



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Sistemas dinâmicos fuzzy aplicados a processos difusivos.

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Doutorado em Matemática Aplicada

Orientador: **Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi**

Campinas
Setembro de 2011

Sistemas dinâmicos fuzzy aplicados a processos difusivos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Jefferson Cruz dos Santos Leite** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de Setembro de 2011.

Rodney Carlos Bassanezi
Orientador

Banca examinadora:

Prof(a). Dr(a). Rodney Carlos Bassanezi (UFABC)

Prof(a). Dr(a). João Frederico da Costa Azevedo Meyr (IMECC/UNICAMP)

Prof(a). Dr(a). Norberto Anibal Maidana (UFABC)

Prof(a). Dr(a). João Xavier da Cruz Neto (UFPI)

Prof(a). Dr(a). Rosana Sueli da Motta Jafelice (UFU)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MÜLLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

L536s	<p>Leite, Jefferson Cruz dos Santos, 1981- Sistemas dinâmicos fuzzy aplicados a processos difusivos / Jefferson Cruz dos Santos Leite. - Campinas, SP : [s.n.], 2011.</p> <p>Orientador: Rodney Carlos Bassanezi. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.</p> <p>1.Conjuntos difusos. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Difusão. 4. Equações diferenciais parciais. I. Bassanezi, Rodney Carlos, 1943-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.</p>
-------	---

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Fuzzy dynamic systems applied to diffusive processes

Palavras-chave em inglês:

Fuzzy sets

Dynamic systems

Diffusion

Partial differential equations

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Rodney Carlos Bassanezi [Orientador]

João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Norberto Anibal Maidana

João Xavier da Cruz Neto

Rosana Sueli da Motta Jafelice

Data da defesa: 30-09-2011


Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 30 de setembro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI




Prof(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER



Prof(a). Dr(a). NORBERTO ANIBAL MAIDANA



Prof(a). Dr(a). ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE



Prof(a). Dr(a). JOÃO XAVIER DA CRUZ NETO

Aos meus filhos, esposa e pais.

Agradecimentos

Aos meus pais que muito contribuíram para minha personalidade e caráter.

A minha esposa Jackellyne pelo carinho e compreensão, que foram muito importantes para essa conquista.

Aos meus filhos, que me deram força para lutar.

Ao meu orientador Rodney pela força, compreensão, orientação e amizade que foram essenciais para o término desse trabalho.

Aos membros da banca pelas inúmeras sugestões que muito enriqueceram esse trabalho.

A Ademilde pela simpatia, amizade e presteza que foram essenciais para minha estadia em Campinas.

Aos amigos Francisco, Héctor, Moisés, Renato, Vanessa, Michel, Luciana, Paulo, Paulo Alexandre, Juscelino, Ronaldo, Cléber e Érica.

A Universidade Federal do Maranhão pelo afastamento que me foi concedido.

A todos os amigos da Universidade Federal do Piauí pela força que me foi dispensada.

A Coordenação da pós graduação pela presteza e simpatia, em especial a Tânia que prontamente atendia aos meus pedidos nem sempre simples.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para o término desse trabalho.

Resumo

Neste trabalho definiremos solução fuzzy para problemas que envolvam difusão e exploraremos algumas propriedades importantes como unicidade e estabilidade dessas soluções.

Basicamente estamos interessados em considerar algumas características importantes desses problemas difusivos como incertos, para isso, usaremos o conceito de número fuzzy. Termos como coeficiente de difusão e condição inicial serão considerados como incertos e através da extensão de Zadeh aplicado a solução da equação determinística associada ao problema teremos a solução fuzzy.

Serão obtidas também soluções via base de regras, utilizando sistemas dinâmicos p-fuzzy, garantindo assim, uma maneira eficiente e prática de obtermos, boas respostas para os problemas, sem necessariamente termos as soluções explícitas. Aplicações desses resultados também serão apresentados.

Palavras chave: Sistemas Dinâmicos Fuzzy; Equações Diferenciais Parciais; Estabilidade; Equação de Difusão.

Abstract

This work will define fuzzy solution for problems involving diffusion and explore some important properties such as uniqueness and stability of these solutions.

Basically we are interested in considering some important features of these diffusion problems as uncertain and, we use the concept of fuzzy numbers for this. Terms such as diffusion coefficient and initial condition are considered as uncertain and by the extension of Zadeh's solution applied to deterministic equation associated with the problem we have the fuzzy solution.

Solutions for rule-base situations are also obtained, using p-fuzzy dynamic systems, thus guaranteeing an, efficient and practical way of obtaining adequate answers to the problems, not necessarily under the explicit solutions. Applications of these results will also be discussed.

Key words: Fuzzy Dinamics Systems; Partial Diferential Equations; Stability; Dif-fusion Equation.

Sumário

Introdução	1
1 Equação de difusão	7
1.1 Equação de Difusão Clássica	7
1.2 Outras interpretações para difusão	16
2 Introdução à teoria dos conjuntos fuzzy	19
2.1 Introdução	19
2.2 Subconjuntos fuzzy	19
2.3 O Subespaço $\mathcal{E}(X)$	25
2.4 Projeções em Espaços Métricos Fuzzy	36
2.5 Problemas de valor inicial fuzzy	42
2.5.1 Extensão do campo determinístico	43
2.5.2 Extensão do fluxo determinístico	45
3 Estabilidade da equação de difusão-reação-advecção fuzzy	55
3.1 Equação de difusão-reação-advecção fuzzy em \mathbb{R}	55
3.1.1 Estabilidade da solução fuzzy em \mathbb{R}	57
3.2 Equação de difusão-reação-advecção fuzzy em \mathbb{R}	58
3.2.1 Estabilidade assintótica da solução fuzzy	59
3.2.2 Intersecção das soluções fuzzy unidimensionais envolvendo apenas difusão com o plano $t = t^*$	61
3.2.3 Intersecção das soluções fuzzy unidimensionais envolvendo difusão-reação com o plano $t = t^*$	62
3.2.4 Intersecção das soluções fuzzy unidimensionais envolvendo difusão-reação-advecção com o plano $t = t^*$	63
3.3 Equação de difusão-reação-advecção fuzzy em \mathbb{R}^2	64
3.4 Solução fuzzy da equação de difusão n -dimensional	66

4	Equação de difusão-reação-advecção fuzzy com coeficiente de difusão D dependente do tempo.	75
4.1	Modelo Fuzzy associado	79
4.2	Solução fuzzy com coeficiente variável e reprodução Malthusiana	80
4.3	Solução fuzzy da equação unidimensional de difusão no instante $t = t^*$	82
4.4	Solução fuzzy da equação unidimensional de difusão-reação-advecção no instante $t = t^*$	84
4.5	Solução bidimensional da equação de difusão-reação-advecção com coeficiente dependente do tempo	86
4.5.1	Solução bidimensional da equação de difusão fuzzy	86
4.5.2	Solução bidimensional da equação de difusão-reação-advecção fuzzy	87
5	Equação de difusão via base de regras: Modelos p-fuzzy	91
5.1	Introdução	91
5.2	Sistemas baseado em regras fuzzy: Controlador de Mamdani	92
5.3	Equação de difusão p-fuzzy	97
5.3.1	Modelagem da distribuição populacional sem uso de sistema dinâmico	97
5.3.2	Modelagem da densidade populacional utilizando tempo e coeficiente de difusão como variáveis de entrada	102
5.3.3	Solução da equação de difusão utilizando sistemas dinâmicos p-fuzzy	105
6	Aplicações	113
6.1	Modelagem de dispersão de insetos	113
6.1.1	Estimativa dos Parâmetros	115
6.1.2	Solução determinística \times Solução fuzzy	117
6.2	Modelo de difusão aplicado a dispersão larval	126
6.2.1	Modelo de Difusão determinístico	130
6.2.2	Modelo fuzzy	132
6.2.3	Discussão	134
	Conclusões e perspectivas futuras	137
	Referências Bibliográficas	139

Introdução

Os modelos clássicos de dinâmica populacional vem sendo estudados ao longo do tempo e diversas variações destes modelos foram desenvolvidas. Modelos formulados com equações ou sistemas de equações diferenciais parciais tem sido utilizados para o estudo de processos de migração e dispersão populacional.

Para descrever um fenômeno com o grau de realismo desejado faz-se necessário um processo de modelagem matemática capaz de capturar o máximo de informações que supostamente são essenciais no estudo do fenômeno. Evidentemente, quanto mais informações o modelo incorporar, mais realista ele se torna. Contudo quase sempre isso complica ou inviabiliza a obtenção de soluções fidedignas.

Daí a necessidade de selecionar aqueles aspectos supostamente relevantes que envolvem o sistema biológico. Na busca por identificar esses aspectos relevantes, surgem impressões obtidas de situações reais que, na maioria das vezes, se acham ocultas em um vasto emaranhado de variáveis subjetivas, impregnadas de características incertas difíceis de serem mensuradas. Por exemplo, em se tratando do estudo de epidemias e dinâmica de populações, os parâmetros que caracterizam a dispersão da doença, um indivíduo ou até mesmo um grupo de indivíduos, nem sempre podem ser avaliados ou medidos no sentido tradicional. São incertezas que somente podem ser conjecturadas intuitivamente.

Nesse contexto, ferramentas matemáticas clássicas, que se utilizam de equações determinísticas, quando tratadas de forma isolada ficam sujeitas à perda de algumas informações, inerentes aos fenômenos que podem ser causados devido à natureza intrinsecamente nebulosa das variáveis de estado envolvidas ou através dos parâmetros das equações (coeficientes ou condição inicial). Ou então, se impõem condições e/ou restrições tão drásticas que, na maioria dos casos, termina desvirtuando a natureza da situação em estudo. Em ambas as situações as tarefas implicam em grandes desafios, dada a complexidade em se lidar com conceitos vagos e imprecisos.

Contraopondo-se a este cenário de desafios, o interesse de profissionais e pesquisadores em construir modelos matemáticos para descrever fenômenos biológicos que envolvem incertezas tem crescido e se desenvolvido rapidamente nas últimas décadas. Na maior parte dos modelos propostos a interdisciplinaridade surge como uma das respostas à necessidade de interligação dos métodos dos diferentes ramos do saber científico de caráter

essencialmente epistemológico. Esse processo de interdisciplinaridade torna-se necessário devido à excessiva compartimentalização do conhecimento, advindo das informações selecionadas como essenciais, a serem incorporadas ao modelo matemático. Dessa forma, a interligação de ferramentas matemáticas clássicas, no caso, as equações diferenciais e a teoria da probabilidade, com ferramentas não clássicas como a lógica fuzzy, por exemplo, tem demonstrado possuir grande capacidade de aplicação em problemas da área epidemiológica, considerados os tipos de incertezas envolvidos no fenômeno de interesse Massad (2009).

O marco inicial da Teoria dos conjuntos Fuzzy foi em 1965 quando Lofti Zadeh introduziu o conceito de conjuntos fuzzy Zadeh (1965). Após isso, muita pesquisa foi desenvolvida tanto do ponto de vista teórico quanto prático Barros e Bassanezi (2006) e Nguyen e Walker (2000). Uma das áreas de interesse foi a modelagem de fenômenos incertos. Os modelos matemáticos de fenômenos naturais por meio de sistemas dinâmicos pode estar sujeito à incertezas inerentes aos parâmetros das equações que descrevem tais fenômenos. Por exemplo, em problemas de dinâmica populacional nem sempre é possível sabermos exatamente a quantidade de indivíduos ou a capacidade suporte em uma determinada região. Também nem sempre é possível, por dificuldade técnica ou falta de informação, incorporar todas as leis necessárias para descrever o fenômeno estudado. Desta forma, a subjetividade é um importante fator que deve ser considerado na modelagem matemática.

No entanto, para fenômenos modelados por equações diferenciais parciais, existem algumas alternativas de modelagem clássica que contemplam incertezas inerentes aos parâmetros e condições iniciais. Dentre as mais importantes se destacam as equações diferenciais estocásticas e a teoria de inclusões diferenciais. Dependendo da escolha da variável de estado e/ou dos parâmetros dos modelos temos, respectivamente, fuzzines demográfica quando as variáveis de estado são modeladas por meio de conjuntos fuzzy e/ou fuzzines ambiental quando somente os parâmetros são considerados fuzzy. Nos fenômenos biológicos em geral, ambos os tipos de fuzzines estão presentes Barros e Bassanezi (2006).

O surgimento da teoria dos conjuntos fuzzy proposto por Zadeh (1965) trouxe novas ferramentas que possibilitam a incorporação de subjetividade em modelos que descrevem fenômenos reais onde faltam informações sobre as leis ou há incertezas nos parâmetros do modelo que descrevem tal fenômeno.

O desenvolvimento da teoria dos conjuntos fuzzy deu origem às equações diferenciais fuzzy, inicialmente introduzidas por Kandel e Byatt (1981). A partir de então, autores como Kaleva (1987) e Seikkala (1987) adotam o conceito de H - diferenciabilidade, desenvolvida por Puri e Ralescu (1983) a partir da derivada de Hukuhara, no estudo das equações diferenciais fuzzy. No entanto, as soluções de equações diferenciais fuzzy obtidas por meio da H - derivada apresentam muitas vezes a indesejável capacidade de aumentar a subjetividade quando o tempo cresce. Mesmo para o simples problema de decaimento radioativo, o diâmetro do suporte da solução fuzzy diverge quando $t \rightarrow \infty$ (Kaleva (1987)). Segundo Diamond (2000), esta formulação não é capaz de reproduzir o rico comporta-

mento das equações diferenciais determinísticas tais como periodicidade, estabilidade e bifurcação, sendo assim inapropriada para a modelagem de problemas reais.

O estudo das equações diferenciais fuzzy pode também ser feito através da teoria de inclusões diferenciais. As soluções obtidas por esta abordagem, sugerida inicialmente por Hüllermeier (1997), são capazes de apresentar periodicidade, estabilidade e bifurcação (Vorobiev e Seikkala (2002)).

Há ainda uma terceira alternativa para o estudo de equações diferenciais fuzzy que consiste em considerar a extensão de Zadeh da solução da equação diferencial determinística associada. Tal extensão é denominada solução da equação diferencial fuzzy ou solução fuzzy da equação diferencial. Soluções fuzzy obtidas através da extensão de Zadeh sobre a solução determinística, foram discutidas inicialmente em Oberguggenberger e Pittschmann (1999) e Buckley et al. (2000). Este último trabalho tem uma comparação entre as soluções obtidas por diferentes definições de derivadas de funções fuzzy.

Em sua tese de doutorado, Mizukoshi (2004) estudou algumas propriedades das soluções fuzzy obtidas via extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (0.1)$$

De acordo com Mizukoshi (2004), a solução fuzzy gerada pela equação acima satisfaz as propriedades de um semigrupo e portanto, tal solução pode ser vista como um fluxo sobre o conjunto formado por subconjuntos fuzzy de U . Mizukoshi (2004) também mostra que os subconjuntos fuzzy (ou pontos fuzzy) cuja função de pertinência são as funções características de pontos de equilíbrio da equação (0.1), são pontos estacionários para o fluxo fuzzy. Assim, os pontos de equilíbrio determinísticos para o fluxo determinístico determinam pontos de equilíbrio fuzzy para o fluxo fuzzy. Além disso, Mizukoshi mostra que sob certas condições a solução fuzzy, obtida pela extensão de Zadeh da solução determinística, coincide com a solução fuzzy obtida por inclusões diferenciais.

Da mesma forma Ceconello (2010), desenvolveu ferramentas que tornam a análise qualitativa para soluções fuzzy, obtidas por extensão de Zadeh da solução determinística, mais abrangente. Ceconello (2010) estabeleceu também condições para existência e estabilidade de pontos de equilíbrio fuzzy cuja função de pertinência seja sobrejetiva. Além disso, foi estudada a existência e estabilidade de órbitas periódicas para o fluxo fuzzy. As generalizações de alguns resultados apresentados por Mizukoshi (2004), bem como os novos resultados que obtidos por Ceconello (2010) são essenciais para o estudo de soluções fuzzy geradas por equações autônomas.

Dessa forma, devido ao seu grande potencial de aplicabilidade e caráter de interdisciplinaridade, a teoria de conjuntos fuzzy pode facilitar o trabalho do modelador e de especialistas das áreas envolvidas, possibilitando o acréscimo de novas informações, facilitando análise e compreensão de algumas situações reais. Isso pode ser observado em trabalhos envolvendo Equações de Diferenças, Equações Diferenciais Ordinárias, Autôma-

tos Celulares, dentre outros, aliados à teoria fuzzy, como no estudo de doenças de plantas desenvolvido por Peixoto et al. (2004). Tal estudo consiste na evolução da “Morte Súbita” dos Citros, em que se tem apenas informações parciais, dadas linguisticamente. Jafelice (2003) também faz um estudo sobre populações HIV positiva, em que a taxa de transferência da população assintomática para sintomática é um parâmetro que tem caráter incerto, definido por meio de descrições de variáveis linguísticas.

Em se tratando de modelos epidemiológicos envolvendo Equações Diferenciais Parciais (EDP), são poucos os trabalhos que incorporam informações imprecisas inerentes aos fenômenos. Incertezas não advindas da aleatoriedade, possíveis de serem tratadas pela lógica fuzzy, são ainda mais difíceis de se encontrar na literatura das EDPs, como exemplo veja Almeida et al. (2006). Missio (2008), em sua tese de doutorado propõe um modelo integrado envolvendo EDP, Lógica Fuzzy e métodos probabilísticos, a fim de estudar a dinâmica espacial e temporal de fenômenos epidemiológicos, cujas incertezas são importantes para sua evolução. Para tanto, considerou-se como objeto de estudo a febre aftosa em bovinos e um modelo compartimental tipo do SIR envolvendo EDP, implementado por meio da técnica de elementos finitos, para estudar a evolução espaço temporal da doença, com parâmetros de difusão e transmissão incertos, calculados via base de regras.

Em nosso trabalho, consideramos processos que envolvem difusão e com a condição inicial incerta, fazendo uso da teoria dos conjuntos fuzzy. Para isso, utilizamos o Princípio da Extensão de Zadeh para estudar a influência desses dados incertos ao longo da solução. Propriedades importantes a respeito dessas soluções fuzzy são estudadas a fim de dar um melhor suporte matemático à modelagem de fenômenos que envolvam dispersão por difusão.

O Capítulo 1 contém as principais informações e técnicas de resolução das equações de difusão clássicas, buscando explicitar as soluções e propriedades determinísticas de tais equações que serão importantes no decorrer do trabalho. Este capítulo de resultados clássicos poderia ser dispensado se não fossem as frequentes chamadas em nossos resultados nos capítulos seguintes.

As principais definições e alguns importantes resultados sobre a teoria dos conjuntos fuzzy são apresentados no Capítulo 2 deste trabalho. Além de algumas definições, propriedades e operações com conjuntos fuzzy, apresentamos também uma versão generalizada do Teorema da Representação para subconjuntos fuzzy de um conjunto X .

O Teorema da Representação, inicialmente proposto por Negoita e Ralescu (1975), é uma importante ferramenta para definições e operações com conjuntos fuzzy de X . Uma generalização deste teorema é apresentada em Ralescu (1992). Mais recentemente, Saïdi e Jaballah (2008) estudaram algumas condições necessárias e suficientes que associam para cada família de subconjuntos de X um único subconjunto fuzzy de X . No entanto, em ambos os casos, os autores consideram que o 0-nível de um subconjunto fuzzy de X é o próprio X .

No Capítulo 3 definimos uma solução fuzzy para a equação de difusão, onde o coefi-

ciente de difusão é constante e a condição inicial do problema é um número fuzzy. A partir dessa definição serão provados vários teoremas similares aos determinísticos relacionados com a estabilidade da solução. Além disso é apresentada uma representação gráfica para essas soluções, tomando por base seus graus de pertinência Leite e Bassanezi (2010).

No Capítulo 4 definimos uma solução fuzzy para a equação de difusão, onde o coeficiente de difusão é dependente do tempo e a condição inicial do problema é um número fuzzy. Fizemos uso de um coeficiente de difusão decrescente por tornar o modelo mais real. Além disso foram apresentadas várias representações gráficas para essas soluções, tomando por base seus graus de pertinência.

No Capítulo 5 com quarta alternativa para sistemas dinâmicos fuzzy com EDP, estamos interessados em desenvolver uma base de regras que nos possibilite encontrar uma solução para problemas que envolvam difusão. Para isso, usamos apenas a posição da população, condição inicial e variação da população. Dessa forma poderemos estimar a densidade populacional em um instante $t = t^*$ sem necessariamente termos a solução analítica do problema Leite e Bassanezi (2011).

No Capítulo 6 apresentamos duas aplicações da teoria em EDP. Uma sobre dispersão de insetos desenvolvida por Crank (1975) e outra sobre dispersão de larvas desenvolvida por Bassanezi et al. (1997).

Capítulo 1

Equação de difusão

1.1 Equação de Difusão Clássica

Do ponto de vista macroscópico, a difusão pode ser interpretada como uma taxa de passagem líquida de indivíduos na fronteira de uma região de interesse e nesse sentido ela é denominada de processo difusivo. Esta abordagem fenomenológica da difusão envolve somente o comportamento macroscópico do movimento dos indivíduos, independentemente de quaisquer hipóteses sobre seu movimento microscópico. O argumento fundamental necessário para a formulação deste modelo é o conceito de fluxo, denotado por J , que representa a taxa líquida de passagem de indivíduos através de uma superfície de teste por unidade de área. No contexto de dinâmica de populações, o tensor de fluxo pode ser interpretado como uma descrição macroscópica do efeito do movimento microscópico realizado pelos indivíduos. Assim, pode-se dizer que o tensor de fluxo "contabiliza" a passagem líquida de indivíduos através da fronteira das regiões de interesse. Nesse sentido, o fluxo é definido pelo valor de sua integral de superfície (no caso tridimensional) e não por seu valor pontual. Nesse caso tem-se:

$$\int_{\partial\Omega} J(u) d\vec{S} = \begin{array}{l} n^\circ \text{ de indivíduos que atravessam a} \\ \text{fronteira } (\partial\Omega) \text{ por unidade de tempo no} \\ \text{sentido da normal escolhida.} \end{array}$$

Nesta expressão, o termo $J(u)d\vec{S}$ representa a taxa de passagem de indivíduos, por unidade de tempo, através do elemento de superfície $d\vec{S} = \Delta S \cdot \vec{N}$, onde \vec{N} é um vetor normal à superfície Ω . Assim $J(u) d\vec{S}$ será positivo se a passagem se dá no mesmo sentido do vetor normal e negativo, caso contrário.

Considerando-se uma região de interesse Ω define-se:

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = n^\circ \text{ de indivíduos presentes em } \Omega \text{ no instante } t.$$

Com esta definição, não é importante saber a localização de cada indivíduo, mas sim caracterizar como este conjunto de indivíduos está distribuído nas regiões Ω .

A taxa de variação instantânea do número de indivíduos numa região Ω é descrito por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_t(x, t) dx.$$

Se o único fator que contribui para essa variação da quantidade de indivíduos na região Ω , é representado pelo trânsito de indivíduos através da fronteira da região Ω , isso pode ser formulado por meio da seguinte hipótese de conservação, tomando-se $d\vec{S}$ como a normal exterior à região Ω :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_t(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} J(u) d\vec{S}.$$

O sinal negativo, na integral que envolve o fluxo, se deve ao fato de que o fluxo é negativo quando o número de indivíduos que atravessam $\partial\Omega$ de fora para dentro da superfície é maior, visto que esta passagem se dá na direção contrária à normal exterior. Mas nesse caso temos indivíduos contribuindo para o aumento de u logo esta contribuição deve ser positiva para $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx$. O mesmo argumento vale para o caso em que o fluxo é negativo. Fazendo uso do teorema de Gauss, esta equação pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\partial\Omega} J(u) d\vec{S} = \int_{\Omega} \text{div} J(u) dx. \quad (1.1)$$

Um modelo razoável é supor que o fluxo depende de u , agindo no sentido da densidade mais alta para a densidade mais baixa. Esta hipótese é a ferramenta primordial da teoria clássica da difusão, elaborada no século XIX por Adolf Fick (1829-1901). A lei de Fick, na sua forma mais simples, afirma que a taxa na qual os indivíduos dispersam de um ponto x é proporcional à curvatura do gradiente da densidade no ponto, ou seja:

$$J = Du_x \quad (1.2)$$

onde o fator de proporcionalidade, $D > 0$, é denominado de coeficiente de difusão.

Duas observações importantes devem ser consideradas quanto à expressão do fluxo dada em (1.2):

- a) O coeficiente de difusão D representa a habilidade de movimentação dos indivíduos e pode ser uma função do espaço, do tempo ou mesmo da própria densidade.
- b) O sinal negativo indica que o fluxo, por difusão, ocorre da concentração mais alta para a concentração mais baixa, buscando, portanto, a homogeneização.

Usando as equações (1.1) e (1.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (Du_x) dx \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx &= \int_{\Omega} Du_{xx} dx\end{aligned}\tag{1.3}$$

onde as integrais valem para quaisquer regiões Ω . Assim temos a equação de difusão clássica unidimensional:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} (Du_x).\tag{1.4}$$

Esta equação, conhecida como equação de difusão, vem sendo usada para descrever diversos fenômenos físicos e biológicos, como por exemplo a difusão de partículas imersas num solvente, a difusão do calor e o movimento de microorganismos. No caso em que o *coeficiente de difusão* D é constante, a equação (1.4) torna-se:

$$u_t = Du_{xx}\tag{1.5}$$

A equação (1.5) é também conhecida como Equação de Fick e sob determinadas condições, é possível encontrar uma solução analítica para esta equação. Este problema é conhecido como problema fundamental e sua solução é denominada de solução fundamental.

O problema fundamental é dado por:

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(x_0, 0) = N_0 \delta(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \end{cases} \text{ e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0\tag{1.6}$$

ou seja, $\delta(x_0)$ é a função delta de Dirac, $u(x, 0)$ é um valor concentrado inicialmente em x_0 e tende a zero nas fronteiras para todo t .

A solução do problema (1.6) é obtida pelo método da similaridade ou também conhecido por análise dimensional. Neste método, primeiramente determinam-se as dimensões de todas as variáveis do problema, como indicado na Tabela 1, conhecendo-se, assim, quais os seus parâmetros adimensionais.

Variáveis	Dimensão
x	L
t	T
u	PL^{-1}
N_0	P
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$PL^{-1}T^{-1}$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	PL^{-3}
D	L^2T^{-1}

Tabela 1: Dimensões das Variáveis.

Na Tabela 1 temos as variáveis do problema (1.6) e suas respectivas dimensões, onde denotamos por P a unidade de medida da população, T a unidade medida de tempo e L a unidade de medida do comprimento.

Neste caso, os dois parâmetros adimensionais para o problema são:

$$\frac{u}{\frac{N_0}{\sqrt{Dt}}} \text{ e } \frac{x}{\sqrt{Dt}}$$

Com isso supõe-se que:

$$\frac{u}{\frac{N_0}{\sqrt{Dt}}} = f\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

onde f é uma função a ser determinada. Temos assim a seguinte expressão para u :

$$u(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{Dt}} f\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \quad (1.7)$$

Derivando a expressão (1.7), substituindo na equação (1.6) e fazendo as devidas simplificações teremos a seguinte equação para a função f :

$$-f(\zeta) - \zeta f'(\zeta) = 2f''(\zeta), \quad (1.8)$$

onde $\zeta = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ e $f'(\zeta)$ é a derivada ordinária de f em relação a ζ . Esta equação (1.8) pode ser reduzida a uma equação linear de primeira ordem e sua solução é dada por:

$$f(\zeta) = \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right)$$

e com isso obtemos a seguinte expressão para u :

$$u(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{Dt}} C \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (1.9)$$

Para determinarmos o valor de C usamos a seguinte hipótese:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = 0 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = N_0. \quad (1.10)$$

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ e substituindo a expressão (1.9) em (1.10) e resolvendo a integral imprópria determinamos $C = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ e finalmente temos a solução do problema fundamental (1.6)

$$u(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (1.11)$$

Algumas observações importantes da solução fundamental (1.11):

a) Esta solução é também denotada por $G(x, t)$ conhecida como núcleo ou função de Green.

b) Em dimensão 2, podemos obter a solução fundamental analogamente fazendo $\frac{u}{\frac{N_0}{\sqrt{Dt}}} = g\left(\frac{r^2}{\sqrt{Dt}}\right)$,

$$u(x, y, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \quad (1.12)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) A função $\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$ é a gaussiana e quanto menor for o valor de t mais alto será o pico, ou seja, $G(x, t)$ é um núcleo de Dirac e portanto satisfaz as seguintes propriedades:

- i. $G(x, t) \geq 0$ para todo $x \in R^n$ e $t > 0$
- ii. $\int_{R^n} G(x, t) dx = 1$ para todo n
- iii. $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\|x\| \leq \epsilon} G(x, t) dx = 1$, para todo $\epsilon > 0$.

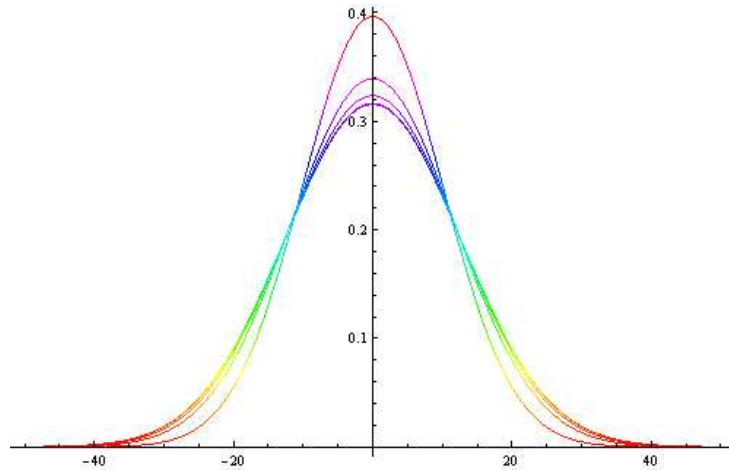


Figura 1.1: O gráfico apresenta a solução fundamental para vários valores de t .

A equação (1.5) é utilizada para modelar um processo de dispersão onde os indivíduos movimentam-se somente por difusão. Nesse caso, a distribuição da densidade populacional em cada instante é obtida por meio da expressão 1.12. O gráfico desta solução, (Figura 1.1), revela que a densidade populacional diminui rapidamente com a distância ao ponto de origem. Porém, dada a limitação da nossa capacidade de observação, existe uma

densidade limiar que a população deve exceder para que sua presença possa ser detectada numa determinada posição. Esta densidade limiar será denotada por v , e sua magnitude depende da população considerada e dos métodos de observação.

Na Figura 1.1 observamos a densidade limiar mostrando que quando uma invasão ocorre somente por difusão, e sem o crescimento da população, então esta dispersão espacial avança muito lentamente. Uma questão relevante nos processos difusivos é a velocidade na qual os indivíduos se propagam se eles se utilizam somente do mecanismo de dispersão para se movimentarem. Para analisar este fenômeno, vamos considerar um experimento em que uma determinada densidade u_0 de indivíduos, concentrados na posição $x = 0$, é liberada no instante $t = 0$, devendo percorrer, somente por difusão, o caminho na direção $x > 0$. O problema (1.13) determina qual a densidade em cada posição $x > 0$ e $t > 0$ e com isso é possível estimarmos qual a velocidade com que esta população avança, ou seja,

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & x > 0 \text{ e } t > 0 \\ u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0 \\ u(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x, t) = u_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Utilizando a Tabela 1 e sabendo que $[u_0] = [u]$ temos que $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$ e $\frac{u}{u_0}$ são variáveis adimensionais neste problema, podemos supor que existe uma função ϕ tal que:

$$\frac{u}{u_0} = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

ou seja:

$$u = u_0 \phi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \quad (1.14)$$

Derivando a expressão (1.14) e substituindo na equação (1.13) teremos a seguinte equação para a função ϕ :

$$\phi''(\zeta) + \frac{\zeta}{2}\phi'(\zeta) = 0 \quad (1.15)$$

onde $\zeta = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$.

Multiplicando a equação (1.15) por $\exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right)$ teremos:

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\phi'(\zeta) \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \right) = 0$$

$$\phi'(\zeta) \exp\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) = C_0,$$

cuja solução é

$$\phi(\zeta) = C_1 + \int_0^\zeta C_0 \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta.$$

Assim temos que:

$$u(x, t) = u_0 \left(C_1 + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{Dt}}} C_0 \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta \right) \quad (1.16)$$

Utilizando as condições (1.12) e (1.13) para a solução (1.16), determinamos os valores das constantes: $C_0 = \frac{-1}{2\pi}$ e $C_1 = 1$. Observe ainda que:

$$2\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{Dt}}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta + \int_{\frac{x}{\sqrt{Dt}}}^\infty \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta$$

que resulta em

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_{\frac{x}{\sqrt{Dt}}}^\infty \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta \right). \quad (1.17)$$

Portanto a função $u(x, t) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$ fornece a densidade populacional em qualquer posição $x > 0$ e em qualquer instante $t > 0$. Suponhamos porém que esta densidade somente seja detectável para $u(x, t) > v$, onde v é a densidade limiar para esta população. Utilizando a variável adimensional $\zeta = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ podemos escrever esta hipótese como:

$$\zeta \geq \zeta^* \implies \phi(\zeta) \leq v$$

onde ζ^* é a posição onde a densidade limiar é detectada. Dessa forma para $\zeta = \zeta^*$ temos $\frac{x}{\sqrt{Dt}} = \zeta^*$ e assim,

$$x^* = \zeta^* \sqrt{Dt}.$$

E a velocidade da frente de difusão é obtida pela variação da posição $x^*(t)$ em relação ao tempo, ou seja:

$$c = \frac{dx^*}{dt} = \frac{1}{2} \zeta^* \sqrt{D} t^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.18)$$

A equação (1.18) indica que a velocidade da difusão é proporcional a $t^{-\frac{1}{2}}$ e, portanto, muito alta para $t \rightarrow 0$ e decresce para $t \rightarrow \infty$. Assim, se uma invasão biológica for realizada por uma espécie que utiliza somente a difusão como mecanismo de dispersão, sem reprodução, então esta população será detectada somente no início da invasão. Portanto, o mecanismo de dispersão torna-se bastante ineficiente depois do estágio inicial de invasão, mostrando a necessidade de incorporar, neste modelo, outros fatores como a reprodução para descrever este evento. O modelo de Skellam, aplicado ao estudo da propagação do

"muskrat" na Europa, utiliza a equação de difusão em um espaço bi-dimensional, combinada com uma função de crescimento malthusiana para descrever o efeito da difusão e reprodução na dinâmica de invasão. Esta equação é dada por:

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + \epsilon u. \quad (1.19)$$

A solução desta equação pode ser obtida tomando-se $u = \exp(\epsilon t)U$, ou seja, $U = \exp(-\epsilon t)u$. Substituindo na equação (1.19) teremos:

$$U_t = D(U_{xx} + U_{yy}),$$

cuja solução, considerando as mesmas condições do problema (1.6) mas com $N_0 = 1$, é a mesma obtida em (1.12):

$$U(r, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right),$$

ou seja

$$u(r, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(\epsilon t - \frac{r^2}{4Dt}\right). \quad (1.20)$$

Podemos agora analisar qual é a velocidade de invasão para este modelo de Skellam. Esta velocidade é obtida analisando-se o avanço da frente da onda de invasão. Para tanto devemos considerar a densidade limiar v e o respectivo valor da distância r^* no qual esta densidade é detectada. Substituindo $u = v$ e $r = r^*$ na solução (1.20) e escrevendo x^* em função do tempo temos:

$$r^* = 2\sqrt{\epsilon Dt} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\epsilon} \ln\left(\frac{1}{4\pi Dt u^*}\right)\right)}. \quad (1.21)$$

Utilizando a Tabela 1 e acrescentando ainda que $[\epsilon] = T - 1$ podemos reescrever a equação (1.21) por meio das variáveis adimensionais:

$$R^* = \sqrt{\frac{\epsilon}{D}} r^* \text{ e } T = \epsilon t \quad (1.22)$$

Obtendo a equação adimensionalizada:

$$R^* = 2T \sqrt{\left(1 + \frac{1}{T} \ln\left(\frac{\gamma}{4T}\right)\right)} \quad (1.23)$$

onde $\gamma = \frac{\epsilon}{Du^*}$. A velocidade, adimensional, assintótica é determinada definindo-se $C = R^*T$ e fazendo $T \rightarrow \infty$.

$$C = \frac{R^*}{T} = 2\sqrt{\frac{1}{T} \ln\left(\frac{\gamma}{4T}\right)}. \quad (1.24)$$

Temos então, pela equação (1.24), que esta velocidade se aproxima de 2. Em termos dimensionais, basta reescrevermos a equação (1.24) usando (1.22) e teremos:

$$c = 2\sqrt{\epsilon D} \quad (1.25)$$

Esta velocidade indica a taxa na qual a frente populacional, representada por v , avança e, neste caso, depende do efeito combinado tanto da difusão quanto do crescimento da população, não dependendo do tempo como no modelo de difusão clássico. Portanto, a frente de invasão, no modelo de Skellam, avança com velocidade constante.

O termo de advecção também pode ser adicionado ao modelo de Skellam, equação (1.19), para descrever a dinâmica de populações que se movimentam por difusão com crescimento malthusiano além de serem transportados, numa determinada direção, com velocidade a .

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) - au_x + \epsilon u \quad (1.26)$$

onde o eixo x está na mesma direção do vetor velocidade. A solução da equação (1.26) é obtida escrevendo-se: $U(x, y, t) = u(x + at, y, t)$, e substituindo em (1.26) tem-se:

$$U(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(\epsilon t - \frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right).$$

Como $u(x, y, t) = U(x - at, y, t)$ então a solução da equação (1.26) é dada por:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(\epsilon t - \frac{(x - at)^2 + y^2}{4Dt}\right). \quad (1.27)$$

Portanto a solução do modelo de Skellam com advecção é a mesma obtida para o modelo de Skellam porém substituindo x por $x - at$. A velocidade assintótica, neste caso, atinge $c = 2\sqrt{\epsilon D} + a$ ao longo do sentido positivo do eixo x . Isso revela o quanto a advecção pode acelerar um processo de invasão. O modelo de Skellam torna-se problemático depois de um certo tempo visto que a densidade populacional torna-se infinitamente grande. Este problema é contornado no modelo de Fisher que substitui o crescimento malthusiano por um crescimento logístico, obtendo assim um nível de saturação para a densidade populacional.

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + (\epsilon - \mu u)u \quad (1.28)$$

Devido à não linearidade da função logística, o modelo de Fisher não pode ser resolvido analiticamente. Contudo, como estamos interessados em obter a velocidade de invasão, neste modelo, basta sabermos que esta velocidade é obtida analisando-se a frente populacional, onde a densidade populacional, u , é muito pequena, ou seja, $u \sim 0$. Assim $(\epsilon - \mu u)u \sim \epsilon u$, e o modelo de Fisher fica idêntico ao modelo de Skellam, na fronteira da invasão. Portanto a velocidade assintótica para o modelo de Fisher é a mesma obtida para o modelo de Skellam: $c = 2\sqrt{\epsilon D}$.

1.2 Outras interpretações para difusão

A equação de difusão foi apresentada como um modelo matemático utilizado para descrever diversos fenômenos biológicos e físico-químicos ocorrendo em meios contínuos. Nos modelos fenomenológicos de processos difusivos, como o modelo de Fick por exemplo, o conceito de fluxo, que é o seu ingrediente principal, é definido através de uma seção teste em x , que é proporcional e na direção contrária ao gradiente da distribuição da população neste ponto; ou seja: $J = -D \frac{\partial u}{\partial x}$. Portanto, esta definição depende do conceito de derivação em um espaço euclidiano.

O fluxo por difusão determina essencialmente a assimetria da distribuição dos indivíduos em relação à seção teste e o processo de difusão busca homogeneizar essa diferença, transferindo indivíduos do lado em que há mais para o lado em que há menos indivíduos. Portanto, esta assimetria da distribuição dos indivíduos é caracterizada por meio da derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$, que necessita de informações quanto à vizinhança local do ponto x em questão Diaz (1998). Esta interpretação para o processo de difusão é denominada de Princípio da Homogeneização Local e procura reduzir a assimetria da distribuição num ponto x Diaz (1998).

O estudo de processos difusivos pode ser generalizado em espaços mais gerais, particularmente aqueles em que não é possível aplicar o conceito de derivada, como um meio fractalizado por exemplo. Neste caso, o conceito de fluxo difusivo deve ser norteado por uma interpretação diferente, para o processo de homogeneização local, que permita definir este conceito em contextos geométricos mais complexos. Esse estudo pode ser encontrado com detalhes em Diaz (1998).

A dispersão é caracterizada pelo movimento de uma população de organismos para além de sua posição progenitora, fenômeno que ocorre portanto na escala espacial e temporal. Uma das primeiras tentativas para estudar o processo de dispersão apresentado por diversos organismos foi descrevendo uma relação entre a densidade populacional e a distância percorrida em cada instante.

A premissa dessa formulação veio da observação de que a densidade populacional diminui com o aumento da distância à fonte inicial, visto que poucos indivíduos conseguem sobreviver longe de seus descendentes. A hipótese de que a movimentação dos indivíduos possa ser razoavelmente descrita por um modelo de difusão trouxe um novo foco de pesquisa em dinâmica populacional. Esta nova abordagem possibilitou ampliar os estudos de crescimento e interação populacional acrescentando a variável espacial, tornando os modelos que tradicionalmente eram formulados por uma EDO passíveis de serem analisados por uma EDP.

Utilizando o modelo com esta equação diferencial parcial, pôde-se analisar, além da reprodução, morte e interação, a distribuição espaço-temporal dos indivíduos. Para tanto, a função de distribuição populacional passou a ser função do espaço e do tempo. Esta equação quantifica a densidade em cada posição e em cada instante fornecendo assim boas

informações para analisar o movimento da população quando não podemos perseguir os indivíduos

O trabalho de Fisher foi um dos pioneiros na abordagem da dispersão formulado como um processo de difusão aleatória. Seu modelo originalmente descrevia um processo de propagação genética, quando alguns indivíduos com alto nível de adaptabilidade apareciam na população. Embora os modelos de difusão baseiam-se no processo de movimentação aleatória, o movimento de uma população não precisa ser totalmente aleatório, como no movimento browniano por exemplo, para que sua dinâmica possa ser modelada por uma equação de difusão. Essencialmente, basta que o processo de distribuição populacional como um todo tenha características regulares, mesmo que cada indivíduo tenha comportamento instável ou irregular. Por exemplo, o movimento de cada molécula num gás é totalmente caótico e imprevisível, porém o conjunto de todas essas moléculas descreve um movimento regular e determinístico.

Mesmo assim, algumas dinâmicas podem muito bem ser explicadas por uma equação de difusão e outras nem tanto. Até mesmo a dinâmica de espécies altamente inteligentes quanto à sua habilidade de movimentação pode ser bem modelada pela equação de difusão, e entre aquelas cujo modelo de difusão falha, ainda assim ela nos mostra que esta espécie desempenha também outros mecanismos de dispersão, como por exemplo, a dispersão em longa distância Crank (1975).

Capítulo 2

Introdução à teoria dos conjuntos fuzzy

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns importantes resultados sobre a teoria dos subconjuntos fuzzy necessários para o desenvolvimentos dos demais capítulos deste trabalho. Dentre outras coisas, mostramos que algumas propriedades já conhecidas para os subconjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n também são válidas em espaços mais gerais.

Na Seção 2.2 introduzimos o conceito de subconjunto fuzzy de um conjunto X bem como algumas definições, propriedades e operações com subconjuntos fuzzy. Ainda na Seção 2.2, mostramos que o Teorema de Representação de Negoita - Ralescu (Diamond e Kloeden, 1994; Ralescu, 1992; Negoita e Ralescu, 1975) pode ser generalizado para o caso em que X é um espaço topológico arbitrário.

Na Seção 2.3, consideramos o conjunto $\mathcal{E}(X)$ formado pelos subconjuntos fuzzy de um espaço métrico X cujos α - níveis são compactos. Inicialmente, introduzimos uma métrica em $\mathcal{E}(X)$ e então mostramos que este espaço métrico é completo quando X é completo. Mostramos ainda que o Teorema de Nguyen (Nguyen, 1978; Fullér e Kereszfalvi, 1991; Barros, 1997; Román-Flores et al., 2001) é também válido em certos espaços topológicos.

Para finalizar este capítulo, na Seção 2.4 estudamos algumas propriedades da aplicação obtida pela extensão de Zadeh da projeção ortogonal em espaços euclidianos. Nas seções (2.5), (2.6) e (2.7) mostramos alguns resultados importantes sobre problemas de valor inicial fuzzy, extensão do fluxo e campo determinístico.

