

Um Estudo Topológico Sobre Anéis de Valorização de Dubrovin

Oscar Ricardo Janesch

Orientador: Prof. Dr. Antônio José Engler

**Tese apresentada ao Curso de Doutorado
do Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da Universidade
Estadual de Campinas, como requisito
parcial para a obtenção do Título de
Doutor em Matemática Pura.**

Campinas - 1998

Um Estudo Topológico Sobre Anéis de Valorização de Dubrovin

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Oscar Ricardo Janesch e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de junho de 1998



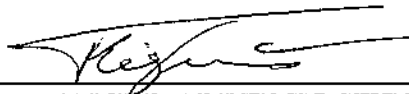
Prof. Dr. Antônio José Engler
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

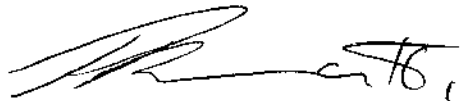
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER



Prof (a). Dr (a). MIGUEL ANGEL ALBERTO FERRERO



Prof (a). Dr (a). PAULO ROBERTO BRUMATTI



Prof (a). Dr (a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV



Prof (a). Dr (a). ROBERTO CELSO FABRÍCIO COSTA

RESUMO

Neste trabalho é feito um estudo topológico dos anéis de valorização de Dubrovin em um anel artinianiano simples. A motivação para esta abordagem é o Teorema de Kowalski e Dürbaum, que classifica as V -topologias em um corpo como sendo geradas por anéis de valorização ou por valores absolutos deste corpo. A partir de um anel de valorização de Dubrovin R do anel artinianiano simples Q , é definida a topologia dos R -ideais em Q . Propriedades da topologia dos R -ideais são verificadas, e esta topologia é relacionada com a topologia $J(R)$ -ádica, e com a topologia gerada por uma função valorização em Q . É introduzido o conceito de V -topologias para os anéis artinianiano simples, possibilitando classificar tais V -topologias em Q como sendo geradas por anéis de valorização de Dubrovin ou por normas em Q , e provar que toda V -topologia é localmente limitada. As topologias geradas por anéis de valorização de Dubrovin são caracterizadas como topologias localmente limitadas, que possuem uma vizinhança limitada da origem aditivamente fechada e cuja restrição ao centro é uma V -topologia deste corpo.

ABSTRACT

Dubrovin valuation rings in simple artinian rings are studied topologically. The motivation is the Theorem due to Kowalski and Dürbaum which ensures that any V -topology over a field is generated by means of a valuation ring or an absolute value of the field. Beginning from Dubrovin valuation ring R in the simple artinian ring Q , a topology namely R -ideal topology is defined. Properties of the R -ideal topology are proved, and this topology is connected with $J(R)$ -adic topology, and also with the topology produced by a value function in ring Q . The concept of V -topology for artinian simple ring is introduced in order to obtain a classification of V -topologies in Q . These V -topologies are generated exactly by Dubrovin valuation rings or norms in Q . It is also shown that every V -topology in Q is locally bounded. The topologies generated by Dubrovin valuation rings in Q are characterized through locally bounded topologies with a bounded neighbourhood of zero that is closed by sums, and the restriction of this topology over your center is a V -topogical field.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

Ao Professor Engler, não apenas pela orientação segura, mas também pela forma amigável que conduziu nossas conversas por longas tardes, proporcionando um ambiente motivador para meus estudos.

À minha esposa Silvia, e ao meu filho Ricardo, pela compreensão e incentivo.

Índice

Introdução	i
Capítulo 1 - Anéis de Valorização de Dubrovin	1
Capítulo 2 - A Topologia dos R-ideais	24
Capítulo 3 - Funções Valorização em Anéis Artinianos Simples	47
Capítulo 4 - Anéis Artinianos Simples e V-topologias	64
Bibliografia	90

Introdução

A definição de anel de valorização de um corpo, quando aplicada a um anel de divisão, produz os anéis de valorização totais. Estes anéis são chamados invariantes, quando são invariantes por todos os automorfismos internos do anel de divisão. O ponto de partida para o estudo de anéis de valorização totais e invariantes, foram os trabalhos de Schilling [S1] e [S2].

Uma restrição aos anéis de valorização totais e invariantes, como generalização da definição comutativa, pode ser detectada pelo Teorema da Extensão, que deixa de ser verificado quando passamos de corpos para anéis de divisão. Mesmo no caso mais simples, onde D é um anel de divisão que tem dimensão finita sobre seu centro F e V é um anel de valorização de F , não é possível em geral obter um anel de valorização total B de D tal que $B \cap F = V$.

Uma definição para anel de valorização de um anel artiniano simples, que generaliza a definição usada para corpos, foi apresentada por Dubrovin em [D1]. No mesmo artigo e em [D2], foram demonstrados resultados que justificam esta generalização, inclusive o Teorema da Extensão para anéis de valorização do centro F de um anel artiniano simples Q , quando a dimensão de Q sobre F é finita.

Os anéis de valorização totais e invariantes de um anel de divisão D , geram topologias em D , que são denominadas V -topologias. Kowalski e Dürbaum obtiveram em [KD] uma classificação para as V -topologias, mostrando que toda V -topologia em um anel de divisão D é gerada por um anel de valorização total e invariante, ou por um valor absoluto em D . A partir da definição dos anéis de

valorização de Dubrovin para anéis artinianos simples, surge a necessidade de definir e classificar V -topologias em anéis artinianos simples.

Os principais resultados deste trabalho, são obtidos através de um estudo topológico dos anéis de valorização de Dubrovin para anéis artinianos simples de dimensão finita sobre seu centro. Destacamos o Teorema 2.17, que mostra que a topologia gerada por um anel de valorização de Dubrovin no anel artiniano simples Q , é equivalente a topologia produto em Q . Baseados neste resultado, propomos a definição de V -topologia em anéis artinianos simples, e através dos Teoremas 4.6 e 4.11, classificamos estas V -topologias como sendo geradas por anéis de valorização de Dubrovin, ou por normas em Q . Outro resultado relevante que verificamos, é o Teorema 3.13 que estabelece a equivalência entre topologias geradas por anéis de valorização de Dubrovin, e topologias geradas por funções valorização de um anel artiniano simples. Finalmente, com os Teoremas 4.23 e 4.26 caracterizamos as topologias no anel artiniano simples Q , que são geradas por anéis de valorização de Dubrovin de Q .

O trabalho está apresentado em quatro capítulos. No Capítulo I apresentamos algumas propriedades envolvendo anéis artinianos simples, e resultados sobre anéis de valorização de Dubrovin. No Capítulo seguinte, verificamos que um anel de valorização de Dubrovin R do anel artiniano simples Q , gera uma topologia que torna Q um anel topológico de Hausdorff. Estudamos propriedades desta topologia e caracterizamos os anéis de valorização de Dubrovin que geram topologias equivalentes. Também verificamos que R ser anel de valorização discreto de Q é condição necessária e suficiente para que a topologia $J(R)$ -ádica coincida com a topologia gerada por R . No terceiro Capítulo buscamos o enfoque topológico para as funções valorização definidas em anéis artinianos simples. Definimos uma topologia a partir da função valorização, e através da relação com os anéis de valorização de Dubrovin, mostramos que a cada topologia gerada por um anel de valorização, corresponde uma topologia equivalente gerada por uma função valorização. Em consequência das propriedades da topologia gerada por um anel de valorização de Dubrovin, apresentamos no Capítulo IV a definição para V -topologia em um anel artiniano simples. Com esta definição, provamos que toda V -topologia é gerada por um anel de valorização de Dubrovin ou por uma norma em Q . Verificamos ainda que uma V -topologia em um anel artiniano simples é localmente limitada. Finalizamos caracterizando as topologias geradas por anéis de valorização de Dubrovin, como topologias localmente limitadas que possuem uma vizinhança da origem aditiva-

mente fechada, e cuja restrição ao centro é um corpo V -topológico.

Todos os anéis considerados são anéis com unidade, e os subanéis têm a mesma unidade do anel. Os corpos sempre são comutativos, e os anéis de divisão satisfazem os axiomas de corpo com a possível exceção da comutatividade. Os resultados sobre anéis de Goldie apresentados no Capítulo I, podem ser encontrados em [Go], enquanto o conceito de anel satisfazendo uma identidade polinomial, chamado PI-anel, segue o exposto em [Ro].

Se σ e τ são topologias no mesmo conjunto S , dizemos que σ é mais fina que τ e denotamos $\sigma \succ \tau$, quando a aplicação identidade $i : (S, \sigma) \rightarrow (S, \tau)$ é contínua. Assim σ e τ são equivalentes quando $\sigma \succ \tau \succ \sigma$.

Para um anel Q com centro F , fixamos as notações:

- Q^* — conjunto dos elementos regulares de Q .
- $U(Q)$ — conjunto dos elementos inversíveis de Q .
- $J(Q)$ — radical de Jacobson de Q .
- Q_Q — o anel Q visto com Q -módulo a direita.
- $M_n(Q)$ — anel de matrizes $n \times n$ sobre Q .
- $A \leq B$ — A é submódulo de B .
- $A \subset B$ — A contido estritamente em B .
- $[Q : F]$ — dimensão de Q sobre F como espaço vetorial, quando Q é anel artiniano simples.

Quando X e Y são subconjuntos de Q e $u \in Q$, escrevemos:

$$u + X = \{u + x ; x \in X\}$$

$$X + Y = \{x + y ; x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

$$-X = \{-x ; x \in X\}$$

$$X.Y = \{xy ; x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

$$X^{-1} = \{x^{-1} ; x \in X\} \quad \text{para } X \subseteq U(Q).$$

Capítulo 1

Anéis de Valorização de Dubrovin

Iniciamos definindo os anéis de valorização totais e invariantes para anéis de divisão, e em seguida apresentamos resultados que estabelecem a linguagem usada no Teorema que caracteriza os anéis de valorização de Dubrovin. Neste Teorema vemos que tais anéis são ordens bilaterais em anéis artinianos simples, e então pelo Primeiro Teorema de Goldie, têm as propriedades dos anéis de Goldie primos. Também definimos os anéis de valorização de Dubrovin discretos. Concluímos esta parte fazendo um levantamento de propriedades dos anéis de valorização de Dubrovin, que evidenciam sua relação com os anéis de valorização de corpos, e demonstrando uma proposição sobre a existência de anéis de valorização próprios para anéis artinianos simples.

A definição abaixo, apresentada por Schilling em 1945, estende aos anéis de divisão o conceito de anel de valorização de corpos.

Definição: Seja B um subanel de um anel de divisão D . Dizemos que B é um anel de valorização total e invariante de D , quando para cada $d \in D^*$ valem:

- (a) $d \in B$ ou $d^{-1} \in B$.
- (b) $dBd^{-1} = B$.

Se apenas a condição (a) é verificada, B é chamado anel de valorização total de D .

A condição (b) assegura que todo ideal de B é bilateral, pois se I é um ideal a direita de B , $x \in I$ e $b \in B$, então quando $x = 0$ temos $bx = 0 \in I$, e quando $x \neq 0$ temos $x^{-1}bx = b' \in B$ que implica $bx = xb' \in I$, e portanto I é ideal a esquerda.

Para um anel de valorização total B de D , observamos que:

- (1) Os ideais a direita (esquerda) de B estão ordenados por inclusão.
- (2) $J(B)$ é o único ideal maximal a direita (esquerda) de B .
- (3) $J(B) = B \setminus U(B)$.

Demonstração:

(1) Se tomarmos I e J ideais a direita de B tais que $J \not\subseteq I$, então existe $b \in J \setminus I$. Dado $0 \neq a \in I$ temos $0 \neq b^{-1}a \in D$ que implica em $b^{-1}a \in B$ ou $a^{-1}b \in B$. Se $a^{-1}b \in B$ então $b = aa^{-1}b \in I$, que não pode ocorrer. Resta $b^{-1}a \in B$ e daí $a = bb^{-1}a \in J$, que leva a $I \subseteq J$.

(2) A ordenação dos ideais a direita mostra que existe um único ideal maximal a direita, e como $J(B)$ é a interseção dos ideais maximais a direita, segue que $J(B)$ é o único ideal maximal a direita.

(3) A inclusão $J(B) \subseteq B \setminus U(B)$ sempre é verificada, e para $x \in B \setminus U(B)$ vem que x não tem inverso a direita ou a esquerda em B . Assumimos que $xB \subset B$ e daí xB está contido no único ideal a direita maximal $J(B)$. Portanto $x \in J(B)$ e vale $B \setminus U(B) \subseteq J(B)$.

Segue de (1) e (2) que os ideais bilaterais de um anel de valorização total B estão ordenados por inclusão, e que $J(B)$ é o único ideal bilateral maximal de B .

Um exemplo de anel de valorização total e invariante, no anel de divisão dos quatérnios racionais $\mathbb{H}$, é o anel $B = \mathbb{Z}_{(2)}\alpha + \mathbb{Z}_{(2)}i + \mathbb{Z}_{(2)}j + \mathbb{Z}_{(2)}k$ onde $\alpha = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$ e $\mathbb{Z}_{(2)} = \{ab^{-1}; a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b\}$, conforme ([W1], §1, Example (c)). Exemplos de anéis de valorização totais que não são invariantes, são construídos na secção 4 do Capítulo 1 de [M].

Definição: Sejam D um anel de divisão com centro F e V um anel de valorização de F . Uma extensão total de V em D é um anel de valorização total B de D tal que $B \cap F = V$.

Alguns resultados sobre as extensões totais de V em D estão reunidos em [BG1]. Quando $[D : F] < \infty$ vale:

- O número de extensões totais é menor ou igual a $\sqrt{[D : F]}$.
- Todas as extensões totais são conjugadas em D .
- Se existe uma extensão total e invariante, então ela é a única extensão total.
- Existe pelo menos uma extensão total se, e somente se, o conjunto dos elementos de D que são integrais sobre V é um subanel de D .

O último item sugere que as extensões totais podem não existir. Como exemplo citamos o anel dos quatérnios racionais $\mathbb{H}$ com centro $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}_{(p)} = \{ab^{-1}; a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$, $p \neq 2$, o anel de valorizações p -ádicos de $\mathbb{Q}$. Se B é uma extensão total de $\mathbb{Z}_{(p)}$ em $\mathbb{H}$ então $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq B$, $i, j, k \in B$ e assim $V_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} + \mathbb{Z}_{(p)}i + \mathbb{Z}_{(p)}j + \mathbb{Z}_{(p)}k \subseteq B$. Mas para $p \neq 2$, $V_{(p)}$ é subanel maximal de $\mathbb{H}$ conforme ([W1], §1, Example C), e daí $B = \mathbb{H}$ ou $B = V_{(p)}$. Se $B = \mathbb{H}$ vem que $\mathbb{Z}_{(p)} = B \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ que não é possível. Se $B = V_{(p)}$ então $V_{(p)}$ é anel de valorização total, mas escrevendo $p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com p não dividindo simultaneamente a, b, c e d , e tomando $x = p^{-1}(a + bi + cj + dk) \in \mathbb{H}$ temos $x \notin V_{(p)}$ e $x^{-1} = \bar{x} \notin V_{(p)}$ que é uma contradição, e portanto para $p \neq 2$, $\mathbb{Z}_{(p)}$ não tem extensão total em $\mathbb{H}$.

Uma definição de anel de valorização para anel artinian simples, que generaliza a definição de anel de valorização total, foi dada por Dubrovin em [D1]. Veremos que com esta definição, sempre é possível estender um anel de valorização do centro F de um anel artinian simples Q , quando $[Q : F] < \infty$.

Antes de definir os anéis de valorização de Dubrovin, apresentamos alguns resultados do livro de Goodearl [Go] sobre os anéis de Goldie. Aqueles familiarizados com a teoria de Goldie, podem continuar a leitura a partir do Teorema 1.2 na página 7.

Definição: Seja A um submódulo do módulo B . Dizemos que B é uma extensão essencial de A , ou que A é um submódulo essencial de B , quando todo submódulo não nulo de B tem interseção não nula com A .

Notação: $A \leq_e B$.

Para efetuar cálculos, é conveniente a equivalência: $A \leq_e B$ se e somente se, todo elemento não nulo de B tem múltiplo não nulo em A . Claramente $A \leq_e A$, $0 \leq_e A$ equivale a $A = 0$, e $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$ -módulos.

Definição: Um módulo A tem dimensão finita, quando não contém família independente infinita de submódulos não nulos.

Todos os módulos artinianos e todos os módulos noetherianos têm dimensão finita, e $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$ -módulo de dimensão finita que não é artiniano e nem noetheriano. Também todo ideal em um domínio comutativo tem dimensão finita. Quando $A \leq B$, produzimos novos exemplos verificando que:

- Se B tem dimensão finita, então A tem dimensão finita.
- Se $A \leq_e B$ e A tem dimensão finita, então B tem dimensão finita.

Para que um módulo A seja de dimensão finita, é exigido que toda família independente de submódulos não nulos seja finita. A próxima proposição garante que existe uma cota máxima para o número de elementos destas famílias, que será chamada de dimensão de Goldie de A . Esta cota está relacionada com os módulos uniformes, que definimos agora.

Definição: Um módulo uniforme é um módulo não nulo A , tal que quaisquer dois submódulos não nulos de A tem interseção não nula.

É imediato que todo módulo uniforme tem dimensão finita, e que A é módulo uniforme se, e somente se, $A \neq 0$ e todo submódulo não nulo de A é essencial.

Os módulos simples são uniformes. O anel $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{Z}$ -módulo uniforme. Se I

é ideal não nulo do domínio comutativo R , então I é R -módulo uniforme. Outros exemplos podem ser obtidos, observando que:

- Se $A \leq B$, $A \neq 0$ e B uniforme, então A é uniforme.
- Se $A \leq_e B$ e A é uniforme, então B é uniforme.

Proposição 1.1: ([Go], pg 86)

- (a) O módulo A tem dimensão finita se, e somente se, A tem um submódulo essencial que é soma direta finita de submódulos uniformes.
- (b) Se $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \leq_e A$ e cada A_i é uniforme, então toda família independente de submódulos não nulos de A tem no máximo n elementos.

Definição: Seja A um módulo de dimensão finita. Pela Proposição, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A tem uma família independente de submódulos não nulos com n elementos, e não possui tal família com mais de n elementos. Chamamos este número de dimensão de Goldie de A .

Notação: $\dim(A)$.

Quando A é R -módulo e R é anel de divisão vale $\dim(A) = [A : R]$. Para um módulo A qualquer, $\dim(A) = 0$ equivale a $A = 0$. Também $\dim(A) = n$ se, e somente se, A tem um submódulo essencial que é a soma direta de n submódulos uniformes. Por esta razão $\dim(A)$ pode ser chamada de dimensão uniforme de A . Em particular, $\dim(A) = 1$ significa que A é uniforme.

Escrevemos $\dim(A) = \infty$ para indicar que A não tem dimensão finita.

Para um anel R e um subconjunto X de R , escrevemos,

$$r_R(X) = \{r \in R; Xr = 0\} \quad \text{e} \quad l_R(X) = \{r \in R; rX = 0\}$$

para indicar os ideais anuladores a direita e a esquerda respectivamente, de X em R .

Definição: Um anel de Goldie a direita é um anel R , tal que R_R tem dimensão

finita e $\{r_R(X); X \subseteq R\}$ satisfaz a condição das cadeias ascendentes. Anéis de Goldie a esquerda são definidos analogamente.

Como observamos anteriormente, os anéis noetherianos têm dimensão finita e portanto são anéis de Goldie. Quando R é um domínio, a condição das cadeias ascendentes é automaticamente verificada para os anuladores a direita (esquerda), assim R é anel de Goldie a direita (esquerda) se, e somente se R_R (${}_R R$) tem dimensão finita. Em ([Go], pg 101), encontramos um exemplo de anel de Goldie a direita que não é anel de Goldie a esquerda.

Os anéis simples são primos e os artinianos são noetherianos, assim anel artiniano simples é anel de Goldie primo.

Definição: Um anel Q é um anel quociente a direita para R , e R é uma ordem a direita para Q , quando

- (i) R é subanel de Q .
- (ii) Todo elemento regular de R tem inverso em Q .
- (iii) $Q = \{ab^{-1}; a \in R \text{ e } b \in R^*\}$.

Anéis quocientes a esquerda e ordens a esquerda são definidos da mesma forma, trocando (iii) por $Q = \{a^{-1}b; b \in R \text{ e } a \in R^*\}$. Anéis quocientes a direita e a esquerda, são chamados de anéis quocientes bilaterais, ou simplesmente anéis quocientes. A mesma nomenclatura vale para as ordens a direita e a esquerda.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de um anel quociente a direita para o anel R , é a condição de Ore a direita:

Se $a, x \in R$ e $x \in R^*$, então existem $b, y \in R$ com $y \in R^*$ tal que $ay = xb$.

Este resultado está demonstrado em ([F], pg 390). Analogamente um anel R satisfazer a condição de Ore a esquerda, isto é, para $a, x \in R$ e $x \in R^*$ existem

$b, y \in R$ com $y \in R^*$ tais $ya = bx$, equivale a R ter um anel quociente a esquerda.

O Teorema a seguir é conhecido como Primeiro Teorema de Goldie, e esclarece como são as ordens dos anéis artinianos simples. A demonstração original é de 1958 e devida a Goldie ([G], Theorem 13). Uma prova em detalhes está feita em ([Go], pg 100).

Teorema 1.2: O anel R tem anel quociente a direita artiniano simples se, e somente se, R é anel de Goldie a direita primo.

Os PI-anéis primos, isto é, os anéis primos com identidades polinomiais, como definidos em [Ro], [P] ou [Pc], são exemplos de anéis de Goldie primos. Este fato foi verificado por Posner em 1960, dentro da demonstração do seguinte Teorema sobre a estrutura dos PI-anéis primos.

Teorema 1.3: ([P], Theorem 1) R é um anel primo satisfazendo uma identidade polinomial se, e somente se, R é um subanel de $M_n(D)$ para algum n e algum anel de divisão D de dimensão finita sobre seu centro, e R tem $M_n(D)$ como um anel quociente bilateral.

Posner provou diretamente que um PI-anel primo R é anel de Goldie primo, e usou o Primeiro Teorema de Goldie para obter um anel quociente bilateral para R da forma $M_n(D)$.

Os exemplos de anéis de Goldie primos que não são PI-anéis, são exatamente os anéis de Goldie primos, cujo anel quociente é anel de matrizes sobre um anel de divisão de dimensão infinita sobre o seu centro. Em particular, para um anel de divisão D de dimensão infinita sobre seu centro, temos que $R = M_n(D)$ é anel de Goldie primo por ser anel artiniano simples, e R é seu próprio anel quociente como consequência do Corolário da Proposição 1.4 abaixo. Mas pelo Teorema de Posner, R não é PI-anel.

Quando R é uma ordem em Q e $x \in R$, é imediato que $x \in R^*$ equivale a $x \in Q^*$. Vamos verificar que para obter o inverso de elementos em anéis de Goldie,

é suficiente obter o inverso de um lado apenas.

