

M MÉTODO DE CENTRAGEM USANDO PROJEÇÕES PONDERADAS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Andréa Hamazaki Feitosa e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de fevereiro de 1998.



Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti
Orientador

Dissertação, apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 20 de fevereiro de 1998

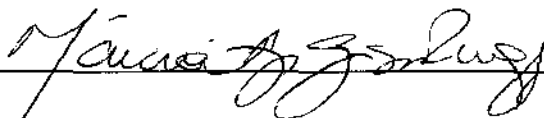
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS MORETTI



Prof (a). Dr (a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT



Prof (a). Dr (a). MARCIA APARECIDA GOMES RUGGIERO

*Esta tese é dedicada a
minha família e ao meu marido Emerson.*

Agradecimentos.

- Eu quero agradecer primeiramente ao Prof. Dr. Antonio C. Moretti, pela sua orientação, dedicação e confiança que fizeram possível o desenvolvimento integral deste trabalho.
- Em segundo, ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC-UNICAMP), pela oportunidade a qual se fez possível o sonho de me tornar Mestre. Gostaria de agradecer a entidade CAPES, pelo apoio financeiro durante o decorrer do trabalho, e também a FAEP pelo auxílio através do processo número 1223/97, para a conclusão do mesmo.
- Finalmente, gostaria de agradecer ao meu marido Emerson, pois sem ele esta tese não estaria pronta. Recebi também apoio de muita importância dos meus pais e meus irmãos, pois mesmo distantes eles estavam me apoiando em tudo. Também tenho a obrigação de agradecer todas as pessoas amigas dentro e fora do Instituto que me acompanharam nesta caminhada.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Centros de Politopos	3
2.1	Tipos de Centros	3
2.2	Centro de <i>Helly</i>	5
2.3	Centro de <i>John</i>	14
2.4	Procedimento para se Resolver Problemas de Programação Linear Usando <i>J</i> -centros	17
2.5	Centro Analítico	23
3	Método de Projeções Ponderadas	27
3.1	Método de Projeções Ponderadas	28
3.2	Existência de Pontos Fixos	32
4	Experiências Computacionais	33
4.1	Medida de Centricidade	33
4.2	Politopos no $\mathbb{R}^2$	35
4.3	Politopos Gerados	38
4.4	Politopos do NetLib	41
5	Conclusão	42
	Apêndice A – Centro Analítico	44
	Bibliografia	47

Capítulo 1

Introdução

O objetivo desta tese é estudar os centros de politopos de problemas de programação linear. Nós entendemos por politopo, a intersecção finita e não vazia de inequações lineares.

A importância deste estudo deve-se ao fato de que todos os algoritmos polinomiais de pontos interiores para se resolver problemas de programação linear tem um mecanismo explícito ou implícito de centragem.

A nossa primeira tarefa neste processo de estudo foi definir a noção de centro de politopo. Esta noção parece óbvia para politopos simples e de formato regular, mas, torna-se mais complicada para politopos gerais. Isto ocorre porque podemos definir centros de maneiras distintas, por exemplo, o centro do politopo pode ser o centro do elipsóide de menor volume que contém o politopo. Ou ainda, o centro da maior esfera contida no politopo.

Portanto, o centro do politopo depende da definição de centro que estamos usando, mas felizmente, várias destas definições são equivalentes no sentido de que ao usá-las, nós podemos resolver programação linear em tempo polinomial. Algumas definições de centros de politopo mais usadas, bem como, a descrição de um procedimento para se resolver programação linear em tempo polinomial usando-se uma destas definições em particular, são apresentadas no Capítulo 2 deste trabalho.

Após este estudo dos centros de politopos, onde apresentamos algumas definições de centros e também a importância de se calcular tais centros, nós propomos um método para se calcular um centro de politopo usando apenas projeções ponderadas nas restrições do problema de programação linear. Este

centro foi denominado de p -centro e ele é definido como o ponto fixo da sequência gerada pela aplicação que descreve o nosso método. A descrição deste novo procedimento e uma discussão sobre a existência de pontos fixos para esta sequência são apresentados no Capítulo 3.

No Capítulo 4, nós descrevemos as experiências computacionais, comparando o p -centro com o centro analítico (a noção de centro mais usada pelos algoritmos em pontos interiores). Esta comparação é feita em termos da qualidade de centragem, não nos preocupamos em comparar o número de iterações, nem o tempo total gasto pois os dois métodos tem características diferentes, ou seja, o algoritmo do p -centro é facilmente paralelizável tornando-se assim muito mais eficiente num ambiente paralelo. Enquanto, que o algoritmo do centro analítico é mais eficiente em um ambiente sequencial. E como a implementação foi feita em um máquina sequencial a comparação do algoritmo do p -centro e do algoritmo do centro analítico em termos de tempo seria injusta.

7

Capítulo 2

Centros de Politopos

2.1 Tipos de Centros

Os métodos para se calcular centros são aplicados em geral sobre conjuntos convexos limitados em um espaço n -dimensional. O nosso interesse é calcular centros de politopos originários de problemas de programação linear.

Mas a noção de centro de politopo não é em geral trivial, pois dado um politopo geral de problema de programação linear, podem haver várias definições de centros, como por exemplo, o *Centro de Helly*, *Centro de John* e o *Centro Analítico*, onde este último é o mais usado em problemas de programação linear.

Para este estudo, iremos trabalhar com corpos convexos cuja definição apresentamos abaixo.

Definição 2.1.1 *Um corpo convexo é um conjunto convexo S com interior não vazio.*

Existem várias noções de centros de um conjunto convexo. Intuitivamente falando, devemos esperar que o centro de um conjunto convexo seja um ponto c que divide cada corda que passa por c em duas partes iguais (ver Figura 2.1).

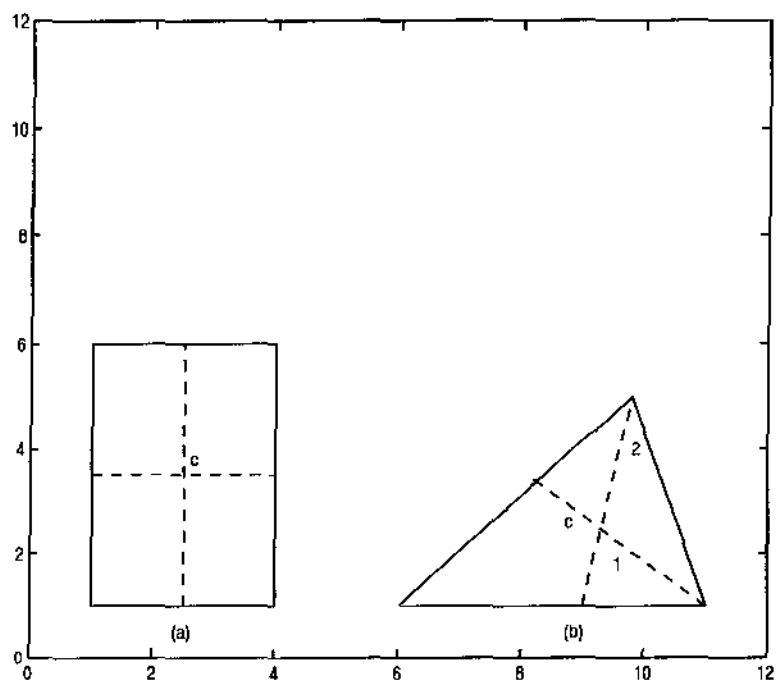


Figura 2.1: Centros de Cojuntos Convexos

O teorema de *Helly* generaliza esta noção de centro de um conjunto convexo para dimensão n .

2.2 Centro de Helly

Definição 2.2.1 *Seja C um corpo convexo em $\mathbb{R}^n$ (ver Figura 2.2), $c \in C$ é denominado Centro de Helly (*H-centro*) [14], se c divide qualquer corda passando em c em duas partes de tamanhos A e B tais que :*

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{A}{A+B} \leq \frac{n}{n+1} \quad (2.1)$$

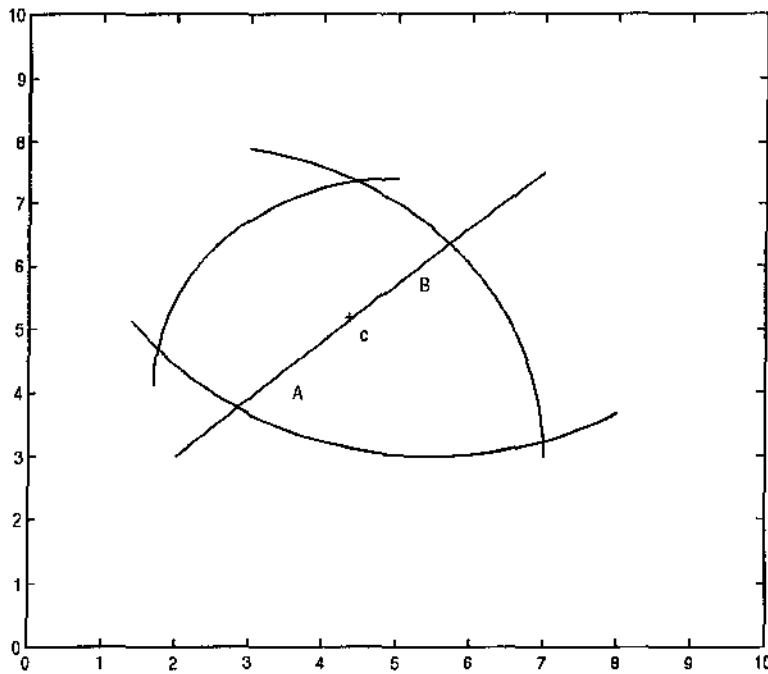


Figura 2.2: O Centro de Helly

O nome deste centro tem uma relação com *Eduard Helly* [14], pois foi ele quem propôs o teorema que estabelece a existência de tal centro para corpos convexos no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.1 *Seja K uma família de pelo menos $n + 1$ conjuntos convexos no espaço Euclidiano n -dimensional, onde K é finito ou compacto. Então se cada $n + 1$ membros de K tem um ponto em comum, então existe um ponto em comum para todos os membros de K .*

O próximo teorema é uma consequência do teorema de *Helly* (2.2.1) e sua prova é a validade das inequações (2.1).

