v^k(\tau))\|^2_{\tilde{V}^*} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla v^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c, \tag{4.110}$$

$$\int_0^t \|P_k(rh^k(\tau)(R^{-1}(\tau))' \cdot \nabla h^k(\tau))\|^2_{\tilde{V}^*} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla h^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.111}$$

Também, observando (4.69), temos

$$\begin{aligned} \|P_k(v^k R^{-1}(t) \cdot \nabla v_t^k)\|_{\tilde{V}^*} &= \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} |(v^k R^{-1}(t) \cdot \nabla v_t^k, P_k u)| \\ &\leq c \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} \|v^k\|_{L^4} \|\nabla v_t^k\| \|u\|_{L^4} \\ &\leq c(\sup_{0 \leq t \leq T_1} \|\nabla v^k\|) \|\nabla v_t^k\| \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} \|\nabla u\| \leq c \|\nabla v_t^k\|, \end{aligned}$$

então, tendo em conta (4.96), resulta

$$\int_0^t \|P_k(v^k(\tau)R^{-1}(\tau) \cdot \nabla v_t^k(\tau))\|^2_{\tilde{V}^*} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla v_t^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c, \tag{4.112}$$

$$\int_0^t \|P_k(rh^k(\tau)R^{-1}(\tau) \cdot \nabla h_t^k(\tau))\|^2_{\tilde{V}^*} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla h_t^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.113}$$

Como $\sigma \in C^2[0,T]$ tem-se que $R'' \in C[0,T]$, logo

$$\begin{aligned} \|P_k(yR''(t)R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k)\|_{\tilde{V}^*} &= \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} |(yR''(t)R^{-1}(t) \cdot \nabla v^k, P_k u)| \\ &\leq c\|\nabla v^k\| \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} \|\nabla u\| \leq c\|\nabla v^k\| \end{aligned}$$

e observando (4.26), temos

$$\int_0^t \|P_k(yR''(\tau)R^{-1}(\tau) \cdot \nabla v^k(\tau))\|^2_{\tilde{V}^*} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla v^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c, \tag{4.114}$$

$$\int_0^t \|P_k(yR'(\tau)(R^{-1}(\tau))' \cdot \nabla v^k(\tau))\|^2_{\tilde{V}^*} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla v^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.115}$$

Tendo em conta (4.96), tem-se

$$\int_0^t \|P_k(yR'(\tau)R^{-1}(\tau) \cdot \nabla v_t^k(\tau))\|^2_{\tilde{V}^*} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla v_t^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.116}$$

Agora, como

$$\|P_k(\chi \sum_{i=1}^3 \nabla z_{i_t}^k A_i(t))\|_{\tilde{V}^*} = \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} |(\chi \sum_{i=1}^3 \nabla z_{i_t}^k A_i(t), P_k u)| \leq c\|\nabla z_t^k\| \sup_{\|u\|_{\tilde{V}^*} \leq 1} \|u\|,$$

$$\|P_k(\chi \sum_{i=1}^{3} \nabla z_i^k A_i'(t))\|_{\tilde{V}^*} \leq c\,\|\nabla z^k\| \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} \|u\| \leq c\,\|\nabla z^k\|,$$
$$\|P_k \tilde{f}_t\|_{\tilde{V}^*} = \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} |(\tilde{f}_t, P_k u)| \leq c\,\|\tilde{f}_t\| \sup_{\|u\|_{\tilde{V}} \leq 1} \|u\| \leq c\,\|\tilde{f}_t\|,$$

então,

$$\int_0^t \|P_k(\chi \sum_{i=1}^{3} \nabla z_{i_t}^k(\tau) A_i(\tau))\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla z_t^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c, \tag{4.117}$$
$$\int_0^t \|P_k(\chi \sum_{i=1}^{3} \nabla z_i^k(\tau) A_i'(\tau))\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla z^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c, \tag{4.118}$$
$$\int_0^t \|P_k(\tilde{f}_t(\tau))\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\tilde{f}_t(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.119}$$

Finalmente, levando as estimativas (4.107)- (4.119) em (4.103), concluimos que

$$\int_0^t \|v_{tt}^k(\tau)\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c. \tag{4.120}$$

De forma análoga, demonstra-se que

$$\int_0^t \|h_{tt}^k(\tau)\|_{\tilde{V}^*}^2 d\tau \leq c. \tag{4.121}$$

Para (4.104), temos

$$\begin{aligned}\|R_k(\nabla \mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t))K(t))\|_{H^{-1}} &\leq \sup_{\|w\|_{H_0^1} \leq 1} |(\nabla \mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t))K(t), w)| \\ &\leq \sup_{\|w\|_{H_0^1} \leq 1} |(\mathrm{div}(z_t^k R^{-1}(t)), \mathrm{div}(w R^{-1}(t)))| \\ &\leq c\,\|\nabla z_t^k\| \sup_{\|w\|_{H_0^1} \leq 1} \|\nabla w\| \leq c\,\|\nabla z_t^k\|,\end{aligned}$$

então, observando (4.97), resulta

$$\int_0^t \|R_k(\nabla \mathrm{div}(z_t^k(\tau) R^{-1}(\tau))K(\tau))\|_{H^{-1}}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla z_t^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.122}$$

Analogamente, observando (4.27), têm-se

$$\int_0^t \|R_k(\nabla \mathrm{div}(z^k(\tau)(R^{-1}(\tau))')K(\tau))\|_{H^{-1}}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla z^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c, \tag{4.123}$$

$$\int_0^t \|R_k(\nabla \mathrm{div}(z^k(\tau)R^{-1}(\tau))K'(\tau))\|^2_{H^{-1}} d\tau \leq c \int_0^t \|\nabla z^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c. \tag{4.124}$$

Assim, observando as estimativas (4.107), (4.108), (4.110), (4.112), (4.114)-(4.119) e (4.122)-(4.124), de (4.104) conclui-se que

$$\int_0^t \|z^k_{tt}(\tau)\|^2_{H^{-1}} d\tau \leq c. \tag{4.125}$$

Logo, (4.120), (4.121) e (4.125), mostram que

$$v_{tt},\, h_{tt} \in L^2(0,T_1;\tilde{V}^*(\Omega)) \;\text{ e }\; z_{tt} \in L^2(0,T_1;H^{-1}(\Omega)).$$

Portanto,

$$v,\, h \in C^1([0,T_1];\tilde{H}(\Omega)) \;\text{ e }\; z \in C^1([0,T_1];L^2(\Omega)). \tag{4.126}$$

Agora, devemos demonstrar a continuidade de $v(t)$, $h(t)$ e $z(t)$ na norma $H^2(\Omega)$.

De (4.53)-(4.56), temos:

$$\begin{aligned}
(\mu+\chi)\tilde{A}v &= -v_t - \tilde{P}(vR^{-1}(t)\cdot\nabla v) + \tilde{P}(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v) + \tilde{P}\tilde{f} \\
&\quad + \tilde{P}(rhR^{-1}(t)\cdot\nabla h) + \tilde{P}(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i A_i(t)), \\
\gamma\tilde{B}z &= -jz_t + (\alpha+\beta)\nabla \mathrm{div}(zR^{-1}(t))K(t) - jvR^{-1}(t)\cdot\nabla z \\
&\quad + jyR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla z - 2\chi z + \tilde{g} + \chi\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i A_i(t) \\
\nu\tilde{A}h &= -h_t + \tilde{P}(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla h) - \tilde{P}(vR^{-1}(t)\cdot\nabla h) + \tilde{P}(hR^{-1}(t)\cdot\nabla v).
\end{aligned}$$

Como, $\tilde{f},\, \tilde{g} \in C([0,T_1];L^2(\Omega))$, então, $\tilde{P}\tilde{f} \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega))$. De (4.126) temos que $v_t,\, h_t \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega))$.

Agora, como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, observando (4.69) e (4.98), temos

$$\begin{aligned}
&\|v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t) - v(t_0)R^{-1}(t_0)\cdot\nabla v(t_0)\| \\
&\leq \|v(t)(R^{-1}(t)-R^{-1}(t_0))\cdot\nabla v(t)\| + \|(v(t)-v(t_0))R^{-1}(t_0)\cdot\nabla v(t)\| \\
&\qquad + \|v(t_0)R^{-1}(t_0)\cdot\nabla(v(t)-v(t_0))\| \\
&\leq \|v(t)(R^{-1}(t)-R^{-1}(t_0))\|_{L^4}\|\nabla v(t)\|_{L^4} \\
&\quad + \|(v(t)-v(t_0))R^{-1}(t_0)\|_{L^4}\|\nabla v(t)\|_{L^4} \\
&\quad + \|v(t_0)R^{-1}(t_0)\|_{L^\infty}\|\nabla v(t)-\nabla v(t_0)\| \\
&\leq c\,\|R^{-1}(t)-R^{-1}(t_0)\|\|\nabla v(t)\|\|\tilde{A}v(t)\| + c\,\|\nabla v(t)-\nabla v(t_0)\|\|\tilde{A}v(t)\| \\
&\quad + c\,\|\tilde{A}v(t_0)\|\|\nabla v(t)-\nabla v(t_0)\| \\
&\leq c\,\|R^{-1}(t)-R^{-1}(t_0)\| + c\,\|\nabla v(t)-\nabla v(t_0)\|,
\end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned}\|R^{-1}(t) - R^{-1}(t_0)\| &\leq \|R^{-1}(t)(R(t_0) - R(t))R^{-1}(t_0)\| \\ &\leq \|R^{-1}(t)\|\|R(t_0) - R(t)\|\|R^{-1}(t_0)\| \leq c\,\|R(t_0) - R(t)\|,\end{aligned}$$

então, desde que $v \in C([0,T_1];\tilde{V}(\Omega))$ e da continuidade de R, tem-se

$$\|v(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v(t) - v(t_0)R^{-1}(t_0)\cdot\nabla v(t_0)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow t_0.$$

Logo, $vR^{-1}(t)\cdot\nabla v \in C([0,T_1];L^2(\Omega))$ e conclui-se que

$$\tilde{P}(vR^{-1}(t)\cdot\nabla v) \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega)).$$

Analogamente, obtemos $\tilde{P}(rhR^{-1}(t)\cdot\nabla h) \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega))$.

A seguir, como $\|\chi\sum_{i=1}^3 \nabla z_i A_i(t)\| \leq c\,\|\nabla z\|$ e $z \in C([0,T_1];H_0^1(\Omega))$, tem-se $\chi\sum_{i=1}^3 \nabla z_i A_i(t) \in C([0,T_1];L^2(\Omega))$ e consequentemente

$$\tilde{P}(\chi\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i A_i(t)) \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega)).$$

Similarmente, temos que $\|yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v\| \leq c\,\|\nabla v\|$ e $v \in C([0,T_1];\tilde{V}(\Omega))$, então $yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v \in C([0,T_1];L^2(\Omega))$. Logo

$$\tilde{P}(yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v) \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega)).$$

Portanto, $\tilde{A}v \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega))$ o qual implica que $v \in C([0,T_1];D(\tilde{A}))$.

Analogamente demonstra-se que que $h \in C([0,T_1];\tilde{H}(\Omega))$ e $z \in C([0,T_1];L^2(\Omega))$, completando a prova do lema.

Prova do Teorema 4.3

Desde que a solução (v,z,h) fornecida pelo Lema 4.6, satisfaz:

$$\begin{aligned}&v,\ h \in L^\infty(0,T_1;D(\tilde{A})),\ z \in L^\infty(0,T_1;D(\tilde{B})),\\ &v_t,\ h_t \in L^\infty(0,T_1;\tilde{H}(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;\tilde{V}(\Omega)) \text{ e}\\ &z_t \in L^\infty(0,T_1;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)),\end{aligned}$$

então, usando a tranformação $\Phi^{-1}: Q \longrightarrow \tilde{Q}$ definida em (4.8) e Lema 4.2, segue-se que a solução (u,w,b) fornecida pelo Teorema 4.2, satisfaz os resultados do Teorema 4.3.

4.4 Resultados sobre a pressão

Para a pressão temos os seguintes resultados:

Proposição 4.3 *Com as hipóteses do Teorema 4.2, existe uma única* $p \in L^2(0,T_1; H^1(\Omega_t)/I\!R)$ *tal que* (u,w,b,p) *é a solução de (4.1)-(4.3), onde* (u,w,b) *é a única solução dada pelo Teorema 4.2.*

Proposição 4.4 *Com as hipóteses do Teorema 4.3, existe uma única* $p \in L^\infty(0,T_1; H^1(\Omega_t)/I\!R)$ *tal que* (u,w,b,p) *é a solução de (4.1)-(4.3), onde* (u,w,b) *é a única solução dada pelo Teorema 4.3.*

Prova da Proposição 4.3

Observemos que com as hipóteses do Teorema 4.2, os resultados do Lema 4.5 para o problema transformado (4.53)-(4.56) são válidos. Então, para a pressão do problema transformado (4.12)-(4.17), temos o seguinte resultado:

Lema 4.7 *Com as hipóteses do Teorema 4.2, existe uma única* $q \in L^2(0,T_1; H^1(\Omega)/I\!R)$ *tal que* (v,z,h,q) *é solução de (4.12)-(4.17), onde* (v,z,h) *é a solução fornecida pelo Lema 4.5.*

Prova. De (4.53), temos

$$(\mu+\chi)\tilde{A}v = \tilde{P}(F) \tag{4.127}$$

onde

$$F = -v_t - vR^{-1}(t)\cdot\nabla v + yR'(t)R^{-1}(t)\cdot\nabla v + \tilde{f} + rhR^{-1}(t)\cdot\nabla h + \chi(\sum_{i=1}^{3}\nabla z_i A_i(t).$$

Agora, observe-se que

$$\begin{aligned} \|F\| &\leq c\,\|v_t\| + c\,\|v\|_{L^4}\|\nabla v\|_{L^4} + c\,\|\nabla v\| + c\,\|\tilde{f}\| + c\,\|h\|_{L^4}\|\nabla h\|_{L^4} + c\,\|\nabla z\| \\ &\leq c\,\|v_t\| + c\,\|\nabla v\|\|\tilde{A}v\| + c\,\|\nabla v\| + c\,\|\tilde{f}\| + c\,\|\nabla h\|\|\tilde{A}h\| + c\,\|\nabla z\| \end{aligned}$$

e desde que pelo Lema 4.5, $z \in L^\infty(0,T_1; H_0^1(\Omega))$ e v, $h \in L^\infty(0,T_1;\tilde{V}(\Omega))$, obtem-se

$$\|F\|^2 \leq c\,\|v_t\|^2 + c\,\|\tilde{A}v\|^2 + c\,\|\tilde{f}\|^2 + c\|\tilde{A}h\|^2 + c. \tag{4.128}$$

Logo, com as estimativas do Lema 4.5, tem-se que $F \in L^2(0,T_1;L^2(\Omega))$. Assim, usando os resultados de Amrouche-Girault [3], existe uma única $q^* \in L^2(0,T_1;H^1(\Omega)/I\!R)$ tal que

$$-(\mu+\chi)\tilde{\Delta}v + \nabla q^* M^{-t} = F \quad \text{e} \quad \int_0^{T_1}\|q^*(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R}d\tau \leq c\int_0^{T_1}\|F(\tau)\|^2 d\tau \leq c.$$

Então, escolhendo $q = \sigma(t)\, q^* - \frac{r}{2} h \cdot h$ e lembrando que $K(t) = \dfrac{1}{\sigma(t)} M^{-t}$, temos

$$-(\mu + \chi)\tilde{\Delta} v + \nabla(q + \frac{r}{2} h \cdot h) K(t) = F, \quad \text{isto é,} \quad q \text{ satisfaz (4.12).}$$

Somente falta mostrar que $q \in L^2(0, T_1; H^1(\Omega)/I\!R)$.

Desde que $\nabla(h \cdot h) = 2h \cdot (\nabla h)^t$, temos

$$\begin{aligned}
\|q\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq c\,\|q^*\|^2_{H^1} + c\,\|h \cdot h\|^2_{H^1} \leq c\,\|q^*\|^2_{H^1} + c\,\|h \cdot h\|^2 + c\,\|\nabla(h \cdot h)\|^2 \\
&\leq c\,\|q^*\|^2_{H^1} + c\,\|h\|^4_{L^4} + c\,\|h \cdot (\nabla h)^t\|^2 \leq c\,\|q^*\|^2_{H^1} + c\,\|\nabla h\|^4 + c\,\|h\|^2_{L^4}\|\nabla h\|^2_{L^4} \\
&\leq c\,\|q^*\|^2_{H^1} + c\,\|\nabla h\|^4 + c\,\|\nabla h\|^2 \|\nabla h\|^{1/2} \|\tilde{A} h\|^{3/2} \\
&\leq c\,\|q^*\|^2_{H^1} + c\,\|\nabla h\|^4 + c\,\|\nabla h\|^{10} + c\,\|\tilde{A} h\|^2 \\
&\leq c\,\|q^*\|^2_{H^1} + c\,\|\tilde{A} h\|^2 + c
\end{aligned} \tag{4.129}$$

de onde resulta $q \in L^2(0, T_1; H^1(\Omega)/I\!R)$. Isto completa a prova do lema.

A seguir, con o resultado do Lema 4.7, provamos a Proposição 4.3.

Usando a transformação $\Phi^{-1} : Q \longrightarrow \tilde{Q}$ definida em (4.8) e as definições de (4.9) em (4.12)-(4.17), temos que $p(x,t) = q(xR^{-1}(t), t)$ junto com a solução (u, w, b) dada pelo Teorema 4.2, satisfaz (4.1)-(4.3). Além disso, $p \in L^2(0, T_1; H^1(\Omega_t)/I\!R)$ é única, desde que a aplicação

$$\begin{aligned}
L^2(0, T, H^1(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T, H^1(\Omega_t)) \\
q(y,t) &\longrightarrow p(x,t) = q(xR^{-1}(t), t)
\end{aligned}$$

é um isomorfismo. Isto completa a prova da proposição.

Prova da Proposição 4.4

Com as hipóteses do Teorema 4.3, temos os resultados do Lema 4.6 para o problema transformado (4.53)-(4.56). Assim, de (4.128) e Lema 4.6, tem-se $F \in L^\infty(0, T_1; L^2(\Omega))$. Portanto, de (4.127) e os resultados de Amrouche-Girault [3], existe uma única $q^* \in L^\infty(0, T_1; H^1(\Omega)/I\!R)$ tal que

$$-(\mu + \chi)\tilde{\Delta} v + \nabla q^* M^{-t} = F \;\text{ e }\; \|q^*\|^2_{L^\infty(0,T_1;H^1(\Omega)/I\!R)} \leq c\,\|F\|^2_{L^\infty(0,T_1;L^2(\Omega))} \leq c.$$

Logo, escolhendo $q = \sigma(t)\, q^* - \frac{r}{2} h \cdot h$, temos que q satisfaz (4.12) e observando (4.129) junto com o Lema 4.6, tem-se $q \in L^\infty(0, T_1; H^1(\Omega)/I\!R)$. Para finalizar a prova da proposição, usando a transformação $\Phi^{-1} : Q \longrightarrow \tilde{Q}$, temos que $p(x,t) = q(xR^{-1}(t), t)$ junto con (u, w, b) fornecida pelo Teorema 4.3, satisfaz (4.1)-(4.3). Além disso, desde que a aplicação

$$\begin{aligned}
L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) &\longrightarrow L^\infty(0, T, H^1(\Omega_t)) \\
q(y,t) &\longrightarrow p(x,t) = q(xR^{-1}(t), t)
\end{aligned}$$

é um isomorfismo, resulta $p \in L^\infty(0, T_1; H^1(\Omega_t)/I\!R)$, completando a prova da proposição.

4.5 Comentários sobre a existência e a unicidade da solução global forte

Resultados ao mesmo nível aos obtidos em domínios cilíndricos na Seção 3.1 do Capítulo 3, podem ser atingidos no caso de um domínio não cilíndrico.

Um análogo ao Teorema 3.1 é o seguinte resultado:

Teorema 4.4 *Com as hipóteses sobre Ω_t, assumir u_0, $b_0 \in V(\Omega_0)$, $w_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ e f, $g \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega_t))$. Se as normas $\|u_0\|_{V(\Omega_0)}$, $\|b_0\|_{V(\Omega_0)}$, $\|w_0\|_{H_0^1(\Omega_0)}$, $\|f\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega_t))}$ e $\|g\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega_t))}$ são suficientemente pequenas, então a única solução forte (u, w, b) do problema (4.1)-(4.3), existe globalmente no tempo e satisfaz*

$$u,\ b \in C([0,\infty); V(\Omega_t)) \quad e \quad w \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega_t)).$$

Tendo em conta a desigualdade (4.67) e a desigualdade (3.8) do Capítulo 3, pode-se observar que a prova da existência e a unicidade da solução global forte do problema transformado (4.12)-(4.17), é análogo à prova do Teorema 3.1 do Capítulo 3.

A seguir, com hipóteses mais fortes sobre os dados iniciais e as forças externas, obtem-se mais regularidade da solução. Assim, análogo ao Teorema 3.2, temos:

Teorema 4.5 *Além das hipóteses dadas no Teorema 4.4, são assumidos u_0, $b_0 \in V(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$, $w_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$, $\sigma \in C^2([0,\infty))$ e f_t, $g_t \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega_t))$. Então, a solução global forte (u, w, b) fornecida pelo Teorema 4.4, satisfaz*

$$\begin{aligned} &u,\ b \in C([0,\infty); V(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \cap C^1([0,\infty); H(\Omega_t)), \\ &w \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega_t)). \end{aligned}$$

Capítulo 5

Existência e unicidade da solução forte usando um método iterativo - estimativas de erro

Usando um processo iterativo para as soluções aproximadas, junto com o método de Galerkin espectral para a existência da solução aproximada, prova-se a existência e a unicidade da solução forte das equações do movimento de um fluido magneto-micropolar. Também são obtidas estimativas uniformes no tempo que usamos para obter as estimativas de erro.

5.1 Formulação do problema aproximado e resultados conhecidos

Consideraremos as notações do capítulo 1, em um intervalo de tempo $[0,T]$ com $T < \infty$.

Para situar o problema em estudo, aplicando a projeção P à equação (1.1), reformulamos o problema (1.1)-(1.3) como segue: encontrar u, $b \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(A))$, $w \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(B))$ tais que

$$u_t + (\mu+\chi)Au + P(u\cdot\nabla u) = \chi P(\operatorname{rot} w) + rP(b\cdot\nabla b) + Pf, \tag{5.1}$$

$$jw_t + \gamma Bw - (\alpha+\beta)\nabla \operatorname{div} w + ju\cdot\nabla w + 2\chi w = \chi \operatorname{rot} u + g, \tag{5.2}$$

$$b_t + \nu Ab + P(u\cdot\nabla b) - P(b\cdot\nabla u) = 0, \tag{5.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ w(x,0) = w_0(x),\ b(x,0) = b_0(x) \ \text{ em } \ \Omega.$$

Neste capítulo, por simplicidade consideraremos as condições iniciais

$$u(x,0) = 0,\ w(x,0) = 0,\ b(x,0) = 0 \ \text{ em } \Omega, \tag{5.4}$$

desde que quando eles são não nulos, são tratados de forma similar e os resultados serão dados como uma observação.

Seguindo um método iterativo proposto por Zarubin [41], com $n \in I\!N$, consideremos o seguinte processo iterativo para a solução aproximada do problema (5.1)-(5.4):

$$u_t^{n+1} + (\mu+\chi)Au^{n+1} + P(u^n\cdot\nabla u^{n+1}) = \chi P(\mathrm{rot}\,w^n) + rP(b^n\cdot\nabla b^{n+1}) + Pf, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} jw_t^{n+1} + \gamma Bw^{n+1} - (\alpha+\beta)\nabla\ \mathrm{div}\ w^{n+1} + ju^n\cdot\nabla w^{n+1} + 2\chi w^{n+1}& \\ = \chi\mathrm{rot}\,u^n + g,& \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$b_t^{n+1} + \nu Ab^{n+1} + P(u^n\cdot\nabla b^{n+1}) - P(b^n\cdot\nabla u^{n+1}) = 0, \tag{5.7}$$

$$u^{n+1}(x,0)=0,\quad w^{n+1}(x,0)=0,\quad b^{n+1}(x,0)=0\ \text{ em }\ \Omega. \tag{5.8}$$

Observemos que para cada n, o problema (5.5)-(5.8) é linear com respeito a $(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1})$, então usando o método de Galerkin espectral podemos demonstrar que existe uma solução $(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1})$ para o problema (5.5)-(5.8).