Proposição 1.4: Seja R um anel de Goldie a direita. Se $a, b \in R$ e $ab = 1$ então $ba = 1$.

Demonstração:

Seja f um endomorfismo sobrejetivo de R_R . Afirmamos que f é um isomorfismo. De fato, chamando $K_n = \text{Ker } f^n$ temos a cadeia $0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$. Mas para cada n , K_n é o anulador a direita do conjunto unitário $\{f^n(1)\} \subseteq R$, e portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n = K_{n+1}$. Se $x \in R$ e $f(x) = 0$, como f^n é sobrejetor, $x = f^n(y)$ para algum $y \in R$. Daí, $0 = f(x) = f^{n+1}(y)$, isto é, $y \in K_{n+1} = K_n$ e segue que $0 = f^n(y) = x$ que dá a injetividade. Agora, de $1 = ab$ temos $R = aR$ e assim $f(x) = ax$ é um endomorfismo sobrejetivo de R_R e conseqüentemente isomorfismo. Como $f(1 - ba) = 0$ vem que $ba = 1$.

Corolário: Seja Q um anel artiniano a direita (esquerda).

(a) $x \in Q^*$ se, e somente se $x \in U(Q)$.

(b) Q é seu próprio anel quociente a direita e a esquerda.

Demonstração:

(a) Se $x \in Q^*$ então $x^n \in Q^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A cadeia $xQ \supseteq x^2Q \supseteq \dots$ de ideais a direita é estacionária, e então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^nQ = x^{n+1}Q$ implicando em $x^n = x^{n+1}q$ para algum $q \in Q$. Assim, $0 = x^n(1 - xq)$ que mostra que $xq = 1$ e pela Proposição x é inversível.

(b) É imediato a partir de (a).

Proposição 1.5: Sejam R um anel de Goldie primo com anel quociente Q , F o centro de Q e $[Q : F] < \infty$. Se $V = R \cap F$ então para cada $q \in Q$, existe $v \in V^*$ tal que $qv \in R$.

Demonstração:

Iniciamos verificando que $V = Z(R)$, o centro de R . A inclusão $V \subseteq Z(R)$ é imediata, e por outro lado se $x \in Z(R)$ e $u \in Q$, escrevemos $u = mn^{-1}$ com $m \in R$ e $n \in R^*$. Agora $xun = xm = mx = mn^{-1}nx = unx = uxn$ que leva a $ux = xu$ e daí $x \in R \cap F = V$, mostrando que $V = Z(R)$. A dimensão finita de Q sobre F assegura que R é um PI-anel primo, e então por ([Pc], pg 48) temos $Q = RF$. Outra propriedade dos PI-ânéis primos, que pode se encontrada em ([Ro], pg 55), diz que F é o corpo de frações de V . Assim dado $q \in Q$, escrevemos

$q = r_1v_1 + r_1v_2 + \cdots + r_mv_m$ onde $r_i \in R$, $v_i \in F$ e $v_i = a_ib_i^{-1}$ com $a_i, b_i \in V$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Tomando $v = b_1b_2 \cdots b_m \in V^*$ vem que $qv \in R$.

Definição: Um anel R é chamado:

- (a) Local matriz, quando $R/J(R)$ é artiniano simples.
- (b) Bezout a direita, quando todo ideal a direita finitamente gerado é principal.
- (c) Semi-hereditário a direita, quando todo ideal a direita finitamente gerado é projetivo.
- (d) Anel de n -cadeia a direita em $Q \supseteq R$, se dados $a_0, \dots, a_n \in Q$, existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $a_i \in a_0R + \dots + \widehat{a_iR} + \dots + a_nR$. O símbolo “ $\widehat{}$ ” indica exclusão da parcela.

As definições com lateralidade a esquerda são análogas. Os anéis artinianos simples são exemplos para todas as definições acima. De fato, se R é um anel artiniano simples, então R é anel local matriz pois $J(R) = 0$, e R é anel de Bezout por ser anel noetheriano. Pelo Teorema de Wedderburn-Artin ([Go], pg 29), R é anel semi-hereditário. Finalmente, um anel artiniano simples é n -cadeia nele próprio para algum n , como consequência de ([D1], §1, Proposition 2).

As tentativas de obter uma teoria de valorização não comutativa, que permitisse aplicar a anéis artinianos simples os métodos de estudo desenvolvidos a partir da valorização de corpos, iniciaram por volta de 1945 com a definição dada por Schilling, de anéis de valorização totais e invariantes em anéis de divisão. Em um artigo de 1982, publicado originalmente em russo e traduzido para o inglês em 1984, Dubrovin apresenta a definição para anel de valorização em anéis artinianos simples, com a qual tem sido possível desenvolver resultados análogos aos de anéis de valorizações de corpos.

Definição: Um subanel R de um anel artiniano simples Q , é chamado anel de valorização de Dubrovin de Q , quando R é local matriz e para cada $q \in Q \setminus R$ existem $r_1, r_2 \in R$ tais que $r_1q, qr_2 \in R \setminus J(R)$.

Os elementos r_1 e r_2 da definição podem ser tomados em $J(R)$, conforme

([BG2], §3, Lemma 3.1).

Dubrovin chamou inicialmente em [D1] os anéis de valorização para anéis artinianos simples, de anéis de valorização não comutativos. Aqui, não comutativo deve ser entendido como não necessariamente comutativo. Os trabalhos posteriores passaram a se referir a tais anéis, como anéis de valorização de Dubrovin, ou simplesmente anéis de valorização. O termo Q -valorização também é usado.

Para que o subanel R do anel artiniano simples Q seja anel de Dubrovin de Q , é necessário e suficiente que exista um ideal bilateral I de R com R/I artiniano simples, e para cada $q \in Q \setminus R$ existam $r_1, r_2 \in R$ tais que $r_1 q, q r_2 \in R \setminus I$, pois neste caso segue de ([D1], §1, Proposition 3) que $I = J(R)$.

O próximo passo, visando um teorema de caracterização dos anéis de valorização de Dubrovin, é apresentar o conceito de “place” para um anel artiniano simples Q . Para isso, baseados em ([D1], Definition 5) definimos em $Q \cup \{\infty\}$ as operações:

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \text{ para todo } a \in Q.$$

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty, \text{ para todo } b \in U(Q).$$

Não estão definidos $\infty + \infty$, $u \cdot \infty$ e $\infty \cdot u$ se $u \notin U(Q)$.

Definição: Um “place” a direita entre os anéis artinianos simples Q e D é uma aplicação sobrejetora $f : Q \cup \{\infty\} \rightarrow D \cup \{\infty\}$ tal que:

- (i) Se $f(a)f(b)$ está definido então ab está definido e $f(ab) = f(a)f(b)$.
- (ii) Se $f(a) + f(b)$ está definido então $a + b$ está definido e $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
- (iii) Se $q \in Q$ e $f(q) = \infty$, então existe $r \in Q$ tal que $f(r) \neq \infty$ e $f(qr) \neq 0, \infty$.

Os “places” a esquerda são definidos trocando $f(qr)$ por $f(rq)$ em (iii). Um “place” a direita e a esquerda será chamado simplesmente de “place”.

Para um “place” a direita ou a esquerda $f : Q \cup \{\infty\} \rightarrow D \cup \{\infty\}$ entre os

anéis artinianos simples Q e D , e para $a \in Q \cup \{\infty\}$ temos as propriedades abaixo, cujas verificações são imediatas:

- (1) $f(1) = 1$.
- (2) $f(0) = 0$.
- (3) $f(\infty) = \infty$.
- (4) $f(-a) = -f(a)$.

Note que para uma aplicação $f : Q \cup \{\infty\} \rightarrow D \cup \{\infty\}$, satisfazendo a condição (i) de “place” entre anéis artinianos simples Q e D , temos que $a + b$ está definido sempre que $f(a) + f(b)$ estiver definido. De fato, inicialmente vemos que $f(\infty) = \infty$, pois se $f(\infty) = d \in D$ então por (i) teríamos $\infty \cdot \infty$ definido, que não pode ocorrer. Agora $f(a) + f(b)$ definido implica em $f(a) \neq \infty$ ou $f(b) \neq \infty$, e daí $a \neq \infty$ ou $b \neq \infty$ que mostra que $a + b$ está definido.

Para uma aplicação sobrejetora $f : Q \cup \{\infty\} \rightarrow D \cup \{\infty\}$, satisfazendo as condições (ii) e (iii) de “place” entre anéis artinianos simples Q e D , não é verdade em geral que ab está definido sempre que $f(a)f(b)$ estiver. Tomamos como exemplo um corpo D , $Q = M_n(D)$ e definimos $f : Q \cup \{\infty\} \rightarrow D \cup \{\infty\}$ por $f((a_{ij})) = a_{11}$ e $f(\infty) = \infty$. Claramente f é sobrejetora e satisfaz (iii) automaticamente. Também $f(a) + f(b)$ estando definido leva a $a \neq \infty$ ou $b \neq \infty$, e assim $a + b$ está definido e $f(a + b) = f(a) + f(b)$ verificando (ii). Porém para $b = \infty$, $a = (a_{ij})$ com $a_{11} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $(i, j) \neq (1, 1)$, temos que $f(a)f(b) = 1 \cdot \infty$ que está definido, mas ab não está definido pois $a \notin U(Q)$.

Um fato conhecido sobre a teoria de valorização de corpos ([E], pg 57), é que cada anel de valorização de um corpo K pode ser obtido como o conjunto dos elementos de K , no qual um “place” sobrejetivo de K tem imagem finita. No Teorema abaixo apresentamos condições equivalentes a definição de anel de valorização de Dubrovin. Uma destas caracterizações envolve “places” em anéis artinianos simples, e mostra que da mesma forma como ocorre em corpos, um anel de valorização em um anel artiniiano simples Q é o conjunto dos elementos de Q cuja imagem de um “place” de Q é finita.

Teorema 1.6: ([D1], §1, Theorem 4) As condições abaixo são equivalentes para um anel artiniano simples Q .

- (i) R é um anel de valorização de Q .
- (ii) R_R e ${}_R R$ têm dimensão finita, R é semi-hereditário a direita, primo e local matriz.
- (iii) R é local matriz, Bezout e uma ordem bilateral em Q .
- (iv) R é o conjunto dos elementos no qual um “place” de Q tem imagem finita.
- (v) R é n -cadeia em Q , e existe um ideal primitivo M tal que $\dim(R/M) \geq n$.

Combinando a condição (iii) do Teorema anterior, com o Teorema 1.2, vemos que um anel de valorização R de um anel artiniano simples Q é um anel de Goldie primo. Assim usamos livremente para R e Q as propriedades dos anéis de Goldie primos, que estão na secção 3.D de [Go]. Além disso quando Q tem dimensão finita sobre seu centro, segue do Teorema 1.3, que R tem as propriedades dos PI-anéis primos.

Lema 1.7: Se R é anel de valorização de um anel artiniano simples Q , então $J(R)$ é o único ideal bilateral maximal de R .

Demonstração:

Se M é um ideal bilateral maximal de R , então $(M + J(R)) / J(R)$ é ideal bilateral de $R/J(R)$ que é simples, e portanto $M + J(R) = R$ ou $M + J(R) = J(R)$. No primeiro caso temos $1 = m + n$ com $m \in M$ e $n \in J(R)$, e daí $m = 1 - n$ tem inverso em R , que contradiz $M \neq R$. Resta $M + J(R) = J(R)$ donde $M \subseteq J(R) \subset R$ que implica $M = J(R)$.

Observamos que a definição de anel de valorização para anéis artinianos simples, generaliza a definição de anel de valorização para corpos, verificando que um anel R é anel de valorização do corpo K se, e somente se, R é anel de valorização de Dubrovin de K . De fato, se R é anel de valorização de Dubrovin de K e $q \in K \setminus R$, então existe $r \in R$ tal que $rq \in R \setminus J(R)$, e pelo Lema 1.7 $rq \in U(R)$, mostrando que $q^{-1} = (rq)^{-1}r \in R$. Reciprocamente, se R é anel de valorização do corpo K e $q \in K \setminus R$, tomamos $r = q^{-1} \in R$ e assim $qr = rq = 1 \in R \setminus J(R)$. Além disso, a maximalidade de $J(R)$ assegura que $R/J(R)$ é corpo e então R é anel de valorização de Dubrovin de K .

Exemplos de anéis de valorização sobre anéis artinianos simples que não são corpos, são dados pelos anéis de valorização totais em anéis de divisão. A demonstração é análoga a feita na parte final da observação acima.

Existem anéis de valorização que não são totais. Como exemplo tomamos o anel dos quatérnios racionais $\mathbb{H}$ e um primo p . Vimos que $V_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} + \mathbb{Z}_{(p)}i + \mathbb{Z}_{(p)}j + \mathbb{Z}_{(p)}k$ não é total em $\mathbb{H}$. Mas para cada $x = a_1a_2^{-1} + b_1b_2^{-1}i + c_1c_2^{-1}j + d_1d_2^{-1}k \in \mathbb{H}$, temos $x = mn^{-1} = n^{-1}m$ quando $m = a_1b_2c_2d_2 + b_1a_2c_2d_2i + c_1a_2b_2d_2j + d_1a_2b_2c_2k$ e $n = a_2b_2c_2d_2$. Como $m, n \in V_{(p)}$ vem que $V_{(p)}$ é uma ordem em $\mathbb{H}$. Além disso, $V_{(p)} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$ o anel de valorização p -ádico discreto de $\mathbb{Q}$, e por ([W1], §1, Example (c)), $V_{(p)}$ é subanel maximal de $\mathbb{H}$ para $p \neq 2$. Agora concluímos que $V_{(p)}$, $p \neq 2$, é anel de valorização de $\mathbb{H}$ pela Proposição seguinte.

Proposição 1.8: ([W2], §1, Example 1.15) Sejam V um anel de valorização discreto do corpo F , Q um anel artiniano simples com centro F e $[Q : F] < \infty$. Se B é subanel de Q tal que $B \cap F = V$, então B é anel de valorização de Q se, e somente se, B é uma ordem maximal de V em Q .

O próximo resultado conclui a relação entre os anéis de valorização totais e os anéis de valorização de um anel de divisão.

Proposição 1.9: Seja D um anel de divisão com anel de valorização R . Então são equivalentes:

- (i) R é total.
- (ii) $R/J(R)$ é anel de divisão.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $\bar{0} \neq \bar{x} \in R/J(R)$, $\bar{x} = x + J(R)$ e $x \in R \setminus J(R)$. como R é total, $J(R) = R \setminus U(R)$ e então existe $x^{-1} \in R$. Claro que $x^{-1} \notin J(R)$ e $\bar{x}^{-1} \in R/J(R)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dado $0 \neq x \in D$ tal que $x \notin R$, existe $r \in R$ tal que $xr \in R \setminus J(R)$. Por hipótese, existe $\bar{\alpha} \in R/J(R)$ tal que $\overline{xr} \cdot \bar{\alpha} = \bar{1}$, isto é, $xr\alpha - 1 \in J(R)$ que implica que $xr\alpha$ tem inverso a direita em R . Portanto x tem inverso a direita em R , mas pela Proposição 1.4 temos que $x^{-1} \in R$, e R é total.

Uma outra classe de exemplos de anéis de valorização são os domínios de cadeia. Para verificar isso, começamos com a definição de anel de cadeia.

Definição: Um anel de cadeia a direita é um anel no qual os ideais a direita estão ordenados por inclusão.

Os anéis de cadeia a esquerda são definidos analogamente, e um anel de cadeia é um anel de cadeia a direita e a esquerda.

Como vimos no início do Capítulo, os anéis de valorização totais são domínios de cadeia.

Proposição 1.10: Um domínio de cadeia é um anel de valorização no seu anel quociente.

Demonstração:

Vamos verificar a condição (iii) do Teorema 1.6. Se R é um domínio de cadeia, a ordenação dos ideais assegura que R_R e ${}_R R$ têm dimensão finita por serem módulos uniformes. Por ([Go], pg 95), R é uma ordem a direita em um anel de divisão D e também possui um quociente a esquerda, isto é, vale a condição de Ore a esquerda. Dado $0 \neq d \in D$, $d = ab^{-1}$ com $a, b \in R$, então existem $x, y \in R$ tais que $ya = xb$, donde $d = y^{-1}x$ e R também é ordem a esquerda em D . R é Bezout pois se $I = x_1R + \dots + x_nR$ é ideal a direita, temos $I = x_iR$ para algum i . Como os anéis de cadeia são anéis de n -cadeia em R , segue de ([D1], §1, Corollary of Proposition 2) que $R/J(R)$ é artiniano, além disso $J(R)$ sendo a intersecção dos ideais maximais a direita, $J(R)$ é maximal bilateral e portanto R é local matriz.

Proposição 1.11: Seja R um anel de valorização do anel artiniano simples Q . São equivalentes:

- (i) $R = Q$.
- (ii) R é anel simples.
- (iii) $J(R) = 0$.
- (iv) R é anel artiniano.

Demonstração:

As implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatas.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sendo R um anel de valorização, temos que $R/J(R)$ é um anel artiniano simples, e como $J(R) = 0$ vem que R é anel artiniano simples.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Se R é artiniano, o Corolário da Proposição 1.4 garante que todo elemento regular de R tem inverso em R , e isso leva a $R = Q$.

Definição: Seja R uma ordem em um anel artiniano simples Q . Um subgrupo aditivo I de Q é dito R -ideal a direita quando:

- (a) $IR = I$.
- (b) I contém um elemento regular de Q .
- (c) $xI \subseteq R$ para algum $x \in Q^*$.

Os R -ideais a esquerda são definidos da mesma forma, apenas trocando a ordem dos produtos. Um R -ideal é um R -ideal a direita e a esquerda. Quando I é R -ideal e $I \subseteq R$, dizemos que I é um R -ideal de R .

Proposição 1.12: ([D1], §2, Proposition 3) Seja R um anel de valorização do anel artiniano simples Q , e I um subgrupo aditivo próprio de Q . Então I é um R -ideal se, e somente se, $RIR = I$.

Os ideais de um anel de valorização de um corpo são totalmente ordenados por inclusão. Para um anel de valorização R do anel artiniano simples Q , segue da Proposição 1.12 que os R -ideais próprios de R coincidem com os ideais bilaterais próprios. Veremos em [4] pg 18 que a inclusão é uma ordenação total no conjunto dos R -ideais, e portanto os ideais bilaterais de R são totalmente ordenados por inclusão.

Uma ferramenta útil no estudo de anéis de valorização são os anéis fatores. Especificamente, se I é um subgrupo aditivo de um anel Q , o conjunto

$$O_r(I) = \{q \in Q, Iq \subseteq I\}$$

é um subanel de Q , chamado anel fator a direita de I . Analogamente define-se $O_l(I)$,

o anel fator a esquerda de I .

Quando I é um ideal a direita do anel $R \subseteq Q$, temos que $O_r(I)$ é um sobreanel de R em Q , isto é, $R \subseteq O_r(I) \subseteq Q$.

Lema 1.13: ([D1], §2, Lemma 7) Se R é anel de valorização do anel artiniano simples Q , então $O_r(J(R)) = O_l(J(R)) = R$.

Lema 1.14: ([D1], §2, Lemma 8) Com as hipóteses do Lema anterior, as condições seguintes são equivalentes para um R -ideal I :

- (i) I é ideal a direita principal de $O_r(I)$.
- (ii) $I \neq I.J(O_r(I))$.

Definição: Um anel de valorização discreto do anel artiniano simples Q , é um anel não artiniano R que satisfaz as condições do Teorema a seguir.

Teorema 1.15: ([D1], §1, Theorem 6) Seja Q um anel artiniano simples. Para um anel não artiniano R , são equivalentes:

- (i) R é anel de valorização noetheriano a direita de Q .
- (ii) R é anel de valorização maximal de Q e $J(R) \neq J(R)^2$.
- (iii) R é local matriz, $J(R)$ é ideal a direita principal, $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$ e $J(R)$ é ideal a esquerda principal ou ${}_R R$ tem dimensão finita.

Como a condição (ii) não depende de lateralidade, os anéis de valorização discretos são exatamente os anéis de valorização noetherianos e próprios, pela Proposição 1.11. Assim quando Q é comutativo, a definição acima coincide com a definição de anel de valorização discreto de um corpo, conforme ([E], pg 50).

Proposição 1.16: Seja R um anel de valorização do anel artiniano simples Q . Então são equivalentes:

(i) R é anel de valorização discreto.

(ii) $R \neq Q$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) É imediato.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Pela Proposição 1.11, $R \neq Q$ equivale a $J(R) \neq 0$ que equivale a R não ser artiniano. Assim, $J(R) \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$ e então $J(R) \neq J(R)^2$. Aplicando o Lema 1.14 ao R -ideal $J(R)$, e usando o Lema 1.13 temos que $J(R)$ é ideal principal a direita e a esquerda de R . Também R é local matriz por ser anel de valorização. Portanto verificamos a condição (iii) do Teorema 1.15, e R é anel de valorização discreto.

Proposição 1.17: Seja R um anel de valorização discreto de um anel artiniano simples, então todo ideal bilateral não nulo de R é uma potência de $J(R)$.

Demonstração:

Pelo Teorema 1.15, $R/J(R)$ é artiniano simples, $J(R) = aR$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = 0$. Também pelo Lema 1.7 $J(R)$ é ideal bilateral maximal. A conclusão segue de ([Pb], §3, Theorem 3.5).

Definição: Sejam Q um anel artiniano simples com centro F , e V um anel de valorização de F . Dizemos que um anel de valorização R de Q é uma extensão de V quando $R \cap F = V$.

Apresentamos agora uma compilação de resultados sobre os anéis de valorização de anéis artinianos simples, que comparados com as propriedades dos anéis de valorização de corpos, dão uma idéia do desenvolvimento deste assunto.

No que segue, R é um anel de valorização de um anel artiniano simples Q , F é o centro de Q , R' é um sobreanel de R em Q e $\text{Spec}(R)$ denota o conjunto dos ideais primos de R . A partir do resultado [10] consideramos que a dimensão de Q sobre F é finita.

[1] $M_n(R)$ é anel de valorização de $M_n(Q)$.

[2] Se $e^2 = e \in R$ então eRe é anel de valorização de eQe .