2.2 Subconjuntos fuzzy

O conceito de conjunto fuzzy foi primeiramente introduzido por L. A. Zadeh em um artigo publicado em 1965 (Zadeh, 1965). Desde então, as aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy são amplas e abrangem áreas tanto de interesse estritamente matemático (Diamond

e Kloeden, 1994; Nguyen e Walker, 2000) como em matemática aplicada e engenharia (Klir e Yuan, 1995; Barros e Bassanezi, 2006).

Antes de introduzirmos formalmente o conceito de subconjunto fuzzy vamos fazer algumas observações essenciais sobre a teoria clássica de conjuntos.

Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos de um conjunto X . Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ definimos a *função característica* $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ de A por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in X - A. \end{cases}$$

É possível mostrar que o conjunto $\mathcal{C}(X)$ de todas as funções características com domínio em X é isomorfo ao conjunto $\mathcal{P}(X)$ (Negoița e Ralescu, 1975).

A idéia de conjunto fuzzy estabelecida por Zadeh, consiste em “ampliar” a imagem das funções características para todo o intervalo $[0, 1]$. Assim, cada subconjunto fuzzy F de X é caracterizado por uma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$, denominada *função grau de pertinência*, que associa para cada $x \in X$ o *grau de pertinência* $\mu_F(x)$ de x em F .

Definição 2.1. Seja X um conjunto não vazio. Um subconjunto fuzzy F de X é um subconjunto $\{(x, \mu_F(x)) : x \in X\}$ não vazio de $X \times [0, 1]$ para alguma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$.

Dado um subconjunto fuzzy A em $\mathcal{F}(X)$ definimos, para cada $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto $[A]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em A é ao menos α . O conjunto $[A]^\alpha \subset X$ é denominado α - *nível* de A e é definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{para } \alpha \in (0, 1]$$

O 0 - nível de um subconjunto fuzzy A é definido por

$$[A]^0 = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha = \overline{\text{supp}(A)}$$

onde $\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ é o *suporte* do subconjunto fuzzy A .

Definição 2.2. Seja $X = \mathbb{R}$. Dizemos que um subconjunto fuzzy A em \mathbb{R} é um número fuzzy quando:

- a) $\mu_A(x_o) = 1$ para um único x_o ;
- b) O suporte $\{x : \mu_A(x) > 0\} = \text{supp}(A)$ é limitado;
- c) Os α -níveis de A são intervalos fechados.

O conjunto fuzzy definido pela função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } b \leq x < c \\ 0 & \text{se } x \notin (a, c) \end{cases}$$

satisfaz as propriedades de um número fuzzy e é denominado *número fuzzy triangular*. Usaremos a notação $A = (a/b/c)$ para representar um número fuzzy triangular em que $\mu_A(a) = \mu_A(c) = 0$ e $\mu_A(b) = 1$.

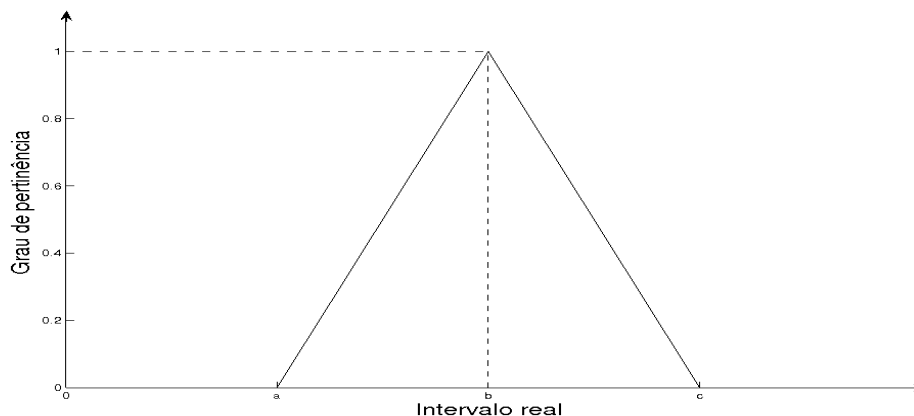


Figura 2.1: Número fuzzy triangular $(a/b/c)$.

Observemos que se o domínio de $\mu_A : [a, c] \rightarrow [0, 1]$ é multiplicado por uma constante λ , então obtemos um número fuzzy triangular $\lambda A = (\lambda a / \lambda b / \lambda c)$ onde $\mu_{\lambda A}(\lambda x) = \mu_A(x)$ para todo $x \in [a, c]$. Esta propriedade não é um caso particular somente dos números fuzzy triangulares.

Usaremos a notação $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para a família de subconjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n , onde os conjuntos dados por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1] \quad \text{e}$$

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$$

são compactos e não vazios.

O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X será denotado aqui por $\mathcal{F}(X)$.

Embora a terminologia mais apropriada seja dizer que F é um subconjunto fuzzy de X , em muitas ocasiões, vamos dizer apenas que F é conjunto fuzzy, ficando implícita a existência de um conjunto X onde está definida a função de pertinência de F .

Se $A \in \mathcal{P}(X)$, isto é, $A \subset X$, então $\{(x, \chi_A(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto não vazio de $X \times [0, 1]$. Pela Definição 2.1, o subconjunto A determina um subconjunto fuzzy de X que será identificado aqui, com abuso de notação, por χ_A . Para uma melhor distinção, o subconjunto fuzzy χ_A será denominado aqui, como na língua inglesa, um subconjunto *crisp* de X .

As operações de união e intersecção entre subconjuntos fuzzy são extensões das operações para subconjuntos de X , quando vistas por meio das funções de pertinência. Embora essas operações possam ser generalizadas de várias maneiras por meio dos conceitos de *t-norma* e *t-conorma* (Nguyen e Walker, 2000), vamos aqui seguir as mesmas definições apresentadas em Zadeh (1965).

Definição 2.3. Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X . A união, intersecção e complemento são subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$ cujas funções de pertinências são respectivamente:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Dois subconjuntos fuzzy de um conjunto X são iguais quando as funções de pertinência são iguais, isto é,

$$A = B \iff \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X.$$

A igualdade entre conjuntos fuzzy pode também ser caracterizada por meio dos α -níveis. Neste caso, os conjuntos são iguais quando os α -níveis coincidem para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Nos dois próximos resultados, mostramos que existe uma importante relação entre um subconjunto fuzzy de um conjunto X e seus α -níveis. Estes resultados são uma generalização, para espaços X quaisquer com estrutura topológica Ferreira (2010), de resultados já bem conhecidos no caso em que $X = \mathbb{R}^n$. As demonstrações apresentadas nas proposições a seguir são, portanto, apenas adaptações das ideias apresentadas em Ralescu (1992), Diamond e Kloeden (1994) ou Negoita e Ralescu (1975).

Proposição 2.1. *Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto fuzzy de X . Se μ_A é semicontínua superiormente, então vale as seguintes propriedades:*

- a) $[A]^\alpha$ é um subconjunto fechado em X , para todo $\alpha \in [0, 1]$;
- b) $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$ se $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$;

$$c) [A]^\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [A]^\beta \text{ para todo } \alpha \in (0, 1];$$

$$d) \text{ O conjunto } \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha \text{ é denso em } [A]^0.$$

Prova: O item (a) segue diretamente do fato de μ_A ser semicontínua superiormente e o item (b) é evidente pela definição de α - níveis.

Para provar o item (c), tomemos $\alpha \in (0, 1]$. Por (b) temos que para todo $\alpha < \beta$ valem que $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$ e portanto $\bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$. Por outro lado, se $x \in [A]^\alpha$ então temos

$\mu_A(x) \geq \alpha$, o que implica que para todo $\beta < \alpha$ temos $\mu_A(x) \geq \alpha > \beta$ e portanto $x \in [A]^\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Assim, $x \in \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [A]^\beta$. Portanto a inclusão contrária está provada e

consequentemente vale o item (c).

O item (d) segue diretamente da definição de 0 - nível. ■

A recíproca da Proposição 2.1 também é verdadeira. O Teorema de Representação de Negoita - Ralescu (Negoita e Ralescu, 1975), associa para cada família de subconjuntos de \mathbb{R}^n , satisfazendo as propriedades (a)–(d), um único subconjunto fuzzy de \mathbb{R}^n cujos α - níveis coincidem com os elementos da família de conjuntos dada. Na Proposição 2.2 a seguir, mostramos que esta propriedade também é válida quando X é um espaço topológico qualquer. Novamente, a demonstração para o caso em que X é um espaço topológico segue as linhas gerais da demonstração proposta em (Negoita e Ralescu, 1975) para o caso em que $X = \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.2. *Seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ uma família de subconjuntos de um espaço topológico X satisfazendo:*

$$a) A_\alpha \text{ é um subconjunto fechado em } X, \text{ para todo } \alpha \in [0, 1];$$

$$b) A_\beta \subseteq A_\alpha \text{ se } 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1;$$

$$c) A_\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta \text{ para todo } \alpha \in (0, 1];$$

$$d) \text{ O conjunto } \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha \text{ é denso em } A_0.$$

Então existe um único subconjunto fuzzy A de X com μ_A semicontínua superiormente tal que $[A]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Prova: Consideremos o subconjunto fuzzy A de X com função de pertinência definida por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \sup\{\beta : x \in A_\beta\}, & \text{se } x \in A_0 \\ 0, & \text{se } x \in X - A_0. \end{cases}$$

Tomemos arbitrariamente $\alpha \in (0, 1]$. Para todo $x \in A_\alpha$, temos que $x \in A_0$ pelo item (b), e além disso $\sup\{\beta : x \in A_\beta\} \geq \alpha$; de fato pois, caso contrário, existiria um $\gamma \in [0, \alpha)$ tal que $x \notin A_\gamma \supseteq A_\alpha$, o que é um absurdo. Portanto, $\mu_A(x) \geq \alpha$ e consequentemente temos $A_\alpha \subseteq [A]^\alpha$.

Para a inclusão contrária, vamos separar a prova em dois casos. Seja $x \in [A]^\alpha$:

Caso I: Suponha que $\sup\{\beta : x \in A_\beta\} > \alpha$. Sob esta hipótese, existe $\gamma \in (\alpha, 1]$ com $x \in A_\gamma \subseteq A_\alpha$ o que, novamente pelo item (b), implica em $x \in A_\alpha$.

Caso II: Suponha que $\sup\{\beta : x \in A_\beta\} = \alpha$. Neste caso, para todo $\beta \in [0, \alpha)$ existe um real $\beta_0 \in (\beta, \alpha]$ tal que $x \in A_{\beta_0}$, o que pelo item (b) implica que $x \in A_\beta$, para todo $\beta \in [0, \alpha)$. Assim, pelo item (c), temos que $x \in \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta = A_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Portanto, temos que $[A]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Agora,

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [A]^\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} A_\alpha} = A_0,$$

onde a última igualdade vale pelo item (d). Logo, temos que $[A]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Pelo que acabamos de provar e também pelo item (a), temos que o conjunto $\{x \in X : \mu_A(x) < \alpha\} = X - [A]^\alpha$ é aberto em X . Logo, μ_A é semicontínua superiormente.

Para provarmos que é único, vamos supor que existe um subconjunto fuzzy B tal que $[B]^\alpha = A_\alpha$. Então pelo que mostramos, $[B]^\alpha = [A]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, $B = A$ e a afirmação está provada. ■

Em muitos casos pode ser necessário estender o domínio de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$. Notemos que para cada subconjunto $A \subset X$, a aplicação f define o subconjunto $f(A) \subset Y$. Supondo agora que A seja um subconjunto fuzzy X , isto é $A \in \mathcal{F}(X)$, então precisamos determinar como será a imagem induzida pela aplicação f sobre A . A forma como essa imagem é caracterizada pode ser feita através do *Princípio da Extensão* proposto por Zadeh (1965), conforme definição a seguir.

Definição 2.4 (Princípio da Extensão de Zadeh). Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e A um subconjunto fuzzy de X . A *extensão de Zadeh* $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ é aplicação cuja

imagem tem função de pertinência

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{a \in f^{-1}(y)} \mu_A(a) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, um subconjunto $A \subset X$ determina o conjunto fuzzy χ_A de X cuja função de pertinência é a função característica de A . A imagem de χ_A através da extensão \hat{f} de uma função f coincide com o conjunto fuzzy $\chi_{f(A)}$ definido por $f(A)$. Isto é, $\hat{f}(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. De fato, a definição acima garante que $\hat{f}(\chi_A)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\hat{f}(\chi_A)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in f(A) \\ 0 & \text{se } y \in Y - f(A). \end{cases}$$

que é a função característica de $f(A)$. Logo, $\hat{f}(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. Em particular, para todo $x \in X$ vale $\hat{f}(\chi_{\{x\}}) = \chi_{\{f(x)\}}$.

2.3 O Subespaço $\mathcal{E}(X)$

Para a aplicação que faremos na sequência desse trabalho, restringimos nossa análise aos subconjuntos fuzzy de um espaço X cujos α - níveis são subconjunto compactos e não vazios em X , isto é,

$$\mathcal{E}(X) = \{A \in \mathcal{F}(X) : \forall \alpha \in [0, 1], [A]^\alpha \text{ é compacto e não vazio}\}.$$

Os elementos fuzzy que estão em $\mathcal{E}(X)$ serão denotados por letras minúsculas em negrito para diferenciar dos elementos de X .

Dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(Y)$, $Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(X)$ através da função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{u}}}(x) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{u}}(x) & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \in X - Y. \end{cases} \quad (2.1)$$

Segue diretamente da definição acima que $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, de modo que podemos identificar $\mathcal{E}(Y)$ como um subconjunto de $\mathcal{E}(X)$. Com abuso de notação, podemos dizer então que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Por outro lado, dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência $\mu_{\bar{\mathbf{u}}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x)$ para todo $x \in Y$. Como anteriormente, vamos ter $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ e novamente podemos dizer que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Os subconjuntos do conjunto $\mathcal{E}(X)$ serão representados aqui por letras maiúsculas em negrito. Por exemplo, dado $Y \subset X$, representaremos por $\mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ o subconjunto formado pelos elementos de $\mathcal{E}(X)$ cujos α - níveis são subconjuntos de Y . Isto é,

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X) : [\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]\}.$$

Dados os pontos $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(X)$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(Y)$ podemos definir um ponto $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(X \times Y)$ com função de pertinência $\mu_{\mathbf{z}} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \min\{\mu_{\mathbf{x}}(x), \mu_{\mathbf{y}}(y)\}.$$

O conjunto fuzzy \mathbf{z} é denominado *produto cartesiano fuzzy* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} . De maneira geral, o produto cartesiano fuzzy pode ser generalizado por meio do conceito de *t - norma*.

Uma *t - norma* é uma aplicação $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Elemento neutro: $\Delta(1, x) = x$;
- b) Comutativa: $\Delta(x, y) = \Delta(y, x)$;
- c) Associativa: $\Delta(x, \Delta(y, z)) = \Delta(\Delta(x, y), z)$;
- d) Monótona: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $\Delta(x, y) \leq \Delta(u, v)$.

Alguns exemplos de operações que satisfazem as propriedades são:

- *t - norma* do produto:

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \mu_{\mathbf{x}}(x)\mu_{\mathbf{y}}(y).$$

- *t - norma* de Lukasiewicz:

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \max\{\mu_{\mathbf{x}}(x) + \mu_{\mathbf{y}}(y) - 1, 0\}.$$

- *t - norma* drástica:

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{x}}(x) & \text{se } \mu_{\mathbf{y}}(y) = 1 \\ \mu_{\mathbf{y}}(y) & \text{se } \mu_{\mathbf{x}}(x) = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O conjunto dos pontos $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(X \times Y)$ definidos a partir das funções de pertinência de \mathbf{x} e \mathbf{y} por alguma *t - norma*, em particular para uma das três maneiras acima expostas, será denotado aqui por $\mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(Y)$. Claramente, para cada *t - norma*, temos que $\mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(Y) \subset \mathcal{E}(X \times Y)$. Para enfatizar, vamos denotar um elemento \mathbf{z} em $\mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(Y)$

determinado através de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(X)$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(Y)$ por $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Isto é, a notação $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ indica que a função de pertinência $\mu_{\mathbf{z}} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ de \mathbf{z} é definida pelas funções de pertinência de \mathbf{x} e \mathbf{y} através de uma t -norma.

As propriedades (a)–(d) da Proposição 2.1 que provamos na seção anterior também são válidas para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{E}(X)$.

Corolário 2.3. *Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$, então $\mu_{\mathbf{u}}$ é semicontínua superiormente e valem os itens (a)–(d) da Proposição 2.1.*

Prova: Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ então os α -níveis são compactos e portanto fechados de modo que o conjunto $A_\alpha = \{x \in X : \mu_{\mathbf{u}}(x) < \alpha\} = X - [\mathbf{u}]^\alpha$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dado $y \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V_y inteiramente contida em $A_{\mu_{\mathbf{u}}(y)+\varepsilon}$. Logo, $\mu_{\mathbf{u}}(x) < \mu_{\mathbf{u}}(y) + \varepsilon$ para todo $x \in V_y$ o que implica que $\mu_{\mathbf{u}}$ é semicontínua superiormente. ■

Assim como anteriormente, a Proposição 2.2 também pode ser igualmente provada quando temos uma família de subconjuntos compactos de X satisfazendo as propriedades (a) – (d).

Corolário 2.4. *Se $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ é uma família de subconjuntos compactos satisfazendo as propriedades (a) – (d) da Proposição 2.2, então existe um único $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ tal que $[\mathbf{u}]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Prova: Pela proposição anterior existe um subconjunto fuzzy de X cujos α -níveis coincidem com os subconjuntos em \mathcal{A} que, por hipótese, são compactos. Logo, esse subconjunto está em $\mathcal{E}(X)$. ■

Para as aplicações de conjuntos fuzzy feitas nas seções subseqüentes, precisamos definir uma estrutura de espaços métricos em $\mathcal{E}(X)$. Podemos definir uma métrica sobre $\mathcal{E}(X)$ por meio da métrica de Hausdorff para subconjuntos compactos de X . Em Diamond e Kloeden (1994) são discutidas algumas propriedades dos espaços $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ para distintas métricas, em particular, para métricas definidas a partir da métrica de Hausdorff.

Seja $\mathcal{K}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos compactos não vazios do espaço métrico (X, d) . Dados dois conjuntos A, B em $\mathcal{K}(X)$ a distância entre eles pode ser definida por:

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$$

A distância entre conjuntos definida acima é uma *pseudométrica* (Kreyszig, 1978) para $\mathcal{K}(X)$, uma vez que $\text{dist}(A, B) = 0$ se, e somente se, $A \subseteq B$, não necessariamente valendo

a igualdade. No entanto, *distância de Hausdorff* entre $A, B \in \mathcal{K}(X)$ definida por

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\} \\ &= \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\} \end{aligned}$$

é uma métrica para o conjunto $\mathcal{K}(X)$, de modo que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico. Vale ainda que se (X, d) é um espaço métrico completo, então $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é também um espaço métrico completo (Aliprantis e Border, 2005).

Através da métrica de Hausdorff d_H , podemos definir uma métrica para o conjunto $\mathcal{E}(X)$, que denotaremos aqui por d_∞ . Dados dois pontos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}(X)$ a distância entre \mathbf{u} e \mathbf{v} é definida por

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}]^\alpha, [\mathbf{v}]^\alpha) \quad (2.2)$$

Não é difícil mostrar que a distância definida acima satisfaz as propriedades de uma métrica e assim, $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico.

Dado um conjunto $Y \subset X$, consideremos os conjuntos

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(X) : [\mathbf{x}]^0 \subset Y\}$$

e $\mathcal{E}(Y)$. Essencialmente, os elementos de \mathbf{Y} e $\mathcal{E}(Y)$ se diferem apenas pelo domínio da função de pertinência. Sejam d_∞^1 a restrição da métrica d_∞ ao conjunto $\mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ e d_∞^2 definida como em (2.2) para o conjunto $\mathcal{E}(Y)$.

Proposição 2.5. *Seja $Y \subset X$. Os espaços métricos (\mathbf{Y}, d_∞^1) e $(\mathcal{E}(Y), d_\infty^2)$ são isométricos.*

Prova: Dado um ponto $\mathbf{u} \in \mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ com função de pertinência $\mu_{\mathbf{u}} : X \rightarrow [0, 1]$, seja $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência $\mu_{\bar{\mathbf{u}}} : Y \rightarrow [0, 1]$ que associa para cada $y \in Y$ o valor $\mu_{\mathbf{u}}(y)$. Isto é, $\mu_{\bar{\mathbf{u}}}$ é a restrição da função de pertinência de \mathbf{u} ao conjunto $Y \subset X$.

Seja $T : \mathbf{Y} \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ tal que para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}$, $T(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{u}}$. A aplicação T é injetiva, pois se $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então existe $y \in Y$ tal que $\mu_{\mathbf{u}}(y) \neq \mu_{\mathbf{v}}(y)$ e conseqüentemente $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$.

Tomemos $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ e consideremos $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ definido por meio da função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{u}}(x) = \begin{cases} \mu_{\bar{\mathbf{u}}}(x) & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \in X - Y. \end{cases}$$

Segue diretamente disso que $[\mathbf{u}]^\alpha \subset Y$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e portanto $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}$. Além disso, $T(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{u}}$. Logo, $T : \mathbf{Y} \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ é uma aplicação sobrejetiva e conseqüentemente, T é uma bijeção entre os conjuntos \mathbf{Y} e $\mathcal{E}(Y)$.

Pela forma como a bijeção T foi construída, não é difícil ver que $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [T(\mathbf{u})]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}$. Temos então que,

$$d_\infty^2(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\bar{\mathbf{u}}]^\alpha, [\bar{\mathbf{v}}]^\alpha) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}]^\alpha, [\mathbf{v}]^\alpha) = d_\infty^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Y}$.

Logo, \mathbf{Y} e $\mathcal{E}(Y)$ são isométricos e a afirmação está provada. \blacksquare

O espaço métrico $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ apresenta a importante propriedade de ser completo quando (X, d) é completo. A demonstração apresentada aqui tem como base a apresentada em Diamond e Kloeden (1994) para o espaço $(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$.

Proposição 2.6. *Se (X, d) é um espaço métrico completo então $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico completo.*

Prova: Seja $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $k, n > N$ temos $d_\infty(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k) < \varepsilon$ e conseqüentemente $d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, [\mathbf{u}_k]^\alpha) < \varepsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Mas isto implica que, para todo $\alpha \in [0, 1]$, $\{[\mathbf{u}_k]^\alpha\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{K}(X), d_H)$ e portanto converge para, digamos, $A_\alpha \in \mathcal{K}(X)$. Mais do que isso, a convergência é uniforme em α pois:

$$\begin{aligned} d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha) &\leq d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}_n]^\alpha) + d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, A_\alpha) \\ &< \varepsilon + d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, A_\alpha). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Essa desigualdade vale para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $n, k > N(\varepsilon)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos que $d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha) \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $k > N(\varepsilon)$.

Mostramos agora que a família $\mathcal{A} = \{A_\alpha \in \mathcal{K}(X) : \alpha \in [0, 1]\}$ satisfaz as propriedades (a)–(d) da Proposição 2.2 de modo que, pelo Corolário 2.4, existe um único $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ tal que $[\mathbf{u}]^\alpha = A_\alpha$. Uma vez que A_α é compacto, o primeiro item claramente é satisfeito. Seja agora $0 < \alpha \leq 1$ e tomemos $\beta \in [0, \alpha)$. Então temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_\alpha, A_\beta) &\leq \text{dist}(A_\alpha, [\mathbf{u}_k]^\alpha) + \text{dist}([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}_k]^\beta) + \text{dist}([\mathbf{u}_k]^\beta, A_\beta) \\ &\leq d_H(A_\alpha, [\mathbf{u}_k]^\alpha) + d_H([\mathbf{u}_k]^\beta, A_\beta) \end{aligned}$$

já que $\text{dist}([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}_k]^\beta) = 0$ pois $[\mathbf{u}_k]^\alpha \subseteq [\mathbf{u}_k]^\beta$. Portanto, quando $k \rightarrow \infty$ temos $\text{dist}(A_\alpha, A_\beta) \rightarrow 0$ e conseqüentemente $A_\alpha \subseteq A_\beta$ para todo $\beta \in [0, \alpha)$, o que prova o item (b).

Desde que $\mathbf{u}_k \in \mathcal{E}(X)$, para todo $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, temos

$$[\mathbf{u}_k]^\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [\mathbf{u}_k]^\beta$$

pelo item (c) da Proposição 2.1. Usando a desigualdade triangular, temos então que:

$$\begin{aligned}
d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} A_\beta, A_\alpha\right) &\leq d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} A_\beta, \bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} [\mathbf{u}_k]^\beta\right) + d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} [\mathbf{u}_k]^\beta, [\mathbf{u}_k]^\alpha\right) + \\
&\quad + d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha) \\
&= d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} A_\beta, \bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} [\mathbf{u}_k]^\beta\right) + d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha)
\end{aligned}$$

para todo $\alpha \in (0, 1]$ fixo. Desde que $[\mathbf{u}_k]^\alpha \rightarrow A_\alpha$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, então as duas parcelas na soma acima convergem para zero, e assim temos que

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} A_\beta$$

o que prova o item (c). Para o item (d), novamente podemos usar a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
d_H\left(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}, A_0\right) &\leq d_H\left(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}, \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [\mathbf{u}_k]^\alpha}\right) + d_H\left(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [\mathbf{u}_k]^\alpha}, [\mathbf{u}_k]^0\right) + \\
&\quad + d_H([\mathbf{u}_k]^0, A_0) \\
&= d_H\left(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}, \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [\mathbf{u}_k]^\alpha}\right) + d_H([\mathbf{u}_k]^0, A_0)
\end{aligned}$$

pelo mesmo argumento usado anteriormente. Logo,

$$A_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}$$

e provamos o item (d). Portanto, existe $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ satisfazendo $[\mathbf{u}]^\alpha = A_\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, de modo que por (2.3) temos que $d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) \leq \varepsilon$ para todo $k > N(\varepsilon)$ e $\alpha \in [0, 1]$. Logo, $d_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) \leq \varepsilon$ e portanto $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é completo. ■

Na sequência desta seção, analisamos algumas propriedades das funções obtidas por meio do Princípio da Extensão de Zadeh aplicado em funções definidas sobre espaços de Hausdorff. Como veremos, as extensões sobre esses espaços compartilham propriedades similares às extensões de funções definidas sobre \mathbb{R}^n .

O teorema de Nguyen fornece uma importante relação entre os α -níveis da imagem de um subconjuntos fuzzy e a imagem de seus α -níveis por uma função $f : X \times Y \rightarrow Z$. De acordo com Nguyen (1978), para todo $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$[\hat{f}(\mathbf{c})]^\alpha = f([\mathbf{c}]^\alpha) = f([\mathbf{a}]^\alpha, [\mathbf{b}]^\alpha),$$

no qual $\mathbf{a} \in \mathcal{E}(X)$, $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(Y)$ e $\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é dado pela t - norma do mínimo se, e somente se,

$$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min\{\mu_a(x), \mu_b(y)\}$$

é atingindo para todo $z \in Z$. Quando f é contínua e $X = Y = Z = \mathbb{R}$, Nguyen mostra ainda que o supremo é sempre atingido e portanto, vale a identidade entre os α - níveis.

Para o 0 - nível como estamos considerando neste trabalho, é bem conhecido que o teorema de Nguyen também é válido quando $X = \mathbb{R}^n$ (Barros, 1997; Barros et al., 1997). Na próxima proposição, mostramos que o teorema ainda continua válido para espaços topológicos de Hausdorff.

Teorema 2.7. *Sejam X e Y espaços de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ está bem definida e vale*

$$[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha) \quad (2.4)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$.

Prova: Primeiramente ressaltamos que

$$f([\mathbf{u}]^\alpha) \subseteq [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha \quad (2.5)$$

pois se $y \in f([\mathbf{u}]^\alpha)$ então existe $x \in [\mathbf{u}]^\alpha$ tal que $y = f(x)$. Logo, pela Definição 2.4, temos $y \in [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$.

Para a inclusão contrária, tomemos $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$. Para mostrar que $\hat{f}(\mathbf{u})$ está em $\mathcal{E}(Y)$, basta provar que os α - níveis $[\hat{\mathbf{u}}]^\alpha$ são compactos e não vazios para cada $\alpha \in [0, 1]$. Mas, para isto é suficiente provar a identidade (2.4), uma vez que função contínua leva compacto em compacto.

Para provarmos a identidade (2.4) devemos notar que sendo f contínua então $f^{-1}(\{y\})$ é um conjunto fechado em X para qualquer $y \in Y$. Desde que $[\mathbf{u}]^0$ é compacto, então $f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0 \subset X$ é um subconjunto fechado de $[\mathbf{u}]^0$ e portanto compacto.

Suponha que $\alpha > 0$. Tomemos então $y \in [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha$. Por definição, temos que

$$\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mu_{\mathbf{u}}(x) \geq \alpha > 0,$$

e portanto, existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tal que $\mu_{\mathbf{u}}(x) > 0$, isto é, $f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0 \neq \emptyset$. Isto também implica que

$$\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mu_{\mathbf{u}}(x) = \sup_{x \in f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0} \mu_{\mathbf{u}}(x)$$

Desde que $\mu_{\mathbf{u}}(x)$ é semicontínua superiormente e $f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0$ é compacto, então existe $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0$ tal que $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \mu_{\mathbf{u}}(x) \geq \alpha$, ou seja, temos $y = f(x)$ com

$x \in [\mathbf{u}]^\alpha$. Logo, podemos concluir que $y \in f([\mathbf{u}]^\alpha)$ e conseqüentemente $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha \subseteq f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.

No entanto, desde que $[\mathbf{u}]^\alpha \subseteq [\mathbf{u}]^0$, vale que $f([\mathbf{u}]^\alpha) \subseteq f([\mathbf{u}]^0)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$ de modo que então temos

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([\mathbf{u}]^\alpha) \subseteq f([\mathbf{u}]^0)$$

e conseqüentemente

$$[\hat{f}(\mathbf{u})]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([\mathbf{u}]^\alpha)} \subseteq f([\mathbf{u}]^0)$$

já que $f([\mathbf{u}]^0)$ é um conjunto fechado. Logo, $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha \subseteq f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ o que juntamente com a inclusão (2.5) prova a afirmação. ■

Alguns exemplos, a respeito de cálculo da extensão de Zadeh, podem ser encontrados em ?.

Aplicando o Teorema à função $\hat{f}(U) = \lambda U$, obtemos $[\hat{f}(U)]^\alpha = [\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha$ de modo que multiplicar um número fuzzy A por escalar λ , é equivalente à multiplicar todos os α -níveis de A por λ . Portanto temos que: $x \in [A]^\alpha$ se, e somente se $\lambda x \in [\lambda A]^\alpha$, ou equivalentemente $\mu_A(x) = \mu_{\lambda A}(\lambda x)$.

Em muitos casos não podemos garantir que a aplicação $f : X \rightarrow Y$ seja contínua em todo o domínio X , mas apenas em um subconjunto $A \subset X$. Para este caso, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.8. *Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja contínua em $A \subset X$. Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ é tal que $[\mathbf{u}]^\alpha \subset A$, então $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Prova: Sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\mathbf{u}]^0 \subset A$ e $f_A : A \rightarrow Y$ a restrição de f ao conjunto A , isto é, para todo $x \in A$ temos $f_A(x) = f(x)$. Consideremos também $\mathbf{v} \in \mathcal{E}(A)$ tal que $\mu_{\mathbf{v}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x)$ para todo $x \in A$. Desde que $\mu_{\mathbf{u}}(x) = 0$ para todo $x \in X - A$, então $[\mathbf{v}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A proposição anterior garante que a aplicação $\hat{f}_A : \mathcal{E}(A) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ satisfaz

$$[\hat{f}_A(\mathbf{v})]^\alpha = f_A([\mathbf{v}]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Seja agora $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}}(y) = \begin{cases} \mu_{\hat{f}_A(\mathbf{v})}(y) & \text{se } y \in f(A) \\ 0 & \text{se } y \in Y - f(A). \end{cases}$$

Pela forma como \mathbf{y} está definido, vale as seguintes igualdades:

$$[\mathbf{y}]^\alpha = [\hat{f}_A(\mathbf{v})]^\alpha = f_A([\mathbf{v}]^\alpha) = f([\mathbf{v}]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Agora, se $y \in f(A)$, então temos:

$$\mu_{\mathbf{y}}(y) = \mu_{\hat{f}_A(\mathbf{v})}(y) = \sup_{f_A(x)=y} \mu_{\mathbf{v}}(x).$$

Desde que, para todo $x \in A$ temos $f_A(x) = f(x)$ e $\mu_{\mathbf{v}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x)$ então

$$\sup_{f_A(x)=y} \mu_{\mathbf{v}}(x) = \sup_{\substack{f(x)=y \\ x \in A}} \mu_{\mathbf{u}}(x) = \sup_{f(x)=y} \mu_{\mathbf{u}}(x) = \mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y),$$

uma vez que para $x \in X - A$ vale $\mu_{\mathbf{u}}(x) = 0$. De onde podemos concluir que $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \mu_{\mathbf{y}}(y)$ para todo $y \in f(A)$.

Se $y \in Y - f(A)$ então $\mu_{\mathbf{y}}(y) = 0$. Por outro lado, não existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e como consequência $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = 0$. Assim, vale a igualdade $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \mu_{\mathbf{y}}(y)$ para todo $y \in Y$ de onde concluímos que $\mathbf{y} = \hat{f}(\mathbf{u})$. Logo, temos $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o que prova a proposição. ■

Como podemos ver em Barros et al. (1997) algumas propriedades da aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são preservadas pelo princípio da extensão de Zadeh. Uma das principais propriedades é a continuidade. Isto é, se f é contínua então a aplicação \hat{f} também é contínua. Como veremos mais adiante, a extensão de Zadeh \hat{f} de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ também é contínua quando X é uma espaço métrico localmente compacto. Os próximos dois lemas são para auxiliar na demonstração desta afirmação.

Lema 2.9. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e $C \in \mathcal{K}(X)$. A aplicação $\tilde{f} : \mathcal{K}(C) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ definida por $\tilde{f}(A) = \{f(a) : a \in A, A \in \mathcal{K}(C)\}$ é uniformemente contínua na métrica de Hausdorff.*

Prova: Desde que f é uma aplicação contínua, então para todo $A \in \mathcal{K}(C)$ temos $f(A) \in \mathcal{K}(Y)$. Portanto, a aplicação \tilde{f} está bem definida. Sabemos também que f é uniformemente contínua em C , uma vez que C é compacto.

Dessa forma, sob a hipótese de $C \in \mathcal{K}(X)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x, y \in C$ com

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Tomemos então $A, B \in \mathcal{K}(C)$ tal que $d_H(A, B) < \delta$. Isto implica que

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) < \delta \quad \text{e} \quad \text{dist}(B, A) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) < \delta$$

e conseqüentemente temos que para todo $x \in A$ e $y \in B$, existem $a_y \in A$ e $b_x \in B$ tal que:

$$d(x, b_x) < \delta \quad \text{e} \quad d(y, a_y) < \delta.$$

Pela continuidade uniforme de f em C , isto implica que:

$$\tilde{d}(f(x), f(b_x)) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \tilde{d}(f(y), f(a_y)) < \varepsilon.$$

Segue diretamente dessas desigualdades que:

$$\text{dist}(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \tilde{d}(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

$$\text{dist}(\tilde{f}(B), \tilde{f}(A)) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \tilde{d}(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Logo, concluímos que

$$d_H(A, B) < \delta \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}_H(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) \leq \varepsilon,$$

o que prova a afirmação. ■

Lema 2.10. *Seja X um espaço métrico localmente compacto. Se $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $\mathcal{E}(X)$ então existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\mathbf{u}_n]^0 \subseteq K$$

para algum $N \in \mathbb{N}$.

Prova: Seja $V([\mathbf{u}]^0, \varepsilon)$ a vizinhança de $[\mathbf{u}]^0$ definida por

$$V([\mathbf{u}]^0, \varepsilon) = \{x \in X : \text{dist}(x, [\mathbf{u}]^0) < \varepsilon\}.$$

Como o conjunto X é localmente compacto, então existe $\delta > 0$ tal que $\overline{V([\mathbf{u}]^0, \delta)}$ é compacto (Aliprantis e Border, 2005).

Por hipótese, \mathbf{u}_n converge para \mathbf{u} na métrica d_∞ . Assim, para o $\delta > 0$ acima, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, temos que

$$d_\infty(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta.$$

Em particular, temos que $d_H([\mathbf{u}_n]^0, [\mathbf{u}]^0) < \delta$ para todo $n \geq N$. Mas isto implica que, para todo $n \geq N$,

$$[\mathbf{u}_n]^0 \subset \overline{V([\mathbf{u}]^0, \delta)} = \{x \in X : \text{dist}(x, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta\}$$

Seja então

$$K = [\mathbf{u}_1]^0 \cup [\mathbf{u}_2]^0 \cup \dots \cup [\mathbf{u}_{N-1}]^0 \cup \overline{V([u]^0, \delta)}.$$

O conjunto K definido acima é compacto e portanto pertence a $\mathcal{K}(X)$. Além disso, não é difícil ver que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\mathbf{u}_n]^0 \subseteq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Provemos agora que a extensão de Zadeh de uma aplicação contínua em um espaço métrico localmente compacto também é contínua.

Proposição 2.11. *Sejam (X, d) e (Y, \tilde{d}) espaços métricos e X localmente compacto. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ também é contínua.*

Prova: Seja $\{\mathbf{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ uma sequência convergente para \mathbf{u} . Vamos mostrar que $\hat{f}(\mathbf{u}_k) \rightarrow \hat{f}(\mathbf{u})$ quando $k \rightarrow \infty$.

Pelo Lema 2.10 podemos escolher um compacto $C \subset X$ tal que

$$\bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\mathbf{u}_p]^\alpha \subseteq C.$$

Agora, o Lema 2.9 garante que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para $A, B \in \mathcal{K}(C)$ temos

$$d_H(A, B) < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}_H(f(A), f(B)) < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Desde que \mathbf{u}_k converge para \mathbf{u} na métrica d_∞ , então existe $K_\delta \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K_\delta$ vale

$$d_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta_\varepsilon.$$

Portanto, para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $k > K_\delta$, temos por (2.6) que

$$d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}_H(f([\mathbf{u}_k]^\alpha), f([\mathbf{u}]^\alpha)) < \varepsilon,$$

já que $[\mathbf{u}_k]^\alpha$ e $[\mathbf{u}]^\alpha$ estão em $\mathcal{K}(C)$ pelo Lema 2.10. Logo, pela Proposição 2.7

$$\begin{aligned} \tilde{d}_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{d}_H([f(\mathbf{u}_k)]^\alpha, [f(\mathbf{u})]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{d}_H(f([\mathbf{u}_k]^\alpha), f([\mathbf{u}]^\alpha)), \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que \hat{f} é contínua. ■

Vale também a recíproca da proposição acima.

Proposição 2.12. *Suponha que (X, d) e (Y, \tilde{d}) sejam espaços métricos e seja $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ a extensão de Zadeh de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$. Se \hat{f} é contínua então f é contínua.*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}(X)$ temos

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < \delta \Rightarrow \tilde{d}_\infty(\hat{f}(\mathbf{u}), \hat{f}(\mathbf{v})) < \varepsilon.$$

Tomemos $x, y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$. Então $\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}} \in \mathcal{E}(X)$ e vale que

$$d_\infty(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}}) = d(x, y) < \delta.$$

Portanto

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) = \tilde{d}_\infty(\hat{f}(\chi_{\{x\}}), \hat{f}(\chi_{\{y\}})) < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de f . ■

2.4 Projeções em Espaços Métricos Fuzzy

Consideremos a aplicação $P_n : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ que associa a cada $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ o ponto $P_n(x, y) = (x, 0)$.

Desde que podemos caracterizar \mathbb{R}^n como um subconjunto de \mathbb{R}^{n+m} através da identificação com o subconjunto $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, então a aplicação P_n pode ser vista como a projeção de \mathbb{R}^{n+m} sobre o conjunto \mathbb{R}^n . Por esse motivo, dizemos que x é a projeção, em \mathbb{R}^n , do ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Observemos que um ponto (u, v) está na imagem de P_n se, e somente se, $v = 0$. Além disso, $P_n(u, y) = (u, 0)$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$. Dessa forma, dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$, com função de pertinência $\mu_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow [0, 1]$, a imagem $\mathbf{y} = \hat{P}(\mathbf{x})$ de \mathbf{x} , obtida pela extensão de Zadeh da projeção P_n , tem como função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}}(x, y) = \begin{cases} \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{x}}(x, v) & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Podemos definir um ponto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ por meio da função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \mu_{\mathbf{y}}(x, 0) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{x}}(x, v).$$

Neste caso, temos que:

$$\mu_{\mathbf{y}}(x, y) = \min\{\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x), \chi_{\{0\}}(y)\}.$$

Assim, a aplicação $\hat{P}_n : \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$, obtida pela extensão de Zadeh de P_n , que associa para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ o ponto $\mathbf{y} = \hat{P}_n(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \times \chi_{\{0\}}$ pode ser vista como uma projeção de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, uma vez que este pode ser identificado com o subconjunto $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \times \chi_{\{0\}}$. Igualmente à projeção P_n , não é difícil ver que a aplicação \hat{P}_n também satisfaz:

$$\hat{P}_n(\hat{P}_n(\mathbf{x})) = \hat{P}_n(\mathbf{x}).$$

Baseado nisso, podemos definir a projeção de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o ponto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ com função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{a \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{x}}(x, a). \quad (2.7)$$

De modo análogo, podemos querer encontrar a projeção de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Neste caso, devemos considerar a extensão de Zadeh da projeção $P_m : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, que associa para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ o ponto $P_m(x, y) = (0, y)$. Desde que $P_m(x, u) = (0, u)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a imagem $\mathbf{z} = P_m(\mathbf{x})$ tem função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \begin{cases} \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{x}}(u, y) & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Assim, definimos a projeção $\bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ através da função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{y}}}(y) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{x}}(u, y). \quad (2.8)$$

Nos exemplos a seguir procuramos esclarecer os conceitos aqui apresentados.

Exemplo 2.1. Sejam $\mathbf{a} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Podemos definir $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}}(x, y) = \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(y)\}.$$

A imagem de \mathbf{x} pela aplicação \hat{P}_n neste caso, tem como função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}}(x, y) = \begin{cases} \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Desde de que $\min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} \leq \mu_{\mathbf{a}}(x)$ então

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} \leq \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Como $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, então existe $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mu_{\mathbf{b}}(v) = 1$. Assim, a projeção $\bar{\mathbf{x}}$ tem função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} = \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

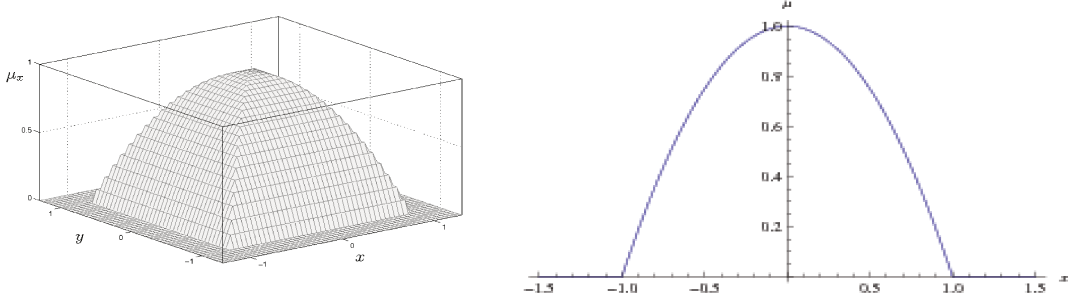


Figura 2.2: Funções de pertinência de \mathbf{x} e \mathbf{a} respectivamente.

Com argumento semelhante podemos mostrar que $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ é a projeção de \mathbf{x} em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$.

