Medidas de Não Compacidade e Teoria de Interpolação

Eduardo Brandani da Silva

"**MEDIDAS DE NÃO-COMPACIDADE E TEORIA DE INTERPOLAÇÃO**"

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo **Sr. Eduardo Brandani da Silva** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 11 de setembro de 1992.

Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática.**

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dicesar Lass Fernandez, por todo seu apoio e principalmente, pela paciência que teve comigo em todos os momentos.

Aos meus pais e a minha avó Amélia, que através da ajuda e do carinho que me proporcionaram, permitiram que eu chegasse até aqui.

A todos os meus professores, que direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho.

Conteúdo

Introdução iii

1 Interpolação com Parâmetro Funcional 1
1.1 Parâmetros Funcionais 1
1.2 Interpolação de Espaços $\ell_s^q(G_n)$ 8
1.3 O Método de Interpolação de Gustavsson-Peetre 13

2 Teoremas de Compacidade 16
2.1 Teoremas de Compacidade de Lions-Peetre 16
2.2 O Teorema de Compacidade de Hayakawa 17

3 Medidas de Não-Compacidade 22
3.1 Medidas de Não Compacidade 22
3.2 Propriedades 23

4 Teoremas do Tipo Lions-Peetre 27
4.1 Resultados Principais 27
4.2 Consequências dos Teoremas 29

5 Teorema do Tipo Persson I 31
5.1 A Hipótese de Aproximação 31
5.2 Resultados Principais 32
5.3 Consequências 34

6 Teorema do Tipo Persson II 36
6.1 A Hipótese de Aproximação 36
6.2 Resultados Principais 36
6.3 Consequências 40

7 Teorema do Tipo Cobos-Edmunds-Potter 41
7.1 Preliminares 41
7.2 Resultados Principais 43

7.3 Consequências 46

8 Teorema do Tipo Cobos-Fernandez **47**

8.1 Preliminares 47

8.2 Resultados Principais 48

8.3 Consequências 53

INTRODUÇÃO

O primeiro teorema de interpolação de operadores, foi obtido por M. Riesz em 1926, na forma de uma desigualdade para formas bilineares. Uma versão mais completa desse teorema, para operadores, foi dada por G. O. Thorin, resultando no hoje clássico Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin. Um passo essencial depois, foi o teorema de interpolação de J. Marcinkiewicz (1939), cuja demonstração foi publicada por A. Zygmund em 1956. Varias generalizações foram obtidas nesse período, principalmente por E. M. Stein e G. Weiss, embora, todas elas eram a respeitos de espaços L^p ou similares. O desenvolvimento de teoremas de interpolação para pares de espaços de Banach e Hilbert abstratos começou em 1958 em vários países. As primeiras publicações são devidas a J. L. Lions (1958-1960), E. Gagliardo (1959-1960), A. P. Calderon (1960) e J. Peetre (1960), sendo que os trabalhos de Peetre estão entre os que mais contribuiram para a moderna teoria de interpolação. Assim vários métodos foram criados para se obter teoremas de interpolação e muitos tendo profundas interrelacões.

Resumidamente temos a seguinte colocação: dado um par de Banach $\{E_0, E_1\}$, um espaço E é um espaço intermediário em relação a $\{E_0, E_1\}$ se $E_0 \cap E_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow E_0 + E_1$ onde $\hookrightarrow$ denota inclusão contínua. Sejam $\{E_0, E_1\}$ e $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e E e F espaços intermediários em relação a $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ respectivamente. Se E e F têm a propriedade que, se T é um operador linear, tal que $T: E_0 \to F_0$, $T: E_1 \to F_1$, então $T: E \to F$, dizemos que E e F são espaços de interpolação em relação aos par $\{E_0, E_1\}$ e $\{F_0, F_1\}$ respectivamente. Assim um método de interpolação é um functor $\mathcal{F}$, que a cada par de Banach $\{E_0, E_1\}$, associa um espaço $E = \mathcal{F}(E_0, E_1)$ que é um espaço intermediário de $\{E_0, E_1\}$.

Os métodos de interpolação mais importantes são os métodos real e complexo. O método complexo foi desenvolvido por A. P. Calderon e provém de trabalhos de G. O. Thorin. O método real das médias foi introduzido por J. Peetre e J. L. Lions [18], e posteriormente foi desenvolvido por J. Peetre.
O método ρ de interpolação utilizado neste trabalho, é uma generalização do caso $\rho(t) = t^\theta$, considerado por J. Peetre.

Uma questão natural na teoria de interpolação, é a seguinte: propriedades válidas em um ou em ambos espaços extremos continuam válidas para espaços interpolados? Entre essas propriedades está a compacidade de operadores. O problema pode ser colocado do seguinte modo: dados pares de Banach $\{E_0, E_1\}$ e $\{F_0, F_1\}$, um operador $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ e $\mathcal{F}(E_0, E_1)$, $\mathcal{F}(F_0, F_1)$, onde $\mathcal{F}$ é um functor de interpolação: que condições devem ser postas sobre os espaços extremos para que $T: \mathcal{F}(E_0, E_1) \to \mathcal{F}(F_0, F_1)$ seja compacto. Uma condição mínima é que T seja compacto de E_0 em F_0 ou de E_1 em F_1, mas somente isso não se mostrou suficiente. Vários resultados apareceram dando respostas parciais a esta questão. Os primeiros foram os Teoremas de Lions-Peetre ([18] e [19]), em que num caso se tomava $E_0 = E_1$ e em outro $F_0 = F_1$. Pouco depois apareceu o resultado obtido por Persson [21], em que os espaços eram todos distintos, mas sendo necessária um hipótese de aproximação sobre o par $\{F_0, F_1\}$. Devemos aqui observar que os Teoremas de Lion-Peetre e Persson já apareciam implicitamente em um trabalho de M. A. Kranoselski sobre espaços L^p e cuja generalização para espaços de Banach gerais foi direta. Em 1969, aparece o teorema de Hayakawa [14], que não pede hipótese de aproximação sobre os espaços, mas pede que $T : E_k \to F_k$ seja compacto (k = 0,1). Posteriormente, em trabalhos como [6], [7] e [9] foram obtidos novos resultados, sem hipóteses de aproximação, mas que pedem a inclusão de espaços como $F_1 \hookrightarrow F_0$ ou $E_0 \hookrightarrow E_1$.

Na década de trinta, K. Kuratowsky definiu a medida de não compacidade de subconjuntos limitados em espaços normados. Posteriormente se definiu a medida de não compacidade de operadores. Essas definições se mostraram extremamente úteis no estudo qualitativo de equações diferenciais em espaços de Banach. Também essas medidas se tornaram úteis para o estudo de operadores não compactos em espaços interpolados.

O objetivo deste trabalho é estudar como se relaciona a medida de não-compacidade de um operador, com espaços de interpolação do tipo ρ, que pode ser posto do seguinte modo: obter estimativas para a medida de não-compacidade de operadores nos espaços interpolados, conhecendo-se a medida nos espaços extremos. Ou seja, dados pares de Banach $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ e um operador $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$, sendo $\beta(T)$ a medida de não-compacidade de T, queremos obter estimativas do tipo

$$\beta(T_{E,F}) \leq C\, \beta(T_0)\, \rho(\frac{\beta(T_1)}{\beta(T_0)})$$

onde $E = \mathcal{F}(E_0, E_1)$, $F = \mathcal{F}(F_0, F_1)$ são espaços interpolados, e $\mathcal{F}$ é um functor do tipo ρ.

Os dois primeiros Capítulos deste trabalho se ocupam de teoria de interpolação e teoremas de compacidade. No primeiro Capítulo apresentamos o método ρ de interpolação. Definimos parâmetros funcionais, os métodos J_ρ e K_ρ de interpolação e functores de tipo ρ. Temos também os principais resultados, como a equivalência dos métodos J e K, o teorema de dualidade, o teorema de reiteração e outras propriedades. Apresentamos uma variante do método de interpolação de Gustavsson-Peetre, introduzida por J. B. Garcia e D. L. Fernandez, que é um exemplo de functor do tipo ρ. Além disso, definimos os espaços ℓ^q_ρ e demonstramos que o interpolado entre dois desses espaços, é um espaço do mesmo tipo. No segundo Capítulo apresentamos os teoremas de compacidade que são utilizados neste trabalhos. Temos a demonstração dos dois teoremas de compacidade de Lions-Peetre e do teorema de Hayakawa. As demonstrações estão generalizadas para o método ρ.

O Capítulo 3 trata de medidas de não compacidade de operadores. Primeiro definimos as medidas ψ e $\tilde{\psi}$ para subconjuntos limitados de um espaço de Banach E. A definição das medidadas β e $\tilde{\beta}$ para operadores provem do conceito de k-contração, também aqui definido. Concluimos o Capítulo com a demonstração de várias propriedades, tanto para a medida de não-compacidade de conjuntos limitados, como para a medida de não-compacidade de operadores. Isso se mostrou necessário, pois vários livros e artigos trazem as propriedades, mas não as suas demonstrações.

Nos Capítulos de 4 à 8 estão os resultados obtidos neste trabalho, que são do tipo

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\ \tilde{\beta}(T_{E_1,F_1})\ \frac{\overline{\rho}(1/\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}))}{1/\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0})}$$

A fase inicial do trabalho, foi generalizar para o método ρ os teoremas contidos no artigo de M. F. Teixeira e D. E. Edmunds [21], que são para o método θ. Tendo sido feita essas generalizações, tínhamos a seguinte situação: dados pares de Banach $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ e um operador $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$, obtivemos teoremas para os casos (i) $E_0 = E_1$, (ii) $F_0 = F_1$ e (iii) $E_0 \neq E_1$, $F_0 \neq F_1$ com uma hipótese de aproximação sobre $\{F_0, F_1\}$. O próximo passo no trabalho foi variar as condições em (iii) e obter novos resultados. Inicialmente estávamos obtendo teoremas que somente davam uma estimativa da medida de não compacidade do operador no espaço interpolado, mas através de uma pequena mudança na forma dos resultados, pudemos obter como corolário, teoremas de compacidade, como por exemplo o Teorema de Persson. Chamamos a atenção para esse fato, porque isso permite uma demonstração para esses teoremas, utilizando técnicas diferentes das usadas nas demonstrações já conhecidas.

No Capítulo 4 estão os dois primeiros resultados deste trabalho, que chamamos de teoremas do tipo Lions-Peetre. A demonstração desses teoremas seguem, com poucas modificações, as que estão em [21]. Esses teoremas dão como corolários os teoremas de Lions-Peetre.

No Capítulo 5 o resultado também provém de [21], mas com mudanças mais profundas. No Lema 1 deste Capítulo temos a idéia que foi fundamental para obter os outros teoremas: o fato de que é necessário achar um operador P tal que TP ou PT, dependendo do caso, "aproxima" T, ou seja $\|T - TP\| \leq k$, onde k é uma constante que depende da medida de não compacidade de T e que é diferente para cada caso. Nesse Capítulo, supomos que o par de "chegada" $\{F_0, F_1\}$ satisfaz uma hipótese de aproximação, chamada H_1 e essa hipótese nos forcesse o operador P. Descrevendo de modo resumido, a hipótese pede a existência de um operador $P : F_k \to F_k$ $(k = 0, 1)$, tal que no caso $k = 0$ o operador P é compacto. Utilizando essa hipótese, no Lema 5.2.1 mostramos que existe um operador P, nas condições de H_1 tal que $\|T - PT\| \leq C$, onde C é função da medida de não compacidade de T. Na realidade, a hipótese de aproximação H_1 é equivalente a hipótese do teorema de compacidade de Persson. Temos como corolário o teorema de compacidade de Persson. Ainda nesse Capítulo damos um exemplo de espaços que satisfazem a hipótese H_1.

Após o resultado do Capítulo 5, passamos a trabalhar no sentido de obter um resultado do mesmo tipo, mas com a hipótese de aproximação sobre os espaços de "partida" $\{E_0, E_1\}$. Assim no Capítulo 6 temos a hipótese de aproximação H_2. Neste caso, pela hipótese, temos um operador P tal que $P : E_k \to E_k$ $(k = 0, 1)$, mas agora P é compacto para $k = 0, 1$. Utilizando H_2 demonstramos o Lema 6.2.1, cujo resultado é semelhante ao do Lema 1, mas que tem demonstração muito diferente. Apesar da hipótese H_2 ser diferente da H_1 a proposição 5.1.2 também satisfaz H_2. O fato principal desse capítulo é que temos como corolário do teorema, um teorema de compacidade semelhante ao teorema de Persson, mas sendo um novo teorema de compacidade, pois a hipótese de aproximação é sobre os espaços de partida.

O próximo passo após os teoremas dos Capítulos 5 e 6 foi obter resultados sem hipóteses de aproximação. A sugestão de como proceder foi dada através dos artigos [6] e [7], ou seja utilizar os espaços ℓ_p^q para obter um operador P, como ocorreu anteriormente. Além disso o teorema do Capítulo 7 pede que $F_1 \subset F_0$. Devido a algumas dificuldades, o resultado do teorema difere um pouco da forma geral dos outros. Temos como corolário o teorema de compacidade de Cobos-Edmunds-Potter.

No Capítulo 8, de forma semelhante ao 7, também necessitamos da inclusão de espaços, neste caso $E_0 \hookrightarrow E_1$ e utilizamos como auxiliar os espaços ℓ_p^q, mas agora com uma norma diferente da utilizada no Capítulo 7. Temos como corolário o teorema de compacidade de Cobos-Fernandez.

Os teoremas dos Capítulos 6, 7 e 8 são novos, mesmo no caso $\rho(t) = t^\theta$.

Capítulo 1

Interpolação com Parâmetro Funcional

Neste primeiro capítulo definimos parâmetro funcional e algumas classes especiais de parâmetros funcionais. Também definimos os métodos J e K de interpolação com parâmetros funcionais e apresentamos os principais resultados, como o teorema de equivalência e o teorema de dualidade para esses métodos. Também apresentamos a demonstra ção do teorema de interpolação de espaços $\ell_\rho^p(E)$.

1.1 Parâmetros Funcionais

1.1.1 Functores de Interpolação. Dois espaços de Banach E_0, E_1 formam um *par de Banach* $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ se E_0 e E_1 estão continuamente imersos em um espaço topológico linear de Hausdorff $\mathcal{E}$. Então os conjuntos intersecção $E_0 \cap E_1$ e soma $E_0 + E_1$ estão bem definidos; e se demonstra que $E_0 \cap E_1$ e $E_0 + E_1$ tornam-se espaços de Banach quando munidos com as seguintes normas

$$\| x \|_{E_0 \cap E_1} = \max\{ \|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1} \},$$

e

$$\| x \|_{E_0 + E_1} = \inf_{x = x_0 + x_1} \{ \|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} \},$$

respectivamente.

Um espaço de Banach E é um *espaço intermediário* em relação a um par de Banach $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ se

$$E_0 \cap E_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow E_0 + E_1.$$

(O simbolo $\hookrightarrow$ denota inclusão continua.)

Sejam $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ e $\mathbb{F} = (F_0, F_1)$ pares de Banach. Denotamos por $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ o conjúnto de todas as aplicações lineares de $E_0 + E_1$ para $F_0 + F_1$ tal que $T|_{E_k}$ é *limitada* de E_k para F_k, $k = 0, 1$.

Um *functor de interpolação* $\mathcal{F}$ é um functor que a cada par de Banach $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ associa um espaço intermediario $\mathcal{F}(E_0, E_1)$ entre E_0 and E_1, tal que temos

$$T|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} \in L(\mathcal{F}(E_0, E_1), \mathcal{F}(F_0, F_1))$$

para todo $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Os functores de interpolação que consideraremos dependem de parametros funcionais.

1.1.2. Parâmetros Funcionais. Chamamos de *parâmetro funcional* a uma função ρ, contínua e positiva em $\mathbb{R}_+$.

Uma função $\nu : [0, \infty] \to [0, \infty]$ é submultiplicativa se $\nu \not\equiv 0 \quad ; \nu \not\equiv \infty$ e

$$\nu(st) \leq \nu(s)\, \nu(t)$$

para todo $s, t > 0$.

Seja $\mathcal{P}$ a classe das funções $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty]$ que são contínuas e positivas em $(0, \infty)$ e tais que

$$\rho(s) \leq \max(1, s/t)\, \rho(t)$$

para todo $s, t > 0$. Para $\rho \in \mathcal{P}$ valem as seguintes propriedades

(i) $\rho(t)$ é não-decrescente

e

(ii) $\rho(t)/t$ é não-crescente

para $t > 0$.

Seja $\mathcal{P}^{+-}$ a classe dos parâmetros funcionais ρ tal que $\rho \in \mathcal{P}$ e

$$\overline{\rho}(t) = \sup_{s>0} \frac{\rho(st)}{\rho(s)} = o(\max(1, t))$$

Da definição temos que $\overline{\rho}$ é uma função submultiplicativa e que $\overline{\rho}(1) = 1$.

O parâmetro funcional $\rho_\theta(t) = t^\theta$, $0 \le \theta \le 1$, pertence a $\mathcal{P}$. Ele corresponde ao parâmetro usual θ. Além disso, $\rho_\theta \in \mathcal{P}^{+-}$ se $0 < \theta < 1$, mas $\rho_0, \rho_1 \notin \mathcal{P}^{+-}$.

Para controlar os parâmetros funcionais necessitamos dos índices de Boyd (ver Boyd [2], [3] e Maligranda [19]).

1.1.3. Os Índices de Boyd. Dado um parâmetro funcional $\rho \in \mathcal{P}$, os *Índices de Boyd* $\alpha_{\overline{\rho}}$ e $\beta_{\overline{\rho}}$ da função submultiplicativa $\overline{\rho}$ são definidos, respectivamente por

$$\alpha_{\overline{\rho}} = \sup_{1<t<\infty} \frac{\log \overline{\rho}(t)}{\log t}, \tag{1.1}$$

e

$$\beta_{\overline{\rho}} = \sup_{0<t<1} \frac{\log \overline{\rho}(t)}{\log t}. \tag{1.2}$$

Os índices $\alpha_{\overline{\rho}}$ e $\beta_{\overline{\rho}}$ são números reais com as seguintes propriedades

$$\alpha_{\overline{\rho}} > 0 \iff \int_1^\infty \overline{\rho}(t)\, \frac{dt}{t} < +\infty, \tag{1.3}$$

e

$$\beta_{\overline{\rho}} < 0 \iff \int_0^1 \overline{\rho}(t)\, \frac{dt}{t} < +\infty. \tag{1.4}$$

Para os parâmetros funcionais ρ_0 e ρ_1 mencionados acima, temos $\alpha_{\overline{\rho}_0} < 0$ e $\beta_{\overline{\rho}_1} > 0$, respectivamente. Para o parâmetro funcional $\rho_\theta(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, temos $\alpha_{\rho_\theta} = \beta_{\rho_\theta} = \theta$.