- [3] Se $Q = M_n(D)$, D anel de divisão, então existe um anel de valorização S de D e $q \in Q^*$ tal que $M_n(S) = qRq^{-1}$.
- [4] Os R -ideais estão totalmente ordenados por inclusão.
- [5] R' é anel valorização de Q e $J(R')$ é ideal primo de R .
- [6] $R/J(R')$ é anel de valorização de $R'/J(R')$.
- [7] O conjunto dos elementos de R que são regulares módulos $J(R')$, $N = \{x \in R; x + J(R') \in (R/J(R'))^*\}$, forma um sistema multiplicativo de Ore a direita e a esquerda, e a localização R_N coincide com R' .
- [8] A aplicação $R' \mapsto J(R')$, do conjunto dos sobreanéis de R em $\text{Spec}(R)$, é injetora e reverte a inclusão.
- [9] O anel $V = R \cap F$ é o centro de R , e é anel de valorização de F .
- [10] A aplicação $P \mapsto P \cap F$ é uma bijeção que preserva a inclusão, entre $\text{Spec}(R)$ e $\text{Spec}(V)$ onde $V = R \cap F$. Além disso, P é ideal a direita principal de $O_r(P)$ se, e somente se $p = P \cap F$ é ideal principal de $O_r(p)$.
- [11] Para cada $P \in \text{Spec}(R)$, o conjunto $\{x \in R; x + P \in (R/P)^*\}$ é um sistema multiplicativo de Ore a direita e a esquerda contido em R^* . Se R_P é a localização neste sistema, então a aplicação $P \mapsto R_P$ é uma bijeção entre $\text{Spec}(R)$ e os sobreanéis de R em Q .
- [12] Se $P \in \text{Spec}(R)$ e $p = P \cap F$ então $R_P = R_p = R.V_p$.
- [13] A aplicação $R' \mapsto R' \cap F$ é uma bijeção que preserva a inclusão, entre os sobreanéis de R em Q e os sobreanéis de V em F .
- [14] Para cada $P \in \text{Spec}(R)$, existe um número natural $n \leq [Q : F]$ tal que $P^n = pR$, onde $p = P \cap F$. Se $n \geq 1$ então P é um ideal principal de $O_r(P)$.
- [15] (Teorema da Extensão) Se V é um anel de valorização de F , então existe um anel de valorização R de Q tal que $R \cap F = V$.
- [16] Se $V = R \cap F$ tem rank 1, então R é integral sobre V .
- [17] O anel R é integral sobre $V = R \cap F$ se, e somente se, todo ideal bilateral principal de R é também principal a direita e a esquerda.

- [18] Se R e B são anéis de valorização de Q tais que $R \cap F = B \cap F$, então existe $q \in Q^*$ tal que $qRq^{-1} = B$.
- [19] Se $R \neq Q$ então existe um sobreanel R' , $R \subseteq R' \subset Q$, com centro $V' = R' \cap F$ tal que R' é integral sobre V' .
- [20] Se $V = R \cap F$, então para cada $q \in Q$ existe $v \in V^*$ tal que $qv \in R$.

As demonstrações de [1] a [8] estão em [D1], de [9] a [16] estão em [D2], [17] e [18] em [W₂], [19] está em [Gr]. A demonstração de [20] pode ser encontrada em [BG2], ou vista como um caso particular da Proposição 1.5.

Os exemplos de anéis de valorização de Dubrovin que vimos foram os anéis $V_{(p)}$, os anéis de valorização totais e os domínios de cadeia. Podemos construir novos exemplos a partir destes, usando [1] e [2]. Também as álgebras de Azumaya sobre anéis de valorização comutativos, são anéis de valorização de Dubrovin, conforme ([D2], §2, Proposition 1). Até o momento não conhecemos exemplo de anel de valorização em um anel artiniano simples, cuja dimensão sobre o seu centro não seja finita.

Embora a definição de anel de valorização de Dubrovin seja geral, os principais pontos da teoria só estão desenvolvidos no caso em que o anel artiniano simples tem dimensão finita sobre o seu centro. Assim o trabalho também se desenvolverá dentro desta restrição.

Para uma generalização da definição de anel de valorização de corpos, aos anéis artinianos simples, é conveniente ter como propriedade que o centro de um anel de valorização do anel artiniano simples Q , seja anel de valorização do centro de Q . Neste sentido, destacamos o resultado [9] fazendo sua demonstração, que pode ser obtida como consequência da ordenação dos R -ideais [4]. Se R é um anel de valorização de Q e $V = R \cap F$, já provamos na Proposição 1.5 que V é o centro de R . Tomando $q \in F, q \neq 0$, temos que qR é um R -ideal, e como R também é R -ideal, segue que $qR \subseteq R$ ou $R \subseteq qR$. No primeiro caso temos $q \in R \cap F = V$, e no outro $1 = qr$ com $r \in R$ que leva a $q^{-1} \in R \cap F = V$. Portanto V é anel de valorização do corpo F .

O Teorema da Extensão [15], garante que para todo anel de valorização V do centro F de um anel artiniano simples Q , existe um anel de valorização R de Q tal que $R \cap F = V$, quando $[Q : F] < \infty$. Segue de [13] que se R' tem tal propriedade e $R \subseteq R' \subseteq Q$ então $R = R'$, isto é, não existem extensões de V acima de R . Portanto temos que as extensões de um anel de valorização a um anel artiniano simples, não são comparáveis por inclusão.

Por [18] todas as extensões são conjugadas, e por isso isomorfas. Claramente todos os anéis de valorização de Q conjugados, são extensões do mesmo anel de valorização do centro, pois se R e $R' = qRq^{-1}$, $q \in Q^*$, são anéis de valorização de Q então $R \cap F = R' \cap F$.

Diferente do que ocorre com as extensões totais em anéis de divisão, o número de extensões em anéis artinianos simples pode não ser finito, como vemos na introdução de [Gr].

O que chamamos de Teorema da Extensão, é um teorema da extensão para anéis de valorização do centro F de um anel artiniano simples Q , quando $[Q : F] < \infty$. Este procedimento é justificado pela inexistência de um Teorema da extensão em geral, conforme ([BG2], §1). Especificamente, consideramos novamente o anel dos quatérnios racionais $\mathbb{H}$, e $\mathbb{Z}_{(5)}$ o anel de valorização discreto 5-ádico do centro de $\mathbb{H}$. Como -1 é um quadrado módulo 5, temos que $\mathbb{Z}_{(5)}$ tem duas extensões distintas V_1 e V_2 que são anéis de valorização de $\mathbb{Q}(i)$, por ([E], pg 128). Agora concluímos que V_1 e V_2 não possuem extensão a $\mathbb{H}$ pela Proposição abaixo.

Proposição 1.18: Sejam Q um anel artiniano simples com centro F , $[Q : F] < \infty$, K um corpo, $F \subset K \subset Q$ e V um anel de valorização maximal de F . Se V não tem extensão única em K , então nenhuma destas extensões pode ser estendida a um anel de valorização de Q .

Demonstração:

Sejam $B_1, B_2, \dots, B_n, n > 1$, os anéis de valorização de K que estendem V . Suponha que para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, o anel B_i tem extensão R_i em Q . Como $R_i \cap F = R_i \cap K \cap F = B_i \cap F = V$, segue que R_i é uma extensão de V , mas V sendo maximal temos que R_i é integral sobre V , por [16]. Em ([E], pg 69) vemos que os elementos de K que são integrais sobre V , estão na intersecção das extensões de V em K , e portanto $B_i = R_i \cap K \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ que não é possível pois estas extensões

não são comparáveis por inclusão. Concluimos que para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, B_i não se estende a Q .

Veremos no Capítulo II uma justificativa topológica para a inexistência de um Teorema da Extensão em geral.

Apresentamos a seguir um critério para decidir quando um anel de valorização de um corpo intermediário, entre F e Q , possui uma extensão a Q .

Proposição 1.19: Sejam Q um anel artiniano simples com centro F , $[Q : F] < \infty$, K um corpo, $F \subset K \subset Q$, R um anel de valorização de Q e B um anel de valorização de K .

- (a) $R \cap K$ é anel de valorização de K se, e somente se, R contém um anel de valorização de K .
- (b) B possui uma extensão a Q se, e somente se, B está contido em algum anel de valorização de Q que estende $B \cap F$.

Demonstração:

- (a) É imediato.
- (b) Seja R' o anel de valorização de Q tal que $R' \cap K = B$. Claramente $B \subseteq R'$ e R' estende $B \cap F$ pois $R' \cap F = R' \cap K \cap F = B \cap F$. Reciprocamente, se R' é anel de valorização de Q para o qual $B \subseteq R'$ e $R' \cap F = B \cap F$, temos que $B \subseteq R' \cap K$ e então $R' \cap K$ é anel de valorização de K . Como $(R' \cap K) \cap F = R' \cap F = B \cap F$ vemos que $R' \cap K$ é uma extensão de $B \cap F$ em K , mas B também estende $B \cap F$ e $B \subseteq R' \cap K$. Já que as extensões não são comparáveis por inclusão, concluimos que $R' \cap K = B$ e portanto B possui uma extensão a Q .

Por [13] sabemos que R ser anel de valorização maximal do anel artiniano simples Q , com centro F e $[Q : F] < \infty$, equivale a $V = R \cap F$ ser anel de valorização maximal de F . Podemos verificar que R ser discreto em Q equivale a V ser discreto em F .

Proposição 1.20: Sejam Q um anel artiniano simples com centro F , $[Q : F] < \infty$, R um anel de valorização próprio de Q e $V = R \cap F$. Então:

(a) $J(V) = J(R) \cap F$.

(b) $J(R)$ é ideal a direita (esquerda) principal de R se, e somente se, $J(V)$ é ideal principal de V .

(c) R é anel de valorização discreto de Q se, e somente se, V é anel de valorização discreto de F .

Demonstração:

(a) Por [9] V é anel de valorização do corpo F , e portanto $J(V)$ é ideal maximal de V . A bijeção obtida em [10] mostra que existe um ideal primo I de R tal que $I \cap F = J(V)$. Pelo Lema 1.7 temos $I \subseteq J(R)$, e como a bijeção preserva a inclusão vem $J(V) = I \cap F \subseteq J(R) \cap F \subset V$. A última inclusão é estrita pois $1 \notin J(R)$, e então a maximalidade de $J(V)$ garante que $J(V) = J(R) \cap F$.

(b) Pelo Lema 1.13, $O_r(J(R)) = R$ e $O_r(J(V)) = V$. Agora aplicamos a segunda parte de [10] e o item (a), para concluir que $J(R)$ ser ideal a direita principal de R equivale a $J(R) \cap F = J(V)$ ser ideal principal de V .

(c) Se R é discreto, então R é maximal e $J(R) \neq J(R)^2$. Pelos Lemas 1.13 e 1.14, $J(R) \neq J(R)^2$ equivale a $J(R)$ ser ideal a direita principal, e pelo item (b) isso equivale a $J(V)$ ser ideal principal. Novamente os Lemas 1.13 e 1.14 garantem que $J(V) \neq J(V)^2$. Também a maximalidade de R implica na maximalidade de V , por [13]. Portanto V é anel de valorização discreto. A recíproca é análoga.

No próximo Capítulo, trabalharemos com anéis de valorização próprios de um anel artinianiano simples, por isso temos interesse em saber quando eles existem. Usaremos o Lema abaixo, cuja demonstração pode ser facilmente obtida de ([E], Corollary 9.8, pg 63).

Lema 1.21: Para um corpo K são equivalentes:

- (i) K tem anel de valorização próprio.
- (ii) K não é extensão algébrica de um corpo finito.

Proposição 1.22: Para um anel artinianiano simples Q com centro F e $[Q : F] < \infty$, são equivalentes:

- (i) Q tem anel de valorização próprio.

(ii) F não é extensão algébrica de um corpo finito.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Se R é anel de valorização próprio de Q , tome $V = R \cap F$ que é anel de valorização de F por [9]. Para cada $q \in Q$, existe $0 \neq v \in F$ tal que $qv = r \in R$, por [20]. Supondo $V = F$ vem que $v^{-1} \in F \subset R$ e daí $q \in R$ que implica $Q = R$. Essa contradição mostra que $V \neq F$ e pelo Lema 1.21 temos que F não é extensão algébrica de um corpo finito.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Pelo Lema 1.21 podemos assumir que F possui um anel de valorização próprio V , e pelo Teorema da Extensão existe um anel de valorização R de Q tal que $R \cap F = V$. Claro que $R \neq Q$ pois do contrário teríamos $V = F$.

Se exigimos que anéis de valorização sejam anéis de Goldie primos e ordens bilaterais, então os anéis artinianos simples formam a maior classe de anéis, para a qual é possível estender o conceito de anel de valorização. Com efeito, se R é um anel de Goldie primo e ordem bilateral em um anel S , vamos verificar que S é anel artiniano simples. Como R é anel de Goldie primo, R é uma ordem bilateral em algum anel artiniano simples Q , e Q é o fecho injetivo de R por ([Go], pg 99, 100). Novamente ([Go], pg 60) assegura que Q é anel quociente maximal de R , e assim a inclusão $i : R \rightarrow Q$ se estende a um homomorfismo injetivo de anéis $\phi : S \rightarrow Q$. Segue que $\phi(R) = i(R) = R$ é uma ordem em $\phi(S) \subset Q$. Seja $q = mn^{-1} \in Q$ com $m, n \in R$, $n \in R^*$, como R é ordem em $\phi(S)$ temos que $n^{-1} \in \phi(S)$, mas $m \in R \subseteq \phi(S)$ e então $q = mn^{-1} \in \phi(S)$. Concluimos que $Q = \phi(S)$, e pelo isomorfismo S é artiniano simples.

Capítulo 2

A Topologia dos R -ideais

Para este Capítulo, Q é um anel artiniano simples com centro F , $[Q : F] < \infty$, R é um anel de valorização próprio de Q , $V = R \cap F$ e $\mathcal{V} = \{I; I \text{ é } R\text{-ideal e } 0 \neq I \subseteq R\}$.

Verificaremos que R gera uma topologia $\mathcal{T}_R$ em Q , que tem $\mathcal{V}$ como sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem, e que com esta topologia Q é um anel topológico não discreto e Hausdorff. Mais ainda, a restrição de $\mathcal{T}_R$ ao centro de Q torna $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ um corpo V -topológico, e a topologia produto induzida por F em Q é equivalente a $\mathcal{T}_R$. Apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que dois anéis de valorização gerem topologias equivalentes em Q . A partir desta condição, deduziremos que todos os anéis de valorização de Q que estendem um anel de valorização de F , geram a mesma topologia em Q . Também veremos que os sobreanéis de R produzem a mesma topologia que R .

Um ideal bilateral de um anel qualquer, produz uma topologia ádica neste anel. Usaremos esta construção geral para o ideal $J(R)$, produzindo a topologia $J(R)$ -ádica em Q , e o interesse por anéis topológicos de Hausdorff nos levará a trabalhar com anéis de valorização para os quais $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$. Veremos que esta é a condição necessária e suficiente, para que a topologia $J(R)$ -ádica coincida

com a topologia dos R -ideais, e também provaremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$ é equivalente a R ser anel noetheriano. Portanto as topologias geradas por anéis de valorização discretos são exatamente as topologias $J(R)$ -ádicas e Hausdorff.

Os conceitos topológicos que usamos neste trabalho, seguem o exposto em [L]. Destacamos a seguir algumas definições.

Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $x \in X$.

- (1) Uma vizinhança de x é um subconjunto $U \subseteq X$, para o qual existe um aberto A com $x \in A \subseteq U$.
- (2) Um sistema fundamental de vizinhanças de x é uma coleção $B(x)$ de vizinhanças de x , tal que para cada vizinhança W de x existe $U \in B(x)$ com $U \subseteq W$.
- (3) Se σ é outra topologia em X , dizemos que σ é mais fina que $\mathcal{T}$ e denotamos $\sigma \succ \mathcal{T}$, quando a aplicação identidade $i : (X, \sigma) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ é contínua. Assim σ e $\mathcal{T}$ são equivalentes quando $\sigma \succ \mathcal{T} \succ \sigma$.

Definição: Um subconjunto $A \subseteq Q$ é aberto, quando para cada $a \in A$, existe um $I \in \mathcal{V}$ tal que $a + I \subseteq A$.

Com a notação $\mathcal{T}_R = \{A \subseteq Q; A \text{ é aberto}\}$ vem que $(Q, \mathcal{T}_R)$ é um espaço topológico e $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem. Claramente $\mathcal{V}$ satisfaz a afirmação, $\emptyset$ e Q estão em $\mathcal{T}_R$ e se $A_\alpha \in \mathcal{T}_R$ para todo α num conjunto de índices L , então $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha \in \mathcal{T}_R$. Para $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_R$ e $a \in A_1 \cap A_2$, existem $I_1, I_2 \in \mathcal{V}$ tais que $a + I_1 \subseteq A_1$ e $a + I_2 \subseteq A_2$. Por [4] assumimos $I_1 \subseteq I_2$ que implica $a + I_1 \subseteq A_1 \cap A_2$, e portanto $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_R$.

A topologia $\mathcal{T}_R$ será chamada de topologia dos R -ideais em Q . O espaço topológico $(Q, \mathcal{T}_R)$ não é discreto, pois todo aberto que contém 0, também contém um R -ideal não nulo, e então $\{0\}$ não é aberto. Como os R -ideais são fechados por somas, temos que $x + I \in \mathcal{T}_R$ sempre que $x \in Q$ e $I \in \mathcal{V}$.

Sejam B um anel de valorização próprio do corpo K , e x pertencente a todo ideal não nulo de B . Sendo B uma ordem em K , todo $k \in K$ pode ser escrito da

forma $k = mn^{-1}$ com $m, n \in B$ e $n \neq 0$. Como nB é ideal não nulo de B , temos que $x \in nB$ e então $n^{-1}x \in B$, que leva a $kx = mn^{-1}x \in B$ e $Kx \subseteq B$. Supondo $x \neq 0$ temos $xK = K$ pois $x^{-1} \in K$, implicando em $K = Kx \subseteq B \subset K$ que não é possível. Portanto a intersecção dos ideais não nulos de B é $\{0\}$. O equivalente a este resultado para os R -ideais é $\bigcap_{I \in \mathcal{V}} I = \{0\}$, e será provado na Proposição 2.1.

Escolhemos $\mathcal{V}$ como o conjunto dos R -ideais não nulos contidos em R , que pela Proposição 1.12 são os ideais bilaterais não nulos de R . Esta opção evidencia o paralelo com o caso comutativo, onde o conjunto dos ideais bilaterais não nulos de um anel de valorização do corpo, formam um sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem, para a topologia definida no corpo.

Podemos trabalhar indistintamente com $\mathcal{V}' = \{I ; I \text{ é } R\text{-ideal e } I \neq 0\}$ ou $\mathcal{V}'' = \{aR ; a \in V^*\}$ ao invés de $\mathcal{V}$, isto é, se tornamos de maneira análoga a $\mathcal{T}_R$ as topologias $\mathcal{T}_{R'}$ e $\mathcal{T}_{R''}$ definidas por $\mathcal{V}'$ e $\mathcal{V}''$ respectivamente, então $\mathcal{T}_{R'} \sim \mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R''}$. De fato, dado $aR \in \mathcal{V}''$, temos pela Proposição 1.12 que $aR \in \mathcal{V}$ e assim $\mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, que garante $\mathcal{T}_{R'} \succ \mathcal{T}_R \succ \mathcal{T}_{R''}$. Se $I' \in \mathcal{V}'$ então $0 \neq I' \subseteq Q$ e $RI'R = I'$. Tomando $I = I' \cap R$ temos $RI R = I$. Quando $I' \subseteq R$ é claro que $I \neq 0$, e quando $I' \not\subseteq R$ existem $q \in I' \setminus R$ e $r \in R$ tais que $qr \in R \setminus J(R)$. Escrevendo $qr = 1qr \in RI'R = I'$ temos $0 \neq qr \in I' \cap R = I$ e $I \neq 0$. Agora a Proposição 1.12 assegura que $I \in \mathcal{V}$, e assim todo elemento de $\mathcal{V}'$ contém um elemento de $\mathcal{V}$ que prova $\mathcal{T}_R \succ \mathcal{T}_{R'}$. Da mesma forma, para verificar que $\mathcal{T}_{R''} \succ \mathcal{T}_R$ é suficiente verificar que todo elemento de $\mathcal{V}$ contém um elemento de $\mathcal{V}''$. Mas isso é imediato do item (c) da Proposição abaixo, pois dado $I \in \mathcal{V}$ existe $0 \neq a \in I \cap F$ e então $aR \in \mathcal{V}''$ e $aR \subseteq I$.

Observamos que se $R = Q$ então $\mathcal{V}'' = \{aQ ; a \in F^*\} = \{Q\}$, e daí $\mathcal{T}_R = \{\emptyset, Q\}$ é a topologia caótica. Como estamos interessados em topologias Hausdorff, trabalhamos com $R \neq Q$.

Propriedades da topologia de um anel, tais como continuidade da soma e do produto, ser Hausdorff, ser discreta, podem ser verificadas através das propriedades de uma base de vizinhanças simétricas da origem, como pode ser visto em [KD] e [PZ]. Não optamos por este procedimento, por considerar que a verificação direta das propriedades não acarreta maior dificuldade.

Como consideramos Q de dimensão finita sobre F , segue do Teorema 1.3 que R é um PI-anel primo, e portanto os resultados sobre os ideais bilaterais de um PI-anel primo, valem para os R -ideais de R . A seguir reunimos alguns destes resultados, que usaremos para deduzir propriedades da topologia $\mathcal{T}_R$.

Proposição 2.1: Com a notação estabelecida inicialmente, vale:

- (a) O anel V é anel de valorização próprio de F .
- (b) Dados $q \in Q$ e $I \in \mathcal{V}$, existe $T \in \mathcal{V}$ tal que $qT \subseteq I$ e $Tq \subseteq I$.
- (c) Se $I \in \mathcal{V}$ então $I \cap F \neq \{0\}$.
- (d) Para cada $a \in V^*$, $aR \cap F = aR \cap V = aV$.
- (e) $\bigcap_{I \in \mathcal{V}} I = \{0\}$.

Demonstração:

(a) Já vimos em [9] que V é anel de valorização de F . Supondo que $V = F$, vem que $F \subseteq R$. Para cada $q \in Q$, por [20] existe $w \in V^*$ tal que $qw = r \in R$, e assim $q = rw^{-1} \in R$ pois $w^{-1} \in F$. Isso leva a contradição $Q = R$.

(b) Para o w acima, tomando $T = wI = Iw$ temos que $T \neq 0$ pois I contém um elemento regular, e também $qT = rI \subseteq I$ e $Tq = Ir \subseteq I$. Como $w \in R$, T é ideal bilateral não nulo de R e pela Proposição 1.12 temos que $T \in \mathcal{V}$.

(c) Seja $I \in \mathcal{V}$, claramente IQ é ideal a direita de Q , e por outro lado dados $q \in Q$ e $\sum m_i n_i \in IQ$, por [20] escrevemos $q = uv^{-1}$ com $u \in R$ e $v \in V^*$. Assim $q \sum m_i n_i = \sum (um_i)(v^{-1}n_i) \in IQ$, e então $IQ = Q$ por ser ideal bilateral não nulo de Q . Supondo $I \cap F = \{0\}$ temos para todo $t \in R \cap F$, $t \neq 0$, que $Rt = tR \not\subseteq I$. Sendo Rt um R -ideal, por [4] $I \subseteq Rt$, isto é $It^{-1} \subseteq R$ e assim It^{-1} é ideal bilateral de R . Como $t \notin I$ temos $1 \notin It^{-1}$ e segue a inclusão $It^{-1} \subseteq J(R)$ para todo $t \in V$. Para cada $q \in Q$, escrevemos $q = ut^{-1}$ com $u \in R$ e $t \in R \cap F^*$, assim $Iq = Iut^{-1} \subseteq It^{-1} \subseteq J(R)$ que leva a $Q = IQ \subseteq J(R)$ e contradiz $R \neq Q$.