Podemos ainda definir $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ através da t -norma do produto, isto é,

$$\mu_{\mathbf{x}}(x, y) = \mu_{\mathbf{a}}(x)\mu_{\mathbf{b}}(y).$$

A projeção de \mathbf{x} em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tem como função de pertinência:

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{x}}(x, v) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{a}}(x)\mu_{\mathbf{b}}(v) = \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Por outro lado, a projeção em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ tem função de pertinência:

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{x}}(u, y) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{a}}(u)\mu_{\mathbf{b}}(y) = \mu_{\mathbf{b}}(y).$$

Analogamente, podemos mostrar que as projeções de $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ para qualquer t -norma Δ são, respectivamente, \mathbf{a} e \mathbf{b} . Primeiramente, para qualquer t -norma Δ , vale

$$\Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(y)) \leq \Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), 1) = \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Assim,

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)) \leq \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Porém, o supremo é atingido se tomarmos $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mu_{\mathbf{b}}(v) = 1$. Logo, a projeção de $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)) = \mu_{\mathbf{a}}(x),$$

para qualquer t -norma Δ . □

Exemplo 2.2. Consideremos $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ determinado pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}}(x, y) = \max\{1 - x^2 - 2y^2, 0\}.$$

Para este caso, temos as projeções $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ determinadas respectivamente por:

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{x}}(x, v) = \max\{1 - x^2, 0\};$$

$$\mu_{\bar{\mathbf{y}}}(y) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{x}}(u, y) = \max\{1 - 2y^2, 0\}.$$

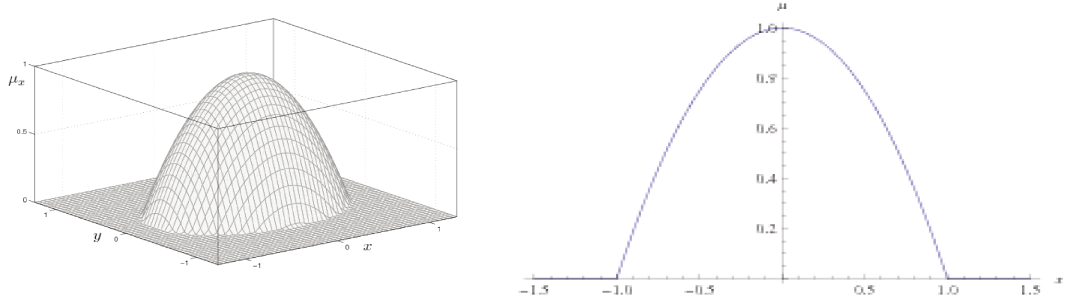


Figura 2.3: Funções de pertinência de \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{x}}$ respectivamente.

□

A distância entre as projeções $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ dos pontos \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ é sempre limitada pela distância entre \mathbf{x} e \mathbf{y} . De fato, para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos:

$$\begin{aligned} \text{dist}([\mathbf{x}]^\alpha, [\mathbf{y}]^\alpha) &= \sup_{a \in [\mathbf{x}]^\alpha} \inf_{b \in [\mathbf{y}]^\alpha} \|a - b\| \\ &= \sup_{(a_1, a_2) \in [\mathbf{x}]^\alpha} \inf_{(b_1, b_2) \in [\mathbf{y}]^\alpha} \sqrt{\|a_1 - b_1\|^2 + \|a_2 - b_2\|^2} \\ &\geq \sup_{(a_1, a_2) \in [\mathbf{x}]^\alpha} \inf_{(b_1, b_1) \in [\mathbf{y}]^\alpha} \sqrt{\|a_1 - b_1\|^2} \\ &= \sup_{a_1 \in [\bar{\mathbf{x}}]^\alpha} \inf_{b_1 \in [\bar{\mathbf{y}}]^\alpha} \sqrt{\|a_1 - b_1\|^2} \\ &= \text{dist}([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha, [\bar{\mathbf{y}}]^\alpha). \end{aligned}$$

Podemos provar também que $\text{dist}([\mathbf{y}]^\alpha, [\mathbf{x}]^\alpha) \geq \text{dist}([\bar{\mathbf{y}}]^\alpha, [\bar{\mathbf{x}}]^\alpha)$. Portanto,

$$d_\infty(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \leq d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

A projeção $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ de um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ ainda satisfaz uma outra propriedade métrica importante em se tratando de projeções. A saber, a projeção $\bar{\mathbf{p}}$ é o ponto que

minimiza a distância entre o ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ e o conjunto $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, este último, visto como um subconjunto de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Proposição 2.13. *A projeção $\bar{\mathbf{p}}$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ é tal que*

$$d_\infty(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} d_\infty(\mathbf{p}, \mathbf{z}).$$

Prova: Primeiramente, observemos o abuso de notação no enunciado acima. A expressão $d_\infty(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ só faz sentido pois podemos ver $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ como um subconjunto de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$. Desde que, $[\mathbf{p}]^\alpha \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $[\bar{\mathbf{p}}]^\alpha \subset \mathbb{R}^n$, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{n+m}$ temos

$$\|x - y\| = \sqrt{\|x - y_1\|^2 + \|y_2\|^2},$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha) &= \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \inf_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2} \\ &= \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|y_2\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\text{dist}([\bar{\mathbf{p}}]^\alpha, [\mathbf{p}]^\alpha) = \sup_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2}.$$

Agora, desde que $x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$, então $(x, z) \in [\mathbf{p}]^\alpha$ para algum $z \in \mathbb{R}^m$, de onde temos a desigualdade:

$$\text{dist}([\bar{\mathbf{p}}]^\alpha, [\mathbf{p}]^\alpha) = \sup_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2} \leq \|z\| \leq \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|y_2\|.$$

Assim, a distância de Hausdorff entre $[\mathbf{p}]^\alpha$ e $[\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$ neste caso é:

$$d_H([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha) = \max\{\text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha), \text{dist}([\bar{\mathbf{p}}]^\alpha, [\mathbf{p}]^\alpha)\} = \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha).$$

Seja agora $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{q} \neq \bar{\mathbf{p}}$. Isto implica que $[\mathbf{q}]^\alpha \neq [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$, para algum $\alpha \in [0, 1]$. Consequentemente, existe $y = (y_1, y_2) \in [\mathbf{p}]^\alpha$ tal que $y_1 \notin [\mathbf{q}]^\alpha$ ou existe $z_1 \in [\mathbf{q}]^\alpha$ tal que $z = (z_1, z_2) \notin [\mathbf{p}]^\alpha$, para todo $z_2 \in \mathbb{R}^m$. Isto é, $z_1 \notin [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$. Para o primeiro caso, temos que

$$\sqrt{\|x - y_1\|^2 + \|y_2\|^2} > \|y_2\|$$

para todo $x \in [\mathbf{q}]^\alpha$. Para o segundo, segue diretamente da propriedade de projeção a desigualdade

$$\|z_1 - y\| = \sqrt{\|z_1 - y_1\|^2 + \|y_2\|^2} > \|y_2\|,$$

para todo $y = (y_1, y_2) \in [\mathbf{p}]^\alpha$. Dessa forma, em ambos os casos vamos ter que

$$\begin{aligned} \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\mathbf{q}]^\alpha) &= \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \inf_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2} \\ &\geq \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|y_2\| \\ &= \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha). \end{aligned}$$

Logo, temos que $d_H([\mathbf{p}]^\alpha, [\mathbf{q}]^\alpha) \geq d_H([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha)$. Assim, podemos concluir que para todo $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $d_\infty(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq d_\infty(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})$, o que prova a afirmação. ■

De modo análogo, podemos definir projeções de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U \times P)$ em $\mathcal{E}(U)$ e $\mathcal{E}(P)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ e $P \subset \mathbb{R}^m$. Neste caso, o supremo nas funções de pertinência (2.7) e (2.8) são tomados sobre os conjuntos P e U , respectivamente e as propriedades métricas mostradas anteriormente continuam válidas.

Podemos ainda considerar a projeção $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de um ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ no i -ésimo eixo coordenado, isto é, $\pi_i(x) = x_i$. Como anteriormente, a extensão de Zadeh da projeção π_i define a aplicação $\hat{\pi}_i : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ que vamos denominar por a i -ésima projeção $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Assim, dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, a i -ésima projeção de \mathbf{x} sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto \bar{x}_i com função de pertinência dada por:

$$\mu_{\bar{x}_i}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x_i = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x). \quad (2.9)$$

Novamente, se $\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ é definido através do produto cartesiano fuzzy então vale que a i -ésima projeção de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto \mathbf{a}_i . Para simplificar, consideremos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mu_{\mathbf{x}}(x, y, z) = \Delta(\Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)), \mu_{\mathbf{a}_3}(z)).$$

Das propriedade de t -norma, vale

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)), \mu_{\mathbf{a}_3}(z)) &\leq \Delta(\Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)), 1) \\ &= \Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)) \\ &\leq \mu_{\mathbf{a}_2}(y), \end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$. Assim, a segunda projeção de \mathbf{x} sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto \bar{x}_2 cuja função de pertinência é:

$$\mu_{\bar{x}_2}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x_2 = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x).$$

Pela desigualdade anterior, temos que

$$\mu_{\bar{x}_2}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x_2 = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x) \leq \mu_{\mathbf{a}_2}(a).$$

Tomando \bar{x} e \bar{z} tal que $\mu_{\mathbf{a}_1}(\bar{x}) = \mu_{\mathbf{a}_3}(\bar{z}) = 1$, a igualdade no supremo é atingida e, consequentemente,

$$\mu_{\bar{x}_2}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x_2 = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x) = \mu_{\mathbf{a}_2}(a).$$

2.5 Problemas de valor inicial fuzzy

Os modelos de dinâmica populacional envolvem parâmetros que determinam as características ambientais, da espécie e até mesmo das interações, como por exemplo, a capacidade suporte e índice de crescimento relativo. De modo geral, estes parâmetros são obtidos por meio de observações e experimentos e portanto, estarão sujeitos a imprecisões.

A principal característica dos sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução. No entanto, esta precisão está comprometida quando os parâmetros envolvidos na formulação não são precisos o que, em geral, é o caso dos modelos para dinâmica populacional. Quando a subjetividade está na condição inicial, denominamos *fuzziness demográfica*, se a incerteza está nos parâmetros chamamos de *fuzziness ambiental*.

Sendo assim, ferramentas que incorporam informações imprecisas são fundamentais para a modelagem. Em particular, a teoria dos conjuntos fuzzy é uma ferramenta que pode ser usada para modelagem de fenômenos envolvendo imprecisões e subjetividade.

Nesta seção, vamos fazer uso desta teoria para resolução de sistemas de equações diferenciais em que os parâmetros, a condição inicial ou ambos são incertos de tal modo que possam ser modelados por conjuntos fuzzy. Para isso, consideremos um sistema autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \bar{x}_o \end{cases} \quad (2.10)$$

onde a condição inicial é imprecisa, isto é, $x(0) = \bar{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Vamos abordar o sistema (2.10) de duas maneiras distintas. Um delas, proposta por Kaleva e Seikkala, consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico determinado por f , obtendo assim um campo fuzzy a partir do qual, são usados conceitos como a derivada de Hukuhara. A segunda, consiste em determinar primeiramente a solução determinística $\varphi_t(x_o)$ e então, aplicar o princípio da extensão de Zadeh, obtendo uma solução fuzzy φ_f . Informalmente, na primeira abordagem primeiramente *fuzzificamos* o problema e então encontramos a solução, enquanto que no segundo método, primeiramente a solução clássica é determinada e então fuzzificamos esta solução.

2.5.1 Extensão do campo determinístico

Consideremos a equação autônoma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.11)$$

com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $x_o \in \mathbb{R}$. Supondo que a variável de estado seja incerta, a idéia proposta por Seikkala, consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico f obtendo assim um problema de valor inicial fuzzy proveniente do sistema

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = \hat{f}(\hat{x}(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.12)$$

com $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e \hat{x}_o subconjunto fuzzy de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Como a função f é contínua, temos que os α -níveis do campo fuzzy \hat{f} satisfazem

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha) = [f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha)]$$

onde

$$\begin{cases} f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \min\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha\} \\ f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \max\{f(x) : x \in [\hat{x}(t)]^\alpha\}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Uma função $\hat{x}(t)$ que associa à cada $t \in [0, T]$ um subconjunto fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, está bem definida se existem funções $x_1^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_2^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tais que para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$[\hat{x}(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)].$$

Se a função $\hat{x}(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ for diferenciável no sentido de Hukuhara, então a derivada de $\hat{x}(t)$ pode ser definida como a função $\hat{x}'(t) : (0, T) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ cujos α -níveis satisfazem

$$[\hat{x}'(t)]^\alpha = [(x_1^\alpha)'(t), (x_2^\alpha)'(t)].$$

Pelas igualdades acima, o sistema associado pode então ser reformulado em um sistema bidimensional determinístico

$$\begin{cases} (\hat{x}_1^\alpha)'(t) = f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & \hat{x}(0) = x_{01}^\alpha \\ (\hat{x}_2^\alpha)'(t) = f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha), & \hat{x}(0) = x_{02}^\alpha \end{cases} \quad (2.14)$$

de modo que para cada $\alpha \in [0, 1]$ as funções x_1^α e x_2^α determinam os α -níveis de $\hat{x}(t)$.

A existência de solução unica para o sistema é garantida pelo teorema abaixo devido à Seikkala.

Teorema 2.14. *Suponha que f satisfaça*

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq g(t, |x - \bar{x}|), \quad t \geq 0, \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}$$

onde $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua tal que $r \rightarrow g(t, r)$ é não decrescente e o problema de valor inicial

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(0) = u_o \quad (2.15)$$

tem uma solução em \mathbb{R}_+ para $u_o > 0$ e que $u(t) \equiv 0$ é a única solução de para $u_o = 0$. Então o problema de valor inicial tem solução fuzzy única.

Exemplo 2.3. Consideremos a equação diferencial fuzzy

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = -\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.16)$$

que é a extensão de Zadeh do modelo de Malthus. Para este problema, tomando a função $g(t, r) = r$, as condições do Teorema 2.14 são satisfeitas. A solução única é determinada pelo sistema determinístico bidimensional

$$\begin{cases} (x_1^\alpha)'(t) = -x_2^\alpha(t), \\ (x_2^\alpha)'(t) = -x_1^\alpha(t), \end{cases} \quad (2.17)$$

cuja solução

$$x_1^\alpha(t) = \frac{x_{01}^\alpha - x_{02}^\alpha}{2} e^t + \frac{x_{01}^\alpha + x_{02}^\alpha}{2} e^{-t}, \quad x_2^\alpha(t) = \frac{x_{02}^\alpha - x_{01}^\alpha}{2} e^t + \frac{x_{01}^\alpha + x_{02}^\alpha}{2} e^{-t}$$

são os α -níveis de $\hat{x}(t)$ para $[\hat{x}_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]^\alpha$

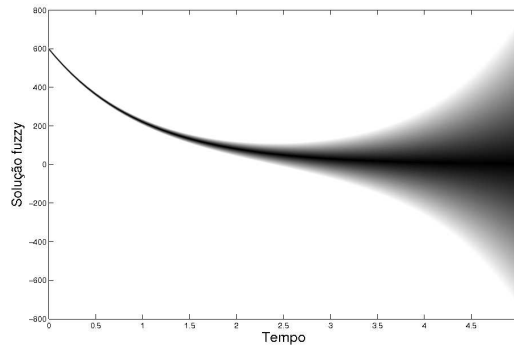


Figura 2.4: Solução do sistema fuzzy (2.16) com $\text{supp}(\hat{x}_o) = (595, 605)$.

Na Figura 2.4, temos o gráfico da solução fuzzy $\hat{x}(t)$ do sistema (2.16) com condição inicial como sendo o número fuzzy triangular $\hat{x}_o = (595/600/605)$. \square

É importante observar que o comprimento do suporte de $\hat{x}(t)$ é crescente em relação ao tempo, uma vez que, $x_1^\alpha(t)$ é decrescente e $x_2^\alpha(t)$ é crescente para todo $0 \leq \alpha < 1$. Portanto, conceitos relacionados aos estados de equilíbrio do sistema associado não estão bem definidos.

O fato do suporte da solução fuzzy $\hat{x}(t)$ ser crescente com relação à t não é um caso particular do exemplo (2.3).

Teorema 2.15 (Barros e Bassanezi (2006)). *Se $\hat{x} : I \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é diferenciável em $I = [0, T]$ então, para cada $\alpha \in [0, 1]$ a função $t \rightarrow \text{diam}[\hat{x}(t)]^\alpha$ é não decrescente em I .*

2.5.2 Extensão do fluxo determinístico

Consideremos o sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.18)$$

Vamos supor que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisfaça algum critério que garanta existência e unicidade de solução. Neste caso, a solução $x(t)$ do sistema (2.18) é unicamente determinada pela condição inicial e o tempo t . Para enfatizar isto, vamos representar tal solução por

$$\varphi_t(x_o) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou seja, $\varphi_0(x_o) = x_o$ e $\varphi'_t(x_o) = f(\varphi_t(x_o))$; a solução $\varphi_t(x_o)$ é denominada *fluxo* gerado pela campo vetorial f .

Admitindo que a condição inicial seja incerta, ou seja, $x(0) = \hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, então temos um sistema fuzzy associado

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \hat{x}_o \end{cases} \quad (2.19)$$

Neste caso, a solução depende de uma condição inicial fuzzy. A *solução fuzzy ou fluxo fuzzy* para o sistema associado (2.19) por esta abordagem é definida como sendo a função obtida pela aplicação do princípio da extensão de Zadeh ao fluxo determinístico $\varphi_t(x_o)$, obtendo assim

$$\varphi_f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Pela continuidade de $\varphi_t(x_o)$ com relação à condição inicial x_o , a igualdade

$$[\varphi_f]^\alpha = \varphi_t([\hat{x}_o]^\alpha) \quad (2.20)$$

é satisfeita para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, a trajetória determinada por φ_f , consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por φ_t . Para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, o grau de

pertinência da trajetória $\varphi\bar{x}$ em φ_f é igual ao grau de pertinência de \bar{x} em \hat{x}_o pois, pelo princípio da extensão de Zadeh

$$\mu_{\varphi_f}(\varphi\bar{x}) = \sup\{\mu_{\hat{x}_o}(\tau) : \varphi\tau = \varphi\bar{x}\}.$$

A igualdade $\varphi\tau = \varphi\bar{x}$ vale em particular para $t = 0$, ou seja, $\tau = \bar{x}$. Logo, o supremo é tomado em um conjunto unitário e, portanto,

$$\mu_{\varphi_t(f)}(\varphi\bar{x}) = \mu_{\hat{x}_o}(\bar{x}).$$

Para o caso em que x_o é um subconjunto fuzzy de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ então, temos os α -níveis de x_o são compactos e como consequência, $\varphi_t([x_o]^\alpha)$ também é compacto para todo $\alpha \in [0, 1]$. Sendo assim, $\varphi_t(x_o)$ é um subconjunto fuzzy de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Se considerarmos o caso em que a subjetividade aparece nos parâmetros da função f , então precisamos aplicar a extensão de Zadeh ao fluxo do sistema determinístico

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), b) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $x_o \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros para f . Portanto, adicionando ao sistema acima as equações

$$\begin{cases} b'_1 = 0 \\ b'_b = 0 \\ \vdots \\ b'_m = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

temos um novo sistema de dimensão $n + m$

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ b'(t) = 0 \\ x(0) = (x_o, b) \end{cases} \quad (2.23)$$

onde o vetor de parâmetros b aparece agora na condição inicial. Dessa forma, voltamos ao caso descrito acima onde somente a condição inicial é fuzzy.

Vale observar que ao acrescentarmos os parâmetros como condição inicial, conforme procedimento indicado acima, aumentamos a dimensão do sistema de modo que a solução da equação (2.23) é dada por

$$\psi_t(x_o, b) = (\varphi_t(x_o, b), b),$$

onde $\varphi_t(x_o, b)$ é a solução da equação (2.21).

Para a metodologia apresentada nesta secção, Marina T. Mizukoshi(2004) verificou algumas propriedades sobre a estabilidade da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t$. A definição de estados

de equilíbrio e estabilidade dada em seu trabalho é análogo ao caso clássico. Porém como estamos sobre espaços dos números fuzzy, a métrica utilizada é a induzida pela de Hausdorff.

A distância entre dois conjuntos A e $B \subset \mathbb{R}^n$ pela métrica de Hausdorff é dada por:

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\} \\ &= \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\}. \end{aligned}$$

Dados dois subconjuntos fuzzy $\hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ definimos a distância entre \hat{a} e \hat{b} pela expressão

$$d_\infty(\hat{a}, \hat{b}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\hat{a}]^\alpha, [\hat{b}]^\alpha).$$

Definição 2.5. Dizemos que $\hat{x}_e \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é um *ponto de equilíbrio fuzzy* $\hat{\varphi}_t$ quando

$$\hat{\varphi}_t(\hat{x}_e) = \hat{x}_e$$

para todo $t \geq 0$.

Baseado nesta definição e nos conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica para pontos de equilíbrio é possível mostrar uma relação entre os pontos de equilíbrio das soluções clássica e fuzzy de uma equação diferencial autônoma.

Podemos encontrar na literatura algumas generalizações que tornam mais abrangente a análise qualitativa de sistemas variacionais fuzzy. Por exemplo, quando a solução determinística apresenta soluções periódicas, o fluxo fuzzy também apresenta um comportamento periódico. Assim podemos encontrar vários exemplos de aplicações em diversos modelos que ilustram a teoria desenvolvida.

Teorema 2.16 (Ceconello (2010)). *Sejam $x_e : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com $[x_o]^\alpha \subset A$ e $\hat{x}_e = \hat{x}^*(x_o)$. Sob essas condições temos:*

- a) *Se $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ para todo $x \in A$ então $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_e) = \hat{x}_e$ para todo $t \geq 0$;*
- b) *Se $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ converge uniformemente, em $[x_o]^0 \subset A$, para $x_e : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ quando $t \rightarrow \infty$, então $\hat{\varphi}_t(x_o)$ converge para \hat{x}_e .*

Quando os parâmetros também são considerados fuzzy então a extensão de Zadeh é aplicado sobre a solução determinística $\psi_t(x_o, b) = (\varphi_t(x_o, b), b)$ da equação (2.23), no qual $\varphi_t(x_o, b)$ é a solução determinística da equação (2.21). No entanto, em sua tese de doutorado (Ceconello, 2010) mostrou que, nas mesmas hipóteses do teorema (2.16), a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t(\hat{x}_o, \hat{b})$ converge para $\hat{x}_e = \hat{x}^*(\hat{x}_o, \hat{b})$.

Teorema 2.17. *Sejam $x_e : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, $x_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\hat{x}_e = \hat{x}^*(x_o, \hat{b})$. Se $\varphi_t : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ converge uniformemente, em $[x_o]^0 \times [\hat{b}]^0$, para $x_e : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ quando $t \rightarrow \infty$, então $\hat{\varphi}_t(x_o, \hat{b})$ converge para \hat{x}_e .*

A afirmação abaixo é semelhante ao teorema de Poincaré - Bendixson, para o fluxo fuzzy obtido pela extensão de Zadeh de uma solução determinística.

Teorema 2.18. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e invariante, x^* o único ponto de equilíbrio em K e $x_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$. Se x^* é instável então existe uma região $A \subset K$ tal que para $x_o \in A$, $\hat{\varphi}_t(x_o)$ converge para uma órbita periódica fuzzy.*

Como já mencionado, as demonstrações de ambos os resultados são encontradas em (Ceconello, 2010). A seguir, apresentamos alguns exemplos para facilitar a compreensão destas ferramentas.

Exemplo 2.4. Consideremos a equação fuzzy proveniente do modelo de Malthus:

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x \\ x(0) = x_o. \end{cases} \quad (2.24)$$

O estado de equilíbrio para este sistema é $x_e=0$ que satisfaz as condições do Teorema 2.16 quando $\lambda < 0$. Portanto, podemos concluir que o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_f$ converge para o ponto $\chi_{\{0\}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ quando o tempo cresce. De fato pois a solução para o modelo determinístico acima é $\varphi_t(x_o) = x_o e^{\lambda t}$ e pelo Teorema (2.18) temos que os α -níveis do $\hat{\varphi}_f$ são dados por

$$[\hat{\varphi}_t(x_o)]^\alpha = [x_o]^\alpha e^{\lambda t} = \{x_o e^{\lambda t} : x_o \in [x_o]^\alpha\}.$$

Logo, se $\lambda < 0$ o termo exponencial tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. A Figura 2.5 ilustra a solução fuzzy $\hat{\varphi}_f$ onde a condição inicial é o número fuzzy triangular $x_o = (5/10/15)$. \square

Vale resaltar que na figura(2.5) temos a solução determinística caracterizada como a de gráfico mais escuro. A partir do momento em que as cores vão ficando mais claras temos que a função de pertinência da solução fuzzy vai diminuindo.

Na Figura 2.5, como nas demais que aparecem neste texto, usamos o sistema de cores RGB para representar graficamente a solução fuzzy de uma equação diferencial fuzzy. No sistema de cores RGB, cada cor é expressa por uma combinação de três valores, considerado aqui estarem no intervalo $[0,1]$. Podemos portanto, considerar cada cor como uma função $RGB(x, y, z)$, com $x, y, z \in [0, 1]$, onde $RGB(0, 0, 0)$ representa a cor preta enquanto que $RGB(1, 1, 1)$ representa a cor branca.

Assim, dada um $\alpha \in [0, 1]$ a região no plano delimitada pelo α - nível $\varphi_t([\hat{x}o]^\alpha)$ é preenchida com a cor $RGB(1 - \alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha)$. Se $\alpha = 0$ então a região delimitada por $\varphi_t([\hat{x}o]^0)$ é preenchida com a cor branca, ao passo que se $\alpha = 1$ então a região delimitada

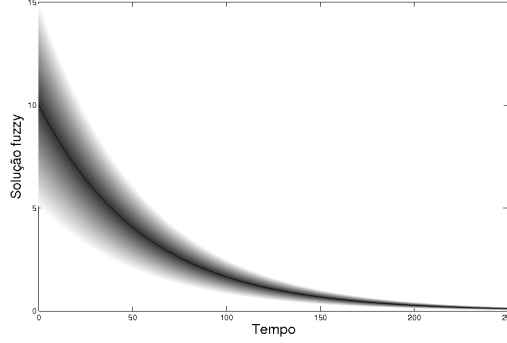


Figura 2.5: Solução fuzzy do modelo de Malthus. Condição inicial fuzzy: $\hat{x}_0 = (5/10/15)$ e $\lambda = -0.012$.

por $\varphi_t([\hat{x}_0]^1)$ é preenchida com a cor preta. Desta forma, quanto maior for o grau de pertinência de um ponto x , mais escura será a sua cor.

Na prática, fazemos uma partição

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_n = 1$$

no intervalo $[0, 1]$ e, para cada α_i , usamos a igualdade $[\varphi_t(\hat{x}_0)]^\alpha = \varphi_t(\hat{x}_0)$ para determinamos o conjunto $[\varphi_t(x_0)]^{\alpha_i}$. Quanto maior o valor de α_i , mais escura é cor usada para preencher a região delimitado pelo conjunto $[\varphi_t(x_0)]^{\alpha_i}$.

Exemplo 2.5. A solução determinística da equação logística é dada por

$$p_t(p_0, \lambda, k) = \frac{kp_0}{p_0 + (k - p_0)e^{-\lambda t}}. \quad (2.25)$$

Considerando que a capacidade suporte k seja incerta, então os α -níveis da solução fuzzy associada são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{k})]^\alpha = p_t([\hat{k}]^\alpha) = \left\{ \frac{kp_0}{p_0 + (k - p_0)e^{-\lambda t}} : k \in [\hat{k}]^\alpha \right\}. \quad (2.26)$$

O Teorema 2.17 garante que a solução fuzzy converge para \hat{k} quando $t \rightarrow \infty$. Na Figura 2.7(a) temos a representação gráfica da solução fuzzy de 2.25 para $\hat{k} = (225/245/265)$, $r = 0.012$ e $x_0 = 10$.

Para o caso em que o índice de crescimento relativo λ é fuzzy, os α -níveis da solução fuzzy são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{\lambda})]^\alpha = p_t([\hat{\lambda}]^\alpha) = \left\{ \frac{kp_0}{p_0 + (k - p_0)e^{-\lambda t}} : \lambda \in [\hat{\lambda}]^\alpha \right\}. \quad (2.27)$$

Neste caso, o Teorema 2.17 também garante que a solução fuzzy converge para o ponto de $\chi_{\{k\}}$ quando $t \rightarrow \infty$. Para a representação gráfica da solução fuzzy da Figura 2.7(b) consideramos $\hat{\lambda} = (0.009/0.012/0.015)$, $k = 245$ e $x_0 = 10$.

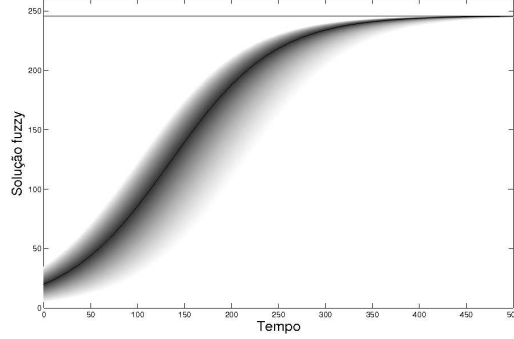


Figura 2.6: Solução fuzzy para a equação logística com condição inicial fuzzy: $\hat{p}_o = (10/15/20)$, $k = 245$ e $\lambda = 0.012$.

Se a condição inicial é fuzzy, temos que a solução fuzzy tem como limite o valor $\chi_{\{k\}}$. De fato, se a condição inicial é incerta, os α -níveis da solução fuzzy da equação logística são dados por:

$$[\hat{p}_t(\hat{p}_o)]^\alpha = p_t([\hat{p}_o]^\alpha) = \left\{ \frac{kp_o}{p_o + (k - p_o)e^{-\lambda t}} : p_o \in [\hat{p}_o]^\alpha \right\}. \quad (2.28)$$

Logo, fazendo $t \rightarrow \infty$, temos que $\text{supp}(\hat{p}_t(\hat{p}_o)) \rightarrow \{k\}$. A representação solução fuzzy para $\hat{p}_o = (10/15/20)$ é mostrada na Figura 2.6.

Como podemos notar na Figura 2.6, o diâmetro da solução fuzzy aumenta até passar pelo ponto de inflexão determinado instante a partir do qual volta a diminuir. E esta é uma característica apresentada pelos modelos com crescimento inibido cuja condição inicial é fuzzy.

Consideramos o modelo clássico do tipo presa-predador formulado por Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cx + dxy \\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Suponhamos que a condição inicial x_o ou y_o do modelo de Lotka-Volterra seja um número fuzzy. Por definição de produto cartesiano fuzzy, o grau de pertinência do par $\hat{\mathbf{x}}_o = (\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ é dado por $\mu_{\hat{\mathbf{x}}_o}(x_o, y_o) = \min\{\mu_{\hat{x}_o}(x_o), \mu_{\hat{y}_o}(y_o)\}$.

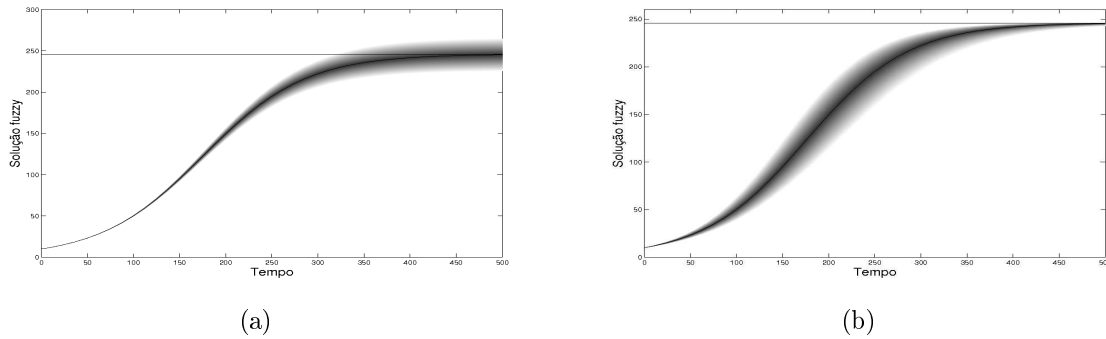


Figura 2.7: Solução fuzzy da equação logística. (a) - capacidade suporte fuzzy: $\hat{k} = (225/245/265)$, $r = 0.012$ e $x_o = 10$. (b) - parâmetro intrínscio de crescimento fuzzy: $\hat{\lambda} = (0.009/0.012/0.015)$, $k = 245$ e $x_o = 10$.

Sabemos que o estado de equilíbrio não nulo do modelo de Lotka - Volterra é estável. Pelo fato de $\hat{\varphi}_f$ ser constituído de trajetórias determinísticas, então é esperado que a solução fuzzy $\hat{\varphi}_f$ apresente periodicidade em torno do estado de equilíbrio. No entanto, a solução fuzzy do modelo de Lotka - Volterra não apresenta periodicidade. Isto é, diferentemente da solução determinística, a solução fuzzy não retorna para a condição inicial em nenhum instante de tempo. Uma análise detalhada do modelo de Lotka - Volterra pode ser encontrada em Ceconello (2010).

Nas Figuras (2.8)(a)-(b), apenas a condição inicial para presas é considerado incerta dada pelo número fuzzy $\hat{x}_o = (90/100/110)$. Notemos que embora somente a condição inicial de presas seja imprecisa, a população de predadores também é afetada por esta imprecisão

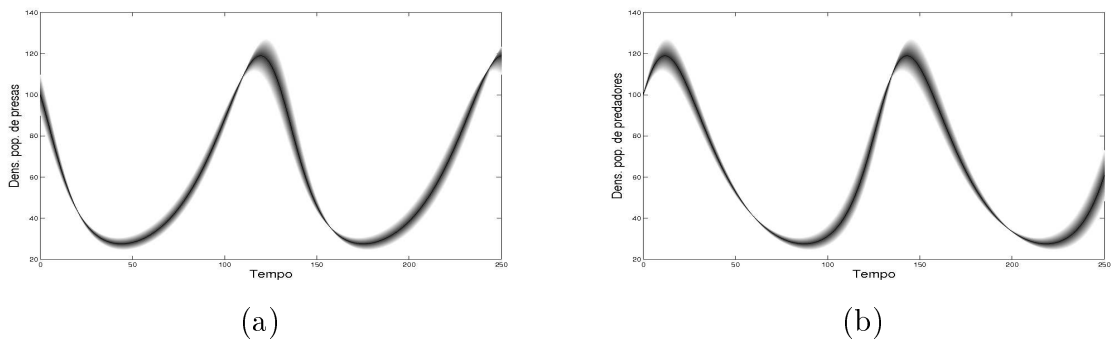


Figura 2.8: Solução fuzzy para o modelo de Lotka-volterra. Parâmetros: $a = 0.05$ $b = 0.08$, $\alpha = \beta = 0.0008$ e condição inicial $\hat{x}_o = (90/100/110)$ e $y_o = 100$; (a) - população de presas; (b) - população de predadores.

A solução para o caso em que ambas as condições iniciais são fuzzy pode ser vistas nas Figuras 2.9(a)-(b).

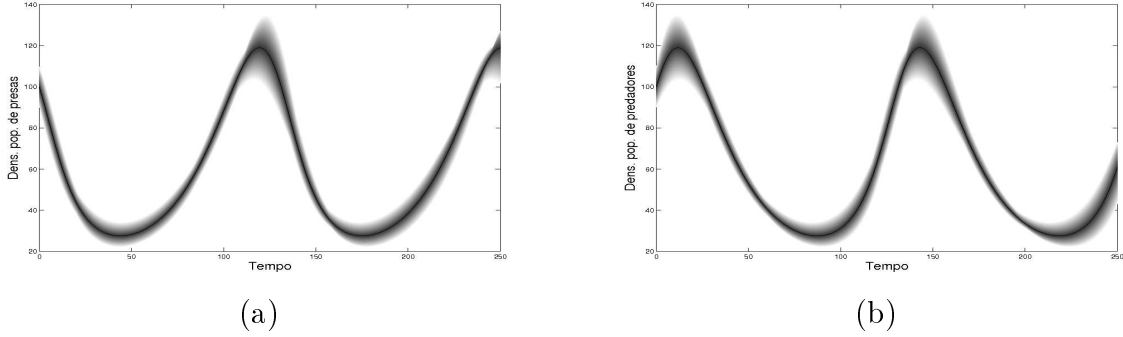


Figura 2.9: Solução fuzzy para o modelo de Lotka - Volterra. Parâmetros: $a = b = 0.08$, $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.0008$ e condição inicial $x_o = y_o = (90/100/110)$; (a) população de presas; (b) - população de predadores.

As soluções fuzzy no plano de fase não é viável de serem representado, pois uma mesma trajetória pode assumir distintos valores de pertinência.

Exemplo 2.6. Consideramos o modelo presa-predador de Holling-Tanner

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(k - x) - \frac{mx}{x + D}y \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{\beta y}{x}\right) \\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.30)$$

Sob certas condições, o modelo de Holling - Tanner admite a existência de um ciclo limite assintoticamente estável que independe da condição inicial. Pelo Teorema 2.18, que é uma generalização do Teorema de Bendixon-Poincaré para o caso fuzzy, a solução fuzzy $\hat{\varphi}_f$ do sistema associado ao determinístico converge para uma órbita periódica quando $t \rightarrow \infty$. O gráfico de $\hat{\varphi}_f$ para a condição inicial dada por $\hat{x} = \hat{y} = (70/80/90)$ pode ser visto nas Figuras 2.10(a)-(b).

Para o caso em que a solução determinística converge para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável, o Teorema 2.16 garante que a solução fuzzy vai também convergir para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

A Figura 2.11 representa a evolução da solução fuzzy do modelo de Holling - Tanner com condição inicial fuzzy dada pela função de pertinência

$$\mu_{x_o}(x, y) = \max\{1 - 0.05(x - 30) - 0.01(y - 220), 0\}.$$

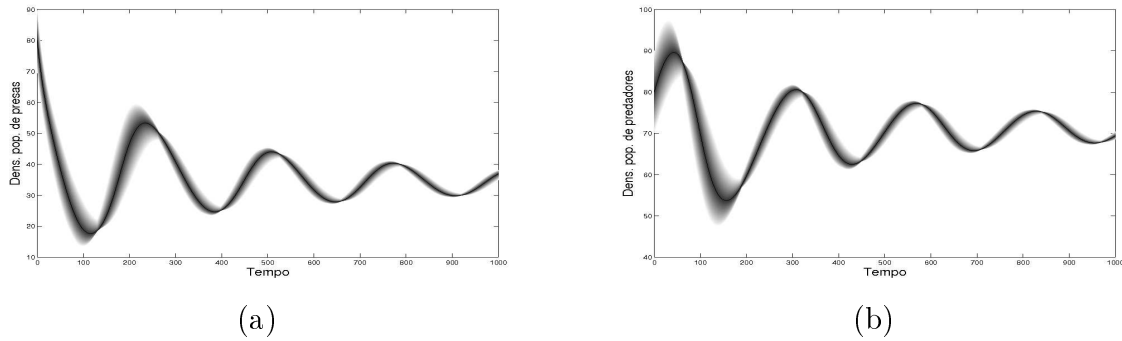


Figura 2.10: Solução fuzzy para o modelo de Holling - Tanner. Parâmetros para ambas as figuras: $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.48$, $d = 20$, $k = 100$, $\lambda = 0.1$, $m = 0.05$ e condição inicial $\hat{x}_o = \hat{y}_o = (70/80/90)$.

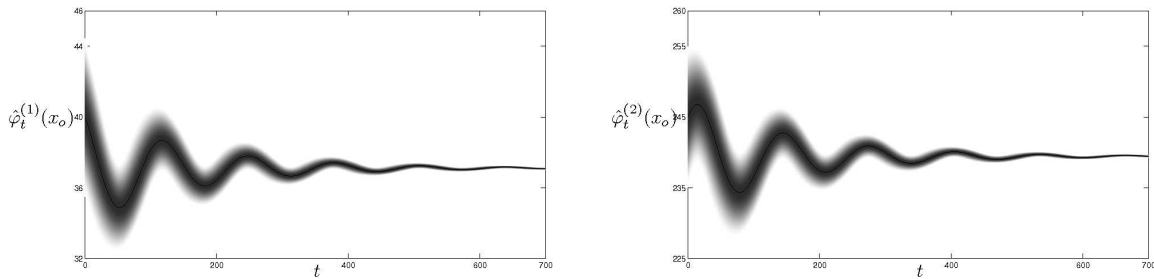


Figura 2.11: Solução fuzzy para o modelos de Holling - Tanner.

Para esta solução, os parâmetros para o modelo de Holling - Tanner são: $r = 0.2$; $k = 100$; $m = 0.03$; $d = 20$; $a = 0.02$ e $b = 0.155$. Para estes parâmetros, o ponto de equilíbrio não nulo é assintoticamente estável.

Os resultados apresentados neste capítulo são importantes na análise qualitativa de soluções fuzzy. Como podemos ver por meio dos exemplos, o comportamento da solução fuzzy pode ser analisado através da análise qualitativa da solução determinística correspondente.

Capítulo 3

Estabilidade da equação de difusão-reação-advecção fuzzy

Neste capítulo vamos definir sistemas de difusão que possuem alguma condição inicial nebulosa ou incerta. Considerando pois condições iniciais fuzzy, vamos estabelecer sistemas dinâmicos que se comportam como os determinísticos e que são responsáveis pela difusão, ao longo do tempo, destes valores iniciais fuzzy.

Como feito no Capítulo 2, consideramos então um sistema difusivo determinístico associado de modo que a solução do sistema fuzzy seja definida como a extensão de Zadeh da solução determinística. A visualização gráfica dessas soluções serão mostradas quando possível além de propriedades interessantes sobre unicidade e estabilidade assintótica para soluções n dimensionais.

3.1 Equação de difusão-reação-advecção fuzzy em \mathbb{R}

Nesta secção estamos interessados em descrever processos que sejam provenientes de difusão, onde a movimentação dos indivíduos seja dada de forma unidimensional, ou seja para esquerda ou para direita.

A maioria dos fenômenos da realidade que envolvem difusão são formuladas com modelos que descrevem uma determinada dinâmica em \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 e é o que trataremos a seguir.

Considere a equação de difusão determinística

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = N_0 \delta(x) & \mathbb{R} \times [t = 0] \end{cases}$$

onde $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, D é a constante de difusão, N_0 é o número de indivíduos no instante inicial e $\delta(x)$ é a função de Dirac. Neste caso, a solução determinística

é dada por

$$u(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Agora, se queremos descrever um processo de espalhamento de indivíduos em que a condição inicial não esta bem determinada. Faremos uso da teoria dos conjuntos fuzzy, ou seja a condição inicial do problema será um numero \hat{N}_0 fuzzy.

Definição 3.1. Uma solução fuzzy \hat{u} de um processo de difusão com condição inicial fuzzy \hat{N}_0 é um conjunto fuzzy onde cada elemento é uma solução da equação determinística com um grau de pertinência a \hat{u} , coincidente com o mesmo grau de pertinência de $n_0 \in \hat{N}_0$ de partida.

Neste caso, a solução fuzzy do problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) \in [N_0 \delta(x)]^0 & \mathbb{R} \times [t = 0] \end{cases}$$

é dada por

$$\hat{u}(x, t) = \frac{\hat{N}_0}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

que é a extensão de Zadeh $\hat{u} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ da solução determinística $u(x, t)$ e seus elementos são representados graficamente pelas Figuras 3.1 e 3.2.

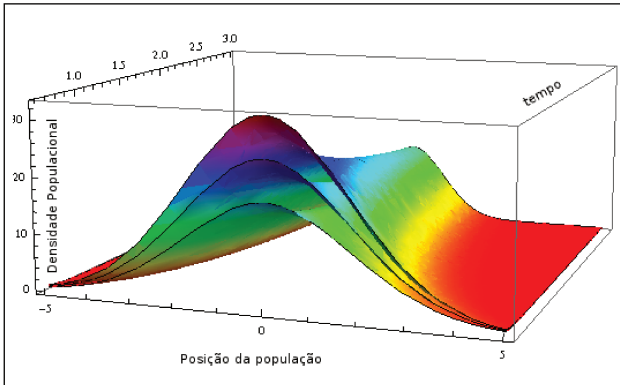


Figura 3.1: Elementos da solução fuzzy para $[\hat{N}_0] = [10; 20; 30]$ e $D = 1$

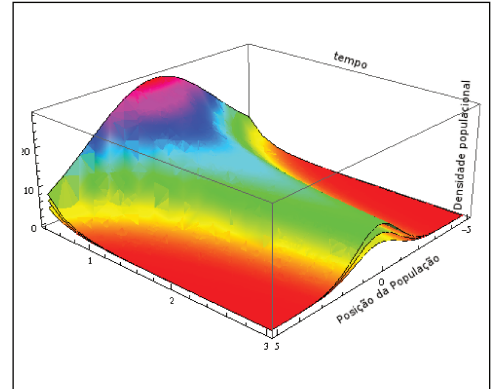


Figura 3.2: Gráfico da solução fuzzy para $[\hat{N}_0] = [10; 20; 30]$ e $D = 2$

Neste caso, considere $\hat{N}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Como $u(x, t)$ é contínua em relação à condição inicial, temos pela Proposição 2.8 do capítulo 2 que

$$[\hat{u}(x, t, \hat{N}_0)]^\alpha = u(x, t, [\hat{N}_0]^\alpha) = u(x, t, [n_{01}^\alpha, n_{02}^\alpha])$$

onde $[\hat{N}_0]^\alpha = [n_{01}^\alpha, n_{02}^\alpha]$.

Observamos também que a fórmula acima indica que o grau de pertinência de n_0 a \hat{N}_0 é o mesmo grau de pertinência de $u_{(x,t)}(n_0)$ e $\hat{u}_{(x,t)}(n_0)$, para todo t .