Pode-se demonstrar que para todo $\rho \in \mathcal{P}$, com $\beta_{\overline{\rho}} > 0$ ($\alpha_{\overline{\rho}} < 0$, respectivamente) existe um parâmetro funcional crescente (decrescente, respectivamnete) ρ^+ (ρ_-, respectivamnete) equivalente a ρ. Portanto pode-se considerar $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ como um parâmetro funcional crescente, e $\rho(t)/t$ como um parâmetro decrescente. além disso, $\overline{\rho}$ pode ser considerado não decrescente, e $\overline{\rho}(t)/t$ não-crescente. Consequentemente, se $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $0 < q \le \infty$, temos

$$\|\rho^{-1}(t) \ \min(1,t)\|_{L^q_*} < \infty.$$

1.1.4. Os espaços de Interpolação. Seja $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ um par de Banach. Os funcionais J e K de Peetre são definidos por

$$J(t,x) = J(t,x;\mathbb{E}) = \max\{\|x\|_{E_0},\ t\,\|x\|_{E_1}\}, \qquad x \in E_0 \cap E_1,$$

e

$$K(t,x) = K(t,x;\mathbb{E}) = \inf_{x=x_0+x_1} \{\|x_0\|_{E_0} + \ t\,\|x_1\|_{E_1}\},$$

respectivamente.

O espaço $(E_0, E_1)_{\rho,q,K}$, $\rho \in \mathcal{P}$ e $0 < q \leq +\infty$, consiste de todos os $x \in E_0 + E_1$ com norma finita

(1.5) $$\|x\|_{\rho,q;K} = \|(\ \rho(2^n)^{-1} K(2^n, x; \mathbb{E})\ )_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.$$

O espaço $(E_0, E_1)_{\rho,q;J}$, consiste de todos os $x \in E_0 + E_1$, que possuem uma representação

(1.6) $$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$$

com norma finita ($u_n \in E_0 \cap E_1$) e (u_n) convergindo em $E_0 + E_1$.

(1.7) $$\|x\|_{\rho,q;J} = \inf \|(\ \rho(2^n)^{-1} J(2^n, u_n; \mathbb{E})\ )_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações (1.6).

Para $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$, os espaços $(E_0, E_1)_{\rho,q;J}$ e $(E_0, E_1)_{\rho,q;K}$ são espaços intermediarios entre E_0 e E_1. Na demonstração desse fato os índices de Boyd são fundamentais: se $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$, então $\beta_{\overline{\rho}} > 0$ e $\alpha_{\overline{\zeta}} < 0$, onde $\zeta(t) = \rho(t)/t$ e consequentemente 1.3 e 1.4 valem. Assim, desde que $1 \leq \rho(t)\,\rho(1/t)$ e

$$K(t, x) \leq \min(1, t)\, \|x\|_{E_0\cap E_1},$$

obtemos

$$\|x\|_{\rho,q;K} \leq \|\overline{\rho}(2^{-n})\ \min(1, 2^n)\,\|_{\ell^q}\ \|x\|_{E_0\cap E_1}.$$

Por outro lado, desde que

$$\|x\|_{E_0+E_1} \leq \min(1, 1/t)\ J(t, x),$$

obtemos

$$\|x\|_{E_0+E_1} \leq \|\rho(2^n)\ \min(1, 2^{-n})\|_{\ell^q}\ \|x\|_{\rho,q;J},$$

para algum q com $0 < q < \infty$. As provas das inclusões contínuas $E_0 \cap E_1 \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\rho,q;J}$ e $(E_0, E_1)_{\rho,q;K} \hookrightarrow E_0 + E_1$ são imediatas.

1.1.5. Os teoremas de equivalência. Seja $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ um par de Banach. Para $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $0 < q \leq +\infty$, vale o teorema de Equivalência entre J-método e o K-método:

(1.8) $$(E_0, E_1)_{\rho,q;J} = (E_0, E_1)_{\rho,q;K}.$$

Uma parte da demonstração depende do *Lema Fundamental Interpolação*: se $x \in (E_0, E_1)_{\rho,\infty;K}$, então existe uma sequencia $(u_n)_n$ in $E_0 \cap E_1$ que satisfaz (1.6) e

$$J(t, u_n) \leq C\ K(t, x).$$

A outra parte da demonstração depende das propriedades dos índices de Boyd , como visto anteriormente.

Quando não houver necessidade de especificar o método que gera o espaço de interpolação escreveremos simplesmente $(E_0, E_1)_{\rho,q}$.

Também necessitamos do seguinte complemento a (1.5):

$$(1.9) \qquad (E_0, E_1)_{0,1;J} \hookrightarrow E_0 \hookrightarrow (E_0, E_1)_{0,\infty;K},$$

e

$$(1.10) \qquad (E_0, E_1)_{1,1;J} \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow (E_0, E_1)_{1,\infty;K}.$$

1.1.6. O Teorema da Dualidade. Denotamos por X' o espaço dual de um espaço de Banach X. Seja $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ um par de Banach tal que $E_0 \cap E_1$ é denso em E_0 e E_1. Então $\mathbb{E}' = (E_0', E_1')$ é um par de Banach e temos

$$(1.11) \qquad (E_0 \cap E_1)' = E_0' + E_1' \quad \text{e} \quad (E_0 + E_1)' = E_0' \cap E_1'.$$

e mais

$$(1.12) \qquad J(t, a'; \mathbb{E}') = \sup_{a \in E_0 \cap E_1} \frac{|\langle a', a \rangle|}{J(t^{-1}, a; \mathbb{E})}, \quad a' \in E_0' + E_1';$$

e

$$(1.13) \qquad K(t, a'; \mathbb{E}') = \sup_{a \in E_0 + E_1} \frac{|\langle a', a \rangle|}{K(t^{-1}, a; \mathbb{E})}, \quad a' \in E_0' + E_1'.$$

Para $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $1 \leq q < +\infty$, temos o Teorema da Dualidade

$$(1.14) \qquad ((E_0, E_1)_{\rho,q})' = (E_0', E_1')_{\rho^*,q'}$$

onde $\rho^*(t) = 1/\rho(1/t)$ and $1/q + 1/q' = 1$.

1.1.7. O Teorema de Reiteração. Seja $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ um par de Banach. Para ρ, ρ_0, $\rho_1 \in \mathcal{P}^{+-}$ temos

$$(1.15) \qquad \eta = \rho_0 \cdot \rho\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Assuma que $0 < \beta_{\overline{\rho}} \leq \alpha_{\overline{\rho}} < 1$. Então, se $0 < q, q_0, q_1 \leq +\infty$, temos

$$(1.16) \qquad ((E_0, E_1)_{\rho_0,q_0}, (E_0, E_1)_{\rho_1,q_1})_{\rho,q} = (E_0, E_1)_{\eta,q}.$$

Para a demonstração observamos que $\beta_{\overline{\rho}_0} > 0$ se $q_0 < +\infty$ ($\sup_{t\leq 1} \overline{\rho}_0(t) < +\infty$ se $q_0 = +\infty$) e $\alpha_{\overline{\rho}_1} < 1$ se $q_1 < +\infty$ ($\sup_{t \geq 1} \overline{\rho}_1(1/t) < +\infty$ se $q_1 = +\infty$) quando $\beta_{\overline{\rho_1/\rho_0}} > 0$, ou para condições obtidas mudando-se os índices 0 e 1 quando $\alpha_{\overline{\rho_1/\rho_0}} < 0$. (Essas condições asseguram que $\eta \in \mathcal{P}^{+-}$.)

1.1.8. Caso $E_0 \hookrightarrow E_1$. No caso em que tem-se a inclusão contínua

$$(1.17) \qquad E_0 \hookrightarrow E_1$$

para todo $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $0 < q \leq \infty$, temos

$$\|x\|_{\rho,q;K} \sim \|x\|^{+}_{\rho,q;K} = \|(\rho(2^n)^{-1} K(2^n, x))_{n\in \boldsymbol{N}}\|_{\ell^q(\boldsymbol{N})}. \tag{1.18}$$

além disso, existe uma sequencia $(u_n)_{n\geq 0}$ em $E_0 \cap E_1$ $(= E_0)$ tal que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (\text{convergencia in} \quad E_0 + E_1 \, (= E_1)) \tag{1.19}$$

e

$$\|x\|_{\rho,q,K} \sim \|x\|^{+}_{\rho,q;J} = \inf \|(\rho(2^n)^{-1} J(2^n, u_n))_{n\in \boldsymbol{N}}\|_{\ell^q(\boldsymbol{N})}, \tag{1.20}$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda representação (1.19).

Nesse caso, o espaço $(E_0, E_1)_{\rho,q}$ equipado com a norma (4) é denotado por $(E_0, E_1)^{+}_{\rho,q}$.

1.1.9. Caso $E_1 \hookrightarrow E_0$. No caso em que tem-se a inclusão contínua

$$E_1 \hookrightarrow E_0 \tag{1.21}$$

para todo $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $0 < q \leq \infty$ temos

$$\|x\|_{\rho,q;K} \sim \|x\|^{-}_{\rho,q;K} = \|(\rho(2^{-n})^{-1} K(2^{-n}, x))_{n\in \boldsymbol{N}}\|_{\ell^q(\boldsymbol{N})}. \tag{1.22}$$

além disso, existe uma sequencia $(u_n)_{n\geq 0}$ em $E_0 \cap E_1$ $(= E_1)$ tal que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad (\text{convergencia em} \quad E_0 + E_1 \, (= E_0)). \tag{1.23}$$

e

$$\|x\|_{\rho,q;J} \sim \|x\|^{-}_{\rho,q;J} = \inf \|(\rho(2^{-n})^{-1} J(2^{-n}, x))_{n\in \boldsymbol{N}}\|_{\ell^q(\boldsymbol{N})}. \tag{1.24}$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda representação (1.23).

Nesse caso, o espaço $(E_0, E_1)_{\rho,q}$ equipado com a norma é denotado por $(E_0, E_1)^{-}_{\rho,q}$.

Quando $\rho(t) = t^{\theta}$, esses casos especiais são tratados por Butzer-Scherer [4]. As afirmações (1.20) e (1.22) seguem de um cálculo direto.

1.1.10. Os espaços de classe J_ρ e K_ρ. Seja E um espaço intermediário em relação a um par de Banach $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$. Dizemos que E é um espaço intermediario de classe $J_\rho(E_0, E_1)$ se

$$(E_0, E_1)_{\rho,1;J} \hookrightarrow E. \tag{1.25}$$

e dizemos que E é um espaço intermediario de classe $K_\rho(E_0, E_1)$ se

$$E \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\rho,\infty;K}. \tag{1.26}$$

Temos que E é de classe $J_\rho(E_0, E_1)$ se e somente se para todo $x \in E_0 \cap E_1$, temos

$$\|x\|_E \leq C\|x\|_0 \ \overline{\rho}\left(\frac{\|x\|_1}{\|x\|_0}\right). \tag{1.27}$$

Diremos simplismente que E é um espaço de interpolação do tipo ρ se

$$E \in J_\rho(E_0, E_1) \cap K_\rho(E_0, E_1)$$

1.1.11. Functores de Interpolação do tipo ρ. Um functor de interpolação $\mathcal{F}$ é chamado do tipo ρ se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|T\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1) \to \mathcal{F}(F_0,F_1)} \leq C\|T\|_0 \, \overline{\rho}\left(\frac{\|T\|_1}{\|T\|_0}\right), \tag{1.28}$$

para todo $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1.1.12. Proposição. Seja $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e seja $\mathcal{F}$ um functor de interpolação do tipo ρ. Se (E_0, E_1) é um par de Banach então $\mathcal{F}(E_0, E_1)$ é de classe $J_\rho(E_0, E_1)$, i.e. temos

$$(E_0, E_1)_{\rho,1;J} \hookrightarrow \mathcal{F}(E_0, E_1). \tag{1.29}$$

Suponha que $\mathbb{E} = (E_0, E_1)$ é um par de **Banach** e $E_0 \cap E_1$ é denso em E_0 e E_1. Então $\mathcal{F}(E_0, E_1)$ é de classe $K_\rho(E_0, E_1)$, i.e., temos

$$\mathcal{F}(E_0, E_1) \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\rho,\infty;K}. \tag{1.30}$$

Demonstração. Passo 1. Consideremos a aplicação

$$T\lambda = \lambda u,$$

onde u é um elemento dado em $E_0 \cap E_1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Claramente $T : \mathbb{C} \to E_k$ com norma $\|T\|_k = \|u\|_{E_k}$, $k = 0, 1$. Então $T : \mathbb{C} \to \mathcal{F}(E_0, E_1)$ com norma menor que uma constante multiplicada por $\|u\|_{E_0} \, \overline{\rho}(\|u\|_{E_1}/\|u\|_{E_0})$, portanto

$$\|u\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} \leq C\|u\|_{E_0} \, \overline{\rho}\left(\frac{\|u\|_{E_1}}{\|u\|_{E_0}}\right)$$

ou equivalentemente

$$\|u\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} \leq C \, \rho(2^n)^{-1} J(2^n, u; \mathbb{E}). \tag{1.31}$$

Agora, se $a = \sum u_n \in E_0 + E_1$ com $u_n \in E_0 \cap E_1$, logo obtemos

$$\|a\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} \leq C \sum_n \rho(2^n)^{-1} J(2^n, u_n, \mathbb{E})$$

que implica (1.29).

Passo 2. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $x'_n \in (E_0 + E_1)'$ tal que $< x'_n, x >= K(2^n, x)$. Então $x'_n : \mathbb{E}_j \to \mathbb{C}$ e logo $\|x'_n\|_{E_k} \leq 2^{kn}$, $k = 0, 1$. Portanto , $x'_n : \mathcal{F}(E_0, E_1) \to \mathbb{C}$ e

$$\sup_{x \in \mathcal{F}(E_0,E_1)} \frac{K(2^n, x)}{\|x\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)}} = \sup_{x \in \mathcal{F}(E_0,E_1)} \frac{|\langle x'_n, x\rangle|}{\|x\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)}} \leq C\|x'_n\|_{E'_0}\, \overline{\rho}\left(\frac{\|x'_n\|_{E'_1}}{\|x'_n\|_{E'_0}}\right) \leq C\, \overline{\rho}(2^n).$$

Consequentemente, temos,

$$\rho(t)^{-1} K(t, x; \mathbb{E}) \leq C\|x\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)},$$

que implica (1.30).

Assim a demonstração está completa.

1.1.13. Exemplo. Seja $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e seja (E_0, E_1) um par de Banach. Os espaços $(E_0, E_1)_{\rho,q}$, $1 \leq q \leq \infty$, pertencem a classe $K_\rho(E_0, E_1) \cap J_\rho(E_0, E_1)$. Além disso, o functor de interpolação $\mathcal{F} : (E_0, E_1) \to (E_0, E_1)_{\rho,q}$ é do tipo ρ.

1.2 Interpolação de Espaços $\ell^q_s(G_n)$

O teorema abaixo será de grande utilidade, como auxiliar nas demonstrações dos teoremas dos Capítulos 6 e 7.

1.2.1 Os espaços ℓ^q_ρ. Seja G um espaço vetorial e seja $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequencia de normas em G. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, denotaremos por G_n o espaço G equipado com a norma $\|\cdot\|_n$: $G_n = (G, \|\cdot\|_n)$.

Seja ρ qualquer parâmetro funcional e $0 < q \leq \infty$. Denotamos por $\ell^q_\rho(G_n)$ o espaço vetorial de todas as sequencias $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, in G, tal que

$$(1.1) \qquad \|\|(a_n)\|\|_{\rho,q} = \|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q_\rho(G_n)} = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} [\rho(2^{-n})\|a_n\|_n]^q\right]^{1/q} < +\infty.$$

O funcional $\|\|\cdot\|\|_{\rho,q}$ é claramente uma norma em $\ell^q_\rho(G_n)$.

Quando $\rho(t) = t^\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$ escrevemos $\ell^q_\theta(G_m)$.

1.2.2. Teorema. Suponhamos que $0 < q_0, q_1, q \leq +\infty$, e que $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$. Se $s_0 \neq s_1$, e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ definimos

$$(1.2) \qquad \gamma(t) = t^{s_0/(s_0-s_1)}/\rho(t^{1/(s_0-s_1)}).$$

Então, se $s_0 < \beta_{\overline{\rho}} \leq \alpha_{\overline{\rho}} < s_1$, temos $\gamma \in \mathcal{P}$ e

$$(1.3) \qquad (\ell^{q_0}_{s_0}(G_n), \ell^{q_1}_{s_1}(G_n))_{\gamma,q} = \ell^q_\rho(G_n).$$

Demonstração: Passo 1. Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (\ell^\infty_{s_0}(G_n), \ell^\infty_{s_1}(G_n))_{\gamma,q}$. Pela definição temos que

$$||a||_{\ell^\infty_s} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-ns}||a_n||_n$$

Então

$$\begin{aligned}
K(t,a) &= \inf_{a=a_0+a_1}\{||a_0||_0 + t||a_1||_1\} \\
&= \inf_{a=a_0+a_1}\{\sup_n 2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + t\sup_n 2^{-ns_1}||a_{n1}||_n\} \\
&\geq \inf_{a=a_0+a_1}\{\sup_n(2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + t2^{-ns_1}||a_{n1}||_n)\} \\
&\geq \sup_n\{\inf_{a_n=a_{n0}+a_{n1}} 2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + t2^{-ns_1}||a_{n1}||_n
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de $K(t,a)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $b_{n0}, b_{n1} \in G_n$, tal que $a_n = b_{n0} + b_{n1}$, então

$$\inf_{a_n=a_{n0}+a_{n1}}(2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + t2^{-ns_1}||a_{n1}||_n) \geq 2^{-ns_0}||b_{n0}||_n + t2^{-ns_1}||b_{n1}||_n - \varepsilon$$

logo

$$\begin{aligned}
+\infty &> \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{\inf_{a_n=a_{n0}+a_{n1}}(2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + 2^{-ns_1}t||a_{n1}||_n)\} \\
&\geq \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{2^{-ns_0}||b_{n0}||_n + 2^{-ns_1}t||b_{n1}||_n - \varepsilon\} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{2^{-ns_0}||b_{n0}||_n + 2^{-ns_1}t||b_{n1}||_n\} - \varepsilon \\
&= (||b_0||_{\ell^\infty_0} + t||b_1||_{\ell^\infty_1}) - \varepsilon \\
&\geq K(t,a,\ell^\infty_0,\ell^\infty_1) - \varepsilon
\end{aligned}$$

onde $b_0 = (b_{n0})_n$ e $b_1 = (b_{n1})_n$, $n \in \mathbb{Z}$, como $\varepsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluimos que

$$K(t,a) = \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{\inf_{a_n=a_{n0}+a_{n1}}(2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + t2^{-ns_1}||a_{n1}||_n)\} \tag{1.4}$$