De fato, para cada n fixado, conhecida a solução aproximada (u^n, w^n, b^n) de (5.1)-(5.4), queremos encontrar uma solução $(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1})$ de (5.5)-(5.8). Então, análogo a (1.18)-(1.22), considerando as soluções aproximadas

$$u_k^{n+1}(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\varphi^i(x),\quad w_k^{n+1}(x,t) = \sum_{i=1}^{k} d_{ik}(t)\phi^i(x),\quad b_k^{n+1}(x,t) = \sum_{i=1}^{k} e_{ik}(t)\varphi^i(x),$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} &(u_k^{n+1})_t + (\mu+\chi)Au_k^{n+1} + P_k(u^n\cdot\nabla u_k^{n+1}) = \chi P_k(\mathrm{rot}w^n) + rP_k(b^n\cdot\nabla b_k^{n+1}) + P_kf,\\ &j(w_k^{n+1})_t + \gamma Bw_k^{n+1} - (\alpha+\beta)\nabla\mathrm{div}w_k^{n+1} + jR_k(u^n\cdot\nabla w_k^{n+1}) + 2\chi w_k^{n+1}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \chi R_k(\mathrm{rot}u^n) + R_kg,\\ &(b_k^{n+1})_t + \nu Ab_k^{n+1} + P_k(u^n\cdot\nabla b_k^{n+1}) - P_k(b^n\cdot\nabla u_k^{n+1}) = 0,\\ &u_k^{n+1}(0) = u^{n+1}(x,0) = 0,\quad w_k^{n+1}(0) = w^{n+1}(x,0) = 0,\quad b_k^{n+1}(0) = b^{n+1}(x,0) = 0, \end{aligned}$$

e seguindo os mesmos passos de Rojas-Medar [32], demonstra-se os seguintes resultados:

Teorema 5.1 *Sejam $f, g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Então para cada n, sobre um (possívelmente pequeno) intervalo de tempo $[0,T]$, o problema (5.5)-(5.8) tem uma única solução forte $(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1})$, isto é, u^{n+1}, $b^{n+1} \in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))$ e $w^{n+1}\in L^\infty(0,T;$ $H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;D(B))$.*

Além disso,

$$\begin{aligned} &(u_t^{n+1}, w_t^{n+1}, b_t^{n+1}) \in L^2(0,T;H)\times L^2(0,T;L^2(\Omega))\times L^2(0,T;H),\\ &(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1}) \in C([0,T];V)\times C([0,T];H_0^1(\Omega))\times C([0,T];V). \end{aligned}$$

Teorema 5.2 *Se as hipóteses do Teorema 5.1 são satisfeitas e* f_t, $g_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *então a solução* $(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1}) \in L^\infty(0,T;D(A)) \times L^\infty(0,T;D(B)) \times L^\infty(0,T;D(A))$. *Além disso,*

$$\begin{array}{l} u_t^{n+1},\ b_t^{n+1} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \quad u_{tt}^{n+1},\ b_{tt}^{n+1} \in L^2(0,T;V^*), \\ w_t^{n+1} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad w_{tt}^{n+1} \in L^2(0,T;H^{-1}), \\ u^{n+1},\ b^{n+1} \in C^1([0,T];H) \cap C([0,T];D(A)), \\ w^{n+1} \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C([0,T];D(B)). \end{array}$$

Observação 5.1 *Observe-se que a solução* $(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1})$ *é obtida como sendo*

$$u^{n+1} = \lim_{k \longrightarrow \infty} u_k^{n+1}, \quad w^{n+1} = \lim_{k \longrightarrow \infty} w_k^{n+1}, \quad b^{n+1} = \lim_{k \longrightarrow \infty} b_k^{n+1}.$$

A seguir, enunciamos un lema que frequentemente usaremos para obter as estimativas de erro em diferentes normas,

Lema 5.1 *Sejam as aplicações* $\phi_n : [0,T] \longrightarrow I\!R$, $n \in I\!N$, *tais que para todo* $t \in [0,T]$, $0 \leq \phi_1(t) \leq M$ *e para todo* $n \geq 2$, *tem-se a seguinte desigualdade*

$$0 \leq \phi_n(t) \leq C \int_0^t \phi_{n-1}(\tau) d\tau,$$

com C *constante positiva. Então,*

$$\phi_n(t) \leq M \frac{(Ct)^{n-1}}{(n-1)!} \leq M \frac{(CT)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{5.9}$$

para todo $t \in [0,T]$ *e* $n \geq 2$. *Além disso,*

$$\int_0^t \phi_n(\tau) d\tau \leq M \frac{C^{n-1} t^n}{n!} \leq \frac{M}{C} \frac{(CT)^n}{n!}.$$

Prova. De fato, tem-se

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &\leq C \int_0^t C \int_0^{t_1} \phi_{n-2}(t_2) dt_2 dt_1 \leq C^2 \int_0^t \int_0^{t_1} C \int_0^{t_2} \phi_{n-3}(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \\ &\leq C^{n-1} \underbrace{\int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-2}}}_{(n-1)-vezes} \phi_1(t_{n-1}) dt_{n-1} \ldots dt_1 \leq M C^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq M C^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

A última desigualdade estabelecida no lema é uma consequência de (5.9).

Corolário 5.1 *Sejam as aplicações* $\phi_n : [0,T] \longrightarrow I\!R$, *tais que* $\forall n \in I\!N$, $\forall t \in [0,T]$, $\phi_n(t) \geq 0$ *e*

$$\phi_n(t) \leq M\frac{(Ct)^{n-m}}{(n-m)!} \leq M\frac{(CT)^{n-m}}{(n-m)!}$$

onde $m \in I\!N$ *com* $m \leq n$ *e* M, C *são constantes positivas que independen de* n.

Então

$$\phi_n(t) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Prova. Como a serie $\displaystyle\sum_{n \geq m} \frac{M(CT)^{n-m}}{(n-m)!}$ converge, resulta

$$0 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \phi_n(t) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{M(CT)^{n-m}}{(n-m)!} = 0.$$

Assim, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} \phi_n(t) = 0$.

Também lembremos que para $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\operatorname{div} u = 0$ e Ω limitado, têm-se

$$||\operatorname{rot} u|| = ||\nabla u|| \qquad \text{e} \qquad ||u||^2 \leq \lambda^{-1}||\nabla u||^2 \tag{5.10}$$

onde λ é o menor autovalor do operador $-\Delta$ (ver [24]).

Finalmente, no que segue do capítulo, c denotará uma constante positiva genérica que tomará diversos valores e quando precisarmos distinguir as constantes denotaremos com $C_1, C_2, ..., M_1, M_2, ...$ e C com subíndices.

5.2 Existência e estimativas a priori das soluções aproximadas

Com as notações dadas no Capítulo 1, a seguir damos os resultados obtidos:

Teorema 5.3 *Sejam* f, $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u^1 = w^1 = b^1 = 0$. *Seja*

$$\delta < 2^{-3/2}\lambda^{1/8}C_\Omega^{-1}M_3^{-1}\xi$$

onde λ *é o menor autovalor do operador* $-\Delta$, $\xi = \min\{\frac{\mu+\chi}{1+\sqrt{r}}, \frac{2\nu\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}\}$, C_Ω *é a constante da imersão de* $H^2(\Omega)$ *em* $W^{1,4}(\Omega)$, M_3 *é a constante da desigualdade de Cattabriga* $||u||_{H^2} \leq M_3||Au||$ *e*

$$\delta^2 = \frac{2\chi^2}{\gamma(\mu+\chi)}M[1 + CT\exp(CT)] + \frac{2}{\mu+\chi}||f||^2_{L^2(Q)},$$

onde $M = \dfrac{2\lambda^{-1}}{\mu+\chi}\|f\|^2_{L^2(Q)} + \dfrac{1}{4\chi}\|g\|^2_{L^2(Q)}, \quad C = \max\{\, \chi^2\gamma^{-1},\ \dfrac{2\chi^2}{j(\mu+\chi)}, 1\,\}.$

Então, para cada n, para o problema (5.5)-(5.8) existe uma única solução (u^n, w^n, b^n), tal que u^n, $b^n \in L^\infty(0,\ T; V) \cap L^2(0,T; D(A))$, $w^n \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(B))$, u_t^n, $b_t^n \in L^2(0,T;\ H)$ e $w_t^n \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$. As soluções aproximadas $\{(u^n, w^n, b^n)\}$ satisfazem as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\sup_t\{\|u^n(t)\|^2 + \|w^n(t)\|^2 + \|b^n(t)\|^2\} &\leq M_0,\\
\int_0^t \|\nabla u^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\nabla w^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\nabla b^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq M_0,\\
\sup_t\{\|\nabla u^n(t)\|^2 + \|\nabla w^n(t)\|^2 + \|\nabla b^n(t)\|^2\} &\leq M_0,\\
\int_0^t \|Au^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Bw^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Ab^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq M_0,\\
\int_0^t \|u_t^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|w_t^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|b_t^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq M_0,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ e onde $M_0 > 0$ é uma constante genérica que independe de n.

Assumindo mais regularidade sobre os dados, temos:

Teorema 5.4 *Com as hipóteses do Teorema 5.3. Se f_t, $g_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, então a solução (u^n, w^n, b^n) obtida em Teorema 5.3, para cada n, satisfaz u^n, $b^n \in L^\infty(0,T; D(A))$, $w^n \in L^\infty(0,T; D(B))$ e*

$$\begin{aligned}
&u_t^n,\ b_t^n \in L^\infty(0,T; H) \cap L^2(0,T; V), \quad u_{tt}^n,\ b_{tt}^n \in L^2(0,T; V^*),\\
&w_t^n \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \quad w_{tt}^n \in L^2(0,T; H^{-1}).
\end{aligned}$$

Além disso, as soluções aproximadas $\{(u^n, w^n, b^n)\}$ satisfazem

$$\begin{aligned}
\sup_t\{\|u_t^n(t)\|^2 + \|w_t^n(t)\|^2 + \|b_t^n(t)\|^2\} &\leq M_0,\\
\int_0^t \|\nabla u_t^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\nabla w_t^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\nabla b_t^n(\tau)\|^2 d\tau &\leq M_0,\\
\sup_t\{\|Au^n(t)\|^2 + \|Bw^n(t)\|^2 + \|Ab^n(t)\|^2\} &\leq M_0,\\
\int_0^t \|u_{tt}^n(\tau)\|^2_{V^*} d\tau + \int_0^t \|w_{tt}^n(\tau)\|^2_{H^{-1}} d\tau + \int_0^t \|b_{tt}^n(\tau)\|^2_{V^*} d\tau &\leq M_0,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ e onde $M_0 > 0$ é uma constante genérica que independe de n.

Observação 5.2 *Os mesmos resultados do Teorema 5.3 são válidos, se reemplazamos a condição* $u^1 = w^1 = b^1 = 0$, *pelas condições*

$$\begin{aligned}
&u^1,\ b^1 \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)),\\
&w^1 \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(B)),\\
&(u_t^1, w_t^1, b_t^1) \in L^2(0,T;H) \times L^2(0,T;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T;H),\\
&u^1(x,0) = w^1(x,0) = b^1(x,0) = 0\\
&\text{e } \ \|\nabla u^1\|,\ \|\nabla b^1\| \ \text{suficientemente pequenas.}
\end{aligned}$$

Observação 5.3 *Se no problema (5.1)-(5.4), consideramos as condições iniciais* $u(x,0) = u_0(x)$, $w(x,0) = w_0(x)$, $b(x,0) = b_0(x)$, *então em (5.5)-(5.8) para cada* n *considerando* $u^{n+1}(x,0) = u_0(x)$, $w^{n+1}(x,0) = w_0(x)$, $b^{n+1}(x,0) = b_0(x)$, *temos que serão válidos*

1. *Os resultados do Teorema 5.3, se*

$$\begin{aligned}
&u_0,\ b_0 \in V,\ w_0 \in H_0^1(\Omega),\\
&u^1,\ b^1 \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)),\\
&w^1 \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(B)),\\
&(u_t^1, w_t^1, b_t^1) \in L^2(0,T;H) \times L^2(0,T;L^2(\Omega)) \times L^2(0,T;H),\\
&u^1(x,0) = u_0(x),\ w^1(x,0) = w_0(x),\ b^1(x,0) = b_0(x),\\
&\text{e } \ \|\nabla u^1\|,\ \|\nabla b^1\| \ \text{suficientemente pequenas.}
\end{aligned}$$

2. *Os resultados do Teorema 5.4, se*

$$\begin{aligned}
&u_0,\ b_0 \in V \cap H^2(\Omega),\ \ w_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\\
&(u^1, w^1, b^1) \in L^\infty(0,T;D(A)) \times L^\infty(0,T;D(B)) \times L^\infty(0,T;D(A)),\\
&u_t^1,\ b_t^1 \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V),\\
&w_t^1 \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&(u_{tt}^1, w_{tt}^1, b_{tt}^1) \in L^2(0,T;V^*) \times L^2(0,T;H^{-1}) \times L^2(0,T;V^*),\\
&u^1(x,0) = u_0(x),\ w^1(x,0) = w_0(x),\ b^1(x,0) = b_0(x),\\
&\text{e } \ \|\nabla u^1\|,\ \|\nabla b^1\| \ \text{suficientemente pequenas.}
\end{aligned}$$

Prova do Teorema 5.3

Para cada n, a existencia da solução forte (u^n, w^n, b^n) do problema (5.5)-(5.8) é garantida pelo Teorema 5.1.

A seguir, multiplicando (5.5) por u^{n+1}, (5.6) por w^{n+1} e (5.7) por rb^{n+1}, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u^{n+1}||^2 + (\mu+\chi)||\nabla u^{n+1}||^2 = \chi(\operatorname{rot} w^n, u^{n+1}) + r(b^n \cdot \nabla b^{n+1}, u^{n+1}) + (f, u^{n+1}), \tag{5.11}$$

$$\frac{j}{2}\frac{d}{dt}||w^{n+1}||^2 + \gamma||\nabla w^{n+1}||^2 + (\alpha+\beta)||\operatorname{div} w^{n+1}||^2 + 2\chi||w^{n+1}||^2 = \chi(\operatorname{rot} u^n, w^{n+1}) + (g, w^{n+1}), \tag{5.12}$$

$$\frac{r}{2}\frac{d}{dt}||b^{n+1}||^2 + r\nu||\nabla b^{n+1}||^2 = r(b^n \cdot \nabla u^{n+1}, b^{n+1}). \tag{5.13}$$

A seguir estimaremos o lado direito de (5.11)-(5.13). Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Young e (5.10), têm-se

$$\begin{aligned}
|\chi(\operatorname{rot} w^n, u^{n+1})| &= |\chi(w^n, \operatorname{rot} u^{n+1})| \le \chi||w^n||||\nabla u^{n+1}|| \\
&\le \frac{\chi^2}{\mu+\chi}||w^n||^2 + \frac{\mu+\chi}{4}||\nabla u^{n+1}||^2 \\
|(f, u^{n+1})| &\le \frac{\lambda^{-1}}{\mu+\chi}||f||^2 + \frac{\mu+\chi}{4}||\nabla u^{n+1}||^2 \\
|\chi(\operatorname{rot} u^n, w^{n+1})| &= |\chi(u^n, \operatorname{rot} w^{n+1})| \le \frac{\chi^2}{2\gamma}||u^n||^2 + \frac{\gamma}{2}||\nabla w^{n+1}||^2 \\
|(g, w^{n+1})| &\le \frac{1}{8\chi}||g||^2 + 2\chi||w^{n+1}||^2.
\end{aligned}$$

Levando estas estimativas em (5.11)-(5.13), resulta

$$\frac{d}{dt}||u^{n+1}||^2 + (\mu+\chi)||\nabla u^{n+1}||^2 \le \frac{2\chi^2}{\mu+\chi}||w^n||^2 + \frac{2\lambda^{-1}}{\mu+\chi}||f||^2 + 2r(b^n \cdot \nabla b^{n+1}, u^{n+1}), \tag{5.14}$$

$$j\frac{d}{dt}||w^{n+1}||^2 + \gamma||\nabla w^{n+1}||^2 + 2(\alpha+\beta)||\operatorname{div} w^{n+1}||^2 \le \frac{\chi^2}{\gamma}||u^n||^2 + \frac{1}{4\chi}||g||^2 \tag{5.15}$$

$$r\frac{d}{dt}||b^{n+1}||^2 + 2\nu r||\nabla b^{n+1}||^2 = 2r(b^n \cdot \nabla u^{n+1}, b^{n+1}). \tag{5.16}$$

Somando (5.14), (5.15) e (5.16), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||u^{n+1}||^2 + j||w^{n+1}||^2 + r||b^{n+1}||^2) + (\mu+\chi)||\nabla u^{n+1}||^2 \\
&\qquad + \gamma||\nabla w^{n+1}||^2 + 2r\nu||\nabla b^{n+1}||^2 + 2(\alpha+\beta)||\operatorname{div} w^{n+1}||^2 \\
&\qquad \le \frac{2\chi^2}{\mu+\chi}||w^n||^2 + \frac{\chi^2}{\gamma}||u^n||^2 + \frac{2\lambda^{-1}}{\mu+\chi}||f||^2 + \frac{1}{4\chi}||g||^2
\end{aligned}$$

desde que de (1.4), $2r(b^n \cdot \nabla b^{n+1}, u^{n+1}) + 2r(b^n \cdot \nabla u^{n+1}, b^{n+1}) = 0$.

Agora, integrando de 0 a t, tem-se

$$\begin{aligned}
&||u^{n+1}(t)||^2 + j||w^{n+1}(t)||^2 + r||b^{n+1}(t)||^2 + (\mu+\chi)\int_0^t ||\nabla u^{n+1}(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad +\gamma \int_0^t ||\nabla w^{n+1}(\tau)||^2 d\tau + 2r\nu \int_0^t ||\nabla b^{n+1}(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad \le \frac{2\chi^2}{j(\mu+\chi)} \int_0^t j||w^n(\tau)||^2 d\tau + \frac{\chi^2}{\gamma}\int_0^t ||u^n(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad + \frac{2\lambda^{-1}}{\mu+\chi}\int_0^t ||f(\tau)||^2 d\tau + \frac{1}{4\chi}\int_0^t ||g(\tau)||^2 d\tau
\end{aligned}$$

e observando as hipóteses sobre f e g, vem

$$\begin{aligned}
&||u^{n+1}(t)||^2 + j||w^{n+1}(t)||^2 + r||b^{n+1}(t)||^2 + (\mu+\chi)\int_0^t ||\nabla u^{n+1}(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad +\gamma \int_0^t ||\nabla w^{n+1}(\tau)||^2 d\tau + 2\nu r \int_0^t ||\nabla b^{n+1}(\tau)||^2 d\tau \\
&\quad \le M + C\int_0^t (||u^n(\tau)||^2 + j||w^n(\tau)||^2 + r||b^n(\tau)||^2) d\tau, \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

onde

$$M = \frac{2\lambda^{-1}}{\mu+\chi}||f||^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{4\chi}||g||^2_{L^2(Q)}, \quad C = \max\{\frac{\chi^2}{\gamma}, \frac{2\chi^2}{j(\mu+\chi)}, 1\}.$$

Colocando

$$\varphi_n(t) = ||u^n(t)||^2 + j||w^n(t)||^2 + r||b^n(t)||^2,$$

de (5.17), resulta

$$\varphi_{n+1}(t) \le M + C\int_0^t \varphi_n(t_1)dt_1.$$

Agora, de forma recursiva, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(t) &\le M + C\int_0^t [M + C\int_0^{t_1} \varphi_{n-1}(t_2)dt_2]dt_1 \\
&\le M + MCt + C^2\int_0^t\int_0^{t_1} [M + C\int_0^{t_2} \varphi_{n-2}(t_3)dt_3]dt_2dt_1 \\
&\le M + MCt + M\frac{C^2t^2}{2} + C^3\int_0^t\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \varphi_{n-2}(t_3)dt_3dt_2dt_1 \\
&\le M\sum_{k=0}^{2}\frac{(Ct)^k}{k!} + C^3\int_0^t\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} [M + C\int_0^{t_3} \varphi_{n-3}(t_4)dt_4]dt_3dt_2dt_1
\end{aligned}$$

$$\leq M\sum_{k=0}^{3}\frac{(Ct)^k}{k!}+C^4\int_0^t\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3}\varphi_{n-3}(t_4)dt_4dt_3dt_2dt_1$$
$$\leq M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(Ct)^k}{k!}+C^n\underbrace{\int_0^t\dots\int_0^{t_{n-1}}}_{n-vezes}\varphi_{n-(n-1)}(t_n)dt_n\dots dt_1.$$

Desde que $\varphi_{n-(n-1)}(t)=\varphi_1(t)=0$ e $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(Ct)^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Ct)^k}{k!}=\exp(Ct)$, concluimos que

$$\varphi_{n+1}(t)\leq M\exp(Ct).$$

Portanto, para todo n temos

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\,\|u^{n+1}(t)\|^2+j\|w^{n+1}(t)\|^2+r\|b^{n+1}(t)\|^2\,\right)\leq\sup_{t\in[0,T]}M\exp(Ct)=M\exp(CT)\equiv M_1. \tag{5.18}$$

Além disso, de (5.17) obtemos

$$(\mu+\chi)\int_0^t\|\nabla u^{n+1}(\tau)\|^2d\tau+\gamma\int_0^t\|\nabla w^{n+1}(\tau)\|^2d\tau+2r\nu\int_0^t\|\nabla u^{n+1}(\tau)\|^2d\tau$$
$$\leq M+C\int_0^t M_1d\tau\leq M+CM_1T\equiv M_2.$$

Logo,

$$\int_0^t\|u^{n+1}(\tau)\|_V^2d\tau\leq\frac{M_2}{\mu+\chi},\quad\int_0^t\|w^{n+1}(\tau)\|_{H_0^1}^2d\tau\leq\frac{M_2}{\gamma},\quad\int_0^t\|b^{n+1}(\tau)\|_V^2d\tau\leq\frac{M_2}{2r\nu}. \tag{5.19}$$

Assim, de (5.18) e (5.19) com respeito a n, concluimos

$$\{u^n\},\ \{b^n\}\text{ são uniformemente limitadas em }L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V) \tag{5.20}$$
$$\text{e }\ \{w^n\}\text{ é uniformemente limitada em }L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{5.21}$$

Agora, multiplicando (5.5) por Au^{n+1} e (5.7) por rAb^{n+1}, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^{n+1}\|^2+(\mu+\chi)\|Au^{n+1}\|^2=\chi(\operatorname{rot}w^n,Au^{n+1})+r(b^n\cdot\nabla b^{n+1},Au^{n+1})$$
$$+(f,Au^{n+1})-(u^n\cdot\nabla u^{n+1},Au^{n+1}), \tag{5.22}$$
$$\frac{r}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla b^{n+1}\|^2+r\nu\|Ab^{n+1}\|^2=-r(u^n\cdot\nabla b^{n+1},Ab^{n+1})+r(b^n\cdot\nabla u^{n+1},Ab^{n+1}). \tag{5.23}$$

A seguir, encontraremos estimativas para o lado direito de (5.22) e (5.23).

Usando as desigualdades de Hölder, Young e Sobolev ($||u||_{L^4} \leq 2^{1/2}||u||^{1/4}||\nabla u||^{3/4}$ para $u \in H_0^1(\Omega)$), obtemos

$$
\begin{aligned}
|(u^n \cdot \nabla u^{n+1}, Au^{n+1})| &\leq ||u^n||_{L^4}||\nabla u^{n+1}||_{L^4}||Au^{n+1}|| \\
&\leq 2^{1/2}||u^n||^{1/4}||\nabla u^n||^{3/4}||\nabla u^{n+1}||_{L^4}||Au^{n+1}|| \\
&\leq 2^{1/2}\lambda^{-1/8}||\nabla u^n||||\nabla u^{n+1}||_{L^4}||Au^{n+1}||. \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

Como $H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,4}(\Omega)$, temos

$$||\nabla u||_{L^4} \leq ||u||_{W^{1,4}} \leq C_\Omega ||u||_{H^2},$$

onde a constante C_Ω independe da escolha de u. Também, para $u \in D(A)$, temos

$$||u||_{H^2} \leq M_3||Au||$$

onde M_3 independe da escolha de u. Logo, juntando estas duas últimas estimativas resulta

$$||\nabla u||_{L^4} \leq C_\Omega M_3||Au||,$$

levando isto em (5.24), obtemos

$$|(u^n \cdot \nabla u^{n+1}, Au^{n+1})| \leq 2^{1/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3||\nabla u^n||||Au^{n+1}||^2. \qquad (5.25)$$

Analogamente,

$$|r(u^n \cdot \nabla b^{n+1}, Ab^{n+1})| \leq r2^{1/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3||\nabla u^n||||Ab^{n+1}||^2. \qquad (5.26)$$

Observando (5.24), tem-se

$$
\begin{aligned}
|r(b^n \cdot \nabla b^{n+1}, Au^{n+1})| &\leq r||b^n||_{L^4}||\nabla b^{n+1}||_{L^4}||Au^{n+1}|| \\
&\leq r2^{1/2}||b^n||^{1/4}||\nabla b^n||^{3/4}||\nabla b^{n+1}||_{L^4}||Au^{n+1}|| \\
&\leq r2^{1/2}\lambda^{-1/8}||\nabla b^n||||\nabla b^{n+1}||_{L^4}||Au^{n+1}|| \\
&\leq r2^{1/2}\lambda^{-1/8}||\nabla b^n||C_\Omega M_3||Ab^{n+1}||||Au^{n+1}||
\end{aligned}
$$

e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$|r(b^n \cdot \nabla b^{n+1}, Au^{n+1})| \leq r2^{-1/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3||\nabla b^n||(||Ab^{n+1}||^2 + ||Au^{n+1}||^2). \qquad (5.27)$$

Também,

$$
\begin{aligned}
|r(b^n \cdot \nabla u^{n+1}, Ab^{n+1})| &\leq r2^{1/2}\lambda^{-1/8}||\nabla b^n||||\nabla u^{n+1}||_{L^4}||Ab^{n+1}|| \\
&\leq r2^{1/2}\lambda^{-1/8}||\nabla b^n||C_\Omega M_3||Au^{n+1}||||Ab^{n+1}|| \\
&\leq r2^{-1/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3||\nabla b^n||(||Au^{n+1}||^2 + ||Ab^{n+1}||^2). \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

Para os outros termos de (5.22)-(5.23), usando (5.10) junto com as desigualdades de Hölder e Young, têm-se

$$\begin{aligned}
|\chi(\operatorname{rot} w^n, Au^{n+1})| &\leq \chi\|\nabla w^n\|\|Au^{n+1}\| \\
&\leq \frac{\chi^2}{\mu+\chi}\|\nabla w^n\|^2 + \frac{\mu+\chi}{4}\|Au^{n+1}\|^2, \qquad (5.29)\\
|(f, Au^{n+1})| &\leq \frac{1}{\mu+\chi}\|f\|^2 + \frac{\mu+\chi}{4}\|Au^{n+1}\|^2. \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