3.1.1 Estabilidade da solução fuzzy em \mathbb{R}

Começaremos essa secção definindo estabilidade assintótica de um fluxo fuzzy, diâmetro de um número fuzzy e α -nível de uma solução fuzzy da equação de difusão

Definição 3.2. O diâmetro de uma solução fuzzy $\hat{u}(x, t)$ é dado por:

$$diam([\hat{u}(x, t)]^\alpha) = u_2^\alpha(x, t) - u_1^\alpha(x, t)$$

onde $[\hat{u}(x, t)]^\alpha = [u_2^\alpha(x, t), u_1^\alpha(x, t)]$ para $0 < \alpha < 1$.

Definição 3.3. Dizemos que um fluxo fuzzy $\hat{u}(x, t)$ é assintoticamente estável quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (diam([\hat{u}(x, t)]^\alpha) = 0$$

Definição 3.4. Chamaremos de α -nível da solução da equação de difusão fuzzy à expressão

$$[\hat{u}(x, t)]^\alpha = \left[\frac{N_{01}^\alpha}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \frac{N_{02}^\alpha}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right]^\alpha$$

onde $[\hat{N}_0]^\alpha = [N_{01}^\alpha, N_{02}^\alpha]$

Podemos provar que a solução fuzzy da equação de difusão é estável, utilizando para isso seu diâmetro.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (diam([\varphi_t(N_0)]^\alpha)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (N_{02}^\alpha - N_{01}^\alpha) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \\ &= (N_{02}^\alpha - N_{01}^\alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \\ &= diam([N_0]^\alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = 0 \end{aligned}$$

Assim, quando $t \rightarrow \infty$ temos que a solução fuzzy converge para a determinística. Uma vez que todos os α -níveis contém a solução determinística.

3.2 Equação de difusão-reação-advecção fuzzy em \mathbb{R}

Sabemos a respeito da literatura que um modelo regido apenas por difusão é ineficiente para intervalos de tempos maiores, sendo eficaz apenas no início do processo, assim podemos incluir em nosso modelo os processos de reação e advecção. De fato, seja o modelo clássico unidimensional de reação-difusão-advecção com condição inicial $N_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + bu(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = N_0 \delta(x) & \mathbb{R} \times [t = 0] \end{cases}$$

onde N_0 é o número de indivíduos existentes no início do processo $t = 0$, assim temos que a solução determinística é dada por

$$u(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt} + bt}$$

Então a solução fuzzy do problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + bu(x, t) & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = [\hat{N}_0 \delta(x)]^0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

é dada pela extensão de Zadeh no fluxo determinístico

$$\hat{u}(x, t) = \frac{\hat{N}_0}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt} + bt}$$

As Figuras a seguir representam elementos das soluções fuzzy para um problema de reação-difusão-advecção.

As figuras (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8) referem-se as soluções fuzzy para um modelo de difusão-reação-advecção. Pode-se notar que o comportamento da solução é similar ao da determinística.

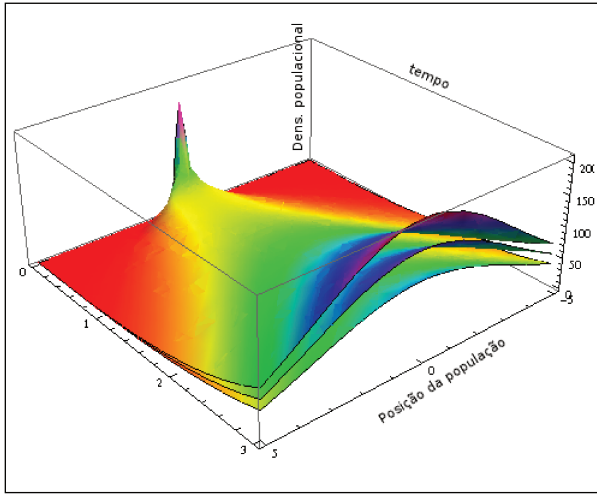


Figura 3.3: *Elementos da solução fuzzy unidimensional para $a = 0$ e $b = 1$.*

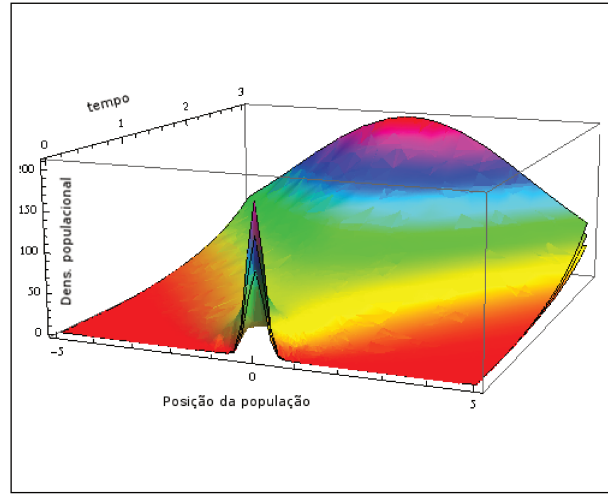


Figura 3.4: *Elementos da solução fuzzy para $a = 0$ e $b = 1$*

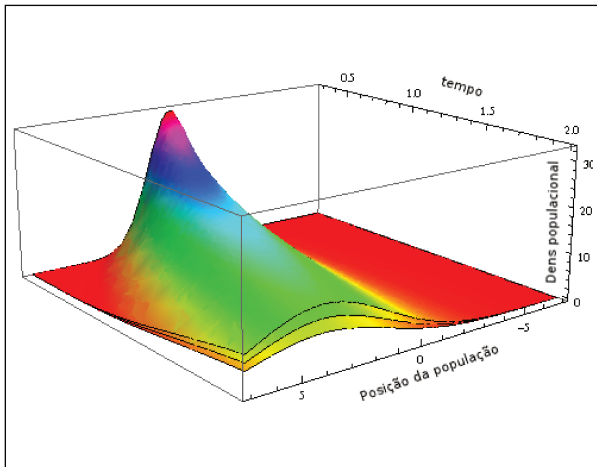


Figura 3.5: *Elementos da solução fuzzy unidimensional para $a = 2$ e $b = 0$*

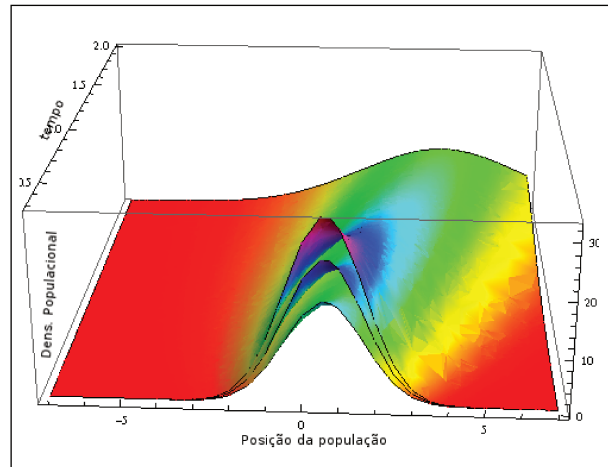


Figura 3.6: *Elementos da solução fuzzy unidimensional para $a = 2$ e $b = 0$*

3.2.1 Estabilidade assintótica da solução fuzzy

Podemos estudar a estabilidade das soluções do problema de valor inicial fuzzy, mesmo quando o modelo envolver reação-advecção. Dessa forma, se definirmos os α -níveis dessa solução da forma

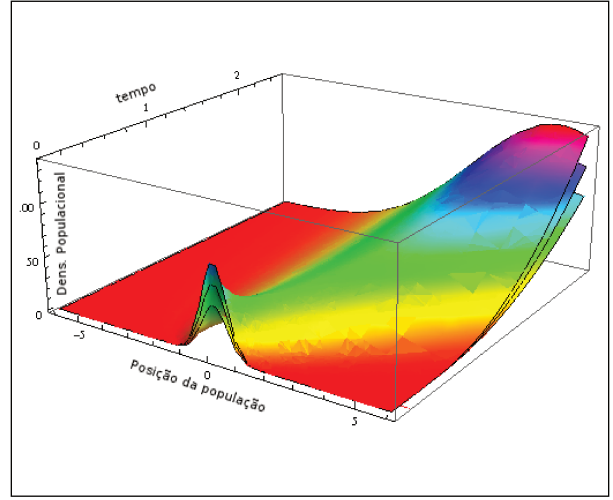
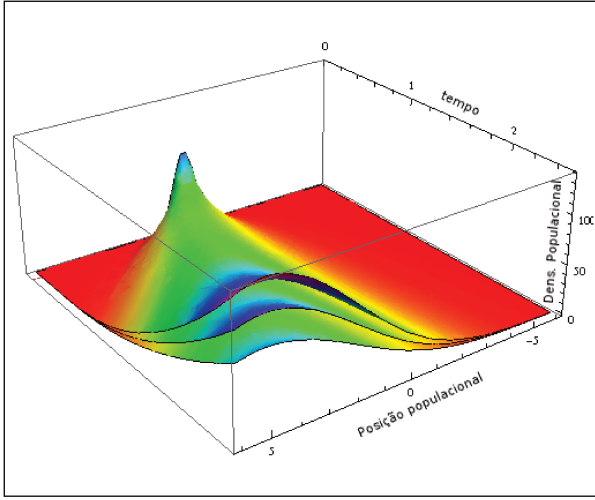


Figura 3.7: *Elementos da solução fuzzy unidimensional para $a = 1$ e $b = 1$*

Figura 3.8: *Elementos da solução fuzzy unidimensional para $a = 1$ e $b = 1$*

$$[\hat{u}(x, t)]^\alpha = \left[\frac{N_{01}^\alpha}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt} + bt}, \frac{N_{02}^\alpha}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt} + bt} \right]^\alpha$$

a respeito do diâmetro dessa solução fuzzy temos que

$$diam [\varphi_t(N_0)]^\alpha = \varphi_t (diam[N_0]^\alpha)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (diam([\varphi_t(N_0)]^\alpha)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (N_{02}^\alpha - N_{01}^\alpha) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt} + bt} = \\ &= (N_{02}^\alpha - N_{01}^\alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt} + bt} = \\ &= diam([N_0]^\alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt} + bt} = \pm\infty \end{aligned}$$

para $b > 0$.

O que percebemos é que se o problema envolve difusão-advecção as propriedades de estabilidade funcionam como no caso apenas com difusão. Mas se existir uma reprodução malthusiana apesar do diâmetro dessa solução não convergir para 0 temos propriedades importantes sobre essa solução que é o fato de que quando nos afastamos da origem para um t fixo, teremos a solução fuzzy agindo da mesma forma que a determinística. Uma maneira de minimizar esse problema seria utilizando o modelo logístico ao invés do malthusiano para descrever a reprodução, fato que será explorado em trabalhos futuros.

3.2.2 Intersecção das soluções fuzzy unidimensionais envolvendo apenas difusão com o plano $t = t^*$

Em cada instante t^* a solução fuzzy $\hat{u}(x, t^*, \hat{N}_0)$ é dada pela intersecção de \hat{u} com o plano $t = t^*$. A princípio, mostraremos a evolução da solução fuzzy unidimensional envolvendo apenas difusão.

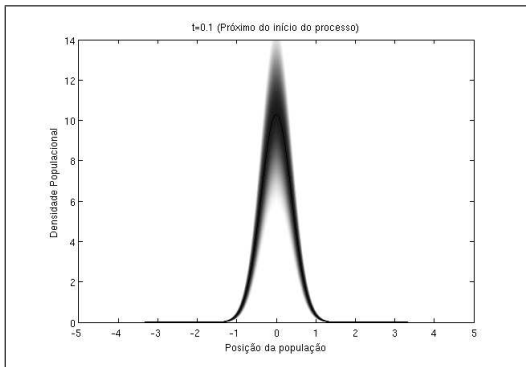


Figura 3.9: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 0.01$ envolvendo apenas difusão

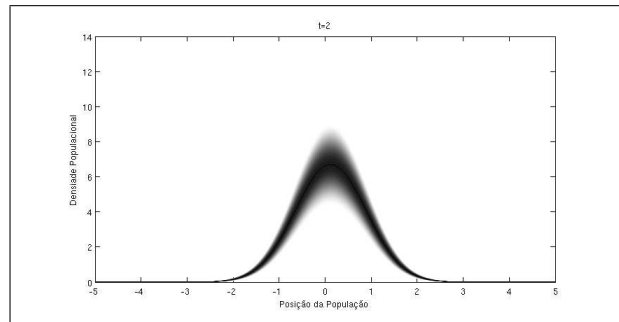


Figura 3.10: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 2$ envolvendo apenas difusão

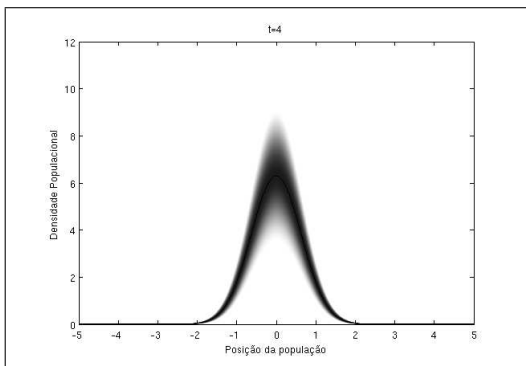


Figura 3.11: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 4$ envolvendo apenas difusão

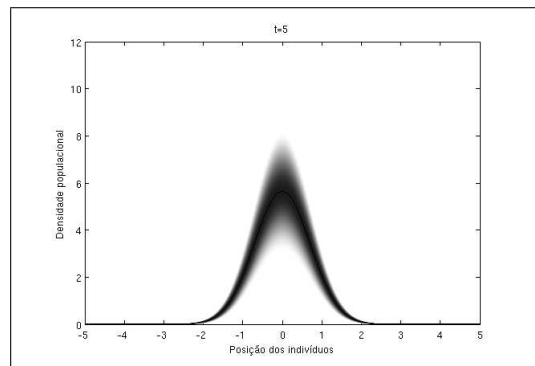


Figura 3.12: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 5$ envolvendo apenas difusão

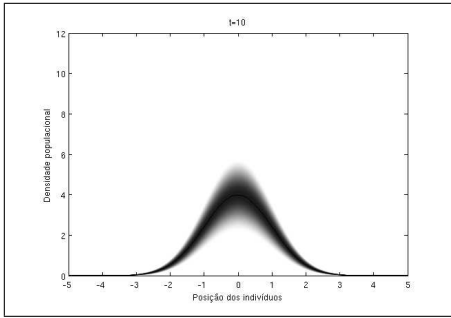


Figura 3.13: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 10$ envolvendo apenas difusão

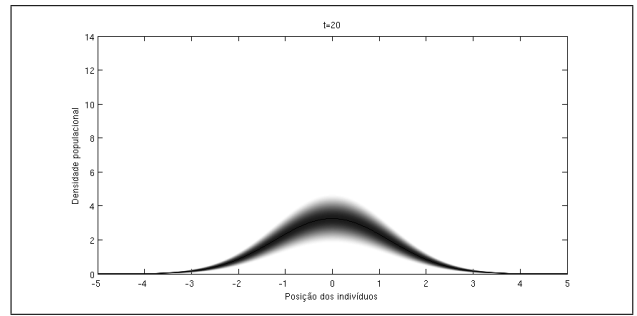


Figura 3.14: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 20$ envolvendo apenas difusão

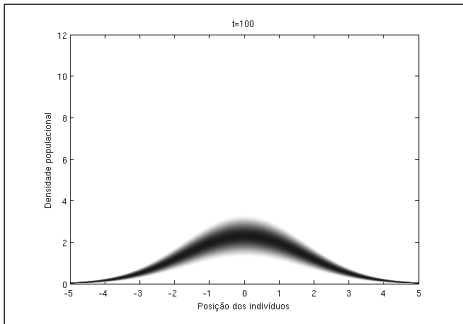


Figura 3.15: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 100$ envolvendo apenas difusão

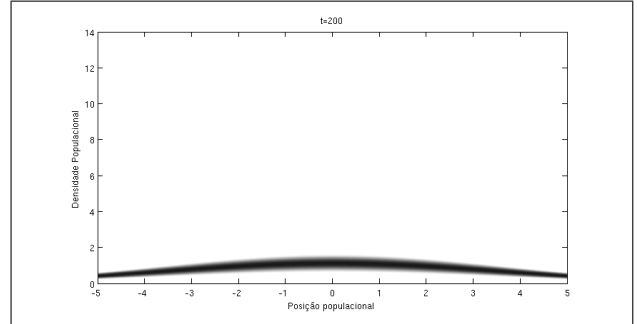


Figura 3.16: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 200$ envolvendo apenas difusão

3.2.3 Intersecção das soluções fuzzy unidimensionais envolvendo difusão-reação com o plano $t = t^*$

Em cada instante t^* a solução fuzzy é dada pela intersecção de \hat{u} com o plano $t = t^*$. Mostraremos agora, a evolução da solução fuzzy unidimensional envolvendo difusão-reação.

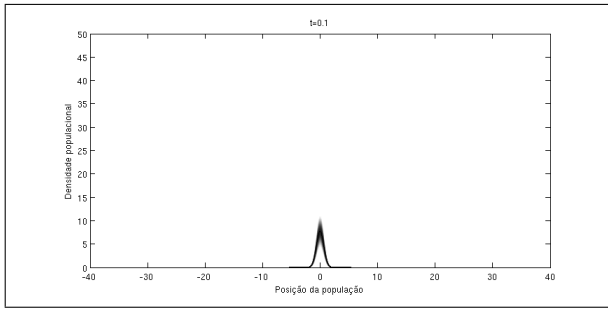


Figura 3.17: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 0.1$ envolvendo difusão-reação para $b = 1$

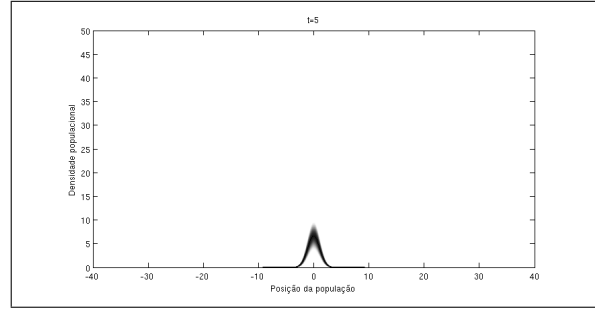


Figura 3.18: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 5$ envolvendo difusão-reação para $b = 1$

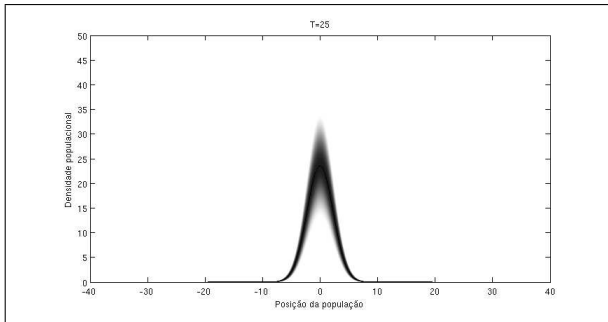


Figura 3.19: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 25$ envolvendo difusão-reação para $b = 1$

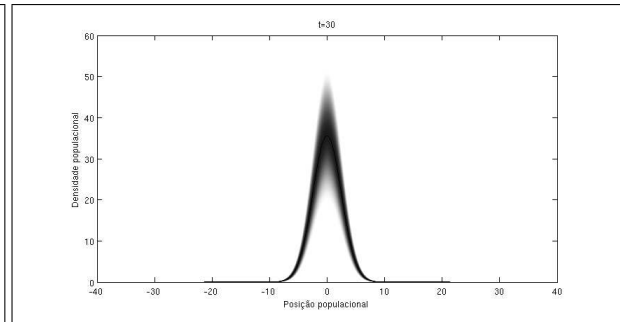


Figura 3.20: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 30$ envolvendo difusão-reação para $b = 1$

3.2.4 Intersecção das soluções fuzzy unidimensionais envolvendo difusão-reação-advecção com o plano $t = t^*$

Da mesma forma que nas duas subsecções anteriores, em cada instante t^* a solução fuzzy é dada pela intersecção de \hat{u} com o plano $t = t^*$. Mostraremos a evolução da solução fuzzy unidimensional envolvendo difusão-reação-advecção.

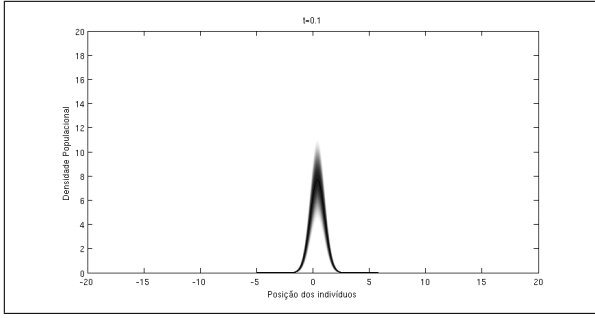


Figura 3.21: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 0.1$ envolvendo difusão-reação-advecção para $a = 2$ e $b = 1$

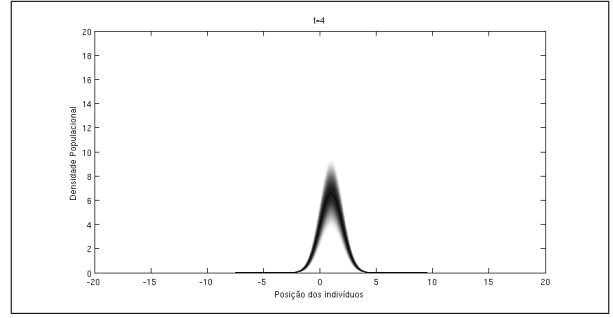


Figura 3.22: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 4$ envolvendo difusão-reação-advecção para $a = 2$ e $b = 1$

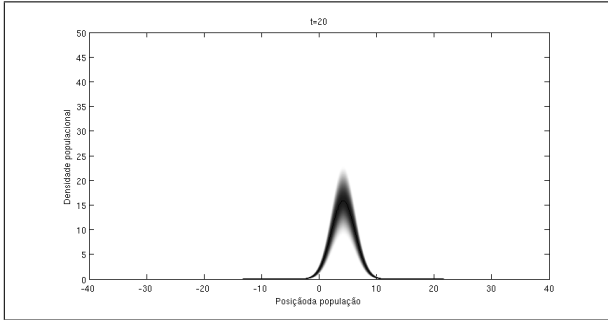


Figura 3.23: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 20$ envolvendo difusão-reação-advecção para $a = 2$ e $b = 1$

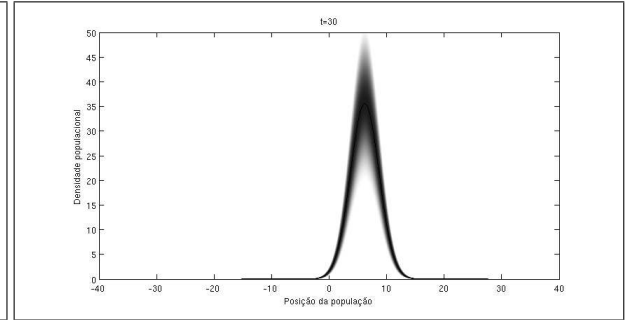


Figura 3.24: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t^* = 30$ envolvendo difusão-reação-advecção para $a = 2$ e $b = 1$

3.3 Equação de difusão-reação-advecção fuzzy em \mathbb{R}^2

No caso bidimensional, temos o mesmo comportamento encontrado nas unidimensionais. É claro, que existe uma impossibilidade de plotarmos os gráficos referentes à solução fuzzy bidimensional, mas podemos plotar o gráfico da distribuição espacial para valores de t fixo, para fazer um estudo mais detalhado dessas soluções. Usaremos, como no caso anterior, o gráfico das projeções dos α -níveis para um $t = t^0$ fixo.

Considere a equação de difusão determinística bidimensional

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) (x, t) + \left(a \frac{\partial u}{\partial x_1} + c \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) (x, t) + bu(x, t), & x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0 \\ u(x, 0) = N_0 \delta(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad 3.3$$

onde $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, D é a constante de difusão, N_0 é o número de indivíduos no instante inicial e $\delta(x)$ é a função de Dirac. Neste caso, a solução determinística é dada por

$$u(x, t) = \frac{N_0}{4\pi Dt} e^{\frac{-((x_1-at)^2+(x_2-ct)^2)}{4Dt} - bt}$$

onde $x = (x_1, x_2)$.

Dessa forma, queremos descrever um processo de espalhamento de indivíduos no plano em que a condição inicial não esta bem determinada. Para isso faremos uso da teoria dos conjuntos fuzzy, ou seja a condição inicial do problema será um numero \hat{N}_0 fuzzy.

Neste caso, o problema de valor inicial fuzzy associado ao problema é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) (x, t) + \left(a \frac{\partial u}{\partial x_1} + c \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) (x, t) + bu(x, t), & x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0 \\ u(x, 0) \in [\hat{N}_0 \delta(x)]^0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

que definiremos como solução fuzzy a expressão

$$\hat{u}(x, t) = \frac{\hat{N}_0}{4\pi Dt} e^{\frac{-((x_1-at)^2+(x_2-ct)^2)}{4Dt} - bt}$$

que é a extensão de Zadeh $\hat{u} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ da solução determinística $u(x, t)$ e seus elementos são representados graficamente pelas figuras (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28).

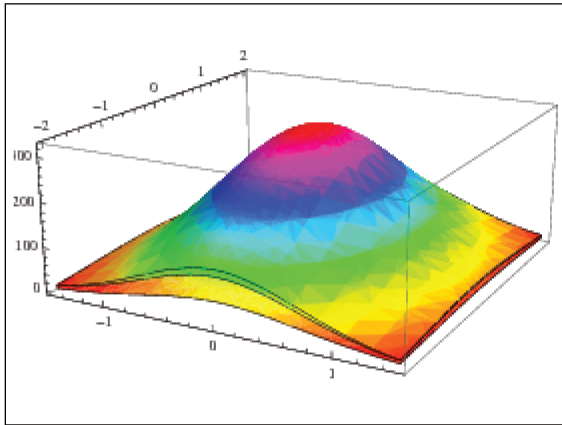


Figura 3.25: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 1$ envolvendo difusão-reação-advvecção para $(a, c) = (0, 0)$ e $b = 1$

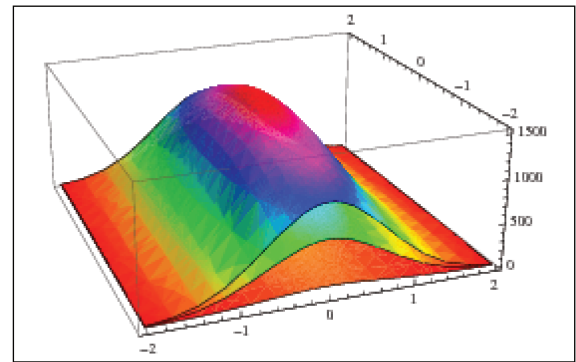


Figura 3.26: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 3$ envolvendo difusão-reação-advvecção para $(a, c) = (0, 0)$ e $b = 1$

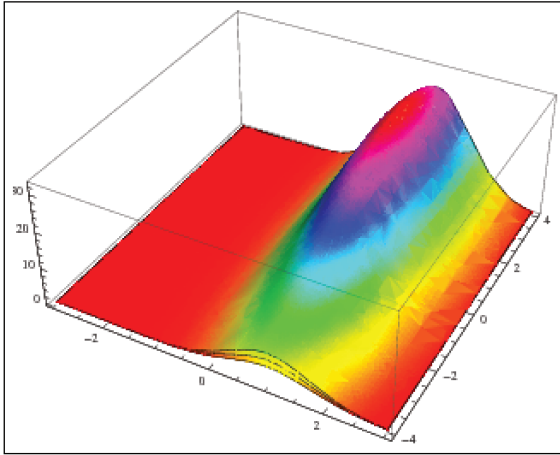


Figura 3.27: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 0.5$ envolvendo difusão-reação-advvecção para $(a, c) = (1, 2)$ e $b = 0$

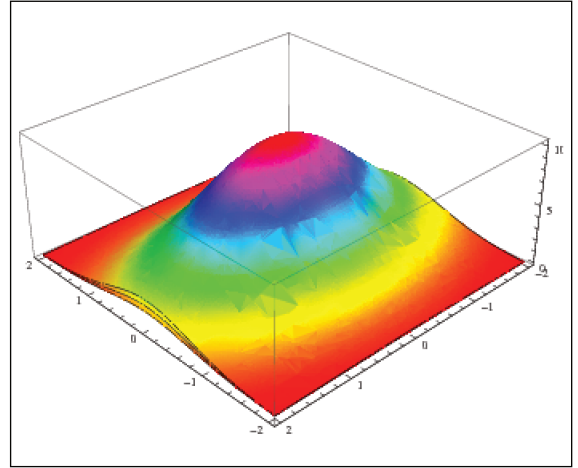


Figura 3.28: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 2$ envolvendo difusão-reação-advvecção para $(a, c) = (1, 2)$ e $b = 0$

3.4 Solução fuzzy da equação de difusão n -dimensional

Podemos encontrar resultados importantes que generalizam as propriedades de estabilidade e unicidade interessantes da teoria determinística. Para tal, considere o problema de valor inicial determinado pela equação

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = f(u(x, t)), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais, com $U \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso, consideremos $f(u(x, t)) = D\Delta u(x, t)$, o que caracteriza nossa equação como de difusão.

Sabemos que quando a função $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, então a solução para o problema determinístico existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$ e é única para valores de x em domínios limitados $U \subset \mathbb{R}^n$ ver Evans (1998). Assim, temos a solução determinística dada por

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} g(y) dy \quad (3.2)$$

Assim, em termos de modelos que simulem a realidade, queremos interpretar o problema acima da seguinte maneira: Temos o conhecimento da lei que rege o crescimento de uma certa variável, através da equação diferencial parcial de difusão, mas a condição inicial não é bem determinada, podendo ser conhecida só parcialmente, carregando

consigo um grau de incerteza. Apesar da lei ser determinística, a solução deve carregar as incertezas da condição inicial ao longo do tempo. Ou seja, queremos encontrar uma solução que satisfaça o problema de valor inicial fuzzy associado ao modelo determinístico dado em (3.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D\Delta u(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ u(x, 0) \in [\hat{g}(x)]^0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.3)$$

onde supomos que $[\hat{g}(x)]^\alpha = [g_1^\alpha(x), g_2^\alpha(x)]$.

Dessa forma, como a solução do problema é uma função contínua em x . Após, definimos a extensão de Zadeh da solução $\varphi_t(g(x))$ como a extensão de Zadeh da função $g(x) \rightarrow \varphi_t(g(x)) \rightarrow \varphi(t, g(x))$. Tal solução será denotada por $\hat{\varphi}_t(g(x))$, e escrevemos

$$\hat{\varphi}_t(x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} \hat{g}(y) dy \quad (3.4)$$

e seus α -níveis são definidos como sendo:

$$[\varphi_t(g(x))]^\alpha = \left[\frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} g_1^\alpha(y) dy, \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} g_2^\alpha(y) dy \right]$$

Com isso, estamos interessados em formalizar os resultados até agora expostos nessa secção. Para tal definiremos fluxo fuzzy C^∞ .

Definição 3.5. Dizemos que um fluxo fuzzy \hat{u} é de classe $C^\infty(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n))$ quando a função determinada por cada elemento de $[\hat{u}]^\alpha$ for de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.1. Seja $\hat{g}(x)$ tal que $[\hat{g}(x)]^\alpha = [g_1^\alpha(x), g_2^\alpha(x)]$. Suponha $g_1^\alpha, g_2^\alpha \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e defina \hat{u} como em (3.4). Então

- i. $\hat{u} \in C^\infty(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times (0, \infty))$,
- ii. $\hat{u}_t - D\Delta\hat{u}(x, t) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n, t > 0$),
- iii. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0)} \hat{u}(x, t) = \hat{g}(x^0)$ para cada ponto $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Prova: i. A função $\frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}$ é infinitamente diferenciável com derivadas limitadas de todas as ordens em $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty]$ para cada $\delta > 0$. Dessa forma cada $u_i^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ para cada $i = \{1, 2\}$. Portanto $\hat{u} \in C^\infty(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times (0, \infty))$.

ii. Como $\hat{u} = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$ e cada u_i^α é solução da equação de difusão n dimensional. Então \hat{u} resolve o problema ii).

iii. Considere $\hat{g} = [g_1^\alpha, g_2^\alpha]$ onde cada g_i^α é condição inicial para

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D\Delta(u_i^\alpha(x, t)) & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ u_i^\alpha(x, 0) = g_i^\alpha(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.5)$$

Dessa forma fixe $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ e escolha $\delta > 0$ tal que

$$|g_i^\alpha(y) - g_i^\alpha(x^0)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |y - x^0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Então se $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, temos

$$\begin{aligned} |u_i^\alpha(x, t) - g_i^\alpha(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} [g_i^\alpha(y) - g_i^\alpha(x^0)] dy \right| \\ &\leq \left| \int_{B(x^0, \delta)} \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} [g_i^\alpha(y) - g_i^\alpha(x^0)] dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} [g_i^\alpha(y) - g_i^\alpha(x^0)] dy \right| = I + J \end{aligned}$$

Mas temos que

$$I \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(Dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} dy = \epsilon$$

por (3.6). Mais ainda, se $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ e $|y - x^0| \geq \delta$, então

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

Assim $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$. Consequentemente

$$\begin{aligned} J &= 2 \|g_i^\alpha\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} dy \\ &\leq \frac{C}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} dy \\ &\leq \frac{C}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-x^0|^2}{16Dt}} dy \\ &= \frac{C}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} dr \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Assim, temos $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ e $t > 0$ teremos $|u_i^\alpha(x, t) - g_i^\alpha(x^0)| < 2\epsilon$ para todo α -nível e cada $i = \{1, 2\}$, portanto temos o resultado. ■

Observação 1. Note que se g_i^α é limitada, contínua e $g_i^\alpha > 0$ então

$$\hat{u}(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g_i^\alpha(y) dy$$

é positiva para todo α -nível e $\forall x \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$.

Vamos concentrar nossa atenção agora para o problema de valor inicial não-homogêneo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f & x \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = \hat{g} & x \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.7)$$

Para resolvermos esse problema é necessário que seja respondido a seguinte pergunta: Qual a fórmula para a solução do problema a seguir?

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f & x \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & x \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.8)$$

Para responder consideremos a solução do problema homogêneo. Notemos que a aplicação $(x, t) \rightarrow K(x - y, t - s)$ é uma solução da equação de difusão para $(y \in \mathbb{R}^n, 0 < s < t)$ dados. Agora para s fixo, a função

$$u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

resolve

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t; s) - D\Delta u(x, t; s) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(x, t; s) = f(x, t; s) & x \in \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases} \quad (3.9)$$

que é justamente o problema de valor inicial que tínhamos feito no início, ou seja é solução de (3.1) só que para $t = s$ e $g = f$. Então $u(\cdot; s)$ certamente não é solução de (3.9). Mas pelo princípio de Duhamel, podemos considerar

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds$$

Assim, reescrevemos na forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi D(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

para $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$. Agora podemos provar o teorema

Teorema 3.2. (Ver Evans (1998)) *Suponha u dada por (3.10) e $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ com suporte compacto. Então*

- (i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
- (ii) $u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$
- (iii) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = 0$ para cada ponto $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Prova: 1. Como K tem singularidade em $(0, 0)$, fazamos uma mudança de variáveis, para escrever

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) f(x - y, t - s) dy ds$$

Como $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ tem suporte compacto e $K = k(y, s)$ é suave próximo de $s = t > 0$, temos

$$u_t(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) f(x - y, 0) dy ds \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x - y, t - s) dy ds \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Então $u_t, D_x^2 u, u, D_x u$ pertencem a $C(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

2. Observemos que

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) [(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x) f(x - y, t - s)] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &\leq \int_{\epsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) [(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y) f(x - y, t - s)] dy ds \\ &\quad + \int_0^{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) [(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y) f(x - y, t - s)] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &:= I_{\epsilon} + J_{\epsilon} + K \end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora

$$|J_{\epsilon}| \leq (\|f_{\epsilon}\|_{L^{\infty}} + \|D^2 f\|_{L^{\infty}}) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) dy ds \leq \epsilon C \quad (3.13)$$

Por outro lado utilizando o Teorema de Green,

$$\begin{aligned} I_{\epsilon} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) [(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x) f(x - y, t - s)] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &\leq \int_{\epsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) [(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y) f(x - y, t - s)] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy - K \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como K resolve a equação de difusão temos que

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy \\ &= f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para provarmos a parte (iii) basta verificarmos que $\|u(x, t)\|_{L^\infty} \leq t\|f\|_{L^\infty} \rightarrow 0$

■

Nosso objetivo agora será combinar os dois teoremas anteriores para provar que \hat{u} , tem seus α -níveis dados da forma:

$$\begin{aligned} [\hat{u}]^\alpha &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) g_1^\alpha(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t - s) f(y, s) dy ds, \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) g_1^\alpha(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \right]^\alpha, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Seja solução do problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = \hat{g} & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.17)$$

Uma maneira de estudarmos o comportamento do fluxo fuzzy n -dimensional para a equação de difusão é utilizar o conceito de diâmetro de um α -nível de um número fuzzy, para tal, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 3.3. *Seja $\hat{\varphi}_t(g(x))$ um fluxo fuzzy dado por 3.4 e $[\varphi_t(g(x))]^\alpha$ seu α -nível. Então,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\text{diam}([\varphi_t(g(x))]^\alpha)) \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\text{diam}([g(y)]^\alpha)) dy, \quad t > 0$$

Em particular, $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{diam}([\varphi_t(g(x))]^\alpha) = 0$, isto é, $\text{diam}([\varphi_t(g(x))]^\alpha)$ converge uniformemente para zero, quando $t \rightarrow \infty$.

Prova:

Como $\text{diam}([g(y)]^\alpha) = g_2^\alpha(x) - g_1^\alpha(x) > 0$, então, podemos chamar $f(x) = g_2(x) - g_1(x)$. Assim, teremos que provar que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{diam}([\varphi_t(g(x))]^\alpha) \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy, \quad t > 0$$

que é verdade no caso determinístico para $\text{diam}([\varphi_t(g(x))]^\alpha) = \varphi_t^2(g(x)) - \varphi_t^1(g(x))$. Assim, segue o resultado.

■

Dessa forma, temos que nossa solução se comporta como a determinística para $t \rightarrow \infty$. Agora, vejamos o seguinte teorema de unicidade:

Teorema 3.4. (Unicidade) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ uma região limitada, assim se um problema de condição inicial fuzzy for dado por*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D\Delta u(x, t) + f(x), & x \in U \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ u(x, 0) \in \hat{g}(x) & U \times [t = 0] \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $g(x) \in C(U \times [t = 0])$ e $f(x) \in C(U \times (0, \infty))$, então o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(g(x))$ associado ao problema (3.2) é único para uma condição inicial fuzzy $\hat{g}(x)$ dada.

Prova:

Sejam u e v fluxos fuzzy associados ao problema 3.4, então defina $w = u - v$. Assim, temos que w resolve o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = D\Delta w(x, t) & x \in U \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ w(x, 0) = 0 & U \times [t = 0] \end{cases} \quad (3.19)$$

que é um problema determinístico e, pelo princípio do máximo, temos que o máximo valor de w é assumido na fronteira, logo $w = 0$, assim $u = v$.

■

Temos agora uma ferramenta importante no estudo de incertezas, que envolve a equação de difusão, pois sabemos que limitando nosso domínio convenientemente teremos solução única para problemas que envolvam difusão. Além disso, a estabilidade dessa solução está garantida e funciona como na determinística, conservando o seu grau de incerteza. Podemos estender esses resultados, como exemplo disso podemos enunciar o princípio do máximo para o problema de Cauchy.

Teorema 3.5. *Suponhamos que $\hat{u} \in C_1^2(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times (0, T])) \cap C(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times (0, T]))$ é solução do problema*

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = \hat{g} & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.20)$$

e satisfaz a estimativa

$$u_i^\alpha(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \quad (3.21)$$

para constantes $A, a > 0$ e $[\hat{u}]^\alpha$. Então

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} \hat{u} = \sup_{\mathbb{R}^n} \hat{g} \quad (3.22)$$

Prova: Suponha que

$$4aT < 1 \quad (3.23)$$

dessa forma podemos supor que

$$4a(T + \epsilon) < 1 \quad (3.24)$$

para algum $\epsilon > 0$. Fixe $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$, e defina

$$v_i^\alpha(x, t) := u_i^\alpha(x, t) - \frac{\mu}{(D(T + \epsilon - t))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-\epsilon-t)D}} \quad (3.25)$$

Um cálculo direto mostra que

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial t} - D\Delta v_i^\alpha = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, T) \quad (3.26)$$

Fixado $r > 0$ e $U := B^0(y, r), U_T = B^0(y, r) \times (0, T]$. Assim, de acordo com o teorema do máximo temos

$$\sup_{U_T} v_i^\alpha = \max_{\Gamma_T} v_i^\alpha \quad (3.27)$$

onde Γ_T é a fronteira de U_T .

Agora se $x \in \mathbb{R}^n$,

$$v_i^\alpha(x, 0) = u_i^\alpha(x, 0) - \frac{\mu}{(D(T + \epsilon - t))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-\epsilon-t)D}} \leq u_i^\alpha(x, 0) = g_i^\alpha(x, 0) \quad (3.28)$$

e se $|x - y| = r, 0 \leq t \leq T$, então

$$\begin{aligned} v_i^\alpha(x, t) &= u_i^\alpha(x, t) - \frac{\mu}{(D(T+\epsilon-t))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-\epsilon-t)D}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(D(T+\epsilon-t))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-\epsilon-t)D}} \\ &\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(D(T+\epsilon))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-\epsilon)D}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora, como $4D(T + \epsilon) < 1$ então $\frac{1}{4(T+\epsilon)D} = a + \gamma$ para algum $\gamma > 0$. Dessa forma temos

$$v_i^\alpha(x, t) \leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a + \gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g_i^\alpha \quad (3.30)$$

para um r suficientemente grande. Dessa forma,

$$v_i^\alpha(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g_i^\alpha \quad (3.31)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$ pois $4aT < 1$. Seja $\mu \rightarrow 0$, então $4aT < 1$ pode não valer! Então para isso apliquemos repetidamente os intervalos $[0, T_1], [T_1, 2T_1], \text{ etc, para } T_1 = \frac{1}{8a}$

■

Com esses resultados podemos provar o teorema de unicidade que segue

Teorema 3.6. *Seja $\hat{g} \in C(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n))$, $f \in C(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times [0, T]))$. Então existe uma única solução $\hat{u} \in C(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times [0, T])) \cap C(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times [0, T)))$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f & \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = \hat{g} & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.32)$$

satisfazendo a estimativa de crescimento

$$u_i^\alpha(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \quad (3.33)$$

para constantes $A, a > 0$

Prova: Se \hat{u} e \hat{v} satisfazem (3.32) e (3.33), defina $\hat{w} := \pm\hat{u} - \hat{v}$, assim, aplicando o teorema 3.6 em \hat{w} tem-se o resultado.

■

Capítulo 4

Equação de difusão-reação-advecção fuzzy com coeficiente de difusão D dependente do tempo.

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a solução de uma equação de difusão-reação-advecção onde o coeficiente de difusão varia com o tempo, isto é D é uma função de t , e a condição inicial do problema é fuzzy.

A equação de difusão unidimensional associada é determinada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

Se o coeficiente de difusão for dependente do tempo t , isto é, D é uma função da variável t , mas independentes de outras variáveis, podemos definir uma nova variável independente T através de

$$dT = D(t) dt$$

isto é

$$T = \int_0^t D(k) dk$$

fornecendo uma relação entre T e t que depende da forma de $D(t)$. Uma vez que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T} D(t)$$

temos que, a partir de (4.1) que

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

que é uma equação de difusão com coeficiente de difusão constante e igual a 1, para $u(x, T)$.

Se a condição inicial para $u(x, T = 0)$ for $u(x, 0) = u_0\delta(x - x_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ onde u_0 denota o número total de indivíduos no tempo $T = 0$, concentrados inicialmente em $x = x_0$ e espalhando-se em um espaço de dimensão 1 ilimitado, podemos escrever

$$u(x, T) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi T}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4T}} \quad (4.3)$$

Assim, as soluções para D constantes podem ser usadas para $u(x, T)$ como função de x e T e depois passa-se de T para t através de $T = \int_0^t D(k) dk$, que depende da forma de $D(t)$. Se a integral $\int_0^t D(k) dk$ não puder ser calculada formalmente a relação entre T e t deverá ser obtida graficamente ou por integração numérica.

Para considerarmos por exemplo que $D(t)$ diminua com o tempo, escolheremos $D(t) = D_0e^{-t}$, onde D_0 é o valor inicial de D em $t = 0$, assim

$$T = \int_0^t D e^{-k} dk = D_0(1 - e^{-t}) \quad (4.4)$$

e a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_0 e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) &= u_0 \delta(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é dada pela equação 4.5.