(d) É claro que $aV \subseteq aR \cap V = aR \cap F$ para cada $a \in V^*$. Tomando $x \in aR \cap V$, $x = ar$ com $r \in R$, obtemos $r = a^{-1}x \in F$ e portanto $r \in R \cap F = V$, isto é, $x \in aV$.

(e) Iniciamos verificando que $\bigcap_{a \in V^*} aV = \{0\}$. Por (a) V é um anel de valorização próprio do corpo F , e portanto a interseção dos ideais não nulos de V é nula. Tome $x \in \bigcap_{a \in V^*} aV$ e seja L um ideal não nulo de V , então existe $y \in L \subseteq V$, $y \neq 0$ e daí $x \in yV \subseteq L$ que leva a $x = 0$. Agora $M = \bigcap_{a \in V^*} aR$ é um ideal bilateral de R , e se $M \neq \{0\}$ vem da Proposição 1.12 que M é R -ideal e por (c) $M \cap F \neq \{0\}$, mas

$M \cap F = (\bigcap_{a \in V^*} aR) \cap F = \bigcap_{a \in V^*} aV = \{0\}$. Portanto $M = \{0\}$, e isso prova (e) pois $\{aR; a \in V^*\} \subseteq \mathcal{V}$.

Corolário: O espaço topológico $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ é não discreto.

Demonstração:

Se $\{0\}$ é aberto em $(F, \mathcal{T}_R|_F)$, então existe $A \in \mathcal{T}_R$ tal que $A \cap F = \{0\}$, e como $0 \in A$ também existe $I \in \mathcal{V}$ tal que $I \subseteq A$. Assim $I \cap F \subseteq A \cap F = \{0\}$ que contradiz o item (c) da Proposição. Segue que $\{0\}$ não é aberto em $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ e portanto o espaço não é discreto.

Proposição 2.2: O espaço topológico $(Q, \mathcal{T}_R)$ é espaço de Hausdorff se, e somente se, $\bigcap_{I \in \mathcal{V}} I = \{0\}$.

Demonstração:

Seja $x \in \bigcap_{I \in \mathcal{V}} I$. Supondo $x \neq 0$, existem $A, B \in \mathcal{T}_R$ tais que $0 \in A, x \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Mas também existem $I_1, I_2 \in \mathcal{V}$ tais que $0 + I_1 \subseteq A$ e $x + I_2 \subseteq B$. Isso leva a contradição $x \in (0 + I_1) \cap (x + I_2) = \emptyset$, e portanto $\bigcap_{I \in \mathcal{V}} I = \{0\}$. Reciprocamente, se $x, y \in Q$ e $x \neq y$, por hipótese $x - y \notin I$ para algum $I \in \mathcal{V}$. Tomamos então $A = x + I$ e $B = y + I$ que são abertos contendo x e y respectivamente. Se $u \in A \cap B$, então $u = x + m = y + n$ com $m, n \in I$ que leva a $x - y = n - m \in I$, que não é possível. Concluimos que $A \cap B = \emptyset$ e $(Q, \mathcal{T}_R)$ é Hausdorff.

A Proposição anterior junto com a Proposição 2.1 (e) mostra que $(Q, \mathcal{T}_R)$ é um espaço topológico não discreto de Hausdorff. A seguir verificaremos que $(Q, \mathcal{T}_R)$ é um anel topológico.

Proposição 2.3: Se considerarmos em Q a topologia $\mathcal{T}_R$ e em $Q \times Q$ a topologia produto, então as aplicações abaixo são contínuas:

(a) $s : Q \times Q \rightarrow Q; \quad s(x, y) = x - y$.

(b) $p : Q \times Q \rightarrow Q; \quad p(x, y) = xy$.

Demonstração:

(a) Fixe $(x_0, y_0) \in Q \times Q$, e seja A um aberto de Q contendo $x_0 - y_0$, então existe $I \in \mathcal{V}$ tal que $(x_0 - y_0) + I \subseteq A$. Como $x_0 + I$ e $y_0 + I$ são abertos em Q , temos que $B = (x_0 + I, y_0 + I)$ é aberto em $Q \times Q$ contendo (x_0, y_0) . Tomando $u = (x_0 + x, y_0 + y) \in B$ vem que $x - y \in I$ e assim $s(u) = (x_0 + x) - (y_0 + y) = (x_0 - y_0) + (x - y) \in A$, implicando em $s(B) \subseteq A$ e s contínua em (x_0, y_0) .

(b) Novamente tome $(x_0, y_0) \in Q \times Q$, e seja agora A um aberto de Q que contenha $x_0 y_0$. Assim, existe $I \in \mathcal{V}$ tal que $x_0 y_0 + I \subseteq A$. Pela Proposição 2.1 (b), existem $T_1, T_2 \in \mathcal{V}$ tais que $x_0 T_1, T_2 y_0 \subseteq I$. Tomando $T_3 = T_1 \cap T_2 \cap I$ temos $T_3 \in \mathcal{V}$, já que os R -ideais são ordenados, e $x_0 + T_3, y_0 + T_3$ são abertos de Q . Escolhemos $B = (x_0 + T_3, y_0 + T_3)$ que é um aberto de $Q \times Q$ contendo (x_0, y_0) . Para $u = (x_0 + x, y_0 + y) \in B$ temos $p(u) = x_0 y_0 + (x_0 y + x y_0 + xy)$ com $x_0 y \in x_0 T_3 \subseteq x_0 T_1 \subseteq I$, $x y_0 \in T_3 y_0 \subseteq T_2 y_0 \subseteq I$ e $xy \in T_3 \subseteq I$, assegurando que $p(u) \in x_0 y_0 + I \subseteq A$, isto é, $p(B) \subseteq A$ e p é contínua em (x_0, y_0) .

Para qualquer topologia em um conjunto Q , quando consideramos a topologia produto em $Q \times Q$, temos que a aplicação $Q \rightarrow Q \times Q, x \mapsto (a, x)$, é contínua para todo $a \in Q$. Aliando ao fato das aplicações $p, s : Q \times Q \rightarrow Q$, $p(x, y) = xy$ e $s(x, y) = x - y$ serem contínuas na topologia $\mathcal{T}_R$, temos a Proposição abaixo.

Proposição 2.4: Sejam $a \in Q$ e $d \in Q^*$. Então na topologia $\mathcal{T}_R$ temos:

- (a) $\varphi : Q \rightarrow Q; \varphi(x) = a + x$ é um homeomorfismo.
- (b) $\psi : Q \rightarrow Q; \psi(x) = dx$ é um homeomorfismo.
- (c) $\psi_d : Q \rightarrow Q; \psi_d(x) = dxd^{-1}$ é um homeomorfismo que também é um automorfismo do anel Q .

Corolário: O espaço topológico $(Q, \mathcal{T}_R)$ é desconexo.

Demonstração:

Como $\{aR; a \in V^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para $\mathcal{T}_R$, temos que $aR \in \mathcal{T}_R$. Pela Proposição para cada $x \in Q$, $x + aR \in \mathcal{T}_R$ e daí $B = \bigcup_{x \notin aR} (x + aR)$ é aberto. Claro que $Q \setminus aR \subseteq B$, e por outro lado dado $u \in B$, $u = x + ar$ com $x \notin aR$ e $r \in R$. Se $u \in aR$ então $x = u - ar \in aR$, que não é possível. Portanto $u \in Q \setminus aR$ e $Q \setminus aR = B$ é aberto. Assim $Q = aR \cup Q \setminus aR$ é uma cisão não trivial de Q .

Observamos que para um aberto A do espaço $(Q, \mathcal{T}_R)$ vale:

- (1) Se $a \in Q$ então $a + A$ é aberto.
- (2) Se $B \subseteq Q$ então $A + B$ é aberto, como reunião de abertos.

(3) Se $d \in Q^*$ então dA é aberto, e em particular $-A$ é aberto.

As observações anteriores e a Proposição 2.4 valem para qualquer anel artiniano simples topológico. Outro resultado geral é que em um anel topológico, $\{0\}$ ser aberto equivale a topologia ser discreta. De fato numa direção é trivial, e para a outra se considerarmos $\{0\}$ aberto, vem da observação (1) acima que a topologia é discreta.

O conceito de subconjunto limitado em um anel topológico D , onde D é anel de divisão, foi introduzido por Shafarevitch em [S]. Apresentamos abaixo a mesma definição aplicada a um anel topológico qualquer.

Definição: Um subconjunto L de um anel topológico não discreto é limitado a direita, se para toda vizinhança U de 0, existir uma vizinhança W de 0 tal que $L.W \subseteq U$. Analogamente define-se subconjunto limitado a esquerda. Um subconjunto é dito limitado quando é limitado a direita e a esquerda.

Na definição acima exigimos que a topologia seja não discreta, para evitar que $\{0\}$ seja vizinhança da origem. Caso contrário teríamos que todo subconjunto do anel topológico é limitado.

Se X e Y são subconjuntos limitados de um anel topológico não discreto, valem as propriedades seguintes de fácil verificação:

- (1) $X + Y$ é limitado.
- (2) $X.Y$ é limitado.
- (3) $X \cup Y$ é limitado.
- (4) Se $A \subseteq X$ então A é limitado.

A próxima Proposição e seu Corolário, apresentam propriedades da topologia $\mathcal{T}_R$ de Q , que serão usadas para estabelecer o Teorema 2.9 adiante.

Proposição 2.5: Se M é uma vizinhança de 0 em (Q, τ_R) então $(F \setminus (F \cap M))^{-1}$ é limitado.

Demonstração:

Seja A o aberto contendo 0 tal que $A \subseteq M$. Considerando $\mathcal{V}'' = \{aR; a \in V^*\}$ como sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia τ_R , existe $a \in V^*$ tal que $aR \subseteq A \subseteq M$ e portanto é suficiente provar que $(F \setminus (F \cap aR))^{-1}$ é limitado, pois $(F \setminus (F \cap M))^{-1} \subseteq (F \setminus (F \cap aR))^{-1}$. Se $m \in (F \setminus V)^{-1}$ então $m = n^{-1}$ com $n \in F \setminus V$, mas por [9] vem que $n^{-1} = m \in V$ e então $(F \setminus V)^{-1} \subseteq V$ implicando que $a^{-1}(F \setminus V)^{-1} \subseteq a^{-1}R$. Para $x \in (F \setminus (F \cap aR))^{-1}$, $x = y^{-1}$ com $y \in F \setminus aR$, e como $F = aF$ temos $y = au$ para algum $u \in F$, e $u \notin R$ pois $y \notin aR$. Assim $u \in F \setminus V$ e $u^{-1} \in (F \setminus V)^{-1}$, daí $x = y^{-1} = (au)^{-1} = a^{-1}u^{-1} \in a^{-1}(F \setminus V)^{-1}$, verificando que $(F \setminus (F \cap aR))^{-1} \subseteq a^{-1}R$. Seja U uma vizinhança de 0, então existe $b \in V^*$ tal que $bR \subseteq U$. Tome $W = abR$ que é uma vizinhança de 0 pois $ab \in V^*$. Agora temos $(F \setminus (F \cap aR))^{-1}.W = (F \setminus (F \cap aR))^{-1}.abR \subseteq a^{-1}R.abR \subseteq U$ e analogamente, $W.(F \setminus (F \cap aR))^{-1} \subseteq U$ provando que $(F \setminus (F \cap M))^{-1}$ é limitado.

Corolário: Se M é uma vizinhança de 0 em $(F, \tau_R|_F)$ então $(F \setminus M)^{-1}$ é limitado.

Demonstração:

Seja U uma vizinhança de 0 em $\tau_R|_F$. Existem M' e U' vizinhanças de 0 em τ_R tais que $U' \cap F \subseteq U$ e $M' \cap F \subseteq M$. Pela Proposição existe uma vizinhança W' de 0 em τ_R tal que $W'.(F \setminus (F \cap M'))^{-1} \subseteq U'$. Mas W' contém um aberto A' de τ_R com $0 \in A'$. Tomando $W = A' \cap F$ temos $W \subseteq W'$, e W é uma vizinhança de 0 por ser aberto. Agora, $W.(F \setminus M)^{-1} \subseteq W'.(F \setminus M)^{-1} \subseteq W'.(F \setminus (F \cap M'))^{-1} \subseteq U'$ e claramente $W.(F \setminus M)^{-1} \subseteq F$ que leva a $W.(F \setminus M)^{-1} \subseteq U$. Portanto $(F \setminus M)^{-1}$ é limitado.

Nosso objetivo atual é provar que $(F, \tau_R|_F)$ é um corpo V -topológico, segundo a definição abaixo, devida a Kowalski e Dürbaum.

Definição: Um corpo topológico (K, τ) , não discreto e Hausdorff é chamado V -topológico, se para toda vizinhança M de 0, o conjunto $(K \setminus M)^{-1}$ for limitado. Neste caso τ é uma V -topologia em K .

Até o momento temos que (Q, τ_R) é um anel topológico não discreto e Hausdorff. Como a propriedade Hausdorff, e a continuidade das aplicações diferença e produto são hereditárias, concluímos com a ajuda do Corolário da Proposição 2.1

e do Corolário da Proposição 2.5, que $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ é anel topológico não discreto, de Hausdorff e tal que $(F \setminus M)^{-1}$ é limitado para toda vizinhança da origem M . Assim para concluir que $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ é um corpo V -topológico, falta verificar que a aplicação $\varphi : F^* \rightarrow F^*$; $\varphi(x) = x^{-1}$ é contínua.

Uma forma alternativa para ver os abertos de $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ e conseqüentemente de $(F^*, \mathcal{T}_R|_{F^*})$ é dada pela Proposição abaixo.

Proposição 2.6: Um subconjunto $A \subseteq F$ é aberto em $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ se, e somente se, para cada $x \in A$ existir $a \in V^*$, tal que $x + aV \subseteq A$.

Demonstração:

Assuma A aberto e tome $x \in A$. Então $A = A' \cap F$ com $A' \in \mathcal{T}_R$ e existe $a \in V^*$ tal que $x + aR \subseteq A'$. Como $x \in F$ temos $(x + aR) \cap F = x + (aR \cap F)$ e daí $x + aV = x + (aR \cap F) = (x + aR) \cap F \subseteq A' \cap F = A$. Reciprocamente, para cada $x \in A$ temos por hipótese um $a \in V^*$ tal que $x + aV \subseteq A$. Como $aR \in \mathcal{T}_R$ segue que $aV = aR \cap F$ é aberto em F , e o homeomorfismo de F em F , $b \mapsto x + b$ mostra que $x + aV$ é aberto em F . Portanto $A = \bigcup_{x \in A} (x + aV)$ é aberto.

Corolário: Se $\mathcal{T}_V$ é a topologia que o anel de valorização V define no corpo F , então $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_R|_F$.

Demonstração:

De forma análoga ao que fizemos para $\mathcal{T}_R$, temos que o conjunto $\{aV ; a \in V^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para $\mathcal{T}_V$. Portanto segue da Proposição que $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_R|_F$.

Lema 2.7: Sejam $a \in V^*$ e $x \in F$. Então:

(a) Existe $b \in V^*$ tal que $xbV \subseteq aV$.

(b) Existe $b' \in V^*$ tal que $0 \notin (1 + b'V)$ e $(1 + b'V)^{-1} \subseteq (1 + aV)$.

Demonstração:

(a) Para $x \in Q$, existe $v \in V^*$ tal que $xv \in R$, por [20]. Como $x \in F$, temos $xv \in V$. Tomando $b = va \in V^*$ segue que $xbV = xvaV \subseteq VaV = aV$.

(b) Como vimos na demonstração da Proposição 2.1(e), $\bigcap_{m \in V^*} mV = \{0\}$ e assim $-1 \notin cV$ para algum $c \in V^*$. Também aV é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_R|_F$ e pelo Corolário da Proposição 2.5, $(F \setminus aV)^{-1}$ é limitado. Então existe vizinhança

W de 0 em $\mathcal{T}_R|_F$ tal que $W.(F \setminus aV)^{-1} \subseteq cV$, mais ainda, existe $d \in V^*$ tal que $dV \subseteq W$. Lembrando que cR e dR são R -ideais, por [4] eles estão ordenados e daí $cR \cap dR = b'R$ para $b' = c$ ou $b' = d$. Claramente $b'V \subseteq cV \cap dV$ e assim $-1 \notin b'V$, isto é, $0 \notin 1 + b'V$. Seja $u \in b'V$, devemos provar que $(1 + u)^{-1} \in 1 + aV$ e podemos assumir $u \neq 0$. De $(1 + u) \in 1 + b'V \subseteq F$ e $-u \in F$ segue que $(1 + u)^{-1}(-u) \in F$. Supondo $(1 + u)^{-1}(-u) = \alpha \notin aV$ vem que $-u\alpha^{-1} = 1 + u$ implicando $-1 = u + u\alpha^{-1} \in b'V + b'V(F \setminus aV)^{-1} \subseteq cV + dV(F \setminus aV)^{-1} \subseteq cV + cV = cV$ que não é possível. Portanto $(1 + u)^{-1}(-u) \in aV$, mas $(1 + u)^{-1} - 1 = (1 + u)^{-1}(-u) \in aV$ que leva a $(1 + u)^{-1} \in (1 + aV)$ e finalmente $(1 + bV)^{-1} \subseteq (1 + aV)$.

Proposição 2.8: A aplicação $\varphi : F^* \rightarrow F^*$ dada por $\varphi(x) = x^{-1}$ é um homeomorfismo.

Demonstração:

A bijeção é imediata, e como $\varphi^{-1} = \varphi$ basta provar que φ é contínua. Seja $B \in \mathcal{T}_R|_{F^*}$ com $x^{-1} \in B$. Então $B = A \setminus \{0\}$ para algum $A \in \mathcal{T}_R|_F$ e existe $a \in V^*$ tal que $x^{-1} + aV \subseteq A$. Pelo Lema 2.7(a), existe $b'' \in V^*$ que satisfaz $x^{-1}b''V \subseteq aV$ e daí $b''V \subseteq xaV$. Pelo item (b) do mesmo Lema, existe $b' \in V^*$ tal que $(1 + b'V)^{-1} \subseteq (1 + b''V)$ e $0 \notin (1 + b'B)$. Novamente pelo item (a) do Lema obtemos $b \in V^*$ tal que $x^{-1}bV \subseteq b'V$. Note que $0 \notin (x + bV)$, pois se fosse o contrário teríamos $-x \in bV$ e daí $-1 \in b'V$ que contradiz $0 \notin (1 + b'V)$. Como $bV \in \mathcal{T}_R|_F$ e $m \mapsto x + m$ é homeomorfismo de F em F , vem que $(x + bV) \in \mathcal{T}_R|_F$ e então $(x + bV) \in \mathcal{T}_R|_{F^*}$ pois $0 \notin (x + bV)$. Seja $z \in \varphi(x + bV) = (x + bV)^{-1}$, $z = y^{-1}$ com $y = x + u$, $u \in bV$. Assim $y = x(1 + x^{-1}u)$ e $y^{-1} = x^{-1}(1 + x^{-1}u)^{-1}$, e como $x^{-1}u \in x^{-1}bV \subseteq b'V$, temos $(1 + x^{-1}u)^{-1} \in (1 + b'V)^{-1} \subseteq (1 + b''V) \subseteq (1 + xaV)$ implicando em $z = y^{-1} = x^{-1}(1 + x^{-1}u)^{-1} \in x^{-1}(1 + xaV) = x^{-1} + aV$ que conclui $\varphi(x + bV) \subseteq (x^{-1} + aV) \subseteq A \setminus \{0\} = B$. Portanto φ é contínua em todo $x \in F^*$.

Para referência futura, reunimos no Teorema abaixo algumas propriedades que verificamos para a topologia $\mathcal{T}_R$.

Teorema 2.9: Se $\mathcal{T}_R$ é a topologia definida por R em Q então:

- (a) $(Q, \mathcal{T}_R)$ é anel topológico não discreto e Hausdorff.
- (b) $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ é corpo V -topológico.

Um fato conhecido sobre anéis de valorização de corpos, é que um anel de valorização de um corpo, gera uma V -topologia neste corpo. Observamos que este resultado também pode ser obtido como um caso particular do Teorema anterior.

Uma propriedade importante da topologia $\mathcal{T}_R$ de Q , que usaremos no quarto capítulo para estender o conceito de V -topologia para um anel artinianiano simples, é que $\mathcal{T}_R$ é equivalente a topologia produto induzida pela topologia $\mathcal{T}_R|_F$ do centro F de Q . A nossa demonstração desta propriedade, usa resultados sobre equivalência de topologias definidas por anéis de Dubrovin, e portanto antes de apresentá-la desenvolveremos proposições sobre equivalências de tais topologias.

Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em um conjunto S , para verificar que $\mathcal{T}' \succ \mathcal{T}$ devemos mostrar que para cada $a \in S$, e para cada $A \in \mathcal{T}$ com $a \in A$, existe $B \in \mathcal{T}'$ tal que $a \in B$ e $B \subseteq A$. O próximo Lema diz que quando S é um anel e a aplicação soma é contínua em ambas topologias, então é suficiente verificar a sentença acima para $a = 0$, sem se preocupar com o aberto B conter a .

Lema 2.10: Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias em um anel S tais que a aplicação $s : S \times S \rightarrow S$; $s(x, y) = x + y$ é contínua em ambas topologias. Então são equivalentes:

(i) $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$.

(ii) Todo aberto de $\mathcal{T}$ contendo 0, contém um aberto não vazio de $\mathcal{T}'$, e vice-versa.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) É imediato.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $a \in S$ e A um aberto de $\mathcal{T}$ com $a \in A$. Como a aplicação soma é contínua, vem que $(-a + A)$ é um aberto de $\mathcal{T}$ contendo 0. Novamente a continuidade de s no ponto $(0, 0)$ garante a existência de dois abertos B_1 e B_2 em $\mathcal{T}$, ambos contendo 0 tais que $B_1 - B_2 \subseteq (-a + A)$. Aplicamos a hipótese (ii) em $B = B_1 \cap B_2$ obtendo um aberto não vazio B' de $\mathcal{T}'$ tal que $B' \subseteq B$. Para $b' \in B'$, a continuidade de s em relação a topologia $\mathcal{T}'$ assegura que $B'' = (a - b' + B') \in \mathcal{T}'$, e B'' contém a pois $b' \in B'$. Como $-b' + B' \subseteq B_1 - B_2 \subseteq -a + A$, temos que $B'' \subseteq A$. Portanto, dado $A \in \mathcal{T}$ com $a \in A$, existe $B'' \in \mathcal{T}'$ com $a \in B''$ tal que $B'' \subseteq A$, que mostra que $\mathcal{T}' \succ \mathcal{T}$. Analogamente prova-se que $\mathcal{T} \succ \mathcal{T}'$.