Teorema 2.2.2 *Se C é um corpo convexo em $\mathbb{R}^n$, existe um ponto $z \in C$ tal que para cada corda $[u, v]$ de C que passa através de z*

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{\|z - u\|}{\|v - u\|} \leq \frac{n}{n+1}. \quad (2.2)$$

A prova deste teorema é dada em [19].

O próximo teorema nos garante que um corpo convexo no $\mathbb{R}^n$ possui uma infinidade de H -centros.

Teorema 2.2.3 *Seja E denotando o elipsóide n -dimensional, centrado em c , definido por*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c)^t Q (x - c) = 1\}.$$

Seja $\bar{E}$ denotando o elipsóide concêntrico com E e definido por

$$\bar{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - c)^t Q (x - c) = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right\}.$$

Então todos os pontos de $\bar{E}$ são H -centros para E .

Prova : [19]

Considere o elipsóide E n -dimensional, E' o elipsóide concêntrico com E em c e um ponto $y \in E'$ arbitrário.

Desenhe uma corda l passando por y e outra corda l' passando por y e c . Sejam A e B denotando os tamanhos dos segmentos que y divide l e A' e B' os tamanhos que y divide l' .

Considere o plano bi-dimensional contendo as cordas l e l' . Tal plano intersecciona o elipsóide bi-dimensional que também será denotado por E (ver Figura 2.3 (a)).

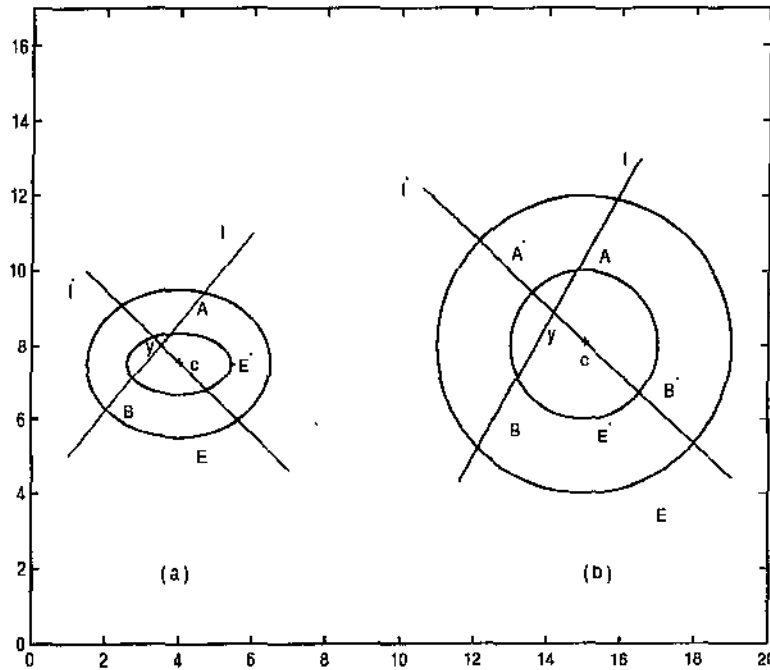


Figura 2.3: (a) Elipsóide ; (b) Transformação de E em E' na bola unitária

Projete o elipsóide bi-dimensional na bola unitária no $\mathbb{R}^2$ e nomeie todas as imagens da mesma forma que em E .

Precisamos mostrar que

$$\frac{A}{A+B} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Referente a Figura 2.3 (b), por construção o raio de E' é

$$r = \frac{n-1}{n+1}.$$

Por um teorema elementar da geometria temos que $AB = A'B'$ e claramente $B' \geq B$. Então

$$\frac{A}{A+B} = \frac{AB}{AB+B^2} = \frac{A'B'}{A'B'+(B')^2} \geq \frac{A'B'}{A'B'+(B')^2} = \frac{A'}{A'+B'}.$$

Como o raio da bola unitária é igual a $r = 1$ temos que

$$A' + B' = 2$$

e

$$r \geq 1 - A'$$

então segue que

$$\begin{aligned} \frac{A}{A+B} &\geq \frac{A'}{A'+B'} \\ &= \frac{A'}{2} \\ &\geq \frac{1-r}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{n-1}{n+1}}{2} \\ &= \frac{n+1 - n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Por um raciocínio análogo, devemos mostrar que

$$\frac{B}{A+B} \geq \frac{1}{n+1},$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{B}{A+B} &= \frac{AB}{AB+A^2} = \frac{A'B'}{A'B'+A^2} \geq \frac{A'B'}{A'B'+(A')^2} = \frac{B'}{B'+A'} = \\ &= \frac{B'}{2} \geq \frac{1-r}{2} = \frac{1-\frac{n-1}{n+1}}{2} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{B}{A+B} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Combinando os resultados

$$\begin{aligned} \frac{A}{A+B} &\geq \frac{1}{n+1} \\ \frac{B}{A+B} &\geq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

conseguimos

$$\frac{A}{A+B} < \frac{n}{n+1}$$

e isto completa a prova que y é um H -centro para E . □

Podemos resolver problemas de programação linear usando H -centros devido ao seguinte teorema .

Teorema 2.2.4 *Seja C um corpo convexo em $\mathbb{R}^n$, e seja c um H -centro para C . Seja*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c)^t R(x - c) = 1\} \quad (2.3)$$

denotando o elipsóide de menor volume centrado em c e contendo C . Então o elipsóide

$$\bar{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - c)^t R(x - c) = \frac{1}{n^3} \right\}$$

está totalmente contido no interior de C .

Prova [19]

Para provarmos este teorema denotaremos o elipsóide (2.3) por E , usaremos a transformação $y = R^{\frac{1}{2}}(x - c)$ para projetarmos E na bola unitária.

Seja C um corpo convexo, denotaremos a sua imagem transformada novamente por C .

Escolha $y \in C$ tal que $\| y \| = \alpha$, por essa razão podemos afirmar a existência de um hiperplano de suporte para y em C denotado por h e um hiperplano h' paralelo à h , de tal maneira que C fica situado entre h e h' (ver Figura 2.4).

Seja u o ponto onde h' intersecciona C , escolha $v \in h$ tal que o segmento $[u, v]$ contém 0 . Seja v' denotando o ponto onde o segmento de linha $[0, v]$ intersecciona a fronteira de C . Note que v' não é necessariamente distinto de v . Claramente, H -pontos são preservados por uma transformação afim. Logo 0 é um H -ponto para C . E já que $\| v \| \geq \| v' \| \geq 0$ e $\| u \| \geq 0$, temos que

$$\frac{\| v \|}{\| u \| + \| v \|} \geq \frac{\| v' \|}{\| u \| + \| v' \|} \geq \frac{1}{n + 1}. \quad (2.4)$$

Seja z o ponto onde o segmento de linha que passa por y e 0 encontra h' . Por construção nós temos

$$z = -ty \text{ e } u = -\tau v \quad (2.5)$$

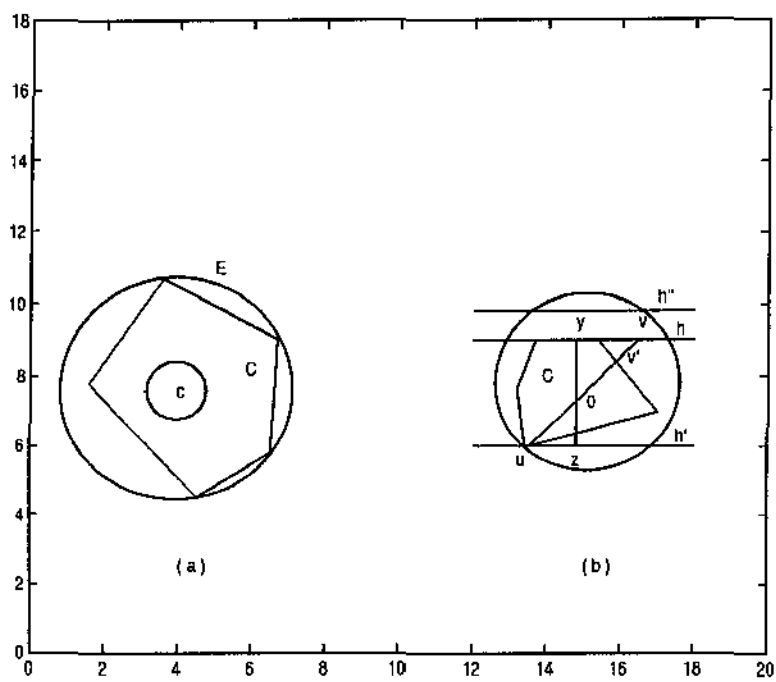


Figura 2.4: Ilustração para a prova do teorema 2.2.5

para algumas constantes t e τ .

Além disso, y é normal aos hiperplanos h e h' . Portanto,

$$(z - u)^t y = 0$$

e

$$y^t(y - v) = 0.$$

Combinando este último resultado com (2.5) conseguimos

$$(\tau - t) \|y\|^2 = 0$$

o que nos dá

$$t = \tau.$$

Segue de (2.5) que

$$\frac{1}{t} = \frac{\|y\|}{\|z\|} = \frac{\|v\|}{\|u\|}.$$

Agora observe que ,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha + \|z\|} &= \frac{\|y\|}{\|y\| + \|z\|} = \frac{\frac{\|y\|}{\|z\|}}{\frac{\|y\|}{\|z\|} + 1} = \frac{\frac{\|v\|}{\|u\|}}{\frac{\|v\|}{\|u\|} + 1} \\ &= \frac{\|v\|}{\|u\|} \cdot \frac{\|u\|}{\|v\| + \|u\|} = \frac{\|v\|}{\|u\| + \|v\|}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Combinando isto com (2.4) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha + \|z\|} &\geq \frac{1}{n+1} \\
\alpha(n+1) &\geq \alpha + \|z\| \\
\|z\| &\leq \alpha(n+1) - \alpha \\
\|z\| &\leq n\alpha + \alpha - \alpha \\
\|z\| &\leq n\alpha.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Seja agora h'' uma transposição de h na direção oposta de h' de tal forma que h'' está a uma distância $\|z\|$ de 0.