Agora, reemplazando as estimativas (5.25)-(5.30) em (5.22)-(5.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla u^{n+1}\|^2 + (\mu+\chi)\|Au^{n+1}\|^2 &\leq \frac{2\chi^2}{\mu+\chi}\|\nabla w^n\|^2 + \frac{2}{\mu+\chi}\|f\|^2 \\
&\quad + 2^{3/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3\|\nabla u^n\|\|Au^{n+1}\|^2 \\
&\quad + r2^{1/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3\|\nabla b^n\|(\|Au^{n+1}\|^2 + \|Ab^{n+1}\|^2), \\
r\frac{d}{dt}\|\nabla b^{n+1}\|^2 + 2r\nu\|Ab^{n+1}\|^2 &\leq r2^{3/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3\|\nabla u^n\|\|Ab^{n+1}\|^2 \\
&\quad + r2^{1/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3\|\nabla b^n\|(\|Au^{n+1}\|^2 + \|Ab^{n+1}\|^2)
\end{aligned}$$

e somando, resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\nabla u^{n+1}\|^2 + r\|\nabla b^{n+1}\|^2) + (\mu+\chi)\|Au^{n+1}\|^2 + 2r\nu\|Ab^{n+1}\|^2 \\
&\leq \frac{2\chi^2}{\mu+\chi}\|\nabla w^n\|^2 + \frac{2}{\mu+\chi}\|f\|^2 \\
&\quad + 2^{3/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3\|\nabla u^n\|(\|Au^{n+1}\|^2 + r\|Ab^{n+1}\|^2) \\
&\quad + r2^{3/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3\|\nabla b^n\|(\|Au^{n+1}\|^2 + \|Ab^{n+1}\|^2),
\end{aligned}$$

logo, pondo $\theta = 2^{3/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\nabla u^{n+1}\|^2 + r\|\nabla b^{n+1}\|^2) + [\,\mu+\chi - \theta(\|\nabla u^n\| + r\|\nabla b^n\|)\,]\|Au^{n+1}\|^2 \\
&\quad + [\,2r\nu - r\theta(\|\nabla u^n\| + \|\nabla b^n\|)\,]\|Ab^{n+1}\|^2 \\
&\leq \frac{2\chi^2}{\mu+\chi}\|\nabla w^n\|^2 + \frac{2}{\mu+\chi}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Observando (5.19) e as hipóteses do teorema, integramos a última desigualdade de 0 a t, obtendo

$$\|\nabla u^{n+1}(t)\|^2 + r\|\nabla b^{n+1}(t)\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t [\,\mu+\chi-\theta(\|\nabla u^n(\tau)\|+r\|\nabla b^n(\tau)\|)\,]\|Au^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau\\
&+r\int_0^t [\,2\nu-\theta(\|\nabla u^n(\tau)\|+\|\nabla b^n(\tau)\|)\,]\|Ab^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau\\
&\leq \frac{2\chi^2}{(\mu+\chi)\gamma}M_2+\frac{2}{\mu+\chi}\|f\|^2_{L^2(Q)}=\delta^2
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Pondo $n=1$ em (5.31) e usando a condição do teorema ($u^1=b^1=0$), obtemos

$$
\|\nabla u^2(t)\|^2+r\|\nabla b^2(t)\|^2+\int_0^t(\mu+\chi)\|Au^2(\tau)\|^2 d\tau+r\int_0^t 2\nu\|Ab^2(\tau)\|^2 d\tau\leq\delta^2,
$$

então,

$$
\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u^2(t)\|^2\leq\delta^2 \quad \text{e} \quad \sup_{t\in[0,T]}\|\nabla b^2(t)\|^2\leq\frac{\delta^2}{r},
$$

também, deduzimos que

$$
\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u^2(t)\|\leq\delta,\quad \sup_{t\in[0,T]}\|\nabla b^2(t)\|\leq\frac{\delta}{\sqrt{r}} \quad \text{e} \quad \sup_{t\in[0,T]} r\|\nabla b^2(t)\|\leq\sqrt{r}\delta,
$$

logo,

$$
\sup_{t\in[0,T]}\{\|\nabla u^2(t)\|+r\|\nabla b^2(t)\|\}\leq(1+\sqrt{r})\delta \quad \text{e} \quad \sup_{t\in[0,T]}\{\|\nabla u^2(t)\|+\|\nabla b^2(t)\|\}\leq\frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\delta.
\tag{5.32}
$$

Para $n=2$ em (5.31), temos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u^3(t)\|^2+r\|\nabla b^3(t)\|^2&+\int_0^t [\,\mu+\chi-\theta(\|\nabla u^2(\tau)\|+r\|\nabla b^2(\tau)\|)\,]\|Au^3(\tau)\|^2 d\tau\\
&+r\int_0^t [\,2\nu-\theta(\|\nabla u^2(\tau)\|+\|\nabla b^2(\tau)\|)\,]\|Ab^3(\tau)\|^2 d\tau\leq\delta^2,
\end{aligned}
$$

de (5.32) deduz-se que

$$
-(1+\sqrt{r})\delta\leq-(\|\nabla u^2(t)\|+r\|\nabla b^2(t)\|) \quad \text{e} \quad -\frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\delta\leq-(\|\nabla u^2(t)\|+\|\nabla b^2(t)\|)
$$

para todo $t\in[0,T]$, logo

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u^3(t)\|^2+r\|\nabla b^3(t)\|^2&+\int_0^t[\mu+\chi-\theta(1+\sqrt{r})\delta]\|Au^3(\tau)\|^2 d\tau\\
&+r\int_0^t [\,2\nu-\theta\frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\delta]\|Ab^3(\tau)\|^2 d\tau\leq\delta^2,
\end{aligned}
$$

mas, como $\theta = 2^{3/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3$ e pela hipótese do teorema $(2^{3/2}\lambda^{-1/8}C_\Omega M_3\delta < \xi)$, temos $\theta\delta < \xi$. Logo, da definição de ξ, resulta

$$\mu + \chi - \theta(1+\sqrt{r})\delta > 0 \quad \text{e} \quad 2\nu - \theta\frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\delta > 0.$$

Portanto,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla u^3(t)\|^2 \le \delta^2 \text{ e } \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla b^3(t)\|^2 \le \frac{\delta^2}{r}.$$

Por argumento similar, para todo n, obtêm-se

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla u^n(t)\|^2 \le \delta^2, \quad \text{isto é,} \quad \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla u^n(t)\| \le \delta \tag{5.33}$$

$$\text{e} \quad \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla b^n(t)\|^2 \le \frac{\delta^2}{r}, \quad \text{isto é,} \quad \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla b^n(t)\| \le \frac{\delta}{\sqrt{r}}. \tag{5.34}$$

Agora, de (5.33) e (5.34) temos que $\forall\, n$, $\forall\, t \in [0,T]$

$$-(1+\sqrt{r})\delta \le -(\|\nabla u^n(t)\| + r\|\nabla b^n(t)\|) \quad \text{e} \quad -\frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\delta \le -(\|\nabla u^n(t)\| + \|\nabla b^n(t)\|),$$

logo, usando a hipótese do teorema, obtemos

$$\begin{aligned} &0 < \mu + \chi - \theta\,(1+\sqrt{r})\,\delta \le \mu + \chi - \theta\,(\|\nabla u^n(t)\| + r\|\nabla b^n(t)\|) \\ \text{e} \quad &0 < 2\nu - \theta\,(\frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}})\,\delta \le 2\nu - \theta\,(\|\nabla u^n(t)\| + \|\nabla b^n(t)\|) \end{aligned}$$

$\forall\, t \in [0,T]$ e para todo n. Assim, de (5.31), têm-se

$$\begin{aligned} (\,\mu + \chi - \theta(1+\sqrt{r})\delta\,) \int_0^t \|Au^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau \;&\le\; \delta^2 \\ \text{e} \quad r(\,2\nu - \theta(\frac{1+\sqrt{r}}{\sqrt{r}})\delta\,) \int_0^t \|Ab^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau \;&\le\; \delta^2. \end{aligned}$$

Logo, das últimas duas desigualdades e de (5.33)-(5.34), concluimos que

$$\{u^n\},\ \{b^n\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)). \tag{5.35}$$

De (5.6), temos

$$jw_t^{n+1} + Lw^{n+1} + ju^n \cdot \nabla w^{n+1} + 2\chi w^{n+1} = \chi \operatorname{rot} u^n + g, \tag{5.36}$$

onde $Lw^{n+1} = \gamma Bw^{n+1} - (\alpha+\beta)\nabla \mathrm{div}\, w^{n+1}$.

Desde que L é um operador fortememte elítico, temos que existe uma constante $N_0 > 0$ (N_0 dependendo apenas de γ, $\alpha+\beta$ e $\partial\Omega$) tal que

$$(Lw^{n+1}, Bw^{n+1}) \geq \gamma \|Bw^{n+1}\|^2 - N_0 \|\nabla w^{n+1}\|^2. \tag{5.37}$$

(Ver [17], p. 70).

Multiplicando (5.36) por Bw^{n+1}, tem-se

$$\begin{aligned} j\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w^{n+1}\|^2 + (Lw^{n+1}, Bw^{n+1}) + 2\chi\|\nabla w^{n+1}\|^2 \\ = -j(u^n\cdot\nabla w^{n+1}, Bw^{n+1}) + \chi(\mathrm{rot}\, u^n, Bw^{n+1}) + (g, Bw^{n+1}) \end{aligned}$$

e usando (5.37), resulta

$$\begin{aligned} j\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w^{n+1}\|^2 + \gamma\|Bw^{n+1}\|^2 + 2\chi\|\nabla w^{n+1}\|^2 \\ \leq N_0\|\nabla w^{n+1}\|^2 - j(u^n\cdot\nabla w^{n+1}, Bw^{n+1}) + \chi(\mathrm{rot}\, u^n, Bw^{n+1}) \\ +(g, Bw^{n+1}). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Para o segundo termo do lado direito de (5.38) de forma análoga a (5.24), tem-se

$$\begin{aligned} |j(u^n\cdot\nabla w^{n+1}, Bw^{n+1})| &\leq j2^{1/2}\lambda^{-1/8}\|\nabla u^n\|\|\nabla w^{n+1}\|_{L^4}\|Bw^{n+1}\| \\ &\leq j2^{1/2}\lambda^{-1/8}\|\nabla u^n\|\, c\,\|\nabla w^{n+1}\|^{1/4}\|Bw^{n+1}\|^{7/4} \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young junto com (5.35), resulta

$$|j(u^n\cdot\nabla w^{n+1}, Bw^{n+1})| \leq c\,\|\nabla w^{n+1}\|^2 + \frac{\gamma}{6}\|Bw^{n+1}\|^2,$$

com $c > 0$ independente de n.

Para os outros termos de (5.38), têm-se

$$\begin{aligned} |\chi(\mathrm{rot}\, u^n, Bw^{n+1})| &\leq \frac{3\chi^2}{2\gamma}\|\nabla u^n\|^2 + \frac{\gamma}{6}\|Bw^{n+1}\|^2, \\ |(g, Bw^{n+1})| &\leq \frac{3}{2\gamma}\|g\|^2 + \frac{\gamma}{6}\|Bw^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Logo, usando estas três últimas estimativas em (5.38), obtemos

$$\begin{aligned} j\frac{d}{dt}\|\nabla w^{n+1}\|^2 + \gamma\|Bw^{n+1}\|^2 + 4\chi\|\nabla w^{n+1}\|^2 \\ \leq 2(N_0+c)\|\nabla w^{n+1}\|^2 + \frac{3}{\gamma}\|g\|^2 + \frac{3\chi^2}{\gamma}\|\nabla u^n\|^2, \end{aligned}$$

e integrando de 0 a t, resulta

$$
\begin{aligned}
j\|\nabla w^{n+1}(t)\|^2 &+ \gamma \int_0^t \|Bw^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\leq c \int_0^t \|\nabla w^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau + c\,\|g\|^2_{L^2(Q)} + c \int_0^t \|\nabla u^n(\tau)\|^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Portanto, da última desigualdade junto com (5.19), deduz-se que

$$
\{w^n\} \text{ é uniformemente limitada em} L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(B)). \tag{5.39}
$$

Multiplicando (5.5) por u_t^{n+1}, (5.7) por b_t^{n+1} e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u_t^{n+1}\|^2 &\leq (\mu+\chi)\|Au^{n+1}\|\|u_t^{n+1}\| + \|u^n \cdot \nabla u^{n+1}\|\|u_t^{n+1}\| \\
&\quad + 2\chi\|\nabla w^n\|\|u_t^{n+1}\| + r\|b^n \cdot \nabla b^{n+1}\|\|u_t^{n+1}\| + \|f\|\|u_t^{n+1}\|, \\
\|b_t^{n+1}\|^2 &\leq \nu\|Ab^{n+1}\|\|b_t^{n+1}\| + \|u^n \cdot \nabla b^{n+1}\|\|b_t^{n+1}\| + \|b^n \cdot \nabla u^{n+1}\|\|b_t^{n+1}\|
\end{aligned}
$$

então, com $c > 0$ independente de n, temos

$$
\begin{aligned}
\|u_t^{n+1}\| &\leq c\|Au^{n+1}\| + c\|u^n\|_{L^6}\|\nabla u^{n+1}\|_{L^3} + c\|\nabla w^n\| + c\|b^n\|_{L^6}\|\nabla b^{n+1}\|_{L^3} + c\|f\|, \\
\|b_t^{n+1}\| &\leq c\|Ab^{n+1}\| + c\|u^n\|_{L^6}\|\nabla b^{n+1}\|_{L^3} + c\|b^n\|_{L^6}\|\nabla u^{n+1}\|_{L^3}
\end{aligned}
$$

mas $\|u\|_{L^6} \leq C_1\|\nabla u\|$ e $\|\nabla u\|_{L^3} \leq C_2\|\nabla u\|^{1/2}\|Au\|^{1/2}$, logo

$$
\begin{aligned}
\|u_t^{n+1}\| &\leq c\|Au^{n+1}\| + c\|\nabla u^n\|\|\nabla u^{n+1}\|^{1/2}\|Au^{n+1}\|^{1/2} + c\|\nabla w^n\| \\
&\quad + c\|\nabla b^n\|\|\nabla b^{n+1}\|^{1/2}\|Ab^{n+1}\|^{1/2} + c\|f\|, \\
\|b_t^{n+1}\| &\leq c\|Ab^{n+1}\| + c\|\nabla u^n\|\|\nabla b^{n+1}\|^{1/2}\|Ab^{n+1}\|^{1/2} \\
&\quad + c\|\nabla b^n\|\|\nabla u^{n+1}\|^{1/2}\|Au^{n+1}\|^{1/2}
\end{aligned}
$$

e aplicando a desigualdade de Young,vem

$$
\begin{aligned}
\|u_t^{n+1}\| &\leq c\|Au^{n+1}\| + c\|\nabla u^n\|^2\|\nabla u^{n+1}\| + c\|\nabla w^n\| + c\|\nabla b^n\|^2\|\nabla b^{n+1}\| \\
&\quad + c\|Ab^{n+1}\| + c\|f\|, \\
\|b_t^{n+1}\| &\leq c\|Ab^{n+1}\| + c\|\nabla u^n\|^2\|\nabla b^{n+1}\| + c\|\nabla b^n\|^2\|\nabla u^{n+1}\| + c\|Au^{n+1}\|,
\end{aligned}
$$

logo, observando (5.35), (5.39) e elevando ao quadrado, resulta

$$
\begin{aligned}
\|u_t^{n+1}\|^2 &\leq c\|Au^{n+1}\|^2 + c + c\|Ab^{n+1}\|^2 + c\|f\|^2, \\
\|b_t^{n+1}\|^2 &\leq c\|Ab^{n+1}\|^2 + c + \|Au^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

novamente, levando em conta (5.35), somamos as duas últimas desigualdades e integramos de 0 a t, obtendo

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|b_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau &\leq c\int_0^t (\|Au^{n+1}(\tau)\|^2 + \|Ab^{n+1}(\tau)\|^2) d\tau \\ &+ c\int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau + c\int_0^t d\tau \leq M_4.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\{u_t^n\},\ \{b_t^n\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^2(0,T;H). \tag{5.40}$$

Multiplicando (5.6) por w_t^{n+1}, temos

$$\begin{aligned}&j\|w_t^{n+1}\|^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w^{n+1}\|^2 + (\frac{\alpha+\beta}{2})\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} w^{n+1}\|^2 \\ &= -j(u^n\cdot\nabla w^{n+1}, w_t^{n+1}) - 2\chi(w^{n+1}, w_t^{n+1}) + \chi(\operatorname{rot} u^n, w_t^{n+1}) + (g, w_t^{n+1}).\end{aligned} \tag{5.41}$$

Para o lado direito de (5.41), usando as desigualdades de Hölder e Young, temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}|2\chi(w^{n+1}, w_t^{n+1})| &\leq C_\varepsilon\|w^{n+1}\|^2 + \varepsilon\|w_t^{n+1}\|^2, \\ |\chi(\operatorname{rot} u^n, w_t^{n+1})| &\leq C_\varepsilon\|\nabla u^n\|^2 + \varepsilon\|w_t^{n+1}\|^2, \\ |(g, w_t^{n+1})| &\leq C_\varepsilon\|g\|^2 + \varepsilon\|w_t^{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

e observando que $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, (5.39) e a desigualdade $\|u\|_{H^2} \leq M_3\|Au\|$, obtemos

$$\begin{aligned}|j(u^n\cdot\nabla w^{n+1}, w_t^{n+1})| &\leq j\|u^n\|_{L^\infty}\|\nabla w^{n+1}\|\|w_t^{n+1}\| \\ &\leq c\|u^n\|_{H^2}\|w_t^{n+1}\| \leq C_\varepsilon\|Au^n\|^2 + \varepsilon\|w_t^{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

Levando estas estimativas em (5.41) com $\varepsilon = \frac{j}{8}$, tem-se

$$j\|w_t^{n+1}\|^2 + \gamma\frac{d}{dt}\|\nabla w^{n+1}\|^2 + (\alpha+\beta)\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} w^{n+1}\|^2 \leq c\|w^{n+1}\|^2 + c\|\nabla u^n\|^2 + c\|Au^n\|^2 + c\|g\|^2$$

onde $c > 0$ independe de n. Integrando de 0 a t, temos

$$j\int_0^t \|w_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau \leq c\int_0^t (\,\|w^{n+1}(\tau)\|^2 + \|\nabla u^n(\tau)\|^2 + \|Au^n(\tau)\|^2\,)\, d\tau + c\,\|g\|^2_{L^2(Q)},$$

tendo em conta (5.20), (5.21) e (5.35), resulta

$$\int_0^t \|w_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau \leq M_5.$$

Portanto, concluimos que

$$\{w_t^n\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{5.42}$$

Prova do Teorema 5.4

Para cada n, a existência da solução (u^n, w^n, b^n) é garantida pelo Teorema 5.2. A seguir, derivando respeito a t as equações (5.5)-(5.7), temos

$$\begin{aligned}
u_{tt}^{n+1} + (\mu+\chi)Au_t^{n+1} &= -P(u_t^n \cdot \nabla u^{n+1}) - P(u^n \cdot \nabla u_t^{n+1}) + \chi P(\operatorname{rot} w_t^n) \\
&\quad + rP(b_t^n \cdot \nabla b^{n+1}) + rP(b^n \cdot \nabla b_t^{n+1}) + Pf_t, \qquad (5.43)\\
jw_{tt}^{n+1} + \gamma Bw_t^{n+1} - (\alpha+\beta)\nabla \operatorname{div} w_t^{n+1} + 2\chi w_t^{n+1} & \\
&= -ju_t^n \cdot \nabla w^{n+1} - ju^n \cdot \nabla w_t^{n+1} + \chi \operatorname{rot} u_t^n + g_t, \qquad (5.44)\\
b_{tt}^{n+1} + \nu Ab_t^{n+1} &= -P(u_t^n \cdot \nabla b^{n+1}) - P(u^n \cdot \nabla b_t^{n+1}) + P(b_t^n \cdot \nabla u^{n+1}) \\
&\quad + P(b^n \cdot \nabla u_t^{n+1}) \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

multiplicando (5.43) por u_t^{n+1}, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^{n+1}\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla u_t^{n+1}\|^2 &= -(u_t^n \cdot \nabla u^{n+1}, u_t^{n+1}) + r(b_t^n \cdot \nabla b^{n+1}, u_t^{n+1}) \\
&\quad + r(b^n \cdot \nabla b_t^{n+1}, u_t^{n+1}) + \chi(\operatorname{rot} w_t^n, u_t^{n+1}) + (f_t, u_t^{n+1}). \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

Com $c > 0$ independente de n, temos

$$\begin{aligned}
|\chi(\operatorname{rot} w_t^n, u_t^{n+1})| &\le c\|w_t^n\|^2 + \frac{\mu+\chi}{8}\|\nabla u_t^{n+1}\|^2, \\
|(f_t, u_t^{n+1})| &\le c\|f_t\|^2 + \frac{\mu+\chi}{8}\|\nabla u_t^{n+1}\|^2, \\
|(u_t^n \cdot \nabla u^{n+1}, u_t^{n+1})| &\le \|u_t^n\|\|\nabla u^{n+1}\|_{L^4}\|u_t^{n+1}\|_{L^4} \le c\|u_t^n\|\|Au^{n+1}\|\|\nabla u_t^{n+1}\| \\
&\le c\|u_t^n\|^2\|Au^{n+1}\|^2 + \frac{\mu+\chi}{8}\|\nabla u_t^{n+1}\|^2, \\
|r(b_t^n \cdot \nabla b^{n+1}, u_t^{n+1})| &\le r\|b_t^n\|\|\nabla b^{n+1}\|_{L^4}\|u_t^{n+1}\|_{L^4} \\
&\le c\|b_t^n\|^2\|Ab^{n+1}\|^2 + \frac{\mu+\chi}{8}\|\nabla u_t^{n+1}\|^2,
\end{aligned}$$

levando estas estimativas em (5.46), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_t^{n+1}\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla u_t^{n+1}\|^2 &\le c\|w_t^n\|^2 + c\|f_t\|^2 + c\|u_t^n\|^2\|Au^{n+1}\|^2 \\
&\quad + c\|b_t^n\|^2\|Ab^{n+1}\|^2 + 2r(b^n \cdot \nabla b_t^{n+1}, u_t^{n+1}). \qquad (5.47)
\end{aligned}$$

Multiplicando (5.45) por rb_t^{n+1}, tem-se

$$\frac{r}{2}\frac{d}{dt}||b_t^{n+1}||^2+r\nu||\nabla b_t^{n+1}||^2 = -r(u_t^n\cdot\nabla b^{n+1},b_t^{n+1})+r(b_t^n\cdot\nabla u^{n+1},b_t^{n+1})+r(b^n\cdot\nabla u_t^{n+1},b_t^{n+1}) \tag{5.48}$$

e com $c>0$ independente de n, temos

$$\begin{aligned}
|r(u_t^n\cdot\nabla b^{n+1},b_t^{n+1})| &\leq r||u_t^n||||\nabla b^{n+1}||_{L^4}||b_t^{n+1}||_{L^4}\leq c||u_t^n||^2||Ab^{n+1}||^2+\frac{r\nu}{4}||\nabla b_t^{n+1}||^2,\\
|r(b_t^n\cdot\nabla u^{n+1},b_t^{n+1})| &\leq c||b_t^n||^2||Au^{n+1}||^2+\frac{r\nu}{4}||\nabla b_t^{n+1}||^2,
\end{aligned}$$

levando estas estimativas em (5.48), resulta

$$r\frac{d}{dt}||b_t^{n+1}||^2+2r\nu||\nabla b_t^{n+1}||^2\leq c||u_t^n||^2||Ab^{n+1}||^2+c||b_t^n||^2||Au^{n+1}||^2+2r(b^n\cdot\nabla u_t^{n+1},b_t^{n+1}). \tag{5.49}$$

Somando (5.47) e (5.49), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||u_t^{n+1}||^2+r||b_t^{n+1}||^2)+(\mu+\chi)||\nabla u_t^{n+1}||^2+2r\nu||\nabla b_t^{n+1}||^2\\
&\qquad\leq c||w_t^n||^2+c||f_t||^2+c(||u_t^n||^2+||b_t^n||^2)(||Au^{n+1}||^2+||Ab^{n+1}||^2)
\end{aligned} \tag{5.50}$$

desde que de (1.4), $(b^n\cdot\nabla b_t^{n+1},u_t^{n+1})+(b^n\cdot\nabla u_t^{n+1},b_t^{n+1})=0$.