Definição: Sejam M e M' ordens em um anel S . Escrevemos que $M \sim M'$ e dizemos que M é equivalente a M' , se existirem $a, b, c, d \in Q^*$ tais que $aMb \subseteq M'$ e $cM'd \subseteq M$.

Proposição 2.11: Sejam R e R' anéis de valorização de Q . Então $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R'}$ se, e somente se, $R \sim R'$.

Demonstração:

Assuma que $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R'}$. Como $0 \in R' \in \mathcal{T}_{R'}$ e $\mathcal{T}_R \succ \mathcal{T}_{R'}$, então existe $A \in \mathcal{T}_R$ com $0 \in A$ e $A \subseteq R'$. De $0 \in A$, obtemos um $a \in R \cap F^*$ tal que $aR \subseteq A$, e tomando $b = 1$ temos $aRb \subseteq R'$ com $a, b \in Q^*$. Da mesma forma obtemos $c, d \in Q^*$ tais que $cR'd \subseteq R$ e portanto $R \sim R'$. Na outra direção mostraremos apenas que $\mathcal{T}_{R'} \succ \mathcal{T}_R$ pois analogamente prova-se que $\mathcal{T}_R \succ \mathcal{T}_{R'}$. Por hipótese existem $c, d \in Q^*$ tais que $cR'd \subseteq R$, de outra forma, $R' \subseteq c^{-1}Rd^{-1}$. Seja A um aberto de $\mathcal{T}_R$. Pelo Lema 2.10 podemos assumir que $A = vR$ com $v \in (R \cap F)^*$ já que $\mathcal{V}'' = \{vR; v \in (R \cap F)^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem para $\mathcal{T}_R$. Aplicando a Proposição 2.1(b) para c^{-1} , vR e com $\mathcal{V}''$ ao invés de $\mathcal{V}$, obtemos $uR \in \mathcal{T}_R$ que satisfaz $c^{-1}uR \subseteq vR$ com $u \in (R \cap F)^*$. Usando a mesma Proposição para d^{-1} e uR , obtemos $fR \in \mathcal{T}_R$ com $f \in (R \cap F)^*$ tal que $fRd^{-1} \subseteq uR$. Para o anel de Dubrovin R' e $f \in Q$, existe por [20] um $g \in (R' \cap F)^*$ tal que $gf \in R'$, e como $g, f \in F$ vale $gf \in (R' \cap F)^*$ e portanto $gfR' \in \mathcal{T}_{R'}$. Finalmente, $gfR' \subseteq fR' \subseteq f(c^{-1}Rd^{-1}) = c^{-1}(fRd^{-1}) \subseteq c^{-1}uR \subseteq vR$, que prova $\mathcal{T}_{R'} \succ \mathcal{T}_R$.

Corolário: Se R e R' são anéis de valorização de Q tais que $R \cap F = R' \cap F$, então $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R'}$.

Demonstração:

Como $R \cap F = R' \cap F$, segue de [18] que existe $q \in Q^*$ tal que $qRq^{-1} = R'$. Portanto $R \sim R'$, e pela Proposição $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R'}$.

A princípio sabíamos que todos os anéis de valorização de Q , que estendem um anel de valorização do centro F de Q , eram conjugados. Pelo Corolário acima sabemos que estas extensões geram a mesma topologia em Q . Usando o Teorema da Extensão, concluímos que um anel de valorização próprio V de F gera uma única topologia em Q , que pode ser representada por $\mathcal{T}_R$, onde R é uma extensão de V . Por outro lado, a próxima Proposição junto com [13] mostra que quando R não é maximal em Q , existe um anel de Dubrovin R' de Q , que gera em Q a mesma topologia que R , mas que não está associado a V , isto é, $R' \cap F \neq V$.

Proposição 2.12: Com a notação usual, se R' é um anel tal que $R \subseteq R' \subseteq Q$, então R' é anel de valorização de Q e $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R'}$.

Demonstração:

Por [5] R' é anel de valorização de Q e $J(R')$ é ideal primo de R . Assim $J(R')$ é um ideal bilateral próprio de R , e como verificamos que $J(R)$ é o único ideal bilateral maximal de R , vem que $J(R') \subseteq J(R) \subseteq R$. Para provarmos a equivalência das topologias, combinamos a Proposição 1.12 e o Lema 2.10, e portanto é suficiente verificar que todo ideal bilateral não nulo de um dos anéis contém um ideal bilateral não nulo do outro anel, e vice-versa. Seja I' um ideal bilateral não nulo de R' . Se $I' = R'$ tome $I = R$. Se $I' \neq R'$, como $J(R')$ é o único ideal bilateral maximal de R' , temos $I' \subseteq J(R') \subseteq R$. Mas I' é ideal bilateral de R , pois $RI'R \subseteq R'I'R' = I'$ e assim basta tomar $I = I'$. Seja agora I um ideal bilateral não nulo de R . Se $J(R') \subseteq I$, tome $I' = J(R')$ que é não nulo pela Proposição 1.11. Se $J(R') \not\subseteq I$ então $I \subseteq J(R')$ por [4], e tomando $I' = J(R')IJ(R')$ vem que I' é ideal bilateral de R' . Sendo I ideal bilateral de R e $J(R') \subseteq R$ temos que $I' \subseteq I$. Para ver que I' é não nulo, tomamos a e b elementos regulares de Q tais que $a \in I$ e $b \in J(R')$, que existem pois I e $J(R')$ são R -ideais. Assim $0 \neq bab \in I'$.

Na demonstração da Proposição anterior, verificamos que quando $R \subseteq R' \subseteq Q$ então todo ideal bilateral próprio de R' é ideal bilateral de R , e que todo ideal bilateral de R apenas contém um ideal bilateral de R' . Em geral não é verdade que os ideais bilaterais próprios de R são ideais bilaterais de R' . Com efeito, escolha $R \subset R'$ tal que $J(R') \subset J(R)$. Como $J(R)$ e $J(R')$ são ideais primos de R , segue de [10] que $J(R') \cap F \subset J(R) \cap F$. Tome $a \in (J(R) \cap F) \setminus (J(R') \cap F)$ e considere o ideal bilateral aR de R . Como $a \neq 0$ temos $aR \neq 0$ e também $aR \neq R$ já que $aR \subseteq J(R) \subset R$. Supondo que aR seja ideal bilateral de R' , como $aR \neq R'$, temos que $aR \subseteq J(R')$ implicando que $a \in J(R')$. Essa contradição mostra que aR é ideal bilateral próprio de R , mas não é ideal bilateral de R' .

Dois anéis de valorização V_1 e V_2 de um corpo K são ditos dependentes, se existe um anel de valorização próprio V_3 de K tal que $V_1, V_2 \subseteq V_3$. Em ([PZ], § 3, Lemma 3.4) vemos que V_1 e V_2 são dependentes se, e somente se, $\mathcal{T}_{V_1} \sim \mathcal{T}_{V_2}$. O Corolário abaixo estabelece o análogo a este resultado, para os anéis de valorização de Dubrovin.

Corolário Se R_1 e R_2 são anéis de valorização próprios de Q , então são equivalentes:

(i) Existe um anel de valorização próprio R_3 de Q , tal que $R_1, R_2 \subseteq R_3$.

(ii) $\mathcal{T}_{R_1} \sim \mathcal{T}_{R_2}$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Segue da Proposição 2.12.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Chamando $V_1 = R_1 \cap F$ e $V_2 = R_2 \cap F$, vem da Proposição 2.1(a) que V_1 e V_2 são anéis de valorização próprios de F . O Corolário da Proposição 2.6 assegura que $\mathcal{T}_{R_1}|_F = \mathcal{T}_{V_1}$ e $\mathcal{T}_{R_2}|_F = \mathcal{T}_{V_2}$, e usando a hipótese concluímos que $\mathcal{T}_{V_1} \sim \mathcal{T}_{V_2}$. Agora pelo resultado conhecido do caso comutativo, temos que V_1 e V_2 são dependentes e então existe um anel de valorização próprio V_3 de F para o qual $V_1, V_2 \subseteq V_3$. Combinando o Teorema da Extensão e [13], chegamos a um anel de valorização próprio R_3 de Q tal que $R_1, R_2 \subseteq R_3$.

Observe que na demonstração do Corolário, verificamos que se R_1 e R_2 são anéis de valorização próprios de Q , $V_1 = R_1 \cap F$ e $V_2 = R_2 \cap F$ então $\mathcal{T}_{R_1} \sim \mathcal{T}_{R_2}$ se, e somente se, $\mathcal{T}_{V_1} \sim \mathcal{T}_{V_2}$.

No Capítulo anterior, apresentamos um exemplo que mostrava a inexistência de um Teorema da Extensão para anéis de valorização, que não fossem anéis de valorização do centro do anel artinianiano simples. Os argumentos usados foram algébricos. A próxima Proposição mostra por argumentos topológicos, que tais extensões podem não existir.

Proposição 2.13: Sejam K um corpo, $F \subset K \subset Q$, $F \subset K$ uma extensão normal e V um anel de valorização de F . Se V tem extensões independentes em K , então nenhuma destas extensões pode ser estendida a um anel de valorização de Q .

Demonstração:

Sejam $B_1, B_2, \dots, B_n, n > 1$, os anéis de valorização de K que estendem V . Fixe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e suponha que B_i tem extensão R_i em Q . Como V tem extensões independentes, existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \neq i$ tal que B_i e B_j são independentes. Por hipótese K é uma extensão normal de F , e segue de ([E], pg 105) que existe um automorfismo φ de K tal que $\varphi(B_i) = B_j$. Aplicando o Teorema de Skolem-Noether ([R], pg 103) a φ , vemos que existe $a \in Q^*$ tal que $\varphi(x) = axa^{-1}$ para todo $x \in K$, assim $B_j = aB_ia^{-1}$. Tomamos $R_j = aR_ia^{-1}$ que é anel de valorização de Q , e estende B_j pois $R_j \cap K = aR_ia^{-1} \cap aKa^{-1} = a(R_i \cap K)a^{-1} = aB_ia^{-1} = B_j$. Uma vez que R_i e R_j são ordens equivalentes em Q , temos pela Proposição 2.11 que

$\mathcal{T}_{R_i} \sim \mathcal{T}_{R_j}$. Como $\{bB_i; b \in B_i^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para a origem na topologia $\mathcal{T}_{B_i}$ de K , uma reprodução da Proposição 2.6 trocando F por K e V por B_i mostra que $\mathcal{T}_{R_i}|_K \sim \mathcal{T}_{B_i}$. Analogamente $\mathcal{T}_{R_j}|_K \sim \mathcal{T}_{B_j}$ e então $\mathcal{T}_{B_i} \sim \mathcal{T}_{B_j}$ que não é possível pois B_i e B_j são independentes. Portanto para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, B_i não possui extensão a um anel de valorização de Q .

O mesmo exemplo do Capítulo I pode ser usado para ilustrar a Proposição 2.13. De fato, se $Q = \mathbb{H}$ o anel dos quatérnios racionais, $K = \mathbb{Q}(i)$ e $V = \mathbb{Z}_{(5)}$ sabemos que V tem duas extensões B_1 e B_2 em $\mathbb{Q}(i)$. Como $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$ temos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$ é uma extensão normal. A maximalidade de $\mathbb{Z}_{(5)}$ garante que B_1 e B_2 são independentes, pois caso contrário teríamos um anel de valorização B_3 de K com $B_1, B_2 \subseteq B_3$, e daí $B_3 \cap F = V$ implicando, por [13], em $B_1 = B_3 = B_2$ que não pode ocorrer. Portanto podemos aplicar a Proposição anterior, para concluir que B_1 e B_2 não podem ser estendidas a um anel de valorização de $\mathbb{H}$.

Como sempre $\mathcal{T}_R$ é a topologia que R gera em Q e $\mathcal{T}_R|_F$ é a restrição ao centro F de Q , que coincide com a topologia gerada pelo anel de valorização comutativo $V = R \cap F$. Se $n = [Q : F]$ então Q é isomorfo como espaço vetorial a n cópias de F e portanto podemos considerar a topologia produto em Q , induzida por $\mathcal{T}_R|_F$. Nosso próximo objetivo é provar que $\mathcal{T}_R$ é equivalente a esta topologia produto. Para isso verificaremos que existe uma F -base $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq R^*$ de Q , e então para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a regularidade de a_i assegurará que $a_i F$ é homeomorfo a F . Denotaremos por Π_R a topologia produto das n cópias homeomorfas a F , e provaremos que é equivalente a $\mathcal{T}_R$.

Proposição 2.14: Se $n = [Q : F]$ então existe uma F -base regular $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ de Q , com $b_1 = 1$.

Demonstração:

Se $n = 1$ basta tomar $b_1 = 1$. Podemos assumir $n > 1$ e assim Q não é corpo pois F é o centro de Q . Segue de ([D1], §2, Lemma 1) que todo elemento de Q pode ser escrito como a soma de dois elementos regulares, isto é, $Q = Q^* + Q^*$. Note que $Q^* \not\subseteq F$ pois se não fosse assim teríamos $Q = Q^* + Q^* \subseteq F \subseteq Q$ implicando $n = 1$. Portanto tomando $b_1 = 1$ e $b_2 \in Q^* \setminus F$ obtemos um conjunto $\{b_1, b_2\} \subseteq Q^*$ linearmente independente sobre F , já que b_2 não está no subespaço gerado por b_1 . Suponha obtido um conjunto $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq Q^*$ linearmente independente sobre F , com $b_1 = 1$ e $k < n$. Então $Q \not\subseteq (b_1 F + b_2 F + \dots + b_k F)$ e segue que $Q^* \not\subseteq (b_1 F + b_2 F + \dots + b_k F)$. Tomando $b_{k+1} \in Q^* \setminus (b_1 F + b_2 F + \dots + b_k F)$ obtemos

$\{b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}\} \subseteq Q^*$ e linearmente independente sobre F . Por indução existe um conjunto $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq Q^*$ com $b_1 = 1$, linearmente independente sobre F e portanto base de Q .

Corolário: Se $n = [Q : F]$ e R é uma ordem bilateral de Q , então existe uma F -base $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq R^*$ de Q , com $a_1 = 1$.

Demonstração:

Pela Proposição temos uma F -base $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq Q^*$, com $b_1 = 1$. Como Q é anel artinian simples, segue do Primeiro Teorema de Goldie que R é anel de Goldie primo, e então pela Proposição 1.5 para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe $v_i \in V^* = R \cap F^*$ tal que $b_i v_i \in R$. Escolha $a_i = b_i v_i$ para $i \neq 1$ e $a_1 = 1$. Como v_i e b_i são regulares temos que a_i é regular, e então $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq R^*$. Para verificar que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é um conjunto linearmente independente sobre F , tomamos $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ tais que $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n = 0$. Multipliquemos esta igualdade por $v = 1.v_2^{-1} \dots v_n^{-1} \in F^*$, obtendo $0 = c_1 v a_1 + c_2 v a_2 + \dots + c_n v a_n = c_1 (1.v_2^{-1} \dots v_n^{-1}) a_1 + c_2 (1.v_2^{-1} \dots v_n^{-1}) a_2 + \dots + c_n (1.v_2^{-1} \dots v_n^{-1}) a_n = c_1 (v_2^{-1} \dots v_n^{-1}) b_1 + c_2 (1.v_3^{-1} \dots v_n^{-1}) b_2 + \dots + c_n (1.v_2^{-1} \dots v_{n-1}^{-1}) b_n$ que é uma combinação linear de $b_1, b_2, \dots, b_n$ com coeficientes em F , e leva a

$$\begin{cases} c_1 v_2^{-1} \dots v_n^{-1} &= 0 \\ c_2 v_3^{-1} \dots v_n^{-1} &= 0 \\ \vdots & \\ c_n v_2^{-1} \dots v_{n-1}^{-1} &= 0 \end{cases}$$

Portanto $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ e $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq R^*$ é F -base.

Se $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é uma F -base regular de Q , e para cada índice i considerarmos as topologias $\mathcal{T}_R|_F$ e $\mathcal{T}_R|_{a_i F}$ em F e $a_i F$ respectivamente, então F e $a_i F$ são homeomorfos. Com efeito, $\varphi : F \rightarrow a_i F$, $\varphi(x) = a_i x$ é bijetora, e se B é um aberto de $a_i F$ contendo $a_i x$, então $B = A \cap a_i F$ para algum $A \in \mathcal{T}_R$. Segue da Proposição 2.4 que $a_i^{-1} A \in \mathcal{T}_R$ e tomamos $B' = a_i^{-1} A \cap F \in \mathcal{T}_R|_F$, que contém x . Se $y \in B'$, $y = a_i^{-1} a$ com $a \in A$, $a = \varphi(y) = a_i y \in A \cap a_i F$ pois $y \in F$. Assim $\varphi(B') \subseteq B$ e φ é contínua em todo $x \in F$. Analogamente prova-se que $\varphi^{-1}(y) = a^{-1} y$ é contínua em todo $y \in F$.

Com as respectivas topologias produto, vem que $F^n = F \oplus F \oplus \dots \oplus F$ é homeomorfo a $a_1 F \oplus a_2 F \oplus \dots \oplus a_n F = Q$. Portanto para cada anel de valorização R

de Q , temos uma topologia produto induzida por F em Q , que denotaremos por Π_R . Através do homeomorfismo podemos tomar Π_R como sendo a topologia de $a_1F \oplus a_2F \oplus \cdots \oplus a_nF$, para alguma F -base $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de Q , isto é, $\Pi_R = \mathcal{T}_R|_{a_1F} \oplus \mathcal{T}_R|_{a_2F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_R|_{a_nF}$.

Definição: Seja $\mathcal{T}$ uma topologia em Q . Diremos que $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia produto induzida pela topologia de F , quando existir uma F -base regular $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de Q tal que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}|_{a_1F} \oplus \mathcal{T}|_{a_2F} \oplus \cdots \mathcal{T}|_{a_nF}$.

Lema 2.15: A aplicação $s : (Q, \Pi_R) \times (Q, \Pi_R) \rightarrow (Q, \Pi_R)$, dada por $s(x, y) = x + y$ é contínua.

Demonstração:

Sejam $(x, y) \in Q \times Q$ e A um aberto de Π_R contendo $x + y$. Fixe $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base regular de Q , e escreva $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ com $x_i, y_i \in a_iF$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sabemos pela Proposição 2.9 que a aplicação $s' : (F, \mathcal{T}_R|_F) \times (F, \mathcal{T}_R|_F) \rightarrow (F, \mathcal{T}_R|_F)$ dada por $s'(a, b) = a + b$ é contínua, e desde que $(F, \mathcal{T}_R|_F)$ é homeomorfo a $\mathcal{T}_R|_{a_iF}$ segue que a aplicação $s''_i : (a_iF, \mathcal{T}_R|_{a_iF}) \times (a_iF, \mathcal{T}_R|_{a_iF}) \rightarrow (a_iF, \mathcal{T}_R|_{a_iF})$; $s''_i(x_i, y_i) = x_i + y_i$ é contínua para cada índice i . Como $A \in \Pi_R$, vem que $A = \bigcup_{r \in L} A_r$, L um conjunto de índices, $A_r = A_{r_1} \oplus A_{r_2} \oplus \cdots \oplus A_{r_n}$ e $A_{r_i} \in \mathcal{T}_R|_{a_iF}$, e já que $x + y \in A$, existe $t \in L$ tal que $x + y \in A_t = A_{t_1} \oplus A_{t_2} \oplus \cdots \oplus A_{t_n}$. Assim $x_i + y_i \in A_{t_i}$ e existem $B_i, C_i \in \mathcal{T}_R|_{a_iF}$ tais que $x_i \in B_i$, $y_i \in C_i$ e $s''_i(B_i \times C_i) = B_i + C_i \subseteq A_{t_i}$. Tomando $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$, $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$ temos que $B \times C$ é aberto em $(Q, \Pi_R) \times (Q, \Pi_R)$ contendo (x, y) e $s(B \times C) = B + C = B_1 + C_1 + B_2 + C_2 + \cdots + B_n + C_n \subseteq A_{t_1} \oplus A_{t_2} \oplus \cdots \oplus A_{t_n} \subseteq A$.

Proposição 2.16: Sejam $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base de Q e R um anel de valorização de Q . Então existe um anel de valorização R' de Q e um elemento não nulo $x \in R'$, tal que $R \subseteq R' \subset Q$ e $xR' = R'x \subseteq a_1V' + a_2V' + \cdots + a_nV'$, para $V' = R' \cap F$.

Demonstração:

Se R possui um sobreanel maximal R' em Q , $R \subseteq R' \subset Q$, então R' é um anel de valorização de Q e segue de ([Gr], §5, Lemma 5.1) que existe um x não nulo em R' tal que $xR' = R'x \subseteq a_1J(V') + a_2J(V') + \cdots + a_nJ(V') \subseteq a_1V' + a_2V' + \cdots + a_nV'$. Se R não possui sobreanel maximal em Q , usamos ([Gr], §2, Theorem 2.2) para garantir a existência de um anel de valorização R' de Q tal que $R \subseteq R' \subset Q$ e $R' = a_1V' + a_2V' + \cdots + a_nV'$.

Teorema 2.17: Sejam Q um anel artiniano simples com centro F , $[Q : F] < \infty$ e R um anel de valorização de Q . Então a topologia dos R -ideais é equivalente a topologia produto que F induz em Q .