Consideremos, agora para cada $n \in \mathbb{Z}$ um decomposição $a_n = a_{n0} + a_{n1}$, arbitrária. Então

$$\begin{aligned}
2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + t2^{-ns_1}||a_{n1}||_n &\geq \min(2^{-ns_0}, t2^{-ns_1})||a_{n0}||_n + \min(2^{-ns_0}, t2^{-ns_1})||a_{n1}||_n \\
&= \min(2^{-ns_0}, t2^{-ns_1})(||a_{n0}||_n + ||a_{n1}||_n) \\
&\geq \min(2^{-ns_0}, t2^{-ns_1})||a_{n0} + a_{n1}||_n \\
&= \min(2^{-ns_0}, t2^{-ns_1})||a_n||_n
\end{aligned}$$

Portanto

$$(\min(2^{-ns_0}, t2^{-ns_1}))||a_n||_n \leq \inf_{a_n=a_{n0}+a_{n1}} 2^{-ns_0}||a_{n0}||_n + t2^{-ns_1}||a_{n1}||_n$$

e por (1.4), concluímos que

$$\sup_n(\min(2^{-ns_0}, t2^{-ns_1}))||a_n||_n \leq K(t, a)$$

Tomando $t = 2^{n(s_1-s_0)}$ obtemos $2^{-ns_0}||a_n||_n \leq K(2^{n(s_1-s_0)}, a)$.
Consequentemente $\rho(2^{-n})||a_n||_n \leq \rho(2^{-n})2^{ns_0}K(2^{n(s_1-s_0)}, a)$
Somando os termos e considerando a definição de γ, obtemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\rho(2^{-n})||a_n||_n)^q \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\gamma(2^{n(s_1-s_0)})^{-1}K(2^{n(s_1-s_0)}, a))^q$$

ou seja

$$|||a|||_{\rho,q} = ||a_n||_{\ell^q_\rho} \leq \left(\sum_{n\in Z\ Z}(\gamma(2^{n(s_1-s_0)})^{-1}K(2^{n(s_1-s_0)}, a))^q\right)^{1/q}$$

Para concluírmos precisamos ainda dos seguintes fatos:

$$\begin{aligned}
||a||^q_{(\ell^\infty_{s_0},\ell^\infty_{s_1})_{\gamma,q}} &= \int_0^\infty(\gamma(t)^{-1}K(t,a))^q\frac{dt}{t}\\
&= \int_0^\infty(\gamma(u^{s_1-s_0})^{-1}K(u^{s_1-s_0}, a))^q(s_1-s_0)\frac{du}{u}\\
&= (s_1-s_0)\int_0^\infty(\gamma(t^{s_1-s_0})^{-1}K(t^{s_1-s_0}, a))^q\ \frac{dt}{t}\\
&= C\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}}(\gamma(t^{s_1-s_0})^{-1}K(t^{s_1-s_0}, a))^q\ \frac{dt}{t}\\
&\geq C\sum_{n=-\infty}^{\infty}K(2^{n(s_1-s_0)}, a)^q\int_{2^n}^{2^{n+1}}(\gamma(t^{s_1-s_0})^{-q}\ \frac{dt}{t}\\
&\geq C\sum_{n=-\infty}^{\infty}K((2^{n(s_1-s_0)}, a)^q\,\gamma(2^{n(s_1-s_0)}2^{s_1-s_0})^{-q}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{dt}{t}\\
&\geq C\sum_{n=-\infty}^{\infty}K(2^{n(s_1-s_0)}, a)^q\,\gamma(2^{n(s_1-s_0)})^{-q}\,\overline{\gamma}(2^{s_1-s_0})^q\\
&= C\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\gamma(2^{n(s_1-s_0)})^{-1}K(2^{n(s_1-s_0)}, a))^q
\end{aligned}$$

e para completar observamos que

$$\int_0^\infty(\gamma(t)^{-1}K(t,a))^q\frac{dt}{t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2^{n-1}}^{2^n}(\gamma(t)^{-1}K(t,a))^q\frac{dt}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(2^n,a)^q \int_{2^{n-1}}^{2^n} \gamma(t)^{-1}\frac{dt}{t} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(2^n,a)^q \gamma(2^{n-1})^{-q} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{dt}{t} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(2^n,a)^q \gamma(2^n)^{-q}\overline{\gamma}(2)^q \\
&= C \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma(2^n)^{-1}K(2^n,a))^q
\end{aligned}
$$

assim concluimos que $||a_n||_{\ell^q_\rho} \leq C\ ||a||_{(\ell^\infty_{s_0},\ell^\infty_{s_1})_{\gamma,q}}$ o que implica

$$
(\ell^\infty_{s_0},\ell^\infty_{s_1})_{\gamma,q} \hookrightarrow \ell^q_\rho(G_n) \tag{1.5}
$$

PASSO 2. Agora seja $0 < r \leq q$ e $a = (a_n)_n \in \ell^q_\rho(G_n)$, então

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty (\gamma(t)^{-1}K_r(t,a))^q\frac{dt}{t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} (\gamma(t)^{-1}K_r(t,a))^q\frac{dt}{t} \\
&\geq \sum_n K_r(2^n,a)^q \int_{2^n}^{2^{n+1}} \gamma(t)^{-q}\frac{dt}{t} \\
&\geq \sum_n K_r(2^n,a)^q\ \gamma(2^{n+1})^{-q}\ \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{dt}{t} \\
&\geq C\ \sum_n K_r(2^n,a)^q\ \gamma(2^n 2)^{-q} \\
&\geq C\ \sum_n K_r(2^n,a)^q\ \gamma(2^n)^{-q}\ \overline{\gamma}(2)^q \\
&= C\ \sum_n (\gamma(2^n)^{-1}\ K_r(2^n.a))^q
\end{aligned}
$$

e por outro lado

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty (\gamma(t)^{-1}K_r(t,a))^q\frac{dt}{t} &= \int_0^\infty (\gamma(u^{(s_1-s_0)})^{-1}K_r(u^{(s_1-s_0)},a))^q(s_1-s_0)\frac{du}{u} \\
&= (s_1-s_0)\int_0^\infty (\gamma(t^{s_1-s_0})^{-1}K_r(t^{s_1-s_0},a))^q\frac{dt}{t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2^{n-1}}^{2^n} (\gamma(t^{s_1-s_0})^{-1}\ K_r(t^{s_1-s_0},a))^q\frac{dt}{t}
\end{aligned}
$$

$$\leq \; C \sum_n K_r(2^{n(s_1-s_0)}, a)^q \int_{2^{n-1}}^{2^n} (\gamma(t^{s_1-s_0})^{-q} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \; C \sum_n K_r(2^{n(s_1-s_0)}, a)^q \, \gamma(2^{(n-1)(s_1-s_0)})^{-q} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \; C \sum_n K_r(2^{n(s_1-s_0)}, a)^q \, \gamma(2^{n(s_1-s_0)})^{-q} \, \overline{\gamma}(2^{s_1-s_0})^q$$

$$= \; C \sum_n (\gamma(2^{n(s_1-s_0)})^{-1} \, K_r(2^{n(s_1-s_0)}, a))^q$$

portanto

$$||a||_{(\ell^r_{s_0},\ell^r_{s_1})_{\gamma,q}} \leq C \, (\int_0^\infty (\gamma(t)^{-1} \, K_r(t,a))^q \frac{dt}{t})^{1/q} \leq C \, ||\gamma(2^{n(s_1-s_0)})^{-1} \, K_r((2^{n(s_1-s_0)}, a)||_{\ell^q(\mathbb{Z})}$$

e como

$$\begin{aligned} K_r(t,a;\ell^r_{s_0}(G_n)+\ell^r_{s_1}(G_n)) &= \left[\sum_n \inf_{a_n=a_{n_0}+a_{n_1}} (2^{-ns_0}||a_{n_0}||_n)^r + (t\,2^{-ns_1}||a_{n_1}||_n\right]^{1/r} \\ &\sim \left[\sum_n [\min(2^{-ns_0}, t\,2^{-ns_1})||a_n||_n]^r\right]^{1/r}, \end{aligned}$$

(veja [1,p.122]), temos que

$$\begin{aligned} &||a||_{(\ell_{s_0}(G_n),\ell_{s_1}(G_n))_{\rho,q}} \leq C||\gamma(2^{m(s_0-s_1)})^{-1} K_r(2^{m(s_0-s_1)}, a; \ell^r_{s_0}(G_\nu), \ell^r_{s_1}(G_\nu))||_{\ell^q} \\ \leq\; & C||(\gamma(2^{m(s_0-s_1)})^{-1}\left[\sum_n (\min(2^{ns_0}, 2^{m(s_0-s_1)}2^{ns_1})||a_n||_n)^r)^{1/r}\right])||_{\ell^q} \\ =\; & C||(\gamma(2^{m(s_0-s_1)})^{-1}\left[\sum_n (\min(2^{(n+m)s_0}, 2^{m(s_0-s_1)}2^{(n+m)s_1})||a_{n+m}||_{n+m})^r)^{1/r}\right])_m||_{\ell^q} \\ =\; & C||(\gamma(2^{m(s_0-s_1)})^{-1}\left[\sum_n (\min(1, 2^{-n(s_0-s_1)})2^{(n+m)s_0}||a_{n+m}||_{n+m})^r)^{1/r}\right])_m||_{\ell^q} \\ \leq\; & C\left[\sum_n [\min(1, 2^{-n(s_0-s_1)})\overline{\gamma}(2^{n(s_0-s_1)})]^r\right]^{1/r} ||\rho(2^{(m+n)})\cdot||a_{n+m}||_{n+m})_m||_{\ell^q} \\ \leq\; & C||a||_{\ell^q_\rho(G_n)}. \end{aligned}$$

O que domonstra que

(1.6) $$\ell^q_\rho(G_n) \subset (\ell^r_{s_0}(G_n), \ell^r_{s_1}(G_n))_{\gamma,q}.$$

PASSO 3. Seja $r < q_0, q_1, q$. De (1.4), (1.5) e da monotonicidade temos que

(1.7) $$\begin{aligned} (\ell^r_{s_0}(G_n), \ell^r_{s_1}(G_n))_{\gamma,q} \;&\subset\; (\ell^{q_0}_{s_0}(G_n), \ell^{q_1}_{s_1}(G_n))_{\gamma,q} \subset (\ell^\infty_{s_0}(G_n), \ell^\infty_{s_1}(G_n))_{\gamma,q} \\ &\subset\; \ell^q_\rho(G_n) \subset (\ell^r_{s_0}(G_n), \ell^r_{s_1}(G_n))_{\gamma,q} \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.
1.2.3. Corolario. Temos

$$(1.8) \qquad (\ell_0^q(G_m), \ell_1^q(G_m))_{\rho,q} = \ell_\gamma^q(G_m), \quad 0 < q \leq \infty.$$

onde $\gamma(t) = 1/\rho(t^{-1})$.

1.2.4 Observação. É claro que 1.2.2 também vale para os espaços $(\ell_0^q(G_m), \ell_1^q(G_m))_{\rho,q}^+$ e $(\ell_0^q(G_m), \ell_1^q(G_m))_{\rho,q}^-$, onde $G_m = (G, \|\cdot\|)$ with $m \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}_- = -\mathbb{N}$, respectivamente. (Veja 1.1.8 e 1.1.9.)

Um resultado semelhante obtemos, se utilizarmos a norma

$$(1.9) \qquad |||(a_n)|||_{\rho,q} = \|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell_\rho^q(G_n)} = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} [\rho(2^n)\|a_n\|_n]^q\right]^{1/q} < +\infty.$$

no lugar da norma definida em 1.2.1, para definirmos o espaço $\ell_\rho^q(G_n)$, então teremos o seguinte teorema
1.2.5. Teorema 2. Assuma que $0 < q_0, q_1, q \leq +\infty$, e que $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$. Se $s_0 \neq s_1$, e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ definimos

$$(1.10) \qquad \gamma(t) = t^{s_0/(s_0-s_1)}/\rho(t^{1/(s_0-s_1)}).$$

Então, se $s_1 < \beta_{\overline{\rho}} \leq \alpha_{\overline{\rho}} < s_0$, temos $\gamma \in \mathcal{P}$ e

$$(1.11) \qquad (\ell_{s_0}^{q_0}(G_n), \ell_{s_1}^{q_1}(G_n))_{\gamma,q} = \ell_\rho^q(G_n).$$

A demonstração segue do mesmo modo que a demonstração do teorema 1. Para mais detalhes ver [9].

1.3 O Método de Interpolação de Gustavsson-Peetre

A seguir introduzimos um variante do método de interpolação de Gustavsson-Peetre, que depende de parâmetros funcionais. Veremos que este método gera espaços do tipo ρ e que além disso o método tem a importante propriedade de interpolar espaços L^p e gerar espaços de Orlicz.

1.3.1 As **funções de Rademacher** $r_i : [0, 1] \to \{-1, 1\}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$ são definidas do seguinte modo. A primeira r_0 vale 1 em $[0, 1/2)$ e -1 em $[1/2, 1]$; a segunda r_1 vale 1 em $[0, 1/4) \cup [1/2, 3/4)$ e vale -1 em $[1/4, 1/2) \cup [3/4, 1]$ e assim por diante. A partir das funções de Rademacher, definimos para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\tilde{r}_n = \begin{cases} r_{2n} & \text{se } n \geq 0 \\ r_{2|n|-1} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Assim temos a seguinte definição:

1.3.2 DEFINIÇÃO. Seja $\{E_0, E_1\}$ um par de Banach, o espaço $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ é o espaço linear de todos os $x \in E_0 + E_1$ tal que existe uma sequência $(u_n)_{n\in Z\ Z}$ em $E_0 \cap E_1$ que satisfaz

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \qquad (1.12)$$

com convergência em $E_0 + E_1$ e tal que $a_n = b_{n0} + b_{n1}$, então

$$\sup_J \int_0^1 \left\| \sum_{n\in J} \tilde{r}_n(t) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} u_n \right\|_{E_k}^p dt < \infty \qquad (1.13)$$

onde o supremo é tomado sobre todo os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ e assumimos que para $k = 0, 1$ a sequência $(\tilde{r}_n(.)2^{kn}u_n/\rho(2^n))_{n\in Z\ Z}$ é $L^p([0,1], E_k)$ somável. Munimos o espaço $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ com a norma

$$||x||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} = \inf \max_{k=0,1} \sup_J \left\| \sum_{n\in J} \tilde{r}_n(.) \frac{2^{kn}}{\rho(2^N} u_n \right\|_{L^p([0,1],E_k)}$$

Assim tendo definido o método, pode-se demonstrar que ele possui as seguintes importantes propriedades. As demonstrações se encontram em [8] e [10].

1.3.3 Teorema. Seja $\{E_0, E_1\}$ um par de Banach, $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $1 \le p < \infty$. Então $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ é um espaço de Banach.

1.3.4 Teorema. Se $\{E_0, E_1\}$ é um par de Banach, temos que

$$E_0 \cap E_1 \hookrightarrow < E_0, E_1 >_{\rho,p} \hookrightarrow E_0 + E_1$$

ou seja, $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ é um espaço intermediário entre E_0 e E_1.

1.3.5 Teorema. Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e $1 \le p \le \infty$. Então se $T \in L(E_k, F_k)$, k = 0,1, temos que $T \in L(< E_0, E_1 >_{\rho,p}, < F_0, F_1 >_{\rho,p})$ e

$$||T|| \le 2\, M_0\, \overline{\rho}(\frac{M_1}{M_0})$$

onde $M_k = ||T||_{L(E_k,F_k)}$ k = 0,1.

Este teorema demonstra que o método $<,>_{\rho,p}$ é um functor de interpolação do tipo ρ.

1.3.6 Teorema. Seja $\{E_0, E_1\}$ um par de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Então $E_0 \cap E_1$ è denso em $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$.

Atravès desse teorema, verifica-se que $< E_0, E_1 >_{\rho,p} \subset K_\rho \cap J_\rho$, ou seja, que o espa'ço interpolado è um espaço do tipo ρ.

Para os espaços L^p temos o seguinte teorema:

1.3.6 Teorema. Seja $\{E_0, E_1\}$ um par de Banach de reticulados de Banach q-côncavos para $q < \infty$. Então para todo p, tal que $1 \leq p < \infty$ temos

$$< L^p(E_0), L^p(E_1) >_{\rho,p} = L^p(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$$

com normas equivalentes.

1.3.7 Definição: Um função de Orlicz é uma função contínua $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ com $\Phi(0) = 0$.

O método definido acima fornece a seguinte caracterização dos espaços de Orlicz.

1.3.8 Teorema. Seja Φ uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2, e E um reticulado de Banach com concavidade finita. Então existem p_0, p_1 com $1 < p_0, p_1 < \infty$ tal que

$$< L^{p_0}(E), L^{p_1}(E) >_{\rho,q} = L^{\Phi}(E)$$

com equivalência de normas, onde $1 \leq p \leq \infty$ e

$$\rho(t) = \begin{cases} t^{\frac{p_1}{p_1 - p_0}} \Phi^{-1}(t^{\frac{p_0 p_1}{p_0 - p_1}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Neste trabalho, a importancia deste teorema é que podemos estender os resultados para espaços de Orlicz.

Capítulo 2

Teoremas de Compacidade

A seguir estão demonstrados os principais teoremas de compacidade de operadores em espaços de interpolação. As demonstrações estão generalizadas para o método ρ. Incluimos os dois teoremas de Lions-Peetre, que apesar de sua simplicidade são fundamentais neste trabalho. Também incluimos a demonstração do Teorema de Hayakawa.

2.1 Teoremas de Compacidade de Lions-Peetre

Denotamos por $L_c(E, F)$ o espaço de todos os *operadores lineares compactos* de E em F.

2.1.1 Teorema (Lions–Peetre). Seja F qualquer espaço de Banach e seja (E_0, E_1) um par de Banach. Seja T um operador linear em $L_c(E_0, F) \cap L(E_1, F)$ e assumimos que E é de classe $K_\rho(E_0, E_1)$, para algum $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$. Então $T \in L_c(E, F)$.

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência da bola unitária de E. Dado $\varepsilon > 0$, seja t um número suficientemente grande tal que $\overline{\rho}(t) < \varepsilon t$. Assim é possível escolher $a_n^0 \in E_0$ e $a_n^1 \in E_1$, tal que $a_n = a_n^0 + a_n^1$ e

$$||a_n^0||_{E_0} + t||a_n^1||_{E_1} \leq 2K(t, a_n; E_0, E_1).$$

Como E é de classe $K_\rho(E_0, E_1)$ temos que $K(t; a_n; E_0, E_1) \leq C\overline{\rho}(t)||a_n||_E$. Assim segue que

$$||a_n^0||_{E_0} + t||a_n^1||_{E_1} \leq C\overline{\rho}(t)||a_n||_E \leq C\overline{\rho}(t).$$

Portanto (a_n^0) é limitado em E_0. Desde que T é um operador compacto de E_0 para F, existe um subsequência $(a_{n'}^0)$ de (a_n^0) tal que

$$||Ta_{n'}^0 - Ta_{m'}^0||_F < \varepsilon.$$

se n', m' são sufucientemente grandes. Agora, desde que

$$||Ta^1_{n'} - Ta^1_{m'}||_F \leq ||T||_1||a^1_{m'} - a^1_{n'}||_{E_1} \leq C||T||_1\frac{\overline{\rho}(t)}{t} \leq C \cdot \varepsilon,$$

concluimos que

$$||Ta_{n'} - Ta_{m'}||_F \leq C \cdot \varepsilon,$$

se m', n' são sufucientemente grandes e isto demonstra a compacidade do operador $T : E \to F$.