Seja F uma porção da bola unitária situada entre h' e h'' e E' o elipsóide de menor volume contendo F . Por argumentos simétricos, E' tem seu centro em 0. Alegamos que E' é justamente a bola unitária, pois se E' tem volume menor do que a bola unitária, a transformação $x = c + R^{-\frac{1}{2}}y$ deveria transformar E' em um elipsóide centrado em c e contendo C e possuindo um volume menor do que o volume de E . Mas isto é impossível pela forma que E foi escolhido. Portanto, E' é a bola unitária. Então, $\|z\|^2 \geq \frac{1}{n}$, devido a um resultado de *Todd* [26].

Se combinarmos isto com (2.7), temos que

$$\begin{aligned}
\|z\| &\leq n\alpha \\
\|z\|^2 &\leq (n\alpha)^2 \\
n^2\alpha^2 &\geq \frac{1}{n} \\
\alpha^2 &\geq \frac{1}{n^3} \\
\alpha &\geq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Mas α é a distância de 0 à fronteira de C , isto significa que a esfera

$$\alpha^2 = \|y\|^2 = \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = \frac{1}{n^3}$$

está totalmente contida em C .

Levando em consideração a transformação $x = c + R^{-\frac{1}{2}}y$ esta esfera projeta o elipsóide

$$(x - c)^t R (x - c) = \frac{1}{n^3}$$

que deve estar totalmente contido em C , como mostra a Figura 2.4 (b). Logo conseguimos o resultado desejado. $\square$

Agora vamos estudar uma outra noção de centro que considera o elipsóide contendo um politopo.

2.3 Centros de John

Definição 2.3.1 *Dado um politopo P , seja E denotando o elipsóide de menor volume contendo P . Definimos o centro de E como o Centro de John (J -centro) deste politopo.*

Nos referimos a eles como J -centro, por causa do seguinte resultado devido a John [12].

Teorema 2.3.1 (Fritz John – 1947) *Seja P um politopo no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Seja E o elipsóide de menor volume contendo P . Então E é único e se reduzirmos E por um fator de n sobre o seu centro, obteremos um elipsóide contido em P*

A diferença dos dois centros apresentados até aqui, H -centro e J -centro, é que um J -centro é único, enquanto que um H -centro não é necessariamente único. Além do mais, um J -centro é sempre um H -centro, tal resultado assim como a sua prova está em [19].

Teorema 2.3.2 *Seja C um corpo convexo e seja E o elipsóide de menor volume contendo C . Seja $E' = \frac{1}{n}E$ denotando o elipsóide obtido diminuindo E por um fator de n . Seja c denotando o centro de E e seja $l = [u, v]$ um segmento de linha passando pelo ponto c com pontos finais na fronteira de C . Então*

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{\|u - c\|}{\|u - v\|} \leq \frac{n}{n+1}. \quad (2.8)$$

Prova [19]

Se considerarmos um l estendido a uma corda $l' = [u', v']$ com pontos finais no elipsóide E (elipsóide exterior) e reduzirmos a corda l a uma corda $l'' = [u'', v'']$, com pontos finais na fronteira de E' (elipsóide interior), como mostra a Figura 2.5, obtemos a seguinte relação

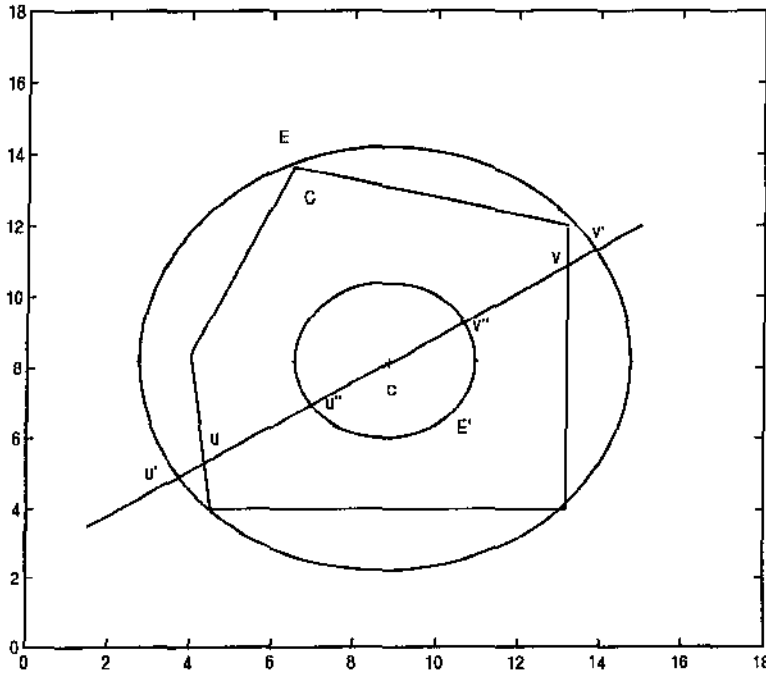


Figura 2.5: Todo J-centro é um H-centro

$$\frac{\|u - c\|}{\|u - v\|} = \frac{\|u - c\|}{\|u - c\| + \|c - v\|} = \frac{1}{1 + \frac{\|c - v\|}{\|u - c\|}}.$$

Como $\|u - c\| \geq \|u'' - c\|$ temos que

$$\frac{1}{1 + \frac{\|c - v\|}{\|u - c\|}} \geq \frac{1}{1 + \frac{\|c - v\|}{\|u'' - c\|}} = \frac{\|u'' - c\|}{\|u'' - c\| + \|c - v\|}$$

$$\geq \frac{\|u'' - c\|}{\|u'' - c\| + \|c - v'\|}$$

Esta última desigualdade segue do fato que $\|c - v\| \leq \|c - v'\|$.

Como $E' = \frac{1}{n}E$ temos que

$$\|c - v'\| = \|c - u'\| = n \|u'' - c\|.$$

Assim

$$\frac{\|u - c\|}{\|u - v\|} \geq \frac{\|u'' - c\|}{\|u'' - c\| + n \|u'' - c\|} = \frac{1}{n+1}.$$

Agora como

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\|v - u\|}{\|v - u\|} = \frac{\|v - c\| + \|u - c\|}{\|v - u\|} \\ &= \frac{\|v - c\|}{\|v - u\|} + \frac{\|u - c\|}{\|v - u\|}, \end{aligned}$$

temos portanto

$$\begin{aligned} \frac{\|v - c\|}{\|v - u\|} &= 1 - \frac{\|u - c\|}{\|v - u\|} \\ &\leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mudando u por v é possível obtermos a inequação (2.1), com $A = \|v - c\|$, $B = \|u - c\|$ e $A + B = \|u - v\|$ o que prova que um J -centro é sempre um H -centro. $\square$

2.4 Procedimento para se Resolver Problemas de Programação Linear usando J -centros

Consideremos agora o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.10)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Assumimos que as restrições $Ax \leq b$, $x \geq 0$ definem um politopo em $\mathbb{R}^n$, então é possível resolver tal problema pelo procedimento que usa um mecanismo de centragem, minimizando a função objetivo em cada passo sobre uma região determinada pela intersecção de um elipsóide definido por

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - y)^t Q (x - y) \leq R^2, 0 < R < 1\}$$

e o conjunto definido por $C = \{x : Ax \leq b\}$, onde y é um ponto interior em (2.10). O ponto y é um J -centro para $C = \{x : Ax \leq b\}$ se ele é o centro de um elipsóide de raio 1, de menor volume contendo $C = \{x : Ax \leq b\}$. Isto fica mais claro realizando uma ligação com o método que usa elipsóides para construir uma sequência $\{x_k\}$ convergindo para x^* que é solução ótima de (2.10).

Como foi dito na introdução existem algoritmos conhecidos de tempo polinomial que possuem um mecanismo estruturado para se encontrar centros de politopos e através destes centros conseguimos resolver problemas de programação linear. Nesta seção iremos mostrar como resolver problemas de programação linear usando um tipo de centro que foi estudado, o centro de *John*. Faremos isto através de um procedimento que usa basicamente a definição de centro de John, (**Definição 2.3.1**), a minimização da função objetivo a cada passo do procedimento e o teorema de John, (**Teorema 2.3.1**), que nos diz que se diminuirmos E o elipsóide de menor volume que contém o politopo P definido no $\mathbb{R}^n$, obteremos um elipsóide totalmente contido em P .