Demonstração:

Seja $n = [Q : F]$, então o Corolário da Proposição 2.14 assegura que existe uma F -base $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq R^*$ de Q . Pela Proposição 2.16 existe um anel de valorização R' de Q e $0 \neq x \in R'$ tal que $R \subseteq R' \subset Q$ e $xR' = R'x \subseteq a_1V' + a_2V' + \dots + a_nV'$ para $V' = R' \cap F$. Vimos na Proposição 2.12 que $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R'}$ implicando $\mathcal{T}_R|_{a_iF} \sim \mathcal{T}_{R'}|_{a_iF}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e portanto $\Pi_R \sim \Pi_{R'}$. Desta forma é suficiente provar que $\mathcal{T}_{R'} \sim \Pi_{R'}$. Em função da Proposição 2.4 e dos Lemas 2.10 e 2.15, trabalharemos apenas com abertos contendo a origem. Seja $A \in \mathcal{T}_{R'}$ com $0 \in A$, então existe $a \in V'^*$ tal que $aR' \subseteq A$. Claramente $aR' \in \mathcal{T}_{R'}$ e para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $B_i = aR' \cap a_iF \in \mathcal{T}_{R'}|_{a_iF}$. Escolhendo $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n$ vem que $B \in \Pi_{R'}$, e se $b = b_1 + b_2 + \dots + b_n \in B$ então $b_i \in aR'$ e daí $b \in aR' \subseteq A$ que mostra que $B \subseteq A$, e portanto $\Pi_{R'} \succ \mathcal{T}_{R'}$. Por outro lado, se $M \in \Pi_{R'}$ e $0 \in M$ então $M = \bigcup_{r \in L} M_r$, L um conjunto de índices e $M_r = M_{r_1} \oplus M_{r_2} \oplus \dots \oplus M_{r_n}$ com $M_{r_i} \in \mathcal{T}_{R'}|_{a_iF}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como $0 \in M$, existe $t \in L$ tal que $0 \in M_t$ e portanto $0 \in M_{t_i} = N_i \cap a_iF$ com $N_i \in \mathcal{T}_{R'}$. Desde que $0 \in N_i$, existe $b_i \in V'^*$ tal que $b_iR' \subseteq N_i$. Agora temos $b_1R', b_2R', \dots, b_nR'$ que são R' -ideais contidos no anel de valorização R' , logo estão ordenados por inclusão. Chame bR o menor deles, isto é $b \in V'^*$ e $bR' \subseteq b_iR'$ para todo i . Note que para o elemento x obtido no início da demonstração vale $bxR' \in \mathcal{T}_{R'}$, pois como b é inversível e $x \neq 0$ temos $bx \neq 0$, também de $R'x = xR'$ e $b \in F$ vem que bxR' é ideal bilateral não nulo de R' , que pela Proposição 1.12 é R' -ideal e portanto um aberto de $\mathcal{T}_{R'}$. Lembrando que $a_i \in R \subseteq R'$ vemos que $ba_iV' \subseteq bR'$, e como $b \in F$ vale a inclusão $ba_iV' \subseteq a_iF$ de onde tiramos $ba_iV' \subseteq bR' \cap a_iF$ para todo i . Finalmente, como $xR' = R'x \subseteq a_1V' + a_2V' + \dots + a_nV'$ temos $bxR' \subseteq b(a_1V' + a_2V' + \dots + a_nV') \subseteq (bR' \cap a_1F) + (bR' \cap a_2F) + \dots + (bR' \cap a_nF) \subseteq (b_1R' \cap a_1F) + (b_2R' \cap a_2F) + \dots + (b_nR' \cap a_nF) \subseteq (N_1 \cap a_1F) + (N_2 \cap a_2F) + \dots + (N_n \cap a_nF) = M_{t_1} \oplus M_{t_2} \oplus \dots \oplus M_{t_n} = M_t \subseteq M$. Isso mostra que $\mathcal{T}_{R'} \succ \Pi_{R'}$ e portanto $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{R'} \sim \Pi_{R'} \sim \Pi_R$.

Quando V é um anel de valorização do corpo F tal que $(F, \mathcal{T}_V)$ é um espaço topológico completo, vem de ([N], §4, Theorem 7) que Q tem uma única topologia, a topologia produto, que torna-o um anel topológico e estende a topologia $\mathcal{T}_V$. Por outro lado, se R é um anel de valorização de Dubrovin de Q que estende V , então $\mathcal{T}_R$ estende $\mathcal{T}_V$ e pelo Teorema 2.17 $\mathcal{T}_R$ é equivalente a topologia produto. Além disso, vimos no Corolário da Proposição 2.11, que os anéis de valorização de Q que estendem V geram topologias equivalentes em Q . Portanto, com a escolha de anéis

de Dubrovin que estendem V , temos somente a topologia produto em Q .

As topologias definidas em um anel, tomando como sistema fundamental de vizinhanças abertas para a origem as potências de um ideal bilateral M deste anel, são chamadas topologias M -ádicas. Tais topologias são bastante usadas pois fazem de qualquer anel um anel topológico. Nosso próximo objetivo é usar o ideal bilateral $J(R)$ de R , para definir a topologia $J(R)$ -ádica em Q , e encontrar condições para que esta topologia torne Q um anel topológico e coincida com a topologia dos R -ideais.

Definição: Seja A um subconjunto de Q . Dizemos que A é aberto na topologia $J(R)$ -ádica quando para cada $a \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + J(R)^n \subseteq A$.

Denotando o conjunto dos abertos de Q na topologia $J(R)$ -ádica por $\mathcal{T}_{J(R)}$, vem que $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ é um espaço topológico. É fácil ver que $\emptyset, Q \in \mathcal{T}_{J(R)}$ e que se $a \in \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$, $A_\alpha \in \mathcal{T}_{J(R)}$ para todo α num conjunto de índices L , então $a + J(R)^n \subseteq \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Para $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_{J(R)}$ e $a \in A_1 \cap A_2$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $a + J(R)^{n_1} \subseteq A_1$ e $a + J(R)^{n_2} \subseteq A_2$. Tomando $n = \max\{n_1, n_2\}$ temos que $a + J(R)^n \subseteq A_1 \cap A_2$, e portanto $A_1 \cap A_2$ é aberto.

Sendo R um anel de valorização próprio de Q , segue da Proposição 1.11 que $J(R) \neq 0$. Assim quando $J(R) = J(R)^2$ vem que $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ não é espaço topológico de Hausdorff, pois todo aberto que contém 0 também contém $J(R)$.

Os corpos V -topológicos, conforme definidos na página 31, são espaços não discretos e Hausdorff, por isso temos interesse no caso em que $J(R) \neq J(R)^2$. Veremos que $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ sempre é não discreto, e também é Hausdorff quando $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$.

Lema 2.18: Se $x \in Q$ e $n \in \mathbb{N}$ então $x + J(R)^n \in \mathcal{T}_{J(R)}$.

Demonstração:

Dado $a \in x + J(R)^n$, escrevemos $a = x + y$ com $y \in J(R)^n$. Mas $y + J(R)^n = J(R)^n$ e então $a + J(R)^n = x + J(R)^n$.

Corolário:

(a) O espaço topológico $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ é desconexo.

(b) O espaço topológico $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ não é discreto.

Demonstração:

(a) Basta verificar que $Q \setminus J(R)$ é aberto e teremos a cisão não trivial $Q = J(R) \cup Q \setminus J(R)$. Se $x \in Q \setminus J(R)$ e $y \in J(R)$ então $x+y \in Q \setminus J(R)$, pois $x+y \in J(R)$ implicaria em $x \in J(R)$. Assim para todo $x \in Q \setminus J(R)$, vem que $x+J(R) \subseteq Q \setminus J(R)$ e portanto $Q \setminus J(R)$ é aberto.

(b) Supondo que a topologia $\mathcal{T}_{J(R)}$ seja discreta, temos que $\{0\}$ é aberto e daí $J(R)^n = \{0\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas isso não é possível, pois R é anel primo e $J(R) \neq 0$ já que $R \neq Q$.

Proposição 2.19: As condições abaixo são equivalentes:

(i) $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ é espaço de Hausdorff.

(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponha $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n$ e $x \neq 0$. Por hipótese, temos $A, B \in \mathcal{T}_{J(R)}$ satisfazendo $A \cap B = \emptyset$, $0 \in A$ e $x \in B$. Assim existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $J(R)^{n_1} \subseteq A$, e $x + J(R)^{n_2} \subseteq B$. Então $J(R)^{n_1} \cap (x + J(R)^{n_2}) = \emptyset$, mas isso não é possível, pois $x \in J(R)^{n_1}$ e $x \in (x + J(R)^{n_2})$. Portanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $x, y \in Q$ tais que $x \neq y$. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \neq x - y \notin J(R)^m$. Tome $A = x + J(R)^m$ e $B = y + J(R)^m$ que são abertos e contém x e y respectivamente. Se $u \in A \cap B$, então $u = x + a = y + b$ com $a, b \in J(R)^m$, e daí $x - y = a - b \in J(R)^m$. Esta contradição mostra que $A \cap B = \emptyset$ e portanto $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ é espaço de Hausdorff.

Como R é diferente de Q , a Proposição 1.16 mostra que $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ é espaço de Hausdorff exclusivamente quando R é anel de valorização discreto. O próximo Teorema estabelece que nestas condições, a topologia $J(R)$ -ádica coincide com a topologia dos R -ideais.

Teorema 2.20: As condições abaixo são equivalentes:

- (i) $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_{J(R)}$.
- (ii) $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ é espaço de Hausdorff.
- (iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$.
- (iv) R é anel de valorização discreto de Q .
- (v) R é subanel maximal de Q e $J(R)$ é ideal principal a direita e a esquerda.

Demonstração:

Faremos $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Pelo Teorema 2.9.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Pela Proposição 2.19.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ Pela Proposição 1.16.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Pela Proposição 1.15.

$(v) \Rightarrow (iii)$ Chame $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n$ e suponha $T \neq \{0\}$. Como T é um ideal bilateral de R temos $R \subseteq O_r(T) \subseteq Q$ e $R \subseteq O_l(T) \subseteq Q$. Se $O_r(T) = Q$ e $O_l(T) = Q$ então $QT \subseteq T$ e $TQ \subseteq T$ implicando que T é ideal bilateral não nulo do anel simples Q , e daí $Q = T \subseteq J(R) \subset R$ que não é possível. Assim $O_r(T) \neq Q$ ou $O_l(T) \neq Q$, e assumimos que $R \subseteq O_l(T) \subset Q$. Por hipótese $J(R) = bR$, para algum $b \in J(R)$, mas como $R \neq Q$ a Proposição 1.11 assegura que $J(R)$ é ideal bilateral próprio e portanto contém um elemento regular q . Escrevendo $q = br$ para algum $r \in R$ vemos que b é regular a esquerda, e por R ser anel de Goldie primo, concluímos de ([Go], pg 98) que $b \in R^*$. Assim existe $b^{-1} \in Q$, e claramente $b^{-1} \notin R$. Sejam $t \in T$ e $n \in \mathbb{N}$, de $J(R) = bR$ tiramos $b^{-1}J(R)^{n+1} = J(R)^n$ e daí $b^{-1}t \in J(R)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue que $b^{-1}T \subseteq T$ mostrando que $b^{-1} \in O_l(T)$. Verificamos que quando $T \neq 0$ vale $R \subset O_l(T) \subset Q$, mas isso contradiz a maximalidade de R , e então $T = \{0\}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Como vimos acima, $J(R)$ contém um elemento regular. Portanto para cada $n \in \mathbb{N}$, $J(R)^n \neq \{0\}$ e $J(R)^n$ é um R -ideal, isto é, $J(R)^n \in \mathcal{T}_R$. Se $A \in \mathcal{T}_{J(R)}$ e $a \in A$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + J(R)^n \subseteq A$. Como $J(R)^n \in \mathcal{T}_R$, vem da Proposição 2.3 que $a + J(R)^n \in \mathcal{T}_R$ e assim $\mathcal{T}_R \succ \mathcal{T}_{J(R)}$. Reciprocamente, se $B \in \mathcal{T}_R$ e $b \in B$, então existe um R -ideal I , $0 \neq I \subseteq R$, tal que $b + I \subseteq B$. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \not\subseteq J(R)^n$, mas por [4] concluímos que $J(R)^n \subseteq I$. Assim $b + J(R)^n \subseteq B$, e pelo Lema 2.18 temos $b + J(R)^n \in \mathcal{T}_{J(R)}$ que

mostra $\mathcal{T}_{J(R)} \succ \mathcal{T}_R$.

A topologia $J(R)$ -ádica pode ser definida apenas em R ao invés de Q . Na próxima Proposição, verificamos que $(R, \mathcal{T}_{J(R)})$ sempre é anel topológico, e que $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$ é uma condição necessária e suficiente para que $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ seja anel topológico.

Proposição 2.21:

(a) $s : (Q, \mathcal{T}_{J(R)}) \times (Q, \mathcal{T}_{J(R)}) \rightarrow (Q, \mathcal{T}_{J(R)})$; $s(x, y) = x - y$ é contínua.

(b) $(R, \mathcal{T}_{J(R)})$ é anel topológico.

(c) $(Q, \mathcal{T}_{J(R)})$ é anel topológico se, e somente se, $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$.

Demonstração:

(a) Sejam $(x_0, y_0) \in Q \times Q$ e A um aberto de Q contendo $x_0 - y_0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 - y_0 + J(R)^n \subseteq A$. Pelo Lema 2.18, o conjunto $B = (x_0 + J(R)^n) \times (y_0 + J(R)^n)$ é aberto em $Q \times Q$, e se $b = (x_0 + x, y_0 + y) \in B$ então $s(b) = x_0 - y_0 + (x - y) \in x_0 - y_0 + J(R)^n \subseteq A$. Portanto s é contínua em todos os pontos de $Q \times Q$.

(b) A aplicação $s : (R, \mathcal{T}_{J(R)}) \times (R, \mathcal{T}_{J(R)}) \rightarrow (R, \mathcal{T}_{J(R)})$; $s(x, y) = x - y$ é contínua por (a). Para ver que $p : (R, \mathcal{T}_{J(R)}) \times (R, \mathcal{T}_{J(R)}) \rightarrow (R, \mathcal{T}_{J(R)})$; $p(x, y) = xy$ é contínua, tomamos $(x_0, y_0) \in R \times R$ e A um aberto de R contendo $x_0 y_0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 y_0 + J(R)^n \subseteq A$. Pelo Lema 2.18, o conjunto $B = (x_0 + J(R)^n) \times (y_0 + J(R)^n)$ é aberto em $R \times R$, e se $b = (x_0 + x, y_0 + y) \in B$ temos que $p(b) = x_0 y_0 + x_0 y + y_0 x + xy$. Como $x_0, y_0 \in R$, $x, y \in J(R)^n$ e $J(R)^n$ é ideal bilateral de R , vem que $x_0 y + x y_0 + xy \in J(R)^n$ e daí $p(b) \in x_0 y_0 + J(R)^n \subseteq A$. Logo p é contínua em todos os pontos de $R \times R$.

(c) Uma direção é dada pelo Teorema 2.20. Para a outra direção chamamos $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n$ e supomos que $T \neq \{0\}$. Como T é R -ideal não nulo, existe $a \in T$ tal que $a \in Q^*$. Por hipótese a aplicação $p : Q \times Q \rightarrow Q$ dada por $p(x, y) = xy$ é contínua, e então $\varphi_a : Q \rightarrow Q$; $\varphi_a(x) = ax$ é um homomorfismo. Sendo $J(R)$ aberto, vem que $aJ(R)$ é aberto contendo a^2 . Assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^2 + J(R)^n \subseteq aJ(R)$, e em particular $a^2 + a = at$ para algum $t \in J(R)$. A regularidade de a leva a $a + 1 = t$, e então $1 = t - a \in J(R)$. Esta contradição mostra que a continuidade da função produto implica em $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n = \{0\}$.

Note que se um anel de valorização R satisfaz as condições do Teorema 2.20, então todo ideal bilateral não nulo de R é fechado na topologia $J(R)$ -ádica. De fato, pela Proposição 1.17 os ideais bilaterais não nulos de R são potências de $J(R)$, mas de forma análoga ao que fizemos na demonstração do Corolário do Lema 2.18, vemos que $J(R)^n$ é fechado na topologia $J(R)$ -ádica para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Funções Valorização em Anéis Artinianos Simples

Neste Capítulo apresentamos a definição de valorização de Krull para um corpo, a partir da qual é possível obter uma V -topologia no corpo. Os resultados sobre valorização de Krull que forem citados, podem ser encontrados em [E], [KD] e [Wi]. Em seguida vemos que esta definição aplicada a um anel de divisão, leva a definição de função valorização em um anel artiniano simples, proposta por Morandi em ([Mo], §2, Definition 2.1). Usaremos a função valorização do anel artiniano simples para gerar uma topologia neste anel. Se Q é um anel artiniano simples de dimensão finita sobre seu centro, e R um anel de valorização próprio de Q , provaremos que existe uma função valorização não trivial w de Q tal que a topologia gerada por w é equivalente a topologia dos R -ideais.

Dado um grupo abeliano totalmente ordenado G , denotamos a união do símbolo ∞ ao grupo G por $G \cup \{\infty\}$, considerando as operações $\infty + \infty = g + \infty = \infty + g = \infty$, e a relação $g < \infty$ para todo $g \in G$.

Se K é um corpo, uma aplicação sobrejetora $v : K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ onde G é um grupo abeliano totalmente ordenado, é chamada valorização de Krull, ou apenas

valorização, de K quando satisfaz:

$$(v_1) \quad v(x) = \infty \text{ se e somente se } x = 0.$$

$$(v_2) \quad v(xy) = v(x) + v(y), \quad \text{para quaisquer } x, y \in K.$$

$$(v_3) \quad v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}, \quad \text{para quaisquer } x, y \in K.$$

O grupo G é chamado de grupo de valores de v .

Quando v é uma valorização do corpo K , temos que

$A_v = \{x \in K; v(x) \geq 0\}$ é um anel de valorização de K .

$M = \{x \in K; v(x) > 0\}$ é o único ideal maximal de A_v .

$$M = J(A_v) = \{x \in A_v; x = 0 \text{ ou } x^{-1} \notin A_v\}.$$

Duas valorizações v e v' de K são equivalentes quando $A_v = A_{v'}$. Também para cada anel de valorização A de K existe uma valorização v de K tal que $A_v = A$. Portanto existe uma correspondência biunívoca entre anéis de valorização e classes de valorizações.

Sejam A um anel de valorização próprio do corpo K , v uma valorização correspondente com grupo de valores G e $\mathcal{U}_g = \{x \in K; v(x) > g\}$, $g \in G$. Dizemos que $X \subseteq K$ é aberto, quando para cada $x \in X$ existir um $g \in G$ tal que $x + \mathcal{U}_g \subseteq X$. Se $\mathcal{T}_v$ é o conjunto destes abertos, então $(K, \mathcal{T}_v)$ é um corpo V -topológico e $\mathcal{T}_v \sim \mathcal{T}_{v'}$, para $\mathcal{T}_{v'}$ definida como no Capítulo anterior.

Se Q é um anel artinianiano simples, então pelo Teorema de Wedderburn-Artin $Q = M_n(D)$ para algum anel de divisão D . Assim um procedimento para estender o conceito de valorização à Q , passa pelos trabalhos de Schilling [S1] e [S2] que tratam de anéis de valorização totais e de valorizações em anéis de divisão.

Definição: Se D é um anel de divisão, uma aplicação sobrejetora $v : D \rightarrow G \cup \{\infty\}$ onde G é um grupo abeliano totalmente ordenado, é chamada valorização de D , quando satisfaz as condições (v_1) , (v_2) e (v_3) .

Se v é uma valorização de D , então $B_v = \{x \in D; v(x) \geq 0\}$ é um anel de valorização total e invariante de D . De fato, por (v_2) vem que $v(d^{-1}) = -v(d)$ para todo $d \in D^*$, e portanto $d \in B_v$ ou $d^{-1} \in B_v$, mostrando que B_v é total. Além disso, para cada $x \in B_v$ e para cada $d \in D^*$, vale $v(dxd^{-1}) \geq 0$, implicando em $dB_vd^{-1} \subseteq B_v$. Analogamente $d^{-1}B_vd \subseteq B_v$, que leva a $B_v \subseteq dB_vd^{-1}$. Assim $B_v = dB_vd^{-1}$, para todo $d \in D^*$ e B_v é invariante.

Por outro lado, se B é um anel de valorização total e invariante de D , definimos em $\Gamma = \{dB; d \in D^*\}$ a operação $d_1B + d_2B = d_1d_2B$ para $d_1, d_2 \in D^*$. Como B é invariante, $Bd_2 = d_2B$ e então a operação é exatamente o produto d_1Bd_2B . Claramente $(\Gamma, +)$ é um grupo cujo elemento neutro é B , e por ([D2], §2, Proposition 4) é abeliano. Escrevendo $d_1B \leq d_2B$ quando $d_2B \subseteq d_1B$, temos uma ordenação em Γ que é total pois B é anel de valorização total. Agora definimos a aplicação sobrejetora

$$\begin{aligned} v: D &\rightarrow \Gamma \cup \{\infty\} \\ 0 &\mapsto \infty \\ d &\mapsto dB, \quad d \neq 0. \end{aligned}$$

Observamos que $B = B_v = \{x \in D; v(x) \geq 0\}$, e mostraremos que v é uma valorização de D . Se $d_1, d_2 \in D$ e $d_1 = 0$ ou $d_2 = 0$, então é claro que valem (v_2) e (v_3) . Portanto podemos assumir que $v(d_1) = d_1B$ e $v(d_2) = d_2B$. Pela definição da operação em Γ , temos que $v(d_1d_2) = d_1d_2B = d_1B + d_2B = v(d_1) + v(d_2)$ e vale (v_2) . Se $d_1 + d_2 = 0$ então (v_3) é imediato, e se $d_1 + d_2 \neq 0$ vem que $v(d_1 + d_2) = (d_1 + d_2)B$. Mas $(d_1 + d_2)B \subseteq d_1B + d_2B \subseteq dB$, onde dB é o maior na relação de inclusão entre d_1B e d_2B , isto é, $dB = \min\{d_1B, d_2B\}$. Assim $v(d_1 + d_2) = (d_1 + d_2)B \geq \min\{d_1B, d_2B\} = \min\{v(d_1), v(d_2)\}$.

Sejam v e v' valorizações em um anel de divisão D . Dizemos que v e v' são equivalentes quando $B_v = B_{v'}$, e então existe uma correspondência biunívoca entre anéis de valorização totais e invariantes de D , e classes de valorizações de D .

Pelos comentários anteriores, sobre a relação entre os anéis de valorização e as valorizações em corpos e anéis de divisão, sentimos necessidade de definir uma função valorização em anel artinianiano simples, que esteja associado a um anel de valorização de Dubrovin. Este é o assunto que trataremos agora.

Consideramos um anel artiniano simples $Q = M_n(D)$, onde D é um anel de divisão. Se $v : D \rightarrow G \cup \{\infty\}$ é uma valorização de D , então uma extensão natural de v a $M_n(D)$ pode ser obtida definindo

$$\begin{aligned} w : Q &\rightarrow G \cup \{\infty\} \\ (d_{ij}) &\mapsto \min_{i,j} \{v(d_{ij})\}. \end{aligned}$$

Identificando D com $\{(a_{ij}) \in M_n(D) ; a_{ii} = d \text{ e } a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j\}$, vemos que $w|_D = v$.