2.1.2 Teorema (Lions–Peetre). Seja E um espaço de Banach qualquer e seja (F_0, F_1) um par de Banach. Seja T um operador linear de $L_c(E, F_0) \cap L(E, F_1)$ e assumimos que F é de classe $J_\rho(F_0, F_1)$, para algum $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$. Então, $T \in L_c(E, F)$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada em E. Desde que T é compacto de E para F_0, existe um subsequência (x_ν) tal que (Tx_ν) é convergente em F_0. Desde que F é de classe $J_\rho(F_0, F_1)$ e $\overline{\rho}$ é submultiplicativo, temos que

$$\begin{aligned} ||Tx_{\nu'} - Tx_{\nu''}||_F &\leq C||Tx_{\nu'} - Tx_{\nu''}||_{F_0}\ \overline{\rho}\left(\frac{||Tx_{\nu'} - Tx_{\nu''}||_{F_1}}{||Tx_{\nu'} - Tx_{\nu''}||_{F_0}}\right) \\ &\leq C\overline{\rho}(||T||_{L(E,F_1)})\ \frac{\overline{\rho}(1/||Tx_{\nu'} - Tx_{\nu''}||_{F_0})}{1/||Tx_{\nu'} - Tx_{\nu''}||_{F_0}}. \end{aligned}$$

Portanto (Tx_ν) é uma sequência de Cauchy em F.

2.2 O Teorema de Compacidade de Hayakawa

2.2.1 Teorema. Sejam (E_0, E_1) e (F_0, F_1) pares de Banach e seja T um operador linear de $E_0 + E_1$ para $F_0 + F_1$. Suponhamos que $T \in L_c(E_k, F_k)$, $k = 0, 1$. Então, T é também compacto de $(E_0, E_1)_{\rho,q}$ em $(F_0, F_1)_{\rho,q}$, para $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $0 < q \leq +\infty$.

Demonstração. Passo 1. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, definimos $G_m = E_0 \cap 2^m E_1$, i.e. G_m é o espaço $E_0 \cap E_1$ equipado com a norma $J(2^m, \cdot, \mathbb{E})$. Aqui consideraremos os espaços $\ell^q_\rho(G_m)$ com a norma definida em 1.2.4.

Seja $(u_m)_m$ uma sequência em $E_0 \cap E_1$, mas somável em $E_0 + E_1$. Então, definindo

$$\sigma(u_m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m,$$

temos

$$\sigma : \ell^q_\rho(G_m) \longrightarrow (E_0, E_1)_{\rho,q;J}$$

para qualquer parámetro funcional ρ e $0 < q \leq +\infty$. Por outro lado, desde que

$$(E_0, E_1)_{\rho,q;J} = \ell^q_\rho(G_m)/\sigma^{-1}(\{0\}),$$

para demonstrar que

$$T : (E_0, E_1)_{\rho,q} \longrightarrow (F_0, F_1)_{\rho,q}$$

é compacto, é suficiente mostrar que

$$\widetilde{T} : \ell^q_\rho(G_m) \longrightarrow (F_0, F_1)_{\rho,q}$$

é compacto, onde

$$\widetilde{T} = T \circ \sigma.$$

Passo 2. Com essa afirmação, para cada $n \in I\!N$, introduzimos o operador corte P_n em $\ell^1_0(G_m) + \ell^1_1(G_m)$ dado por

$$P_N((u_m)) = (\cdots, 0, 0, u_{-N}, u_{-N+1}, \cdots, u_0, \cdots, u_{N-1}, u_N, 0, 0, \cdots).$$

Para $k = 0, 1$, temos

$$P_n : \ell^1_k(G_m) \longrightarrow \ell^1_0(G_m) \cap \ell^1_1(G_m).$$

Agora, desde que

$$(\ell^1_0(G_m), \ell^1_1(G_m))_{\rho,q} = \ell^q_\rho(G_m),$$

e

$$(E_0, E_1)_{k,1;J} \hookrightarrow E_k, \qquad k = 0, 1,$$

temos a seguinte sequência de aplicacões contínuas

$$\ell^q_\rho(G_m) \xrightarrow{P_N} \ell^1_0(G_m) \cap \ell^1_1(G_m) \hookrightarrow \ell^1_k(G_m) \xrightarrow{\widetilde{T}} F_k \quad (k = 0, 1).$$

Agora, pela compacidade de T como operador de E_0 para F_0 (ou E_1 para F_1) implica que $\widetilde{T}P_N$ é compacto de $\ell^1_0(G_m)$ para F_0 e consequentemente que o operador $\widetilde{T} \circ P_n$ é também compacto de $\ell^q_\rho(G_m)$ para F_0. Portanto, aplicando o teorema de Lions–Peetre 2.1.2 , temos que

$$\widetilde{T}P_N = \widetilde{T} \circ P_n : \ell^q_\rho(G_m) \longrightarrow (F_0, F_1)_{\rho,q}$$

é também compacto.

Passo 3. Assim, para demonstrar a compacidade de $\widetilde{T}$, é suficiente ver que existe uma subsequência $(\widetilde{T}P_{n'})$ de $(\widetilde{T}P_n)$ tal que

$$\|\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'}\|_{\rho,q} \to 0 \quad \text{as} \quad n' \longrightarrow \infty,$$

onde $\|\cdot\|_{\rho,q}$ denota o operador norma.

Necessitamos de mais dois operadores de corte auxiliares:

$$P_+((u_m)) = (\cdots, 0, 0, u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots),$$

e

$$P_-((u_m)) = (\cdots, u_{-n}, u_{-n+1}, \cdots, u_{-1}, 0, 0, \cdots).$$

Cada um desses operadores é linear e limitado em $\ell_k^1(G_m)$ com norma igual a 1, $k = 0, 1$. Desde que $I = P_- + P_+$, temos

$$\|\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'}\|_{\rho,q} \leq C\left[\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_n)P_-\|_{\rho,q} + \|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_n)P_+\|_{\rho,q}\right].$$

Assim somente necessitamos mostrar que para alguma subsequência $(\widetilde{T}P_{n'})$

$$\max\left[\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_-\|_{\rho,q},\ \|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_+\|_{\rho,q}\right] \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mas, desde que

$$(2.1) \qquad \begin{aligned}\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_\pm\|_{\rho,q} &\leq \|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_\pm\|_0\, \overline{\rho}\left(\frac{\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_\pm\|_1}{\|\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_\pm\|_0}\right)\\ &\leq \overline{\rho}(\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_\pm\|_1)\, \frac{\overline{\rho}(1/\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_\pm\|_0)}{1/\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_\pm\|_0}\end{aligned}$$

obtemos

$$\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_-\|_{\rho,q} \leq C\ \ \overline{\rho}(\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_-\|_1)\ \ \frac{\overline{\rho}(1/\|\widetilde{T}\|_0)}{1/\|\widetilde{T}\|_0}$$

e

$$\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_+\|_{\rho,q} \leq C\ \ \overline{\rho}(\|\widetilde{T}\|_1)\ \ \frac{\overline{\rho}(1/\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_+\|_0}{1/\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_+\|_0}.$$

Consequentemente, sabendo que $\overline{\rho}(t) = o(\min(1, t))$, é suficiente demonstrar que para alguma subsequência (n') temos

$$(2.2) \qquad \lim_{n'\to+\infty} \|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_-\|_1 = 0,$$

e

$$(2.3) \qquad \lim_{n'\to+\infty} \|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})P_+\|_0 = 0.$$

Passo 4. Vamos demonstrar (2.2) e (2.3). Desde que

$$(2.4) \qquad \|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_n)P_-\|_1 \leq \|\widetilde{T}\|_1,$$

existe uma subsequência $(\widetilde{T}P_{n'})$ de $(\widetilde{T}P_n)$ tal que $(\|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})\|_1)_{n'}$ converge. Seja λ seu limite. Podemos achar $(x_{n'}) \subset \ell_1^1(G_m)$ tal que $\|x_{n'}\|_{\ell_1^1(G_m)} \leq 1$ e

$$\|\widetilde{T}(I - P_{n'})x_{n'}\|_{F_1} = \|(\widetilde{T} - \widetilde{T}P_{n'})x_{n'}\|_{F_1} \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

Chame $y_{n'} = (I - P_{n'})x_{n'}$. Então obtemos uma sequência $(y_{n'}) \subset \ell_1^1(G_m)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \|y_{n'}\|_{\ell_1^1(G_m} \leq 1; \\ P_k y_{n'} = 0 \quad \text{if} \quad k \leq n'. \\ \|\widetilde{T}y_{n'}\|_{F_1} \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \end{cases}$$

Desde que $\widetilde{T}:\ell_1^1(G_m)\longmapsto F_1$ é compacto, logo existe uma subsequência $(y_{n''})$ of $(y_{n'})$ tal que $(\widetilde{T}y_{n''})$ converge para algum $b\in F_1$. Em particular $\|b\|_{F_1}=\lambda$ and $(\widetilde{T}y_{n''})$ também converge para b in F_0+F_1.

Por outro lado , se $k\geq n''$, e $y^{n''}_{-(k+1)}$ é o $-(k+1)$ componente de $y^{n''}$, segue que

$$\begin{aligned}\|(P_{k+1}-P_k)P_-y_{n''}\|_{\ell_0^1(G_m)} &= J(2^{-(k+1)};y^{n''}_{-(k+1)})\\ &= 2^{-(k+1)}2^{k+1}J(2^{-(k+1)};y^{n''}_{-(k+1)})\\ &\leq 2^{-(k+1)}\|(P_{k+1}-P_k)y_{n''}\|_{\ell_1^1(G_m)}\\ &\leq 2^{-(k+1)}\|y_{n''}\|_{\ell_1^1(G_m)}\leq 2^{-(k+1)}\end{aligned}$$

e que

$$\|\widetilde{T}(P_{k+1}-P_k)y_{n''}\|_{F_0}\leq\|\widetilde{T}\|_0 2^{-(k+1)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}y_{n''}\|_{F_0+F_1} &= \|\widetilde{T}\sum_{k\geq n''}(P_{k+1}-P_k)y_{n''}\|_{F_0+F_1}\\ &\leq \sum_{k\geq n''}\|\widetilde{T}(P_{k+1}-P_k)y_{n''}\|_{F_0}\\ &\leq \|\widetilde{T}\|_0\sum_{k\geq n''}2^{-(k+1)}\end{aligned}$$

e desde que o último termo converge para zero quando $n''\longrightarrow\infty$, concluimos que $b=0$, e então $\lambda=0$.

Passo 5. Devemos mostrar que (3) é válido. Seja (x_ν) a subsequência obtida no passo 2. Devemos mostrar que existe uma subsequência $(x_{\nu'})$ tal que

$$\|(\widetilde{T}-\widetilde{T}P_{\nu'})P_+\|_0 \underset{\nu'\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.5}$$

Devemos repetir os argumentos do passo. Desde que

$$\|(\widetilde{T}-\widetilde{T}P_\nu)P_+\|_0\leq\|\widetilde{T}\|_0,$$

existe uma subsequência $(\widetilde{T}P_{\nu'})$ de $(\widetilde{T}P_\nu)$ tal que $(\|(\widetilde{T}-\widetilde{T}P_{\nu'})P_-\|_0)_{\nu'}$ converge. Seja γ seu limite. Podemos achar $(x_{\nu'})\subset\ell_0^1(G_m)$ tal que $\|x_{\nu'}\|_{0,1}\leq 1$ e

$$\|\widetilde{T}(I-P_{\nu'})x_{\nu'}\|_{F_0}=\|(\widetilde{T}-\widetilde{T}P_{\nu'})x_{\nu'}\|_{F_0}\underset{\nu'\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}\gamma.$$

Seja $y_{\nu'}=(I-P_{\nu'})x_{\nu'}$. Então obtemos uma sequência $(y_{\nu'})\subset\ell_0^1(G_m)$ satisfazendo

$$\begin{cases}\|y_{\nu'}\|_{\ell_0^1(G_m)}\leq 1,\\ P_k y_{\nu'}=0 \quad \text{se} \quad k\leq\nu',\\ \|\widetilde{T}y_{\nu'}\|_{F_0}\underset{\nu'\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}\gamma\end{cases}$$

Desde que $\widetilde{T} : \ell_0^1(G_m) \to F_0$ é compacto, existe uma subsequência $(y_{\nu''})$ of $(y_{\nu'})$ tal que $(\widetilde{T} y_{\nu''})$ converge para algum $b \in F_0$. Em particular $||b||_{F_0} = \gamma$ and $(\widetilde{T} y_{\nu''})$ também converge para b in $F_0 + F_1$.

Por outro lado, se $k \geq n''$, segue de

$$\begin{aligned} ||(P_{k+1} - P_k)P_+ y_{\nu''}||_{\ell_1^1(G_m)} &= 2^{-(k+1)} J(2^{k+1}; y_{k+1}^{\nu''}) \\ &\leq 2^{-(k+1)} ||(P_{k+1} - P_k) y_{\nu''}||_{\ell_0^1(G_m)} \\ &\leq 2^{-(k+1)} ||y_{\nu''}||_{\ell_0^1(G_m)} \leq 2^{-(k+1)}, \end{aligned}$$

que

$$||\widetilde{T}(P_{k+1} - P_k) y_{\nu''}||_{F_1} \leq ||\widetilde{T}||_1 2^{-(k+1)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} ||\widetilde{T} y_{\nu''}||_{F_0+F_1} &= ||\widetilde{T} \sum_{k \geq \nu''} (P_{k+1} - P_k) y_{\nu''}||_{F_0+F_1} \\ &\leq \sum_{k \geq \nu''} ||\widetilde{T} P_{k+1} - P_k) y_{\nu''}||_{F_1} \\ &\leq ||\widetilde{T}||_1 \sum_{k \geq \nu''} 2^{-k+1}, \end{aligned}$$

e desde que o último termo converge para zero quando $\nu'' \to \infty$, concluimos que $b = 0$, e então $\gamma = 0$.

Assim a demonstração está completa.

Capítulo 3

Medidas de Não-Compacidade

A definição de medida de não compacidade de subconjuntos limitados em espaços normados foi introduzido por K. Kuratowsky na década de 30. Posteriormente, na década de 50, essa definição voltou a ser utilizada, devido aos avanços na teoria de equações diferenciais e m espaços de Banach abstratos, na qual medidadas de não compacidade se mostraram de grande utilidade. Além disso, o estudo de teoremas de ponto fixo para operadores lineares e teoria espectral, fez aparecer o conceito de medida de não compacidade de um operador. A seguir definimos essas medidas e demonstramos suas principais propriedades.

3.1 Medidas de Não Compacidade

Sejam E e F espaços de Banach, B um sub-conjunto limitado de E e $\varepsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de B é uma ε-cobertura se $diam(V_i) \leq \varepsilon$ para todo i. A medida de não-compacidade de B é definida por:

$$\psi_E(B) = inf\{\varepsilon > 0 : \text{existe uma } \varepsilon\text{- cobertura finita de } B\}$$

Uma cobertura $\{B_i\}$ de B por bolas de raio $\leq \varepsilon$ chamamos de uma ε-cobertura restrita de B. Assim a medida restrita de não-compacidade é definida por:

$$\tilde{\psi}_E(B) = inf\{\varepsilon > 0 : \text{existe uma } \varepsilon\text{-cobertura restrita finita de } B\}$$

Seja $L(E, F)$ a familia de todas as aplicações lineares limitadas de E em F, e seja $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$.

Uma aplicação $T \in L(E, F)$ é chamada uma *k-contração* se

$$\psi_F(T(B)) \leq k\psi_E(B)$$

para todo conjunto limitado $B \subset E$.

A medida de não compacidade $\beta(T)$ de T é definida por

$$\beta(T) = min\{k : T \text{ é uma k-contração }\}$$

Da mesma maneira definimos *k-contração restrita* e a medida de não compacidade restrita $\tilde{\beta}$ de T usando as medidas restritas de não-compacidade $\tilde{\psi}_E$ e $\tilde{\psi}_F$.

3.2 Propriedades

As proposições a seguir apresentam várias propriedades das medidas de não compacidade que serão utilizadas nos próximos capítulos:

3.2.1 Proposição. Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach E, então:

(i) $\psi_E(A) = 0$ se e somente se $\overline{A}$ é compacto, onde $\overline{A}$ é o fecho de A.

(ii) $\psi_E(A) = \psi_E(\overline{A})$.

(iii) $\psi_E(\lambda A) = |\lambda|\psi_E(A)$.

(iv) $\psi_E(A) \leq \psi_E(B)$ se $A \subset B$.

(v) $\psi_E(A + B) \leq \psi_E(A) + \psi_E(B)$.

(vi) $\tilde{\psi}_E(A) \leq \psi_E(A) \leq 2\tilde{\psi}_E(A)$.

(vii) Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, então
$\tilde{\psi}_E(U_E) = 1$, onde U_E é a bola unitária de E.

As propriedades (i)-(v) também valem para a medida $\tilde{\psi}_E$.

Demonstração: Demonstraremos (iii), (v) e (vii), pois as outras seguem das definições.
(iii) Seja $\varepsilon > 0$ e seja $S_1, \cdots, S_n \subset E$ tal que $diam(S_i) \leq \psi_E(A) + \varepsilon$ e $A \subset \cup_i S_i$. Então $\lambda A \subset \cup_i(\lambda S_i)$, $\lambda \in I\!R$. Desde que $diam(\lambda S_i) = |\lambda| diam(S_i)$, temos que $\psi_E(\lambda A) \leq |\lambda|(\psi_E(A) + \varepsilon)$. Isso prova que $\psi_E(\lambda A) \leq |\lambda|\psi_E(A)$, pois $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Agora se $\lambda \neq 0$, então $\psi_E(A) = \psi_E(\frac{1}{\lambda}(\lambda a)) \leq \frac{1}{|\lambda|}\psi_E(\lambda A)$, portanto $|\lambda|\psi_E(A) \leq \psi_E(\lambda A)$, provando (iii)

(v) Seja $\varepsilon > 0$. Então existem conjuntos $S_1, \cdots, S_n$ e $T_1, \cdots, T_m$ de E, tais que $diam(S_i) \leq \psi_E(A) + \varepsilon/2$, $diam(T_j) \leq \psi_E(B) + \varepsilon/2$, $A \subset \cup_i S_i$ e $B \subset \cup_j T_j$. Portanto $A + B \subset$

$\cup_{i,j}(S_i + T_j)$. Desde que

$$diam(S_i + T_j) \leq diam(S_i) + diam(T_j) \leq \psi_E(A) + \psi_E(B) + \varepsilon$$

obtemos que $\psi_E(A + B) \leq \psi_E(A) + \psi_E(B) + \varepsilon$, o que prova (v).