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi D_0(1 - e^{-t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1 - e^{-t})}} \quad (4.5)$$

Representamos graficamente, na Figura 4.1, o comportamento do coeficiente de difusão $D(t) = D_0e^{-t}$, com $D_0 = 1$, e observamos que ele cai a zero rapidamente. Na Figura 4.2 representamos a solução (4.5), no plano (x, u) para $D_0 = 1$ em diversos tempos $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 5$, $t_5 = 7$.

Observamos que para $D = D(t)$ a população u dispersa-se à medida que o tempo passa, porém interrompe esse procedimento, aproximadamente, em $t = 5$. Para tempos maiores que esse valor, o comportamento da solução é igual ao comportamento observado em $t = 5$. Isto está de acordo com a Figura 4.1 que, em $t = 5$, apresenta $D(t)$ aproximadamente zero.

Dessa forma, se compararmos o modelo de difusão com coeficiente de difusão dependente do tempo com o modelo de difusão com coeficiente constante igual a metade da condição inicial do anterior, por exemplo 0.5. Teremos que para $t = 1$, a dispersão é maior para o coeficiente de difusão dependente do tempo $D(t)$, entretanto, à medida que o tempo passa, o modelo com coeficiente constante produz um maior espalhamento da população. Isto se justifica pela forma do coeficiente de difusão, isto é, enquanto um coeficiente decai exponencialmente, à medida que o tempo passa, o outro se mantém constante.

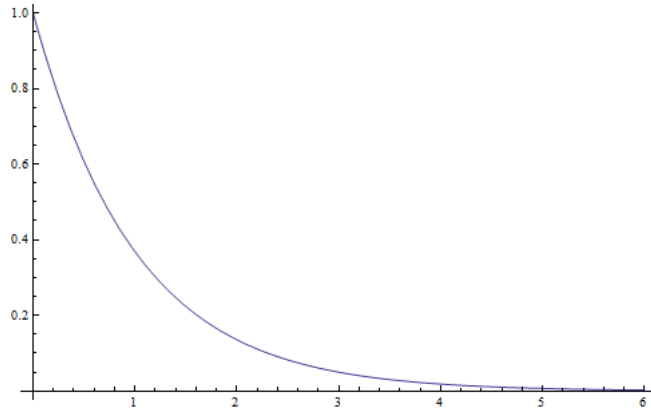


Figura 4.1: Gráfico de $D(t)$, para $D_0 = 1$

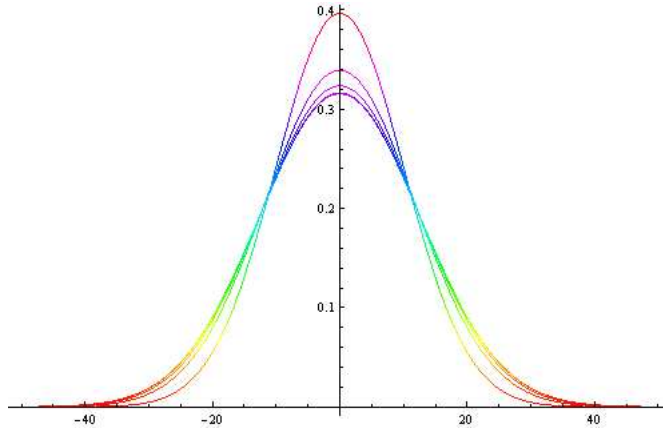


Figura 4.2: Gráfico (x, u) da solução (4.5) para alguns valores de t

Dessa forma, se considerarmos que u_0 é um número fuzzy com α -nível dado por $[u_0]^\alpha = [\underline{u}_0^\alpha, \bar{u}_0^\alpha]$. Assim a os α -níveis da solução fuzzy associado ao problema (4.5) é dado por:

$$[u(x, t)]^\alpha = \frac{[u_0]^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0 (1 - e^{-t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1-e^{-t})}} \quad (4.6)$$

que também pode ser escrito da forma

$$[u(x, t)]^\alpha = \left[\frac{\underline{u}_0^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0 (1 - e^{-t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1-e^{-t})}}, \frac{\bar{u}_0^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0 (1 - e^{-t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1-e^{-t})}} \right]$$

e temos que sua representação gráfica é dada pela Figura 4.3.

Que vista de um outro ângulo, nos faz observar que para $D_0 = 0,5$ a população u dispersa a medida que o tempo passa, porém temos que a partir de um certo momento

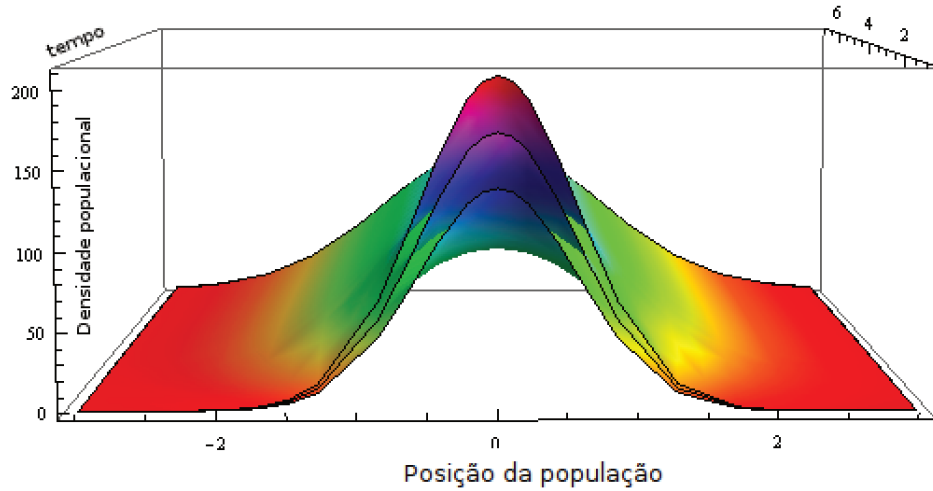


Figura 4.3: Gráfico de $D(t)$, para $D_0 = 1$

essa dispersão diminui até o ponto de parar, ou seja $D(t) = 0$, como é bem vista na Figura 4.4.

Crank (1975) apresenta um problema que envolve a equação da difusão com coeficiente de difusão de partículas $D(t) = D_0 e^{-t}$ e com termo fonte que decai exponencialmente com o tempo, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{cases} D(t) = D(0)e^{-t}, \\ f(t) = \alpha e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Se, além da definição da variável T através da equação (4.4), definimos uma nova variável dependente através de

$$q = 1 - e^{-\alpha t} - u, \quad (4.8)$$

a equação diferencial (4.7) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (4.9)$$

para $q(x, T)$.

Supondo que u_0 partículas sejam liberadas no tempo $t = 0$, em $x = x_0$, a condição inicial é dada por

$$u(x, 0) = u_0 \delta(x - x_0). \quad (4.10)$$

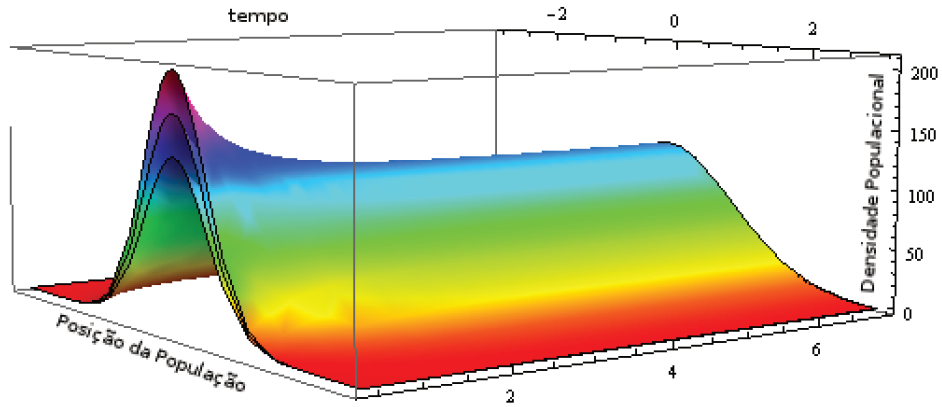


Figura 4.4: Gráfico de $D(t)$, para $D_0 = 1$

Usando (4.8), a condição inicial para $q(x, T)$ é:

$$q(x, 0) = -u_0\delta(x - x_0), \quad (4.11)$$

e portanto a solução de (4.9) é dada por

$$q(x, T) = -\frac{u_0}{\sqrt{4\pi T}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4T}}, \quad (4.12)$$

Por outro lado temos que $T = D_0(1 - e^{-t}) = D_0 - D(t)$, que nos permite voltar a variável inicial t como segue:

$$q(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{4\pi(D_0 - D(t))}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(D_0 - D(t))}}, \quad (4.13)$$

e substituindo em (4.8) temos

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{4\pi D_0(1 - e^{-t})}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0D_0(1 - e^{-t})}} + 1 - e^{\alpha t}, \quad (4.14)$$

4.1 Modelo Fuzzy associado

Se considerarmos que a condição inicial seja incerta, consideremos u_0 um número fuzzy, utilizando o princípio da extensão de Zadeh para encontrarmos \hat{u} e considerando

que $[\hat{u}_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]$ temos que

$$\hat{u}(x, T) = -\frac{\hat{u}_0}{\sqrt{4\pi D_0(1-e^{-t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1-e^{-t})}} + 1 - e^{\alpha t}, \quad (4.15)$$

Dessa forma, podemos definir os α -níveis de \hat{u} da forma

$$[\hat{u}(x, t)]^\alpha = \left[\frac{\underline{u}_{01}^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0(1-e^{-t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1-e^{-t})}} + 1 - e^{\alpha t}, \frac{\bar{u}_{02}^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0(1-e^{-t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1-e^{-t})}} + 1 - e^{\alpha t} \right]$$

que tem como representação gráfica a Figura 4.5.

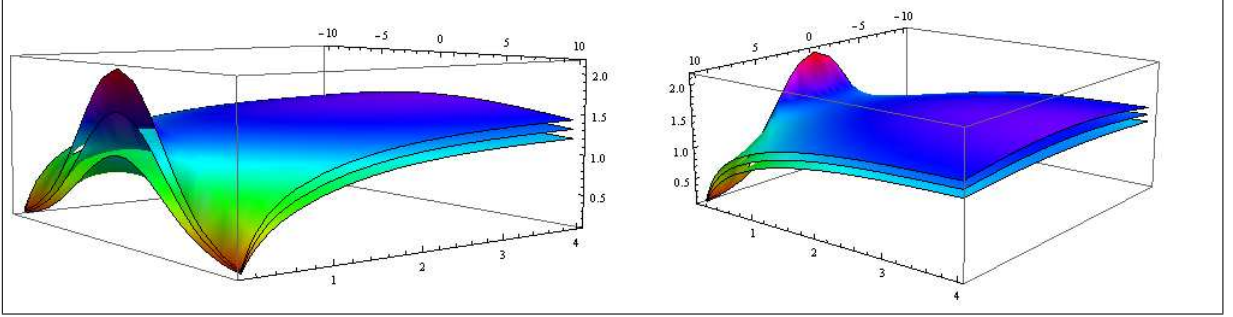


Figura 4.5: Gráfico da solução fuzzy (4.15) para $D_0 = 1$ e $\alpha = 0.5$

Observe que neste caso temos que a condição inicial fuzzy dada por $[1; 1, 5; 2]$.

4.2 Solução fuzzy com coeficiente variável e reprodução Malthusiana

Procuraremos aqui descrever uma solução fuzzy para o caso em que os indivíduos se reproduzam de forma malthusiana, ou seja, temos que para algum $\alpha > 0$ a solução fuzzy será dada por

$$[u(x, t)]^\alpha = \frac{[u_0]^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0(1-e^{\alpha t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0(1-e^{\alpha t})} + \alpha t} \quad (4.16)$$

ou seja estamos interessados em encontrar solução fuzzy relacionado ao problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_0 e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tu \\ u(x, 0) &= u_0 \delta(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

assim, temos o gráfico da solução dado pela Figura 4.6.

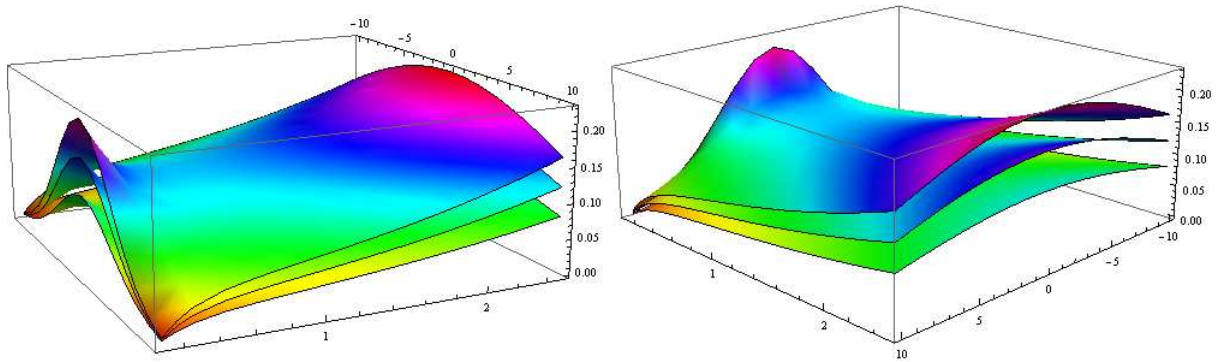


Figura 4.6: Gráfico da solução fuzzy para $\alpha = 0.5$

Observemos que neste caso, temos que a solução se comporta como a do caso cujo o coeficiente de difusão é constante, pois o sistema de reprodução malthusiano a partir de determinado momento se torna muito instável, ou seja a reprodução se torna muito elevada.

No caso em que consideramos um termo advectivo, ou seja, estamos estudando uma solução da forma

$$[u(x, t)]^\alpha = \frac{[u_0]^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0(1 - e^{\alpha t})}} e^{-\frac{(x-x_0-at)^2}{4D_0(1-e^{\alpha t})} + \alpha t} \quad (4.17)$$

e teremos como representação gráfica a Figura 4.7 que é a representação gráfica do problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_0 e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + tu \\ u(x, 0) &= u_0 \delta(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

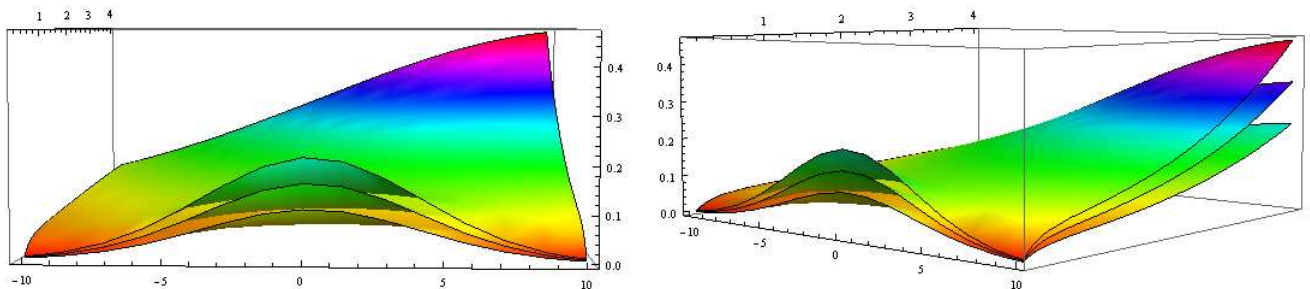


Figura 4.7: Gráfico da solução fuzzy (4.17) para $\alpha = 0.5$ e $a = 6$.

4.3 Solução fuzzy da equação unidimensional de difusão no instante $t = t^*$

De início, mostraremos a evolução da solução fuzzy unidimensional envolvendo apenas difusão, onde o mesmo é dada por uma função decrescente dependente do tempo. Para isso, mostraremos as intersecções dos α -níveis da solução com um plano qualquer $t = t^*$. Uma característica fundamental da solução fuzzy da equação de difusão fuzzy é que a mesma se mostra ineficaz para um tempo grande sendo necessário ser incorporado mais informações a respeito do fenômeno estudado. Vale resaltar a estabilidade dessa solução, uma vez que para $t \rightarrow \infty$ temos que a solução fuzzy converge para zero.

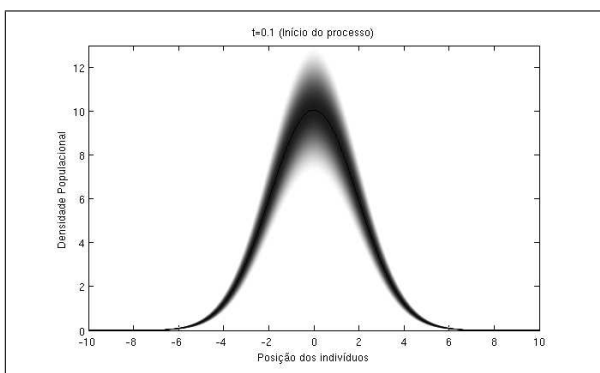


Figura 4.8: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.1$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

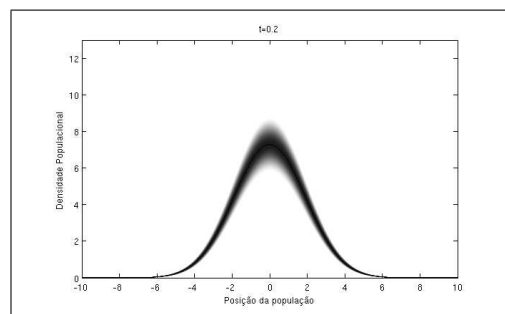


Figura 4.9: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.2$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

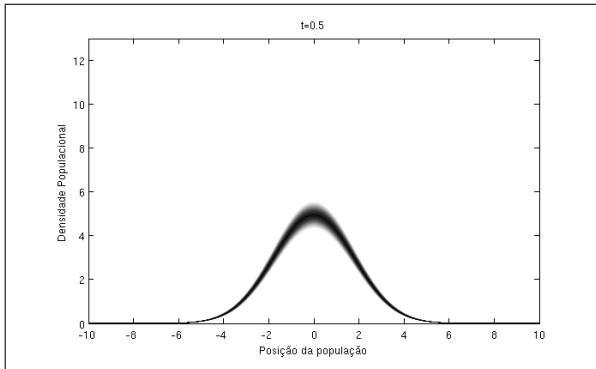


Figura 4.10: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.5$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

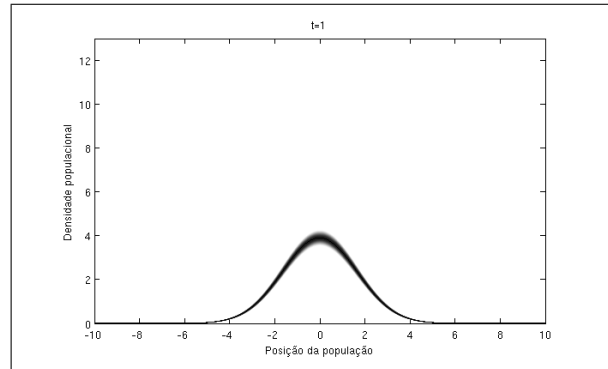


Figura 4.11: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 1$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

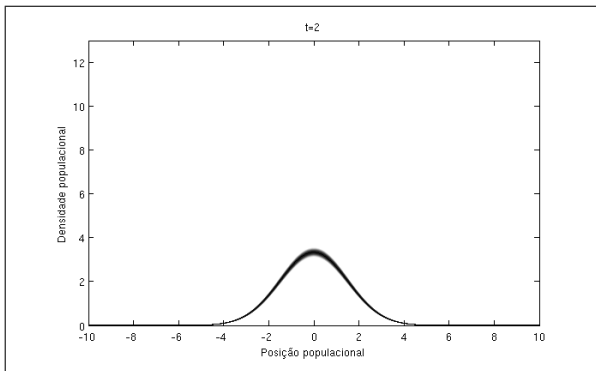


Figura 4.12: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 2$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

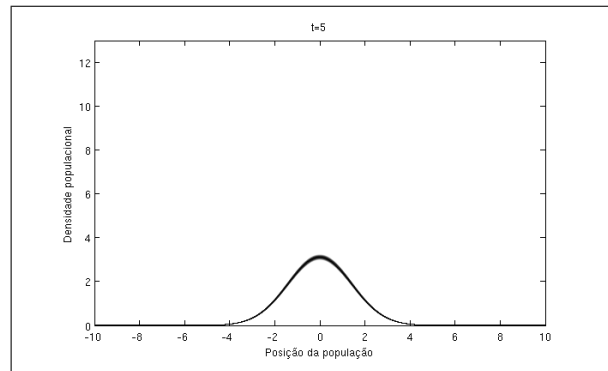


Figura 4.13: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 5$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

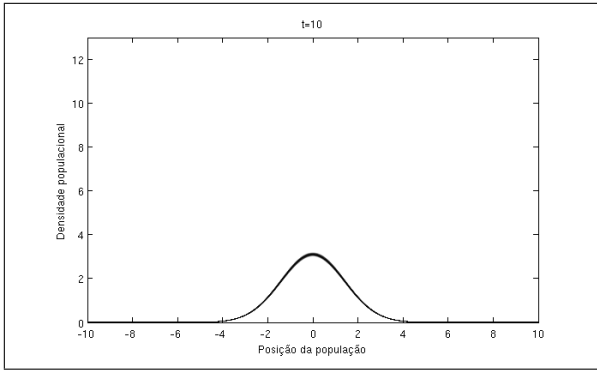


Figura 4.14: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 100$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

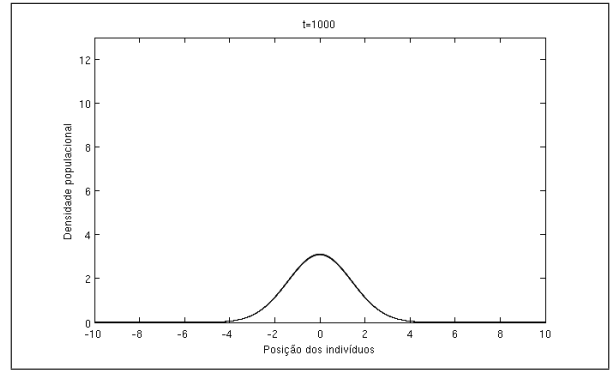


Figura 4.15: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 1000$ envolvendo apenas difusão com $D = e^{-t}$.

4.4 Solução fuzzy da equação unidimensional de difusão-reação-advecção no instante $t = t^*$

Mostraremos agora, a evolução da solução fuzzy unidimensional envolvendo difusão-reação-advecção.

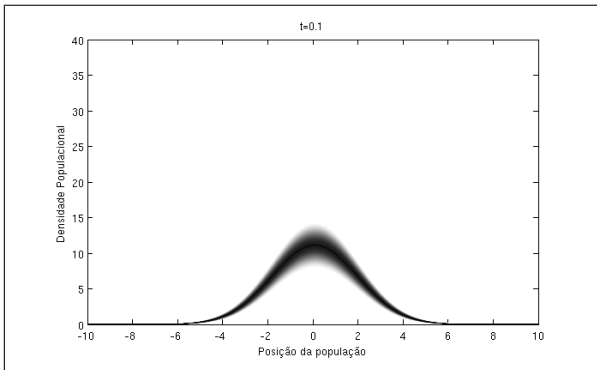


Figura 4.16: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.1$ envolvendo difusão-reação-advecção para $b = 1$ e $a = 2$.

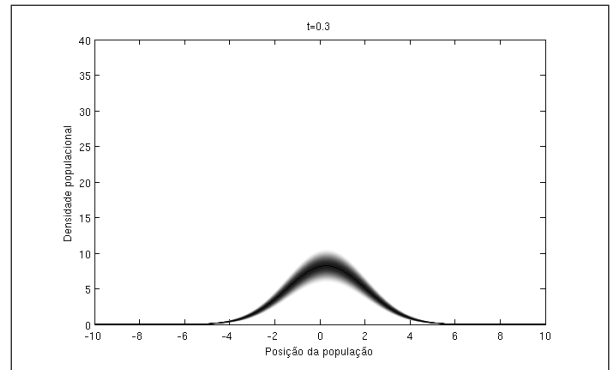


Figura 4.17: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.3$ envolvendo difusão-reação-advecção para $b = 1$ e $a = 2$.

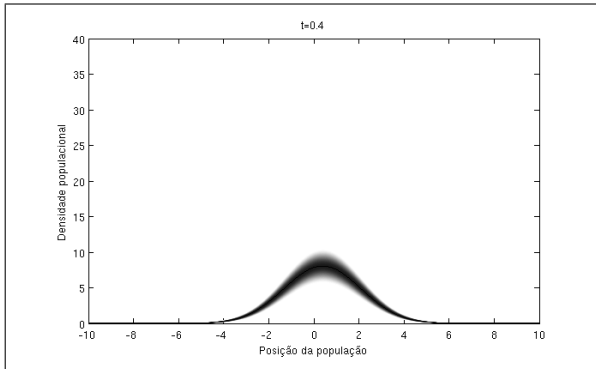


Figura 4.18: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.4$ envolvendo difusão-reação-advecção para $b = 1$ e $a = 2$.

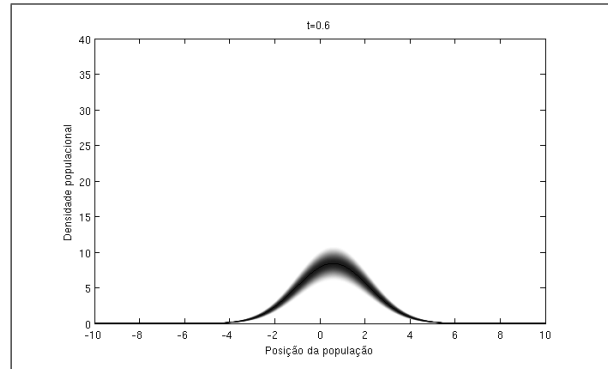


Figura 4.19: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.6$ envolvendo difusão-reação-advecção para $b = 1$ e $a = 2$.

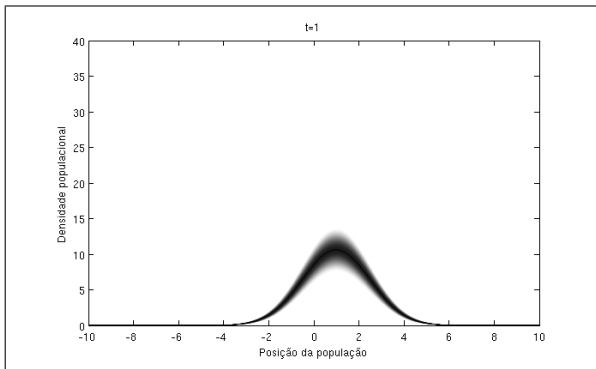


Figura 4.20: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.4$ envolvendo difusão-reação-advecção para $b = 1$ e $a = 2$.

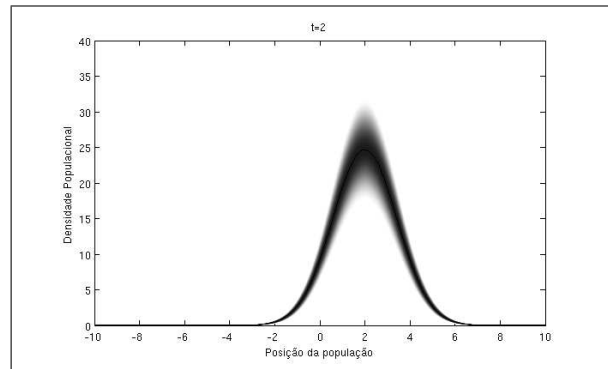


Figura 4.21: Gráfico da solução fuzzy unidimensional para $t = 0.6$ envolvendo difusão-reação-advecção para $b = 1$ e $a = 2$.

4.5 Solução bidimensional da equação de difusão-reação-advecção com coeficiente dependente do tempo

4.5.1 Solução bidimensional da equação de difusão fuzzy

Consideremos agora que os indivíduos se movimentem no plano com coeficiente de difusão dependente do tempo e condição inicial incerta, ou seja, estamos interessados em resolver o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_0 e^{-t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u(x, y, 0) &= \hat{u}_0 \delta(x - x_0, y - y_0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

que tem como solução fuzzy associado ao problema anterior, utilizando o princípio da extensão de Zadeh, a expressão

$$[\hat{u}(x, t)]^\alpha = \frac{[u_0]^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0(1 - e^{-\alpha t})}} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4D_0(1 - e^{-\alpha t})}} \quad (4.18)$$

onde \hat{u}_0 é um número fuzzy. Neste caso, apenas podemos ter uma representação tridimensional do problema, utilizando para isso a projeção da solução no plano $t = t^*$ conforme as figuras (4.22), (4.23), (4.24) e (4.25).

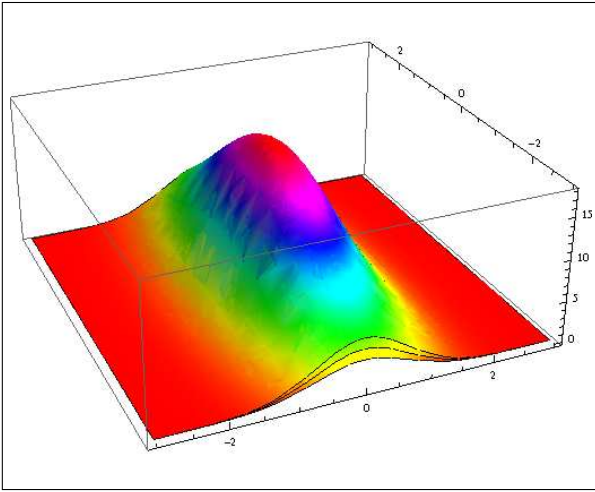


Figura 4.22: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 1$ e $D(t) = e^{-t}$ envolvendo apenas difusão.

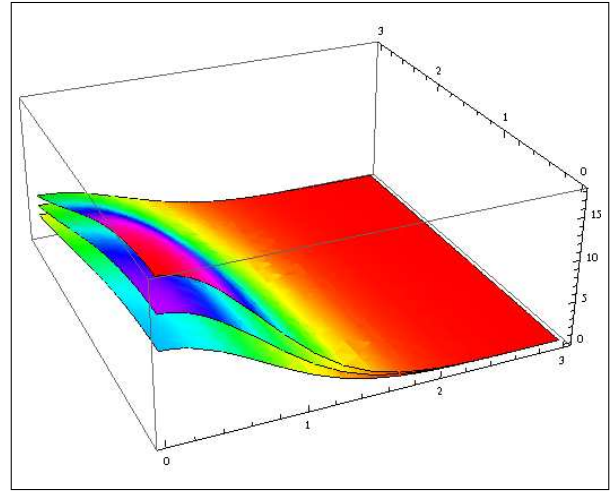


Figura 4.23: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 1$ e $D(t) = e^{-t}$ envolvendo apenas difusão.

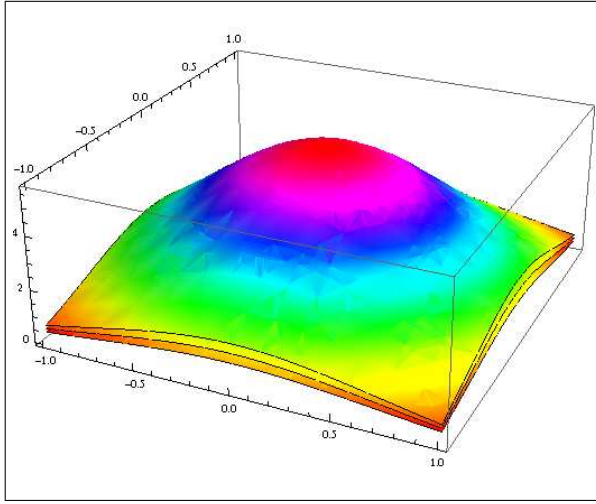


Figura 4.24: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 10$ e $D(t) = e^{-t}$ envolvendo apenas difusão.

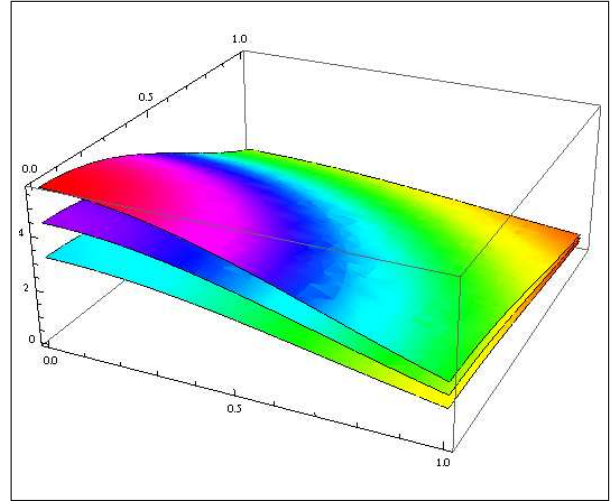


Figura 4.25: Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 10$ e $D(t) = e^{-t}$ envolvendo apenas difusão.

4.5.2 Solução bidimensional da equação de difusão-reação-advecção fuzzy

Da mesma forma que na secção anterior estamos interessados em encontrar uma representação gráfica de uma solução fuzzy em que a condição inicial é incerta e o processo ocorre envolvendo difusão-reação-advecção, ou seja estamos interessados em resolver o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_0 e^{-t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) (x, t) + cu(x, t) \\ u(x, y, 0) &= \hat{u}_0 \delta(x - x_0, y - y_0), \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

que tem como solução fuzzy associado ao problema anterior, utilizando o princípio da extensão de Zadeh, a expressão

$$[\hat{u}(x, t)]^\alpha = \frac{[u_0]^\alpha}{\sqrt{4\pi D_0 (1 - e^{\alpha t})}} e^{-\frac{(x-x_0-at)^2 + (y-y_0-bt)^2}{4D_0(1-e^{\alpha t})} + ct} \quad (4.19)$$

onde \hat{u}_0 é um número fuzzy. Neste caso, apenas podemos ter um representação tridimensional do problema, utilizando para isso a projecção da solução no plano $t = t^*$ conforme as figuras (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29).

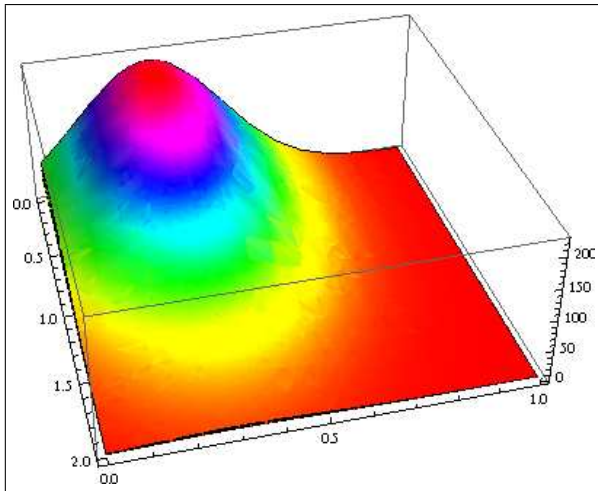


Figura 4.26: Gráfico da solução fuzzy bi-dimensional para $t = 0.1$, $D(t) = 2e^{-t}$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ e $[\hat{u}_0]^\alpha = [50 \ 70 \ 90]$.

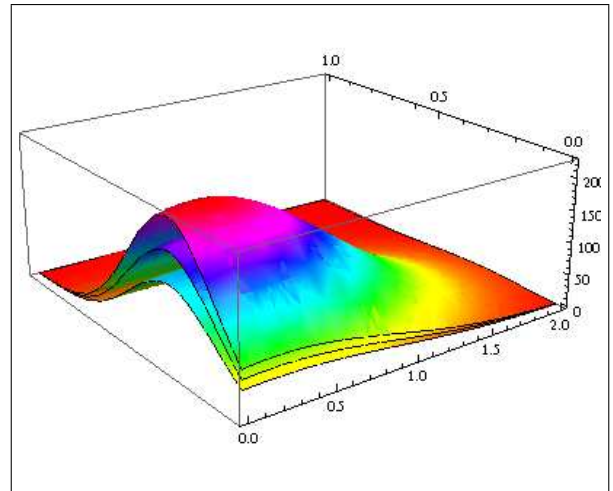


Figura 4.27: Gráfico da solução fuzzy bi-dimensional para $t = 0.1$, $D(t) = 2e^{-t}$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ e $[\hat{u}_0]^\alpha = [50 \ 70 \ 90]$.

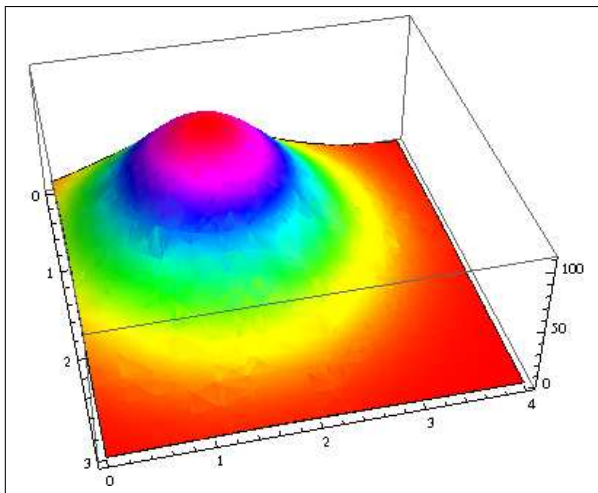


Figura 4.28: Gráfico da solução fuzzy bi-dimensional para $t = 0.5$, $D(t) = 2e^{-t}$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ e $[\hat{u}_0]^\alpha = [50; 70; 90]$.

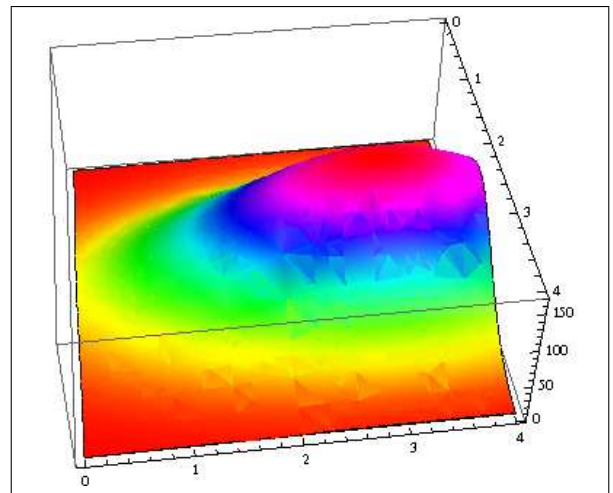


Figura 4.29: Gráfico da solução fuzzy bi-dimensional para $t = 1$, $D(t) = 2e^{-t}$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ e $[\hat{u}_0]^\alpha = [50; 70; 90]$.

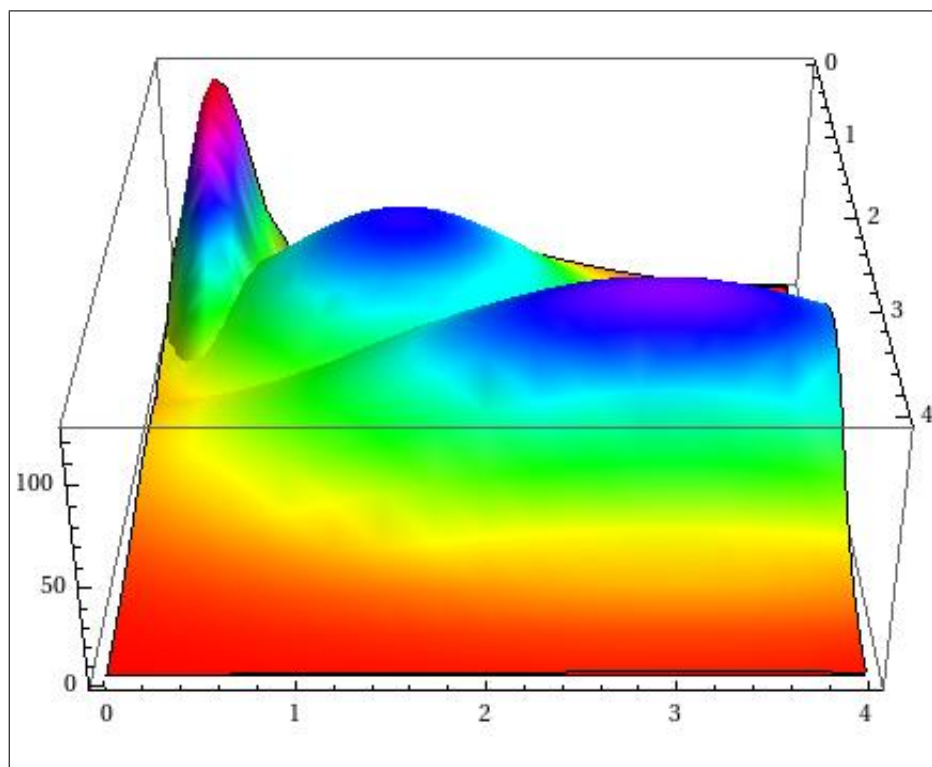


Figura 4.30: União dos gráficos das soluções fuzzy para $t = 0.1$, $t = 0.5$ e $t = 1$.

Capítulo 5

Equação de difusão via base de regras: Modelos p-fuzzy

5.1 Introdução

As equações diferenciais e de diferenças determinísticas constituem uma poderosa ferramenta para a modelagem de fenômenos cujas as variáveis de estados estão sujeitas às variações ao longo do tempo. No entanto, para a modelagem determinística ser eficiente é necessário que tenhamos um conhecimento um tanto profundo das relações existentes entre as variáveis e suas variações. É o conhecimento do fenômeno que torna possível a escolha das funções que determinam as variações com relação ao estado (valor) da variável. Em muitas situações porém, esta relação entre variáveis e variações é somente conhecida parcialmente, o que torna a modelagem determinística menos aplicável.

Por outro lado, a modelagem através de equações variacionais fuzzy embora comportando subjetividades, também não são aplicáveis à modelagem de fenômenos com relações parcialmente conhecidas pelo fato de que estes modelos são provenientes de modelos determinísticos. A subjetividade suportada pelas equações fuzzy se refere à imprecisões quanto aos estados iniciais das variáveis (*fuzziness demográfica*) e parâmetros (*fuzziness ambiental*). De modo geral, ambos os tipos de fuzziness estão presentes em equações de dinâmica populacional.

Pouco trabalhos são encontrados na literatura a respeito de EDP fuzzy. Podemos citar alguns deles: Em (Ricard et al. (2005b), Ricard et al. (2005a)) foi utilizado sistemas p-fuzzy para estimar parâmetros de uma equação diferencial parcial que descrevia doenças com transmissão direta do tipo SIS. Em (Missio (2008)) foi proposto uma metodologia para estudar a evolução espacial e temporal da febre aftosa em bovinos, a qual pode ser adaptada para fenômenos cujos aspectos de incertezas são importantes na sua dinâmica. O modelo de EDP, tratado em Missio (2008) é compartimental do tipo SIR com dispersão local incerta. As incertezas da dispersão local, dada pelos coeficientes de difusão, são

modeladas pela metodologia de controladores fuzzy.

Neste capítulo, propomos um sistema p-fuzzy que simula a dispersão dos indivíduos onde seus movimentos de difusão são formuladas por meio de regras intuitivas

Consideramos que esse processo ocorra dependendo de apenas dois fatores: tempo e espaço, uma vez que o coeficiente de difusão é dado. Para os casos em que o coeficiente de difusão é incerto, também podemos utilizar regras fuzzy que simulem a dispersão espacial dependendo da variação do tempo e de um ponto do espaço dado.

Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo portanto uma ferramenta muito útil para modelagem de fenômenos cujo comportamento é somente parcialmente conhecido.

5.2 Sistemas baseado em regras fuzzy: Controlador de Mamdani

Os sistemas fuzzy são, em geral, o resultado de uma generalização dos sistemas clássicos, ou seja, nessa abordagem os conceitos incertos são incorporados a esses sistemas. Uma característica central dos sistemas fuzzy é que eles são baseados no conceito de partição fuzzy das informações. A utilização de conjuntos fuzzy permite uma generalização da informação, que está associada com a introdução da imprecisão do desconhecimento dos fenômenos. Em essência, a representação da informação nos sistemas fuzzy procura imitar o processo de raciocínio humano, considerando conhecimentos heurísticos e cruzando informações a princípio desconectadas.

Os sistemas baseados em regras fuzzy têm como base um conjunto de regras do tipo **Se-Então**, cujos predicados são subjetivos. Neste tipo de sistemas, as quantidades estão associadas a termos linguísticos, sendo o sistema fuzzy essencialmente uma expressão qualitativa do fenômeno em estudo. Esse tipo de sistema é baseado na utilização da linguagem natural para descrever o comportamento dos fenômenos. Os termos linguísticos são usados para expressar conceitos e conhecimentos na comunicação humana, e em muitas áreas eles são uma forma importante de quantificar os dados. O uso de termos linguísticos é frequente no cotidiano de cada pessoa. Diz-se que “*O dia está muito quente*”, “*O ônibus estava lotado*”, “*Tal pessoa é alta, magra*” etc. Todos estes termos possuem um significado e transmitem uma determinada informação.