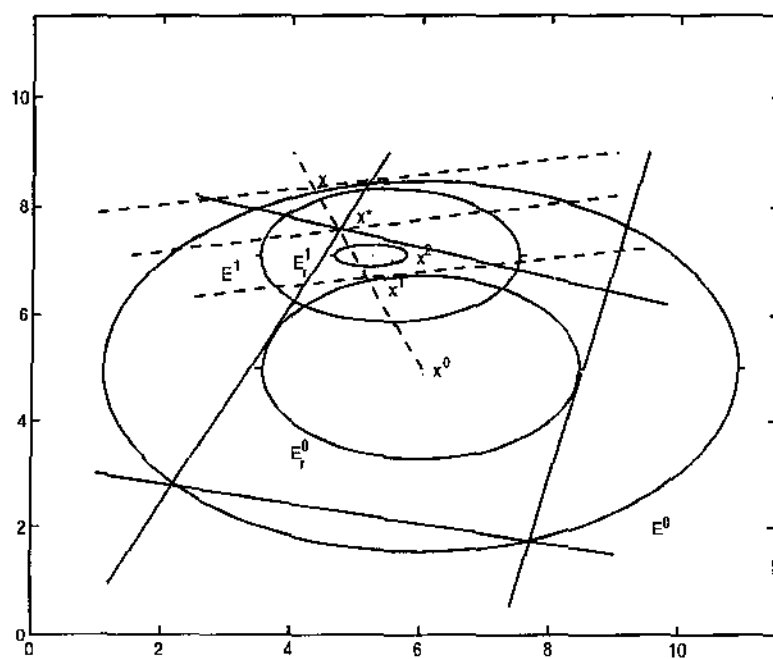


Figura 2.6: Esquema do Procedimento

Consideremos então o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Seja E^0 denotando o elipsóide de menor volume contendo o politopo

$$P^0 \equiv P \equiv \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

e seja x^0 denotando a centro de E^0 .

- Seja x^1 a solução de

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & x \in E_r^0 \end{array}$$

onde $E_r^0 = \frac{1}{n}E^0$.

- Seja E^1 denotando o elipsóide de volume mínimo contendo o politopo

$$P^1 \equiv P^0 \cap \{x \mid c^t x \leq c^t x^1\}$$

e seja x^2 denotando o centro de E^1 .

- Seja x^3 a solução de

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & x \in E_r^1 \end{array}$$

onde $E_r^1 = \frac{1}{n}E^1$.

- Repita este processo iniciando com o politopo

$$P^0 \cap \{x \mid c^t x \leq c^t x^3\}.$$

Examinando a convergência deste procedimento (ver [19]), vamos considerar $\bar{x}$ como a solução de

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & x \in E^0 . \end{array}$$

E consideraremos também x^* denotando a solução de

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & x \in P . \end{array}$$

Já que, por definição $E_r^0 = \frac{1}{n}E^0$, temos

$$\bar{x} - x^0 = n(x^1 - x^0)$$

que implica

$$c^t \bar{x} - c^t x^0 = n(c^t x^1 - c^t x^0).$$

Como $c^t x^* \geq c^t \bar{x}$ temos que

$$c^t x^* - c^t x^0 \geq n(c^t x^1 - c^t x^0). \quad (2.11)$$

Podemos reescrever (2.11) como

$$\begin{aligned} c^t x^* - c^t x^0 &\geq n\{(c^t x^1 - c^t x^0 + c^t x^* - c^t x^*)\} \\ c^t x^* - c^t x^0 &\geq n(c^t x^1 - c^t x^*) - n(c^t x^0 - c^t x^*) \\ n(c^t x^1 - c^t x^*) &\leq (c^t x^* - c^t x^0) + n(c^t x^0 - c^t x^*) \\ (c^t x^1 - c^t x^*) &\leq \frac{(c^t x^* - c^t x^0) + n(c^t x^0 - c^t x^*)}{n} \\ (c^t x^1 - c^t x^*) &\leq \frac{(c^t x^0 - c^t x^*)(n-1)}{n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c^t x^1 - c^t x^* \leq (1 - \frac{1}{n})(c^t x^0 - c^t x^*). \quad (2.12)$$

Agora, seja $P^1 \equiv P^0 \cap \{x \mid c^t x \leq c^t x^1\}$.

Pela mesma razão aplicada acima temos que

$$c^t x^3 - c^t x^* \leq (1 - \frac{1}{n})(c^t x^2 - c^t x^*). \quad (2.13)$$

Consideremos agora $c^t x^2 - c^t x^*$. Podemos ver claramente que

$$c^t x^1 \geq \underset{\text{sujeito a}}{\text{Maximizar}} \quad c^t x \\ x \in E_r^1.$$

Logo,

$$c^t x^2 - c^t x^3 \leq c^t x^1 - c^t x^2. \quad (2.14)$$

Tal desigualdade pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} c^t x^2 - c^t x^* - (c^t x^3 - c^t x^*) &\leq c^t x^1 - c^t x^* - (c^t x^2 - c^t x^*) \\ c^t x^2 - c^t x^* &\leq (c^t x^3 - c^t x^*) + (c^t x^1 - c^t x^*) - (c^t x^2 - c^t x^*). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Substituindo (2.13) em (2.15) temos

$$\begin{aligned} c^t x^2 - c^t x^* &\leq (1 - \frac{1}{n})(c^t x^2 - c^t x^*) + (c^t x^1 - c^t x^*) - (c^t x^2 - c^t x^*) \\ c^t x^2 - c^t x^* &\leq (c^t x^2 - c^t x^*) - \frac{1}{n}(c^t x^2 - c^t x^*) + (c^t x^1 - c^t x^*) - (c^t x^2 - c^t x^*) \\ (c^t x^2 - c^t x^*)(1 + \frac{1}{n}) &\leq (c^t x^1 - c^t x^*) \\ c^t x^2 - c^t x^* &\leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}(c^t x^1 - c^t x^*). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agora substituindo (2.12) em (2.16) obtemos :

$$\begin{aligned} c^t x^2 - c^t x^* &\leq \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}(c^t x^0 - c^t x^*) \\ c^t x^2 - c^t x^* &\leq \exp^{-\frac{2}{n}}(c^t x^0 - c^t x^*). \end{aligned}$$

Combinando (2.13) e (2.16),

$$\begin{aligned} c^t x^3 - c^t x^* &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \exp^{-\frac{2}{n}} (c^t x^0 - c^t x^*) \\ c^t x^3 - c^t x^* &< \exp^{-\frac{2}{n}} (c^t x^0 - c^t x^*). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aqui usamos os fatos $1 - \frac{1}{n} < \exp^{-\frac{1}{n}}$ e $\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} < \exp^{-\frac{2}{n}}$.

Então continuando o processo da mesma forma, obteremos

$$c^t x^k - c^t x^* \leq \exp^{-\frac{k}{n}} (c^t x^0 - c^t x^*) , \forall k \geq 0. \quad (2.18)$$

Seja $L = \log_2(c^t x^0 - c^t x^*)$. Estimando L em termos do problema dados A, b, c e se considerarmos $k = (p+1)nL$ onde p é um inteiro positivo obtemos de (2.18) que

$$c^t x^k - c^t x^* \leq \exp^{-(p+1)L} (c^t x^0 - c^t x^*) \leq \exp^{-pL}.$$

Isto implica que $c^t x^k$ pode ser feito tão perto quanto se queira de $c^t x^*$ simplesmente fazendo k um múltiplo suficientemente grande de nL .

Portanto, se temos um método eficiente para se calcular J -centros, temos um procedimento em tempo polinomial para se resolver problemas de programação linear. Mas calcular J -centros ou H -centros não é uma tarefa muito fácil, existe um algoritmo, denominado algoritmo dos elipsóides de *Khachyan* [24], que calcula um J -centro, daí um H -centro, mas tal algoritmo não é eficaz na prática, pois exige um custo computacional muito elevado. Por essa razão que iremos estudar uma outra noção de centro, que é definido geralmente sobre politopos e são frequentemente aplicados nos métodos de pontos interiores para resolver o problema de programação linear, que será dada na próxima seção.

2.5 Centro Analítico

Definição 2.5.1 *Seja P o politopo definido por um sistema de desigualdades*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (2.19)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, m$. O centro analítico de P é o ponto $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ que resolve o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} \quad \prod_{i=1}^m (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) \\ & \text{sujeito a} \quad x \in P \end{aligned}$$

Uma vez que P é limitado este problema de maximização tem solução. Pode ser mostrado que tal solução é única. Deste modo, o centro analítico de um politopo está bem definido.

Uma propriedade que caracteriza o centro analítico é a seguinte.

Seja ξ o centro analítico do politopo P de acordo com a **Definição 2.5.1** e seja $f(x)$ de tal forma que

$$f(x) = \log \prod_{i=1}^m (b_i - a_i^t x) = \sum_{i=1}^m \log(b_i - a_i^t x).$$

Já que a função f alcança o seu valor máximo em P quando $x = \xi$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{b_i - a_i^t x} \right) (-a_{ij}) = 0. \quad (2.20)$$

A equação (2.20) só é válida pois x é mínimo irrestrito e o centro analítico é interior. Além disso, multiplicando (2.20) por x_j e somando sobre j , obtemos :

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{-\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j}{b_i - a_i^t \xi} \right) = 0. \quad (2.21)$$

Adicionando e subtraindo b_i ao numerador da equação (2.21) obteremos

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{b_i - a_i^t \xi} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{b_i}{b_i - a_i^t \xi} \right). \quad (2.22)$$

Observe que o lado direito de (2.22) é independente de x . Se considerarmos $x = \xi$ sobre o lado esquerdo, vemos que o lado esquerdo, e então o lado direito valem m .

Para um $x \in P$ fixo, seja d_i denotando a distância de x ao hiperplano $a_i^t z = b_i$ e d_i^* como a distância de ξ ao mesmo hiperplano. Então

$$m = \sum_{i=1}^m \left(\frac{b_i - a_i^t x}{b_i - a_i^t \xi} \right) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{b_i - a_i^t x}{\|a_i\|}}{\sum_{i=1}^m \frac{b_i - a_i^t \xi}{\|a_i\|}} = \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i^*}.$$

Agora segue da desigualdade de *Cauchy-Schwarz* que

$$m = \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i^*} \leq \sqrt{m} \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{d_i^2}{(d_i^*)^2}}$$

Isto implica que

$$m \leq \sum_{i=1}^m \frac{d_i^2}{(d_i^*)^2}$$

quando $x = \xi$ a igualdade é válida.

Formalizando nos dá o seguinte teorema .