Agora, multiplicando (5.5) por Au^{n+1} e (5.7) por Ab^{n+1}, resulta

$$\begin{aligned}
(\mu+\chi)||Au^{n+1}||^2 &= -(u_t^{n+1},Au^{n+1})-(u^n\cdot\nabla u^{n+1},Au^{n+1})+\chi(\operatorname{rot}w^n,Au^{n+1})\\
&\quad+r(b^n\cdot\nabla b^{n+1},Au^{n+1})+(f,Au^{n+1}), &(5.51)\\
\nu||Ab^{n+1}||^2 &= -(b_t^{n+1},Ab^{n+1})-(u^n\cdot\nabla b^{n+1},Ab^{n+1})\\
&\quad-(b^n\cdot\nabla u^{n+1},Ab^{n+1}) &(5.52)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Young, a desigualdade de Sobolev ($||u||_{L^3}\leq c||u||^{1/2}||\nabla u||^{1/2}$) e a desigualdade de Cattabriga, encontramos estimativas para o lado direito de (5.51)-(5.52) da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
|(u_t^{n+1},Au^{n+1})| &\leq C_\varepsilon||u_t^{n+1}||^2+\varepsilon||Au^{n+1}||^2,\\
|(u^n\cdot\nabla u^{n+1},Au^{n+1})| &\leq ||u^n||_{L^6}||\nabla u^{n+1}||_{L^3}||Au^{n+1}||\\
&\leq c||\nabla u^n||||\nabla u^{n+1}||^{1/2}||Au^{n+1}||^{1/2}||Au^{n+1}||\\
&\leq c||\nabla u^{n+1}||^{1/2}||Au^{n+1}||^{3/2}\\
&\leq C_\varepsilon||\nabla u^{n+1}||^2+\varepsilon||Au^{n+1}||^2,\\
|\chi(\operatorname{rot}w^n,Au^{n+1})| &\leq C_\varepsilon||\nabla w^n||^2+\varepsilon||Au^{n+1}||^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|r(b^n\cdot\nabla b^{n+1},Au^{n+1})| &\le r\|b^n\|_{L^6}\|\nabla b^{n+1}\|_{L^3}\|Au^{n+1}\|\\
&\le c\|\nabla b^n\|\|\nabla b^{n+1}\|^{1/2}\|Ab^{n+1}\|^{1/2}\|Au^{n+1}\|\\
&\le C_\varepsilon\|\nabla b^{n+1}\|\|Ab^{n+1}\|+\varepsilon\|Au^{n+1}\|^2\\
&\le C_{\varepsilon,\eta}\|\nabla b^{n+1}\|^2+\eta\|Ab^{n+1}\|^2+\varepsilon\|Au^{n+1}\|^2,\\
|(f,Au^{n+1})| &\le C_\varepsilon\|f\|^2+\varepsilon\|Au^{n+1}\|^2,\\
|(b_t^{n+1},Ab^{n+1})| &\le C_\eta\|b_t^{n+1}\|^2+\eta\|Ab^{n+1}\|^2,\\
|(u^n\cdot\nabla b^{n+1},Ab^{n+1})| &\le \|u^n\|_{L^6}\|\nabla b^{n+1}\|_{L^3}\|Ab^{n+1}\|\\
&\le c\|\nabla u^n\|\|\nabla b^{n+1}\|^{1/2}\|Ab^{n+1}\|^{3/2}\\
&\le C_\eta\|\nabla b^{n+1}\|^2+\eta\|Ab^{n+1}\|^2,\\
|(b^n\cdot\nabla u^{n+1},Ab^{n+1})| &\le c\|\nabla b^n\|\|\nabla u^{n+1}\|^{1/2}\|Au^{n+1}\|^{1/2}\|Ab^{n+1}\|\\
&\le C_\eta\|\nabla u^{n+1}\|\|Au^{n+1}\|+\eta\|Ab^{n+1}\|^2,\\
&\le C_{\varepsilon,\eta}\|\nabla u^{n+1}\|^2+\varepsilon\|Au^{n+1}\|^2+\eta\|Ab^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

levando estas estimativas em (5.51)-(5.52), têm-se

$$
\begin{aligned}
(\mu+\chi)\|Au^{n+1}\|^2 &\le C_\varepsilon\|\nabla u^{n+1}\|^2+C_\varepsilon\|u_t^{n+1}\|^2+C_\varepsilon\|\nabla w^n\|^2+C_\varepsilon\|f\|^2\\
&\quad+C_{\varepsilon,\eta}\|\nabla b^{n+1}\|^2+\eta\|Ab^{n+1}\|^2+5\varepsilon\|Au^{n+1}\|^2,\\
\nu\|Ab^{n+1}\|^2 &\le C_\eta\|b_t^{n+1}\|^2+C_\eta\|\nabla b^{n+1}\|^2+C_{\varepsilon,\eta}\|\nabla u^{n+1}\|^2+\varepsilon\|Au^{n+1}\|^2\\
&\quad+3\eta\|Ab^{n+1}\|^2
\end{aligned}
$$

e considerando (5.35) e (5.39), resulta

$$
\begin{aligned}
(\mu+\chi)\|Au^{n+1}\|^2+\nu\|Ab^{n+1}\|^2 &\le C_{\varepsilon,\eta}+C_\varepsilon\|u_t^{n+1}\|^2+C_\varepsilon\|f\|^2+C_\eta\|b_t^{n+1}\|^2\\
&\quad+4\eta\|Ab^{n+1}\|^2+6\varepsilon\|Au^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

escolhendo $\eta=\dfrac{\nu}{8}$ e $\varepsilon=\dfrac{\mu+\chi}{12}$, com $c>0$ independente de n, temos

$$
\|Au^{n+1}\|^2+\|Ab^{n+1}\|^2\le C_3+c\|u_t^{n+1}\|^2+c\|b_t^{n+1}\|^2+c\|f\|^2. \tag{5.53}
$$

Reemplazando a estimativa (5.53) em (5.50), tem-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|u_t^{n+1}\|^2+r\|b_t^{n+1}\|^2)+(\mu+\chi)\|\nabla u_t^{n+1}\|^2+2r\nu\|\nabla b_t^{n+1}\|^2\\
&\qquad\le c\|w_t^n\|^2+c\|f_t\|^2+c(\|u_t^n\|^2+\|b_t^n\|^2)(C_3+c\|f\|^2)\\
&\qquad\quad+c(\|u_t^n\|^2+\|b_t^n\|^2)(\|u_t^{n+1}\|^2+\|b_t^{n+1}\|^2).
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 a t e logo considerando $\min\{1,r,\mu+\chi,2r\nu\}$, vem

$$
\|u_t^{n+1}(t)\|^2+\|b_t^{n+1}(t)\|^2+\int_0^t\|\nabla u_t^{n+1}(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t\|\nabla b_t^{n+1}(\tau)\|^2d\tau
$$

$$\leq c\,(\|u_t^{n+1}(0)\|^2 + r\|b_t^{n+1}(0)\|^2) + c\int_0^t \|w_t^n(\tau)\|^2 d\tau + c\|f_t\|^2_{L^2(Q)}$$
$$+c\int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|^2 + \|b_t^n(\tau)\|^2)(C_3 + c\|f(\tau)\|^2)d\tau$$
$$+c\int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|^2 + \|b_t^n(\tau)\|^2)(\|u_t^{n+1}(\tau)\|^2 + \|b_t^{n+1}(\tau)\|^2)d\tau. \qquad (5.54)$$

Observe-se que u_t^{n+1}, $b_t^{n+1} \in C([0,T];H)$ (Teorema 5.2), $f \in C([0,T];L^2(\Omega))$ (f, $f_t \in L^2(Q)$ e Lema 1.5, Cap. 1). Então, levando em conta (5.40) e (5.42), conclui-se que

$$c\,(\|u_t^{n+1}(0)\|^2 + r\|b_t^{n+1}(0)\|^2) + c\int_0^t \|w_t^n(\tau)\|^2 d\tau + c\|f_t\|^2_{L^2(Q)}$$
$$+c\int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|^2 + \|b_t^n(\tau)\|^2)(C_3 + c\|f(\tau)\|^2)d\tau \leq C_4.$$

Assim, de (5.54) tem-se

$$\|u_t^{n+1}(t)\|^2 + \|b_t^{n+1}(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\nabla b_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau$$
$$\leq C_4 + c\int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|^2 + \|b_t^n(\tau)\|^2)(\|u_t^{n+1}(\tau)\|^2 + \|b_t^{n+1}(\tau)\|^2)d\tau$$

e aplicando a desigualdade de Gronwall, vem

$$\|u_t^{n+1}(t)\|^2 + \|b_t^{n+1}(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\nabla b_t^{n+1}(\tau)\|^2 d\tau$$
$$\leq C_4 \exp(c\int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|^2 + \|b_t^n(\tau)\|^2)d\tau) \leq M_6.$$

Portanto,

$$\{u_t^n\},\ \{b_t^n\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V). \qquad (5.55)$$

Observando (5.55), de (5.53) deduzimos que

$$\{u^n\},\ \{b^n\} \text{ são uniformemente limitadas em } L^\infty(0,T;D(A)). \qquad (5.56)$$

Multiplicando (5.44) por w_t^{n+1}, obtemos

$$j\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t^{n+1}\|^2 + \gamma\|\nabla w_t^{n+1}\|^2 + (\alpha+\beta)\|\mathrm{div}\, w_t^{n+1}\|^2 + 2\chi\|w_t^{n+1}\|^2$$
$$= -j(u_t^n \cdot \nabla w^{n+1}, w_t^{n+1}) + \chi(\mathrm{rot}\, u_t^n, w_t^{n+1}) + (g_t, w_t^{n+1}). \qquad (5.57)$$

De forma análoga como para (5.46), temos

$$\begin{aligned}
|j(u_t^n\cdot\nabla w^{n+1},w_t^{n+1})| &\le j\|u_t^n\|\|\nabla w^{n+1}\|_{L^4}\|w_t^{n+1}\|_{L^4}\\
&\le c\|u_t^n\|\|Bw^{n+1}\|\|\nabla w_t^{n+1}\|\\
&\le c\|u_t^n\|^2\|Bw^{n+1}\|^2+\frac{\gamma}{4}\|\nabla w_t^{n+1}\|^2,\\
|\chi(\operatorname{rot} u_t^n,w_t^{n+1})| &\le c\|u_t^n\|^2+\frac{\gamma}{4}\|\nabla w_t^{n+1}\|^2,\\
|(g_t,w_t^{n+1})| &\le 2\chi\|w_t^{n+1}\|^2+\frac{1}{8\chi}\|g_t\|^2,
\end{aligned}$$

com estas estimativas em (5.57), resulta

$$\begin{aligned}
&j\frac{d}{dt}\|w_t^{n+1}\|^2+\gamma\|\nabla w_t^{n+1}\|^2+(\alpha+\beta)\|\operatorname{div} w_t^{n+1}\|^2\\
&\qquad\le c\|u_t^n\|^2+c\|g_t\|^2+c\|u_t^n\|^2\|Bw^{n+1}\|^2. \qquad (5.58)
\end{aligned}$$

Multiplicando (5.36) por Bw^{n+1}, tem-se

$$\begin{aligned}
(Lw^{n+1},Bw^{n+1}) &= \chi(\operatorname{rot} u^n,Bw^{n+1})+(g,Bw^{n+1})-j(w_t^{n+1},Bw^{n+1})\\
&\quad -j(u^n\cdot\nabla w^{n+1},Bw^{n+1})-2\chi(w^{n+1},Bw^{n+1}),
\end{aligned}$$

usando as desigualdades de Hölder e Young, e observando (5.37), temos

$$\begin{aligned}
\gamma\|Bw^{n+1}\|^2 &\le N_0\|\nabla w^{n+1}\|^2+C_\varepsilon\|\nabla u^n\|^2+C_\varepsilon\|g\|^2+C_\varepsilon\|w_t^{n+1}\|^2\\
&\quad +2C_\varepsilon\|\nabla w^{n+1}\|^2+5\varepsilon\|Bw^{n+1}\|^2,
\end{aligned}$$

escolhendo $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{10}$ e observando (5.35), (5.39), obtemos

$$\begin{aligned}
\|Bw^{n+1}\|^2 &\le c\|\nabla w^{n+1}\|^2+c\|\nabla u^n\|^2+c\|g\|^2+c\|w_t^{n+1}\|^2\\
&\le C_5+c\|g\|^2+c\|w_t^{n+1}\|^2 \qquad (5.59)
\end{aligned}$$

onde $c>0$ independe de n.

Reemplazando (5.59) em (5.58), tem-se

$$\begin{aligned}
&j\frac{d}{dt}\|w_t^{n+1}\|^2+\gamma\|\nabla w_t^{n+1}\|^2+(\alpha+\beta)\|\operatorname{div} w_t^{n+1}\|^2\\
&\qquad\le c\|u_t^n\|^2+c\|g_t\|^2+c\|u_t^n\|^2(C_5+c\|g\|^2)+c\|u_t^n\|^2\|w_t^{n+1}\|^2,
\end{aligned}$$

integrando de 0 a t e logo considerando o $\min\{j,\gamma,\alpha+\beta\}$, vem

$$\begin{aligned}
&\|w_t^{n+1}(t)\|^2+\int_0^t\|\nabla w_t^{n+1}(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t\|\operatorname{div} w_t^{n+1}(\tau)\|^2d\tau\\
&\qquad\le c\int_0^t\|u_t^n(\tau)\|^2d\tau+c\|g_t\|^2_{L^2(Q)}+c\int_0^t\|u_t^n(\tau)\|^2(C_5+c\|g(\tau)\|^2)d\tau\\
&\qquad\quad +c\int_0^t\|u_t^n(\tau)\|^2\|w_t^{n+1}(\tau)\|^2d\tau+c\,j\|w_t^{n+1}(0)\|^2,
\end{aligned}$$

logo, tendo em conta que $g \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ $(g,\, g_t \in L^2(Q))$, $w_t^{n+1} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ (Teorema 5.2) e (5.40), obtemos que

$$||w_t^{n+1}(t)||^2 + \int_0^t ||\nabla w_t^{n+1}(\tau)||^2 d\tau \leq C_6 + c\int_0^t ||u_t^n(\tau)||^2 ||w_t^{n+1}(\tau)||^2 d\tau,$$

aplicando a desigualdade de Gronwall, concluimos

$$||w_t^{n+1}(t)||^2 + \int_0^t ||\nabla w_t^{n+1}(\tau)||^2 d\tau \leq C_6 \exp(c\int_0^t ||u_t^n(\tau)||^2 d\tau) \leq M_7.$$

Portanto,

$$\{w_t^n\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)). \tag{5.60}$$

Além disso, observando (5.59) e (5.60), temos que

$$\{w^n\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T; D(B)). \tag{5.61}$$

De (5.43), temos que

$$\begin{aligned} u_{tt}^{n+1} &= -(\mu+\chi)Au_t^{n+1} - P(u_t^n \cdot \nabla u^{n+1}) - P(u^n \cdot \nabla u_t^{n+1}) + \chi P(\operatorname{rot} w_t^n) \\ &\quad + rP(b_t^n \cdot \nabla b^{n+1}) + rP(b^n \cdot \nabla b_t^{n+1}) + Pf_t, \end{aligned}$$

logo, com $c > 0$ independente de n, tem-se

$$\begin{aligned} ||u_{tt}^{n+1}||_{V^*}^2 &= c||Au_t^{n+1}||_{V^*}^2 + c||P(u_t^n \cdot \nabla u^{n+1})||_{V^*}^2 + c||P(u^n \cdot \nabla u_t^{n+1})||_{V^*}^2 \\ &\quad + c||P(\operatorname{rot} w_t^n)||_{V^*}^2 + c||P(b_t^n \cdot \nabla b^{n+1})||_{V^*}^2 \\ &\quad + c||P(b^n \cdot \nabla b_t^{n+1})||_{V^*}^2 + c||Pf_t||_{V^*}^2. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Agora, para os termos do lado direito de (5.62), temos

$$\begin{aligned} ||Au_t^{n+1}||_{V^*} &= \sup_{||v||_V \leq 1} |(Au_t^{n+1}, v)| = \sup_{||v||_V \leq 1} |(\nabla u_t^{n+1}, \nabla v)| \\ &\leq \sup_{||v||_V \leq 1} ||\nabla u_t^{n+1}|| ||\nabla v|| \leq ||\nabla u_t^{n+1}||, \end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned} ||P(u_t^n \cdot \nabla u^{n+1})||_{V^*} &= \sup_{||v||_V \leq 1} |(u_t^n \cdot \nabla u^{n+1}, v)| \leq \sup_{||v||_V \leq 1} ||u_t^n|| ||\nabla u^{n+1}||_{L^4} ||v||_{L^4} \\ &\leq c||u_t^n|| ||Au^{n+1}|| \sup_{||v||_V \leq 1} ||\nabla v|| \leq c||u_t^n|| ||Au^{n+1}||, \end{aligned} \tag{5.64}$$

$$\begin{aligned} ||P(u^n \cdot \nabla u_t^{n+1})||_{V^*} &= \sup_{||v||_V \leq 1} |(u^n \cdot \nabla u_t^{n+1}, v)| \leq \sup_{||v||_V \leq 1} ||u^n||_{L^4} ||\nabla u_t^{n+1}|| ||v||_{L^4} \\ &\leq c||\nabla u^n|| ||\nabla u_t^{n+1}|| \sup_{||v||_V \leq 1} ||\nabla v|| \leq c||\nabla u^n|| ||\nabla u_t^{n+1}||. \end{aligned} \tag{5.65}$$

$$
\begin{aligned}
\|P(\operatorname{rot} w_t^n)\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1}|(\operatorname{rot} w_t^n, v)| = \sup_{\|v\|_V\leq 1}|(w_t^n, \operatorname{rot} v)| \\
&\leq \sup_{\|v\|_V\leq 1}\|w_t^n\|\|\nabla v\| \leq \|w_t^n\|, && (5.66)\\
\|P(b_t^n\cdot\nabla b^{n+1})\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1}|(b_t^n\cdot\nabla b^{n+1}, v)| \leq \sup_{\|v\|_V\leq 1}\|b_t^n\|\|\nabla b^{n+1}\|_{L^4}\|v\|_{L^4} \\
&\leq c\|b_t^n\|\|Ab^{n+1}\|, && (5.67)\\
\|P(b^n\cdot\nabla b_t^{n+1})\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1}|(b^n\cdot\nabla b_t^{n+1}, v)| \leq \sup_{\|v\|_V\leq 1}\|b^n\|_{L^4}\|\nabla b_t^{n+1}\|\|v\|_{L^4} \\
&\leq c\|\nabla b^n\|\|\nabla b_t^{n+1}\|, && (5.68)\\
\|Pf_t\|_{V^*}^2 &= \sup_{\|v\|_V\leq 1}|(f_t, v)| \leq \|f_t\|\sup_{\|v\|_V\leq 1}\|v\| \leq c\|f_t\|. && (5.69)
\end{aligned}
$$

Levando (5.63)-(5.69) em (5.62), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u_{tt}^{n+1}\|_{V^*}^2 \leq\ & c\|\nabla u_t^{n+1}\|^2 + c\|u_t^n\|^2\|Au^{n+1}\|^2 + c\|\nabla u^n\|^2\|\nabla u_t^{n+1}\|^2 \\
&+c\|w_t^n\|^2 + c\|b_t^n\|^2\|Ab^{n+1}\|^2 + c\|\nabla b^n\|^2\|\nabla b_t^{n+1}\|^2 + c\|f_t\|^2. \qquad (5.70)
\end{aligned}
$$

De (5.44), com $c > 0$ independente de n, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|w_{tt}^{n+1}\|_{H^{-1}}^2 \leq\ & c\|Bw_t^{n+1}\|_{H^{-1}}^2 + c\|\nabla\operatorname{div} w_t^{n+1}\|_{H^{-1}}^2 + c\|w_t^{n+1}\|_{H^{-1}}^2 + c\|u_t^n\cdot\nabla w^{n+1}\|_{H^{-1}}^2 \\
&+c\|u^n\cdot\nabla w_t^{n+1}\|_{H^{-1}}^2 + c\|\operatorname{rot} u_t^n\|_{H^{-1}}^2 + c\|g_t\|_{H^{-1}}^2. \qquad (5.71)
\end{aligned}
$$

Também, temos as seguintes estimativas

$$
\begin{aligned}
\|Bw_t^{n+1}\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(Bw_t^{n+1}, v)| = \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(\nabla w_t^{n+1}, \nabla v)| \leq \|\nabla w_t^{n+1}\|,\\
\|\nabla\operatorname{div} w_t^{n+1}\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(\nabla\operatorname{div} w_t^{n+1}, v)| = \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(\operatorname{div} w_t^{n+1}, \operatorname{div} v)|\\
&\leq c\sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}\|\nabla w_t^{n+1}\|\|\nabla v\| \leq c\|\nabla w_t^{n+1}\|,\\
\|w_t^{n+1}\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(w_t^{n+1}, v)| \leq \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}\|w_t^{n+1}\|\|v\| \leq c\|w_t^{n+1}\|,\\
\|u_t^n\cdot\nabla w^{n+1}\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(u_t^n\cdot\nabla w^{n+1}, v)| \leq c\|u_t^n\|\|Bw^{n+1}\|,\\
\|u^n\cdot\nabla w_t^{n+1}\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(u^n\cdot\nabla w_t^{n+1}, v)| \leq c\|\nabla u^n\|\|\nabla w_t^{n+1}\|,\\
\|\operatorname{rot} u_t^n\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(\operatorname{rot} u_t^n, v)| \leq \|u_t^n\|,\\
\|g_t\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1}|(g_t, v)| \leq c\|g_t\|.
\end{aligned}
$$

Logo, levando estas estimativas em (5.71), resulta

$$\begin{aligned}||w_{tt}^{n+1}||_{H^{-1}}^2 &\leq c||\nabla w_t^{n+1}||^2 + c||w_t^{n+1}||^2 + c||u_t^n||^2||Bw^{n+1}||^2 + c||\nabla u^n||^2||\nabla w_t^{n+1}||^2 \\ &+c||u_t^n||^2 + c||g_t||^2. \end{aligned} \tag{5.72}$$

De (5.45), com $c > 0$ independente de n, temos

$$\begin{aligned}||b_{tt}^{n+1}||_{V^*}^2 &\leq c||Ab_t^{n+1}||_{V^*}^2 + ||P(u_t^n \cdot \nabla b^{n+1})||_{V^*}^2 + ||P(u^n \cdot \nabla b_t^{n+1})||_{V^*}^2 \\ &+||P(b_t^n \cdot \nabla u^{n+1})||_{V^*}^2 + ||P(b^n \cdot \nabla u_t^{n+1})||_{V^*}^2 \end{aligned}$$

e observando (5.63)-(5.65), (5.67) e (5.68), vem

$$||b_{tt}^{n+1}||_{V^*}^2 \leq c||\nabla b_t^{n+1}||^2 + c||u_t^n||^2||Ab^{n+1}||^2 + c||\nabla u^n||^2||\nabla b_t^{n+1}||^2 + c||\nabla b^n||^2||\nabla u_t^{n+1}||^2. \tag{5.73}$$

Observando (5.35), (5.56) e (5.61), somamos (5.70), (5.72) e (5.73), obtendo

$$\begin{aligned}&||u_{tt}^{n+1}||_{V^*}^2 + ||w_{tt}^{n+1}||_{H^{-1}}^2 + ||b_{tt}^{n+1}||_{V^*}^2 \\ &\leq c||\nabla u_t^{n+1}||^2 + c||u_t^n||^2 + c||w_t^n||^2 + c||b_t^n||^2 + c||\nabla w_t^{n+1}||^2 \\ &+c||w_t^{n+1}||^2 + c||\nabla b_t^{n+1}||^2 + c||f_t||^2 + c||g_t||^2. \end{aligned}$$

Tendo em conta (5.40), (5.42), (5.55), (5.60) e o fato que f_t, $g_t \in L^2(Q)$, integramos a última desigualdade de 0 a t, obtendo

$$\int_0^t ||u_{tt}^{n+1}(\tau)||_{V^*}^2 d\tau + \int_0^t ||w_{tt}^{n+1}(\tau)||_{H^{-1}}^2 d\tau + \int_0^t ||b_{tt}^{n+1}(\tau)||_{V^*}^2 d\tau \leq M_0.$$

Portanto,

$\{u_{tt}^n\}$, $\{b_{tt}^n\}$ são uniformemente limitadas em $L^2(0,T;V^*)$

e $\{w_{tt}^n\}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H^{-1})$.

5.3 Existência da solução e estimativas de erro

Os resultados são os seguintes:

Teorema 5.5 *Suponhamos que as condições do Teorema 5.3 são satisfeitas. Então as soluções aproximadas* (u^n, w^n, b^n) *convergem em* $L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)) \times L^\infty(0,T;$

$H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(B)) \times L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$. *O elemento limite* (u,w,b) *é a única solução do problema (5.1)-(5.4) e satisfaz as seguintes estimativas de erro:*

$$\sup_t\{\|\nabla u^n(t)-\nabla u(t)\|^2+\|\nabla w^n(t)-\nabla w(t)\|^2+\|\nabla b^n(t)-\nabla b(t)\|^2\} \leq M_9\Big[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2},$$

$$\int_0^t \|Au^n(\tau)-Au(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|Bw^n(\tau)-Bu(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|Ab^n(\tau)-Ab(\tau)\|^2d\tau \leq M_{10}\Big[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2},$$

$$\int_0^t \|\nabla u^n(\tau)-\nabla u(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|\nabla w^n(\tau)-\nabla w(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|\nabla b^n(\tau)-\nabla b(\tau)\|^2d\tau \leq M_{11}\Big[\frac{(M_8T)^{n}}{n!}\Big]^{1/2},$$

$$\int_0^t \|u_t^n(\tau)-u_t(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|w_t^n(\tau)-w_t(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|b_t^n(\tau)-b_t(\tau)\|^2d\tau \leq M_{12}\Big[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2},$$

para todo $t\in[0,T]$ *e onde as constantes* M_8, M_9, M_{10}, M_{11} *e* M_{12} *são independentes de* n.

Com hipóteses mais fortes sobre os dados, temos:

Teorema 5.6 *Suponhamos que as condições do Teorema 5.4 são satisfeitas. Então as soluções aproximadas* (u^n,w^n,b^n) *convergem em* $L^\infty(0,T;D(A))\times L^\infty(0,T;D(B))\times L^\infty(0,T;D(A))$ *à solução* (u,w,b) *fornecida pelo Teorema 5.5. Além disso,* (u,w,b) *satisfaz as seguintes estimativas de erro:*

$$\sup_t\{\|\nabla u^n(t)-\nabla u(t)\|^2+\|\nabla w^n(t)-\nabla w(t)\|^2+\|\nabla b^n(t)-\nabla b(t)\|^2\} \leq M_9\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\int_0^t \|Au^n(\tau)-Au(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|Bw^n(\tau)-Bw(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|Ab^n(\tau)-Ab(\tau)\|^2d\tau \leq M_{17}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\int_0^t \|\nabla u^n(\tau)-\nabla u(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|\nabla w^n(\tau)-\nabla w(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t \|\nabla b^n(\tau)-\nabla b(\tau)\|^2d\tau$$

$$\leq M_{18}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\int_0^t \|u_t^n(\tau)-u_t(\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t \|w_t^n(\tau)-w_t(\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t \|b_t^n(\tau)-b_t(\tau)\|^2 d\tau$$
$$\leq M_{20}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\sup_t\{\|u_t^n(t)-u_t(t)\|^2+\|w_t^n(t)-w_t(t)\|^2+\|b_t^n(t)-b_t(t)\|^2\}$$
$$\leq M_{21}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$\int_0^t \|\nabla(u_t^n-u_t)(\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t \|\nabla(w_t^n-w_t)(\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t \|\nabla(b_t^n-b_t)(\tau)\|^2 d\tau$$
$$\leq M_{21}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$\sup_t\{\|Au^n(t)-Au(t)\|^2+\|Bw^n(t)-Bw(t)\|^2+\|Ab^n(t)-Ab(t)\|^2\}$$
$$\leq M_{22}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$\int_0^t \|u_{tt}^n(\tau)-u_{tt}(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau+\int_0^t \|w_{tt}^n(\tau)-w_{tt}(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau+\int_0^t \|b_{tt}^n(\tau)-b_{tt}(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau$$
$$\leq M_{23}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!},$$

para todo $t\in[0,T]$ e onde as constantes M_9, M_{16}, M_{17}, M_{18}, M_{20}, M_{21}, M_{22} e M_{23} são independentes de n.