Uma variável linguística fuzzy X num conjunto universo U é uma variável cujos valores são expressos qualitativamente por termos linguísticos e quantitativamente por uma função de pertinência. Ou seja, é uma variável cujos valores assumidos por ela são subconjuntos fuzzy de U . Uma variável linguística é caracterizada por nome da variável (temperatura, pressão, febre, etc.); conjunto de termos linguísticos (elevado, baixo, pouco,

extenso, etc.); domínio de valores da variável sobre o qual o significado do termo linguístico é determinado.

A Figura (5.1) ilustra um exemplo de variável linguística, cujo nome é Febre. Seus termos linguísticos são baixa, média e alta, o domínio é o intervalo $[36, 40]$ e cada termo linguístico tem a ele associado um conjunto fuzzy que o caracteriza. É importante notar

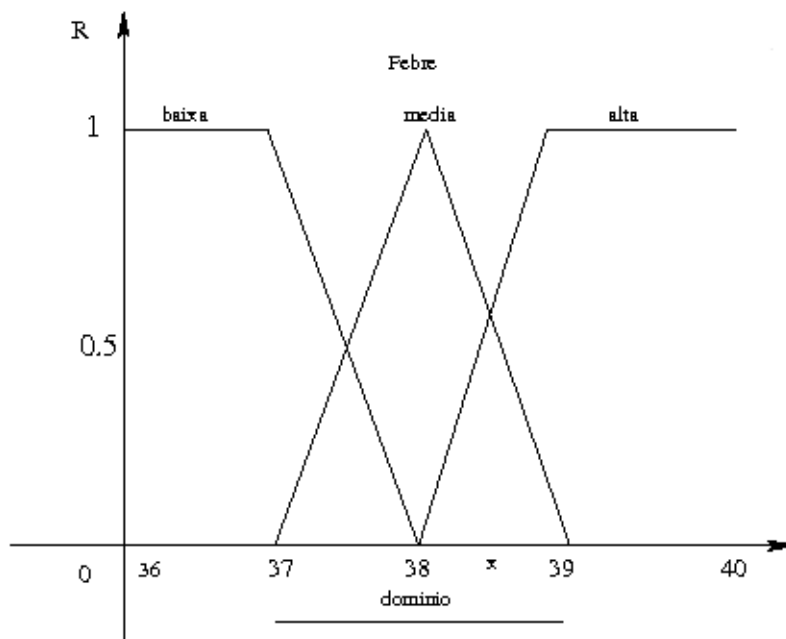


Figura 5.1: Variáveis linguísticas

que a variável linguística é expressa em termos de uma variável básica, ou seja, dentro de um certo domínio de valores, que denota a sua medida. Nesse exemplo, a febre é medida em graus centígrados (temperatura). Esta medida pode ser quantitativa, no caso em que é possível o uso de aparelhos de medida. Em geral, é o especialista que define o domínio da variável e realiza sua partição fuzzy. Nesse contexto, o papel do especialista torna-se fundamental na modelagem fuzzy.

Também é importante definir o que são as Regras Fuzzy. Podemos definir como estruturas da forma Se {antecedentes} Então {consequentes} utilizadas para descrever situações específicas que podem ser submetidas à análise de um painel de especialistas e, cuja inferência conduz a algum resultado desejado. Os antecedentes definem uma região fuzzy no espaço das variáveis de entrada do sistema e descrevem uma condição, enquanto os consequentes definem uma região no espaço das variáveis de saída do sistema e descrevem uma conclusão ou uma ação que pode ser esboçada quando as premissas se verificam. A regra fuzzy é uma unidade capaz de capturar algum conhecimento específico.

Um conjunto de regras (ou Base de Regras) é capaz de descrever um sistema em suas

várias possibilidades, cumprindo o papel de “traduzir” matematicamente informações que formam a base de conhecimentos do sistema fuzzy. Os sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF) possuem quatro módulos: módulo de fuzzificação; módulo da base de regras linguísticas; módulo de inferência fuzzy e módulo de defuzzificação. Estes módulos estão conectados conforme indicado na Figura 5.2.

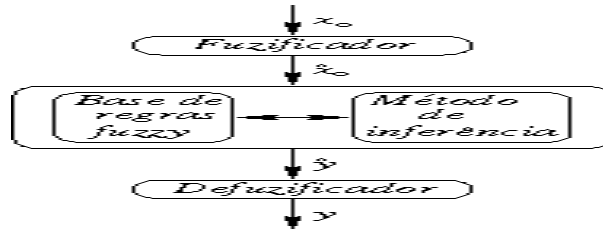


Figura 5.2: Estrutura de funcionamento de um sistema p-fuzzy

Variáveis linguísticas são variáveis de estado que quantitativamente são expressas por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy representam os estados da variável que, em geral, são expressos por valores subjetivos como *pequeno*, *muito alto* e etc. Por exemplo, supondo que a variável linguística seja *população*, seus estados subjetivamente podem ser *baixa*, *média* e *alta*. Os termos subjetivos que determinam os estados das variáveis são denominados *termos linguísticos*. Os termos linguísticos são importantes para a modelagem pois definem os estados das variáveis. Quanto mais termos linguísticos, mais precisos estão os estados assumidos pelas variáveis.

Um *Sistema baseado em regras fuzzy* é constituído basicamente por um *fuzzificador*, uma *base de regras*, um *método de inferência* e um *defuzzificador*. No *fuzzificador* cada entrada do sistema é transformada em um conjunto fuzzy, ou seja, se $x_o \in \mathbb{R}^n$ é uma entrada do sistema, o fuzzificador associa a esta entrada uma função de pertinência $\mu_{x_o}(a)$. Em muitos casos, a função $\mu_{x_o}(a)$ é a própria função característica de x_o .

A *base de regras* é um conjunto formado por regras fuzzy que relaciona os termos linguísticos das variáveis de entrada e saída. A base de regras é considerada como um elemento integrante do núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base satisfaz a seguinte estrutura:

$$\text{SE } a \text{ está em } A_i \text{ ENTÃO } b \text{ está em } B_i.$$

onde A_i e B_i são conjuntos fuzzy que representam termos linguísticos das variáveis de entrada e saída respectivamente. A expressão *a está em A_i* significa que $\mu_{A_i}(a) \in [0, 1]$. Tanto o conjunto fuzzy A_i quanto B_i podem ser um produtos cartesianos de conjuntos fuzzy, isto é, $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{im}$ e $B_i = A_{i1} \times B_{i2} \times \dots \times B_{in}$. Neste caso, cada conjunto fuzzy A_{ij} e B_{ik} representa um termo linguístico para a j -ésima variável de entrada e k -ésima variável de saída e, a expressão *a está em A_i* significa que $\mu_{A_i}(a) =$

$\min\{\mu_{A_{i1}}, \mu_{A_{i2}}, \dots, \mu_{A_{im}}\} \in [0, 1]$. É na definição da base de regras que as informações do fenômeno em estudo são utilizadas. Para cada estado definido pelos termos linguísticos da variável de entrada, é definido uma regra. Sendo assim, quanto mais termos linguísticos mais informações são incorporadas na modelagem.

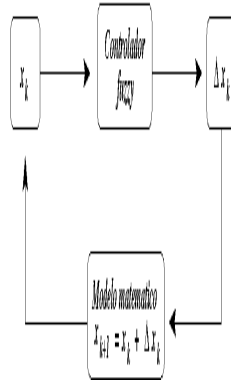


Figura 5.3: Estrutura do controlador fuzzy

O método de inferência é o mecanismo pelo qual as informações subjetivas definida pela base de regras são avaliadas matematicamente. É neste estágio que para cada valor assumido pelas variáveis de entrada, o valor das variáveis de saída são determinadas de acordo com a base de regras. Assim como a base de regras, o método de inferência é considerado parte integrante do núcleo do controlador fuzzy. O método de inferência utilizado neste trabalho é conhecido como método de inferência de Mamdani ou método MAX-MIN. Neste método, cada regra é considerada como um relação fuzzy e não como implicação lógica. A relação entre as variáveis linguísticas é caracterizada pelo operador MIN, isto é, cada regra é considerada uma relação fuzzy R_i onde o grau de pertinência para cada para (a, b) é:

$$\mu_{R_i}(a, b) = \min\{\mu_{A_i}(a), \mu_{B_i}(b)\}.$$

A relação entre cada regra é caracterizada pelo operador máximo, ou seja, a relação fuzzy R que representa o modelo determinado por uma base de regras, é obtida pela união (máximo) de cada regra individual, de modo que para cada par (a, b) temos:

$$\mu_R(a, b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b)\}$$

onde \wedge representa o operador MIN. Agora, para cada entrada desejamos encontrar uma ação correspondente, isto é, para conjunto A de dados de entrada, queremos determinar um conjunto B de dados de saída. Pelo método de Mamdani, a função de pertinência de B é dada por:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_a \{\mu_A(a) \wedge \mu_{A_i}(a)\} \wedge \mu_{B_i}(b) \right\}.$$

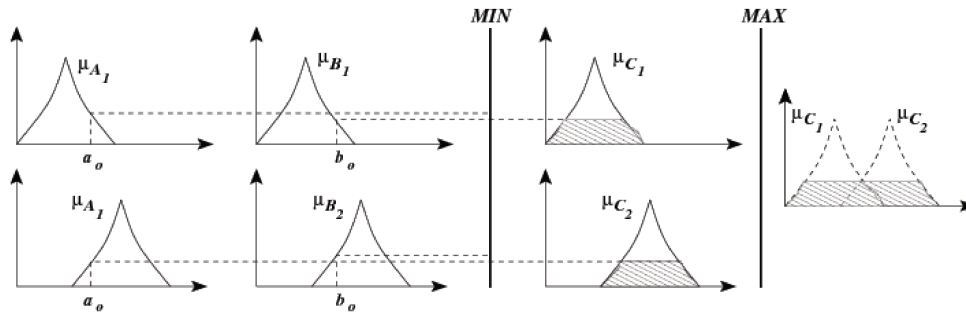


Figura 5.4: Mecanismo de inferência de Mamdani com duas variáveis linguísticas de entrada e uma de saída.

Se a entrada for um conjunto clássico unitário, então $\mu_A(a) = 1$ e $\mu_{A_i}(a) \leq 1$. Logo, a expressão acima resulta em:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b)\}$$

e portanto, temos o conjunto fuzzy B que representa a ação para cada entrada A (Figura 5.4).

O papel do *defuzzificador* é converter cada conclusão obtida pelo método de inferência em um número real que melhor representa a ação a ser tomada. No caso dos sistemas p-fuzzy, o número real obtido pela defuzzificação é acrescentado ao valor assumido pela variável de entrada no instante k , alimentando o sistema iterativo.

Um dos principais métodos de defuzzificação é o centro de massa, que para variáveis contínuas é dado pela expressão

$$m(B) = \frac{\int_{\Omega} b \mu_B(b) db}{\int_{\Omega} \mu_B(b) db}.$$

Este método de defuzzificação será usado por todo este trabalho. Notemos que o controlador fuzzy pode ser visto como uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, já que dado um valor de entrada, existe um único valor de saída correspondente.

Denominamos de sistema *p-fuzzy* ao sistema iterativo

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x_o \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $f(x_k)$ é quase linear, isto é, $f(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$, $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta(x_k)$ é a variação defuzificada obtida por um sistema baseado em regras fuzzy.

5.3 Equação de difusão p-fuzzy

Como pode-se notar a escolha do modelo matemático é determinante para se ter um precisão de algum fato. Modelos determinísticos distintos de um mesmo fenômeno podem prever resultados diferentes. Isto acontece invariavelmente porque nem sempre é possível dispor de todas as variáveis que atuam no fenômeno. Nesse sentido, por mais exata que seja a matemática, por mais determinístico que sejam os modelos, sempre teremos soluções aproximadas de alguma realidade. Assim, o uso de uma matemática menos determinística e mais grosseira pode ser muitas vezes tão eficaz para previsões quanto às obtidas pelos modelos clássicos.

5.3.1 Modelagem da distribuição populacional sem uso de sistema dinâmico

Na tentativa de encontrarmos o resultado esperado somos levados a apenas descrever o processo estudado e não estudar o processo como um sistema dinâmico. Como isso vem sendo uma prática constante na maioria dos trabalhos recentes, resolvemos mostrar as duas vertentes e ver que existem sim diferença no tratamento dos casos.

Considere então o problema de dispersão de espécies que se movimentam por difusão. Se utilizarmos o modelo clássico como auxiliar para a montagem de base regras, podemos fazer inferências sobre o estado da evolução da doença sem a ajuda de equações matemáticas.

Com o auxílio dos conjuntos fuzzy e de uma base de regras retirada das observações a respeito do processo difusivo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde D é o coeficiente de difusão, $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Que tem como solução clássica

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

onde $\varphi_t(x)$ nos dá a distribuição espacial em um ponto x em um tempo t .

Um conjunto fuzzy é aquele que valoriza seus elementos, isto é, se $x \in A$, devemos conhecer também com que grau de pertinência x está em A . Dessa forma, um conjunto fuzzy A é dado pela função de pertinência φ_A .

Assim como no modelo determinístico, a densidade populacional $u(x, t)$ é dependente da posição X e do instante t , no modelo p-fuzzy usaremos as variáveis independentes x e t como entrada e a saída será $u(x, t)$.

Tempo e posição como variáveis de entrada

Nesta secção consideraremos o coeficiente de difusão D conhecido. Dessa forma, utilizaremos como variáveis de entrada o tempo t e o deslocamento x dos indivíduos.

1. Conjuntos fuzzy para tempo de dispersão

Para a variável tempo, assim como as outras, atribuiu-se termos linguísticos, e para cada um deles com funções de pertinência, neste caso, dos tipo trapezoidal. Consideraremos nesta secção, para simplificar os cálculos que o tempo de dispersão varia entre 0 e 1. Dessa forma a variável tempo foi qualificada pelos termos linguísticos muito baixo(T_0), baixo(T_1), médio(T_2), médio alto(T_3), alto(T_4) e muito alto(T_5). Tais valores atribuídos à variável linguística do Tempo decorrem do distanciamento entre o tempo inicial do processo e o tempo de análise de u .

As funções de pertinência dos subconjuntos fuzzy, usados para modelar o tempo de dispersão são estabelecidas como funções trapezoidais e que podem ser visualizados na Figura 5.5, observando que, para cada valor de t , a função de pertinência do tempo de dispersão φ_T pode ser dada por até dois valores.

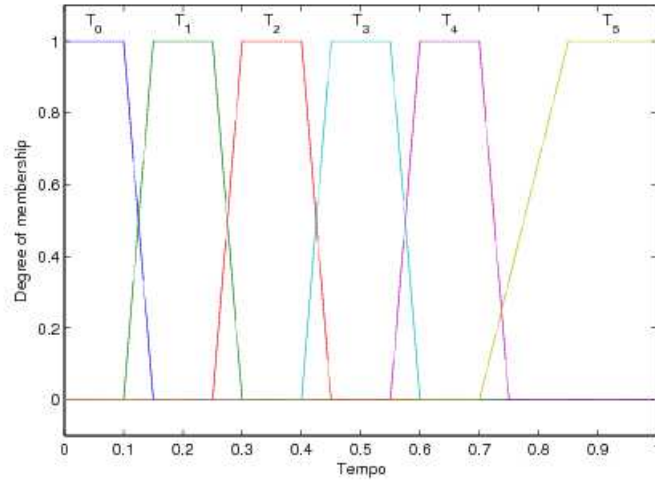


Figura 5.5: Funções de pertinência do tempo de dispersão

2. Conjuntos fuzzy para deslocamento dos indivíduos

Para a variável deslocamento, também atribuiu-se termos linguísticos, e para cada um deles com funções de pertinência do tipo trapezoidal. Consideraremos nesta secção, para simplificar os cálculos, que o deslocamento na dispersão varia entre -10 e 10 . Dessa forma a variável deslocamento foi qualificada pelos termos linguísticos deslocamento baixo à esquerda(X_{4-}), baixo à direita(X_{4+}), médio baixo a esquerda(X_{3-}), médio baixo à direita(X_{3+}), médio à esquerda(X_{2-}), médio à direita(X_{2+}), médio alto à esquerda(X_{1-}), médio alto à direita(X_{1+}), alto à esquerda(X_{0-}) e alto à direita(X_{0+}).

As funções de pertinência dos subconjuntos fuzzy, usados para modelar o deslocamento na difusão podem ser visualizados na Figura 5.6 e da mesma forma, observando que, para cada valor de x , a função de pertinência do deslocamento dos indivíduos no processo φ_X pode também ser dada por até dois valores.

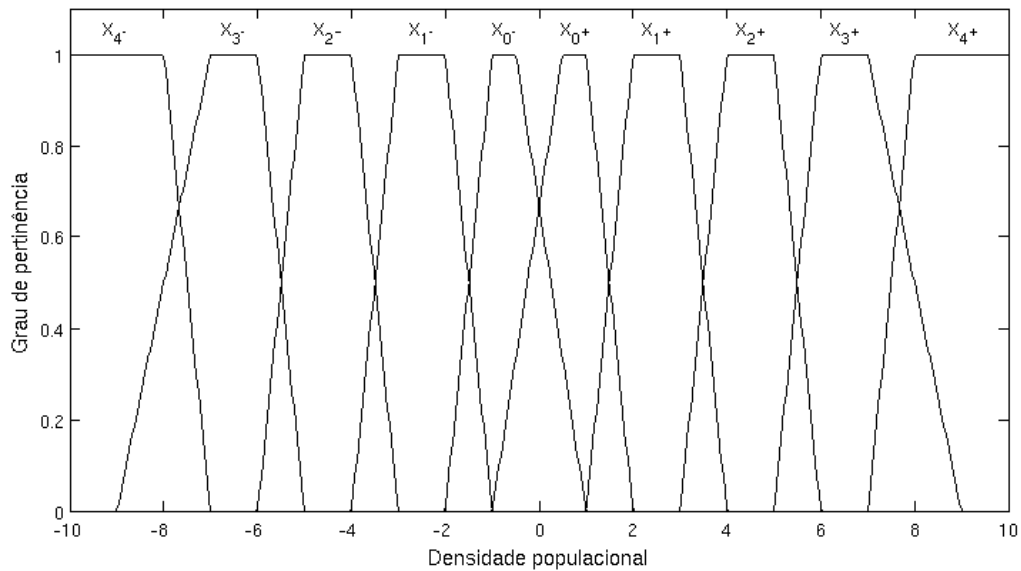


Figura 5.6: Funções de pertinência do deslocamento na dispersão

3. Conjuntos fuzzy para densidade populacional dos indivíduos

Os subconjuntos fuzzy, modelados por funções de pertinência da densidade populacional, podem ser visualizados na Figura 5.7. Dessa forma a variável densidade populacional foi qualificada pelos termos linguísticos baixíssima (U_1), muito baixa (U_2), baixa (U_3), media baixa (U_4), média (U_5), média alta (U_6), alta (U_7), muito alta (U_8) e altíssima (U_9).

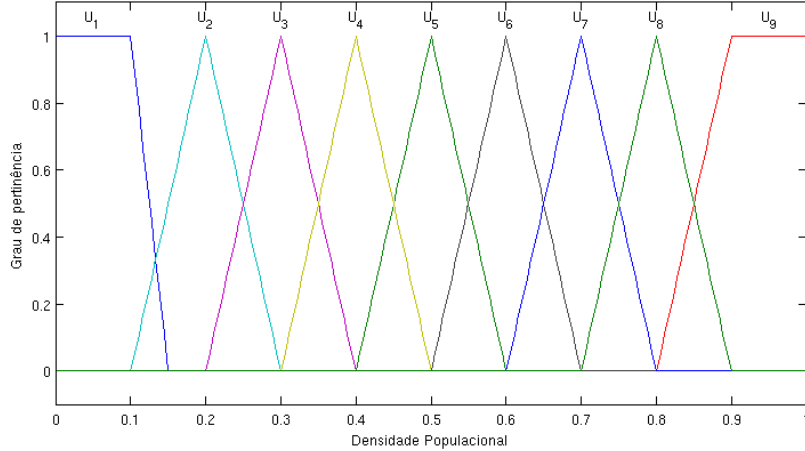


Figura 5.7: Funções de pertinência da densidade populacional na difusão

A base de regras que fornece o entendimento do fenômeno é da forma “SE... ENTÃO...” Para o fenômeno analisado parece coerente a base de regras dada pela tabela 5.1.

O método de inferência que adotaremos é o de Mamdani e, como método de defuzzificação, utilizamos o método do centro de gravidade. O processo interativo torna-se muito complicado de ser feito à mão, portanto foi usado o Toolbox do Matlab e o resultado de previsão ou solução pode ser visto na Figura 5.8

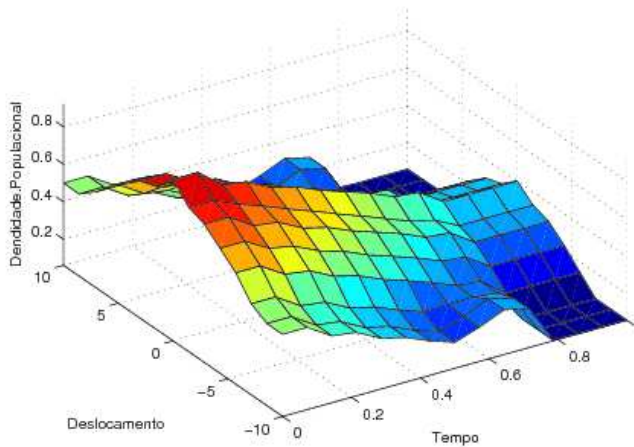


Figura 5.8: Solução do modelo fuzzy para difusão

Podemos observar que os resultados encontrados para o modelo clássico e o p-fuzzy são bastante próximos, como observamos na Tabela 5.2.

Tempo	Posição			Densidade	Tempo	Posição			Densidade		
Se	T_0	e	X_{0-}	então	U_9	Se	T_3	e	X_{0-}	então	U_6
Se	T_0	e	X_{0+}	então	U_9	Se	T_3	e	X_{0+}	então	U_6
Se	T_0	e	X_{1-}	então	U_8	Se	T_3	e	X_{1-}	então	U_5
Se	T_0	e	X_{1+}	então	U_8	Se	T_3	e	X_{1+}	então	U_5
Se	T_0	e	X_{2-}	então	U_7	Se	T_3	e	X_{2-}	então	U_4
Se	T_0	e	X_{2+}	então	U_7	Se	T_3	e	X_{2+}	então	U_4
Se	T_0	e	X_{3-}	então	U_6	Se	T_3	e	X_{3-}	então	U_3
Se	T_0	e	X_{3+}	então	U_6	Se	T_3	e	X_{3+}	então	U_3
Se	T_0	e	X_{4-}	então	U_5	Se	T_3	e	X_{4-}	então	U_2
Se	T_0	e	X_{4+}	então	U_5	Se	T_3	e	X_{4+}	então	U_2
Se	T_1	e	X_{0-}	então	U_8	Se	T_4	e	X_{0-}	então	U_5
Se	T_1	e	X_{0+}	então	U_8	Se	T_4	e	X_{0+}	então	U_5
Se	T_1	e	X_{1-}	então	U_7	Se	T_4	e	X_{1-}	então	U_4
Se	T_1	e	X_{1+}	então	U_7	Se	T_4	e	X_{1+}	então	U_4
Se	T_1	e	X_{2-}	então	U_6	Se	T_4	e	X_{2-}	então	U_3
Se	T_1	e	X_{2+}	então	U_6	Se	T_4	e	X_{2+}	então	U_3
Se	T_1	e	X_{3-}	então	U_5	Se	T_4	e	X_{3-}	então	U_2
Se	T_1	e	X_{3+}	então	U_5	Se	T_4	e	X_{3+}	então	U_2
Se	T_1	e	X_{4-}	então	U_4	Se	T_4	e	X_{4-}	então	U_1
Se	T_1	e	X_{4+}	então	U_4	Se	T_4	e	X_{4+}	então	U_1
Se	T_2	e	X_{0-}	então	U_7	Se	T_5	e	X_{0-}	então	U_4
Se	T_2	e	X_{0+}	então	U_7	Se	T_5	e	X_{0+}	então	U_4
Se	T_2	e	X_{1-}	então	U_6	Se	T_5	e	X_{1-}	então	U_3
Se	T_2	e	X_{1+}	então	U_6	Se	T_5	e	X_{1+}	então	U_3
Se	T_2	e	X_{2-}	então	U_5	Se	T_5	e	X_{2-}	então	U_2
Se	T_2	e	X_{2+}	então	U_5	Se	T_5	e	X_{2+}	então	U_2
Se	T_2	e	X_{3-}	então	U_4	Se	T_5	e	X_{3-}	então	U_1
Se	T_2	e	X_{3+}	então	U_4	Se	T_5	e	X_{3+}	então	U_1
Se	T_2	e	X_{4-}	então	U_3	Se	T_5	e	X_{4-}	então	U_1
Se	T_2	e	X_{4+}	então	U_3	Se	T_5	e	X_{4+}	então	U_1

Tabela 5.1: Base de regras para o problema de difusão

Tempo	Posição	Densidade determinística	Densidade via base de regras
0	0	10	10
0.2	0	8,3562	8,6563
0.4	0	5,3621	5,6231
0.4	-5	4,6321	4,8521
0.4	5	4,6321	4,8523
0,6	0	4,1231	4,0122
0,6	5	3,7632	3,6214
1	0	3,2135	3,1254
1	-10	0,0572	0,0487
2	5	0,6587	0,5687
2	-5	0,6587	0,5687
3	0	1,2354	1,3268
4	5	0,1254	0,1542
5	10	0,0021	0,0002

Tabela 5.2: Comparação entre as soluções determinística e Solução via base de regras

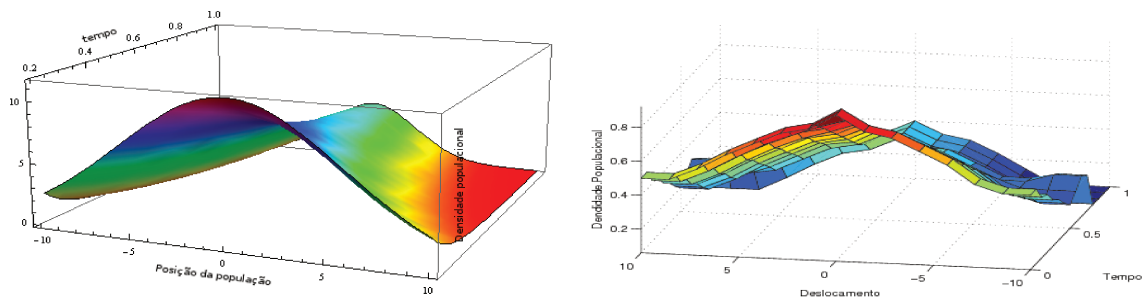


Figura 5.9: Gráfico da solução determinística e da solução via base de regras

Para uma melhor compreensão, está exposta na Tabela (5.2) alguns valores da solução determinística e via base de regras.

5.3.2 Modelagem da densidade populacional utilizando tempo e coeficiente de difusão como variáveis de entrada

Considerando que a densidade populacional em cada local específico depende do tempo transcorrido e do coeficiente de difusão, podemos utilizar o mesmo processo da secção anterior. Para isso consideremos, neste caso, para simplificar os cálculos, que o conjunto

fuzzy para o coeficiente de difusão D varia entre 0 e 10. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Coeficiente de difusão } \mathbf{muito\ baixo: } \mathbf{D}_0, \text{ onde } \varphi_{D_0} &= \begin{cases} 0, & \text{se } D < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < D \leq 0.5 \\ 2x + 2, & \text{se } 0.5 \leq D \leq 1 \end{cases} \\
 \text{Coeficiente de difusão } \mathbf{baixo: } \mathbf{D}_1, \text{ onde } \varphi_{D_1} &= \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } 0.5 \leq D \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq D \leq 1.5 \\ -2x + 4, & \text{se } 1.5 \leq D \leq 2 \end{cases} \\
 \text{Coeficiente de difusão } \mathbf{m\u00e9dio: } \mathbf{D}_2, \text{ onde } \varphi_{D_2} &= \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } 1.5 \leq D \leq 2 \\ 1, & \text{se } 2 \leq D \leq 2.5 \\ -2x + 6, & \text{se } 2.5 \leq D \leq 3 \end{cases} \\
 \text{Coeficiente de difusão } \mathbf{alto: } \mathbf{D}_3, \text{ onde } \varphi_{D_3} &= \begin{cases} 2x - 5, & \text{se } 2.5 \leq D \leq 3 \\ 1, & \text{se } 3 \leq D \leq 5 \\ -2x + 8, & \text{se } 3 \leq D \leq 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Neste caso, o gr\u00e1fico da vari\u00e1vel lingu\u00edstica fica representada pela Figura 5.10. Assim, considerando as vari\u00e1veis lingu\u00edsticas do tempo dado na Figura 5.5.

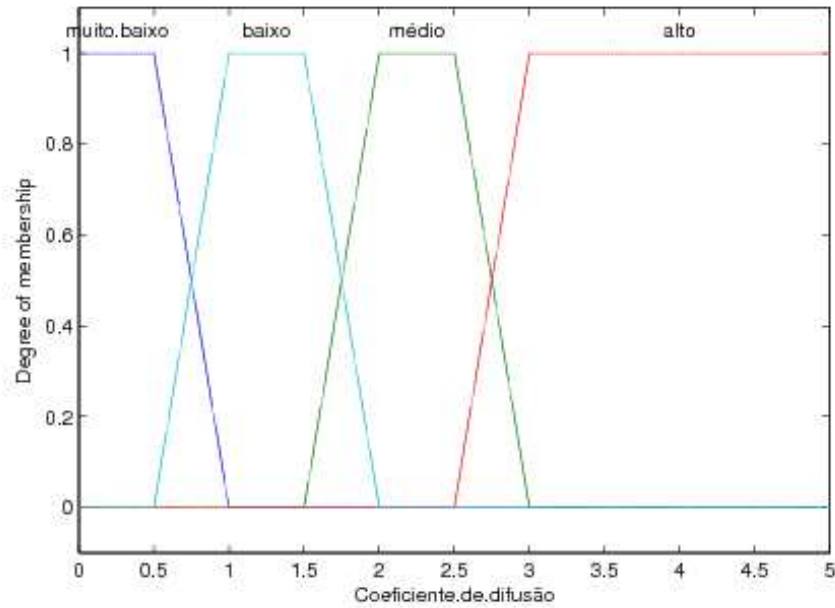


Figura 5.10: Vari\u00e1veis lingu\u00edsticas para coeficiente de difus\u00e3o

Nos parece razo\u00e1vel, a partir da observa\u00e7\u00e3o advinda de fen\u00f4menos difusivos, a base de regras dada na Tabela 5.3

Se T_0 e D_0 então U_9
Se T_1 e D_0 então U_9
Se T_2 e D_0 então U_9
Se T_3 e D_0 então U_8
Se T_4 e D_0 então U_8
Se T_5 e D_0 então U_7
Se T_0 e D_1 então U_9
Se T_1 e D_1 então U_9
Se T_2 e D_1 então U_8
Se T_3 e D_1 então U_7
Se T_4 e D_1 então U_7
Se T_5 e D_1 então U_6
Se T_0 e D_2 então U_9
Se T_1 e D_2 então U_8
Se T_2 e D_2 então U_7
Se T_3 e D_2 então U_6
Se T_4 e D_2 então U_6
Se T_5 e D_2 então U_5
Se T_0 e D_3 então U_4
Se T_1 e D_3 então U_4
Se T_2 e D_3 então U_3
Se T_3 e D_3 então U_2
Se T_4 e D_3 então U_1
Se T_5 e D_3 então U_0

Tabela 5.3: Base de regras para o problema de difusão.

Observe que em nossas regras não está considerando a posição dos indivíduos. O que queremos neste caso é identificar o quanto a população varia no decorrer do processo. Podendo ser útil para a previsão de vários processos difusivos

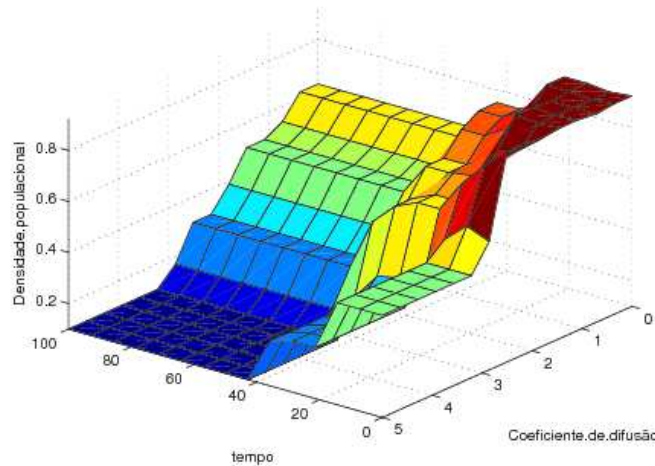


Figura 5.11: Saída do defuzzificador a partir das regras dadas na Tabela 5.3.

Da mesma forma que na secção anterior foi usado Mamdani e Centro de gravidade como métodos de defuzificação.

5.3.3 Solução da equação de difusão utilizando sistemas dinâmicos p-fuzzy

Nesta secção, estamos interessados em desenvolver uma base de regras que nos possibilite encontrar uma solução gráfica para um problema que envolva difusão. Para isso, usaremos apenas a posição da população, condição inicial e variação da população. Dessa forma poderemos estimar a densidade populacional em um instante $t = t^*$ sem necessariamente usarmos a solução analítica do problema.

Modelos clássicos de dinâmica populacional e/ou epidemiologia, em geral, são dados por um sistema de equações diferenciais. Neste caso, os parâmetros dos modelos são frequentemente tomados como valores médios obtidos a partir de um conjunto de dados, de tal maneira que o modelo passa a ser deterministicamente conhecido. No entanto, admitindo-se incerteza devido ao conhecimento parcial, o que é comum em fenômenos biológicos, uma alternativa é modelar tal conhecimento a partir de um conjunto de regras da forma Se-Então.

É comum adotar uma equação autônoma

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (5.2)$$

para representar o sistema dinâmico, onde o campo f representa variação, a partir do qual a evolução do sistema é estudada. Na verdade podemos perguntar da seguinte forma: como podemos analisar o sistema (5.2) se o mesmo for parcialmente conhecido? A resposta é adotar um modelo linguístico capaz de captar as informações disponíveis do modelo, via de regra, junto a um especialista. Em Barros e Bassanezi (2006) é proposta uma metodologia para estimar soluções de equações diferenciais utilizando controladores fuzzy, na qual as variáveis de estado são as entradas e as saídas, são as variações de estado.

Dessa forma, considere como variáveis linguísticas para posição da população (distância a origem): *baixa positiva* (Bp), *média positiva* (Mp), *média alta positiva* (MAp), *alta positiva* (Ap), *baixa negativa* (Bn), *média negativa* (Mn), *média alta negativa* (MAn) e *alta negativa* (An). Onde os termos positivo ou negativo significam distância da origem à direita ou esquerda respectivamente. Assim, a Figura (5.12) representa graficamente essas variáveis linguísticas

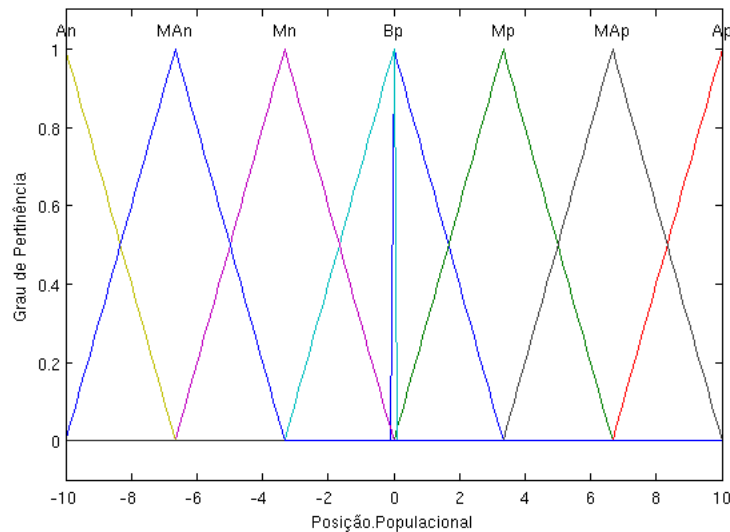


Figura 5.12: Variáveis linguísticas para posição da população

Da mesma forma, como variável de saída, consideremos a variação populacional e teremos como variáveis linguísticas: *baixa positiva* (Bp), *média positiva* (Mp), *média alta positiva* (MAp), *alta positiva* (Ap), *baixa negativa* (Bn), *média negativa* (Mn), *média alta negativa* (MAn) e *alta negativa* (An). Assim, a figura (5.13) representa graficamente essas variáveis linguísticas

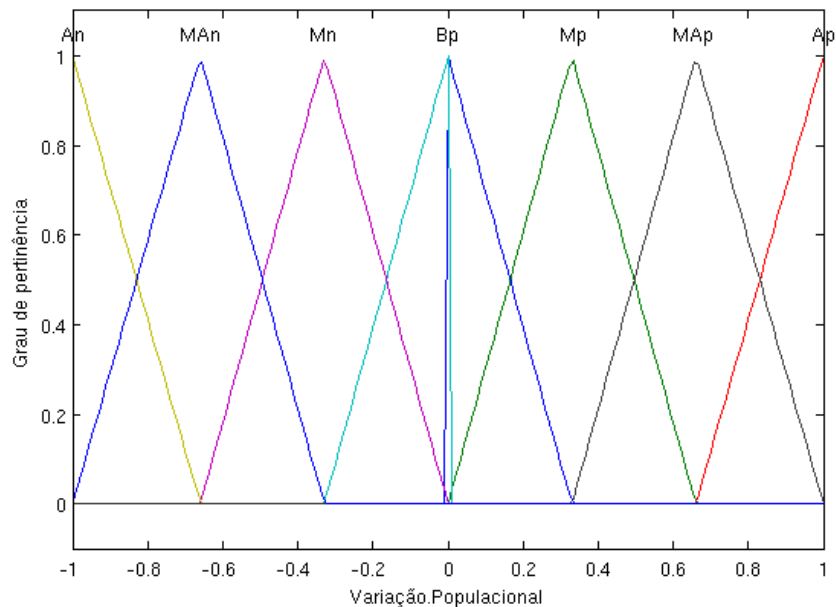


Figura 5.13: Variáveis linguísticas para variação populacional

Considerando os resultados conhecidos sobre processos de difusão, considere a seguinte base de regras fuzzy:

1. Se a posição dos indivíduos é *baixa positiva* Bp então a variação da população é *baixa positiva* Bp ;
2. Se a posição dos indivíduos é *média positiva* Mp então a variação da população é *média positiva* Mp ;
3. Se a posição dos indivíduos é *média alta positiva* MAp então a variação da população é *média alta positiva* MAp ;
4. Se a posição dos indivíduos é *alta positiva* Ap então a variação da população é *alta positiva* Ap ;
5. Se a posição dos indivíduos é *baixa negativa* Bn então a variação da população é *baixa negativa* Bn ;
6. Se a posição dos indivíduos é *média negativa* Mn então a variação da população é *média negativa* Mn ;
7. Se a posição dos indivíduos é *média alta negativa* MAn então a variação da população é *média alta negativa* MAn ;
8. Se a posição dos indivíduos é *alta negativa* An então a variação da população é *alta negativa* An .

E dessa forma, a Figura 5.14 mostra o gráfico de toda a variação da variável dependente (Variação da População) como função da variável independente (Posição da População)

no modelo de Mamdani.

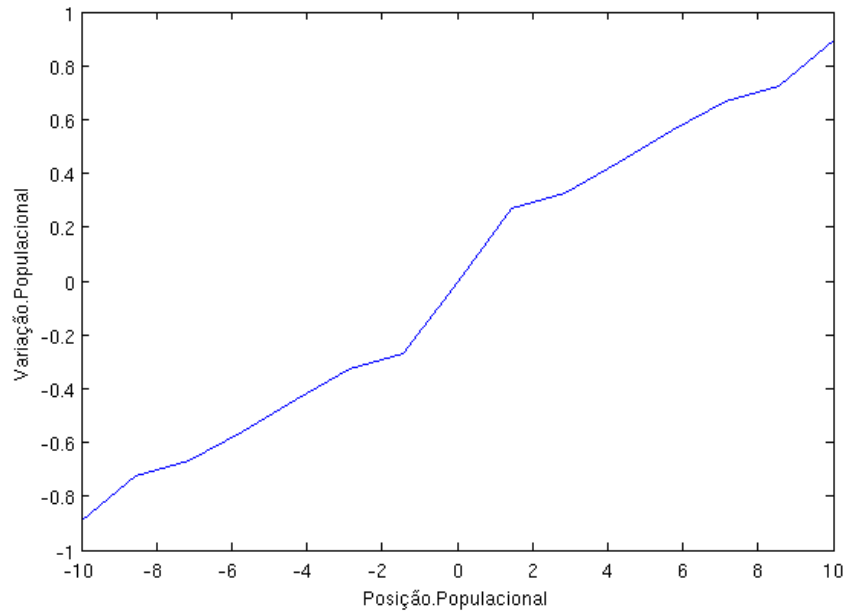


Figura 5.14: Curva gerada a partir das regras de 1-8 usando MAMDANI.

Assim, com essa base de regras, o método de inferência de Mamdani e a defuzzificação dada pelo centro de massa, o sistema p-fuzzy nos leva à trajetória ilustrada na sequência de Figuras 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20. Para tal, consideraremos como condição inicial $N_0 = 10$ e coeficiente de difusão 0,5. Uma observação importante é que o sistema desenvolvido nos faz ficar despreocupados com o coeficiente de difusão, uma vez que o mesmo é pedido no sistema dinâmico desenvolvido.