Teorema 2.5.1 *O centro analítico minimiza uma soma ponderada dos quadrados das distâncias de um ponto em P aos hiperplanos que definem P . Os pesos são dados por*

$$w_i = \frac{1}{d_i^2(\xi)}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

onde ξ é o centro analítico de P .

Do mesmo modo que usamos H -centros e J -centros para resolvermos problemas de programação linear, podemos usar centros analíticos para este propósito.

Para isto, consideremos o seguinte elipsóide

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i - d_i^*}{d_i^*} \right)^2 \leq 1. \quad (2.23)$$

Claramente esta desigualdade implica que $d_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Podemos reescrever (2.23) como

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{(b_i - a_i^t x) - (b_i - a_i^t \xi)}{(b_i - a_i^t \xi)} \right\}^2 \leq 1,$$

ou

$$(x - \xi)^t \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{a_i a_i^t}{(b_i - a_i^t \xi)^2} \right\} (x - \xi) \leq 1.$$

Finalmente, escrevemos esta desigualdade como

$$(x - \xi)^t Q (x - \xi) \leq 1 \quad (2.24)$$

onde $Q = \sum_{i=1}^m \frac{a_i a_i^t}{(b_i - a_i^t \xi)^2}$ é uma matriz simétrica positiva definida.

Para os x que satisfazem (2.24) temos que

$$d_i = \frac{b_i - a_i^t x}{\|a_i\|} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Portanto, (2.24) descreve um elipsóide contido em P . Agora se expandirmos este elipsóide por um fator de m , este novo elipsóide irá conter P , com isso obtemos o seguinte lema .

Lema 2.5.1 *O elipsóide*

$$(x - \xi)^t Q(x - \xi) \leq m^2$$

contém P .

Prova.

Considere $x \in P$ e $d_i = \frac{b_i - a_i^t x}{\|a_i\|}$. Então $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Observe que

$$\begin{aligned} (x - \xi)^t Q(x - \xi) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i - d_i^*}{d_i^*} \right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i}{d_i^*} - 1 \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{d_i}{d_i^*} \right)^2 - 2 \left(\frac{d_i}{d_i^*} \right) + 1 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i}{d_i^*} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i}{d_i^*} \right) + \sum_{i=1}^m 1 \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i}{d_i^*} \right)^2 - 2m + m \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i}{d_i^*} \right)^2 - m \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i^*} \right)^2 - m = m^2 - m < m^2 \end{aligned}$$

como desejado. □

Com este resultado podemos usar centros analíticos do mesmo modo que usamos centros de John na seção 2.3.

No apêndice A apresentamos um método que usamos para se calcular o centro analítico.

Capítulo 3

Método de Projeções Ponderadas

Neste capítulo, iremos apresentar o *método de projeções ponderadas*. Basicamente vamos mostrar como o método funciona, ou seja, daremos as fórmulas para se calcular as projeções, a transformação que gera o próximo ponto das sequências de iterandos e o critério de parada.

Proporemos uma definição de medida de centricidade, que nos mostrará quão central é o ponto encontrado pelo *método de projeções ponderadas* denominado *p-centro*, que é definido como o ponto fixo da sequência que define o método.

Existem características que devem ser levadas em consideração para nos motivar a implementar tal método. Uma delas é que o método é menos sensível a restrições redundantes, tal característica será abordada mais detalhadamente através de um exemplo. Outra é que o algoritmo trabalha com os dados originais que definem o politopo, havendo assim uma redução no acúmulo de erros de arredondamento.

Além dessas características, o método é de fácil implementação e também pode ser executado em um ambiente paralelo aumentando a sua performance.

3.1 O Método de Projeções Ponderadas

Nesta seção, descreveremos o método para encontrar o p -centro de um polítopo geral. Cada iteração é obtida como uma combinação convexa das projeções aos hiperplanos associados com as desigualdades que definem o polítopo. Nós assumimos o polítopo descrito por um conjunto $S \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ seja um polítopo de programação linear de dimensão completa e a matriz A contendo, também, as restrições de não-negatividade. Seja x^k um ponto interior factível para uma iteração k . Então, definimos as seguintes projeções.

Definição 3.1.1 (Projeção Ortogonal)

Seja

$$P_i(x^k) = x^k + (b_i - a_i^t x^k) \frac{a_i}{\|a_i\|}$$

a projeção de um ponto x^k ao hiperplano associado com a desigualdade $a_i^t x \leq b_i$.

Uma vez que a projeção ortogonal $P_i(x^k)$ pode ser infactível, nós necessitamos definir uma projeção ortogonal factível.

Definição 3.1.2 (Projeção Ortogonal Factível)

Seja

$$P_{\alpha_i}(x^k) = x^k + \alpha_i(P_i(x^k) - x^k)$$

onde $\alpha_i = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha : x^k + \alpha(P_i(x^k) - x^k) \in S\}$ a projeção ortogonal factível associada com a desigualdade $a_i^t x \leq b_i$

Note que α_i é maior do que zero uma vez que x^k é assumido ser um ponto interior factível e menor ou igual a 1 ($\alpha_i = 1$ quando a projeção ortogonal $P_i(x^k)$ produz um ponto factível).

O centróide dos pontos sobre a fronteira de S é o centróide do envoltório convexo destes pontos. Portanto, é razoável pensar que se temos mais pontos sobre a fronteira mais o envoltório convexo destes pontos se parece com o polítopo original. Com isto em mente, definimos um " parceiro " para cada projeção ortogonal.



Definição 3.1.3 *Seja*

$$P_{\lambda_i}(x^k) = x^k + \lambda_i(P_i(x^k) - x^k)$$

onde $\lambda_i = \max_{0 < \lambda \leq 1} \{ \lambda : x^k + \lambda(P_i(x^k) - x^k) \in S \}$ o ponto obtido de $P_i(x^k)$ pela busca na direção $-(P_i(x^k) - x^k)$.

Portanto, nosso politopo possui uma corda ligando $P_{\alpha_i}(x^k)$ e $P_{\lambda_i}(x^k)$ para cada hiperplano associado com a i -ésima desigualdade. Isto é, cada desigualdade gera dois pontos : $P_{\alpha_i}(x^k)$ e $P_{\lambda_i}(x^k)$.

Uma nova iteração x^{k+1} é a média dos m pontos centrais

$$\frac{P_{\alpha_i}(x^k) + P_{\lambda_i}(x^k)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (P_{\alpha_i} x^k + P_{\lambda_i} x^k) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m x^k + \alpha_i (P_i x^k - x^k) + x^k - \lambda_i (P_i x^k - x^k) \\ &= x^k + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \lambda_i) (P_i x^k - x^k) \\ &= x^k + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \lambda_i) \frac{b_i - a_i^t x^k}{\|a_i\|} \frac{a_i}{\|a_i\|} \\ &= x^k - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \lambda_i) \frac{a_i^t x^k}{\|a_i\|} \frac{a_i}{\|a_i\|} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \lambda_i) \frac{b_i a_i}{\|a_i\|^2} \\ &= x^k - \frac{1}{2m} \hat{A}^t W^k \hat{A} x^k + \frac{1}{2m} \hat{A}^t W^k \hat{b} \\ &= (I - \frac{1}{2m} \hat{A}^t W^k \hat{A}) x^k + \frac{1}{2m} \hat{A}^t W^k \hat{b} \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $W^k = \text{diag}((\alpha_1 - \lambda_1), \dots, (\alpha_m - \lambda_m))$, $\hat{A}$ é a matriz obtida de A pela substituição do vetor a_i^t na linha i por $\frac{a_i^t}{\|a_i\|}$ e $\hat{b}$ é o vetor obtido de b pela substituição de b_i por $\frac{b_i}{\|a_i\|}$.

Cada iteração do método é definido como o centróide dos pontos $P_{\alpha_i}(x^k)$ e $P_{\lambda_i}(x^k)$ para $i = 1, 2, \dots, m$, onde m é o número total de restrições. Figura 3.1 ilustra o significado geométrico de $P_i(x^k)$, $P_{\alpha_i}(x^k)$ e $P_{\lambda_i}(x^k)$. Note que quando projetamos na restrição (1), $P_1(x)$ é infactível, portanto, precisamos recuar até a factibilidade ser alcançada, gerando o ponto $P_{\alpha_1}(x)$. E, finalmente, andamos na direção oposta gerando o ponto $P_{\lambda_1}(x)$. As projeções nas outras restrições não estão nomeadas mas elas são representadas pelo símbolo “•” na Figura 3.1.

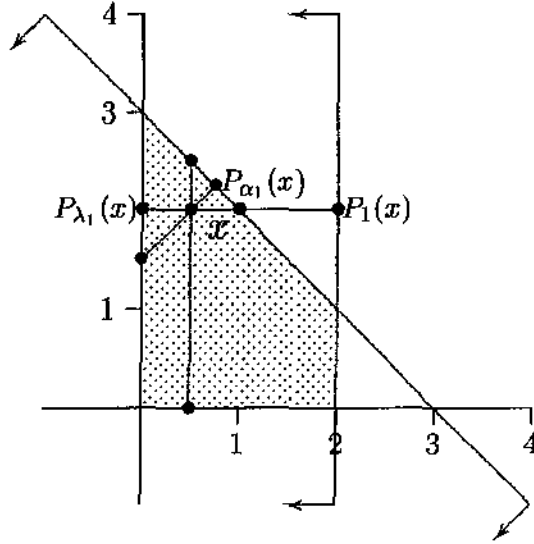


Figura 3.1: Projeções sobre os Politopos

Abaixo, apresentamos politopos no $\mathbb{R}^2$ para ilustrar o caminho gerado pela transformação descrita em (3.1). Para cada politopo, nós começamos com pontos iniciais diferentes.