Denotamos por

$$u^{n,s}=u^{n+s}-u^n,\quad w^{n,s}=w^{n+s}-w^n \ \text{ e } \ b^{n,s}=b^{n+s}-b^n,\quad \forall\, n,s\geq 1.$$

De (5.5), temos

$$u_t^{n+s}+(\mu+\chi)Au^{n+s}+P(u^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n+s})=\chi P(\operatorname{rot} w^{n-1+s})$$
$$+rP(b^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n+s})+Pf, \tag{5.74}$$
$$u_t^n+(\mu+\chi)Au^n+P(u^{n-1}\cdot\nabla u^n)=\chi P(\operatorname{rot} w^{n-1})+rP(b^{n-1}\cdot\nabla b^n)+Pf. \tag{5.75}$$

De (5.6), têm-se

$$jw_t^{n+s}+\gamma Bw^{n+s}-(\alpha+\beta)\nabla\operatorname{div} w^{n+s}+j(u^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n+s})+2\chi w^{n+s}$$
$$=\chi\operatorname{rot} u^{n-1+s}+g, \tag{5.76}$$
$$jw_t^n+\gamma Bw^n-(\alpha+\beta)\nabla\operatorname{div} w^n+j(u^{n-1}\cdot\nabla w^n)+2\chi w^n=\chi\operatorname{rot} u^{n-1}+g, \tag{5.77}$$

De (5.7), temos

$$b_t^{n+s} + \nu A b^{n+s} + P(u^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n+s}) - P(b^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n+s}) = 0, \tag{5.78}$$
$$b_t^n + \nu A b^n + P(u^{n-1} \cdot \nabla b^n) - P(b^{n-1} \cdot \nabla u^n) = 0. \tag{5.79}$$

Subtraindo (5.75) de (5.74), (5.77) de (5.76) e (5.79) de (5.78), obtemos

$$\begin{aligned}
u_t^{n,s} + (\mu+\chi)Au^{n,s} + P(u^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n+s}) - P(u^{n-1} \cdot \nabla u^n) &= \chi P(\mathrm{rot}\, w^{n-1,s}) \\
&\quad + rP(b^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n+s}) - rP(b^{n-1} \cdot \nabla b^n), \\
j w_t^{n,s} + \gamma B w^{n,s} - (\alpha+\beta)\nabla \mathrm{div}\, w^{n,s} + j(u^{n-1+s} \cdot \nabla w^{n+s}) - j(u^{n-1} \cdot \nabla w^n) & \\
+ 2\chi w^{n,s} &= \chi \mathrm{rot}\, u^{n-1,s}, \\
b_t^{n,s} + \nu A b^{n,s} + P(u^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n+s}) - P(b^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n+s}) &= P(u^{n-1} \cdot \nabla b^n) \\
&\quad - P(b^{n-1} \cdot \nabla u^n).
\end{aligned}$$

Portanto, $u^{n,s}$, $w^{n,s}$ e $b^{n,s}$ satisfazem as identidades:

$$\begin{aligned}
u_t^{n,s} + (\mu+\chi)Au^{n,s} &+ P(u^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n,s}) - rP(b^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n,s}) \\
&= \chi P(\mathrm{rot}\, w^{n-1,s}) + rP(b^{n-1,s} \cdot \nabla b^n) - P(u^{n-1,s} \cdot \nabla u^n),
\end{aligned} \tag{5.80}$$

$$\begin{aligned}
j w_t^{n,s} + \gamma B w^{n,s} &- (\alpha+\beta)\nabla \mathrm{div}\, w^{n,s} + j(u^{n-1+s} \cdot \nabla w^{n,s}) + 2\chi w^{n,s} \\
&= \chi \mathrm{rot}\, u^{n-1,s} - j(u^{n-1,s} \cdot \nabla w^n),
\end{aligned} \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned}
b_t^{n,s} + \nu A b^{n,s} &+ P(u^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n,s}) - P(b^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n,s}) \\
&= P(b^{n-1,s} \cdot \nabla u^n) - P(u^{n-1,s} \cdot \nabla b^n).
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Com estas notações, para provar o Teorema 5.5 e o Teorema 5.6, precisaremos de algums lemas que a seguir estabelecemos.

Lema 5.2 *Com as identidades (5.80)-(5.82), existe uma constante $c > 0$, independente de n e s, tal que*

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla w^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla b^{n,s}(t)\|^2 \\
&\quad + \int_0^t \|Au^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Bw^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Ab^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\qquad \leq c \int_0^t (\|\nabla u^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}(\tau)\|^2) \varphi_n(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{5.83}$$

onde $\varphi_n(t) = \|Au^n(t)\| + \|Bw^n(t)\| + \|Ab^n(t)\| + 1.$

Prova.

Multiplicando (5.80) por $Au^{n,s}$, logo usando a desigualdade de Hölder e o fato que $||u||_{L^3} \le c||u||^{1/2}||\nabla u||^{1/2}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u^{n,s}||^2 + (\mu+\chi)||Au^{n,s}||^2 \\
&\quad = -(u^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}, Au^{n,s}) + r(b^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}, Au^{n,s}) + \chi(\operatorname{rot} w^{n-1,s}, Au^{n,s}) \\
&\qquad r(b^{n-1,s}\cdot\nabla b^{n}, Au^{n,s}) + (u^{n-1,s}\cdot\nabla u^{n}, Au^{n,s}) \\
&\quad \le c||u^{n-1+s}||_{L^6}||\nabla u^{n,s}||_{L^3}||Au^{n,s}|| + c||b^{n-1+s}||_{L^6}||\nabla b^{n,s}||_{L^3}||Au^{n,s}|| \\
&\qquad +c||\nabla w^{n-1,s}||||Au^{n,s}|| + c||b^{n-1,s}||_{L^6}||\nabla b^{n}||_{L^3}||Au^{n,s}|| \\
&\qquad +c||u^{n-1,s}||_{L^6}||\nabla u^{n}||_{L^3}||Au^{n,s}|| \\
&\quad \le c||\nabla u^{n-1+s}||||\nabla u^{n,s}||^{1/2}||Au^{n,s}||^{3/2} + c||\nabla b^{n-1+s}||||\nabla b^{n,s}||^{1/2}||Ab^{n,s}||^{1/2}||Au^{n,s}|| \\
&\qquad +c||\nabla w^{n-1,s}||||Au^{n,s}|| + c||\nabla b^{n-1,s}||||\nabla b^{n}||^{1/2}||Ab^{n}||^{1/2}||Au^{n,s}|| \\
&\qquad +c||\nabla u^{n-1,s}||||\nabla u^{n}||^{1/2}||Au^{n}||^{1/2}||Au^{n,s}||
\end{aligned}
$$

onde $c>0$ independe de n e s.

Agora, observando (5.35) e usando a desigualdade de Young, vem

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u^{n,s}||^2 + (\mu+\chi)||Au^{n,s}||^2 \\
&\quad \le C_\varepsilon||\nabla u^{n,s}||^2 + C_{\varepsilon,\theta}||\nabla b^{n,s}||^2 + \theta||Ab^{n,s}||^2 + C_\varepsilon||\nabla w^{n-1,s}||^2 \\
&\qquad +C_\varepsilon||\nabla b^{n-1,s}||^2||Ab^{n}|| + C_\varepsilon||\nabla u^{n-1,s}||^2||Au^{n}|| + 5\varepsilon||Au^{n,s}||^2. \qquad (5.84)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (5.81) por $Bw^{n,s}$ e observando (5.37), tem-se

$$
\begin{aligned}
j\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w^{n,s}||^2 + \gamma||Bw^{n,s}||^2 \;\le\; & N_0||\nabla w^{n,s}||^2 - 2\chi(w^{n,s}, Bw^{n,s}) \\
& -j(u^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n,s}, Bw^{n,s}) + \chi(\operatorname{rot} u^{n-1,s}, Bw^{n,s}) \\
& -j(u^{n-1,s}\cdot\nabla w^{n}, Bw^{n,s}). \qquad (5.85)
\end{aligned}
$$

Usando (5.39) e as desigualdades de Hölder e Young, estimamos o lado direito de (5.85), obtendo

$$
\begin{aligned}
&j\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w^{n,s}||^2 + \gamma||Bw^{n,s}||^2 \\
&\quad \le N_0||\nabla w^{n,s}||^2 + c||\nabla w^{n,s}||||Bw^{n,s}|| + c||u^{n-1+s}||_{L^6}||\nabla w^{n,s}||_{L^3}||Bw^{n,s}|| \\
&\qquad +c||\nabla u^{n-1,s}||||Bw^{n,s}|| + c||u^{n-1,s}||_{L^6}||\nabla w^{n}||_{L^3}||Bw^{n,s}|| \\
&\quad \le N_0||\nabla w^{n,s}||^2 + c||\nabla w^{n,s}||||Bw^{n,s}|| + c||\nabla w^{n,s}||^{1/2}||Bw^{n,s}||^{3/2} \\
&\qquad +c||\nabla u^{n-1,s}||||Bw^{n,s}|| + c||\nabla u^{n-1,s}||||\nabla w^{n}||^{1/2}||Bw^{n}||^{1/2}||Bw^{n,s}|| \\
&\quad \le N_0||\nabla w^{n,s}||^2 + C_\eta||\nabla w^{n,s}||^2 + C_\eta||\nabla w^{n,s}||^2 + C_\eta||\nabla u^{n-1,s}||^2 \\
&\qquad +C_\eta||\nabla u^{n-1,s}||^2||Bw^{n}|| + 4\eta||Bw^{n,s}||^2,
\end{aligned}
$$

escolhendo $\eta > 0$ apropriado, com $c > 0$ independente de n e s, resulta

$$j\frac{d}{dt}||\nabla w^{n,s}||^2 + \gamma||Bw^{n,s}||^2 \leq c||\nabla w^{n,s}||^2 + c||\nabla u^{n-1,s}||^2 + c||\nabla u^{n-1,s}||^2||Bw^n||. \quad (5.86)$$

Agora, multiplicando (5.82) por $Ab^{n,s}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&||\nabla b^{n,s}||^2 + \nu||Ab^{n,s}||^2 \\
&= -(u^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}, Ab^{n,s}) + (b^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}, Ab^{n,s}) \\
&\quad +(b^{n-1,s}\cdot\nabla u^n, Ab^{n,s}) - (u^{n-1,s}\cdot\nabla b^n, Ab^{n,s}) \\
&\leq c||u^{n-1+s}||_{L^6}||\nabla b^{n,s}||_{L^3}||Ab^{n,s}|| + c||b^{n-1+s}||_{L^6}||\nabla u^{n,s}||_{L^3}||Ab^{n,s}|| \\
&\quad +c||b^{n-1,s}||_{L^6}||\nabla u^n||_{L^3}||Ab^{n,s}|| + c||u^{n-1,s}||_{L^6}||\nabla b^n||_{L^3}||Ab^{n,s}|| \\
&\leq c||\nabla b^{n,s}||^{1/2}||Ab^{n,s}||^{3/2} + c||\nabla u^{n,s}||^{1/2}||Au^{n,s}||^{1/2}||Ab^{n,s}|| \\
&\quad +c||\nabla b^{n-1,s}||||\nabla u^n||^{1/2}||Au^n||^{1/2}||Ab^{n,s}|| \\
&\quad +c||\nabla u^{n-1,s}||||\nabla b^n||^{1/2}||Ab^n||^{1/2}||Ab^{n,s}|| \\
&\leq C_\theta||\nabla b^{n,s}||^2 + C_\theta||\nabla u^{n,s}||||Au^{n,s}|| + C_\theta||\nabla b^{n-1,s}||^2||Au^n|| \\
&\quad +C_\theta||\nabla u^{n-1,s}||^2||Ab^n|| + 4\theta||Ab^{n,s}||^2 \\
&\leq C_\theta||\nabla b^{n,s}||^2 + C_{\theta,\varepsilon}||\nabla u^{n,s}||^2 + \varepsilon||Au^{n,s}||^2 \\
&\quad +C_\theta||\nabla b^{n-1,s}||^2||Au^n|| + C_\theta||\nabla u^{n-1,s}||^2||Ab^n|| + 4\theta||Ab^{n,s}||^2. \qquad (5.87)
\end{aligned}$$

Somando (5.84) e (5.87), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&(||\nabla u^{n,s}||^2 + ||\nabla b^{n,s}||^2) + (\mu+\chi)||Au^{n,s}||^2 + \nu||Ab^{n,s}||^2 \\
&\leq C_{\varepsilon,\theta}||\nabla u^{n,s}||^2 + C_{\theta,\epsilon}||\nabla b^{n,s}||^2 + C_\varepsilon||\nabla w^{n-1,s}||^2 + C_\varepsilon||\nabla b^{n-1,s}||^2||Ab^n|| \\
&\quad +C_\varepsilon||\nabla u^{n-1,s}||^2||Au^n|| + C_\theta||\nabla b^{n-1,s}||^2||Au^n|| \\
&\quad +C_\theta||\nabla u^{n-1,s}||^2||Ab^n|| + 6\varepsilon||Au^{n,s}||^2 + 5\theta||Ab^{n,s}||^2,
\end{aligned}$$

escolhendo $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ apropriados, com $c > 0$ independente de n e s, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}&(||\nabla u^{n,s}||^2 + ||\nabla b^{n,s}||^2) + (\mu+\chi)||Au^{n,s}||^2 + \nu||Ab^{n,s}||^2 \\
&\leq c||\nabla u^{n,s}||^2 + c||\nabla b^{n,s}||^2 + c||\nabla w^{n-1,s}||^2 \\
&\quad +(||\nabla u^{n-1,s}||^2 + ||\nabla b^{n-1,s}||^2)(||Au^n|| + ||Ab^n||). \qquad (5.88)
\end{aligned}$$

Agora, somamos (5.86) e (5.88), obtendo

$$\frac{d}{dt}(||\nabla u^{n,s}||^2 + j||\nabla w^{n,s}||^2 + ||\nabla b^{n,s}||^2) + (\mu+\chi)||Au^{n,s}||^2 + \gamma||Bw^{n,s}||^2 + \nu||Ab^{n,s}||^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c(\|\nabla u^{n,s}\|^2 + \|\nabla w^{n,s}\|^2 + \|\nabla b^{n,s}\|^2) + c\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + c\|\nabla w^{n-1,s}\|^2 \\
&\quad + c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}\|^2)(\|Au^n\| + \|Bw^n\| + \|Ab^n\|) \\
&\leq c(\|\nabla u^{n,s}\|^2 + \|\nabla w^{n,s}\|^2 + \|\nabla b^{n,s}\|^2) \\
&\quad + c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}\|^2)(\|Au^n\| + \|Bw^n\| + \|Ab^n\| + 1)
\end{aligned}
$$

logo, integrando de 0 a t e considerando o $\min\{1, j, \mu + \chi, \gamma, \nu\}$, vem

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla w^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla b^{n,s}(t)\|^2 \\
&\quad + \int_0^t \|Au^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Bw^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Ab^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\qquad \leq c \int_0^t (\|\nabla u^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}(\tau)\|^2)\varphi_n(\tau) d\tau \\
&\qquad\quad + c \int_0^t (\|\nabla u^{n,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n,s}(\tau)\|^2) d\tau,
\end{aligned}
$$

onde $\varphi_n(t) = \|Au^n(t)\| + \|Bw^n(t)\| + \|Ab^n(t)\| + 1$.

Aplicando a desigualdade de Gronwall, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla w^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla b^{n,s}(t)\|^2 \\
&\quad + \int_0^t \|Au^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Bw^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Ab^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\qquad \leq c \int_0^t (\|\nabla u^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}(\tau)\|^2)\varphi_n(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

completando a prova do lema.

Lema 5.3 *Com as identidades (5.80)-(5.82), existe uma constante $c > 0$, independente de n e s, tal que*

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \|u_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|w_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|b_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\qquad \leq c \int_0^t (\|\nabla u^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}(\tau)\|^2)\varphi_n(\tau) d\tau \\
&\qquad\quad + c \int_0^t \|\nabla w^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau
\end{aligned} \tag{5.89}
$$

onde $\varphi_n(t) = \|Au^n(t)\| + \|Bw^n(t)\| + \|Ab^n(t)\| + 1$.

Prova.

Multiplicando (5.80) por $u_t^{n,s}$, obtemos

$$
\|u_t^{n,s}\|^2 \;=\; -(\mu + \chi)(Au^{n,s}, u_t^{n,s}) - (u^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n,s}, u_t^{n,s})
$$

$$
\begin{aligned}
&+r(b^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s},u_t^{n,s})+\chi(\operatorname{rot} w^{n-1,s},u_t^{n,s})\\
&+r(b^{n-1,s}\cdot\nabla b^{n},u_t^{n,s})-(u^{n-1,s}\cdot\nabla u^{n},u_t^{n,s})\\
\leq\ & c\|Au^{n,s}\|\|u_t^{n,s}\|+c\|u^{n-1+s}\|_{L^4}\|\nabla u^{n,s}\|_{L^4}\|u_t^{n,s}\|\\
&+c\|b^{n-1+s}\|_{L^4}\|\nabla b^{n,s}\|_{L^4}\|u_t^{n,s}\|+c\|\nabla w^{n-1,s}\|\|u_t^{n,s}\|\\
&+c\|b^{n-1,s}\|_{L^6}\|\nabla b^{n}\|_{L^3}\|u_t^{n,s}\|+c\|u^{n-1,s}\|_{L^6}\|\nabla u^{n}\|_{L^3}\|u_t^{n,s}\|\\
\leq\ & c\|Au^{n,s}\|\|u_t^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n-1+s}\|\|Au^{n,s}\|\|u_t^{n,s}\|\\
&+c\|\nabla b^{n-1+s}\|\|Ab^{n,s}\|\|u_t^{n,s}\|+c\|\nabla w^{n-1,s}\|\|u_t^{n,s}\|\\
&+c\|\nabla b^{n-1,s}\|\|\nabla b^{n}\|^{1/2}\|Ab^{n}\|^{1/2}\|u_t^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|\nabla u^{n}\|^{1/2}\|Au^{n}\|^{1/2}\|u_t^{n,s}\|\\
\leq\ & C_\varepsilon\|Au^{n,s}\|^2+C_\varepsilon\|Ab^{n,s}\|^2+C_\varepsilon\|\nabla w^{n-1,s}\|^2+C_\varepsilon\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|Ab^{n}\|\\
&+C_\varepsilon\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|Au^{n}\|+5\varepsilon\|u_t^{n,s}\|^2.
\end{aligned}\tag{5.90}
$$

Multiplicando (5.81) por $w_t^{n,s}$, temos

$$
\begin{aligned}
&j\|w_t^{n,s}\|^2+\frac{(\alpha+\beta)}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} w^{n,s}\|^2\\
&\qquad=-\gamma(Bw^{n,s},w_t^{n,s})-j(u^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n,s},w_t^{n,s})\\
&\qquad\quad-2\chi(w^{n,s},w_t^{n,s})+\chi(\operatorname{rot} u^{n-1,s},w_t^{n,s})-j(u^{n-1,s}\cdot\nabla w^{n},w_t^{n,s})\\
&\qquad\leq c\|Bw^{n,s}\|\|w_t^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n-1+s}\|\|Bw^{n,s}\|\|w_t^{n,s}\|+c\|\nabla w^{n,s}\|\|w_t^{n,s}\|\\
&\qquad\quad+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|w_t^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|\nabla w^{n}\|^{1/2}\|Bw^{n}\|^{1/2}\|w_t^{n,s}\|\\
&\qquad\leq C_\eta\|Bw^{n,s}\|^2+C_\eta\|\nabla w^{n,s}\|^2+C_\eta\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\\
&\qquad\quad+C_\eta\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|Bw^{n}\|+4\eta\|w_t^{n,s}\|^2.
\end{aligned}\tag{5.91}
$$

Multiplicando (5.82) por $b_t^{n,s}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|b_t^{n,s}\|^2\ =\ & -\nu(Ab^{n,s},b_t^{n,s})-(u^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s},b_t^{n,s})+(b^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s},b_t^{n,s})\\
&+(b^{n-1,s}\cdot\nabla u^{n},b_t^{n,s})-(u^{n-1,s}\cdot\nabla b^{n},b_t^{n,s})\\
\leq\ & c\|Ab^{n,s}\|\|b_t^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n-1+s}\|\|Ab^{n,s}\|\|b_t^{n,s}\|+c\|\nabla b^{n-1+s}\|\|Au^{n,s}\|\|b_t^{n,s}\|\\
&+c\|b^{n-1,s}\|_{L^6}\|\nabla u^{n}\|_{L^3}\|\|b_t^{n,s}\|+c\|u^{n-1,s}\|_{L^6}\|\nabla b^{n}\|_{L^3}\|\|b_t^{n,s}\|\\
\leq\ & c\|Ab^{n,s}\|\|b_t^{n,s}\|+c\|Au^{n,s}\|\|b_t^{n,s}\|+c\|\nabla b^{n-1,s}\|\|Au^{n}\|^{1/2}\|b_t^{n,s}\|\\
&+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|Ab^{n}\|^{1/2}\|b_t^{n,s}\|\\
\leq\ & C_\theta\|Ab^{n,s}\|^2+C_\theta\|Au^{n,s}\|^2+C_\theta\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|Au^{n}\|\\
&+C_\theta\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|Ab^{n}\|+4\theta\|b_t^{n,s}\|^2.
\end{aligned}\tag{5.92}
$$

Logo, com apropriados $\varepsilon>0$, $\eta>0$ e $\theta>0$, somando (5.90), (5.91) e (5.92), resulta

$$
\|u_t^{n,s}\|^2+j\|w_t^{n,s}\|^2+\|b_t^{n,s}\|^2+(\alpha+\beta)\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} w^{n,s}\|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c(\|Au^{n,s}\|^2 + \|Bw^{n,s}\|^2 + \|Ab^{n,s}\|^2) + c\|\nabla w^{n-1,s}\|^2 + c\|\nabla w^{n,s}\|^2 \\
&\quad + c\|\nabla b^{n-1,s}\|^2(\|Au^n\| + \|Ab^n\|) + c\|\nabla u^{n-1,s}\|^2(\|Ab^n\| + \|Bw^n\| + 1) \\
&\leq c(\|Au^{n,s}\|^2 + \|Bw^{n,s}\|^2 + \|Ab^{n,s}\|^2) + c\|\nabla w^{n,s}\|^2 \\
&\quad + c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}\|^2)(\|Au^n\| + \|Bw^n\| + \|Ab^n\| + 1),
\end{aligned}
$$

onde $c > 0$ independe de n e s.

Integrando de 0 a t, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \|u_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|w_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\quad \leq c\int_0^t (\|Au^{n,s}(\tau)\|^2 + \|Bw^{n,s}(\tau)\|^2 + \|Ab^{n,s}(\tau)\|^2) d\tau + c\int_0^t \|\nabla w^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\quad + c\int_0^t (\|\nabla u^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}(\tau)\|^2)\varphi_n(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

onde $\varphi_n(t) = \|Au^n(t)\| + \|Bw^n(t)\| + \|Ab^n(t)\| + 1$. Logo, observando (5.83), vem

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \|u_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|w_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|b_t^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\quad \leq c\int_0^t (\|\nabla u^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}(\tau)\|^2)\varphi_n(\tau) d\tau \\
&\quad + c\int_0^t \|\nabla w^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau
\end{aligned}
$$

completando a prova do Lema 5.3.

Prova do Teorema 5.5

Colocando $\phi_{n,s}(t) = \|\nabla u^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla w^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla b^{n,s}(t)\|^2$, de Lema 5.3, temos

$$
\begin{aligned}
\phi_{n,s}(t) + \int_0^t \|Au^{n,s}(\tau)\|^2 + \int_0^t \|Bw^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Ab^{n,s}(\tau)\|^2 \\
\leq c\int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau)\varphi_n(\tau) d\tau
\end{aligned}
\tag{5.93}
$$

onde $\varphi_n(t) = \|Au^n(t)\| + \|Bw^n(t)\| + \|Ab^n(t)\| + 1$.

Como $\varphi_n^2(t) \leq 4(\|Au^n(t)\|^2 + \|Bw^n(t)\|^2 + \|Ab^n(t)\|^2 + 1)$, então pelas estimativas dadas no Teorema 5.3 ((5.35) e (5.39)), temos que

$$
\{\varphi_n\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T). \tag{5.94}
$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder no lado direito de (5.93) e tendo em conta (5.94), obtemos

$$
\phi_{n,s}(t) + \int_0^t \|Au^{n,s}(\tau)\|^2 + \int_0^t \|Bw^{n,s}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|Ab^{n,s}(\tau)\|^2
$$

$$\leq c\Big(\int_0^t \phi_{n-1,s}^2(\tau)d\tau\Big)^{1/2}, \tag{5.95}$$

em particular

$$\phi_{n,s}^2(t) \leq M_8 \int_0^t \phi_{n-1,s}^2(\tau)d\tau. \tag{5.96}$$

Observando (5.35), (5.39) e da definição de $u^{n,s}$, $w^{n,s}$ e $b^{n,s}$, segue-se que $\forall\, n,\ s$

$$\phi_{n,s}(t) \leq M_9. \tag{5.97}$$

Consequentememte, Lema 5.1 junto com (5.96) e (5.97), fornece

$$\phi_{n,s}^2(t) \leq M_9^2\frac{(M_8 t)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{5.98}$$

Portanto,

$$\|\nabla u^{n,s}(t)\|^2+\|\nabla w^{n,s}(t)\|^2+\|\nabla b^{n,s}(t)\|^2 \leq M_9\Big[\frac{(M_8 t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2} \leq M_9\Big[\frac{(M_8 T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2}. \tag{5.99}$$

De (5.95) e (5.98), com uma constante $M_{10} > 0$ que independe de n e s, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|Au^{n,s}(\tau)\|^2d\tau + \int_0^t \|Bw^{n,s}(\tau)\|^2d\tau + \int_0^t \|Ab^{n,s}(\tau)\|^2d\tau\\ &\leq c\Big(\int_0^t M_9^2\frac{(M_8\tau)^{n-2}}{(n-2)!}d\tau\Big)^{1/2} \leq M_{10}\Big[\frac{(M_8 t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2} \leq M_{10}\Big[\frac{(M_8 T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.100}$$

Também, integrando de 0 a t a desigualdade (5.99) e logo usando a desigualdade de Hölder no lado direito, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^t (\|\nabla u^{n,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla w^{n,s}(\tau)\|^2 + \|\nabla b^{n,s}(\tau)\|^2)d\tau\\ &\qquad\leq M_9\int_0^t \Big[\frac{(M_8\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2}d\tau \leq c\,M_9\Big(\int_0^t \frac{(M_8\tau)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau\Big)^{1/2}\\ &\qquad\leq M_{11}\Big[\frac{(M_8 t)^{n}}{n!}\Big]^{1/2} \leq M_{11}\Big[\frac{(M_8 T)^{n}}{n!}\Big]^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.101}$$

De Lema 5.3, tendo em conta (5.101), temos

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|u_t^{n,s}(\tau)\|^2d\tau + \int_0^t \|w_t^{n,s}(\tau)\|^2d\tau + \int_0^t \|b_t^{n,s}(\tau)\|^2d\tau\\ &\qquad\leq c\int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau)\varphi_n(\tau)d\tau + cM_{11}\Big[\frac{(M_8 T)^{n}}{n!}\Big]^{1/2}\end{aligned} \tag{5.102}$$

onde $\phi_{n,s}(t) = ||\nabla u^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla w^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla b^{n,s}(t)||^2$.