(vii) Como $U_E \subset 0 + 1U_E$, segue que $\tilde{\psi}_E(U_E) < 1$. Então

$$U_E \subset \cup\{x_i + rU_E\}$$

onde (x_i) é uma sequência finita de pontos de U_E e $0 < r < 1$. Logo

$$U_E \subset \cup\{x_i + r(\cup_j\{x_j + rU_E\})\} = \cup_{i,j}\{x_i + x_j + r^2 U_E\}$$

Assim dado $\varepsilon > 0$, como $0 < r < 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n < \varepsilon$. Portanto aplicando recursivamente a cobertura obtemos

$$U_n \subset \cup_k\{x_k + r^n U_E\}$$

portanto $\tilde{\psi}_E(U_E) \leq r^n < \varepsilon$, mas como $\varepsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluimos que $\tilde{\psi}_E(U_E) = 0$, o que implicaria que E é de dimensão finita o que contraria a hipótese, logo $\tilde{\psi}_E(U_E) = 1$, o que prova (vii).

3.2.2 Proposição. Sejam E, F espaços de Banach e $T, T_1, T_2 \in L(E, F)$, então:

(i) T é compacto se e somente se $\beta(T) = 0$.

(ii) $\beta(T) \leq \|T\|$

(iii) $\beta(T_1 + T_2) \leq \beta(T_1) + \beta(T_2)$.

(iv) $\tilde{\beta}(T) = \tilde{\psi}_F(T(U_E))$ onde U_E é a bola unitária de E.

(v) $\frac{1}{2}\beta(T) \leq \tilde{\beta}(T) \leq 2\beta(T)$.

Demonstração: (i) Suponhamos que $T : E \to F$ é um operador compacto e seja $A \in E$ um subconjunto limitado, então $T(A)$ é relativamente compacto ou seja $\overline{T(A)}$ é compacto, logo

$$\psi_F(T(A)) = \psi_F(\overline{T(A)}) = 0 = 0\psi_E(A)$$

portanto $\beta(T) = 0$. Por outro lado seja $\beta(T) = 0$, como

$$\psi_F(T(A)) \leq \beta(T)\,\psi_E(A) = 0$$

o que implica $\psi_F(T(A)) = 0$ e por (i) da proposição 1 temos que $\overline{T(A)}$ é compacto. Como A é um subconjunto limitado qualquer de E, concluimos que T é um operador compacto.

(ii) Seja $A \subset E$ tal que $diam(A) = 1$ e seja $V_1, \cdots, V_n \subset E$ tal que $A \subset \cup_i V_i$, então $T(A) \subset \cup_i T(V_i)$, assim

$$\begin{aligned} \psi_F(T(A)) \leq diam(T(V_i)) &= \sup_{x,y \in V_i} \|Tx - Ty\|_F \\ &\leq \sup_{x,y \in V_i} \|T\|_{L(E,F)} \|x - y\|_E \\ &= \|T\|_{L(E,F)} \sup_{x,y \in V_i} \|x - y\|_E \\ &= \|T\|_{L(E,F)}\, diam(V_i) \end{aligned}$$

e como os (V_i) é uma cobertura qualquer finita qualquer de A, concluimos que $\psi_F(T(A)) \leq \|T\|\, \psi_E(A)$, portanto $\beta(T) \leq \|T\|$.

(iii) Seja $A \subset E$ limitado, então

$$\begin{aligned} \psi_F((T_1 + T_2)(A)) &= \psi_F((T_1(A)) + (T_2(A))) \\ &\leq \psi_F(T_1(A)) + \psi_F(T_2(A)) \\ &\leq \beta(T_1)\, \psi_E(A) + \beta(T_2)\, \psi_E(A) \\ &= (\beta(T_1) + \beta(T_2))\, \psi_E(A) \end{aligned}$$

portanto $\beta(T_1 + T_2) \leq \beta(T_1) + \beta(T_2)$.

(iv) Da propriedade (vii) da proposição 1 temos que $\tilde{\psi}_E(U_E) = 1$. Seja $B \subset E$ tal que $\tilde{\psi}_E(B) = 1$; da definição, temos que $\tilde{\psi}_F(T(B)) \leq \tilde{\beta}(T)\, \tilde{\psi}_E(B)$, então $\tilde{\psi}_F(T(B)) \leq \tilde{\beta}(T)$, portanto podemos definir $\tilde{\beta}(T)$ do seguinte modo

$$\tilde{\beta}(T) = \sup\{\tilde{\psi}_F(T(B)) / \tilde{\psi}_E(B) = 1\}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\tilde{\psi}_E(U_E) = 1$, e $\tilde{\psi}_E(B) = 1$, existe sequencia finita (x_j) de pontos de B tal que

$$B \subset \cup_j \{x_j + 1U_E\}$$

portanto $B \subset \cup_j \{x_j + (1 + \varepsilon)U_E\}$.
Como T é limitado, temos que $T(U_E)$ está contido na bola de centro em 0 e raio $\|T\|$, portanto existe uma sequência finita (z_i) de $T(U_E)$ tal que $T(U_E) \subset \cup_i \{z_i + rU_F\}$ para todo $r \geq \tilde{\psi}_F(T(U_E))$, assim segue que

$$\begin{aligned} T(B) &\subset \cup_j \{y_j + (1 + \varepsilon)T(U_E)\} \\ &\subset \cup_j \{y_j + (1 + \varepsilon)\{\cup_i \{z_i + rU_F\}\} \\ &\subset \cup_{j,i} \{(y_j + z_i) + (1 + \varepsilon)rU_F\} \end{aligned}$$

onde $y_j = T(x_j)$. Como $r \geq \tilde{\psi}_F(T(U_E))$ tomamos $r = \tilde{\psi}_F(T(U_E)) + \varepsilon$, assim

$$\tilde{\psi}_F(T(B)) \leq raio((1+\varepsilon)rU_F) = (1+\varepsilon)r = (1+\varepsilon)(\tilde{\psi}_E(T(U_E)) + \varepsilon)$$

como $\varepsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluimos que $\tilde{\psi}_F(T(B)) \leq \tilde{\psi}_F(T(U_E))$ para todo B nas condições acima, portanto $\tilde{\beta}(T) = \tilde{\psi}_F(T(U_E))$.

Capítulo 4

Teoremas do Tipo Lions-Peetre

O título deste capítulo se deve ao fato que os enunciados dos dois teoremas apresentados são semelhantes aos dois teoremas de compacidade de Lions-Peetre. Em ambos teoremas pede-se apenas que o espaço intermediário em consideração pertença à uma das classes J ou K, não se especificando qualquer método particular de interpolação para se obter o espaço interpolado.

4.1 Resultados Principais

4.1.1 TEOREMA Sejam E um espaço de Banach, $\{F_0, F_1\}$ um par de interpolação e F um espaço intermediário de classe $J(\rho, F_0, F_1)$, onde ρ é um parâmetro funcional. Então se $T \in L(\{E, E\}, \{F_0, F_1\})$, temos que:

$$\beta(T_{E,F}) \leq C\, \beta(T_{E,F_0})\, \overline{\rho}\left(\frac{\beta(T_{E,F_1})}{\beta(T_{E,F_0})}\right) \tag{4.1}$$

Demonstração. Seja Ω um sub-conjunto limitado de E e seja $\epsilon = \gamma_E(\Omega)$, então

$$\gamma_{F_j}(T(\Omega)) \leq \beta(T_{E,F_j})\epsilon$$

Portanto existe um número finito de conjuntos $U_1 \cdots U_n$ com $diam_{F_0} U_i \leq \beta(T_{E,F_0})\epsilon$ para $i = 1 \cdots n$ tal que

$$T(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset F_0$$

Do mesmo modo existem conjuntos $V_1 \cdots V_m$ em F_1 com $diam_{F_1} V_l \leq \beta(T_{E,F_1})\epsilon$ para $l = 1, \cdots, m$, tal que

$$T(\Omega) = \bigcup_{l=1}^{m} V_l \subset F_1$$

Definimos $W_{il} = U_i \cap V_l$ para $i = 1, \cdots, n$ e $l = 1, \cdots, m$ e então temos que

$$\begin{aligned} T(\Omega) &= \Big(\bigcup_{j=1}^{m} V_j\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\Big) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{m} V_j\Big) \bigcap U_i\Big) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\Big(\bigcup_{j=1}^{m}\Big(V_j \cap U_i\Big)\Big) \\ &= \bigcup_{i,j}(U_i \cap V_j) \\ &= \bigcup_{i,j} W_{ij} \subset F \end{aligned}$$

Como $F \in J(\rho, F_0, F_1)$, temos que

$$\|b - b'\| \le C\,\|b - b'\|_{F_0}\,\overline{\rho}\left(\frac{\|b - b'\|_{F_1}}{\|b - b'\|_{F_0}}\right) \tag{4.2}$$

para todo $b, b' \in F$, portanto,

$$\begin{aligned} diam_F W_{il} &\le C diam_{F_0} W_{il}\,\overline{\rho}\left(\frac{diam_{F_1} W_{ij}}{diam_{F_0} W_{ij}}\right) \\ &\le C\ \beta(T_{E,F_0})\,\delta\,\overline{\rho}\left(\frac{\beta(T_{E,F_1})\delta}{\beta(T_{E,F_0})\delta}\right) \\ &= C\ \beta(T_{E,F_0})\,\overline{\rho}\left(\frac{\beta(T_{E,F_1})}{\beta(T_{E,F_0})}\right)\,\delta \end{aligned}$$

De (1) e (2) tiramos que

$$v_F(T(\Omega)) \le diam_F W_{ij} \le C\ \beta(T_{E,F_0})\overline{\rho}\left(\frac{\beta(T_{E,F_1})}{\beta(T_{E,F_0})}\right)\ v_E(\Omega) \tag{4.3}$$

portanto concluimos que

$$\beta(T_{E,F}) \le C\ \beta(T_{E,F_0})\overline{\rho}\left(\frac{\beta(T_{E,F_1})}{\beta(T_{E,F_0})}\right)$$

4.1.2 TEOREMA. Seja $\{E_0, E_1\}$ um par de interpolação, seja F um espaço de Banach e suponha que E é um espaço intermediário do tipo $K(\rho, E_0, E_1)$, onde ρ é um parâmetro funcional. Então se $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F, F\})$ temos que

$$\beta(T_{E,F}) \le 2C\ \beta(T_{E_0,F})\rho\left(\frac{\beta(T_{E_1,F})}{\beta(T_{E_0,F})}\right) \tag{4.4}$$

Demonstração: Seja Ω um sub-conjunto limitado de E e seja $t > 0$. Como $E \in K(\rho; E_0, E_1)$, dado $x \in \Omega$ existe $x_0 \in E_0$ e $x_1 \in E_1$ tal que $x = x_0 + x_1$ e

$$(4.2) \qquad \|x_0\|_{E_0} \leq C\ \rho(t)\|x\|_E$$

e

$$(4.3) \qquad \|x_1\|_{E_1} \leq C\ \rho(t)t^{-1}\|x\|_E$$

Para $i = 0, 1$, seja Ω_i o conjunto dos x_i obtidos como acima deixando a percorrer Ω. Então, temos por (2) e (3) que

$$\psi_F(T(\Omega_0)) \leq \beta(T_{E_0,F})\psi_{E_0}(\Omega_0) \leq \beta(T_{E_0,F})C\ \rho(t)\psi_E(\Omega)$$

e

$$\psi_F(T(\Omega_1)) \leq \beta(T_{E_1,F})\psi_{E_1}(\Omega_1) \leq \beta(T_{E_1,F})C\ \rho(t)t^{-1}\psi_E(\Omega)$$

agora como $\Omega \subset \Omega_0 + \Omega_1$ segue que:

$$\psi_F(T(\Omega)) \leq \psi_F(T(\Omega_0)) + \psi_F(T(\Omega_1)) \leq (\beta(T_{E_0,F})\rho(t) + \beta(T_{E_1,F})\rho(t)t^{-1})C\ \psi_E(\Omega)$$

Logo para todo $t > 0$

$$\beta(T_{E,F}) \leq C\ (\beta(T_{E_0,F})\rho(t) + \beta(T_{E_1,F})\rho(t)t^{-1})$$

e fazendo $t = \frac{\beta(T_{E_1,F})}{\beta(T_{E_0,F})}$ temos que

$$\beta(T_{E,F}) \leq 2C\ \beta(T_{E_0,F})\rho\left(\frac{\beta(T_{E_1,F})}{\beta(T_{E_0,F})}\right)$$

4.2 Consequências dos Teoremas

4.2.1 Corolário.(Teorema de Lions-Peetre) Seja E um espaço de Banach, $\{F_0, F_1\}$ um par de Banach e F um espaço intermediário de classe $J(\rho, F_0, F_1)$, onde ρ é um parâmetro funcional. Se $T \in L(\{E, E\}, \{F_0, F_1\})$, tal que $T : E \to F_1$ é compacto, então $T : E \to F$ é compacto.

Demonstraçõ: Nas hipóteses do enunciado, sabemos pelo Teorema 1 que

$$(4.4) \qquad \beta(T_{E,F}) \leq C\ \beta(T_{E,F_0})\overline{\rho}\left(\frac{\beta(T_{E,F_1})}{\beta(T_{E,F_0})}\right)$$

e como T é compacto de E em F_1, temos $\beta(T_{E,F_1}) = 0$ e como $\overline{\rho}(0) = 0$ obtemos $\beta(T_{E,F}) \leq 0$, logo T é compacto de E em F.

4.2.2 Corolário.(Teorema de Lions-Peetre) Seja $\{E_0, E_1\}$ um par de interpolação, seja F um espaço de Banach e suponha que E é um espaço intermediário do tipo $K(\rho, E_0, E_1)$, onde ρ é um parâmetro funcional. Então se $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F, F\})$ tal que $T : E_1 \to F$ é compacto, temos que $T : E \to F$ també, é compacto.

Demonstração: Pelo Teorema 4.1.2 sabemos que

$$\beta(T_{E,F}) \leq 2C\ \beta(T_{E_0,F})\rho\left(\frac{\beta(T_{E_1,F})}{\beta(T_{E_0,F})}\right) \tag{4.5}$$

Como $T : E_1 \to F$ é compacto, segue que $\beta(T_{E_1,F}) = 0$, e como $\rho(0) = 0$, temos que $\beta(T_{E,F}) \leq 0$, portanto $\beta(T_{E,F}) = 0$, logo $T : E \to F$ é compacto.

Capítulo 5

Teorema do Tipo Persson I

A questão natural que se levanta após os teoremas do capítulo anterior é o que se pode obter quando $E_0 \neq E_1$ e $F_0 \neq F_1$. Neste capítulo e nos próximos apresentamos soluções para esta questão. Para a demonstração do teorema deste capítulo necessitamos de uma hipótese de aproximação, que é a mesma hipótese do teorema de compacidade de Persson. O teorema a seguir é uma generalização para o método ρ do Teorema 2 do artigo de Teixeira-Edmunds [21].

5.1 A Hipótese de Aproximação

5.1.1 HIPÓTESE DE APROXIMAÇÃO H_1. Seja $\{F_0, F_1\}$ um par de Banach. Existem constantes positivas c_1 , c_2 tal que dado $\varepsilon > 0$ e conjuntos finitos $A_0 \subset F_0$ e $A_1 \subset F_1$, existe um operador $P \in L(\{F_0, F_1\}, \{F_0, F_1\})$ tal que:

(i) $P : F_0 \to F_0$ é compacto.

(ii) $P(F_i) \subset F_0 \cap F_1$ para i = 0,1

(iii) $\|I - P\|_{L(F_i, F_i)} \leq c_i$ e $\|x - Px\|_{F_i} \leq \varepsilon$
para todo $x \in A_i$ $(i = 0, 1)$, onde I é a aplicação identidade.

Em vista da natureza aparentemente forte da hipótese de aproximação H_1, damos a seguir um exemplo significante em que a hipótese é verificada.

5.1.2 PROPOSIÇÃO. Seja X um espaço localmente compacto, munido com uma medida positiva μ, e seja $p_0, p_1 \in [1, \infty)$. Então $\{L^{p_0}(X, \mu), L^{p_1}(X, \mu)\}$ é um par de Banach que satisfaz a hipótese H_1.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado e sejam F_0, F_1 conjuntos finitos em L^{p_0} e L^{p_1} respectivamente. Desde que o conjunto S de todas as funções mensuráveis limitadas com suporte compacto é denso em L^{p_0} e em L^{p_1}, podemos assumir que $F_0, F_1 \subset S$. Agora seja $K \subset X$ compacto, tal que $\sup f \subset K$ para todo $f \in F_i$ (i = 0,1).
Seja (K_n) uma partição finita de K consistindo de um conjunto K_0 com $\mu(K_0) = 0$ e conjuntos $K_1, ..., K_N$ tal que $\mu(K_j) > 0$ para $j = 1, ..., N$ e

$$\sup_{x,y \in K_j} |f(x) - f(y)| < \eta$$

para $j = 1, ..., N$ e para todo $f \in F_i$ (i = 0,1), onde $\eta \max(1, \mu(K)) < \varepsilon$. Agora seja $\Phi_n = \chi_{K_n}$ e definimos

$$Pf = \sum_{n>0} \left(\int_X f \Phi_n d\mu / \mu(K_n) \right) \Phi_n$$

para todo $f \in L^1_{loc}(X, \mu)$.
Então temos que $P(L^{p_i}) \subset L^{p_0} \cap L^{p_1}$ (i = 0,1) e como em [10], $||P||_{L(L^{p_i})} \leq 1$, portanto $||I - P||_{L(L^{p_i})} \leq 2$ (i = 0,1). Como $P : L^{p_i} \to L^{p_i}$ é de posto finito, concluimos que é compacto.