Observemos que para os cinco politopos dados as sequências geradas pela transformação (3.1) convergiu para o mesmo ponto fixo. Infelizmente, isto não é o caso em geral, embora, em nossas experiências numéricas nós sempre obtemos o mesmo ponto fixo iniciando de diferentes pontos iniciais. Mas, nós podemos construir um exemplo em duas-dimensões onde isto não é o caso. Próxima seção mostra a existência de pontos fixos para as sequências geradas pela transformação (3.1).

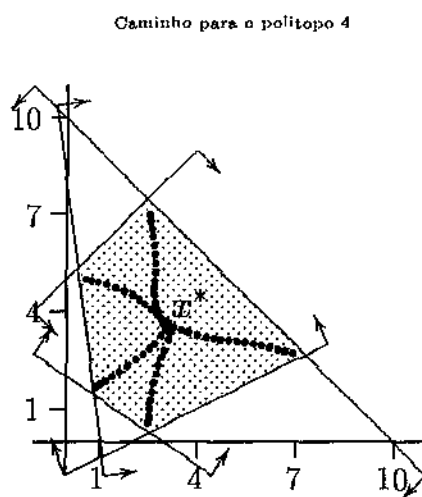
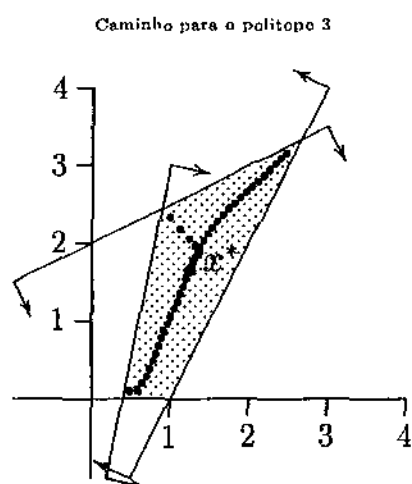
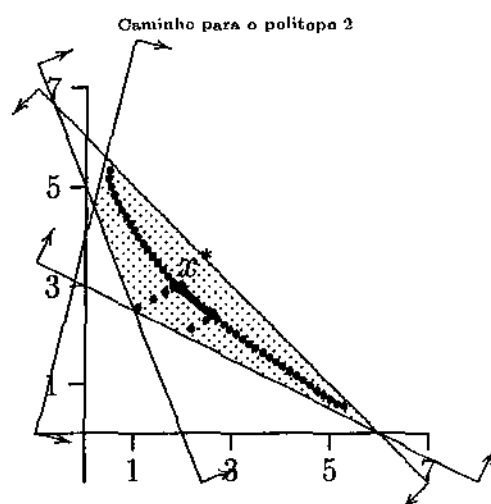
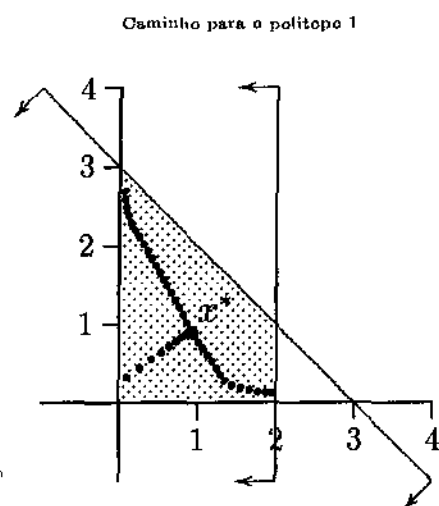


Figura 3.2: Caminhos gerados pelas iterações

3.2 Existência de Pontos Fixos

A transformação descrita por (3.1) contém a matriz $W^{(k)}$, que depende da iteração k , fazendo qualquer prova da convergência específica uma dificuldade. Para contornar este problema, segue o teorema dado por *L. Brouwer*.

Teorema 3.2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)

Seja $B > 0$ e seja $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq B\}$. Então, qualquer função contínua com domínio D imagem contida em D tem pelo menos um ponto fixo.

Uma vez que a transformação (3.1) é contínua e S é um politopo então o teorema de Brouwer prova que existe um ponto fixo para a sequência gerada por (3.1).

Capítulo 4

Experiências Computacionais

O algoritmo proposto em (3.1) foi implementado no **MATLAB** já que estamos mais preocupado com a qualidade do centro do que com a eficiência em termos de tempo de execução. Além disso, **MATLAB** com sua incrível capacidade gráfica nos permite visualizar como o método trabalha. Nós realizamos experiências numéricas para comparar a qualidade central do p -centro junto com o centro analítico em vários politopos de dimensões diferentes. Primeiramente, mostramos figuras de politopos no espaço bi-dimensional para ilustrar a qualidade central do p -centro e do centro analítico. Depois, apresentamos em forma de tabelas, os resultados dos politopos gerados. E, finalmente, mostramos os resultados dos problemas do NetLib. Em todos estes problemas, o p -centro se comportou muito bem.

4.1 Medida de Centricidade

Para medir quão bom é o centro, devemos definir uma medida de centricidade. Já que, um bom centro é um ponto que divide qualquer corda que passa por ele em duas partes iguais, nós definimos a seguinte medida de centricidade.

Definição 4.1.1 *Seja x um ponto interior factível de um politopo S e $P_{\alpha_i}(x)$, $P_{\lambda_i}(x)$ para $i = 1, 2, \dots, m$ como definido previ-*

amente. E, sejam

$$d_i = \| P_{\alpha_i}(x) - x \|$$

e

$$\bar{d}_i = \| P_{\lambda_i}(x) - x \|$$

para cada desigualdade i . Definimos

$$e_i = \frac{\min\{d_i, \bar{d}_i\}}{\max\{d_i, \bar{d}_i\}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

e a centricidade de um ponto como

$$E(x) = \sum_{i=1}^m \frac{e_i}{m} \quad (4.1)$$

Junto com esta medida, nós usamos a medida

$$d_{\min} = \min \{ \min\{d_i, \bar{d}_i\} \}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.2)$$

a distância mínima de x à fronteira do conjunto S , como a segunda medida de centricidade. Portanto, um ponto $\hat{x}$ é um centro melhor do que $\bar{x}$ se

$$1 \geq E(\hat{x}) > E(\bar{x}) \text{ e } d_{\min}(\hat{x}) > d_{\min}(\bar{x}). \quad (4.3)$$

De fato, a primeira medida nos diz quão balanceado um ponto é. E, a segunda medida quão longe o ponto está da fronteira. Nosso objetivo é satisfazer o critério (4.3) mas isto nem sempre é possível. Então, usamos uma combinação de ambas medidas definindo

$$C(x) = E(x) * d_{\min}(x). \quad (4.4)$$

Um bom centro, para nós, seria o ponto que teria o maior $C(x)$. E, nós iremos mostrar que o p -centro é um centro melhor do que o centro analítico para esta medida de centricidade.

Para isto rodamos exemplos em politopos no $\mathbb{R}^2$, em politopos gerados em várias dimensões e em problemas do NetLib que serão mostrados nas seções seguintes.

4.2 Politopos no $\mathbb{R}^2$

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos no $\mathbb{R}^2$. A razão para isto é para melhor visualizar a qualidade central do p -centro e do centro analítico. Figura 4.1 apresenta quatro politopos no $\mathbb{R}^2$ mostrando o p -centro (denotado por p) e o centro analítico (denotado por a).

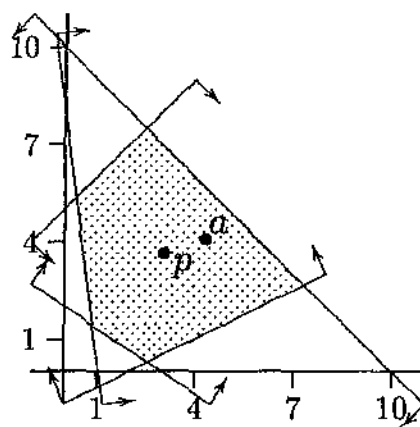
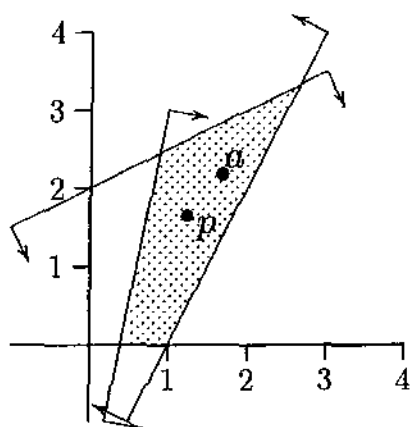
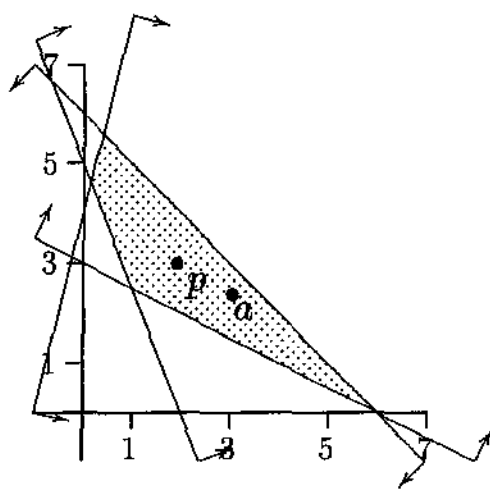
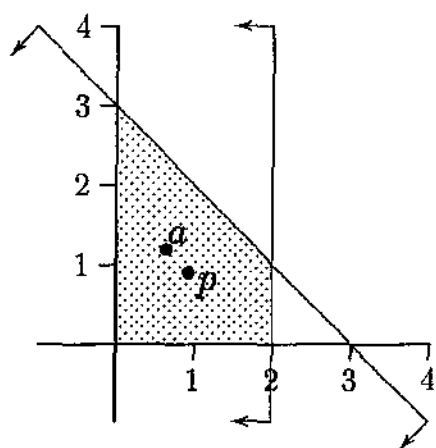