Aplicando a desigualdade de Hölder no lado direito de (5.102) e tendo em conta (5.94), obtemos

$$\int_0^t ||u_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||w_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||b_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau$$
$$\leq c\Big(\int_0^t \phi_{n-1,s}^2(\tau)d\tau\Big)^{1/2} + cM_{11}\Big[\frac{(M_8T)^n}{n!}\Big]^{1/2}$$

e observando (5.98), resulta

$$\int_0^t ||u_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||w_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||b_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau$$
$$\leq c\Big(\int_0^t M_9^2\frac{(M_8\tau)^{n-2}}{(n-2)!}\Big)^{1/2} + cM_{11}\Big[\frac{(M_8T)^n}{n!}\Big]^{1/2}$$
$$\leq M_{12}\Big(\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big)^{1/2}. \qquad (5.103)$$

Agora, das estimativas (5.99)-(5.101), (5.103) e Corolário 5.1, concluimos que

$\{u^n\}$, $\{b^n\}$ são sequências de Cauchy em $L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))\cap L^2(0,T;V)$,

$\{w^n\}$ é sequência de Cauchy em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;D(B))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,

$\{u_t^n\}$, $\{b_t^n\}$ são sequências de Cauchy em $L^2(0,T;H)$,

$\{w_t^n\}$ é sequência de Cauchy em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Assim, desde que $L^\infty(0,T;V)$, $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, $L^2(0,T;D(A))$, $L^2(0,T;D(B))$, $L^2(0,T;V)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $L^2(0,T;H)$ e $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ são espaços de Banach, existem u, w e b tais que quando $n\longrightarrow\infty$, têm-se

$$\begin{aligned}
&u^n \longrightarrow u \ \text{ forte em } \ L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))\cap L^2(0,T;V),\\
&b^n \longrightarrow b \ \text{ forte em } \ L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))\cap L^2(0,T;V),\\
&w^n \longrightarrow w \ \text{ forte em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;D(B))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&u_t^n \longrightarrow u_t \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;H),\\
&b_t^n \longrightarrow b_t \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;H),\\
&w_t^n \longrightarrow w_t \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

A seguir, com as convergências estabelecidas acima, passando ao limite (5.5)-(5.7) de forma usual como em Lions ([22], p. 76), tem-se que o elemento limite (u,w,b) é solução de (5.1)-(5.4).

Para provar a unicidade da solução, suponhamos que $(\overline{u}, \overline{w}, \overline{b})$ é outra solução do problema (5.1)-(5.4) e denotemos

$$\xi(t) = ||u - \overline{u}||^2 + ||w - \overline{w}||^2 + ||b - \overline{b}||^2.$$

Logo, com estimativas análogas às obtidas para chegar a (5.17) (ver a prova de unicidade do Cap. 3), obtem-se a seguinte desigualdade

$$\xi(t) \leq c \int_0^t \xi(\tau) d\tau, \quad \forall\, t \in [0, T]$$

e então, usando a desigualdade de Gronwall, segue que $\xi(t) = 0, \ \forall\, t \in [0, T]$, isto é,

$$u(t) = \overline{u}(t), \quad w(t) = \overline{w}(t) \ \text{ e } \ b(t) = \overline{b}(t).$$

Finalmente, as estimativas de erro do Teorema 5.5, são obtidas tomando o limite quando $s \longrightarrow \infty$ nas desigualdades (5.99)-(5.101) e (5.103) respectivamente.

Prova do Teorema 5.6

Do Lema 5.2, com $\varphi_n(t) = ||Au^n(t)|| + ||Bw^n(t)|| + ||Ab^n(t)|| + 1$ e $c > 0$ independente de n e s, temos

$$\begin{aligned} &||\nabla u^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla w^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla b^{n,s}(t)||^2 \\ &\quad + \int_0^t ||Au^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Bw^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Ab^{n,s}(\tau)||^2 d\tau \\ &\quad \leq c \int_0^t (||\nabla u^{n-1,s}(\tau)||^2 + ||\nabla w^{n-1,s}(\tau)||^2 + ||\nabla b^{n-1,s}(\tau)||^2) \varphi_n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Agora, das estimativas do Teorema 5.4 ((5.56) e (5.61)), resulta que

$$\{\varphi_n\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T). \tag{5.104}$$

Então, colocando $\phi_{n,s}(t) = ||\nabla u^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla w^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla b^{n,s}(t)||^2$ na última desigualdade e observando (5.104) tem-se

$$\phi_{n,s}(t) + \int_0^t ||Au^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Bw^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Ab^{n,s}(\tau)||^2 d\tau \leq M_{16} \int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau) d\tau. \tag{5.105}$$

Em particular

$$\phi_{n,s}(t) \leq M_{16} \int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau) d\tau$$

e de (5.97), para todo n e s tem-se $\phi_{n,s}(t) \leq M_9$, então usando Lema 5.1, obtemos que

$$\phi_{n,s}(t) \leq M_9 \frac{(M_{16} t)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{5.106}$$

Portanto,

$$||\nabla u^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla w^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla b^{n,s}(t)||^2 \leq M_9 \frac{(M_{16}t)^{n-1}}{(n-1)!} \leq M_9 \frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (5.107)$$

Além disso, de (5.105) e (5.106) com uma constante M_{17} que independe de n e s, temos

$$\begin{aligned}\int_0^t ||Au^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Bw^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Ab^{n,s}(\tau)||^2 d\tau \ &\leq \ M_{16} \int_0^t M_9 \frac{(M_{16}\tau)^{n-2}}{(n-2)!} d\tau \\ &= M_{17} \frac{(M_{16}t)^{n-1}}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^t ||Au^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Bw^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||Ab^{n,s}(\tau)||^2 d\tau \leq M_{17} \frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (5.108)$$

Também, integrando de 0 a t a desigualdade (5.107), obtemos

$$\int_0^t (||\nabla u^{n,s}(\tau)||^2 + ||\nabla w^{n,s}(\tau)||^2 + ||\nabla b^{n,s}(\tau)||^2) d\tau \leq M_{18} \frac{(M_{16}T)^n}{n!}. \qquad (5.109)$$

Do Lema 5.3, com $c > 0$ independente de n e s, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^t ||u_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||w_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||b_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau \\ &\leq c \int_0^t (||\nabla u^{n-1,s}(\tau)||^2 + ||\nabla w^{n-1,s}(\tau)||^2 + ||\nabla b^{n-1,s}(\tau)||^2) \varphi_n(\tau) d\tau \\ &+ c \int_0^t ||\nabla w^{n,s}(\tau)||^2 d\tau. \qquad (5.110)\end{aligned}$$

onde $\varphi_n(t) = ||Au^n(t)|| + ||Bw^n(t)|| + ||Ab^n(t)|| + 1$.

Observando (5.109), resulta

$$\int_0^t (||\nabla u^{n-1,s}(\tau)||^2 + ||\nabla w^{n-1,s}(\tau)||^2 + ||\nabla b^{n-1,s}(\tau)||^2) d\tau \leq M_{19} \frac{(M_{16}t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Logo, tendo em conta (5.104), (5.109) e levando esta última desigualdade em (5.110), obtemos

$$\int_0^t ||u_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||w_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau + \int_0^t ||b_t^{n,s}(\tau)||^2 d\tau \leq M_{20} \frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (5.111)$$

A seguir, derivando (5.80) com respeito a t, obtemos

$$\begin{aligned} u_{tt}^{n,s} + (\mu+\chi)Au_t^{n,s} &= -P(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}) - P(u^{n-1+s}\cdot\nabla u_t^{n,s}) \\ &\quad + rP(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}) + rP(b^{n-1+s}\cdot\nabla b_t^{n,s}) \\ &\quad + \chi P(\operatorname{rot} w_t^{n-1,s}) + rP(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^n) + rP(b^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^n) \\ &\quad - P(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla u^n) - P(u^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^n) \end{aligned} \tag{5.112}$$

e multiplicando por $u_t^{n,s}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^{n,s}\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla u_t^{n,s}\|^2 &= -(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}, u_t^{n,s}) + r(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}, u_t^{n,s}) \\ &\quad + r(b^{n-1+s}\cdot\nabla b_t^{n,s}, u_t^{n,s}) + \chi(\operatorname{rot} w_t^{n-1,s}, u_t^{n,s}) \\ &\quad + r(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^n, u_t^{n,s}) + r(b^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^n, u_t^{n,s}) \\ &\quad - (u_t^{n-1,s}\cdot\nabla u^n, u_t^{n,s}) - (u^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^n, u_t^{n,s}). \end{aligned} \tag{5.113}$$

Para o lado direito de (5.113), usando as desigualdades de Hölder e Young, a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e as estimativas do Teorema 5.4, têm-se

$$\begin{aligned} |(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}, u_t^{n,s})| &\leq c\|u_t^{n-1+s}\|\|\nabla u^{n,s}\|_{L^4}\|u_t^{n,s}\|_{L^4} \leq c\|Au^{n,s}\|\|\nabla u_t^{n,s}\| \\ &\leq C_\varepsilon\|Au^{n,s}\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^{n,s}\|^2, \\ |r(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}, u_t^{n,s})| &\leq c\|Ab^{n,s}\|\|\nabla u_t^{n,s}\| \leq C_\varepsilon\|Ab^{n,s}\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^{n,s}\|^2, \\ |\chi(\operatorname{rot} w_t^{n-1,s}, u_t^{n,s})| &\leq C_\varepsilon\|w_t^{n-1,s}\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^{n,s}\|^2, \\ |r(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^n, u_t^{n,s})| &\leq c\|b_t^{n-1,s}\|\|Ab^n\|\|\nabla u_t^{n,s}\| \leq C_\varepsilon\|b_t^{n-1,s}\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^{n,s}\|^2, \\ |r(b^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^n, u_t^{n,s})| &\leq C_\varepsilon\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|\nabla b_t^n\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^{n,s}\|^2, \\ |(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla u^n, u_t^{n,s})| &\leq c\|u_t^{n-1,s}\|\|Au^n\|\|\nabla u_t^{n,s}\| \leq C_\varepsilon\|u_t^{n-1,s}\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^{n,s}\|^2, \\ |(u^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^n, u_t^{n,s})| &\leq c\|u^{n-1,s}\|_{L^4}\|\nabla u_t^n\|\|u_t^{n,s}\|_{L^4} \\ &\leq C_\varepsilon\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|\nabla u_t^n\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^{n,s}\|^2. \end{aligned}$$

Levando estas estimativas em (5.113), com apropriado $\varepsilon > 0$ e $c > 0$ que independe de n e s, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_t^{n,s}\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla u_t^{n,s}\|^2 &\leq c\|w_t^{n-1,s}\|^2 + c\|u_t^{n-1,s}\|^2 + c\|b_t^{n-1,s}\|^2 + c\|Au^{n,s}\|^2 \\ &\quad + c\|Ab^{n,s}\|^2 + c\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|\nabla u_t^n\|^2 \\ &\quad + c\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|\nabla b_t^n\|^2 + 2r(b^{n-1+s}\cdot\nabla b_t^{n,s}, u_t^{n,s}). \end{aligned} \tag{5.114}$$

Agora, derivando (5.81) com respeito a t, temos

$$\begin{aligned} & jw_{tt}^{n,s} + \gamma Bw_t^{n,s} - (\alpha+\beta)\nabla\operatorname{div} w_t^{n,s} + 2\chi w_t^{n,s} \\ &\quad = -j(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n,s}) - j(u^{n-1+s}\cdot\nabla w_t^{n,s}) + \chi(\operatorname{rot} u_t^{n-1,s}) \\ &\quad\quad - j(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla w^n) - j(u^{n-1,s}\cdot\nabla w_t^n) \end{aligned} \tag{5.115}$$

e multiplicando por $w_t^{n,s}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
j\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w_t^{n,s}||^2 + \gamma||\nabla w_t^{n,s}||^2 + (\alpha+\beta)||\operatorname{div} w_t^{n,s}||^2 + 2\chi||w_t^{n,s}||^2 \\
= -j(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n,s}, w_t^{n,s}) + \chi(\operatorname{rot} u_t^{n-1,s}, w_t^{n,s}) \\
-j(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla w^n, w_t^{n,s}) - j(u^{n-1,s}\cdot\nabla w_t^n, w_t^{n,s}).
\end{aligned}
\tag{5.116}
$$

Analogamente como para (5.113), para o lado direito de (5.116) temos as seguintes estimativas:

$$
\begin{aligned}
|j(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n,s}, w_t^{n,s})| &\leq j||u_t^{n-1+s}||||\nabla w^{n,s}||_{L^4}||w_t^{n,s}||_{L^4} \leq c||Bw^{n,s}||||\nabla w_t^{n,s}|| \\
&\leq C_\eta||Bw^{n,s}||^2 + \eta||\nabla w_t^{n,s}||^2 \\
|\chi(\operatorname{rot} u_t^{n-1,s}, w_t^{n,s})| &\leq C_\eta||u_t^{n-1,s}||^2 + \eta||\nabla w_t^{n,s}||^2 \\
|j(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla w^n, w_t^{n,s})| &\leq j||u_t^{n-1,s}||||\nabla w^n||_{L^4}||w_t^{n,s}||_{L^4} \leq c||u_t^{n-1,s}||||Bw^n||||\nabla w_t^{n,s}|| \\
&\leq C_\eta||u_t^{n-1,s}||^2 + \eta||\nabla w_t^{n,s}||^2 \\
|j(u^{n-1,s}\cdot\nabla w_t^n, w_t^{n,s})| &\leq j||u^{n-1,s}||_{L^4}||\nabla w_t^n||||w_t^{n,s}||_{L^4} \leq c||\nabla u^{n-1,s}||||\nabla w_t^n||||\nabla w_t^{n,s}|| \\
&\leq C_\eta||\nabla u^{n-1,s}||^2||\nabla w_t^n||^2 + \eta||\nabla w_t^{n,s}||^2.
\end{aligned}
$$

Escolhendo apropriado $\eta > 0$, levamos estas estimativas em (5.116), obtendo

$$
j\frac{d}{dt}||w_t^{n,s}||^2 + \gamma||\nabla w_t^{n,s}||^2 \leq c||Bw^{n,s}||^2 + c||u_t^{n-1,s}||^2 + c||\nabla u^{n-1,s}||^2||\nabla w_t^n||^2. \tag{5.117}
$$

Derivando (5.82) com respeito a t, obtem-se

$$
\begin{aligned}
b_{tt}^{n,s} + \nu A b_t^{n,s} &= -P(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}) - P(u^{n-1+s}\cdot\nabla b_t^{n,s}) + P(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}) \\
&\quad + P(b^{n-1+s}\cdot\nabla u_t^{n,s}) + P(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla u^n) + P(b^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^n) \\
&\quad - P(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^n) - P(u^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^n)
\end{aligned}
\tag{5.118}
$$

e multiplicando por $rb_t^{n,s}$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{2}\frac{d}{dt}||b_t^{n,s}||^2 + r\nu||\nabla b_t^{n,s}||^2 &= -r(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}, b_t^{n,s}) + r(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}, b_t^{n,s}) \\
&\quad + r(b^{n-1+s}\cdot\nabla u_t^{n,s}, b_t^{n,s}) + r(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla u^n, b_t^{n,s}) \\
&\quad + r(b^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^n, b_t^{n,s}) - r(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^n, b_t^{n,s}) \\
&\quad - r(u^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^n, b_t^{n,s}).
\end{aligned}
\tag{5.119}
$$

Analogamente, como para o lado direito de (5.113), têm-se

$$
|r(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}, b_t^{n,s})| \leq C_\theta||Ab^{n,s}||^2 + \theta||\nabla b_t^{n,s}||^2,
$$

$$
\begin{aligned}
|r(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s},b_t^{n,s})| &\leq C_\theta||Au^{n,s}||^2+\theta||\nabla b_t^{n,s}||^2,\\
|r(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla u^{n},b_t^{n,s})| &\leq C_\theta||b_t^{n-1,s}||^2+\theta||\nabla b_t^{n,s}||^2,\\
|r(b^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^{n},b_t^{n,s})| &\leq C_\theta||\nabla b^{n-1,s}||^2||\nabla u_t^n||^2+\theta||\nabla b_t^{n,s}||^2,\\
|r(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^{n},b_t^{n,s})| &\leq C_\theta||u_t^{n-1,s}||^2+\theta||\nabla b_t^{n,s}||^2,\\
|r(u^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^{n},b_t^{n,s})| &\leq C_\theta||\nabla u^{n-1,s}||^2||\nabla b_t^n||^2+\theta||\nabla b_t^{n,s}||^2
\end{aligned}
$$

e levando estas estimativas em (5.119), com apropriado $\theta>0$ e $c>0$ que independe de n e s, resulta

$$
\begin{aligned}
r\frac{d}{dt}||b_t^{n,s}||^2+r\nu||\nabla b_t^{n,s}||^2 \;\leq\;& c(||Au^{n,s}||^2+||Ab^{n,s}||^2)+c(||u_t^{n-1,s}||^2+||b_t^{n-1,s}||^2)\\
&+c||\nabla b^{n-1,s}||^2||\nabla u_t^n||^2+c||\nabla u^{n-1,s}||^2||\nabla b_t^n||^2\\
&+2r(b^{n-1+s}\cdot\nabla u_t^{n,s},b_t^{n,s}). \qquad (5.120)
\end{aligned}
$$

Somando (5.114), (5.117) e (5.120), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||u_t^{n,s}||^2+j||w_t^{n,s}||^2+r||b_t^{n,s}||^2)+(\mu+\chi)||\nabla u_t^{n,s}||^2+\gamma||\nabla w_t^{n,s}||^2+r\nu||\nabla b_t^{n,s}||^2\\
&\quad\leq c(||Au^{n,s}||^2+||Bw^{n,s}||^2+||Ab^{n,s}||^2)+c(||u_t^{n-1,s}||^2+||w_t^{n-1,s}||^2+||b_t^{n-1,s}||^2)\\
&\qquad+c||\nabla u^{n-1,s}||^2(||\nabla u_t^n||^2+||\nabla w_t^n||^2+||\nabla b_t^n||^2)\\
&\qquad+c||\nabla b^{n-1,s}||^2(||\nabla u_t^n||^2+||\nabla b_t^n||^2)
\end{aligned}
$$

desde que por (1.4), $(b^{n-1+s}.\nabla b_t^{n,s},u_t^{n,s})+(b^{n-1+s}.\nabla u_t^{n,s},b_t^{n,s})=0$.

Então, integrando de 0 a t e logo considerando o $\min\{1,j,r,\mu+\chi,\gamma,r\nu\}$, temos

$$
\begin{aligned}
&||u_t^{n,s}(t)||^2+||w_t^{n,s}(t)||^2+||b_t^{n,s}(t)||^2\\
&+\int_0^t||\nabla u_t^{n,s}(\tau)||^2d\tau+\int_0^t||\nabla w_t^{n,s}(\tau)||^2d\tau+\int_0^t||\nabla b_t^{n,s}(\tau)||^2d\tau\\
&\leq c\int_0^t(||Au^{n,s}(\tau)||^2+||Bw^{n,s}(\tau)||^2+||Ab^{n,s}(\tau)||^2)d\tau\\
&\quad+c\int_0^t(||u_t^{n-1,s}(\tau)||^2+||w_t^{n-1,s}(\tau)||^2+||b_t^{n-1,s}(\tau)||^2)d\tau\\
&\quad+c\int_0^t(||\nabla u^{n-1,s}(\tau)||^2+||\nabla b^{n-1,s}(\tau)||^2)(||\nabla u_t^n(\tau)||^2+||\nabla w_t^n(\tau)||^2+||\nabla b_t^n(\tau)||^2)d\tau.
\end{aligned}
$$

Considerando (5.107), (5.108) e (5.111), segue-se

$$
\begin{aligned}
&||u_t^{n,s}(t)||^2+||w_t^{n,s}||^2+||b_t^{n,s}(t)||^2\\
&\quad+\int_0^t||\nabla u_t^{n,s}(\tau)||^2d\tau+\int_0^t||\nabla w_t^{n,s}(\tau)||^2d\tau+\int_0^t||\nabla b_t^{n,s}(\tau)||^2d\tau
\end{aligned}
$$

$$\leq cM_{17}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!}+cM_{20}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}$$
$$+cM_9\Big(\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}\Big)\int_0^t(\|\nabla u_t^n(\tau)\|^2+\|\nabla w_t^n(\tau)\|^2+\|\nabla b_t^n(\tau)\|^2)d\tau$$

e observando (5.55) e (5.60), resulta

$$\begin{aligned}&\|u_t^{n,s}(t)\|^2+\|w_t^{n,s}(t)\|^2+\|b_t^{n,s}(t)\|^2\\&\quad+\int_0^t\|\nabla u_t^{n,s}(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t\|\nabla w_t^{n,s}(\tau)\|^2d\tau+\int_0^t\|\nabla b_t^{n,s}(\tau)\|^2d\tau\\&\quad\leq M_{21}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}.\end{aligned}\tag{5.121}$$

A seguir, multiplicando (5.80) por $Au^{n,s}$, temos

$$\begin{aligned}(\mu+\chi)\|Au^{n,s}\|^2 &= -(u_t^{n,s},Au^{n,s})-(u^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s},Au^{n,s})+r(b^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s},Au^{n,s})\\&\quad+\chi(\operatorname{rot}w^{n-1,s},Au^{n,s})+r(b^{n-1,s}\cdot\nabla b^n,Au^{n,s})-(u^{n-1,s}\cdot\nabla u^n,Au^{n,s})\\&\leq \|u_t^{n,s}\|\|Au^{n,s}\|+c\|u^{n-1+s}\|_{L^6}\|\nabla u^{n,s}\|_{L^3}\|Au^{n,s}\|\\&\quad+r\|b^{n-1+s}\|_{L^6}\|\nabla b^{n,s}\|_{L^3}\|Au^{n,s}\|+\chi\|\nabla w^{n-1,s}\|\|Au^{n,s}\|\\&\quad+r\|b^{n-1,s}\|_{L^4}\|\nabla b^n\|_{L^4}\|Au^{n,s}\|+\|u^{n-1,s}\|_{L^4}\|\nabla u^n\|_{L^4}\|Au^{n,s}\|\\&\leq c\|u_t^{n,s}\|\|Au^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n,s}\|^{1/2}\|Au^{n,s}\|^{3/2}\\&\quad+c\|\nabla b^{n,s}\|^{1/2}\|Ab^{n,s}\|^{1/2}\|Au^{n,s}\|+c\|\nabla w^{n-1,s}\|\|Au^{n,s}\|\\&\quad+c\|\nabla b^{n-1,s}\|\|Ab^n\|\|Au^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|Au^n\|\|Au^{n,s}\|\\&\leq C_\varepsilon\|u_t^{n,s}\|^2+C_\varepsilon\|\nabla u^{n,s}\|^2+C_{\varepsilon,\theta}\|\nabla b^{n,s}\|^2+\theta\|Ab^{n,s}\|^2\\&\quad+C_\varepsilon\|\nabla w^{n-1,s}\|^2+C_\varepsilon\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|Ab^n\|+C_\varepsilon\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|Au^n\|\\&\quad+6\varepsilon\|Au^{n,s}\|^2.\end{aligned}\tag{5.122}$$

Multiplicando (5.81) por $Bw^{n,s}$ e observando (5.37), obtemos

$$\begin{aligned}\gamma\|Bw^{n,s}\|^2 &\leq N_0\|\nabla w^{n,s}\|^2-j(w_t^{n,s},Bw^{n,s})-2\chi(w^{n,s},Bw^{n,s})\\&\quad-j(u^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n,s},Bw^{n,s})+\chi(\operatorname{rot}u^{n-1,s},Bw^{n,s})\\&\quad-j(u^{n-1,s}\cdot\nabla w^n,Bw^{n,s})\\&\leq N_0\|\nabla w^{n,s}\|^2+c\|w_t^{n,s}\|\|Bw^{n,s}\|+c\|\nabla w^{n,s}\|\|Bw^{n,s}\|\\&\quad+c\|u^{n-1+s}\|_{L^6}\|\nabla w^{n,s}\|_{L^3}\|Bw^{n,s}\|+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|Bw^{n,s}\|\\&\quad+c\|u^{n-1,s}\|_{L^4}\|\nabla w^n\|_{L^4}\|Bw^{n,s}\|\\&\leq N_0\|\nabla w^{n,s}\|^2+c\|w_t^{n,s}\|\|Bw^{n,s}\|+c\|\nabla w^{n,s}\|\|Bw^{n,s}\|\\&\quad+c\|\nabla w^{n,s}\|^{1/2}\|Bw^{n,s}\|^{3/2}+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|Bw^{n,s}\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|Bw^n\|\|Bw^{n,s}\| \\
&\leq \; N_0\|\nabla w^{n,s}\|^2 + C_\eta\|w_t^{n,s}\|^2 + C_\eta\|\nabla w^{n,s}\|^2 + C_\eta\|\nabla w^{n,s}\|^2 \\
&\quad +C_\eta\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + 4\eta\|Bw^{n,s}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.123}
$$