Uma outra observação importante é que o tempo, no nosso problema significa o número de iterações que simulamos no Matlab. Essa informação é de grande importância, pois diminui a quantidade de dados necessários para descrever o problema. Podemos assim, escrever o sistema dinâmico p-fuzzy da seguinte forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h\Delta x_k \\ h \text{ é dado} \end{cases} \quad (5.3)$$

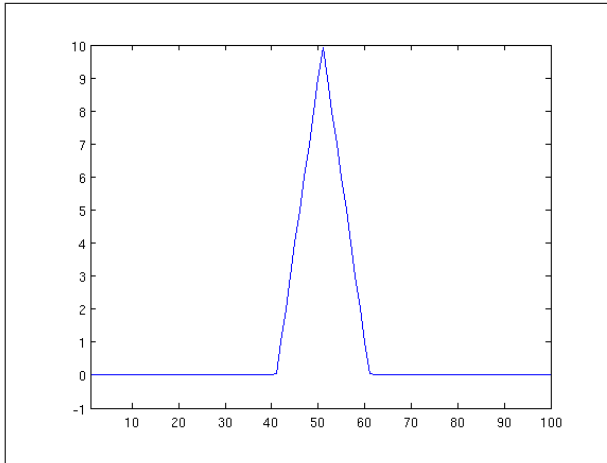


Figura 5.15: *Condição inicial $t = 0$.*

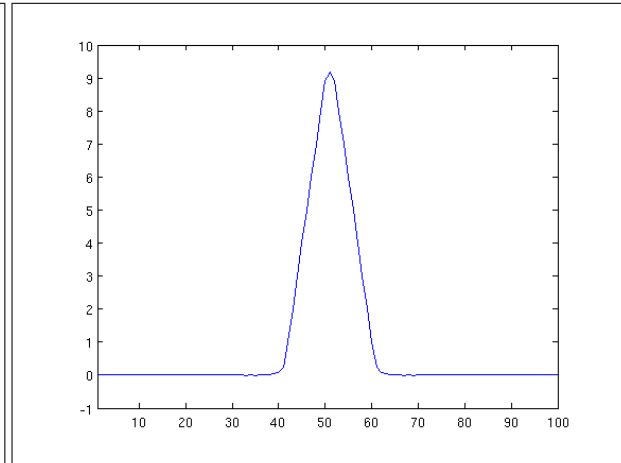


Figura 5.16: *Solução para $t = 10$.*

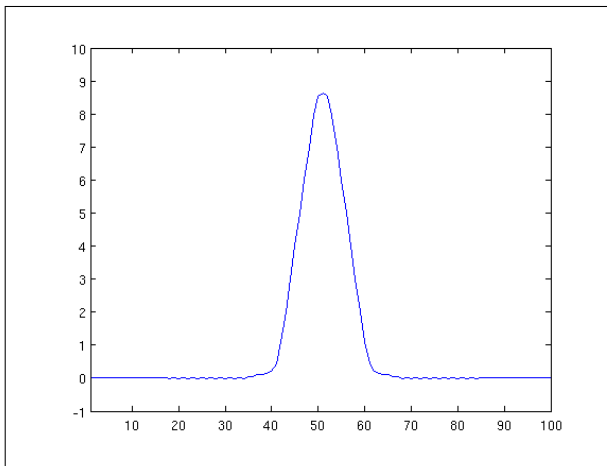


Figura 5.17: *Solução para $t = 25$.*

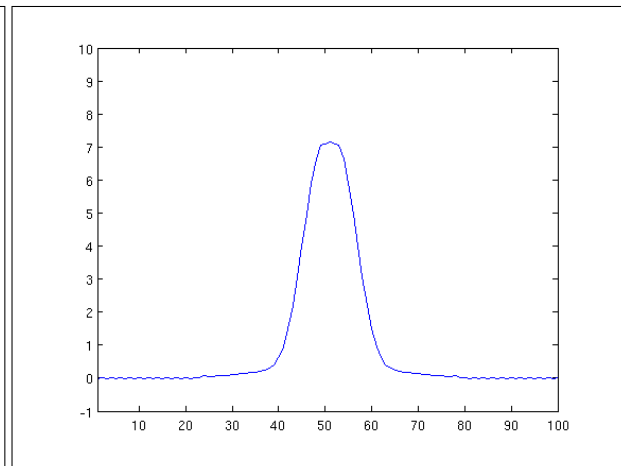


Figura 5.18: *Solução para $t = 100$.*

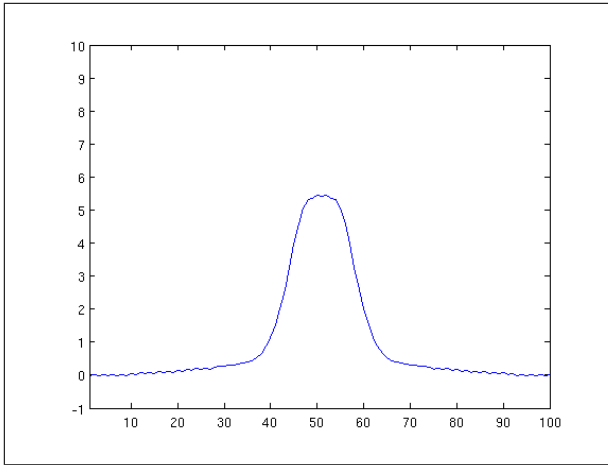


Figura 5.19: *Solução para $t = 250$.*

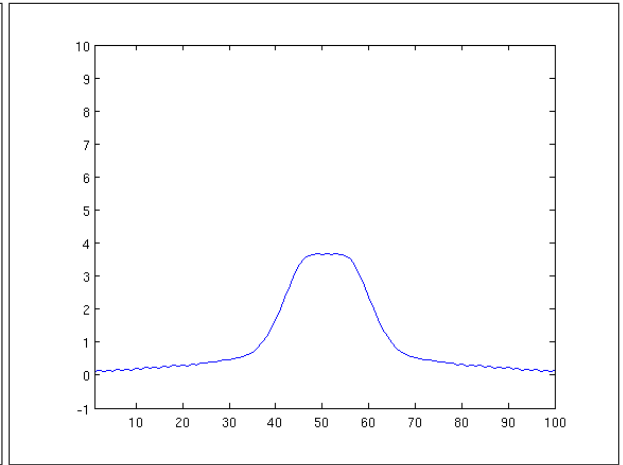


Figura 5.20: *Solução para $t = 500$.*

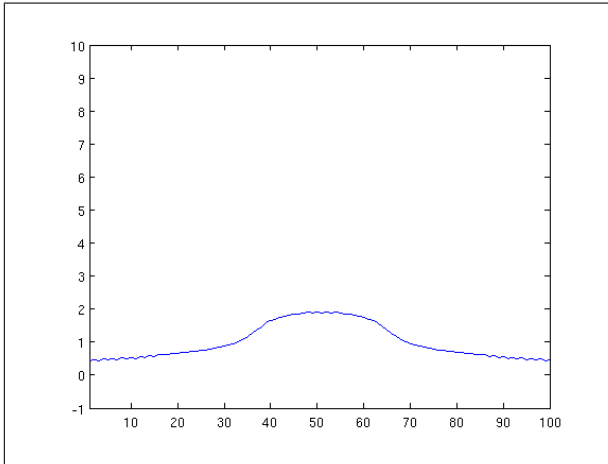


Figura 5.21: *Solução para $t = 1000$.*

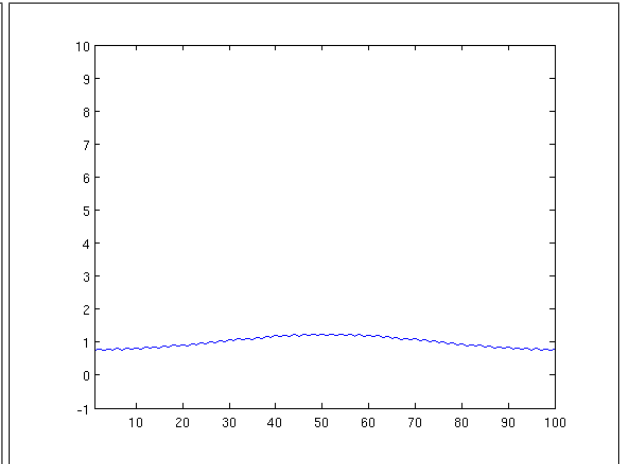


Figura 5.22: *Solução para $t = 5000$.*

Como para cada iteração ($t = t^*$) temos uma curva então podemos plotar uma superfície que será nosso gráfico da solução p-fuzzy da equação de difusão. Esse gráfico está representado nas Figuras 5.23 e 5.24.

No sistema dinâmico que desenvolvemos, encontramos uma solução para um sistema dinâmico p-fuzzy difusivo para cada iteração, ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para cada passo no tempo temos uma solução para um problema de difusão p-fuzzy. Dessa forma, para que possamos julgar se o método é eficaz ou não plotamos a união dessas soluções que é dada pelas Figuras 5.23 e 5.24. Comparativamente achamos muito similar ao gráfico da solução determinística dada pela Figura 5.9.

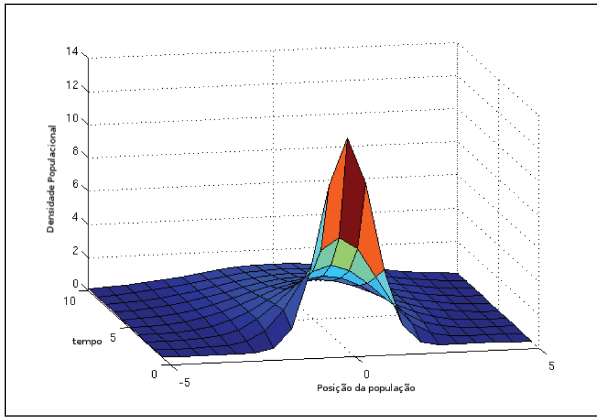


Figura 5.23: *Gráfico da solução p-fuzzy.*

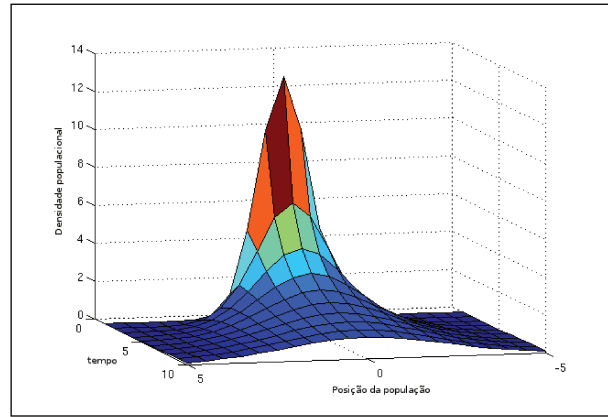


Figura 5.24: *Gráfico da solução p-fuzzy.*

Capítulo 6

Aplicações

Neste capítulo daremos dois exemplos de aplicações das técnicas fuzzy em modelos de dispersão de insetos. No primeiro, que trata da dispersão de besouros, usaremos base de regras e extensão de Zadeh, considerando um modelo de dispersão unidimensional com dados obtidos por Banks et al. (1985). O segundo exemplo que trata de difusão de moscas varejeiras, usaremos um sistema fuzzy proveniente do princípio da Extensão de Zadeh e comparamos esse modelo alternativo com o determinístico.

6.1 Modelagem de dispersão de insetos

A maioria dos estudos que envolvem equações de difusão descrevem o movimento em animais adultos, mas esta abordagem raramente costuma ser usada para estudar dispersão em imaturos, cuja dispersão tem importantes consequências para as dinâmicas populacional e de comunidade, e estrutura genética de populações. Entretanto, os mesmos resultados teóricos de dispersão por difusão em adultos podem ser aplicados para estudar dispersão em imaturos.

Existe uma ampla literatura em estimativa e identificação de parâmetros em problemas governados por equações diferenciais parciais. Por vários anos, desenvolveram-se algoritmos para identificação de parâmetros em equações de transporte. Trabalhos recentes, voltados para modelagem de dispersão de insetos, têm usado dados experimentais de liberação de insetos marcados e posteriormente recapturados. No uso de um modelo unidimensional, Banks et al. (1985) observou o movimento de besouros, em faixas de terra cultivadas de 1 metro por 80 metros. Não existindo outras plantas das quais os besouros poderiam se alimentar, além destes arranjos lineares, seu movimento local era confinado a pequenos movimentos num sentido e em outro, em cada arranjo linear.

Os insetos marcados eram liberados no ponto médio de cada arranjo linear, no início do experimento, e durante três dias, eram coletados os dados a respeito da dispersão destes insetos ao longo de cada arranjo linear. Usando um modelo que contemplava

a variação espacial no coeficiente de dispersão, Kareiva (1983) constatou que modelos de transporte com movimento orientado se ajustava consideravelmente melhor do que aqueles com difusão passiva. Permitindo variação espacial nos coeficientes de equação de transporte, descrevendo mecanismos de difusão, de convecção e além de fonte ou morte, a equação tem a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(V(x)u - K(x)u) + f(x, \beta) \quad (6.1)$$

para $t \in (0, T]$ e $x \in (0, 1)$. Para o movimento de insetos, foi constatado ajuste satisfatório apenas nos períodos curtos (de um ou dois dias), e os sucessos deste modelo foram contrabalanceados por falhas na descrição do movimento dos insetos no curso de três dias.

Posteriormente, Banks et al. (1985) levantou a hipótese de que tais modelos haviam falhado, em alguns casos, por causa da ausência de variação temporal nos parâmetros que representam taxas de movimento e migração de insetos. Dessa forma, foram considerados modelos de dispersão de insetos a partir da equação de transporte, com parâmetros que variam temporalmente, bem como espacialmente, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(V(x, t)u - K(x, t)u) + f(x, t, \beta) \quad (6.2)$$

para $t \in (0, T]$ e $x \in (0, 1)$. Onde x é o espaço reescalonado, no qual o intervalo de $[0, 1]$ corresponde ao intervalo real de $100m$, $D(x, t)$ é o coeficiente de difusão, $V(x, t)$ é o coeficiente de convecção, $K(x, t)$ representa a taxa de decaimento e $f(x, t, \beta)$ representa a advecção associada ao processo para β sendo um agente externo.

Nesse problema, foram consideradas condições de contorno homogêneas:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (6.3)$$

com condição inicial $u(0.5, 0) = N_0$ e $u(x, 0) = 0$ para $x \neq 0.5$, onde N_0 é o número de besouros marcados que foram liberados no ponto médio de cada arranjo linear, no início do experimento. As condições de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ foram justificadas pelo fato de que menos de 1 em cada 100 besouros marcados atingiram as extremidades dos arranjos cultivados e porque não havia alimento para sustentar os besouros fora dos arranjos lineares.

Os dados experimentais eram observações da densidade de insetos em locais distribuídos regularmente em x . De fato, Banks et al. (1985) desenvolveu algoritmos de estimativa numérica para determinar os coeficientes dependentes do tempo envolvidos no modelo unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha(t)u, \quad (6.4)$$

de modo a otimizar o ajuste com os dados experimentais. Isso pôde ser feito, pois não foi observada nenhuma componente conectiva significativa, nem qualquer dependência espacial nos coeficientes.

6.1.1 Estimativa dos Parâmetros

Para a estimativa de parâmetros que variam com o espaço e também com o tempo, de modo a estabelecer um problema computacionalmente tratável, os dados foram obtidos através de três experimentos distintos, diferindo um do outro quanto ao espaçamento entre faixas cultivadas. Reproduzimos na Tabela 6.1, os valores obtidos para coeficiente de difusão $D(t)$ e para o coeficiente de decaimento da população $\alpha(t)$ nos 3 primeiros dias subsequentes à liberação dos insetos.

t	$D(t)$	$\alpha(t)$
0	0.0296	0.2559
1	0.0302	0.2486
2	0.00008	0.0056
3	0.0000	0.00014

Tabela 6.1: Valores de $D(t)$ e $\alpha(t)$ nos 3 primeiros dias.

A representação gráfica de $D(t)$ e $\alpha(t)$ é dada pelas Figuras 6.1 e 6.2. É importante observar que as curvas obtidas nas Figuras 6.1 e 6.2 foram ajustadas aos valores da Tabela 6.1, de acordo com os critérios adotados no método dos quadrados mínimos.

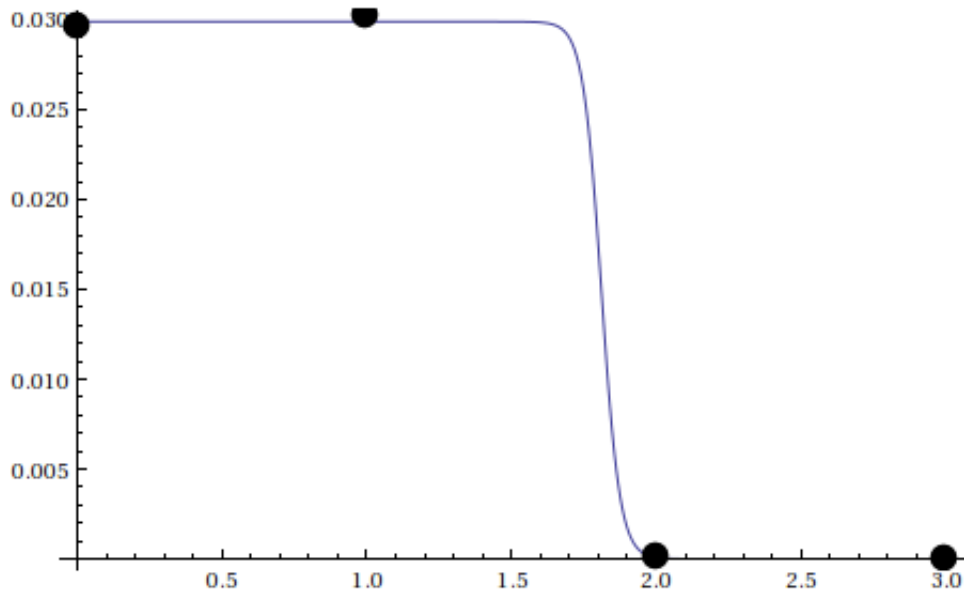


Figura 6.1: Curva $D(t)$ ajustada aos pontos apresentados na tabela 6.1.

Utilizando os dados e parâmetros determinados por Banks et al. (1985), foi simulado no experimento, a liberação de 20 insetos, em única posição, ou seja, no ponto médio de um canteiro unidimensional com plantação uniforme de $100m$.

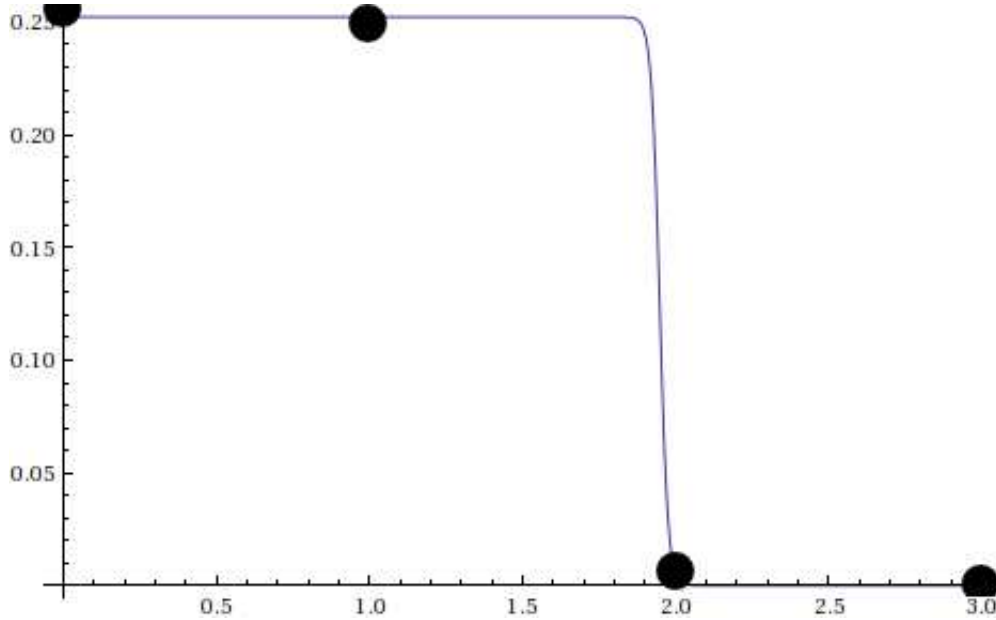


Figura 6.2: Curva $\alpha(t)$ ajustada aos pontos apresentados na Tabela 6.1.

Foi formulado um modelo contínuo, considerando uma única direção, a do eixo dos x , e ajustamos curvas aos valores obtido na Tabela 6.1, de tal forma que pudéssemos ter funções $D(t)$ e $\alpha(t)$, com a variável independente t , que constituíssem o melhor ajuste de acordo com os critérios adotados no método de mínimos quadrados.

Obtivemos como coeficiente de difusão:

$$D(t) = 0.01495(1 - \tanh(15.65t - 28.34))$$

E coeficiente de decaimento:

$$\alpha(t) = 0.1261[1 - \tanh(36.39t - 70.89)]$$

Dessa forma, analisamos o modelo unidimensional (6.5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha(t)u \quad (6.5)$$

Como aplicação vamos analisar a equação (6.5), considerando diversas alternativas em relação aos coeficientes D e α , para efeito de comparação entre os modelos determinístico e fuzzy.

E estudaremos a equação (6.5) nos seguintes casos:

- a) $D = 0.01996$ e $\alpha = 0.17$

b) $D = 0.01996$ e $\alpha = \alpha(t)$

c) $D = D(t)$ e $\alpha = 0.17$

d) $D = D(t)$ e $\alpha = \alpha(t)$

6.1.2 Solução determinística \times Solução fuzzy

Na literatura existem diversas maneiras de se encontrar soluções determinísticas para problemas que envolvem difusão. Como visto na secção anterior vamos analisar os modelos através de suas soluções numéricas que são computadas no intervalo $0 \leq x \leq 1$, sendo que esse intervalo está reescalonado, representando o intervalo real de 100m, com a condição inicial:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0 \text{ se } x \neq 0.5 \\u(x, 0) &= 20 \text{ se } x = 0.5\end{aligned}$$

e as condições de contorno:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Consideraremos o mesmo período de tempo t para análise do experimento, isto é, período de 3 dias, expressos em termos de horas.

Caso a)

Neste caso, estudaremos um equação de difusão-reação, fazendo $D(t) = 0.01996$ e $\alpha(t) = 0.17$ (média dos valores obtidos na tabela 1). Então temos a equação na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.01996 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.17u \quad (6.6)$$

Após a liberação dos insetos no ponto médio de um canteiro, observa-se que há pouca dispersão. Em torno de 10 por cento dos besouros liberados não se encontram mais no ponto médio após o primeiro dia existindo uma tendência natural dos mesmos a agruparem-se em torno desse ponto. Alguns autores consideram esse efeito como tempo de pesquisa inicial.

Por outro lado, se considerarmos a condição inicial do problema incerto, podemos definir essa condição inicial como sendo um número fuzzy da forma

$$[\hat{u}(x, 0)]^\alpha = [17; 20; 23]$$

Assim, temos a solução fuzzy associada ao problema determinístico na forma:

$$\hat{u}(x, t) = \frac{\hat{u}(x, 0)}{\sqrt{(4\pi 0.01996t)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt} - 0.17t}$$

No caso de procurarmos a solução p-fuzzy para o problema do caso a), basta escolhermos as mesmas regras e as mesmas variáveis linguísticas do sistema dinâmico do capítulo 5 (pois queremos modelar um problema de difusão) e escolhermos o sistema dinâmico

$$x_{k+1} = x_k + 0.01996\Delta x_k - 0.17x_k$$

Dessa forma as Figuras 6.3 e 6.4 mostram os gráficos das soluções p-fuzzy e determinística. No caso das Figuras 6.5 e 6.6 é exibido a representação gráfica das soluções determinística, p-fuzzy e fuzzy para os coeficientes escolhidos no item a).

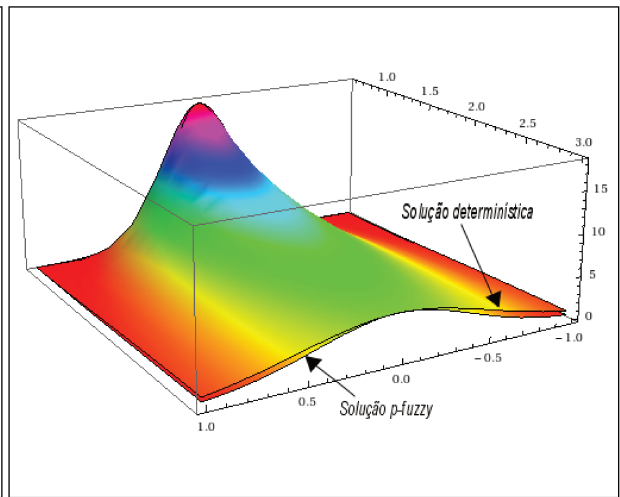
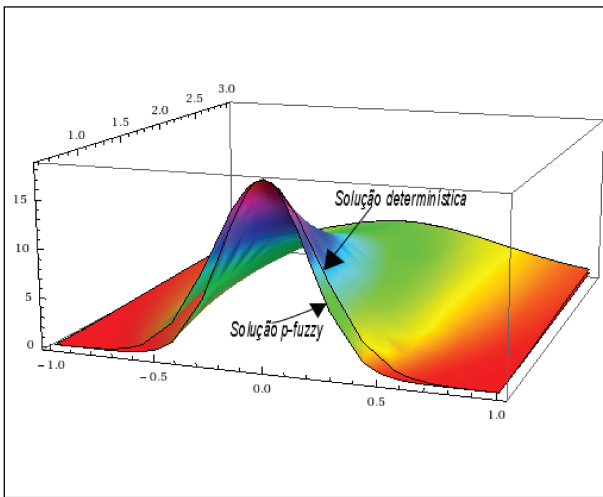


Figura 6.3: Gráfico da solução determinística e p-fuzzy associado a equação (6.6).

Figura 6.4: Gráfico da solução determinística e p-fuzzy associado a equação (6.6).

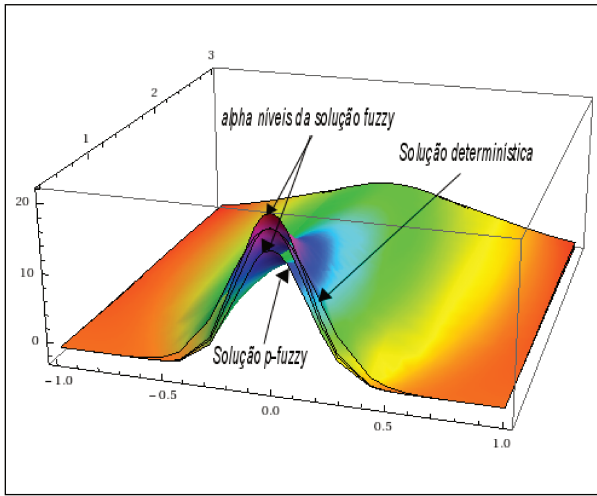


Figura 6.5: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p-fuzzy associado a solução da equação (6.6).

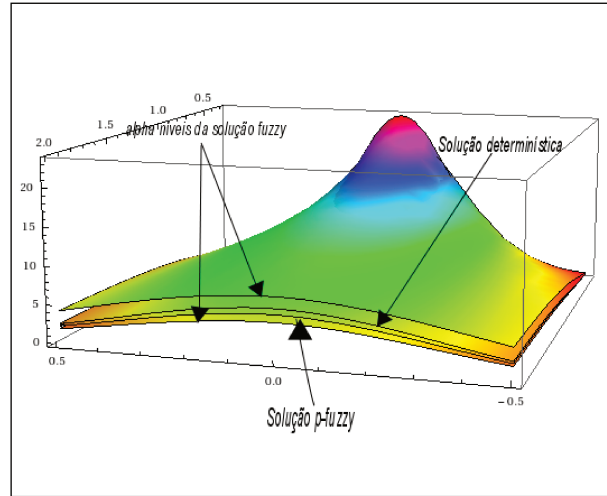


Figura 6.6: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p-fuzzy associado a solução da equação (6.6).

Olhando as soluções em um tempo específico, ou seja $t = t^*$ temos nas Figuras (6.7) e (6.8) o comportamento de cada solução

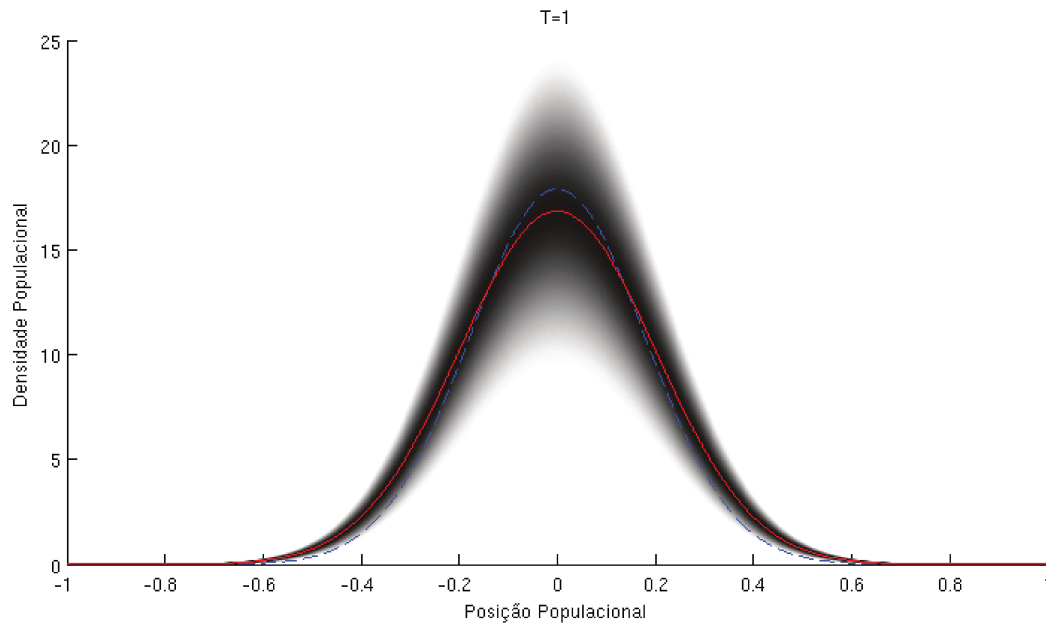


Figura 6.7: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 1$ da solução da equação (6.6).

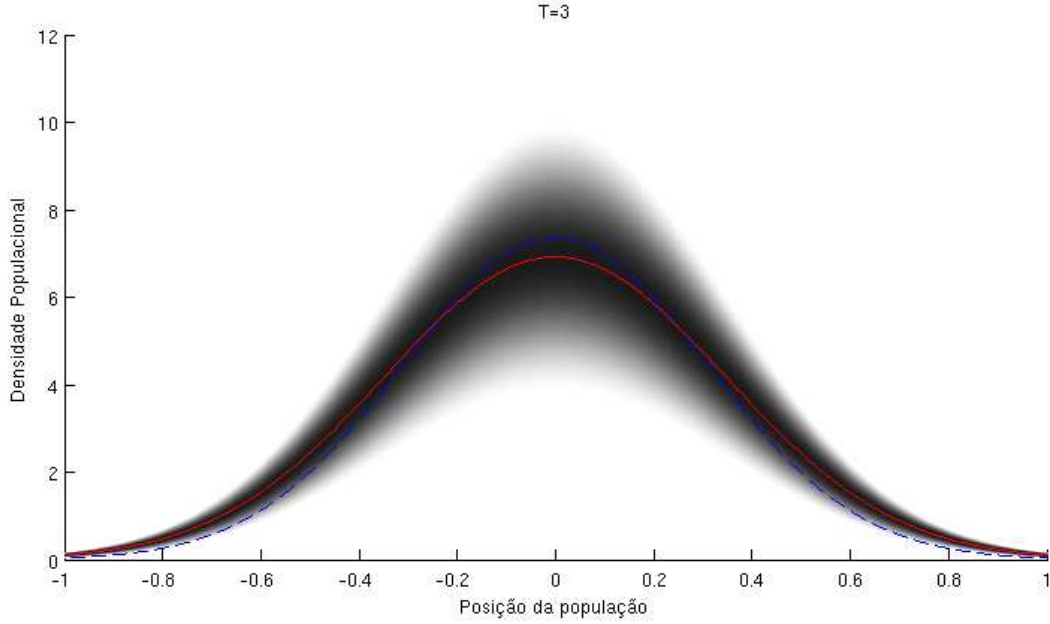


Figura 6.8: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 3$ da solução da equação (6.6).

Caso b)

Agora vamos estudar a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.03101 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.1261(1 - \tanh(36.39t - 70.89))u \quad (6.7)$$

Neste caso, após o primeiro dia de liberação, apenas 60 por cento da população não está em torno do ponto médio do canteiro. Passados 3 dias de experimento, observamos os insetos aproximarem-se dos extremos do canteiro. Isto mostra que a presença de um parâmetro variando temporalmente, faz com que haja um efeito maior no processo de dispersão. As Figuras 6.9 e 6.10 ilustram bem esse fenômeno.

Dessa forma, para que tenhamos uma solução p-fuzzy associado ao item b) basta escolhermos o sistema dinâmico

$$X_{K+1} = x_k + 0.01996\Delta x_k - \left(-\frac{0.17}{3}k + 0.17\right)x_k$$

onde o termo $\left(-\frac{0.17}{3}k + 0.17\right)$ do sistema dinâmico escolhido foi obtido através do ajuste da reta ligando os pontos $\alpha(t) = 0.2559$ e $\alpha(t) = 0.00014$.

Dessa forma, podemos observar o gráfico das soluções especificamente nos tempos $t = 1$ e $t = 3$ nas Figuras 6.13 e 6.14.

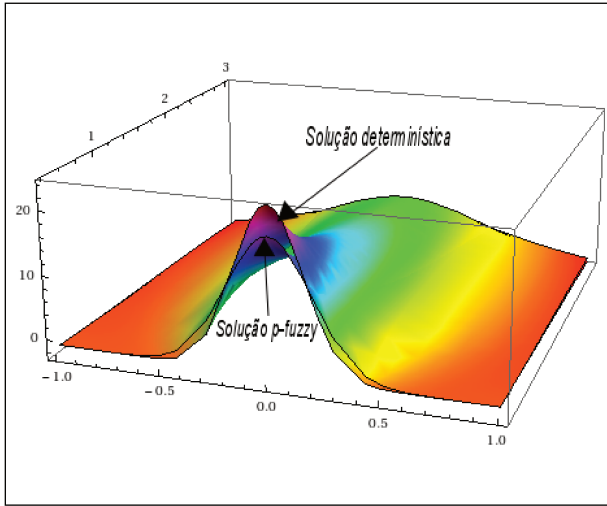


Figura 6.9: Gráfico da solução determinística e p-fuzzy associado a equação (6.7)

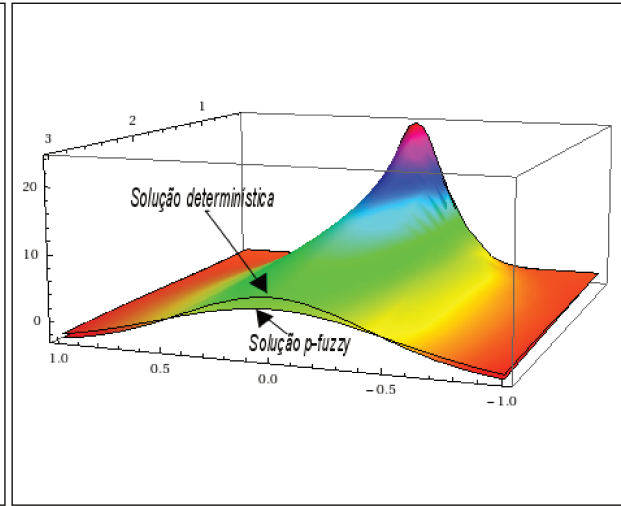


Figura 6.10: Gráfico da solução determinística e p-fuzzy associado a equação (6.7)

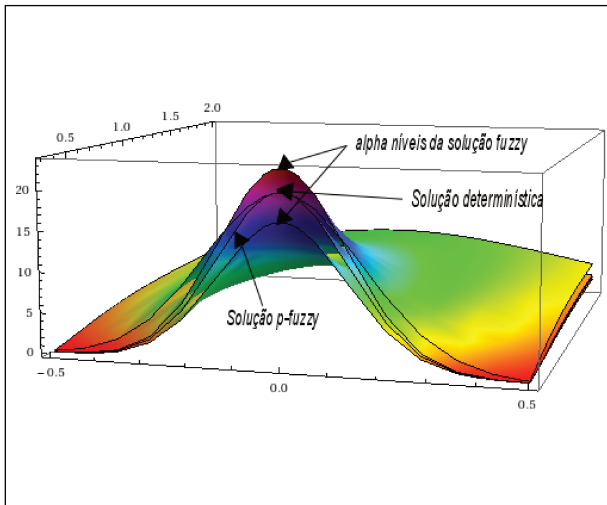


Figura 6.11: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p-fuzzy associado a equação (6.7)

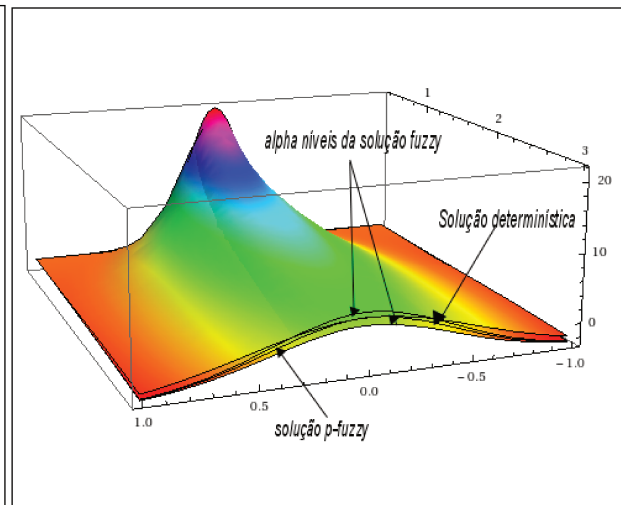


Figura 6.12: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p-fuzzy associado a equação (6.7)

Item c)

Analisaremos a equação de difusão com coeficiente de difusão dependente do tempo e coeficiente de decaimento constante. Assim, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1495(1 - \tanh(15.65t - 28.34)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.17u \quad (6.8)$$

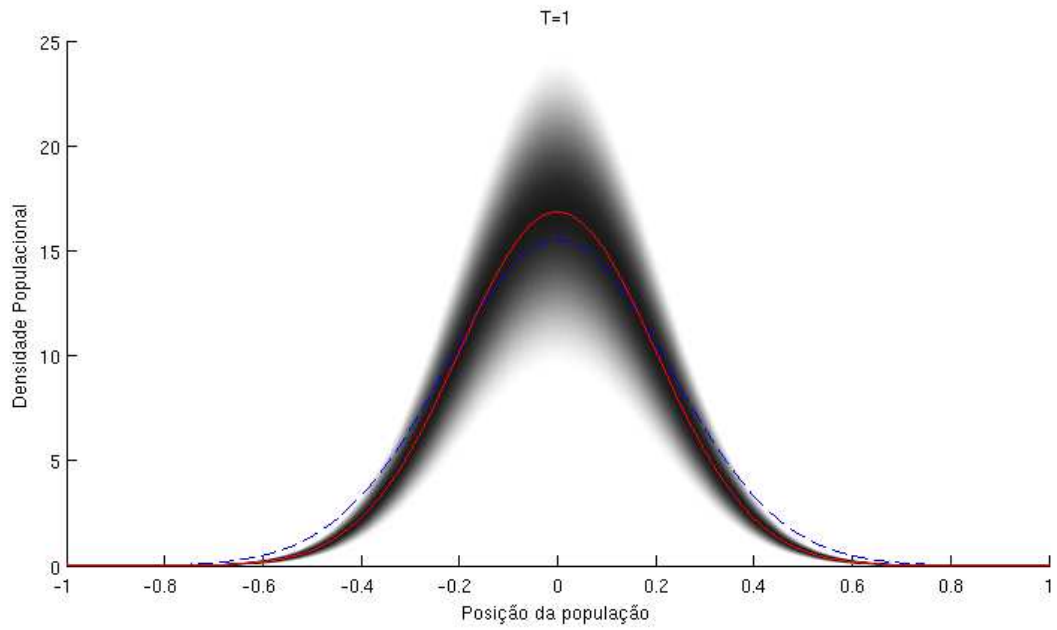


Figura 6.13: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 1$ da solução da equação (6.7).

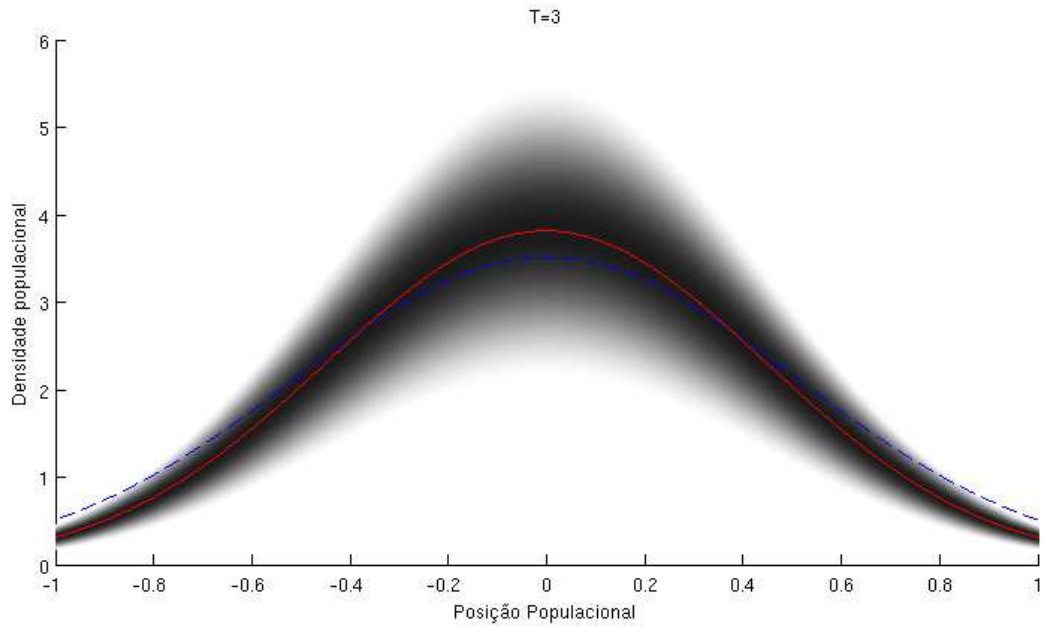


Figura 6.14: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 3$ da solução da equação (6.7).

Dessa forma, para que tenhamos uma solução para o sistema dinâmico p-fuzzy associado ao item c) basta escolhermos o sistema dinâmico

$$X_{K+1} = x_k + \left(-\frac{0.01996}{3}k + 0.01998\right)\Delta x_k - 0.17x_k$$

As Figuras 6.15 e 6.16 fazem a comparação da solução determinística com a p-fuzzy e as figuras 6.17 e 6.18 mostram todas as soluções juntas: Determinística, p-fuzzy e fuzzy.

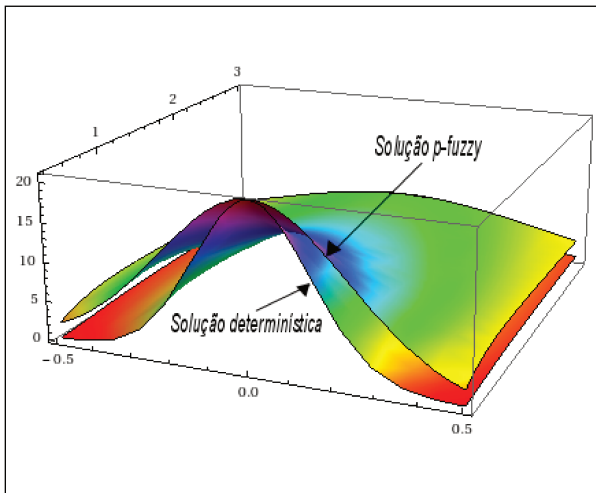


Figura 6.15: Gráfico da solução determinística e p-fuzzy associado a equação (6.8)

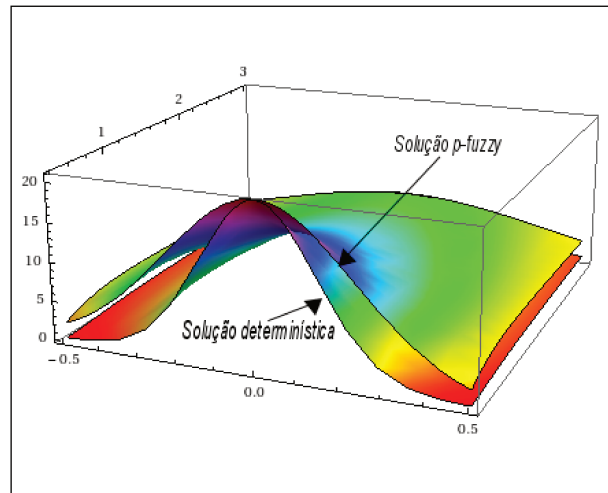


Figura 6.16: Gráfico da solução determinística e p-fuzzy associado a equação (6.8)

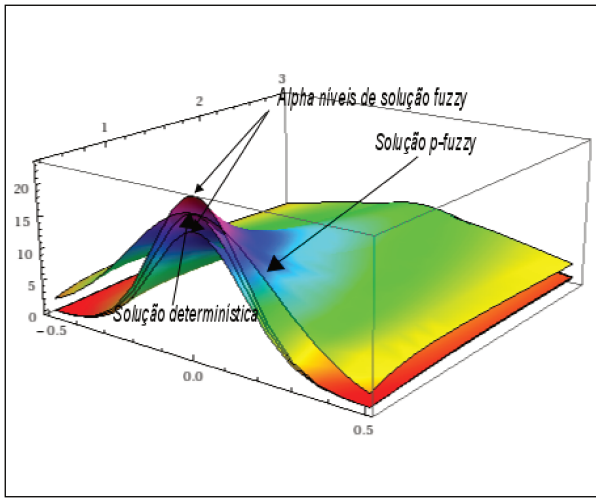


Figura 6.17: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p-fuzzy associado a equação (6.8)

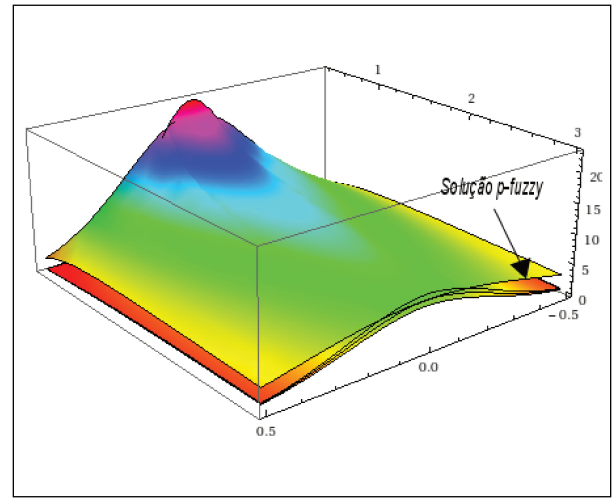


Figura 6.18: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p-fuzzy associado a equação (6.8)

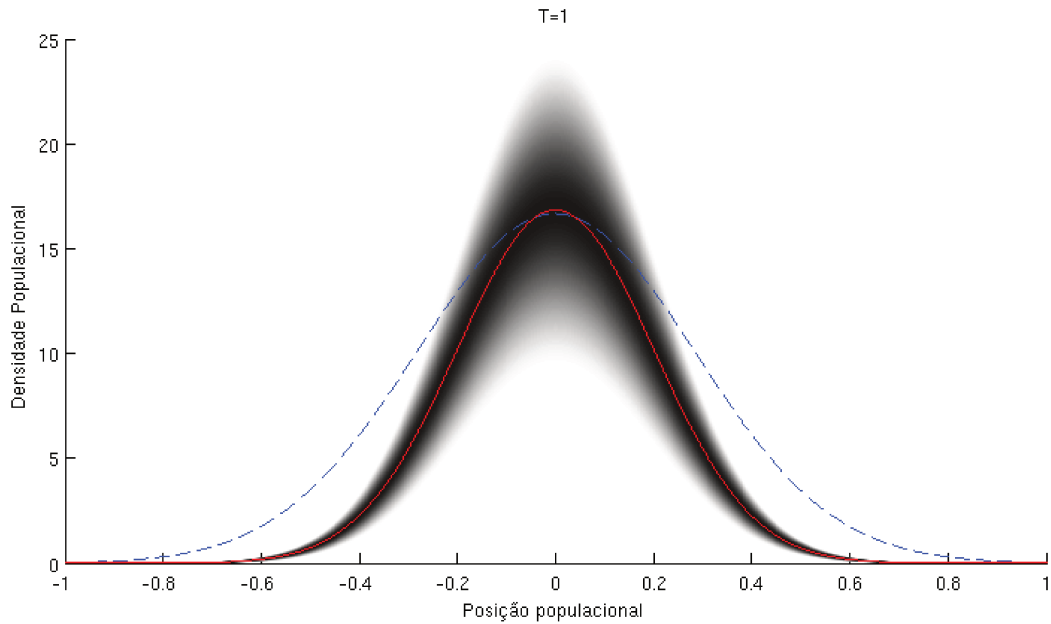


Figura 6.19: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 1$ da solução da equação (6.8).