Figura 4.1: A qualidade central para o p-centro e o centro analítico

Número Politopo	p-Center			Centro Analítico		
	$E(x)$	$d_{\min}$	$C(x)$	$E(x)$	$d_{\min}$	$C(x)$
1	0.785055	0.838004	0.657879	0.751202	0.633975	0.476243
2	0.897926	0.784585	0.704499	0.477018	0.419465	0.200092
3	0.893993	0.504127	0.450686	0.593612	0.356582	0.211671
4	0.829394	2.358854	1.956419	0.473359	1.110123	0.525487

Tabela 4.1: Politopos no $\mathbb{R}^2$

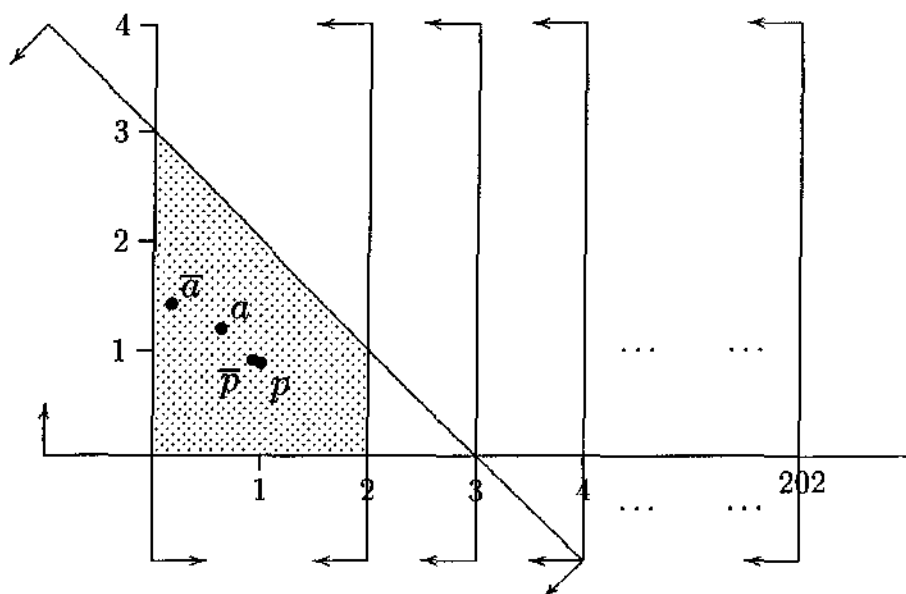


Figura 4.2: Centro Analítico e p-Centro para Politopo Redundante

Apresentaremos os resultados dos politopos gerados no $\mathbb{R}^2$ na tabela acima, onde mostramos as medidas $E(x)$, $d_{\min}$ e $C(x)$ como definidas em (4.1), (4.2) e (4.4), respectivamente, para cada politopo desenhado na figura acima.

Como podemos ver da Tabela 4.1, o p -centro é melhor do que o centro analítico em todos os exemplos. Verificamos isto pois o $C(x)$ do p -centro foi maior do que o do centro analítico nos quatro politopos testes.

Além disso, o p -centro parece ser menos sensível do que o centro analítico. Figura 4.2 mostra o p -centro e o centro analítico para um politopo redundante. Para comparar a sensibilidade dos centros, nós plotamos o p -centro

para o polítopo não-redundante (ou seja, excluindo as restrições do tipo $x_1 \leq k, k = 3, 4, \dots, 202$) e o p -centro para o polítopo redundante, nós denotamos então como p e $\bar{p}$, respectivamente. O mesmo foi feito para o centro analítico. Como podemos ver, o p -centro é menos perturbado do que o centro analítico quando a redundância foi adicionada.

Os resultados do cálculo de $C(x)$ para o p -centro são $C(p) = 0.657879$ e $C(\bar{p}) = 0.796722$ e para o centro analítico os resultados são $C(a) = 0.476243$ e $C(\bar{a}) = 0.022537$.

4.3 Polítopos Gerados

Consideremos o problema de aplicar o método de projeções em polítopos gerados. Nós geramos os polítopos baseados em um trabalho dado por May et al ([16]).

Trabalhamos sobre polítopos de diferentes dimensões e para cada dimensão geramos 10 diferentes polítopos. As próximas tabelas apresentam as medidas $E(x)$, $d_{\min}(x)$, $C(x)$ e a média de cada uma destas medidas obtida para cada dimensão.

Se considerarmos a média para cada dimensão, observamos que o p -centro se comporta melhor do que o centro analítico em todas as dimensões. Isto comprova a melhor qualidade central do p -centro para polítopos de dimensões grandes.

Número de Restrições	p-Centro			Centro Analítico		
	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$
25	0.823057	16.271420	13.392306	0.755212	16.844223	12.720959
	0.793164	11.276783	8.9443383	0.704773	9.1541410	6.4515914
	0.680669	9.2678320	6.3083259	0.711692	6.8692550	4.8887938
	0.674376	33.898460	22.860321	0.629528	27.125818	17.076465
	0.717447	29.610961	21.244295	0.654722	23.274599	15.238392
	0.748472	21.931323	16.414981	0.686986	19.739801	13.560966
	0.716735	12.594309	9.0267880	0.634101	15.495284	9.8255810
	0.747629	37.460002	28.006183	0.663433	39.341569	26.100495
	0.669877	21.715826	14.546932	0.704103	19.020983	13.392731
	0.665825	112.38149	74.826405	0.652976	88.743597	57.947438
Média	0.7237251	30.64084	21.55757	0.6797526	26.560927	17.720341

Tabela 4.2: Polítopos Gerados

Número de Restrições	p-Centro			Centro Analítico		
	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$
50	0.541500	21.327091	11.548619	0.555919	17.881157	9.9404749
	0.757013	6.5533620	4.9609830	0.667532	8.8480070	5.9063270
	0.688835	8.5989720	5.9232728	0.636768	9.2595090	5.8961590
	0.752402	6.6397840	4.9957867	0.629279	6.9624710	4.3813367
	0.526056	47.669656	25.076906	0.496536	55.978122	27.795126
	0.571243	15.357850	8.7730643	0.587006	12.124344	7.1170626
	0.581980	24.603624	14.318817	0.552443	20.334199	11.233485
	0.612918	13.987518	8.5732010	0.599045	11.338354	6.7921850
	0.640562	18.527729	11.868164	0.602590	19.595930	11.808319
	0.581950	39.997945	23.276804	0.545435	36.180397	19.734054
Média	0.6254459	20.326353	11.931561	0.5872553	19.850249	11.060452

Tabela 4.3: Polítopos Gerados

Número de Restrições	p-Centro			Centro Analítico		
	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$
75	0.622865	53.025358	33.027645	0.589277	46.165239	27.204129
	0.549290	6.8077300	3.7394180	0.604890	6.1078850	3.6945985
	0.581511	24.427088	14.204631	0.615459	22.942287	14.120029
	0.616150	28.863172	17.784045	0.654879	26.338567	17.248569
	0.554988	8.8209260	4.8955080	0.560451	7.2693650	4.0741228
	0.650793	5.7443840	3.7384060	0.668768	5.4025340	3.6130416
	0.604759	23.076588	13.955774	0.487623	27.811106	13.561233
	0.621851	5.6352120	3.5042622	0.560382	6.2653880	3.5110106
	0.532874	31.237540	16.645672	0.436269	43.935065	19.167506
	0.604972	12.370884	7.4840384	0.531424	12.240412	6.5048487
Média	0.5940053	20.0008882	11.89979461	0.5709422	20.446634	11.2699087

Tabela 4.4: Polítopos Gerados

Número de Restrições	p-Centro			Centro Analítico		
	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$
100	0.586188	4.2755320	2.5062655	0.440676	0.0001234	0.0005437
	0.565594	8.8421860	5.0010873	0.557134	7.8125770	4.3526522
	0.497273	6.8957210	3.4290558	0.470435	7.7807460	3.6603352
	0.480339	7.6391760	3.6693941	0.489061	7.0183650	3.4324086
	0.517349	7.8579990	4.0653279	0.509901	7.6716810	3.9117978
	0.483505	9.9460530	4.8089663	0.572132	7.2124090	4.1264499
	0.669433	5.9635070	3.9921683	0.509628	8.7899970	4.4796285
	0.574577	9.1298940	5.2458271	0.376567	0.0028410	0.0010698
	0.544314	6.7454160	3.6716243	0.493139	6.7538820	3.3306026
Média	0.4918572	6.7295484	3.6389716	0.4418757	5.3042621	2.7295488

Tabela 4.5: Polítopos Gerados

4.4 Politopos do NetLib

Para finalizar as experiências computacionais, nós trabalhamos alguns problemas do NetLib. Transformamos o problema na forma dual, ou seja, todas as restrições são do tipo " $\leq$ ". Em todos os exemplos nós buscamos convergência, e, mais uma vez, o p -centro se comportou bem considerando a medida usada. Ou seja, o $C(x)$ do p -centro foi maior do que o do centro analítico em todos os problemas do NetLib.

Problema do NetLib	p-Centro			Centro Analítico		
	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$	$E(x)$	$d_{\min}(x)$	$C(x)$
AFIRO	0.782673	3.096488	2.4235375	0.770644	2.647757	2.040478
SC50A	0.733962	7.192810	5.2792492	0.498449	3.593712	1.7912821
SC50B	0.749230	6.227521	4.6658455	0.609343	8.609592	5.2461946
SC105	0.795656	5.043007	4.0124987	0.541323	1.229604	0.6656129
SHARE2B	0.854567	0.004655	0.0039780	0.736210	0.005152	0.0037929

Capítulo 5

Conclusão

Apresentamos no Capítulo 2 um estudo sobre tipos de centros de politopos. Este estudo foi importante pois ele está diretamente relacionado com o trabalho desenvolvido aqui, pois o objetivo da tese é propor um método para se encontrar um centro de um politopo. Além disso, todo algoritmo de tempo polinomial para se resolver problemas de programação linear, possui um mecanismo implícito ou explícito de centragem. Por isso centros de politopos podem gerar interessantes formas de abordagem para problemas de programação linear.