5.2 Resultados Principais

5.2.1 LEMA. Sejam $\mathbb{E} = \{E_0, E_1\}$, $\mathbb{F} = \{F_0, F_1\}$ pares de interpolação. Suponhamos que $\mathbb{F}$ satisfaça a hipótese de aproximação H_1. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $P \in L(\mathbb{F})$ que satisfaz (i) e (ii) e tal que, para $i = 0, 1$: $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$

$$||T - PT||_{L(E_i, F_i)} \leq c_i \hat{\beta}(T_{E_i, F_i}) + \varepsilon$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Existem conjuntos finitos $A_0 \subset F_0$ e $A_1 \subset F_1$ tal que para todo $x \in E_i$ com $||x||_{E_i} \leq 1$ temos:

$$min_{y \in A_i} ||Tx - y|| \leq \hat{\beta}(T_{E_i, F_i}) + \frac{1}{2} \varepsilon \, c_i^{-1} \quad (i = 0, 1) \tag{5.1}$$

De fato, seja U_{E_i} a bola unitária em E_i para $i = 0, 1$, então como U_{E_i} é limitada temos que $\tilde{v}_{E_i}(U_{E_i})$ e $\tilde{v}_{F_i}(T(U_{E_i}))$, são finitos.
Da definição temos que

$$\tilde{v}_{F_i}(T(U_{E_i})) \leq \hat{\beta}(T_{E_i, F_i}) \tilde{v}(U_{E_i})$$

e como $\tilde{v}_{E_i}(U_{E_i}) \leq 1$ implica que $\tilde{v}_{F_i}(T(U_{E_i})) \leq \hat{\beta}(T_{E_i, F_i})$. Agora dado $\varepsilon > 0$ e definindo $r_i = \hat{\beta}(T_{E_i, F_i}) + 1/2\varepsilon c_i^{-1}$, pela definição de $\tilde{v}$, existe $A_i = \{y_1, \cdots, y_n\}$ em F_i, tais que

$$T(U_{E_i}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (y_j + r_i U_{F_i})$$

Então A_i é finito e para $x \in U_{E_i}$ temos $Tx \in y_j + r_j U_{F_i}$ para algum j o que implica

$$
(5.2) \qquad \begin{aligned} ||Tx - y_j||_{F_i} &\leq \sup_{y \in (y_j + r_i U_{F_i})} ||y - y_j||_{F_i} \\ &\leq r_i \end{aligned}
$$

portanto

$$\min_{y \in A_i} ||Tx - y|| \leq \tilde{\beta}(T_{E_i,F_i}) + 1/2 \varepsilon c_i^{-1}$$

para todo $x \in E_i$, $||x||_{E_i} \leq 1$.
Pela hipótese de aproximação H_1, seja $P \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ satisfazendo (i) e (ii) e tal que

$$
(5.3) \qquad ||I - P||_{L_{F_i,F_i}} \leq c_i
$$

e

$$
(5.4) \qquad ||x - Px||_{F_i} \leq \varepsilon/2
$$

para todo $x \in A_i$ $(i = 0, 1)$.
De (2), (3) e (4) obtemos

$$
\begin{aligned}
||(I-P)(Tx)||_{F_i} &= ||I(Tx) - P(Tx)||_{F_i} = \\
&= ||I(Tx) - P(Tx) + I(y_j) - I(y_j) + P(y_j) - P(y_j)||_{F_i} \\
&= ||(I(Tx) - y_j - P(Tx) + P(y_j)) + (I(y_j - P(y_j)||_{F_i} \\
&\leq ||(I(Tx - y_j) - P(Tx - y_j)||_{F_i} + ||(I-P)y_j||_{F_i} \\
&\leq ||I - P|| \, ||Tx - y_j|| + ||y_j - Py_j||_{F_i} \\
&\leq c_i(\tilde{\beta}(T_{E_i,F_i}) + \frac{1}{2}\varepsilon c_i^{-1}) + \frac{1}{2}\varepsilon \\
&= c_i\tilde{\beta}(T_{E_i,F_i}) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

para $i = 0, 1$, logo $||T - PT||_{L(E_i,F_i)} \leq c_i\tilde{\beta}(T_{E_i,F_i}) + \varepsilon$.

5.2.2 TEOREMA. Sejam $\{E_0, E_1\}$ e $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach, e suponhamos que $\{F_0, F_1\}$ satisfaça a hipótese de aproximação H_1 e sejam E, F espaços de interpolação do tipo ρ, onde $\rho \in P^{+-}$ e $\varepsilon > 0$ dado. Então se $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$, temos que:

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C \, \overline{\rho}(c_1\tilde{\beta}(T_{E_1,F_1}) + \varepsilon) \, \frac{\overline{\rho}(1/(c_0\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon))}{1/(c_0\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon)}$$

onde c_0, c_1 são as mesmas constantes do Lema 1.
Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $P \in L(\{F_0, F_1\}, \{F_0, F_1\}$ como no Lema 5.2.1. Então pelo teorema do gráfico fechado o operador $P : F_k \to F_0 \cap F_1$, (k = 0,1) é limitado. Pela definição $F_0 \cap F_1 \hookrightarrow F$, então $PT : E_k \to F$ e como $P : F_0 \to F_0$ é compacto, temos que

$PT : E_0 \to F$ compacto e $PT : E_1 \to F$ limitado, portanto pelo Teorema de Lions-Peetre 2.1.1 obtemos que $PT : E \to F$ é compacto. Assim se considerarmos a decomposição $T = PT + (T - PT)$ temos para qualquer sub-conjunto limitado Ω de E que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_F(T(\Omega)) &\leq \tilde{\psi}_F(PT(\Omega)) + \tilde{\psi}_F((T - PT)(\Omega)) \\ &= \tilde{\psi}_F((T - PT)(\Omega)) \\ &\leq \|T - PT\|_{L(E,F)}\, \tilde{\psi}_E(\Omega) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue porque $T - PT$ é uma $\|T - PT\|_{L(E,F)}$ contração restrita. Como E e F são espaços de interpolação do tipo ρ, temos que:

$$\|T - PT\|_{L(E,F)} \leq C\, \|T - PT\|_{L(E_0,F_0)}\, \overline{\rho}\left(\frac{\|T - PT\|_{L(E_1,F_1)}}{\|T - PT\|_{L(E_0,F_0)}}\right) \tag{5.5}$$

assim pelo Lema 5.2.1, da submultiplicatividade de $\rho(t)$ e do fato que $\frac{\rho(t)}{t}$ é não crescente segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_F(T(\Omega)) &\leq \|T - PT\|_{L(E,F)}\, \tilde{\psi}_E(\Omega) \\ &\leq C\, \|T - PT\|_0\, \overline{\rho}\left(\frac{\|T - PT\|_1}{\|T - PT\|_0}\right) \tilde{\psi}_E(\Omega) \leq \\ &\leq C\, \|T - PT\|_0\, \overline{\rho}(\|T - PT\|_1)\, \overline{\rho}\left(\frac{1}{\|T - PT\|_0}\right) \tilde{\psi}_E(\Omega) \\ &= C\, \overline{\rho}(\|T - PT\|_1)\, \frac{\overline{\rho}\left(\frac{1}{\|T - PT\|_0}\right)}{\frac{1}{\|T - PT\|_0}}\, \tilde{\psi}_E(\Omega) \\ &\leq C\, \overline{\rho}(c_1 \hat{\beta}(T_{E_1,F_1}) + \varepsilon)\, \frac{\overline{\rho}\left(\frac{1}{c_0 \hat{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon}\right)}{\frac{1}{c_0 \hat{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon}}\, \tilde{\psi}_E(\Omega) \end{aligned}$$

assim obtemos o teorema.

5.3 Consequências

5.3.1 COROLÁRIO. (Teorema de Compacidade de Persson) Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e sejam E e F espaços de interpolação do tipo ρ, onde $\rho \in P^{+-}$. Suponhamos que o par $\{F_0, F_1\}$ satisfaz a hipótese de aproximação H_1. Então se $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ tal que $T : E_0 \to F_0$ é compacto temos que $T : E \to F$ é compacto.

Demonstração: Pelo teorema 5.2 temos que

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\,\overline{\rho}(c_1\tilde{\beta}(T_{E_1,F_1}) + \varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/(c_0\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon))}{1/(c_0\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon)}$$

e como $T : E_0 \to F_0$ é compacto, pela propriedade 1 do Capítulo 3 segue que $\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) = 0$, então

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq \overline{\rho}(c_1\tilde{\beta}(T_{E_1,F_1}) + \varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/\varepsilon)}{1/\varepsilon}$$

onde a desigualdade vale para todo $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{t\to\infty}\overline{\rho}(t)/t = 0$, tomando $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, $1/\varepsilon$ torna-se grande, logo obtemos que $\tilde{\beta}(T_{E,F}) = 0$ portanto $T : E \to F$ é compacto, o que conclui o teorema.

Capítulo 6

Teorema do Tipo Persson II

Neste capítulo fazemos um estudo semelhante ao feito no Capítulo 5, mas agora com uma hipótese de aproximação sobre os espaços de partida $\{E_0, E_1\}$. O teorema a seguir tem como corolário um teorema de compacidade de operadores, que é inédito na literatura ou pelo menos não conseguimos qualquer referência.

6.1 A Hipótese de Aproximação

6.1.1 HIPÓTESE DE APROXIMACÃO H_2. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer e conjuntos finitos $\phi_0 \subset E_0$, $\phi_1 \subset E_1$, existe um operador $P \in L(\{E_0, E_1\}, \{E_0, E_1\})$, tal que:

(i) $P : E_k \longrightarrow E_k$ é compacto. (k = 0,1)

(ii) $P(E_k) \subset E_0 \cap E_1$ (k = 0,1)

(iii) $||P||_{L(E_k,E_k)} \leq 1$ e $||Px - x||_{E_k} \leq \varepsilon$ para todo $x \in \phi_k$, $k = 0, 1$

A proposição 5.1.2 do capítulo anterior, que nos dá um exemplo de um espaço que satisfaz a hipótese de aproximação H_1, também satisfaz H_2.

6.2 Resultados Principais

6.2.1 LEMA. Seja $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$. Suponhamos que o par de interpolação $\{E_0, E_1\}$ satisfaça a hipótese de aproximação H_2. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $P \in L(\{E_0, E_1\}, \{E_0, E_1\})$, que satisfaz (i) e (ii) tal que

$$||T - TP||_{L(E_k,F_k)} \leq 4\, \tilde{\beta}(T_{E_k,F_k}) + \varepsilon$$

para $k = 0, 1$.

Demonstração: Para todo $\varepsilon > 0$, existem conjuntos finitos $\phi_k \subset E_k$ tal que para todo $x \in U_{E_k}$ temos

$$\min_{y\in\phi_k} ||Tx - Ty||_{F_k} \leq 2\,\tilde{\beta}(T_{E_k,F_k})$$

De fato, como $\overline{U}_{E_k}$ é limitado, então $\tilde{\psi}_{E_k}(\overline{U}_{E_k})$ e $\tilde{\psi}_{F_k}(T(\overline{U}_{E_k}))$ são finitos. Pelas propriedades das proposições 3.1 e 3.2 temos que

$$\tilde{\psi}_{F_k}(T(\overline{U}_{E_k})) = \tilde{\beta}(T_{E_k,F_k})$$

e

$$\tilde{\psi}_{F_k}(T(\overline{U}_{E_k}) \leq \psi_{F_k}(T(\overline{U}_{E_k}) \leq 2\,\tilde{\psi}_{F_k}(T(\overline{U}_{E_k})$$

portanto $\psi_{F_k}(T(\overline{U}_{E_k}) \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$, onde usamos $\beta(T_k)$ no lugar de $\beta(T_{E_k,F_k})$ para facilitar a notação.
Pela definição de $\psi_{F_k}(T(\overline{U}_{E_k}))$ existe uma cobertura $(V_{i,k})_{i=1}^{n}$ de $T(\overline{U}_{E_k})$ tal que $T(\overline{U}_{E_k}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{i,k}$ e $diam(V_{i,k}) \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$, $k = 0, 1$. Assim

$$T(\overline{U}_{E_k}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{i,k}$$

implica que

$$\overline{U}_{E_k} \subset T^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} V_{i,k}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} T^{-1}(V_{i,k}) \subset E_k$$

e também temos que $T(T^{-1}(V_{i,k})) \subset V_{i,k}$, logo $diam(T(T^{-1}(V_{i,k}))) \leq diam(V_{i,k})$.
Agora seja $(B_i)_{i=1}^{n}$ um conjunto de bolas, onde cada bola B_i é uma bola maximal em $T^{-1}(V_{i,k}) \cap \overline{U}_{E_k}$, ou seja B_i é a maior bola totalmente contida em $T^{-1}(V_{i,k}) \cap \overline{U}_{E_k}$. Seja y_i o centro dessa bola, então

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in T^{-1}(V_{i,k})\cap\overline{U}_{E_k}} ||Tx - Ty_i||_{F_k} &\leq \sup_{x\in T^{-1}(V_{i,k})} ||Tx - Ty_i||_{F_k} \\
&\leq \sup_{x,y\in T^{-1}(V_i)} ||Tx - Ty||_{F_k} \\
&= diam(T(T^{-1}(V_{i,k}))) \\
&\leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)
\end{aligned}$$

portanto

$$||Tx - Ty_i||_{F_k} \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$$

para todo $x \in T^{-1}(V_i) \cap U_{E_k}$. Denotemos agora por ϕ_k o conjunto formado pelos centros das bolas B_i. Como ϕ_k é finito temos

$$\min_{y\in\phi_k} ||Tx - Ty||_{E_k} \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$$

para todo $x \in U_{E_k}$.
Considere a sequência (B_i) de bolas maximais dada acima. Temos que y_I é o centro de B_i e seja r_i o seu raio. Como $\{E_0, E_1\}$ satisfaz H_2, seja $P \in L(E_k, E_k$, satisfazend o (i), (ii), $||P|| \leq 1$ e tal que $||Py - y|| \leq \varepsilon'$ para todo $y \in \phi_k$, onde $\varepsilon' \leq \min\{\frac{r_1}{2}, \cdots, \frac{r_n}{2}, \frac{\varepsilon}{||T||}\}$.
Assim como $||P|| \leq 1$, temos que $P(\overline{U}_E) \subset \overline{U}_E$, e considerando os conjuntos dados acima, temos que

$$T(P(\overline{U}_E)) \subset T(\overline{U}_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{i,k}$$

implica que

$$\overline{U}_E \subset \bigcup_{i=1}^{n} P^{-1}(T^{-1}(V_i)))$$

Afirmamos que $P^{-1}(T^{-1}(V_i)) \neq$. Consideremos (B_i). Seja $x \in B_i$ tal que $||x - y_i||_{E_k} \leq r_i/2$. Então $Px \in B_i$, pois

$$\begin{aligned}
||Px - y_i||_{E_k} &= ||Px - Py_i + Py_i - y_i||_{E_k} \\
&\leq ||Px - Py_i||_{E_k} + ||Py_i - y_i||_{E_k} \\
&\leq ||P||_{L(E_k, E_k)}||x - y_i||_{E_k} + ||Py_i - y_i||_{E_k} \\
&\leq r_i/2 + r_i/2 = r
\end{aligned}$$

portanto $Px \in B_i \subset T^{-1}(V_{i,k})$, implicando $x \in P^{-1}(T^{-1}(V_{i,k}))$ o que prova a afirmação. Assim

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in P^{-1}(T^{-1}(V_{i,k})) \cap \overline{U}_{E_k}} ||TPx - TPy_i||_{F_k} &\leq \sup_{x \in P^{-1}(T^{-1}(V_{i,k}))} ||TPx - TPy_i||_{F_k} \\
&\leq \sup_{x,y \in P^{-1}(T^{-1}(V_{i,k}))} ||TPx - TPy||_{F_k} \\
&= \sup_{Px, Py \in T^{-1}(V_{i,k})} ||TPx - TPy||_{F_k} \\
&\leq \sup_{x,y \in T^{-1}(V_i)} ||Tx - Ty||_{F_k} \\
&= diam(T(T^{-1}(V_{i,k})) \\
&\leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)
\end{aligned}$$

assim também temos que

$$\min_{y \in \phi_k} ||TPx - TPy||_{F_k} \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$$

para todo $x \in U_{E_k}$.

Assim para $x \in U_{E_k}$ fixado, existe $y_i \in \phi_k$ tal que

$$||Tx - Ty_i||_{E_k} \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$$

e existe $P \in L(E_k, E_k)$ satisfazendo (i) e (ii) de H_2, $||Py_i - y_i||_{E_k} \leq \varepsilon' \leq \varepsilon/||T||$ e

$$||TPx - TPy_i||_{F_k} \leq 2\tilde{\beta}(T_k)$$

Então

$$\begin{aligned}
||(T - TP)x||_{F_k} &= ||Tx - TPx||_{F_k} \\
&= ||Tx - TPx - Ty_i + Ty_i - TPy_i + TPy_i||_{F_k} \\
&\leq ||Tx - Ty_i||_{F_k} + ||Ty_i - TPy_i||_{F_k} + ||TPy_i - TPx||_{F_k} \\
&\leq 2\,\tilde{\beta}(T_k) + ||T||_k\,||y_i - Py_i||_{E_k} + 2\,\tilde{\beta}(T_k) \\
&\leq 4\,\tilde{\beta}(T_k) + ||T||_k\,\frac{\varepsilon}{||T||_k} \\
&\leq 4\,\tilde{\beta}(T_k) + \varepsilon
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração.

6.2.2 TEOREMA. Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e suponha que $\{E_0, E_1\}$ satisfaz a hipótese de aproximação H_2. Sejam $E = (E_0, E_1)_{\rho,q}$ e $F = (F_0, F_1)_{\rho,q}$ onde ρ é uma parâmetro funcional e $q \in [1, \infty)$. Então se $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ temos

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\,\overline{\rho}(4\,\tilde{\beta}(T_1) + \varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/(4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon))}{1/(4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon))}$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja $P \in L(\{E_0, E_1\}, \{E_0, E_1\})$ dado como no Lema 6.2.1 , então $TP \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ e

$$TP : E_k \to F_k$$

é compacto, portanto pelo Teorema de Hayakawa temos que

$$TP : E \to F$$

é compacto.

Consideremos a decomposição $T = TP + (T - TP)$ e seja B um conjunto limitado de E, assim

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_F(T(B)) &= \tilde{v}_F((TP + (T - TP))(B)) \\
&\leq \tilde{v}_F(TP(B)) + \tilde{v}_F((T - TP)(B)) \\
&= \tilde{v}_F((T - TP)(B)) \\
&\leq ||T - TP||_{L(E,F)}\,\tilde{v}_E(B)
\end{aligned}$$

Agora como E e F são espaços de interpolação do tipo ρ temos

$$||T - TP||_{L(E,F)} \leq C\,||T - TP||_{L(E_0,F_0)}\,\bar{\rho}(\frac{||T - TP||_{L(E_1,F_1)}}{||T - TP||_{L(E_0,F_0)}})$$

e pelo Lema 6.2.1

$$\|T - TP\|_k \leq 4\,\tilde{\beta}(T_k) + \varepsilon \quad (k = 0, 1)$$

assim temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_F(T(B)) &\leq \|T - TP\|_{L(E,F)}\,\tilde{\psi}_E(B) \\
&\leq C\,\|T - TP\|_0\,\overline{\rho}\left(\frac{\|T - TP\|_1}{\|T - TP\|_0}\right)\,\tilde{\psi}_E(B) \\
&\leq C\,\overline{\rho}(\|T - TP\|_1)\,\frac{\overline{\rho}(1/\|T - TP\|_0)}{1/\|T - TP\|_0}\,\tilde{\psi}_E(B) \\
&\leq C\,\overline{\rho}(4\,\tilde{\beta}(T_1) + \varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon)}{1/4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon}\,\tilde{\psi}_E(B)
\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

6.3 Consequências

6.3.1 COROLÁRIO Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e sejam $E = (E_0, E_1)_{\rho,q}$, $F = (F_0, F_1)_{\rho,q}$ onde $\rho \in P^{+-}$ e $q \in [1, \infty)$. Suponhamos que $\{E_0, E_1\}$ satisfaça a Hipótese de Aproximação H_2. Dado $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ tal que ou $T : E_0 \to F_0$ ou $T : E_1 \to F_1$ seja compacto, então $T : E \to F$ é compacto.