Multiplicando (5.82) por $Ab^{n,s}$, temos

$$
\begin{aligned}
\nu\|Ab^{n,s}\|^2 &= -(b_t^{n,s}, Ab^{n,s}) - (u^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s}, Ab^{n,s}) + (b^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s}, Ab^{n,s}) \\
&\quad +(b^{n-1,s}\cdot\nabla u^n, Ab^{n,s}) - (u^{n-1,s}\cdot\nabla b^n, Ab^{n,s}) \\
&\leq c\|b_t^{n,s}\|\|Ab^{n,s}\| + c\|\nabla b^{n,s}\|^{1/2}\|Ab^{n,s}\|^{3/2} + c\|\nabla u^{n,s}\|^{1/2}\|Au^{n,s}\|^{1/2}\|Ab^{n,s}\| \\
&\quad +c\|\nabla b^{n-1,s}\|\|Au^n\|\|Ab^{n,s}\| + c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|Ab^n\|\|Ab^{n,s}\| \\
&\leq C_\theta\|b_t^{n,s}\|^2 + C_\theta\|\nabla b^{n,s}\|^2 + C_{\theta,\varepsilon}\|\nabla u^{n,s}\|^2 + \varepsilon\|Au^{n,s}\|^2 \\
&\quad +C_\theta\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|Au^n\|^2 + C_\theta\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|Ab^n\|^2 + 5\theta\|Ab^{n,s}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.124}
$$

Escolhendo apropriados $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ e $\theta > 0$, com $c > 0$ independente de n e s, somamos (5.122), (5.123) e (5.124), obtendo

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\chi)\|Au^{n,s}\|^2 + \gamma\|Bw^{n,s}\|^2 + \nu\|Ab^{n,s}\|^2 \\
&\quad \leq c(\|u_t^{n,s}\|^2 + \|w_t^{n,s}\|^2 + \|b_t^{n,s}\|^2) + c(\|\nabla u^{n,s}\|^2 + \|\nabla w^{n,s}\|^2 + \|\nabla b^{n,s}\|^2) \\
&\quad\quad +c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}\|^2) \\
&\quad\quad +c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}\|^2)(\|Au^n\|^2 + \|Ab^n\|^2),
\end{aligned}
$$

logo, considerando o $\min\{\mu+\chi, \gamma, \nu\}$ e observando (5.56), tem-se

$$
\begin{aligned}
\|Au^{n,s}\|^2 + \|Bw^{n,s}\|^2 + \|Ab^{n,s}\|^2 &\leq c(\|u_t^{n,s}\|^2 + \|w_t^{n,s}\|^2 + \|b_t^{n,s}\|^2) \\
&\quad +c(\|\nabla u^{n,s}\|^2 + \|\nabla w^{n,s}\|^2 + \|\nabla b^{n,s}\|^2) \\
&\quad +c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}\|^2)
\end{aligned}
$$

e levando em conta (5.107) e (5.121), resulta

$$
\begin{aligned}
&\|Au^{n,s}(t)\|^2 + \|Bw^{n,s}(t)\|^2 + \|Ab^{n,s}(t)\|^2 \\
&\quad \leq cM_{21}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!} + cM_9\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} + cM_9\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}.
\end{aligned}
$$

Portanto, concluimos

$$
\|Au^{n,s}(t)\|^2 + \|Bw^{n,s}(t)\|^2 + \|Ab^{n,s}(t)\|^2 \leq M_{22}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}. \tag{5.125}
$$

De (5.112), com $c > 0$ independente de n e s, tem-se

$$\begin{aligned}
\|u_{tt}^{n,s}\|_{V^*}^2 &\leq c\|Au_t^{n,s}\|_{V^*}^2 + c\|P(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s})\|_{V^*}^2 + c\|P(u^{n-1+s}\cdot\nabla u_t^{n,s})\|_{V^*}^2 \\
&+ c\|P(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s})\|_{V^*}^2 + c\|P(b^{n-1+s}\cdot\nabla b_t^{n,s})\|_{V^*}^2 + c\|P(\operatorname{rot} w_t^{n-1,s})\|_{V^*}^2 \\
&+ c\|P(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^n)\|_{V^*}^2 + c\|P(b^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^n)\|_{V^*}^2 + c\|P(u_t^{n-1,s}\cdot\nabla u^n)\|_{V^*}^2 \\
&+ c\|P(u^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^n)\|_{V^*}^2. \qquad (5.126)
\end{aligned}$$

De forma análoga a (5.63)-(5.68), temos

$$\begin{aligned}
\|Au_t^{n,s}\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1}|(Au_t^{n,s},v)| \leq \|\nabla u_t^{n,s}\|, \\
\|P(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s})\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1}|(u_t^{n-1+s}\cdot\nabla u^{n,s},v)| \leq \sup_{\|v\|_V\leq 1}\|u_t^{n-1+s}\|\|\nabla u^{n,s}\|_{L^4}\|v\|_{L^4} \\
&\leq c\|u_t^{n-1+s}\|\|Au^{n,s}\|, \\
\|P(u^{n-1+s}\cdot\nabla u_t^{n,s})\|_{V^*} &\leq c\|\nabla u^{n-1+s}\|\|\nabla u_t^{n,s}\|, \\
\|P(b_t^{n-1+s}\cdot\nabla b^{n,s})\|_{V^*} &\leq c\|b_t^{n-1+s}\|\|Ab^{n,s}\|, \\
\|P(b^{n-1+s}\cdot\nabla b_t^{n,s})\|_{V^*} &\leq c\|\nabla b^{n-1+s}\|\|\nabla b_t^{n,s}\|, \\
\|P(\operatorname{rot} w_t^{n-1,s})\|_{V^*} &\leq c\|w_t^{n-1,s}\|, \\
\|P(b_t^{n-1,s}\cdot\nabla b^n)\|_{V^*} &\leq c\|b_t^{n-1,s}\|\|Ab^n\|, \\
\|P(b^{n-1,s}\cdot\nabla b_t^n)\|_{V^*} &\leq c\|\nabla b^{n-1,s}\|\|\nabla b_t^n\|, \\
\|P(u_t^{n-1,s}.\nabla u^n)\|_{V^*} &\leq c\|u_t^{n-1,s}\|\|Au^n\|, \\
\|P(u^{n-1,s}\cdot\nabla u_t^n)\|_{V^*} &\leq c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|\nabla u_t^n\|.
\end{aligned}$$

Observando (5.35), (5.55) e (5.56), levamos estas estimativas em (5.126), obtendo

$$\begin{aligned}
\|u_{tt}^{n,s}\|_{V^*}^2 &\leq c\|\nabla u_t^{n,s}\|^2 + c\|Au^{n,s}\|^2 + c\|Ab^{n,s}\|^2 + c\|\nabla b_t^{n,s}\|^2 + c\|w_t^{n-1,s}\|^2 \\
&+ c\|b_t^{n-1,s}\|^2 + c\|u_t^{n-1,s}\|^2 + c\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|\nabla u_t^n\|^2 \\
&+ c\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|\nabla b_t^n\|^2. \qquad (5.127)
\end{aligned}$$

De (5.119), com $c > 0$ independente de n e s,tem-se

$$\begin{aligned}
\|w_{tt}^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 &\leq c\|Bw_t^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 + c\|\nabla\operatorname{div} w_t^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 + c\|w_t^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 + c\|u_t^{n-1+s}\cdot\nabla w^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 \\
&+ c\|u^{n-1+s}\cdot\nabla w_t^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 + c\|\operatorname{rot} u_t^{n-1,s}\|_{H^{-1}}^2 + c\|u_t^{n-1,s}\cdot\nabla w^n\|_{H^{-1}}^2 \\
&+ c\|u^{n-1,s}\cdot\nabla w_t^n\|_{H^{-1}}^2. \qquad (5.128)
\end{aligned}$$

Análogo como para (5.71), temos

$$\|Bw_t^{n,s}\|_{H^{-1}} \leq \|\nabla w_t^{n,s}\|,$$

$$
\begin{aligned}
\|\nabla \mathrm{div}\, w_t^{n,s}\|_{H^{-1}} &\leq c\|\nabla w_t^{n,s}\|, \\
\|w_t^{n,s}\|_{H^{-1}} &\leq c\|w_t^{n,s}\|, \\
\|u_t^{n-1+s}\cdot \nabla w^{n,s}\|_{H^{-1}} &\leq \sup_{\|v\|_{H_0^1}\leq 1} \|u_t^{n-1+s}\|\|\nabla w^{n,s}\|_{L^4}\|v\|_{L^4} \leq c\|u_t^{n-1+s}\|\|Bw^{n,s}\|, \\
\|u^{n-1+s}\cdot \nabla w_t^{n,s}\|_{H^{-1}} &\leq c\|\nabla u^{n-1+s}\|\|\nabla w_t^{n,s}\|, \\
\|\mathrm{rot}\, u_t^{n-1,s}\|_{H^{-1}} &\leq c\|u_t^{n-1,s}\|, \\
\|u_t^{n-1,s}\cdot \nabla w^{n}\|_{H^{-1}} &\leq c\|u_t^{n-1,s}\|\|Bw^{n}\|, \\
\|u^{n-1,s}\cdot \nabla w_t^{n}\|_{H^{-1}} &\leq c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|\nabla w_t^{n}\|.
\end{aligned}
$$

Logo, observando (5.35), (5.55) e (5.61), levamos as estimativas acima em (5.128), obtendo

$$
\begin{aligned}
\|w_{tt}^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 \leq\ & c\|\nabla w_t^{n,s}\|^2 + c\|w_t^{n,s}\|^2 + c\|Bw^{n,s}\|^2 + c\|u_t^{n-1,s}\|^2 \\
& + c\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|\nabla w_t^{n}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.129}
$$

De (5.122), com $c > 0$ independente de n e s, temos

$$
\begin{aligned}
\|b_{tt}^{n,s}\|_{V^*}^2 \leq\ & c\|Ab_t^{n,s}\|_{V^*}^2 + c\|P(u_t^{n-1+s}\cdot \nabla b^{n,s})\|_{V^*}^2 + c\|P(u^{n-1+s}\cdot \nabla b_t^{n,s})\|_{V^*}^2 \\
& + c\|P(b_t^{n-1+s}\cdot \nabla u^{n,s})\|_{V^*}^2 + c\|P(b^{n-1+s}\cdot \nabla u_t^{n,s})\|_{V^*}^2 \\
& + c\|P(b_t^{n-1,s}\cdot \nabla u^{n})\|_{V^*}^2 + c\|P(b^{n-1,s}\cdot \nabla u_t^{n})\|_{V^*}^2 \\
& + c\|P(u_t^{n-1,s}\cdot \nabla b^{n})\|_{V^*}^2 + c\|P(u^{n-1,s}\cdot \nabla b_t^{n})\|_{V^*}^2.
\end{aligned} \tag{5.130}
$$

Analogamente como para o lado direito de (5.126), obtemos as seguintes estimativas:

$$
\begin{aligned}
\|Ab_t^{n,s}\|_{V^*} &\leq \|\nabla b_t^{n,s}\|, \\
\|P(u_t^{n-1+s}\cdot \nabla b^{n,s})\|_{V^*} &\leq c\|u_t^{n-1+s}\|\|Ab^{n,s}\|, \\
\|P(u^{n-1+s}\cdot \nabla b_t^{n,s})\|_{V^*} &\leq c\|\nabla u^{n-1+s}\|\|\nabla b_t^{n,s}\|, \\
\|P(b_t^{n-1+s}\cdot \nabla u^{n,s})\|_{V^*} &\leq c\|b_t^{n-1+s}\|\|Au^{n,s}\|, \\
\|P(b^{n-1+s}\cdot \nabla u_t^{n,s})\|_{V^*} &\leq c\|\nabla b^{n-1+s}\|\|\nabla u_t^{n,s}\|, \\
\|P(b_t^{n-1,s}\cdot \nabla u^{n})\|_{V^*} &\leq c\|b_t^{n-1,s}\|\|Au^{n}\|, \\
\|P(b^{n-1,s}\cdot \nabla u_t^{n})\|_{V^*} &\leq c\|\nabla b^{n-1,s}\|\|\nabla u_t^{n}\|, \\
\|P(u_t^{n-1,s}\cdot \nabla b^{n})\|_{V^*} &\leq c\|u_t^{n-1,s}\|\|Ab^{n}\|, \\
\|P(u^{n-1,s}\cdot \nabla b_t^{n})\|_{V^*} &\leq c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|\nabla b_t^{n}\|,
\end{aligned}
$$

logo, observando (5.35), (5.55) e (5.56), levamos estas estimativas em (5.130), obtendo

$$
\begin{aligned}
\|b_{tt}^{n,s}\|_{V^*}^2 \leq\ & c(\|\nabla u_t^{n,s}\|^2 + \|\nabla b_t^{n,s}\|^2) + c(\|Au^{n,s}\|^2 + \|Ab^{n,s}\|^2) + c\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|\nabla u_t^{n}\|^2 \\
& + c(\|u_t^{n-1,s}\|^2 + \|b_t^{n-1,s}\|^2) + c\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|\nabla b_t^{n}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.131}
$$

Somando (5.127), (5.129) e (5.131), resulta

$$
\begin{aligned}
&\|u_{tt}^{n,s}\|_{V^*}^2 + \|w_{tt}^{n,s}\|_{H^{-1}}^2 + \|b_{tt}^{n,s}\|_{V^*}^2 \\
&\qquad \le c(\|\nabla u_t^{n,s}\|^2 + \|\nabla w_t^{n,s}\|^2 + \|\nabla b_t^{n,s}\|^2) \\
&\qquad\quad + c(\|Au^{n,s}\|^2 + \|Bw^{n,s}\|^2 + \|Ab^{n,s}\|^2) \\
&\qquad\quad + c(\|w_t^{n-1,s}\|^2 + \|u_t^{n-1,s}\|^2 + \|b_t^{n-1,s}\|^2) + c\|w_t^{n,s}\|^2 \\
&\qquad\quad + c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}\|^2)(\|\nabla u_t^n\|^2 + \|\nabla w_t^n\|^2 + \|\nabla b_t^n\|^2),
\end{aligned}
$$

logo, observando (5.107), (5.108), (5.111) e (5.121), integramos de 0 a t, obtendo

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \|u_{tt}^{n,s}(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau + \int_0^t \|w_{tt}^{n,s}(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau + \int_0^t \|b_{tt}^{n,s}(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \\
&\qquad \le cM_{21}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!} + cM_{17}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\qquad\quad + cM_{20}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!} + cM_{20}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\qquad\quad + cM_9\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^t (\|\nabla u_t^n(\tau)\|^2 + \|\nabla w_t^n(\tau)\|^2 + \|\nabla b_t^n(\tau)\|^2) d\tau
\end{aligned}
$$

e tendo em conta (5.55) e (5.60), concluimos que

$$
\int_0^t \|u_{tt}^{n,s}(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau + \int_0^t \|w_{tt}^{n,s}(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau \int_0^t \|b_{tt}^{n,s}(\tau)\|_{V^*}^2 d\tau \le M_{23}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}. \tag{5.132}
$$

Agora, das estimativas (5.121), (5.125) e (5.132), junto com o Corolário 5.1, conclui-se que

$$
\begin{aligned}
&\{u_t^n\},\ \{b_t^n\} \text{ são sequências de Cauchy em } L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V), \\
&\{w_t^n\} \text{ é sequência de Cauchy em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\
&\{u^n\},\ \{b^n\} \text{ são sequências de Cauchy em } L^\infty(0,T;D(A)), \\
&\{w^n\} \text{ é sequência de Cauchy em } L^\infty(0,T;D(B)), \\
&\{u_{tt}^n\},\ \{b_{tt}^n\} \text{ são sequências de Cauchy em } L^2(0,T;V^*), \\
&\text{e } \{w_{tt}^n\} \text{ é sequência de Cauchy em } L^2(0,T;H^{-1}).
\end{aligned}
$$

Logo, desde que $L^2(0,T;V)$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $L^\infty(0,T;H)$, $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $L^\infty(0,T;D(A))$, $L^\infty(0,T;D(B))$, $L^2(0,T;V^*)$ e $L^2(0,T;H^{-1})$ são espaços de Banach, das conclusões acima e da unicidade do limite, temos que

$$
u^n \longrightarrow u \ \text{ e } \ b^n \longrightarrow b \ \text{ forte em } \ L^\infty(0,T;D(A)),
$$

$$
\begin{aligned}
&w^n \longrightarrow w \ \text{ forte em } \ L^\infty(0,T;D(B)),\\
&u_t^n \longrightarrow u_t \ \text{ e } \ b_t^n \longrightarrow b_t \ \text{ forte em } \ L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V),\\
&w_t^n \longrightarrow w_t \ \text{ forte em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&u_{tt}^n \longrightarrow u_{tt} \ \text{ e } \ b_{tt}^n \longrightarrow b_{tt} \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;V^*),\\
&w_{tt}^n \longrightarrow w_{tt} \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;H^{-1}),
\end{aligned}
$$

onde (u, w, b) é a solução dada pelo Teorema 5.5.

Finalmente, as estimativas de erro do Teorema 5.6 são obtidas tomando o limite quando $s \longrightarrow \infty$ nas desigualdades (5.107)-(5.109), (5.111), (5.121), (5.125) e (5.132) respectivamente.

Observação 5.4 *Da observação 5.3, para a única solução de (5.1)-(5.3) com condições iniciais (1.3), todas as estimativas de erro dos Teoremas 5.5 e 5.6 são válidas, desde que*

$$
\begin{aligned}
&u^{n,s}(x,0) = u^{n+s}(x,0) - u^n(x,0) = u_0(x) - u_0(x) = 0,\\
&w^{n,s}(x,0) = w^{n+s}(x,0) - w^n(x,0) = w_0(x) - w_0(x) = 0,\\
&b^{n,s}(x,0) = b^{n+s}(x,0) - b^n(x,0) = b_0(x) - b_0(x) = 0,\\
&\nabla u^{n,s}(x,0) = \nabla u^{n+s}(x,0) - \nabla u^n(x,0) = \nabla u_0(x) - \nabla u_0(x) = 0,\\
&\nabla w^{n,s}(x,0) = \nabla w^{n+s}(x,0) - \nabla w^n(x,0) = \nabla w_0(x) - \nabla w_0(x) = 0,\\
&\nabla b^{n,s}(x,0) = \nabla b^{n+s}(x,0) - \nabla b^n(x,0) = \nabla b_0(x) - \nabla b_0(x) = 0,\\
&Au^{n,s}(x,0) = Au^{n+s}(x,0) - Au^n(x,0) = Au_0(x) - Au_0(x) = 0,\\
&Bw^{n,s}(x,0) = Bw^{n+s}(x,0) - Bw^n(x,0) = Bw_0(x) - Bw_0(x) = 0,\\
&Ab^{n,s}(x,0) = Ab^{n+s}(x,0) - Ab^n(x,0) = Ab_0(x) - Ab_0(x) = 0.
\end{aligned}
$$

5.4 Resultados sobre a pressão

5.4.1 Estimativas a priori

Usando os resultados de Amrouche e Girault [3], como uma consequência do Teorema 5.3, para a pressão temos

Proposição 5.1 *Com as hipóteses do Teorema 5.3, para cada n, existe uma única $p^n \in L^2(0,T;H^1(\Omega)/I\!R)$ tal que (u^n, w^n, b^n, p^n) é uma solução aproximada de (1.1)-(1.2) e (5.4), onde (u^n, w^n, b^n) é dada pelo Teorema 5.3. Além disso, as pressões aproximadas $\{p^n\}$ satisfazem*

$$
\int_0^t \|p^n(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} d\tau \le C_0
$$

para todo $t \in [0,T]$ e onde $C_0 > 0$ é uma constante genérica que independe de n.

O seguinte resultado é uma consequência do Teorema 5.4.

Proposição 5.2 *Com as hipóteses do Teorema 5.4, para cada n, a pressão p^n obtida em Proposição 5.1, satisfaz $p^n \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ e as pressões aproximadas $\{p^n\}$ satisfazem a seguinte estimativa*

$$\sup_t\{||p^n(t)||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}\} \leq C_0$$

para todo $t \in [0,T]$ e onde $C_0 > 0$ é uma constante genérica que independe de n. Além disso, para cada n, (u^n, w^n, b^n, p^n) é uma solução aproximada de (1.1)-(1.2) e (5.4), onde (u^n, w^n, b^n) é dada pelo Teorema 5.4.

Prova da Proposição 5.1

De (5.5) temos que

$$(\mu+\chi)Au^{n+1} = P(F) \tag{5.133}$$

onde

$$F = \chi \mathrm{rot} w^n + rb^n\cdot\nabla b^{n+1} + f - u^n\cdot\nabla u^{n+1} - u_t^{n+1}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} ||F||^2 &\leq c||\nabla w^n||^2 + c||b^n||^2_{L^4}||\nabla b^{n+1}||^2_{L^4} + c||f||^2 + c||u^n||^2_{L^4}||\nabla u^{n+1}||^2_{L^4} + c||u_t^{n+1}||^2 \\ &\leq c||\nabla w^n||^2 + c||\nabla b^n||^2||Ab^{n+1}||^2 + c||f||^2 + c||\nabla u^n||^2||Au^{n+1}||^2 \\ &\quad +c||u_t^{n+1}||^2, \end{aligned} \tag{5.134}$$

com $c > 0$ independente de n.

Então, observando a hipótese e as estimativas do Teorema 5.3, integramos de 0 a t, obtendo

$$\int_0^t ||F(\tau)||^2 d\tau \leq c.$$

Logo, $F \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, os resultados de Amrouche e Girault [3] implicam que existe uma única $p_*^{n+1} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} -(\mu+\chi)\Delta u^{n+1} + \nabla p_*^{n+1} &= F, \\ \mathrm{div}\, u^{n+1} &= 0 \ \text{ em } Q = \Omega\times(0,T), \\ u^{n+1}|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{5.135}$$

e $||u^{n+1}||_{H^2} + ||p_*^{n+1}||_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c||F||$. Em particular,

$$||p_*^{n+1}||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c||F||^2.$$

Agora, considerando

$$p^{n+1} = p_*^{n+1} - \frac{r}{2} b^{n+1} \cdot b^{n+1}$$

e observando (5.6)-(5.8), temos que $(u^{n+1}, w^{n+1}, b^{n+1}, p^{n+1})$ é solução aproximada de (1.1)-(1.2) e (5.4).

Observemos que se $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, têm-se

$$\nabla(u \cdot v) = u \cdot (\nabla v)^t + v \cdot (\nabla u)^t, \quad \|\nabla u\| = \|(\nabla u)^t\| \ \text{ e } \ \|u \cdot v\|_{H^1}^2 \leq c\|\nabla(u \cdot v)\|^2 \quad (5.136)$$

onde $u \cdot (\nabla v)^t = u \nabla v$.

Então, usando (5.136), temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|p^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 &\leq c\|p_*^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 + c\|b^{n+1} \cdot b^{n+1}\|_{H^1}^2 \\
&\leq c\|p_*^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 + c\|\nabla(b^{n+1} \cdot b^{n+1})\|^2 \\
&\leq c\|p_*^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 + c\|b^{n+1} \cdot (\nabla b^{n+1})^t\|^2 \\
&\leq c\|p_*^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 + c\|b^{n+1}\|_{L^4}^2 \|\nabla b^{n+1}\|_{L^4}^2 \\
&\leq c\|p_*^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 + c\|\nabla b^{n+1}\|^2 \|A b^{n+1}\|^2
\end{aligned}$$

onde $c > 0$ independe de n. Logo, observando (5.35), resulta

$$\|p^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \leq c\|p_*^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 + c\|A b^{n+1}\|^2. \quad (5.137)$$

Assim, levando em conta (5.35), integramos (5.137) de 0 a t, obtendo

$$\int_0^t \|p^{n+1}(\tau)\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 d\tau \leq C_0.$$

Observação 5.5 *Da Observação 5.3-(1), conclui-se que para cada n, (u^n, w^n, b^n, p^n) é uma solução aproximada de (1.1)-(1.3), onde (u^n, w^n, b^n) é dada pelo Teorema 5.3 e p^n é fornecida pela Proposição 5.1.*

Prova da Proposição 5.2

Com a hipótese do Teorema 5.4, as estimativas do Teorema 5.3 e Teorema 5.4, junto com (5.133) e (5.134), deduzimos que

$$(\mu + \chi) A u^{n+1} = P(F) \ \text{ onde } \ F \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R}).$$

Então, os resultados de Amrouche e Girault [3] implicam que existe uma única $p_*^{n+1} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ tal que

$$\|u^{n+1}\|_{H^2} + \|p_*^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c\|F\|.$$

Logo,

$$||p_*^{n+1}||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c||F||^2,$$

então, de (5.137), vem

$$||p^{n+1}||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c||F||^2 + c||Ab^{n+1}||^2,$$

onde $p^{n+1} = p_*^{n+1} - \frac{r}{2} b^{n+1} \cdot b^{n+1}$.

Portanto, tendo em conta (5.56) e o fato que $F \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, concluimos que

$$\sup_t \{||p^n(t)||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}\} \leq C_0$$

para todo $t \in [0,T]$ e para todo n.