No Capítulo 3 apresentamos uma nova definição de centro e um método para se calcular o centro de um politopo, que foi definido com o p -centro. Como o *método de projeções ponderadas* trabalha com os dados originais que definem o problema uma das vantagens é que o erro de arredondamento não é acumulativo e também a matriz A não precisa possuir uma estrutura definida, isto é, as matrizes podem ser densas ou esparsas.

Para se aplicar o método seria razoável pensar que existiria pelo menos um ponto para o qual ele convergiria. Neste mesmo capítulo apresentamos a existência de pelo menos um ponto fixo, tal existência foi verificada usando-se um teorema de ponto fixo elaborado por Brouwer.

Finalmente, testamos o *método de projeções ponderadas* em alguns politopos gerados no $\mathbb{R}^2$, em politopos gerados em dimensões maiores e em problemas do NetLib. Tais testes foram realizados iniciando-se o método em vários pontos iniciais diferentes, onde obtivemos a convergência do processo iterativo para o mesmo ponto, o que nos levou a crer que o processo é

convergente.

No capítulo 4 apresentamos as experiências computacionais e verificamos que o p -centro possui uma melhor qualidade central, segundo a medida de centricidade que definimos, do que o centro analítico. E também podemos concluir que o *método de projeções ponderadas* é facilmente paralelizável tornando-se assim muito mais eficiente em um ambiente paralelo.

Para estudo futuro, a idéia seria de realizar para o p -centro o mesmo trabalho feito com o centro analítico baseado no algoritmo de geração de colunas para o problema de encontrar um ponto factível em um conjunto definido por um número finito de desigualdades convexas. Para cada iteração, o algoritmo calcula um centro analítico aproximado do conjunto definido pela intersecção de desigualdades geradas na iteração anterior. Se este centro analítico aproximado é uma solução factível o algoritmo termina; caso contrário, a desigualdade violada pelo centro é selecionada e um novo hiperplano (definido por esta desigualdade) é anexado próximo ao centro aproximado. Como o número de hiperplanos aumenta, o conjunto definido por estas intersecções diminui e o algoritmo eventualmente encontra a solução do problema.

Apêndice A

Centro Analítico

Neste apêndice, iremos apresentar o método que usamos para se calcular o centro analítico. Tal centro foi usado para o nosso trabalho como objeto de comparação em termos de medida de centricidade que foi definida no Capítulo 3.

Problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \prod_{j=1}^n x_j \\ \text{sujeito a :} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Problema equivalente :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \sum_{j=1}^n \ln(x_j) \\ \text{sujeito a :} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Portanto, o problema pode ser resolvido da seguinte maneira :

Dado um ponto inicial factível e interior, isto é, $x^0 > 0$ tal que $Ax = b$, nós encontramos o próximo $x^1 = x^0 + \Delta^0$ onde Δ^0 é direção de subida factível (isto é, $A\Delta^0 = 0$) ou seja Δ^0 está no núcleo de A . Logo, nós queremos que

$$f(x^1) > f(x^0)$$

ou achar Δ^0 tal que

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } f(x^1) &= \sum_{j=1}^n \ln(x^0 + \Delta^0) \\ \text{sujeito a :} & \\ A\Delta^0 &= 0 \end{aligned}$$

Em geral, nós queremos

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } f(x^{k+1}) &= \sum_{j=1}^n \ln(x^k + \Delta^k) \\ \text{sujeito a :} & \\ A\Delta^k &= 0 \end{aligned}$$

Mas, a função $f(x^{k+1})$ pode ser aproximada pela função quadrática

$$g(x^{k+1}) = \nabla f(x^k)^t \Delta^k + \frac{1}{2} (\Delta^k)^t \nabla^2 f(x^k) \Delta^k$$

onde

$$\nabla f(x^k) = D_k^{-1} e$$

com $D_k = \text{diag}(x^k)$ e $\nabla^2 f(x^k) = -D_k^{-2}$.

E finalmente, o problema pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } g(x^{k+1}) \\ \text{sujeito a :} \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$A\Delta^k = 0$$

A função Lagrangiana para o problema (A.1) é

$$L(\Delta^k, \lambda^k) = \nabla f(x^k)^t \Delta^k + \frac{1}{2} (\Delta^k)^t \nabla^2 f(x^k) \Delta^k - \lambda^t A \Delta^k$$

Diferenciando a função acima, com respeito a Δ^k , nós obtemos o multiplicador de Lagrange

$$\lambda^k = (A D_k^2 A^t)^{-1} b$$

E, a direção de Newton é dada por

$$\Delta^k = D_k e - D_k^2 A^t \lambda^k$$

Finalmente, o novo ponto

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \Delta^k$$

onde $\alpha^k > 0$ é dado pela solução de uma busca linear tal que $x \geq 0$ e $f(x^{k+1}) > f(x^k)$. O processo é repetido até que algum critério de convergência seja alcançado.

Bibliografia

- [1] BARNES, E.R., CHOPRA, S. e JENSEM, D.L. (1991) *A Polynomial Time Version of the Affine Scaling Algorithm*, manuscrito impublicado.
- [2] BARTLE, G.R., (1964), *The Elements of Real Analysis*. Segunda Edição.
- [3] BAZARAA, M.S., JARVIS, J.J. e SHERALI, H.D. (1977) *Linear Programming and Networks Flows*. Segunda Edição.
- [4] BOGGS, P., DOMICH, P., DONALDSON, J. e WITZGALL, C. (1989) *Algorithmic Enhancements to the Method of Centers for Linear Programming Problems*, ORSA Journal on Computing 1(3), 159 – 171.
- [5] FREUND, R. (1988) *Projective Transformation for Interior Point Methods, Part I : Basic Theory and Linear Programming*, Working Paper OR 179 – 88.
- [6] FREUND, R. (1988) *Projective Transformations for Interior Point Methods, Part II : Analysis of an Algorithm for Finding the Weighted Center of a Polyhedral System* Working paper OR 180 – 88.
- [7] GAY, D. M. (1985), *Electronic mail distribution of linear programming test problems*, Mathematical Programming Society COAL Newsletter.
- [8] GONDZIO, J. (1994), *Presolve Analysis of Linear Programs Prior to Applying an Interior Point Method*, Technical Report 1994.3, Logilab, HEC Geneva, Section of Management Studies, University of Geneva.
- [9] GONZAGA, C.C. (1987) *An Algorithm for Solving Linear Programming Problems in $O(n^3L)$ Operations*, Memorandum UCB/ERL

M87/10, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, CA.

- [10] HUARD, P. (1967), *Resolution Mathematical Programming with Non-linear Constrains by the Method of Centers*, J.Abadie ed., *Non-Linear Programming*, North-Holland, Amsterdam, Holland, 207-219.
- [11] JARRE, F. SONNEVEND, G. e STOER, J. (1988) *An Implementation of the Method af Analytic Center*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Sprinter-Verlag 111, 297 – 307.
- [12] JOHN, F. (1948), *Extreme Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions, Studies and Essays*, presented to Courant on the ocassion of his sixtieth birthday, Interscience Publishers, New York, 543 – 559.
- [13] KAISER, M.J., MORIN, T.L. e TRAFALIS, T.B. (1991) *Centers and Invariant Points of Convex Bodies*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 4, 367 – 385.
- [14] KLEE, V. (1963) *Convexity*, Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of The American Mathematical Society.
- [15] KOJIMA, M.,MIZUNO, S. e YOSHISE, A. (1987), *A Polynomial-Time Algorithm for a Class of Complementarity Problems*, Research Report, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.
- [16] MAY, J.H. e SMITH, R.L. (1981), *Random Polytopes : Their Definition, Generation and Aggregate Properties*, Department of Industrial and Operations Engeneering, The University of Michigan, 39 – 54.
- [17] MEGIDDO, N. (1986), *Pathways ti the Optimal Set in Linear Programming*, *Proceedingns oh the Mathematical Programming Symposium of Japan*, Nagoya, Japan, 1-36.
- [18] MONTEIRO, R.C. e ADLER, I. (1987), *An $O(n^3L)$ Primal-Dual Interior Point Algorithm For Linear Programming*, Report ORC 87-4, Operation Research Center, Departament of Operations Research, University of California, Berkeley. Por aparecer em *Mathematical Programming*.

- [19] MORETTI, A.C. (1992), *A New Technique for Finding the Center of a Polytope*, Ph. D Thesis, Georgia.
- [20] PAPADIMITRIOU, C.H. e STEIGLITZ, K. (1982) *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [21] RENEGAR, J. (1988), *A Polynomial-time Algorithm Based on Newton's Method for Linear Programming*, Mathematical Programming (Series A), Vol. 40, 59-95.
- [22] ROOS, C. e VIAL, J.P. (1988) *Analytic Centers in Linear Programming*, Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics no. 88 – 74.
- [23] ROOS, C. e VIAL, J.P. (1988) , *A Polynomial Method of Approximate Centers for Linear Programming*, Reports of Faculty of Technical Mathematics as Informatics no. 88 – 68.
- [24] SCHIJVER, A. (1986) , *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley - Intersciencence Series in Discrete Mathematics and Optimization.
- [25] SONNEVEND, GY. (1985), *An Analytic Center for Polyhedrons and New Classes of Global Algorithms for Linear (Smooth, Convex) Programming*, *Proceedings 12th IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, Budapeste.
- [26] TODD, M. (1982) *On Minimum Volume Ellipsoids Containing Part of a Given Ellipsoid*, Mathematics of Operations Research, Vol 7, No 2, 253 – 261.
- [27] VALENTINE, F. A. (1964) *Convex Sets* Departament of Mathematical University of California, Los Angeles, 69 – 89.