Demonstração: Consideremos primeiro que $T : E_0 \to F_0$ é compacto. Então $\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) = 0$, e pelo teorema acima temos que

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\,\overline{\rho}(4\,\tilde{\beta}(T_1) + \varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/(4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon))}{1/(4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon)} \quad (1)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\tilde{\beta}(T_0) = 0$ obtemos

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\,\overline{\rho}(4\,\tilde{\beta}(T_1) + \varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/\varepsilon)}{1/\varepsilon}$$

tomando-se $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, $1/\varepsilon$ torna-se grande e como $\lim_{t\to\infty} \overline{\rho}(t)/t = 0$ segue que $\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq 0$ logo $\tilde{\beta}(T_{E,F}) = 0$ o que implica que $T : E \to F$ é compacto. Agora se $T : E_1 \to F_1$ é compacto, então $\tilde{\beta}(T_1) = 0$ e por (1) temos que

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\,\overline{\rho}(\varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/(4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon))}{1/(4\,\tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon)}$$

como $\varepsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno e $\lim_{t\to 0} \overline{\rho}(t) = 0$ segue como no caso acima que $\tilde{\beta}(T_{E,F}) = 0$) o que implica que $T : E \to F$ é compacto.

Capítulo 7

Teorema do Tipo Cobos-Edmunds-Potter

Neste capítulo apresentamos um teorema de não-compacidade de operadores que não necessita de uma hipótese de aproximação, mas pedimos a inclusão dos espaços de chegada, ou seja $F_1 \hookrightarrow F_0$. A esse teorema segue como corolário o teorema de compacidade de Cobos-Edmunds-Potter.

7.1 Preliminares

Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$K_m = F_0 + 2^{-m} F_1$$

ou seja, consideramos $F_0 + F_1$ munido com a norma $K(\cdot, 2^{-m}, \{F_0, F_1\})$ e consideremos os espaços $\ell_p^\infty(K_m)$ das sequências (b_m) em K_m conforme foi definido na Sessão 1.2 do Capítulo 1. Suponhamos agora que $F_1 \hookrightarrow F_0$. Assim para todo $b \in F_0$ e $v \in F_1$ temos

$$K(2^{-m}, b) \leq \|b - v\|_{F_0} + 2^{-m}\|v\|_{F_1} \tag{7.1}$$

e logo

$$2^m K(2^{-m}, b) \leq 2^m \|b - v\|_{F_0} + \|v\|_{F_1} \tag{7.2}$$

Se $v = 0$ em (1), então

$$K(2^{-m}, b) \leq \|b\|_{F_0}$$

e tomando $v = b$ em (2) obtemos

$$2^m K(2^{-m}, b) \leq \|b\|_{F_1}$$

portanto

(7.3) $$2^{km}K(2^{-m},b) \leq ||b||_{F_k} \;\; b \in F_k \;\; (k=0,1)$$

Agora se $b \in \overline{F_0 \cap F_1}^0$, (fecho em F_0), existe uma sequência (v_i) em $F_0 \cap F_1$ tal que $v_i \to b$ em F_0, quando $i \to \infty$. Então temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} K(2^{-m},b) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{i\to\infty} K(2^{-m},v_i) \\
&\leq \lim_{m\to\infty}\lim_{i\to\infty} 2^{-m}||v_i||_{F_1} \\
&= \lim_{i\to\infty}\lim_{m\to\infty} 2^{-m}||v_i||_{F_1} = 0
\end{aligned}$$

logo $\lim_{m\to\infty} K(2^{-m},b) = 0$ para todo $b \in \overline{F_0 \cap F_1}^0$.

Seja j a aplicação que a cada elemento $b \in F_0 + F_1 = F_0$ associa a sequência constante igual a b, ou seja

$$j : b \to (b) = (b, b, \cdots)$$

Da desigualdade (3) vemos que

$$j : F_k \to \ell_k^\infty(K_m) \; k = 0,1$$

onde $\ell_k^\infty(K_m)$ tem a norma

$$||(a_n)||_{\ell_k^\infty(K_m)} = \sup_{m\in\mathbb{N}} 2^{km}K(2^{-m},a_n), \;\; k=0,1$$

Portanto $||j||_{L(F_k,\ell_k^\infty)} = 1$.

Agora temos que

$$\overline{\ell_0^\infty(K_m) \cap \ell_1^\infty}^0(K_m) = \ell_0^\infty(K_m)$$

Assim seja $\tilde{y} \in \overline{\ell_0^\infty(K_m) \cap \ell_1^\infty}^0(K_m) = \ell_0^\infty(K_m)$, então existe uma sequência $(\tilde{y}_i) \in \ell_0^\infty(K_m) = \ell_0^\infty(K_m) \cap \ell_1^\infty(K_m)$ tal que $\tilde{y}_i \to \tilde{y}$, logo

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} K(2^{-m},\tilde{y}_i) &= \lim_{m\to\infty} \inf_{\tilde{y}_i = y_{i,0}+y_{i,1}} \{||y_{i,0}||_{F_0} + 2^{-m}||y_{i,1}||_{F_1}\} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} (||0||_{F_0} + 2^{-m}||\tilde{y}_i||_{F_1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde $y_{i,0} \in \ell_0^\infty(K_m)$ e $y_{i,1} \in \ell_1^\infty(K_m)$ e tomamos $\tilde{y}_i = 0 + \tilde{y}_i$, logo

$$\lim_{m\to\infty} K(2^{-m},\tilde{y}_i) = 0$$

então

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} K(2^{-m},\tilde{y}) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{i\to\infty} K(2^{-m},\tilde{y}_i) \\
&= \lim_{i\to\infty}\lim_{m\to\infty} K(2^{-m},\tilde{y}_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

portanto concluimos que

$$\lim_{m\to\infty} K(2^{-m},\tilde{y})=0$$

7.2 Resultados Principais

7.2.1 LEMA. Sejam $\mathbb{E}=\{E_0,E_1\}$, $\mathbb{F}=\{F_0,F_1\}$ $\mathbb{L}=\{\ell_0^\infty(K_m),\ell_1^\infty(K_m)\}$ pares de Banach e suponhamos que $F_1\hookrightarrow F_0$. Dado $T\in L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ e $\varepsilon>0$, existe $\tilde{T}\in L(\mathbb{E},\mathbb{L})$ e $P_N\in L(\mathbb{L},\mathbb{L})$ tal que

$$||\tilde{T}-P_N\tilde{T}||_{L(E_0,\ell_0^\infty(K_m))}\leq\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0})+\varepsilon$$

Demonstração: Para $k=0,1$ existem conjuntos finitos $\phi_k\subset F_k$ tal que para todo $x\in U_{E_k}$ temos

$$(1)\quad \min_{y\in\phi_k}||Tx-y||_{F_k}\leq\tilde{\beta}(T_{E_k,F_k})+\frac{\varepsilon}{2}$$

onde esses conjuntos são construidos como no Lema 5.2.1. Agora definimos

$$\tilde{\phi}_k=j(\phi_k)\subset\ell_k^\infty(K_m)\ \ (k=0,1)$$

e

$$\tilde{T}=j\circ T$$

Assim os elementos de $\tilde{\phi}_k$ são sequências constantes de $\ell_k^\infty(K_m)$. Pelas definições de T e j temos que $\tilde{T}:E_k\to\ell_k^\infty(K_m)$, logo $\tilde{T}\in L(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
Seja $x\in U_{E_k}$, então (1) vale. Para $y\in\phi_k$, temos $j(y)\in\tilde{\phi}_k$, logo

$$\begin{aligned}
\min_{j(y)\in\tilde{\phi}_k}||\tilde{T}x-j(y)||_{\ell_k^\infty} &= \min_{y\in j^{-1}(\tilde{\phi}_k)}||\tilde{T}x-j(y)||_{\ell_k^\infty}\\
&\leq^* \min_{y\in\phi_k}||\tilde{T}x-j(y)||_{\ell_k^\infty}\\
&= \min_{y\in\phi_k}||(j\circ T)x-j(y)||_{\ell_k^\infty}\\
&= \min_{y\in\phi_k}||j(Tx-y)||_{\ell_k^\infty}\\
&\leq \min_{y\in\phi_k}||j||_{L(F_k,G_k)}||Tx-y||_{F_k}\\
&= \min_{y\in\phi_k}||Tx-y||_{F_k}\\
&\leq \tilde{\beta}(T_{E_k,F_k})+\varepsilon/2
\end{aligned}$$

logo

$$(7.4)\qquad \min_{j(y)\in\tilde{\phi}_k}||\tilde{T}x-j(y)||_{G_k}\leq\tilde{\beta}(T_{E_k,F_k})+\frac{\varepsilon}{2},\ (k=0,1)$$

A desigualdade $*$ se demonstra observando que $\phi_k \subset j^{-1}(\tilde{\phi}_k)$.
Dadó $(x_n) \in \ell_k^\infty(K_m)$, seja P_N o operador

$$P_N((x_n)) = (x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}, 0, 0, \cdots)$$

logo $P_N : \ell_k^\infty(K_m) \to \ell_k^\infty(K_m)$
Como $\lim_{m\to\infty} K(2^{-m}, \tilde{y}) = 0$ para $\tilde{y} \in \ell_0^\infty$, temos

$$\lim_{m\to\infty} K(2^{-m}, j(y)) = 0$$

onde $y \in \phi_0$ e $j(y) \in \hat{\phi}_0$. Assim existe N' tal que

$$(2) \quad ||j(y) - P_{N'}(j(y)||_{\ell_0^\infty} < \varepsilon/2$$

para todo $j(y) \in \hat{\phi_0} \subset G_0$.

Agora dado $x \in U_{E_0}$, por (1) existe $\tilde{y_0} \in \hat{\phi_0}$ tal que $||\tilde{T}x - \tilde{y_0}||_{\ell_0^\infty} \leq \varepsilon/2$ portanto

$$\begin{aligned}
||\tilde{T}x - P_N\tilde{T}x||_{\ell_0^\infty} &= ||I(\tilde{T}x) - P_N\tilde{T}x||_{\ell_0^\infty} \\
&= ||I(\tilde{T}x) - P_N(\tilde{T}x) + I(\tilde{y}_k) - I(\tilde{y_k}) + P_N(\tilde{y}_k) - P_N(\tilde{y_k})||_{\ell_0^\infty} \\
&= ||I(\tilde{T}x - \tilde{y}_k) - P_N(\tilde{T}x) + P_N(\tilde{y}_k) + I(\tilde{y}_k - P_N(\tilde{y_k}))||_{\ell_0^\infty} \\
&\leq ||I(\tilde{T}x - \tilde{y}_k) - P_N(\tilde{T}x - \tilde{y}_k)||_{\ell_0^\infty} + ||\tilde{y}_k - P_N\tilde{y}_k||_{\ell_0^\infty} \\
&= ||I - P_N||_{L(\ell_0^\infty, \ell_0^\infty)}||\tilde{T}x - \tilde{y}_k||_{\ell_0^\infty} + ||\tilde{y}_k - P_N\tilde{y}_k||_{\ell_0^\infty} \\
&< \tilde{\beta}(T_{E_k,F_k}) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \tilde{\beta}(T_{E_k,F_k}) + \varepsilon
\end{aligned}$$

logo temos que

$$||\tilde{T}x - P_N\tilde{T}x||_{\ell_0^\infty} \leq \tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon$$

para todo $x \in U_{E_0}$, portanto

$$||\tilde{T} - P_N\tilde{T}||_{L(E_0,\ell_0^\infty)} \leq \tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon$$

o que demonstra o Lema.

7.2.1 TEOREMA. Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e suponha $F_1 \hookrightarrow F_0$. Seja $E = (E_0, E_1)_{\rho,p}$, $F = (F_0, F_1)_{\rho,p}$ onde ρ é um parâmetro funcional e $p \in [0, \infty]$. Então se $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\}$ temos

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\,\overline{\rho}(||T||_1)\,\frac{\overline{\rho}(1/(\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon))}{1/(\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon)}$$

Demonstração: Sejam $\tilde{T}$ e P_N operadores dados como no Lema 7.2.1. Para todo N, $P_N\tilde{T}$ é compacto de E_k para $\ell_k^\infty(K_m)$. Pelo Teorema de Hayakawa, o operador

$$P_N\tilde{T} : E \to (\ell_0^\infty(K_m), \ell_1^\infty(K_m))_{\rho,p} = \ell_\gamma^p(K_m)$$

é também compacto e $\gamma(t) = 1/\rho(t^{-1})$. Tomando a decomposição

$$\tilde{T} = P_N\tilde{T} + (\tilde{T} - P_N\tilde{T})$$

e tomando $B \subset E$ limitado, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{\ell_\gamma^p}(\tilde{T}(B)) &= \tilde{\psi}_{\ell_\gamma^p}((P_N\tilde{T} + (\tilde{T} - P_N\tilde{T}))(B)) \\
&\leq \tilde{\psi}_{\ell_\gamma^p}(P_N\tilde{T}(B)) + \tilde{\psi}_{\ell_\gamma^p}((\tilde{T} - P_N\tilde{T})(B)) \\
&\leq \|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_{L(E,\ell_\gamma^p)}\tilde{\psi}_E(B)
\end{aligned}$$

pois $P_N\tilde{T}$ é compacto e $\tilde{T} - P_N\tilde{T}$ é uma $\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|$ b-contração. Como E e $\ell_\gamma^p(K_m)$ são espaços de interpolação do tipo ρ temos que

$$\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_{L(E,\ell_\gamma^p)} \leq C\ \|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_{L(E_0,\ell_0^\infty)}\,\bar{\rho}\left(\frac{\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_{L(E_1,\ell_1^\infty)}}{\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_{L(E_0,\ell_0^\infty)}}\right)$$

e pelo Lema 7.2.1

$$\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_{L(E_0,\ell_0^\infty)} \leq \tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon$$

onde $\varepsilon > 0$ arbitrário. Assim

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{\ell_\gamma^p}(\tilde{T}(B)) &\leq \|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_{L(E,\ell_\gamma^p)}\ \tilde{\psi}_E(B) \\
&\leq C\ \|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_0\,\overline{\rho}\left(\frac{\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_1}{\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_0}\right)\tilde{\psi}_E(B) \\
&\leq C\ \|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_0\,\overline{\rho}(\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_1)\,\overline{\rho}\left(\frac{1}{\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_0}\right)\tilde{\psi}_E(B) \\
&= C\ \overline{\rho}(\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_1\,\frac{\overline{\rho}\left(\frac{1}{\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_0}\right)}{\frac{1}{\|\tilde{T} - P_N\tilde{T}\|_0}}\ \tilde{\psi}_E(B) \\
&\leq C\ \overline{\rho}(\|T\|_1)\,\frac{\overline{\rho}\left(\frac{1}{\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0})+\varepsilon}\right)}{\frac{1}{\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0})+\varepsilon}}\ \tilde{\psi}_E(B)
\end{aligned}$$

e como vale que

$$\tilde{\psi}_{\ell_\gamma^p(K_m)}(\tilde{T}(B)) = \tilde{\psi}_{(F_0,F_1)_{\rho,p}}(T(B))$$

o teorema segue.

7.3 Consequências

7.3.1 COROLÁRIO (Teorema de Cobos-Edmunds-Potter) Sejam $\{E_0, F_0\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e suponhamos que $F_1 \hookrightarrow F_0$. Seja $E = (E_0, E_1)_{\rho,p}$ e $F = (F_0, F_1)_{\rho,p}$, onde $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $p \in (0, \infty]$. Então se $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\}$ tal que $T : E_0 \to F_0$ é compacto temos que $T : E \to F$ é também compacto.

Demonstração: Como $T : E_0 \to F_0$ é compacto, temos que $\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) = 0$ e pelo teorema 7.2.2 temos que

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\, \overline{\rho}(||T||_1)\, \frac{\overline{\rho}(1/(\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon))}{1/(\tilde{\beta}(T_{E_0,F_0}) + \varepsilon)}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\tilde{\beta}(T_0) = 0$ então obtemos

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\, \overline{\rho}(||T||_1)\, \frac{\overline{\rho}(1/\varepsilon)}{1/\varepsilon}$$

tomando-se $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, $1/\varepsilon$ torna-se grande e como $\lim_{t\to\infty} \overline{\rho}(t)/t = 0$ segue que $\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq 0$ o que implica $\tilde{\beta}(T_{E,F}) = 0$, portanto $T : E \to F$ é compacto.

Capítulo 8

Teorema do Tipo Cobos-Fernandez

O teorema aqui apresentado, de modo semelhante ao teorema do capítulo anterior, pede a inclusão de espaços, mas agora dos espaços de saída, ou seja $E_0 \hookrightarrow E_1$. Um fato a ser notado é que apesar de obter um resultado semelhante, a tecnica de demonstração é muito diferente da usada no teorema do Capítulo 7. Segue como corolário o teorema de compacidade de Cobos-Fernandez.

8.1 Preliminares

Sejam $\{E_0, E_1\}$ e $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e suponhamos que $E_0 \hookrightarrow E_1$. Definimos $G_m = E_0 \cap 2^m E_1$ e consideremos os espaços $\ell_0^1(G_m)$ e $\ell_1^1(G_m)$, onde $(x_n) \in \ell_k^1(G_m)$ se

$$\|(x_n)\|_{\ell_k^1(G_m)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nk} J(2^n, x_n) < \infty \quad (k = 0, 1)$$

Dado $(x_n) \in \ell_k^1(G_m)$, definimos o operador σ do seguinte modo

$$\sigma((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Vemos então que $\sigma : \ell_k^1(G_m) \to E_k \;\; (k = 0, 1)$. Definimos $P_N : \ell_k^1(G_m) \to \ell_k^1(G_m) \;\; (k = 0, 1)$ por

$$P_N((x_n)) = (x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}, 0, 0, \cdots)$$

e temos que $\|P_N\|_{L(\ell_k^1(G_m), \ell_k^1(G_m))} = 1$.
Dado $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ seja $\hat{T}$ o seguinte operador

$$\hat{T} = T \circ \sigma : \ell_k^1(G_m) \to F_k$$

8.2 Resultados Principais

8.2.1 LEMA. Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ e $\{\ell_0^1(G_m), \ell_1^1(G_m)\}$ pares de Banach. Dados $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\}$ e $\varepsilon > 0$, seja $\widehat{T} \in L(\{\ell_0^1(G_m), \ell_1^1(G_m)\}, \{F_0, F_1\})$ como definido acima. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$E_0 \hookrightarrow E_1$

$$\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_{L(\ell_k^1(G_m), F_k)} \leq 4\, \tilde{\beta}(T_k) + \varepsilon$$

para $k = 0, 1$.