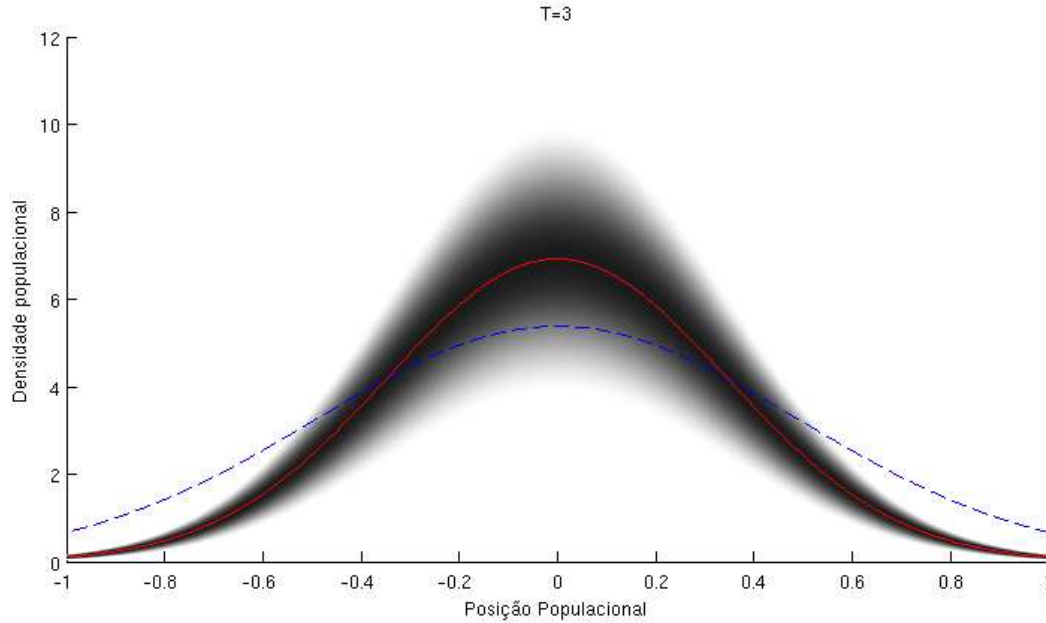


Figura 6.20: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 3$ da solução da equação (6.8).

Item d)

Agora, analisaremos a equação de difusão decaimento com coeficiente de difusão dependente do tempo e coeficiente de decaimento também dependente do tempo. Assim, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1495(1 - \tanh(15.65t - 28.34))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.1261(1 - \tanh(36.39t - 70.89))u \quad (6.9)$$

As Figuras 6.21 e 6.22 fazem a comparação da solução determinística com a p-fuzzy e as Figuras 6.23 e 6.24 mostram todas as soluções juntas: Determinística, p-fuzzy e fuzzy.

Dessa forma, para que tenhamos uma solução para o sistema dinâmico p-fuzzy associado ao item b) basta escolhermos a iteração

$$X_{K+1} = x_k + \left(-\frac{0.01996}{3}k + 0.01998\right)\Delta x_k - \left(-\frac{0.17}{3}k + 0.17\right)x_k$$

onde os termos $-\frac{0.01996}{3}k + 0.01998$ e $-\frac{0.17}{3}k + 0.17$ foram escolhidos a partir do ajuste da reta passando por $D(t) = 0.0296$, $D(t) = 0$ e $\alpha(t) = 0.2559$, $\alpha(t) = 0.00014$ respectivamente.

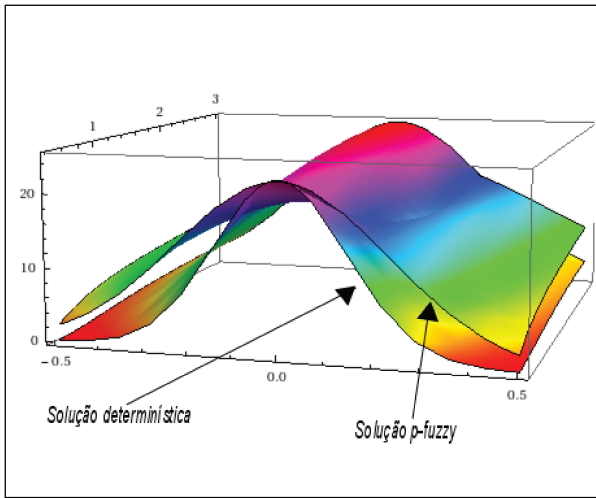


Figura 6.21: Gráfico da solução determinística e p -fuzzy associado a equação (6.9)

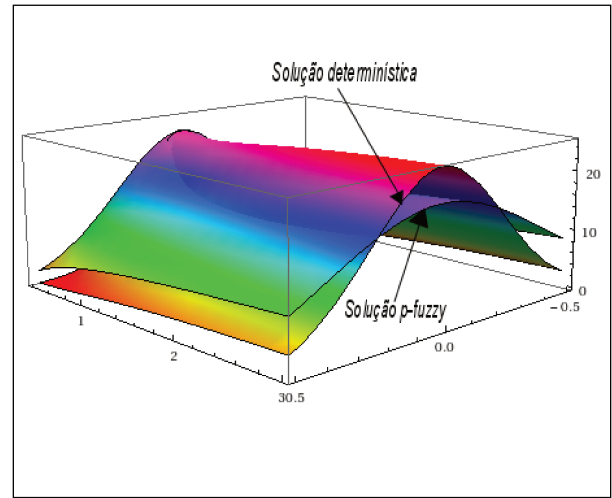


Figura 6.22: Gráfico da solução determinística e p -fuzzy associado a equação (6.8)

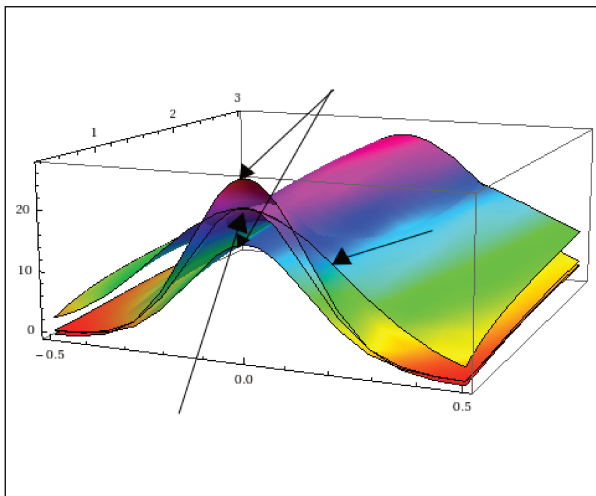


Figura 6.23: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p -fuzzy associado a solução da equação (6.9)

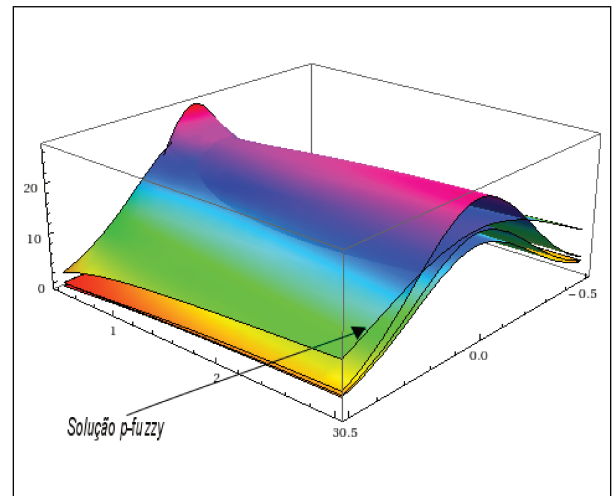


Figura 6.24: Gráfico dos α -níveis da solução fuzzy, determinística e p -fuzzy associado a solução da equação (6.9)

6.2 Modelo de difusão aplicado a dispersão larval

Nesta secção vamos estudar o modelo proposto por Bassanezi et al. (1997) considerando a condição inicial do problema de difusão incerta. Em Bassanezi et al. (1997) é

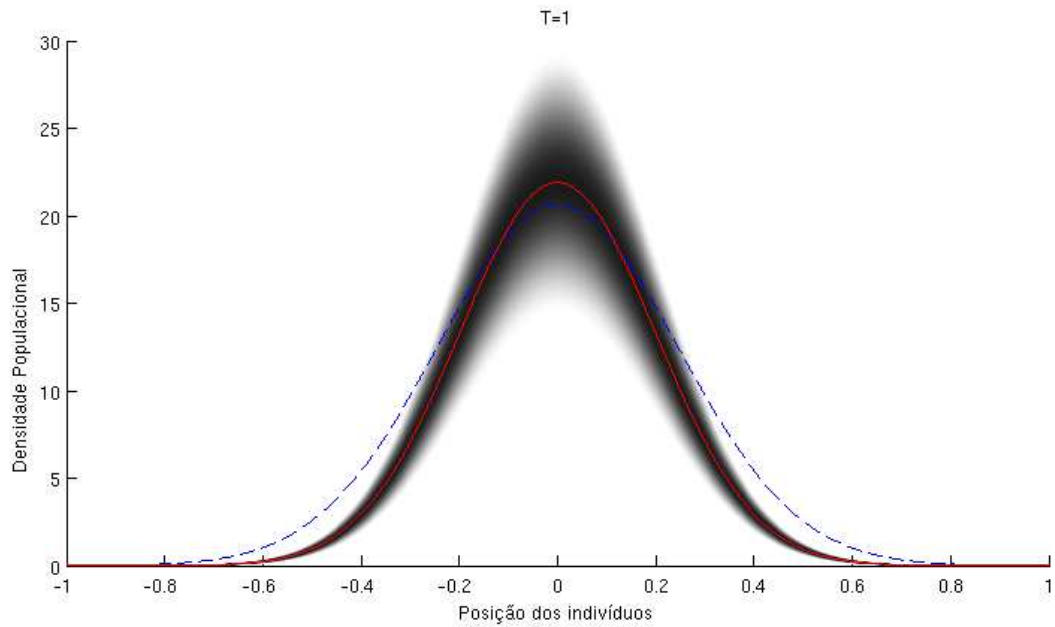


Figura 6.25: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 1$ da solução da equação (6.9).

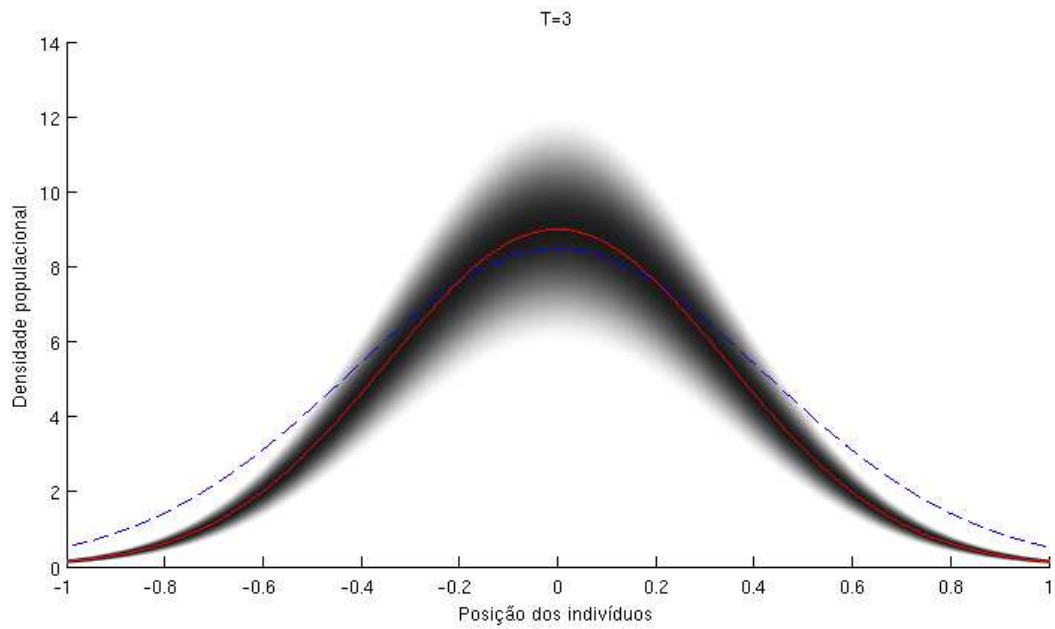


Figura 6.26: Gráfico das soluções fuzzy, determinística e p-fuzzy no tempo $t = 3$ da solução da equação (6.9).

proposto um modelo de difusão aplicado a dispersão larval pós-alimentar. Neste estudo, uma abordagem de difusão é empregada para modelar a forma de dispersão larval desde o substrato alimentar, baseado em dados experimentais de três espécies de varejeiras, *Chrysomya megacephala*, *C. putoria* e *Cochliomyia macellaria*.

Os modelos de difusão têm sido amplamente utilizados para localizar problemas ecológicos e têm sido particularmente úteis para analisar a dispersão em insetos adultos. Contudo, esta abordagem aparentemente não tem sido explorada para compreender o comportamento da dispersão de insetos imaturos tais como as moscas varejeiras, onde dois grupos de indivíduos interagem, aqueles que estão migrando ativamente e aqueles que já se enterraram no substrato.

O presente esforço é uma primeira aproximação para o complexo problema de dispersão larval, que inclui fatores que agem em nível individual, tais como, o peso mínimo necessário para a pupação e aqueles que intervêm nos níveis populacional e de comunidade incluindo o tempo e a velocidade com que as larvas deixam o substrato, o padrão espaço-temporal de predação e parasitismo, a composição física do substrato, e a disponibilidade de locais adequados para pupar.

A aplicação da teoria de difusão tem uma rica tradição de mecanismos e processos em biologia populacional, e nós acreditamos que a abordagem apresentada aqui segue esta tradição. Como em outros estudos, foram feitas hipóteses simplificadoras tais como a invariância de coeficientes de difusão com espaço, tempo, e densidade larval. Todavia, o propósito primário do modelo apresentado aqui foi desenvolver um arcabouço para analisar a dispersão de insetos imaturos que vivem em carniça ou outros substratos efêmeros.

A abordagem passiva do modelo de difusão simples tomada aqui inclui duas características relevantes que explicitamente leva em conta a dispersão de fase da vida e assume que as distâncias de dispersão são limitadas, o que é comumente considerado como uma limitação nos modelos de difusão tais como aqueles aplicados à dispersão de insetos adultos.

Os modelos de difusão podem ser escritos na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u)$$

onde $f(u)$ é o termo que descreve a variação da população com relação a nascimento e morte, e em também, advecção.

Foi tomada vantagem da flexibilidade dos modelos de difusão para incorporar características comportamentais de dispersão no estágio larval. O modelo inclui a difusão clássica e velocidade na forma de advecção, e também uma função que descreve o processo de enterramento das larvas no substrato para se tornar pupa.

O foco nestas moscas é motivado pelo fato de duas espécies de *Chrysomya*, que são nativas do Velho Mundo, Austrália e Ásia, serem parte de uma invasão contínua das Américas. A invasão das moscas dispersou-se rapidamente em todo o continente e, aparentemente causou o declínio no número populacional da espécie nativa, *C. macellaria*.

O processo de dispersão larval pós-alimentar, a partir do substrato alimentar, em caloforídeos tais como *C. megacephala*, *C. putoria* e *C. macellaria*, envolve indivíduos que estão dispersando enquanto alguns deles começam o enterramento no substrato para pupação. Por causa desta característica, a forma de dispersão somente pode ser inferida quando todos os indivíduos tiverem pupado.

Para cada espécie, depois que todos os indivíduos puparam no substrato, foi contado o número de pupas observadas a cada 20cm de intervalo do ponto de lançamento (carça colocada em uma extremidade da caixa) a uma extremidade da caixa. As distâncias individuais de dispersão foram então medidas como a distância percorrida pela larva, pós-alimentada, do “ponto de lançamento” ao sítio de pupação.

O número de pupas encontrado em cada intervalo foi plotado contra a distância percorrida pelas larvas e o padrão geral que emerge deste conjunto de dados é similar para as três espécies que não se moveram para longe do substrato alimentar, e o número de larvas em dispersão diminui com a distância.

Não obstante, as duas espécies invasoras diferem notavelmente da espécie nativa na forma de dispersão. Em *C. megacephala* e *C. putoria*, a forma de dispersão mostra um padrão de oscilações, enquanto na espécie nativa, *C. macellaria*, o número de larvas em dispersão aparentemente declina monotonamente como visto na Figura 6.27.

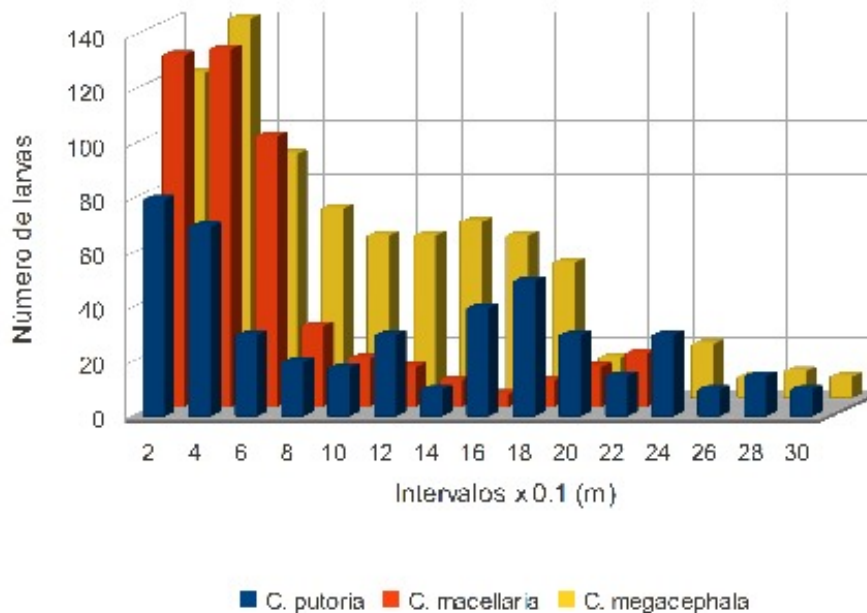


Figura 6.27: Ajuste do modelo de difusão baseado na solução.

6.2.1 Modelo de Difusão determinístico

O modelo de difusão tratado em Bassanezi et al. (1997) é o unidimensional dado por

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) + \alpha \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) - h(x, t) \quad (6.10)$$

onde $c(x, t)$ é a concentração de larvas na superfície, x é a coordenada espacial unidimensional, t é o tempo do processo, D é o coeficiente de difusão e α é o coeficiente de proporcionalidade da velocidade de advecção das larvas.

Os dois primeiros termos de equação 6.10 descrevem o movimento das larvas na superfície do substrato. O último termo $h(x, t)$ mede a taxa de enterramento das larvas. Como uma aproximação à forma de disseminação das larvas mostrada na Figura 6.27, o processo de enterramento das larvas no substrato declinou exponencialmente com a distância dispersada pelas larvas e foi diretamente proporcional à diferença na concentração das larvas. Essas hipóteses então levam a:

$$h(x, t) = k \left(c_0 \frac{(x^* - x)}{x^*} e^{-rx} - c(x, t) \right) \quad (6.11)$$

para $t \leq t^*$ e $x \leq x^*$, onde k é uma constante de proporcionalidade, c_0 é a quantidade inicial de larvas, x^* é a distância máxima de viagem da larva e t^* é o tempo máximo de dispersão. Note que $c(x, t) \geq 0$ e $h(x, t) \geq 0$ para $t \leq t^*$, por outro lado, se $t > t^*$ então $c(x, t) = h(x, t) = 0$.

A concentração de larvas enterradas em algum ponto é dado por

$$c^*(x, t) = \int_0^t h(x, \tau) d\tau \quad (6.12)$$

Usando (6.11) e (6.12) temos

$$c^*(x, t) = \frac{kc_0}{x^*} (x^* - x) t e^{-rx} - k \int_0^t c(x, \tau) d\tau \quad (6.13)$$

para $x \leq x^*$ e $t \leq t^*$.

Quando $t \leq t^*$ não existe larvas deixadas no substrato, nesse caso

$$c^*(x, t^*) = \frac{kc_0}{x^*} (x^* - x) t^* e^{-rx} - k \int_0^{t^*} c(x, \tau) d\tau \quad (6.14)$$

que descreve o fim do ciclo larval de dispersão logo

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t^*) = 0 \quad (6.15)$$

De (6.10) e (6.15) temos

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial c}{\partial x} - h(x, t) = 0 \quad (6.16)$$

para $t = t^*$

Desde que as derivadas na equação 6.16 não dependam do tempo, temos

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{D} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k}{D} c = \frac{kc_0}{Dx^*} (x^* - x) e^{-rx} \quad (6.17)$$

A solução da equação homogênea (6.17), que fornece a estabilidade do processo é dada por:

$$c_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

onde

$$\lambda_i = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad i = 1, 2$$

para $p = \frac{\alpha}{D}$ e $q = \frac{k}{D}$.

As partes reais de λ_1 e λ_2 são sempre negativas, produzindo soluções com decaimento exponencial. O caso $p^2 \leq 4q$ é relevante para o entendimento da dispersão larval por causa das raízes complexas associadas. Se $p^2 \leq 4q$ nos temos que

$$\frac{\alpha^2}{D} < 4k \quad (6.18)$$

Se (6.18) vale, então

$$c_h(x) = \beta \cos(\omega x - \theta) e^{-\frac{p}{2}x} \quad (6.19)$$

onde, $\omega = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Uma solução particular para 6.17 pode ser dada por

$$c_p(x) = (B_1 + A_1 x) e^{-rx} \quad (6.20)$$

Substituindo $c_p(x)$ em (6.18) temos

$$A_1 = \frac{-qc_0}{x^*(r^2 - pr + q)} \text{ e } B_1 = \frac{qc_0(p - 2r + x^*(r^2 - pr + q))}{x^*(r^2 - pr + q^2)}$$

Logo, a solução geral de (6.16) é dada por

$$c(x) = \beta \cos(\omega x - \theta) e^{-\frac{p}{2}x} + (B_1 + A_1 x) e^{-rx} \quad (6.21)$$

Usando (6.21) em (6.14), temos a solução de distribuição da larva em equilíbrio na forma

$$c^*(x, t^*) = -\beta k t^* \cos(\omega x - \theta) e^{-\frac{p}{2}x} + k t^* (C_0 - B_1 - (A_1 + \frac{C_0}{x^*}) x) e^{-rx}. \quad (6.22)$$

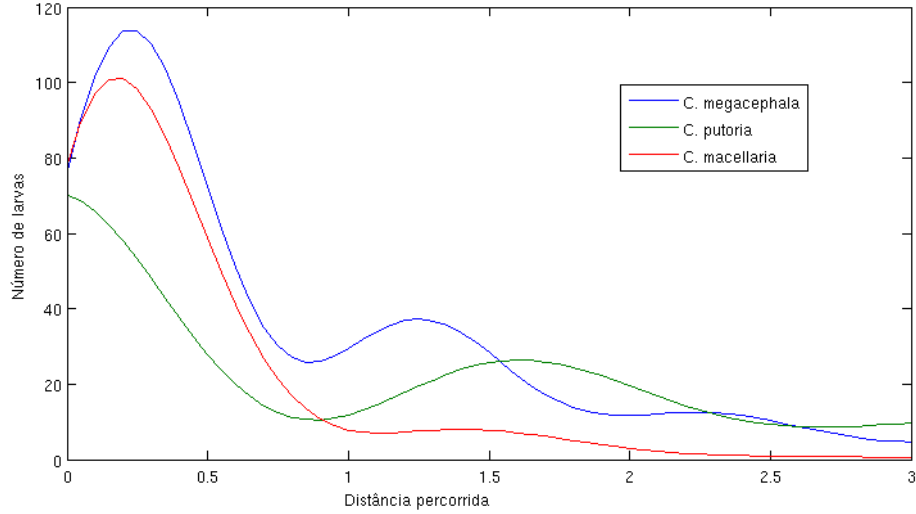


Figura 6.28: Ajuste do modelo de difusão baseado na solução da equação (6.22)

6.2.2 Modelo fuzzy

Consideremos que a condição inicial não é bem determinada, ou seja, suponha que o número de larvas na carcaça não é bem conhecido. Dessa forma considere a condição inicial \hat{c}_0 um número fuzzy (considerando que c_0 tenha grau de pertinência 1).

Dessa forma como a solução da equação (6.22) é contínua em c_0 podemos definir uma solução fuzzy, como sendo a Extensão de Zadeh da solução determinística (6.22), ou seja $\varphi_{\hat{c}_0}(t)$ é definida tal que

$$[\varphi_{\hat{c}_0}(t)]^\alpha = [-\beta kt^* \cos(\omega x - \theta) e^{-\frac{px}{2}} + kt^* \left(c_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^*} \right) - (B_1 + A_1 x) \right) e^{-rx}, \\ -\beta kt^* \cos(\omega x - \theta) e^{-\frac{px}{2}} + kt^* \left(c_0^2 \left(1 - \frac{x}{x^*} \right) - (B_1 + A_1 x) \right) e^{-rx}]^\alpha$$

sendo sua representação gráfica dada nas Figuras 6.28, 6.29, 6.30 e 6.31.

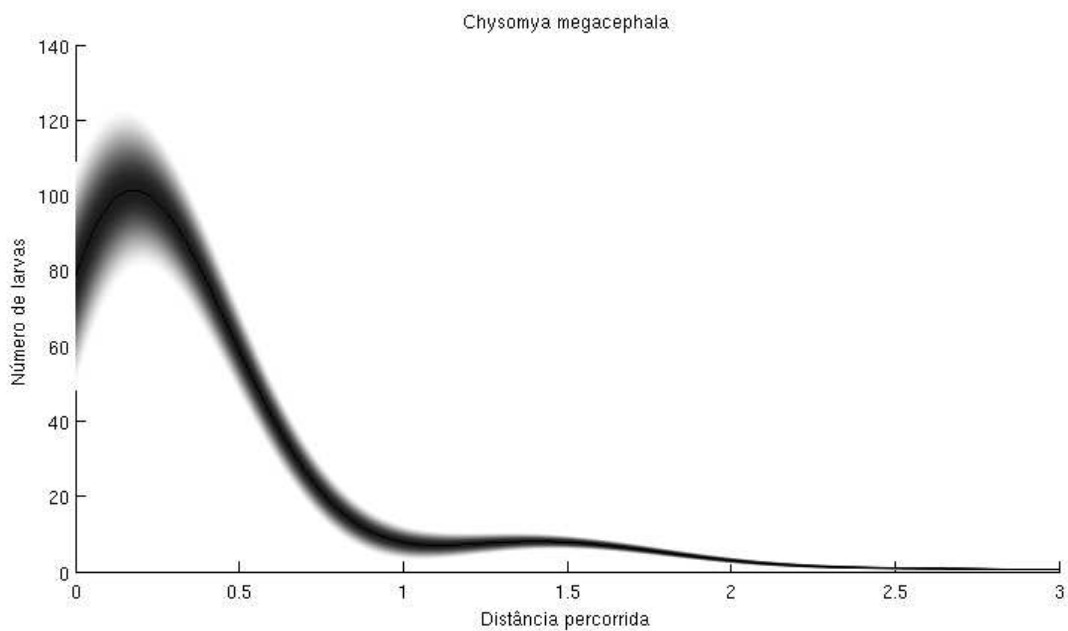


Figura 6.29: Solução fuzzy para a espécie *C. megacephala*.

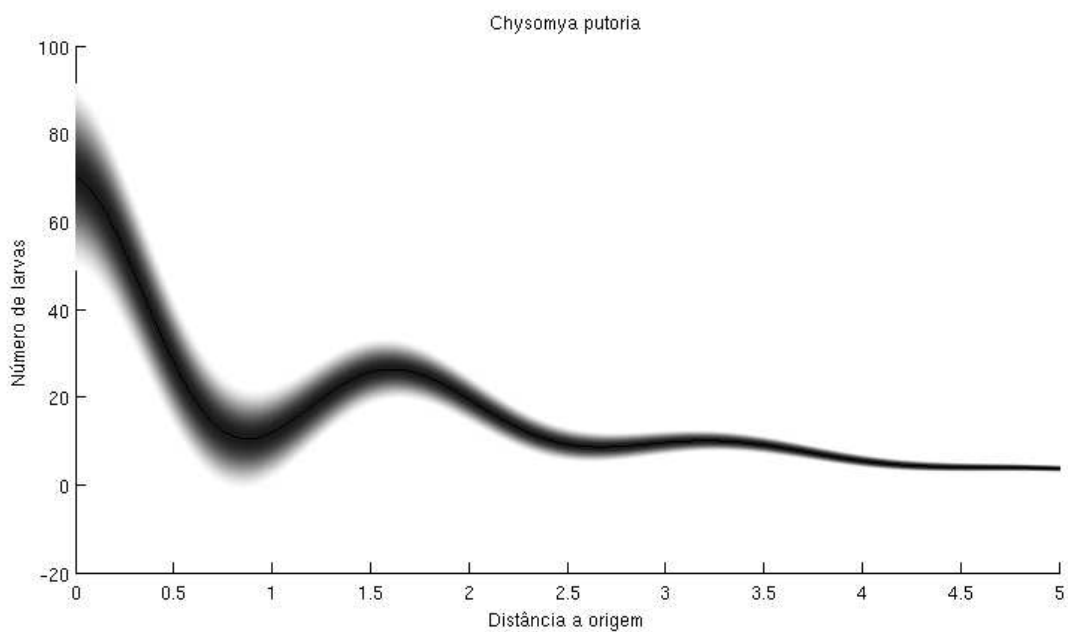


Figura 6.30: Solução fuzzy para a espécie *C. putoria*.

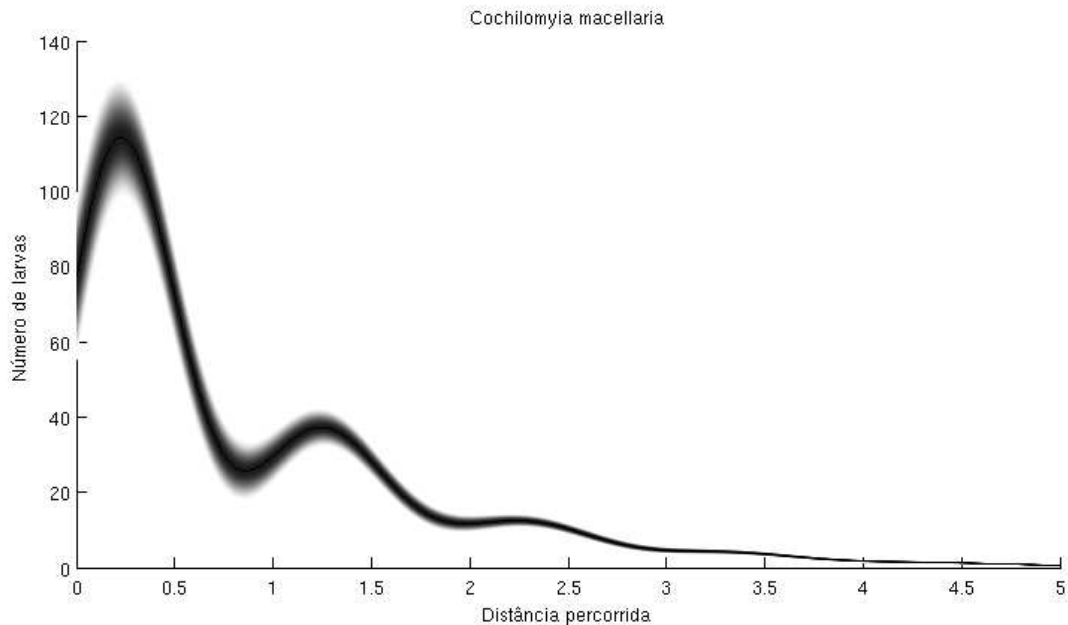


Figura 6.31: Solução fuzzy para a espécie *C. macellaria*.

Assim, os insetos cujos estágios imaturos migram a partir da procura de alimentos possuem um mesmo comportamento mesmo considerando a condição inicial de larvas com pequenas variações. O elemento do fluxo $\varphi_{\hat{c}_0}(t)$ com maior grau de pertinência é a curva determinística.

6.2.3 Discussão

Insetos cujos estágios imaturos migram da fonte de alimento à procura de sítios de pupação caracterizam um sistema particular com duas populações; uma de larvas migrando ativamente e outra de larvas enterrando-se para pupar. O processo de dispersão larval está completo quando todas as larvas enterraram-se e nenhuma larva permanece dispersa no substrato.

Estes aspectos fundamentais foram levados em conta no nosso modelo pela adição à equação de difusão de uma função, $h(x, t)$, descrevendo o processo de enterramento larval no substrato. Esta função envolve parâmetros biológicos importantes tais como a concentração inicial de larvas, a distância máxima percorrida pelas larvas durante a dispersão e o tempo tomado para a dispersão ocorrer. A forma desta função foi inferida de dados experimentais apresentados aqui que sugerem que o declínio do número de pupas com a distância da fonte é exponencial.

A equação de difusão incorporando a função de enterramento produziu uma solução analítica (6.22), que descreve a distribuição até o equilíbrio de larvas enterradas no substrato. Essa solução analítica foi usada para comparar o comportamento de dispersão

previsto pelo modelo de difusão com os dados observados para *C. megacephala*, *C. putoria* e *C. macellaria*.

A equação (6.22) foi ajustada aos dados usando uma regressão não-linear cujos detalhes estão descritos no Apêndice de Bassanezi et al. (1997). Neste artigo encontramos o ajuste da equação (6.22) aos dados de dispersão para as três espécies e assim demonstrando que a distribuição até o equilíbrio, dada pelo modelo de difusão é consistente com o padrão observado de dispersão larval nas varejeiras analisadas aqui.

Em outras palavras, a equação de difusão incorporando a função de enterramento parece dar conta de ambas as diminuições (oscilatória e monotônica) no número de pupas com o aumento da distância da fonte de alimento. A complexidade no comportamento de dispersão, como indicado pela igualdade em (6.19), é aparentemente o resultado de uma interação entre a velocidade (a^2), o movimento aleatório das larvas nestas varejeiras indicadas pelo coeficiente de difusão (D), e também envolve a constante de proporcionalidade (k) que rege a taxa pela qual as larvas se enterram no substrato.

Conclusões e perspectivas futuras

No capítulo 3 fizemos o estudo das equações diferenciais parciais de difusão fuzzy que nos trazem um método alternativo de tratarmos a modelagem de processos difusivos onde temos parâmetros e/ou condições iniciais incertas. Nos casos de modelos que simulem fenômenos reais, temos uma imprecisão em praticamente todos os parâmetros. Nosso trabalho traz mais um instrumento para tratamento de um desses parâmetros, fazendo para isso, a condição inicial fuzzy e definindo condições para que a solução fuzzy seja única, além de garantir que essas soluções sejam assintoticamente estáveis.

Já no capítulo 4, a partir do que foi exposto neste capítulo, temos que todas as propriedades de um fluxo determinístico se transferidas para o fluxo fuzzy associado a sistemas de difusão-reação-advecção fuzzy, com coeficiente de difusão dependente do tempo, produzem propriedades similares às da teoria clássica com a vantagem de transferir a subjetividade ao longo do processo.

No capítulo 5, estávamos interessados em encontrar soluções fuzzy ao qual não sabíamos a solução determinística e nem os parâmetros associados ao problema de difusão. Através de uma base de regras conseguimos descrever o processo de difusão desejado com a mesma eficácia da equação determinística. O mais interessante neste processo é que necessariamente não se tem condições de saber o melhor modelo, se o determinístico ou o p-fuzzy, uma vez que os resultados apresentados são muito semelhantes como podemos ver na Figura 5.23. A modelagem nem sempre pressupõe que se tenha dados reais, a intuição ou o bom senso pode guiar as formulações dos modelos. Do ponto de vista educacional o melhor modelo é secundário pois sempre se pode fazer um melhor do que o anterior e sempre se pode imaginar situações diferentes para o mesmo fenômeno (Bassanezi e Pompeu (2005)). Neste trabalho mostramos que é possível utilizar uma **SBRF** para modelar o comportamento da densidade populacional de uma espécie quando se quer levar em conta a difusão dos indivíduos.

Nós acreditamos que os modelos fuzzy apresentados aqui podem provar serem instrumentos úteis para explorar a dinâmica de dispersão por difusão de organismos tais como moscas varejeiras, besouros e outros dípteros e insetos onde a mesma fase do ciclo de dispersão em imaturos tem dois estágios, isto é, uma se movendo ativamente e outra enterrando-se no substrato (como visto no capítulo 6). Além de produzirem ferramentas

essenciais para o estudo da dispersão em geral. Não queremos com esse trabalho, afirmar que o modelo fuzzy é mais eficaz. O que buscamos aqui é desenvolver uma maneira alternativa que auxilie na interpretação dos resultados.

Sabemos que muito ainda se tem por fazer, sendo assim, podemos citar possibilidades de trabalhos futuros, tais como:

- a) Definir solução fuzzy para um problema de difusão em que o coeficiente de difusão é parcialmente conhecido, utilizando extensão de zadeh. Além de estender a mesma técnica para outras equações diferenciais parciais.
- b) Estudar problemas de valor inicial fuzzy em que a condição de contorno é incerta, possibilitando assim, um estudo mais apurado sobre a poluição em rios, lagos e mares por exemplo, onde a condição de fronteira dos lagos, rios e mares são afetados em virtude das marés, secas e período de chuvas.
- c) Obter coeficientes, antes desconhecidos para a equação de difusão clássica, usando base de regras. Observe que dessa forma, podemos encontrar a equação de difusão clássica associada ao problema.
- d) Definir e encontrar superfícies mínimas fuzzy, baseado no fato de que uma superfície mínima é uma superfície em que fixados todos os pontos do bordo, quaisquer dois pontos são ligados por infinitas curvas, podemos considerar esse bordo parcialmente conhecido. Podendo usar também as transformadas conhecidas, como por exemplo Weierstrass e Ribancur, considerando alguma função ou parâmetro das transformadas como incertos.

Esperamos assim, ter ajudado a enriquecer esse ainda pouco explorado mundo das equações diferenciais parciais fuzzy.

Referências Bibliográficas

- Aliprantis, C. D. e Border, K. C. (2005). *Infinite Dimensional Analysis*. Springer, New York, 3rd edition.
- Almeida, Jafelice, R. S., e Meyer, J. F. (2006). Modelagem fuzzy em dinâmica populacional. *CNMAC*.
- Banks, H. T., Kareiva, P. K., e Lamp, P. K. (1985). Modeling insect dispersal and estimating parameters when mark-release techniques may cause initial disturbances. *J. Math. Biology*.
- Barros, L. C. (1997). *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.
- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 de *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC.
- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (1997). On the continuity of the zadeh's extension. in "Seventh IFSA World Congress", Vol. II, Praga.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira, W. C. (1988). *Equações diferenciais com aplicações*, volume 1. Harbra, São Paulo.
- Bassanezi, R. C., LEITE, M., GODOY, W., ZUBEN, C. V., e REIS, S. (1997). Diffusion model applied to postfeeding larval dispersion in blowflies. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz*, 92:281–286.
- Bassanezi, R. C. e Pompeu, G. (2005). *Um estudo de modelagens alternativas: Podridão da Maçã.*, volume 15. Biomatemática, Campinas/SP.
- Buckley, J. J., James, J., e Feuring, T. (2000). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Systems*, 110(1):43–54.
- Cecconello, M. S. (2010). *Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy - Aplicações em Biomatemática. Modelagem Alternativa Para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.

- Crank, J. (1975). *The Mathematics of diffusion*. Oxford University press, Oxford.
- Diamond, P. (2000). Stability and periodicity in fuzzy differential equations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8:583–590.
- Diamond, P. e Kloeden, P. (1994). *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. World Scientific, Singapore.
- Diaz, L. (1998). *O acaso e a decisão : modelos matematicos para dispersão populacional*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.
- Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*, volume 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society.
- Ferreira, J. C. M. (2010). Teorema de linearização para fluxos fuzzy. *A ser enviado*.
- Fullér, R. e Kereszfalvi, T. (1991). On generalization on nguyen’s theorem. *Fuzzy Sets Systems*, 41(3):371–374.
- Hüllermeier, E. (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5(2):117–137.
- Jafelice, R. S. (2003). *Modelagem Fuzzy para Dinâmica de Transferência de Soropositivos para HIV em Doença Plenamente Manifesta*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.
- Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, 24(3):301–318.
- Kandel, A. e Byatt, W. J. (1981). Fuzzy differential equations. in “Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society”, Tóquio.
- Kareiva, P. M. (1983). Local moviment in herbivorous insects: Applyind a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecologia*.
- Klir, G. J. e Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*. Prentice Hall PTR, New Jersey.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- Leite, J. e Bassanezi, R. C. (2010). Sistemas dinâmicos fuzzy aplicado a processos difusivos. *Biomateática - IMECC/UNICAMP*.
- Leite, J. e Bassanezi, R. C. (2011). Descrição de processos difusivos utilizando apenas base de regras. *Biomateática - IMECC/UNICAMP*.

- Massad, E. (2009). *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond*, volume 1. Springer - Verlag, Hardcover.
- Missio, M. (2008). Um modelo de edp com parâmetros fuzzy para o espalhamento geográfico de epidemias. Master's thesis, IMECC - UNICAMP.
- Mizukoshi, M. T. (2004). *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.
- Negoita, C. V. e Ralescu, D. A. (1975). *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. Wiley, New York.
- Nguyen, H. T. (1978). A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64:369–380.
- Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (2000). *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2nd edition.
- Oberguggenberger, M. e Pittschmann, S. (1999). Differential equations with fuzzy parameters. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 5:181–202.
- Peixoto, M. S., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2004). Um modelo presa predador em citros: purgões e joaninhas. *Biomateática - IMECC/UNICAMP*.
- Puri, M. L. e Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Analysis and Applications*, 91:552–558.
- Ralescu, D. A. (1992). A generalization of the representation theorem. *Fuzzy Sets Systems*, 51(3):309–311.
- Ricard, M. R., Camejo, C. C., e Bassanezi, R. C. (2005a). Travelling waves for a model of transmission with heterogeneity. *Proceeding of International Symposium on Mathematical and Computational Biology*.
- Ricard, M. R., González, C. G., e Bassanezi, R. C. (2005b). Epidemiological model with fast dispersion. *Proceeding of International Symposium on Mathematical and Computational Biology*.
- Román-Flores, H., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2001). A note on zadeh's extensions. *Fuzzy Sets Systems*, 117:327–331.
- Saidi, F. B. e Jaballah, A. (2008). Uniqueness in the generalized representation by fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(16):2176 – 2184.

- Scapim, J. (2008). Modelo de von bertalanffy generalizado aplicado à curvas de crescimento animal. Master's thesis, IMECC - UNICAMP.
- Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets Syst.*, 24(3):319–330.
- Silva, J. D. M. (2005). *Análise da estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.
- Vorobiev, D. e Seikkala, S. (2002). Towards the theory of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, 125(2):231–237.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.