Observação 5.6 *Da Observação 5.3-(2), resulta que (u^n, w^n, b^n, p^n) é uma solução aproximada de (1.1)-(1.3), onde (u^n, w^n, b^n) é fornecida pelo Teorema 5.4 e p^n é dada pela Proposição 5.2.*

5.4.2 Estimativas de erro

Temos os seguintes resultados:

Proposição 5.3 *Com as hipóteses do Teorema 5.3, as aproximações $\{p^n\}$ da Proposição 5.1, converge em $L^2(0,T; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$. O elemento limite p, satisfaz a seguinte estimativa de erro*

$$\int_0^t ||p^n(\tau) - p(\tau)||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} d\tau \leq M_{15} \left[\frac{(M_8 T)^{n-1}}{(n-1)!} \right]^{1/2}$$

para todo $t \in [0,T]$ e onde as constantes M_8 e M_{15} são independentes de n. Além disso, p é tal que (u, w, b, p) é a única solução do problema (1.1)-(1.2) e (5.4), onde (u, w, b) é a única solução dada pelo Teorema 5.5.

Proposição 5.4 *Com as hipóteses do Teorema 5.4, as aproximações $\{p^n\}$ dadas pela Proposição 5.2, converge em $L^\infty(0,T; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ à p dada pela Proposição 5.3. Além disso, p satisfaz as seguintes estimativas de erro*

$$\begin{aligned}
\int_0^t ||p^n(\tau) - p(\tau)||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} d\tau &\leq M_{24} \frac{(M_{16} T)^{n-1}}{(n-1)!}, \\
\sup_t \{||p^n(t) - p(t)||^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}\} &\leq M_{26} \frac{(M_{16} T)^{n-2}}{(n-2)!}
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ e onde as constantes M_{16}, M_{24} e M_{26} são independentes de n. Também, p é tal que (u, w, b, p) é a única solução do problema (1.1)-(1.2) e (5.4), onde (u, w, b) é a única solução fornecida pelo Teorema 5.6.

Prova da Proposição 5.3

De (5.135), temos que existe uma única $p_*^{n+1} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ tal que

$$u_t^{n+1} - (\mu+\chi)\Delta u^{n+1} + u^n \cdot \nabla u^{n+1} + \nabla p_*^{n+1} = \chi \operatorname{rot} w^n + r b^n \cdot \nabla b^{n+1} + f \tag{5.138}$$

e $p^{n+1} = p_*^{n+1} - \frac{r}{2} b^{n+1} \cdot b^{n+1}$ é a pressão aproximada de (1.1).

Logo, de (5.138) deduzimos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} -(\mu+\chi)\Delta u^{n+s} + \nabla p_*^{n+s} &= -u_t^{n+s} - u^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n+s} + \chi \operatorname{rot} w^{n-1+s} \\ &\quad + r b^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n+s} + f, \\ -(\mu+\chi)\Delta u^n + \nabla p_*^n &= -u_t^n - u^{n-1} \cdot \nabla u^n + \chi \operatorname{rot} w^{n-1} + r b^{n-1} \cdot \nabla b^n + f. \end{aligned}$$

Denotemos

$$p_*^{n,s} = p_*^{n+s} - p_*^n \quad \text{e} \quad p^{n,s} = p^{n+s} - p^n, \quad \forall\, n,\ s \geq 1.$$

Então, subtraindo as duas últimas identidades, tem-se que $p_*^{n,s}$ satisfaz

$$\begin{aligned} -(\mu+\chi)\Delta u^{n,s} + \nabla p_*^{n,s} &= -u_t^{n,s} - u^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n,s} - u^{n-1,s} \cdot \nabla u^n + \chi \operatorname{rot} w^{n-1,s} \\ &\quad + r b^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n,s} + r b^{n-1,s} \cdot \nabla b^n \end{aligned} \tag{5.139}$$

com $u^{n,s}$, $w^{n,s}$ e $b^{n,s}$ definidas como anteriormente.

Então, os resultados de Amrouche e Girault [3], implicam

$$\begin{aligned} \|p_*^{n,s}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} &\leq \|u_t^{n,s}\| + \|u^{n-1+s} \cdot \nabla u^{n,s}\| + \|u^{n-1,s} \cdot \nabla u^n\| + \chi \|\operatorname{rot} w^{n-1,s}\| \\ &\quad + r\|b^{n-1+s} \cdot \nabla b^{n,s}\| + r\|b^{n-1,s} \cdot \nabla b^n\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|p_*^{n,s}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} &\leq c\|u_t^{n,s}\| + c\|u^{n-1+s}\|_{L^4}\|\nabla u^{n,s}\|_{L^4} + c\|u^{n-1,s}\|_{L^6}\|\nabla u^n\|_{L^3} \\ &\quad + c\|\nabla w^{n-1,s}\| + c\|b^{n-1+s}\|_{L^4}\|\nabla b^{n,s}\|_{L^4} + c\|b^{n-1,s}\|_{L^6}\|\nabla b^n\|_{L^3} \\ &\leq c\|u_t^{n,s}\| + c\|\nabla u^{n-1+s}\|\|Au^{n,s}\| + c\|\nabla u^{n-1,s}\|\|\nabla u^n\|^{1/2}\|Au^n\|^{1/2} \\ &\quad + c\|\nabla w^{n-1,s}\| + c\|\nabla b^{n-1+s}\|\|Ab^{n,s}\| + c\|\nabla b^{n-1,s}\|\|\nabla b^n\|^{1/2}\|Ab^n\|^{1/2}, \end{aligned}$$

onde $c > 0$ independe de n e s. Assim,

$$\begin{aligned} &\|p_*^{n,s}\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \\ &\leq c\|u_t^{n,s}\|^2 + c\|Au^{n,s}\|^2 + c\|\nabla u^{n-1,s}\|^2\|Au^n\| + c\|\nabla w^{n-1,s}\|^2 \\ &\quad + c\|Ab^{n,s}\|^2 + c\|\nabla b^{n-1,s}\|^2\|Ab^n\| \\ &\leq c\|u_t^{n,s}\|^2 + c(\|Au^{n,s}\|^2 + \|Ab^{n,s}\|^2) \\ &\quad + c(\|\nabla u^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla w^{n-1,s}\|^2 + \|\nabla b^{n-1,s}\|^2)(\|Au^n\| + \|Ab^n\| + 1). \end{aligned} \tag{5.140}$$

Como, $p^{n+1} = p_*^{n+1} - \frac{r}{2} b^{n+1} \cdot b^{n+1}$, então

$$p^{n+s} = p_*^{n+s} - \frac{r}{2} b^{n+s} \cdot b^{n+s} \quad \text{e} \quad p^n = p_*^n - \frac{r}{2} b^n \cdot b^n,$$

assim, $p^{n,s}$ satisfaz a seguinte identidade

$$p^{n,s} = p_*^{n,s} - \frac{r}{2} b^{n,s} \cdot b^{n+s} - \frac{r}{2} b^n \cdot b^{n,s}.$$

A seguir, levando em conta (5.136), as imersões $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
||p^{n,s}||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} &\leq c||p_*^{n,s}||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c||\nabla(b^{n,s} \cdot b^{n+s})||^2 + c||\nabla(b^n \cdot b^{n,s})||^2 \\
&\leq c||p_*^{n,s}||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c||b^{n,s} \cdot (\nabla b^{n+s})^t||^2 + c||b^{n+s} \cdot (\nabla b^{n,s})^t||^2 \\
&\quad + c||b^n \cdot (\nabla b^{n,s})^t||^2 + c||b^{n,s} \cdot (\nabla b^n)^t||^2 \\
&\leq c||p_*^{n,s}||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c||b^{n,s}||^2_{L^\infty} ||\nabla b^{n+s}||^2 + c||b^{n+s}||^2_{L^4} ||\nabla b^{n,s}||^2_{L^4} \\
&\quad + c||b^n||^2_{L^4} ||\nabla b^{n,s}||^2_{L^4} + c||b^{n,s}||^2_{L^\infty} ||\nabla b^n||^2 \\
&\leq c||p_*^{n,s}||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c||Ab^{n,s}||^2 ||\nabla b^{n+s}||^2 + c||\nabla b^n||^2 ||Ab^{n,s}||^2
\end{aligned}$$

onde $c > 0$ independe de n e s. Logo, observando (5.35), vem

$$||p^{n,s}||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \leq c||p_*^{n,s}||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c||Ab^{n,s}||^2. \tag{5.141}$$

Portanto, de (5.140) e (5.141), resulta

$$||p_*^{n,s}(\tau)||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \leq c||u_t^{n,s}(\tau)||^2 + c(||Au^{n,s}(\tau)||^2 + ||Ab^{n,s}(\tau)||^2) + c\phi_{n-1,s}(\tau)\psi_n(\tau) \tag{5.142}$$

$$||p^{n,s}(\tau)||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \leq c||u_t^{n,s}(\tau)||^2 + c(||Au^{n,s}(\tau)||^2 + ||Ab^{n,s}(\tau)||^2) + c\phi_{n-1,s}(\tau)\psi_n(\tau) \tag{5.143}$$

onde

$$\begin{aligned}
\phi_{n,s}(t) &= ||\nabla u^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla w^{n,s}(t)||^2 + ||\nabla b^{n,s}(t)||^2 \\
\psi_n(t) &= ||Au^n(t)|| + ||Ab^n(t)|| + 1.
\end{aligned}$$

Agora, tendo em conta (5.100) e (5.103), integramos (5.142) de 0 a t, obtendo

$$\begin{aligned}
\int_0^t ||p_*^{n,s}(\tau)||^2_{H^1(\Omega)/I\!R} d\tau &\leq cM_{12}\left[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\right]^{1/2} + cM_{10}\left[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\right]^{1/2} \\
&\quad + c\int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau)\psi_n(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{5.144}$$

De (5.35), temos que $\{\psi_n\}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T)$, então aplicando a desigualdade de Hölder e observando (5.98), temos

$$\begin{aligned} c\int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau)\psi_n(\tau)d\tau &\leq c\Big(\int_0^t \phi_{n-1,s}^2(\tau)d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t \psi_n^2(\tau)d\tau\Big)^{1/2} \\ &\leq c\Big(\int_0^t \phi_{n-1,s}^2(\tau)d\tau\Big)^{1/2} \\ &\leq c\Big(\int_0^t M_9^2\frac{(M_8\tau)^{n-2}}{(n-2)!}d\tau\Big)^{1/2} \leq M_{13}\Big(\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

levando isto em (5.144), concluimos

$$\int_0^t \|p_*^{n,s}(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R}d\tau \leq M_{14}\Big[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2}. \tag{5.145}$$

Analogamente, de (5.143), tem-se

$$\int_0^t \|p^{n,s}(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R}d\tau \leq M_{15}\Big[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]^{1/2}. \tag{5.146}$$

Assim, do Corolário 5.1 junto com (5.145) e (5.146), deduzimos que $\{p_*^n\}$, $\{p^n\}$ são sequências de Cauchy no espaço de Banach $L^2(0,T;H^1(\Omega)/I\!R)$. Portanto, existem p_* e p em $L^2(0,T;H^1(\Omega)/I\!R)$ tais que

$$p_*^n \longrightarrow p_* \ \text{ e } \ p^n \longrightarrow p \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;H^1(\Omega)/I\!R) \ \text{ e}$$

$$u_t - (\mu+\chi)\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p_* = \chi \mathrm{rot}\, w + rb\cdot\nabla b + f \tag{5.147}$$

onde (u,w,b) é dada pelo Teorema 5.5. Somente falta mostrar que $p = p_* - \frac{r}{2}b\cdot b$.

De fato, como $p^n = p_*^n - \frac{r}{2}b^n\cdot b^n$, então usando (5.136), temos

$$\begin{aligned} \|p^n - (p_* - \frac{r}{2}b\cdot b)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} &= \|(p_*^n - \frac{r}{2}b^n\cdot b^n) - p_* + \frac{r}{2}b\cdot b\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \\ &\leq c\|p_*^n - p_*\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c\|b\cdot b - b^n\cdot b^n\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \\ &\leq c\|p_*^n - p_*\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c\|\nabla((b^n+b)\cdot(b^n-b))\|^2 \\ &\leq c\|p_*^n - p_*\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \\ &\quad + c\|b^n+b\|^2_{L^4}\|\nabla(b^n-b)\|^2_{L^4} + c\|b^n-b\|^2_{L^\infty}\|\nabla(b^n+b)\|^2 \\ &\leq c\|p_*^n - p_*\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c\|\nabla(b^n+b)\|^2\|A(b^n-b)\|^2 \end{aligned}$$

logo, observando (5.35), vem

$$\|p^n - (p_* - \frac{r}{2}b\cdot b)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \leq c\|p_*^n - p_*\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} + c\|A(b^n-b)\|^2. \tag{5.148}$$

Portanto, desde que $p_*^n \longrightarrow p_*$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega)/I\!R)$ e $b^n \longrightarrow b$ em $L^2(0,T;D(A))$, concluimos que $\{p^n\}$ converge a $p_* - \dfrac{r}{2}b.b$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega)/I\!R)$ e pela unicidade do limite, resulta

$$p = p_* - \frac{r}{2} b \cdot b$$

e assim, de (5.147) temos que (u, w, b, p) é a solução do problema (1.1)-(1.2) e (5.4).

Finalmente, tomando o limite quando $s \longrightarrow \infty$ em (5.146), obtemos

$$\int_0^t \|p^n(\tau) - p(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} d\tau \leq M_{15}\left[\frac{(M_8T)^{n-1}}{(n-1)!}\right]^{1/2}.$$

Prova da Proposição 5.4

Observando (5.108) e (5.111), integramos (5.143) de 0 a t, obtendo

$$\int_0^t \|p^{n,s}(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} d\tau \leq cM_{20}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} + cM_{17}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} + c\int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau)\psi_n(\tau)d\tau$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{n,s}(t) &= \|\nabla u^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla w^{n,s}(t)\|^2 + \|\nabla b^{n,s}(t)\|^2 \\ \psi_n(t) &= \|Au^n(t)\| + \|Ab^n(t)\| + 1. \end{aligned}$$

De (5.56), temos que $\{\psi_n\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T)$, então

$$\int_0^t \|p^{n,s}(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} d\tau \leq cM_{20}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} + cM_{17}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} + c\int_0^t \phi_{n-1,s}(\tau)d\tau.$$

Logo, de (5.109) e da definição de $\phi_{n,s}$, tem-se

$$\int_0^t \|p^{n,s}(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} d\tau \leq cM_{20}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} + cM_{17}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} + cM_{18}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!}$$

de onde concluimos

$$\int_0^t \|p^{n,s}(\tau)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} d\tau \leq M_{24}\frac{(M_{16}T)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{5.149}$$

Agora, de (5.148), observando (5.107), (5.121), (5.125), o fato que $\{\psi_n\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T)$ e a definição de $\phi_{n,s}(t)$, obtemos

$$\|p_*^{n,s}(t)\|^2_{H^1(\Omega)/I\!R} \leq cM_{21}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!} + cM_{22}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!} + cM_9\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}.$$

Logo,

$$\|p_*^{n,s}(t)\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq M_{25}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}. \tag{5.150}$$

Analogamente, de (5.143) tem-se

$$\|p^{n,s}(t)\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq M_{26}\frac{(M_{16}T)^{n-2}}{(n-2)!}. \tag{5.151}$$

Logo, de (5.150), (5.151) e Corolário 5.1, concluimos que $\{p_*^n\}$, $\{p^n\}$ são sequências de Cauchy no espaço de Banach $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$.

Portanto, pela unicidade do limite, temos

$$p_*^n \longrightarrow p_* \text{ e } p^n \longrightarrow p \text{ forte em } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R}),$$

com $p = p_* - \dfrac{r}{2}b\cdot b$, onde p e p_* são dadas pela Proposição 5.3.

Além disso, de (5.147) temos que (u,w,b,p) é solução de (1.1)-(1.2) e (5.4), onde (u,w,b) é dada pelo Teorema 5.6.

Finalmente, as estimativas de erro da proposição são obtidas tomando o limite quando $s \longrightarrow \infty$ nas desigualdades (5.149) e (5.151) respectivamente.

Observação 5.7 *Da Observação 5.4, as estimativas de erro para as soluções aproximadas* $\{(u^n,w^n,b^n,p^n)\}$ *do problema (1.1)-(1.3), são dadas pelo Teorema 5.5 e Proposição 5.3. E melhores estimativas de erro para as soluções aproximadas* $\{(u^n,w^n,b^n,p^n)\}$ *do problema (1.1)-(1.3), são fornecidas pelo Teorema 5.6 e Proposição 5.4.*

Capítulo 6

Comentarios finais, perspectivas futuras

6.1 Comentarios finais

1. Os resultados do Capítulo 2 foi publicado em 1996, na Revista de Matemáticas Aplicadas , Univ. de Chile, Vol. 17, pag. 75-90, com o título: *On the uniqueness and regularity of the weak solution of Magneto-micropolar fluid equations.*

2. Fazendo uma análise mais geral do Capítulo 2, obteve-se o trabalho: *On the existence of fractional time-derivative of some evolution partial differential equations*, publicado como Relatorio de Pesquisa N$^{\underline{o}}$ 82, IMECC-UNICAMP, 1997.

3. A primeira Seção do Capítulo 3, foi apresentado em 1995 no 4$^{\underline{o}}$ Congreso Franco-Latinoamericano de Matemáticas Aplicadas (Métodos Numéricos en Mecánica), Concepción, Chile, com o título: *Magneto Micropolar fluid motion: Global existence of strong solutions.* O resumo foi publicado no Anal do congresso e o trabalho completo foi publicado como Relatorio de Pesquisa N$^{\underline{o}}$ 43, IMECC-UNICAMP, 1995.

4. O resultado da Seção 3 do Capítulo 3, foi publicado em 1997 como Relatorio de Pesquisa N$^{\underline{o}}$ 89, IMECC-UNICAMP, 1997, com o título: *An error estimates uniform in time for espectral Galerkin approximations of the magneto-micropolar fluid equations.*

5. Do Capítulo 4, os resultados obtidos na Seção 2 (existência de soluções fracas), foi apresentado no V workshop on partial differential equations: Theory, computation and applications, IMPA, RJ, 1997, com o título: *On the initial value problem for the equations of magneto-micropolar fluid in a time dependent domain*, tem sido

aceito para publicação na Revista Matemática Contemporanea ("proceedings"do V Workshop em Equacoes Diferenciais Parciais).

6. Durante o desemvolvimento do Capítulo 5, foram realizados os seguintes trabalhos:

   - Relatorio de Pesquisa Nº 23, IMECC-UNICAMP, 1997, com o título: *On the convergence rate for an iterational method for the equations of nonhomogeneous incompressible fluids*
   - Relatorio de Pesquisa Nº 42, IMECC-UNICAMP, 1997, com o título: *The equations of a viscous asymmetric fluids: An iterational approach.*

   Também, usando o método iterativo aplicado no Capítulo 5, está sendo desemvolvido um trabalho para as equações de fluido asimétrico não homogêneo.

6.2 Pesquisas futuras

1. Estudar a existência de soluções periódicas das equações de um fluido asimétrico.
2. Considerando as equações de fluidos magneto-micropolares definidos sobre domínios "thin" tri-dimensionais e com condições de contorno periódicas, pretemdemos estudar a existência de um atrator global e a regularidade de soluções.
3. Aplicar o processo de homogenização para as equações de um fluido assimétrico em um meio poroso.
4. Usando o método de aproximação de elementos finitos para as equações de um fluido magneto-micropolar, estudar a regularidade de soluções e a ordem das estimativas de erro para a discretização espacial. Também, queremos fazer um análise sobre a estabilidade de soluções e das estimativas de erro uniformes no tempo.
5. Analisar as estimativas de erro dos métodos de projeção (ou métodos de passo fracional) para as equações de um fluido magneto-micropolar.
6. Implementação computacional de métodos de projeção e do método de elementos finitos para as equações de fluidos magneto-micropolares.

Bibliografia

[1] Adams Robert A., *Sobolev Spaces*. Academic Press Publisher.

[2] Ahmadi G. and M. Shahinpoor M., *Universal stability of magneto-micropolar fluid motions*, Int. J. Enging Sci., 12 (1974), 657-663.

[3] Amrouche C. and Girault V., *On the existence and regularity of the solutions of Stokes problem in arbitrary dimension*, Proc. Japan Acad., 67, Ser A. (1991), 171-175.

[4] Brezis Haïm, *Analyse Fonctionnelle*, ©Masson, Paris, 1983.

[5] Cattabriga L., *Su um problema al contorno relativo al sistema di equazioni di stokes*, Rend. Mat. Sem. Univ. Podova 31 (1961), 308-340.

[6] Conca C. and Rojas-Medar M.A., *The initial value problem for the Boussinesq equations in a time-dependent domain*, technical repport, Universidad de Chile, (1993).

[7] Condiff D.W. and Dalher J.S., *Fluid mechanics aspects of antisymetric stress*, Phys. Fluid 7 (1964), 842-854.

[8] Dal Passo R. and Ughi M., *Problème de Dirichlet pour une classe d'equations paraboliques non lineares dans des ouverts non cylindriques*, Cras-Paris, Série I, T-308 (1989), 555-558.

[9] Duff G.D., *Derivative estimates for the Navier-Stokes equations in a three dimensional region*, Acta Math. 164 (1990), 145-210.

[10] Eringen A.C., *Simple microfluids*, Int. J. Enging. Sci., 2 (1964), 205-217.

[11] Eringen A.C., *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech. 16 (1966), 1-8.

[12] Fujita H. and Kato T., *On the Navier-Stokes initial value problem I*, Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269-315.

[13] Fujita H. and Sauer N., *Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equation in a noncylindrical domain*, Transactions Amer. Math. Society 75 (1969), 465-468.

[14] Galdi G.P. and Rionero S., *A note on the existence and uniqueness of solutions of the micropolar fluid equations*, Int. J. Enging. Sci., 15 (1977), 105-108.

[15] Heywood J. G., *The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana University Math. J., Vol. 29, n$^{\underline{o}}$ 5 (1980), 639-681.

[16] Heywood J. G. and Rannacher R., *Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem I: regularity of solutions and second order error estimates for spatial discretization*, SIAM J. Num. Anal. 19 (1982), 275-311.

[17] Ladyzhenskaya O.A., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translation of Mathematical Monographs Vol. 23 (1968), Revised edition 1988.

[18] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralćeva N.N., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, ©Gordon and Breach, New York, Second revised edition, 1969.

[19] Ladyzhenskaya O.A. and Solonnikov V. A., *Unique solvability of an initial and boundary value problem for viscous incompressible non-homogeneous fluids*, J.Soviet Math. Vol. 9, n$^{\underline{o}}$ 5 (1978), 697-749.

[20] Lions J. L., *Quelques résultats d'existence dans les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Bull Soc. Math. Fr., 87 (1959), 245-273.

[21] Lions J. L., *Une remarque sur les problèmes d'evolution non linéaires dans des domains non cylindriques*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 9 (1964), 11-18.

[22] Lions J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, ©Dunod, Paris, 1969.

[23] Lions J. L. and Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, ©Dunod, Paris, Vol. 1, 1968.

[24] Lukaszewicz G., *On nonstationary flows of asymmetric fluids*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Math., n$^{\underline{o}}$ 106, vol XII (1988), 83-97.

[25] Lukaszewicz G., *On the existence, uniqueness and asymptotic properties of solutions of flows of asymmetric fluids*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Math., n$^{\underline{o}}$ 107, vol XIII (1989), 105-120.

[26] Milla-Miranda M. and Medeiros L.A., *Contrôlabilité exacte de l'equation de Schrödinger dans des domaines non cylindriques*, C.R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 685-689.

[27] Milla-Miranda M. and Medeiros L.A., *Exact controllability for Schöndringer equations in non cylindrical domains*, 41º Seminário Brasileiro de Análise (Minicurso), (1995).

[28] Milla-Miranda M. and Límaco J., *The Navier-Stokes equation in noncylindrical domains*, Atas do 41º Seminário Brasileiro de Análise, (1995).

[29] Morimoto H., *On the existence of periodic weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with periodically moving boundaries*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 18 (1971), 499-524.

[30] Padula M. and Russo R., *A uniqueness theorem for micropolar fluid motions in unbounded regions*, Bolletino U.M.I. (5) 13-A (1976), 660-666.

[31] Rautmann R., *On the convergence rate of nonstationary Navier-Stokes approximations*, Approximation Methods for Navier-Stokes Problems, Proceeding Lectures Notes in Mathematics 771 (1979), 425-449.

[32] Rojas-Medar M. A., *Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solutions*, Mathematische Nachrichten, 188 (1997), 301-319.

[33] Rojas-Medar M.A. and Boldrini J.L., *Magneto-micropolar fluid motion: Existence of weak solutions*, Relatorio de pesquisa nº 42/95, IMECC-UNICAMP (1995). Submited.

[34] Rojas-Medar M.A. and Beltran-Barrios R., *The initial value problem for the equations of magnetohydrodynamic type in non-cylindrical domains*, Revista de Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, 8(1), (1995), 229-251.

[35] Salvi R., *On the existence of weak solution of a non-linear mixed problem for the Navier-Stokes equations in a time dependent domain*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA, Math. 32 (1985), 213-221.

[36] Shinbrot M., *Fractional derivatives of solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Analysis, 40 (1971), 139-154.

[37] Shinbrot M., *Lectures on Fluid Mechanics*, ©Gordon and Breach, New york, 1973.

[38] Simon J., *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure*, Siam J. Math. Anal. Vol. 21, nº5 (1990), 1093-1117.

[39] Simon J., *Sobolev, Besov and Nikolskii fractional spaces: imbeddings and comparisons for vector valued spaces on an interval*, Annali Mat. Pura Appl. 157 (1990), 117-148.

[40] Temam R., *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam, Rev. Edition, 1979.

[41] Zarubin A.G., *On the iterational method for the approximate solution of an initial and boundary-value problem for the heat-convection equations*, Comput. Maths Math. Phys., Vol. 33, nº 8 (1993), 1077-1085.

[42] Zarubin A.G., *An initial boundary-value problem for the non-stationary heat-convection equations*, Comput. Maths Math. Phys., Vol. 35, nº 5 (1995), 575-579.

[43] Zhang, K., *On Shinbrot's conjecture for the Navier-Stokes equations*, Proc. R. Soc. Lond. A, 440 (1993), 537-540.

[44] Zygmund, A., *Trigonometric series*, 2nd. Ed., Vol. 1, Cambridge University Press, 1959.