Demonstração: Seja $\widehat{x} \in \overline{U}_{\ell_k^1(G_m)}$, portanto $\widehat{x} = (x_n)$ com $x_n \in E_0 \cap 2^n E_1$ e

$$\|(x_n)\|_{\ell_k^1(G_m)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-nk} J(2^n, x_n) \leq 1$$

Primeiro consideremos $\widehat{x} \in U_{\ell_0^1(G_m)}$. Então $\sigma(\widehat{x}) \in E_0$ e

$$\begin{aligned}
\|\sigma(\widehat{x})\|_{E_0} &= \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|_{E_0} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{E_0} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \max\{\|x_n\|_{E_0}, 2^n \|x_n\|_{E_1}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} J(2^n, x_n) \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Agora seja $\widehat{x} \in \overline{U}_{\ell_1^1(G_m)}$, então $\sigma(\widehat{x}) \in E_1$ e

$$\begin{aligned}
\|\sigma(\widehat{x})\|_{E_1} &= \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|_{E_1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{E_1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, 2^n \|x_n\|_{E_1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \max\{\|x_n\|_{E_0}, 2^n \|x_n\|_{E_1}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} J(2^n, x_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\widehat{x}\|_{\ell^1_k(G_m)} \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

Portanto para $\widehat{x} \in U_{\ell^1_k(G_m)}$ temos $\|\sigma(\widehat{x})\|_{E_k} \leq 1$, e $\|\sigma\|_{L(\ell^1_k(G_m),E_k)} \leq 1$.

Sejam $\overline{U}_k$ e $\overline{U}_{\ell^1_k}$ as bolas unitárias em E_k e $\ell^1_k(G_m)$ respectivamente. Como $\sigma : \ell^1_k(G_m) \to E_k$ e $\|\sigma\|_k \leq 1$ temos que $\sigma(\overline{U}_{\ell^1_k}) \subset \overline{U}_{E_k}$. Conforme foi feito no lema 6.2.2, temos que

$$\psi_{F_k}(T(U_{E_k})) \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$$

e pela definição de ψ, existe uma cobertura finita (V_i) de $T(\overline{U}_{E_k})$ tal que $T(\overline{U}_{E_k}) \subset \cup_{i=1}^n V_i$ e $diam(V_i) \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$. Então, como

$$\overline{U}_{E_k} \subset \cup_{i=1}^n T^{-1}(V_i)$$

vamos ter

$$\sigma(\overline{U}_{\ell^1_k}) \subset \overline{U}_{E_k} \subset \cup_{i=1}^n T^{-1}(V_i)$$

o que implica

$$\overline{U}_{\ell^1_k} \subset \sigma^{-1}(\overline{U}_{E_k}) \subset \cup_{i=1}^n \sigma^{-1}(T^{-1}(V_i)))$$

e observamos que

$$diam(T(\sigma(\sigma^{-1}(T^{-1}(V_i))))) = diam(\widehat{T}(\widehat{T}^{-1}(V_i))) \leq diam(V_i) \leq 2\tilde{\beta}(T_k).$$

Seja $(\widehat{B}_i)$ uma sequencia de bolas, tal que $\widehat{B}_i$ é uma bola maximal em $\sigma^{-1}(T^{-1}(V_i)) \cap \overline{U}_{\ell^1_k}$ e seja $\widehat{y}_i$ o seu centro. Como $\widehat{B}_i \subset \sigma^{-1}(T^{-1}(V_i))$ então

$$\widehat{T}(\widehat{B}_i) \subset \widehat{T}(\widehat{T}^{-1}(V_i)) \subset V_i$$

e $diam(\widehat{T}(V_i)) \leq diam(\widehat{T}(\widehat{T}^{-1}(V_i))) \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$ Logo

$$\sup_{\widehat{x} \in \sigma^{-1}(T^{-1}(V_i)) \cap \overline{U}_{\ell^1_k}} \|\widehat{T}\widehat{x} - \widehat{T}\widehat{y}_i\|_{F_k} \leq diam(\widehat{T}(\widehat{T}^{-1}(V_i)))$$

e portanto $\|\widehat{T}\widehat{x} - \widehat{T}\widehat{y}_i\|_{F_k} \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k)$ para todo $\widehat{x} \in \sigma^{-1}(T^{-1}(V_i)) \cap \overline{U}_{E_k}$. Seja $\widehat{c}_k$ o conjunto finito formado pelos $\widehat{y}_i$. Então

$$\min_{\widehat{y} \in \widehat{c}_k} \|\widehat{T}\widehat{x} - \widehat{T}\widehat{y}\|_{F_k} \leq 2\,\tilde{\beta}(T_k) \tag{8.1}$$

para todo $\widehat{x} \in \overline{U}_{\ell_k^1}$.

Agora seja $\widehat{y} \in \phi_k \subset \ell_k^1(G_m)$. Assim $\|\widehat{y}\|_{\ell_k^1(G_m)} < \infty$ ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-nk} J(2^n, y_n) < \infty$$

onde $k = 0, 1$ e $\widehat{y} = (y_n)$. Como para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-nk} J(2^n, y_n) < \varepsilon \ ,$$

considerando operador de corte P_N temos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{T}\widehat{y} - \widehat{T}P_N\widehat{y}\|_{F_k} &\le \|\widehat{T}\|_{L(\ell_k^1(G_m),F_k)} \|\widehat{y} - P_N\widehat{y}\|_{\ell_k^1(G_m)} \\
&= \|\widehat{T}\|_{L(\ell_k^1(G_m))} \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-nk} J(2^n, y_n) \\
&< \|\widehat{T}\|_{L(\ell_k^1(G_m),F_k)}\, \varepsilon
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\phi_k \subset \ell_k^1(G_m)$ é finito ($k = 0, 1$), dado $\varepsilon' > 0$ existe N tal que

$$\|\widehat{T}\widehat{y} - \widehat{T}P_N\widehat{y}\|_{F_k} \le \|\widehat{T}\|\, \varepsilon' \tag{8.2}$$

para todo $\widehat{y} \in \phi_k$.
Se $\widehat{x} \in \overline{U}_{\ell_k^1(G_m)}$, existe, por (8.1), $\widehat{y}_i \in \phi_k$ tal que

$$\|\widehat{T}\widehat{x} - \widehat{T}\widehat{y}\|_{\ell_k^1(G_m)} \le 2\, \tilde{\beta}(T_k)$$

Nesse ponto, devemos observar que do mesmo modo que foi feito no Lema 6.2.2, podemos escolher P_N satisfazendo (8.2) e

$$\|\widehat{T}P_N\widehat{x} - \widehat{T}P_n\widehat{x}y_i\|_{F_k} \le 2\ \ td\beta(T_k)$$

para o $\widehat{x}$ fixado acima.
Tomando $\varepsilon' = \varepsilon/\|T\|$ e P_N o operador corte, vamos ter

$$\begin{aligned}
\|(\widehat{T} - \widehat{T}P_N)\widehat{x}\|_{F_k} &= \|\widehat{T}\widehat{x} - \widehat{T}P_N\widehat{x}\|_{F_k} \\
&= \|\widehat{T}\widehat{x} - \widehat{T}P_N\widehat{x} - \widehat{T}\widehat{y}_i + \widehat{T}\widehat{y}_i - \widehat{T}P_N\widehat{y}_i + \widehat{T}P_N\widehat{y}_i\|_{F_k} \\
&\le \|\widehat{T}\widehat{x} - \widehat{T}\widehat{y}_i\|_{F_k} + \|\widehat{T}\widehat{y}_i - \widehat{T}P_N\widehat{y}_i\|_{F_k} + \|\widehat{T}P_N\widehat{y}_i - \widehat{T}P_N\widehat{x}\|_{F_k} \\
&\le 2\,\tilde{\beta}(T_k) + \|\widehat{T}\|_k \frac{\varepsilon}{\|\widehat{T}\|_k} + 2\,\tilde{\beta}(T_k) \\
&\le 4\,\tilde{\beta}(T_k) + \varepsilon
\end{aligned}$$

o que demonstra o lema.

8.2.2 TEOREMA. Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e suponhamos $E_0 \hookrightarrow E_1$. Sejam $E = (E_0, E_1)_{\rho,p}$, $F = (F_0, F_1)_{\rho,p}$, onde $\rho \in P^{+-}$ e $p \in [1, \infty)$. Entã para todo $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ temos

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\ \overline{\rho}(4\ \tilde{\beta}(T_1) + \varepsilon)\ \frac{\overline{\rho}(1/(4\ \tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon))}{1/(4\ \tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon)}$$

Demonstração: Sejam $P_N : \ell^1_k(G_m) \to \ell^1_k$, $\sigma : \ell^1_k(G_m) \to E_k$ $(k = 0, 1)$ e $\widehat{T} = \sigma \circ T$, operadores definidos como no Lema 8.2.1 e $\varepsilon > 0$ dado. Para todo N, P_N é compacto de $\ell^1_k(G_m)$ para $\ell^1_k(G_m)$, logo $\widehat{T} P_N$ também é compacto de ℓ^1_k para F_k. Pelo Teorema de Hayakawa, o operador

$$\widehat{T} P_N : (\ell^1_0(G_m), \ell^1_1(G_m))_{\rho,p} \to F$$

é também compacto e observamos que $(\ell^1_0(G_m), \ell^1_1(G_m))_{\rho,p} = \ell^p_\gamma(G_m)$ onde $\gamma(t) = 1/\rho(t^{-1})$. Considerando a decomposição

$$\widehat{T} = \widehat{T} P_N + (\widehat{T} - \widehat{T} P_N)$$

e tomando $B \subset \ell^p_\gamma$ limitado, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_F(\widehat{T}(B)) &= \tilde{\psi}_F(\widehat{T} P_N + (\widehat{T} - \widehat{T} P_N)) \\
&\leq \tilde{\psi}_F(\widehat{T} P_N(B)) + \tilde{\psi}_F((\widehat{T} - \widehat{T} P_N)(B)) \\
&= \tilde{\psi}_F((\widehat{T} - \widehat{T} P_N)(B)) \\
&\leq \|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_{L(\ell^p_\gamma, F)}\ \tilde{\psi}_{\ell^p_\gamma}(B)
\end{aligned}$$

Como ℓ^p_γ e F são espaços de interpolação do tipo ρ temos que

$$\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_{L(\ell^p_\gamma, F)} \leq C\ \|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_0\ \overline{\rho}\left(\frac{\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_1}{\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_0}\right) \tag{8.3}$$

e pelo Lema 8.2.1

$$\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_k \leq 2\ \tilde{\beta}(T_k) + \varepsilon$$

onde $k = 0, 1$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Assim

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_F(\widehat{T}(B)) &\leq \|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_{L(\ell^p_\gamma, F)}\ \tilde{\psi}_{\ell^p_\gamma}(B) \\
&\leq C\ \|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_0\ \overline{\rho}\left(\frac{\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_1}{\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_0}\right) \tilde{\psi}_{\ell^p_\gamma}(B) \\
&\leq C\ \|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_0\ \overline{\rho}(\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_1)\ \overline{\rho}(1/\|\widehat{T} - \widehat{T} P_N\|_0)\ \tilde{\psi}_{\ell^p_\gamma}(B)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\,\overline{\rho}(\|\widehat{T}-\widehat{T}P_N\|_1)\,\frac{\overline{\rho}(1/\|\widehat{T}-\widehat{T}P_N\|_0)}{1/\|\widehat{T}-\widehat{T}P_N\|_0}\,\tilde{\psi}_{\ell^p_\gamma}(B)\\
&\leq C\,\overline{\rho}(4\,\tilde{\beta}(T_1)+\varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/(4\,\tilde{\beta}(T_0)+\varepsilon))}{1/(4\,\tilde{\beta}(T_0)+\varepsilon)}\,\tilde{\psi}_{\ell^p_\gamma}(B)
\end{aligned}
$$

o resultado acima vale para todo $B \subset \ell^p_\gamma(G_m)$ limitado. Tomando $B = U_{\ell^p_\gamma}$ obtemos

$$\tilde{\psi}_F(\widehat{T}(U_{\ell^p_\gamma})) \leq C\,\overline{\rho}(4\,\tilde{\beta}(T_1)+\varepsilon)\,\frac{\overline{\rho}(1/(4\,\tilde{\beta}(T_0)+\varepsilon))}{1/(4\,\tilde{\beta}(T_0)+\varepsilon)}$$

pois $\tilde{\psi}_{\ell^p_\gamma}(U_{\ell^p_\gamma}) \leq 1$. Para finalizar o teorema afirmamos que

$$\sigma(U_{\ell^p_\gamma}) = U_E$$

de fato, se $\widehat{x} = (x_n) \in U_{\ell^p_\gamma}$, então

$$\|\widehat{x}\|_{\ell^p_\gamma} = (\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma(2^{-n})\,J(2^n,x_n))^p)^{1/p} < 1\ ,$$

e como $\gamma(2^{-n}) = \rho(2^n)^{-1}$ e $\sigma(\widehat{x}) = \sum x_n$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\sigma(\widehat{x})\|_E &= \inf_{\sigma(\widehat{x})=\sum u_n}\|\rho(2^n)^{-1}\,J(2^n,u_n)\|_{\ell^p(\mathbb{N})}\\
&\leq \|\rho(2^n)^{-1}\,J(2^n,x_n)\|_{\ell^p(\mathbb{N})}\\
&= (\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma(2^{-n})\,J(2^n,x_n))^p)^{1/p}\\
&= \|\widehat{x}\|_{\ell^p_\gamma}\\
&< 1
\end{aligned}
$$

o que implica $\sigma(U_{\ell^p_\gamma}) \subset U_E$. Por outro lado, se $x \in U_E$ temos

$$\|x\|_E = \inf_{x=\sum u_n}\|\rho(2^n)^{-1}\,J(2^n,u_n)\|_{\ell^p(\mathbb{N})} < 1$$

onde $u_n \in E_0 \cap E_1$, portanto $u_n \in E_0 \cap 2^n\,E_1$ assim, na definição da norma acima, seja $u_n' \in E_0 \cap 2^n\,E_1$ tal que $x = \sum u_n'$ e $\|\rho(2^n)^{-1}\,J(2^n,u_n')\|_{\ell^p(\mathbb{N})} < 1$, mas então $(u_n') \in U_{\ell^p_\gamma}$, tendo como consequência que $U_E \subset \sigma(U_{\ell^p_\gamma})$, logo demonstramos a afirmação. Assim temos que

$$\tilde{\psi}_F(\widehat{T}(U_{\ell^p_\gamma})) = \tilde{\psi}_F(T(\sigma(U_{\ell^p_\gamma}))) = \tilde{\psi}_F(T(U_E)) = \tilde{\beta}(T_{E,F})$$

o que demonstra o teorema.

8.3 Consequências

8.3.1 COROLARIO. (Teorema de Cobos-Fernandez). Sejam $\{E_0, E_1\}$, $\{F_0, F_1\}$ pares de Banach e suponhamos que $E_0 \hookrightarrow E_1$. Seja $E = (E_0, E_1)_{\rho,p}$, $F = (F_0, F_1)_{\rho,p}$ onde $\rho \in P^{+-}$, $0 < p \leq \infty$ e seja $T \in L(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ tal que $T : E_0 \to F_0$ é compacto. Então
$T : E \to F$ é compacto.

Demonstração: Do Teorema 8.2.2 sabemos que

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\, \overline{\rho}(4\, \tilde{\beta}(T_1 + \varepsilon)\, \frac{\overline{\rho}(1/(4\, \tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon))}{1/(4\, \tilde{\beta}(T_0) + \varepsilon))}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $T : E_0 \to F_0$ é compacto temos que $\tilde{\beta}(T_0) = 0$ logo

$$\tilde{\beta}(T_{E,F}) \leq C\, \overline{\rho}(4\, \tilde{\beta}(T_1) + \varepsilon)\, \frac{\overline{\rho}(1/\varepsilon)}{1/\varepsilon}$$

tomando $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, temos que $1/\varepsilon$ torna-se grande e como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\rho}(t)}{t} = 0$$

o corolario segue.

Bibliografia

[1] J. BERGH e J. LÖFSTRÖM, Interpolation Spaces, An Introduction. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[2] P. BUTZER e K. SCHERER, Approximations–Prozesse und Interpolations–Methoden. B.I.Hochschulskripten 826/826a. Hochschultaschenbücher–Verlag. Mannheim, 1968.

[3] P. BUTZER e H. BERENS, Semi-Groups of Operators and Aproximation. Springer-Verlag, 1967.

[4] D. W. BOYD, Indices of function spaces and their relationship to interpolation. Canadian J. Math. 21(1969), 1245-1254.

[5] D. W. BOYD, Indices for the Orlicz spaces. Pacific J. Math. 38(1971), 315-323.

[6] F. COBOS, D. E. EDMUNDS and A. J. B. POTTER, Real interpolation and compact linear operators. J. Funct. Anal. 88(1990), 351-365.

[7] F. COBOS and D. L. FERNANDEZ, On interpolation of compact operators. Arkiv för Mat. 27(1989), 211-217.

[8] D. L. FERNANDEZ e J. B. GARCIA, Interpolation of Orlicz- Valued Function Spaces and U.M.D Property. Studia Math. 99(1)(1991), 23-40.

[9] D. L. FERNANDEZ, Compact Linear Operators On Function Parameter Interpolation Spaces.

[10] J. B. Garcia, Interpolação de Espaços de Orlicz Vetoriais e Aplicações. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP (1991).

[11] J. GUSTAVSSON. A function parameter in connection with interpolation of Banach spaces. Math. Scand. 42 (1978), 289-305

[12] J. GUSTAVSSON and J. PEETRE. Interpolation of Orlicz spaces. Studia Math. 60 (1977), 33-59.

[13] K. HAYAKAWA. Interpolation by the real method presearves compactness of operators. J. Math. Soc. Japan. 21 (1969), 189-193.

[14] M. A. KRANOSEL'SKII. On a theorem of M. Riesz. Soviet Math. Dokl. 1 (1960), 229-231.

[15] M. A. KRANOSEL'SKII and YA. B. RUTICKII, Convex Functions and Orlicz Spaces. Noordhoff, Groningen, 1961.

[16] S. G. KREIN and Ju. I. TERUNIN, Scales of Banach spaces. Russian Math. Surveys 21 (1966), 85-159.

[17] J. L. LIONS, Sur les espaces d'interpolation, dialité. Math. Scand. 9 (1961), 147-177.

[18] J. L. LIONS and J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation. Pub. Math. de l'I.H.E.S. 19 (1964), 5-68.

[19] L. MALIGRANDA, Indices and interpolation. Dissertationes Math. $CCXXXIX$ (1985), 1-49.

[20] A. PERSSON, Compact linear mappings between interpolations spaces. Ark. Mat. 5 (1964), 215-219.

[21] M. F. TEIXEIRA e D. E. EDMUNDS, Interpolation Theory and Measures of Non-Comkpactness. Math. Nachr. 104(1981), 129-135.