Para $x = (x_{ij})$, $y = (y_{ij}) \in Q$, a função w tem as seguintes propriedades:

$$(w_1) \quad w(x) = \infty \text{ se e somente se } x = 0; \quad w(-1) = 0.$$

$$(w_2) \quad w(xy) \geq w(x) + w(y).$$

$$(w_3) \quad w(x + y) \geq \min\{w(x), w(y)\}.$$

$$(w_4) \quad w(Q) = w(st(w)) \cup \{\infty\} \quad \text{onde} \quad st(w) = \{x \in Q^* ; w(x^{-1}) = -w(x)\}.$$

Demonstração:

(w₁) De (v₂) vem que $v(-1) + v(-1) = 0$, e num grupo ordenado isso implica em $v(-1) = 0$, e portanto $w(-1) = v(-1) = 0$. Que $w(x) = \infty$ equivale a $x = 0$ é evidente.

$$\begin{aligned} (w_2) \quad \text{Chame } xy &= (u_{ij}) \quad \text{com} \quad u_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj} \\ w(xy) &= \min_{i,j} \{v(u_{ij})\} \geq \min_{i,j} \{\min_k \{v(x_{ik}y_{kj})\}\} = \min_{i,j} \{\min_k \{v(x_{ik}) + v(y_{kj})\}\} \\ &\geq \min_{i,j} \{\min_k \{v(x_{ik})\} + \min_k \{v(y_{kj})\}\} = \min_{i,k} \{v(x_{ik})\} + \min_{j,k} \{v(y_{kj})\} \\ &= w(x) + w(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w_3) \quad w(x + y) &= \min_{i,j} \{v(x_{ij} + y_{ij})\} \geq \min_{i,j} \{\min\{v(x_{ij}), v(y_{ij})\}\} \\ &= \min\{\min_{i,j} \{v(x_{ij})\}, \min_{i,j} \{v(y_{ij})\}\} = \min\{w(x), w(y)\}. \end{aligned}$$

(w₄) A inclusão $w(st(w)) \cup \{\infty\} \subseteq w(Q)$ é evidente. Seja $g \in w(Q)$, então existe $t = (t_{ij}) \in Q$ tal que $g = w(t) = \min_{i,j} \{v(t_{ij})\} = v(t_{rs})$ para algum par $r, s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Podemos assumir $g \neq \infty$, e então $v(t_{rs}) \neq \infty$ que leva a $t_{rs} \neq 0$. Tome $z = (z_{ij})$, com $z_{ii} = t_{rs}$ e $z_{ij} = 0$ para $i \neq j$, e então $z \in Q^*$. Como $w(z) = \min\{v(0), v(t_{rs})\} = g$ e $w(z^{-1}) = \min\{v(0), v(t_{rs}^{-1})\} = v(t_{rs}^{-1}) = -v(t_{rs}) = -w(z)$, vem que $g = w(z) \in w(st(w)) \cup \{\infty\}$.

As propriedades (w_1) , (w_2) , (w_3) e (w_4) , motivam a definição de função valorização em um anel artíniano simples, que escreveremos a seguir. Esta definição foi apresentada por Morandi em ([Mo], §2, Definiton 2.1).

Definição: Sejam Q um anel artíniano simples, G um grupo abeliano totalmente ordenado. Uma aplicação $w : Q \rightarrow G \cup \{\infty\}$ é chamada de função valorização de Q , quando satisfaz as condições (w_1) até (w_4) .

Conforme verificamos, uma função valorização sempre pode ser construída em $Q = M_n(D)$, a partir de uma valorização do anel de divisão D . A desigualdade na condição (w_2) é necessária para tratar com os divisores de zero em Q .

Seja w uma função valorização no anel artíniano simples Q , com grupo de valores G . Afirmamos que w sempre pode ser considerada sobrejetora. Com efeito, verificaremos que $H = w(Q \setminus \{0\})$ é um subgrupo totalmente ordenado de G , e então podemos trocar G por H . Claramente a ordenação total de H é herdada de G , e para ver que H é subgrupo de G , tomamos $a, b \in H$, $a = w(x)$, $b = w(y)$ com $x, y \in Q \setminus \{0\}$. Por (w_4) podemos tomar x e y satisfazendo $w(x^{-1}) = -w(x)$ e $w(y^{-1}) = -w(y)$. Como $xy^{-1} \in Q \setminus \{0\}$ e $a - b = w(x) - w(y) = w(x) + w(y^{-1})$, o ítem (a) do Lema abaixo mostra que $a - b = w(xy^{-1}) \in H$, e portanto H é subgrupo de G .

Lema 3.1: ([Mo], §2, Lemma 2.2) Sejam w uma valorização do anel artíniano simples Q , e $x, y \in Q$.

- (a) Se $x \in st(w)$ então $w(xy) = w(yx) = w(x) + w(y)$.
- (b) $st(w)$ é um subgrupo de Q^* e $w : st(w) \rightarrow G$ é um homomorfismo.
- (c) Se $w(x) \neq w(y)$ então $w(x + y) = \min\{w(x), w(y)\}$.
- (d) $R_w = \{x \in Q ; w(x) \geq 0\}$ é um anel e $J_w = \{x \in Q ; w(x) > 0\}$ é um ideal bilateral próprio de R_w .

Corolário: Seja w uma função valorização no anel artíniano simples Q .

- (a) $w(-y) = w(y)$ para todo $y \in Q$.

(b) Dado $q \in Q \setminus R_w$, existem $r_1, r_2 \in R_w$ tais que $qr_1, r_2q \in R_w \setminus J_w$.

(c) R_w é um anel de Goldie Primo.

Demonstração:

(a) Basta fazer $x = -1$ no item (a) do Lema.

(b) Para $q \in Q \setminus R_w$ temos $w(q) < 0$, mas por (w_4) existe $t \in st(w)$ tal que $w(q) = w(t)$. Como $w(t^{-1}) = -w(t) = -w(q)$ vem que $w(t^{-1}) > 0$ e daí $t^{-1} \in R_w$. Tomamos $r_1, r_2 = t^{-1} \in R_w$ e então $w(qr_1) = w(qt^{-1}) = w(q) + w(t^{-1}) = w(q) - w(q) = 0$, implicando em $qr_1 \in R_w \setminus J_w$. Analogamente $r_2q \in R_w \setminus J_w$.

(c) Pelo Teorema 1.2, R_w é anel de Goldie Primo se, e somente se R_w tem um anel quociente artiniano simples. Assim é suficiente provar que Q é um anel quociente para R_w . Dado $q \in Q$, se $q \in R_w$ escrevemos $q = q1^{-1}$ com $q \in R_w$ e $1 \in R_w^*$. Se $q \notin R_w$, então como vimos no item (b) existe $t \in st(w)$ tal que $t^{-1} \in R_w$ e $qt^{-1} = r \in R_w$. Assim podemos escrever $q = r(t^{-1})^{-1}$ com $r \in R_w$ e $t^{-1} \in R_w^*$. Analogamente $q = (t^{-1})^{-1}s$ com $s \in R_w$ e $t^{-1} \in R_w^*$. Falta verificar que todo elemento regular de R_w tem inverso em Q . Seja $x \in R_w^*$ e suponha que $xq = 0$ com $q \in Q$. Escrevendo $q = ab^{-1}$ com $a \in R_w$ e $b \in R_w^*$ temos $0 = xab^{-1}$, que leva a $0 = xa$ e daí $a = 0$ implicando em $q = 0$. Da mesma forma prova-se que $qx = 0$ implica em $q = 0$, e portanto $x \in Q^*$. Como Q é anel artiniano simples, o Corolário da Proposição 1.4, assegura que $x \in U(Q)$.

O Corolário sugere uma conexão entre as funções valorização e os anéis de valorização de um anel artiniano simples. Pelo item (b) do Corolário se R_w/J_w é um anel artiniano simples, então R_w é anel de valorização de Q , conforme definido no Capítulo I. Apresentaremos adiante, um exemplo de função w num anel artiniano simples tal que R_w não é anel de valorização de Dubrovin, e portanto a condição R_w/J_w ser anel artiniano simples nem sempre é verificada.

Sejam Q um anel artiniano simples de dimensão n sobre seu centro F , $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base de Q e v uma valorização de F . Uma tentativa natural para definir uma função valorização em Q , seria tomar

$$\begin{aligned} w : Q &\rightarrow G \cup \{\infty\} \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i &\mapsto \min_i \{v(x_i)\}, \quad x_i \in F. \end{aligned}$$

Verificaremos que:

(1) w satisfaz (w_1) , (w_3) , (w_4) e $v = w|_F$.

(2) Existe contra-exemplo para a condição (w_2) , mesmo quando $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ é uma base regular.

Demonstração:

(1) Como $a_1 = 1$ e $v(-1) = 0$, é claro que $v = w|_F$ e $w(-1) = 0$. Também $w(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \min_i \{v(x_i)\} = \infty$ equivale a $x_i = 0$ para todo i , que por sua vez equivale a $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Isso mostra (w_1) , e para verificar (w_3) chame $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^n a_i y_i$, assim $x + y = \sum_{i=1}^n a_i (x_i + y_i)$ e
 $w(x + y) = \min_i \{v(x_i + y_i)\} \geq \min_i \{\min\{v(x_i), v(y_i)\}\}$
 $= \min\{\min_i \{v(x_i)\}, \min_i \{v(y_i)\}\} = \min\{w(x), w(y)\}.$

A condição (w_4) é a igualdade $w(Q) = w(st(w)) \cup \{\infty\}$, mas a inclusão $w(st(w)) \cup \{\infty\} \subseteq w(Q)$ é imediata. Seja então $w(x) \in w(Q)$. Se $w(x) = \infty$ nada temos a fazer, então consideramos $\infty \neq w(x) = w(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \min_i \{v(x_i)\}$ implicando na existência de $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $w(x) = v(x_j)$ e $0 \neq x_j \in F$. Tomamos $s = 1x_j \in Q^*$, obtendo $s^{-1} = 1x_j^{-1}$ e $w(s^{-1}) = v(x_j^{-1}) = -v(x_j) = -w(s)$. Portanto $s \in st(w)$ e $w(s) = w(x)$, provando que $w(Q) \subseteq w(st(w)) \cup \{\infty\}$.

(2) Tome $Q = M_2(\mathcal{Q})$ com centro $F = \left\{ \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} ; q \in \mathcal{Q} \right\}$ isomorfo a $\mathcal{Q}$.

Escolhemos a base $\left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

que é regular. Em F consideramos a valorização 2-ádica

$$\begin{aligned} v_2 : F &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ 0 &\mapsto \infty \\ \frac{a}{b} 2^r &\mapsto r, \end{aligned}$$

onde $2 \nmid a$ e $2 \nmid b$. E definindo w como anteriormente,

$$\begin{aligned} w : Q &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i &\mapsto \min_i \{v_2(x_i)\}, \end{aligned}$$

temos que w satisfaz (w_1) , (w_3) , (w_4) e $w|_F = v_2$. Porém w não satisfaz (w_2) , pois

$$\begin{aligned} w(a_2 a_3) &= w\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = w\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= w\left(-\frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$= \min\{v_2(-\frac{5}{4}), v_2(\frac{3}{2}), v_2(\frac{1}{2}), v_2(\frac{1}{4})\} = -2 < w(a_2) + w(a_3) = v(1) + v(1) = 0.$$

O exemplo acima mostra que para um anel artiniano simples Q com centro F , $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base de Q e v uma valorização de F , não é verdade em geral que $w(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \min_i \{v(x_i)\}$ seja uma valorização de Q . Apesar disso, insistimos um pouco mais neste caso através da Proposição 3.2, que é uma ferramenta útil para construir exemplos de funções valorização.

Proposição 3.2: Sejam Q um anel artiniano simples com centro F , $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base de Q , $v : F \rightarrow G \cup \{\infty\}$ uma valorização de F e $w : Q \rightarrow G \cup \{\infty\}$ dada por $w(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \min_i \{v(x_i)\}$. Então $w|_F = v$ e são equivalentes:

- (i) w é uma função valorização.
- (ii) $w(a_i a_j) \geq 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por (w₂), para quaisquer $x, y \in Q$, $w(xy) \geq w(x) + w(y)$. Em particular, $w(a_i a_j) \geq w(a_i) + w(a_j) = v(1) + v(1) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Já provamos que w satisfaz (w₁), (w₃) e (w₄). Para provar (w₂) tomamos $x, y \in Q$, $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^n a_j y_j$, e temos o produto $xy = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j x_i y_j$. Escrevendo $a_i a_j = \sum_{r=1}^n a_r t_{ijr}$ vem que $\min_r \{v(t_{ijr})\} = w(a_i a_j) \geq 0$, e assim $v(t_{ijr}) \geq 0$ para quaisquer $i, j, r \in \{1, 2, \dots, n\}$. Também obtemos $xy = \sum_{i,j=1}^n (\sum_{r=1}^n a_r t_{ijr}) x_i y_j = \sum_{r=1}^n a_r (\sum_{i,j=1}^n t_{ijr} x_i y_j)$. Agora,

$$\begin{aligned} w(xy) &= \min_r \{v(\sum_{i,j=1}^n t_{ijr} x_i y_j)\} \\ &\geq \min_r \{\min_{i,j} \{v(t_{ijr} x_i y_j)\}\} \\ &= \min_r \{\min_{i,j} \{v(t_{ijr}) + v(x_i) + v(y_j)\}\} \\ &\geq \min_{i,j} \{v(x_i) + v(y_j)\} \\ &= \min_i \{v(x_i)\} + \min_j \{v(y_j)\} \\ &= w(x) + w(y). \end{aligned}$$

Portanto vale (w₂) e w é uma função valorização de Q .

Seja Q um anel artiniano simples com centro F , $[Q : F] = n < \infty$ e $v : F \rightarrow G \cup \{\infty\}$ uma valorização de F . Afirmamos que sempre é possível definir uma função valorização $w : Q \rightarrow G \cup \{\infty\}$ por $w(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \min_i \{v(x_i)\}$, para uma F -base $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ conveniente. De fato, pela Proposição acima é suficiente encontrar uma F -base $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ tal que $w(a_i a_j) \geq 0$, para

quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Iniciamos usando a Proposição 2.14 para obter uma F -base regular $\{b_1 = 1, b_2, \dots, b_n\}$ de Q , e escrevemos $b_i b_j = \sum_{r=1}^n b_r t_{ijr}$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como a base é regular, temos que $b_i b_j \neq 0$ e daí $\min_{i,j,r} \{v(t_{ijr})\} = v(c^{-1})$ para algum $c \in F$. Assim para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ vem que $v(t_{ijr}) \geq v(c^{-1}) = -v(c)$, donde $v(ct_{ijr}) \geq 0$. Se $v(c^{-1}) \geq 0$ então $w(b_i b_j) \geq 0$ e $\{b_1 = 1, b_2, \dots, b_n\}$ é a base desejada. Se $v(c^{-1}) < 0$, tomamos $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ com $a_i = cb_i$ para $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ que é uma F -base de Q , e para $i \neq 1, j \neq 1$ temos $a_i a_j = c^2 b_i b_j = c^2 \sum_{r=1}^n b_r t_{ijr} = c^2 b_1 t_{ij1} + c \sum_{r=2}^n a_r t_{ijr} = a_1 c^2 t_{ij1} + \sum_{r=2}^n a_r c t_{ijr}$. Como $v(c^{-1}) < 0$, temos $v(c) > 0$ e $v(c^2 t_{ij1}) = v(c) + v(ct_{ij1}) > v(t_{ij1}) \geq 0$ e portanto $w(a_i a_j) \geq 0$ para $i \neq 1$ e $j \neq 1$. Quando $i = 1$ ou $j = 1$, é claro que $w(a_i a_j) = v(1) = 0$. Logo $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ é a base procurada.

Agora usamos a Proposição 3.2 para construir exemplos de funções valorização. Sejam $\mathbb{H}$ o anel de quatérnios racionais com base $\{a_1 = 1, a_2 = i, a_3 = j, a_4 = k\}$ sobre seu centro $\mathbb{Q}$, e $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ a valorização p -ádica. Defina $w_p : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ por $w(\sum_{r=1}^4 a_r x_r) = \min_r \{v_p(x_r)\}$. Como $w_p(a_r a_s) = 0$ para quaisquer $r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$, temos que w_p é uma função valorização em $\mathbb{H}$. Sabemos que $\mathbb{Z}_{(p)} = \{x \in \mathbb{Q}; v_p(x) \geq 0\}$ é o anel de valorização de $\mathbb{Q}$ associado a v_p . Afirmamos que $R_{w_p} = \{q \in \mathbb{H}; w_p(q) \geq 0\} = \mathbb{Z}_{(p)} + \mathbb{Z}_{(p)}i + \mathbb{Z}_{(p)}j + \mathbb{Z}_{(p)}k$. De fato, $q = \sum_{r=1}^4 a_r x_r \in R_{w_p}$ significa que $w_p(q) = \min_r \{v_p(x_r)\} \geq 0$ que equivale a $v_p(x_r) \geq 0$ para todo $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, isto é, $q \in \mathbb{Z}_{(p)} + \mathbb{Z}_{(p)}i + \mathbb{Z}_{(p)}j + \mathbb{Z}_{(p)}k$.

Conforme vimos no Capítulo I, para $p \neq 2$, $\mathbb{Z}_{(p)} + \mathbb{Z}_{(p)}i + \mathbb{Z}_{(p)}j + \mathbb{Z}_{(p)}k$ é um anel de valorização de $\mathbb{H}$, e portanto w_p é uma função valorização de $\mathbb{H}$ tal que R_{w_p} é anel de valorização de $\mathbb{H}$.

Quando $p = 2$, temos que w_2 é uma função valorização de $\mathbb{H}$. Porém R_{w_2} não é anel de valorização de $\mathbb{H}$, pois em ([W1], §1, Example (c)) vemos que $B = \mathbb{Z}_{(2)}\alpha + \mathbb{Z}_{(2)}i + \mathbb{Z}_{(2)}j + \mathbb{Z}_{(2)}k$, $\alpha = \frac{1}{2}(1+i+j+k)$, é o único anel de valorização de $\mathbb{H}$ com a propriedade $B \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(2)}$.

Os próximos Teoremas estabelecem a relação entre as funções valorizações e os anéis de valorização de um anel artinian simples Q . Para isso, definimos o estabilizador de um subanel R de Q por

$$st(R) = \{x \in Q^*; xRx^{-1} = R\}.$$

Teorema 3.3: ([Mo], §2, Theorem 2.4) Seja w uma função valorização do anel artiniano simples Q . Se R_w/J_w é anel artiniano simples, então R_w é anel de valorização de Q com $J(R_w) = J_w$, e para cada $x \in Q \setminus \{0\}$ existe $s \in st(R_w)$ tal que $R_w x R_w = s R_w$.

Teorema 3.4: ([Mo], §2, Theorem 2.3) Sejam Q um anel artiniano simples e R um anel de valorização de Q . Se para todo $x \in Q \setminus \{0\}$ existe $s \in st(R)$ tal que $RxR = sR$, então existe uma função valorização w em Q satisfazendo $R_w = R$ e $J_w = J(R)$.

Da mesma forma que no caso comutativo, dizemos que duas funções valorização w e w' de um anel artiniano simples Q , são equivalentes quando $R_w = R_{w'}$. Assim denotando a classe de w por $[w]$, temos uma correspondência biunívoca entre os seguintes conjuntos:

- $\{[w]; w \text{ é função valorização de } Q \text{ e } R_w/J_w \text{ é anel artiniano simples}\}$.
- $\{R; R \text{ é anel de valorização de } Q \text{ e se } x \in Q \setminus \{0\}, \text{ existe } s \in st(R) \text{ tal que } RxR = sR\}$.

Veremos na próxima Proposição que as funções valorização w de um anel artiniano simples Q , para as quais R_w/J_w é anel artiniano simples, generalizam a definição de valorização de Krull.

Lema 3.5: Seja w uma função valorização do anel artiniano simples Q . Então:

(a) $U(R_w) \subseteq (R_w \setminus J_w) \cap st(R_w)$.

(b) $U(R_w) \subseteq st(w) \subseteq st(R_w)$.

Demonstração:

(a) Se $y \in U(R_w)$ então $y, y^{-1} \in R_w$ que implica em $y \notin J_w$, $y R_w y^{-1} \subseteq R_w$ e $y^{-1} R_w y \subseteq R_w$. Segue que $y \in R_w \setminus J_w$ e $y R_w y^{-1} = R_w$, provando que $U(R_w) \subseteq (R_w \setminus J_w) \cap st(R_w)$.

(b) Se $x \in U(R_w)$ então $w(x) \geq 0$ e $w(x^{-1}) \geq 0$. Como $0 = w(1) = w(xx^{-1}) \geq w(x) + w(x^{-1})$ temos $0 \leq w(x^{-1}) \leq -w(x) \leq 0$, implicando em $w(x^{-1}) = -w(x)$ e assim $U(R_w) \subseteq st(w)$. Seja $s \in st(w)$, devemos verificar que $s R_w s^{-1} = R_w$. Para $x \in R_w$, temos pelo Lema 3.1 que $w(sxs^{-1}) = w(s) + w(x) + w(s^{-1}) = w(x) \geq 0$.

Isso mostra que $sR_ws^{-1} \subseteq R_w$, e analogamente vemos que $s^{-1}R_ws \subseteq R_w$ que implica na outra inclusão $R_w \subseteq sR_ws^{-1}$. Portanto $s \in st(R_w)$ e $st(w) \subseteq st(R_w)$.

Lema 3.6: Seja w uma função valorização do anel artiniano simples Q , tal que R_w/J_w é anel artiniano simples. Então:

(a) $U(R_w) = (R_w \setminus J_w) \cap st(R_w)$.

(b) $st(w) = st(R_w)$.

Demonstração:

(a) Pelo Teorema 3.3, R_w é anel de valorização de Q e $J(R_w) = J_w$. Seja $x \in (R_w \setminus J_w) \cap st(R_w)$, como $x \notin J_w$ temos que $R_w x R_w \not\subseteq J_w$, e então pelo Lema 1.7 vem que $R_w x R_w = R_w$. Mas de $x \in st(R_w)$ tiramos que $x R_w = R_w x$, e daí $R_w = R_w x$ implicando que x tem inverso em R_w . Portanto $(R_w \setminus J_w) \cap st(R_w) \subseteq U(R_w)$.

(b) Seja $x \in st(R_w)$, então pela condição (w_4) , existe $s \in st(w)$ tal que $w(s) = w(x)$ e $w(s^{-1}) = -w(s)$. Agora usamos o Lema 3.1(a) para ver que $w(xs^{-1}) = 0$ e portanto $xs^{-1} \in R_w \setminus J_w$. Além disso, $s \in st(R_w)$ pelo Lema 3.5, e então $xs^{-1} \in st(R_w)$, que implica por (a) em $xs^{-1} \in U(R_w)$. Novamente pelo Lema 3.5, temos $xs^{-1} \in st(w)$ que é um grupo que contém s , e portanto $x \in st(w)$, provando que $st(R_w) \subseteq st(w)$.

Proposição 3.7: Sejam w uma função valorização do anel artiniano simples Q , e F o centro de Q . Se R_w/J_w é anel artiniano simples, então $v = w|_F$ é uma valorização de Krull de F , cujo anel de valorização correspondente é $A_v = R_w \cap F$.

Demonstração:

Como $F^* \subseteq st(R_w)$, vem do Lema 3.6(b) que $F^* \subseteq st(w)$ e assim $w(xy) = w(x) + w(y)$ para quaisquer $x, y \in F$, pelo Lema 3.1(a). Portanto $v = w|_F$ é uma valorização de Krull de F . A igualdade $A_v = R_w \cap F$ é imediata.

Corolário: Se w é uma função definida no corpo K que satisfaz as condições (w_1) até (w_4) , então são equivalentes:

(i) R_w/J_w é corpo.

(ii) $w(xy) = w(x) + w(y)$, para quaisquer $x, y \in K$.

Demonstração:

Uma direção é dada pela Proposição. Para a outra observamos que quando $w(xy) = w(x) + w(y)$ para quaisquer $x, y \in K$, então w é uma valorização de Krull. Portanto

J_w é ideal maximal e R_w/J_w é corpo.

Como consequência da demonstração da Proposição 3.7, vemos que se w é uma função valorização no anel artiniano simples Q com centro F , então $w|_F$ ser valorização de Krull equivale a $F^* \subseteq st(w)$. Apesar das tentativas, não conseguimos provar que a inclusão $F^* \subseteq st(w)$ é sempre verificada, e nem tampouco produzir um exemplo onde $w|_F$ não fosse valorização de Krull.

Note que quando v é uma valorização do anel de divisão D com centro F , e definimos a função valorização w em $M_n(D)$ por $w((a_{ij})) = \min_{i,j} \{v(a_{ij})\}$, então $w|_F = v$. Da mesma forma, quando Q é um anel artiniano simples de dimensão n sobre seu centro F , $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\}$ é uma F -base de Q , v é uma valorização de F e $w(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \min_i \{v(x_i)\}$ é uma função valorização de Q , então $w|_F = v$.

Pelo Teorema 3.3 e pela Proposição 3.7, vemos que uma função valorização w do anel artiniano simples Q , produz resultados semelhantes as valorizações de corpos, quando R_w/J_w é anel artiniano simples. Tratando com anéis de valorização em anéis artinianos simples, a condição R_w/J_w ser anel artiniano simples não é restritiva, como pode ser visto no Teorema 1.6 que caracteriza os anéis de valorização de Dubrovin.

Afirmamos que uma alternativa para a condição R_w/J_w ser anel artiniano simples, é J_w ser ideal primitivo e R_w ser anel n -cadeia para algum $n \in \mathbb{N}$. De fato, se R_w/J_w é anel artiniano simples, então pelo Teorema 3.3 R_w é anel de Dubrovin e $J_w = J(R_w)$. Usando (i) $\Rightarrow$ (v) do Teorema 1.6, vem que R_w é anel n -cadeia e J_w é ideal primitivo. Reciprocamente se R_w é anel n -cadeia, então por ([D1], §1, Proposition 1), R_w/J_w também é anel n -cadeia, e como J_w é ideal primitivo temos que R_w/J_w é anel primitivo. Mas $J(R_w/J_w)$ é a intersecção dos ideais primitivos, e daí $J(R_w/J_w) = 0$. Em ([D1], §1, Proposition 2) vemos que $J(R_w/J_w) = 0$ e R_w/J_w anel n -cadeia implica em R_w/J_w ser anel artiniano. Para ver que R_w/J_w é anel simples, tomamos um ideal bilateral não nulo I de R_w/J_w e consideramos a cadeia descendente $I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \dots$, que é estacionária. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $I^{m+1} = I^m$, assim $I(I^m - I^{m-1}) = 0$. Como 0 é ideal primo vem que $I^m = I^{m-1}$, e seguindo o processo concluímos que $I^2 = I$, donde $I(I - R_w/J_w) = 0$ e $I = R_w/J_w$. Portanto R_w/J_w é anel artiniano simples.

Dado um anel de valorização R do anel artiniano simples Q , o Teorema 3.4 fornece uma condição para a existência de uma função valorização w em Q tal que $R_w = R$ e $J_w = J(R)$. Quando F é o centro de Q e $[Q : F] < \infty$ temos:

Proposição 3.8: ([Mo], §2, Corollary 2.5) Sejam R um anel de valorização do anel artiniano simples Q , com centro F e $[Q : F] < \infty$. Então existe uma função valorização w em Q tal que $R_w = R$ e $J_w = J(R)$, se e somente se, R é integral sobre $V = R \cap F$.

É claro que quando Q é um corpo, a função valorização w da Proposição acima sempre existe e é uma valorização de Krull, pelo Corolário da Proposição 3.7. Portanto neste caso, a Proposição acima é exatamente o resultado conhecido para corpos.

Combinando os resultados [13] e [16] da página 18 com a Proposição 3.8, vemos que quando R é maximal, sempre existe uma função valorização w de Q tal que $R = R_w$ e $J(R) = J_w$.

Usaremos agora a função valorização de um anel artiniano simples, para gerar uma topologia neste anel, que torna-o um anel topológico de Hausdorff. Veremos também que esta topologia está relacionada com a topologia dos R -ideais.

Até o final deste Capítulo, Q denotará um anel artiniano simples de dimensão finita sobre seu centro F .

Definição: Sejam $w : Q \rightarrow G \cup \{\infty\}$ uma função valorização de Q , $g \in G$ e $\mathcal{U}_g = \{x \in Q ; w(x) > g\}$. Dizemos que $A \subseteq Q$ é aberto, quando para cada $a \in A$ existe $g \in G$ tal que $a + \mathcal{U}_g \subseteq A$.

Observamos que pela condição (w_3) , os conjuntos $\mathcal{U}_g$, $g \in G$, são fechados por somas. Assim dados $x \in Q$ e $g \in G$, temos que $x + \mathcal{U}_g$ é aberto.

Denotando por τ_w o conjunto dos abertos de Q , vem que (Q, τ_w) é um

espaço topológico que tem $\{\mathcal{U}_g; g \in G\}$ como sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem. Claramente $\emptyset, Q \in \tau_w$ e $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$, L um conjunto de índices, é abertos quando $A_\alpha \in \tau_w$ para todo $\alpha \in L$. Se A_1, A_2 são abertos e $a \in A_1 \cap A_2$, existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $a + \mathcal{U}_{g_1} \subseteq A_1$ e $a + \mathcal{U}_{g_2} \subseteq A_2$. Como G é totalmente ordenado, assumimos que $g_1 \geq g_2$ e assim $\mathcal{U}_{g_1} \subseteq \mathcal{U}_{g_2}$ que leva a $a + \mathcal{U}_{g_1} \subseteq A_1 \cap A_2$, e portanto $A_1 \cap A_2$ é aberto.

Verificaremos que (Q, τ_w) é um anel topológico de Hausdorff, para cada função valorização w de Q . E quando w é não trivial, então (Q, τ_w) é espaço topológico não discreto.

Proposição 3.9: Se w é uma função valorização de Q , então (Q, τ_w) é espaço topológico de Hausdorff.

Demonstração:

Sejam G o grupo de valores de w e $x \in \bigcap_{g \in G} \mathcal{U}_g$. Então $w(x) > g$ para todo $g \in G$. Como $w(x) \in G \cup \{\infty\}$ temos que $w(x) \in G$ ou $w(x) = \infty$. Mas $w(x) \in G$ não é possível pois neste caso teríamos $w(x) > w(x)$. Assim $w(x) = \infty$ que equivale a $x = 0$, e portanto $\bigcap_{g \in G} \mathcal{U}_g = \{0\}$. Para $x, y \in Q$, $x \neq y$, existe $g \in G$ tal que $x - y \notin \mathcal{U}_g$. Tomando $A = x + \mathcal{U}_g$ e $B = y + \mathcal{U}_g$ vem que A e B são abertos contendo x e y respectivamente. Supondo $r \in A \cap B$, escrevemos $r = x + u = y + v$ com $u, v \in \mathcal{U}_g$, então $x - y = v - u$ e $w(v - u) \geq \min\{w(v), w(-u)\} = \min\{w(v), w(u)\} > g$, implicando em $x - y = u - v \in \mathcal{U}_g$. Esta contradição mostra que $A \cap B = \emptyset$ e portanto (Q, τ_w) é espaço de Hausdorff.

Proposição 3.10: Seja w uma função valorização de Q . Se considerarmos em Q a topologia τ_w e em $Q \times Q$ a topologia produto, então as aplicações abaixo são contínuas:

(a) $s : Q \times Q \rightarrow Q; \quad s(x, y) = x - y.$

(b) $p : Q \times Q \rightarrow Q; \quad p(x, y) = xy.$

Demonstração:

(a) Seja A um aberto de Q contendo $x_0 - y_0$, então existe $g \in G$ tal que $(x_0 - y_0) + \mathcal{U}_g \subseteq A$. Como $x_0 + \mathcal{U}_g$ e $y_0 + \mathcal{U}_g$ são abertos em Q , vem que $B = (x_0 + \mathcal{U}_g, y_0 + \mathcal{U}_g)$ é um aberto de $Q \times Q$ contendo (x_0, y_0) . Se $u = (x_0 + x, y_0 + y) \in B$ temos que $x, y \in \mathcal{U}_g$, e daí $x - y \in \mathcal{U}_g$ pois $w(x - y) \geq \min\{w(x), w(-y)\} = \min\{w(x), w(y)\} > g$. Assim $s(u) = (x_0 - y_0) + (x - y) \in (x_0 - y_0) + \mathcal{U}_g \subseteq A$, implicando em $s(B) \subseteq A$.

Portanto s é contínua em todo $(x_0, y_0) \in Q \times Q$.

(b) Seja agora A um aberto de Q que contendo x_0y_0 , então existe $g \in G$ tal que $x_0y_0 + \mathcal{U}_g \subseteq A$. Escolha $h = \max\{0, g, g - w(x_0), g - w(y_0)\}$, e tome $B = (x_0 + \mathcal{U}_h, y_0 + \mathcal{U}_h)$ que é um aberto de $Q \times Q$ contendo (x_0, y_0) . Para $u = (x_0 + x, y_0 + y) \in B$ temos $p(u) = x_0y_0 + (x_0y + xy_0 + xy)$ com

$$w(x), w(y) > h,$$

$$w(x_0y) \geq w(x_0) + w(y) > w(x_0) + h \geq w(x_0) + g - w(x_0) = g,$$

$$w(xy_0) \geq w(x) + w(y_0) > h + w(y_0) \geq g - w(y_0) + w(y_0) = g,$$

$$w(xy) \geq w(x) + w(y) > h + w(y) > g.$$

Assim $w(x_0y + xy_0 + xy) \geq \min\{w(x_0y), w(xy_0), w(xy)\} > g$ e $p(u) \in x_0y_0 + \mathcal{U}_g \subseteq A$. Isso mostra que $p(B) \subseteq A$ e p é contínua em (x_0, y_0) .

Corolário: Sejam w uma função valorização de Q e $a \in Q$.

(a) $\varphi : (Q, \tau_w) \rightarrow (Q, \tau_w)$; $\varphi(x) = a + x$ é homeomorfismo.

(b) Se $a \in Q^*$ então $\psi_a : (Q, \tau_w) \rightarrow (Q, \tau_w)$; $\psi_a(x) = ax$ é homeomorfismo.

Chamaremos de função valorização trivial a função valorização $w : Q \rightarrow G \cup \{\infty\}$ definida por $w(0) = \infty$ e $w(x) = 0$ para $x \in Q \setminus \{0\}$.

Note que uma função valorização w em Q é trivial se, e somente se, $R_w = Q$. De fato, w trivial implica obviamente em $R_w = Q$. Por outro lado, supondo w não trivial existe $x \in Q$ tal que $w(x) \neq 0$. Usando (w_4) obtemos $s \in Q$ tal que $w(s^{-1}) = -w(s) = -w(x)$, e portanto $s \in Q \setminus R_w$ ou $s^{-1} \in Q \setminus R_w$ que não é possível. Logo $R_w = Q$ implica w trivial.

No Capítulo anterior, trabalhamos com um anel de valorização próprio R de Q , para evitar que τ_R fosse a topologia caótica. Agora trabalharemos com valorizações não triviais, para evitar que τ_w seja a topologia discreta, conforme a Proposição a seguir.

Proposição 3.11: Seja w uma função valorização de Q . Então w é trivial se e somente se τ_w é a topologia discreta.

Demonstração:

Se w é trivial, então $\mathcal{U}_0 = \{0\}$. Mas pelo Corolário anterior, $a + \mathcal{U}_0 = \{a\}$ é aberto para todo $a \in Q$. Segue que todo subconjunto de Q é aberto como união de abertos, e portanto τ_w é discreta. Por outro lado, supondo w não trivial existe $x \in Q \setminus \{0\}$ tal que $w(x) \neq 0$. Usando (w_4) obtemos $s \in st(w)$ que satisfaz $w(s^{-1}) = -w(s) = -w(x)$, e assim $w(s) > 0$ ou $w(s^{-1}) > 0$. Sejam A um aberto contendo 0, e G o grupo de valores de w , então existe $g \in G$ tal que $\mathcal{U}_g \subseteq A$. Como podemos considerar w sobrejetora, vem que $g = w(y)$ para algum $y \in Q \setminus \{0\}$ e daí $w(sy) = w(s) + w(y) > w(y) = g$ se $w(s) > 0$, ou $w(s^{-1}y) = w(s^{-1}) + w(y) > w(y) = g$ se $w(s^{-1}) > 0$. Assim para $z = s$ ou $z = s^{-1}$, temos $0 \neq zy \in \mathcal{U}_g \subseteq A$, e portanto todo aberto que contém 0 também contém um elemento não nulo. Isso mostra que $\{0\}$ não é aberto e contradiz τ_w ser discreto. Concluimos que w é trivial sempre que τ_w é discreto.

Proposição 3.12: Se w uma função valorização em Q com grupo de valores G e $g \in G$, então $\mathcal{U}_g$ é R_w -ideal de Q . Quando w é não trivial, $\mathcal{U}_g$ é R_w -ideal próprio.

Demonstração:

Se $x \in \mathcal{U}_g$, então por (w_4) existe $s \in st(w)$ tal que $w(x) = w(s)$. Segue que $s \in Q^*$ e $s \in \mathcal{U}_g$ pois $w(s) > g$. Assim $\mathcal{U}_g$ contém um elemento regular. Tomando $y \in st(w)$ tal que $w(y) = -g$, temos para cada $x \in \mathcal{U}_g$ que $w(yx) = w(y) + w(x) > w(y) + g = 0$, implicando em $y\mathcal{U}_g \subseteq R_w$. Analogamente $\mathcal{U}_g y \subseteq R_w$, e portanto existe um elemento regular y tal que $y\mathcal{U}_g \subseteq R_w$, $\mathcal{U}_g y \subseteq R_w$. A inclusão $\mathcal{U}_g \subseteq R_w \mathcal{U}_g R_w$ é clara pois $1 \in R_w$. Por outro lado, se $r_1, r_2 \in R_w$ e $u \in \mathcal{U}_g$ então $w(r_1 u r_2) \geq w(r_1) + w(u) + w(r_2) \geq w(u) > g$, e $R_w \mathcal{U}_g R_w \subseteq \mathcal{U}_g$. Portanto $\mathcal{U}_g$ é R_w -ideal de Q . Agora assumimos w não trivial, e então pela Proposição anterior τ_w não é discreta, isto é, $\{0\}$ não é aberto e daí $\mathcal{U}_g \neq \{0\}$. Finalmente $\mathcal{U}_g \neq Q$, pois como w é sobrejetora, existe $x \in Q$ tal que $w(x) = g$ e assim $x \in Q \setminus \mathcal{U}_g$. Logo w não trivial implica em $\mathcal{U}_g$ ser R_w -ideal próprio.

O próximo Teorema estabelece a relação entre a topologia dos R -ideais, e a topologia das funções valorização em um anel artinian simples Q .

Teorema 3.13: Seja Q um anel artinian simples de dimensão finita sobre seu centro F . Se R é um anel de valorização próprio de Q , então existe uma função valorização não trivial w de Q tal que $\tau_R \sim \tau_w$. Reciprocamente, se w é uma função valorização não trivial de Q e R_w/J_w é anel artinian simples, então R_w é um anel de valorização próprio de Q e $\tau_w \sim \tau_{R_w}$.

Demonstração:

Como $R \neq Q$, pelo resultado [19] da página 19, existe um anel de valorização R' de Q tal que $R \subseteq R' \subset Q$, R' integral sobre $V' = R' \cap F$, e $\tau_R \sim \tau_{R'}$ pela Proposição 2.12. A existência de uma função valorização w de Q tal que $R_w = R'$ e $J_w = J(R')$ é assegurada pela Proposição 3.8, e ainda w é não trivial pois $R' \subset Q$. Mostraremos que $\tau_{R'} \sim \tau_w$, e trabalharemos apenas com abertos contendo a origem em função do Lema 2.10. Sejam A um aberto de τ_w contendo 0, e G é o grupo de valores de w . Então existe $g \in G$ tal que $\mathcal{U}_g \subseteq A$, e $\mathcal{U}_g$ é R' -ideal pela Proposição 3.12. Assim $\mathcal{U}_g \in \tau_{R'}$ e $\tau_{R'} \succ \tau_w$. Por outro lado, se B é um aberto de $\tau_{R'}$ contendo 0, então existe $x \in V'^*$ tal que $xR' \subseteq B$. Note que $R' \in \tau_w$ pois para cada $r' \in R'$, tomando $g = 0$ temos $r' + \mathcal{U}_g \subseteq R'$, já que $w(r' + u) \geq \min\{w(r'), w(u)\} \geq 0$ quando $u \in \mathcal{U}_g$. Como $x \in Q^*$ e $R' \in \tau_w$, vem do Corolário da Proposição 3.10 que $xR' \in \tau_w$, e daí $\tau_w \succ \tau_{R'}$. Se w é uma função valorização de Q para a qual R_w/J_w é anel artiniano simples, então R_w é anel de valorização de Q pelo Teorema 3.3. Mais ainda, sendo w não trivial existe $x \in Q \setminus \{0\}$ tal que $w(x) \neq 0$, e usando (w_4) obtemos $s \in Q^*$ satisfazendo $w(s^{-1}) = -w(s) = -w(x)$. Portanto existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tal que $w(s^\epsilon) < 0$ e assim $s^\epsilon \notin R_w$, isto é, $R_w \neq Q$. Agora repetimos a primeira parte da demonstração com R_w no lugar de R' , para concluir que $\tau_w \sim \tau_{R_w}$.

O Teorema acima aplicado a um corpo, é o resultado conhecido sobre valorizações comutativas. A saber, se A é um anel de valorização próprio de K , então existe uma valorização não trivial v de K tal que $\tau_A \sim \tau_v$. Reciprocamente, se v é uma valorização não trivial de K , então $\tau_v \sim \tau_{A_v}$ onde $A_v = \{x \in K; v(x) \geq 0\}$.

Observamos que a hipótese w não trivial é necessária para a parte final do Teorema 3.13, pois quando w é trivial temos $R_w = Q$ e $J_w = \{0\}$, e daí $\tau_{R_w} = \{\emptyset, Q\}$, enquanto τ_w é discreta pela Proposição 3.11. Portanto quando w é trivial, τ_{R_w} e τ_w não são equivalentes.

Citamos no início do Capítulo, que quando v é uma valorização não trivial do corpo K , então (K, τ_v) é um corpo V -topológico. No próximo Capítulo propomos uma definição para V -topologia, em um anel artiniano simples de dimensão finita sobre seu centro. Se w é uma função valorização não trivial de Q para a qual R_w/J_w é anel artiniano simples, veremos que (Q, τ_w) é anel artiniano simples V -topológico, em função do Teorema 3.13.

Capítulo 4

Anéis Artinianos Simples e V -Topologias

Novamente para este Capítulo, Q é um anel artiniano simples com centro F , $[Q : F] < \infty$, R é um anel de valorização próprio de Q e $V = R \cap F$.

Os corpos V -topológicos foram caracterizados por Kowalsky e Dürbaum em [KD]. Eles provaram que $(K, \mathcal{T})$ é um corpo V -topológico se, e somente se, $\mathcal{T}$ é gerada por uma valorização ou por um valor absoluto. Em função das propriedades dos R -ideais que obtivemos no Capítulo II, propomos uma definição para V -topologias em anéis artinianos simples, que é satisfeita pela topologia gerada por um anel de valorização. Reciprocamente provamos que as V -topologias em anéis artinianos simples, são geradas por anéis de valorização ou por normas. Estudamos também o caso especial no qual as V -topologias são geradas por anéis de valorização discretos.

Verificaremos que da mesma forma que ocorre no caso comutativo, uma V -topologia em um anel artiniano simples é localmente limitada. Terminaremos caracterizando as topologias geradas por anéis de valorização de Dubrovin, como topologias localmente limitadas que possuem uma vizinhança limitada da origem aditivamente fechada, e cuja restrição ao centro é um corpo V -topológico.

As valorizações e os valores absolutos em um corpo K , geram uma V -topologia em K , como pode ser visto em [KD], [PZ] e [Wi]. A recíproca deste fato é conhecida como Teorema de Kowalski-Dürbaum. Para saber quando uma V -topologia é equivalente a uma valorização, e quando é equivalente a um valor absoluto, usamos os elementos analíticos nilpotentes do corpo.

Definição: Seja (K, τ) um corpo topológico de Hausdorff. Dizemos que $a \in K$ é analítico nilpotente quando a seqüência $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, isto é, para todo aberto A contendo 0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $a^n \in A$.

Abaixo enunciamos o Teorema de Kowalski-Dürbaum, apresentado em [KD]. Uma demonstração detalhada deste Teorema, pode ser vista em ([Mi], §3, Teoremas 3.17 e 3.19).

Teorema 4.1: Seja (K, τ) um corpo V -topológico.

- (a) Se K não tem elemento analítico nilpotente não nulo, então τ é equivalente a topologia gerada por uma valorização de Krull, que não é valor absoluto.
- (b) Se K tem elemento analítico nilpotente não nulo, então τ é equivalente a topologia gerada por um valor absoluto não trivial.

A valorização obtida no item (a) do Teorema é não trivial, pois pela Proposição 3.11 só nesta situação τ é não discreta. Assim temos um anel de valorização próprio do corpo que gera a V -topologia, pelo Teorema 3.13.

Quanto ao valor absoluto obtido no item (b) do Teorema, temos duas possibilidades: ser ou não arquimediano. Os valores absolutos não arquimedianos são valorizações, como pode ser visto em ([E], pg 20), e portanto neste caso também temos um anel de valorização próprio que gera a V -topologia.

A seguir apresentamos a definição de anel artiniano simples V -topológico, com a qual estenderemos os resultados acima. Recordamos, conforme definimos no Capítulo II, que um corpo topológico não discreto e Hausdorff (K, σ) é chamado de corpo V -topológico, quando para toda vizinhança W de 0, o conjunto $(K \setminus W)^{-1}$ é

limitado.

Definição: Dizemos que o anel topológico não discreto e Hausdorff $(Q, \mathcal{T})$ é um anel artinian simples V -topológico, e que $\mathcal{T}$ é uma V -topologia em Q , quando:

- (a) Para cada vizinhança W de 0 em F , o conjunto $(F \setminus W)^{-1}$ é limitado.
- (b) Para cada vizinhança U de 0 em Q , existe uma vizinhança V de 0 em Q tal que $V \subseteq (U \cap a_1 F) \oplus (U \cap a_2 F) \oplus \cdots \oplus (U \cap a_n F)$, para alguma F -base regular $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de Q .

Observamos que quando Q é um corpo, a condição (b) da definição acima é automaticamente verificada. Portanto neste caso, a definição de anel artinian simples V -topológico, coincide com a definição de corpo V -topológico.

Provaremos agora dois Lemas, que serão úteis para uma caracterização dos anéis artinianos simples V -topológicos.

Lema 4.2: As condições abaixo são equivalentes para o anel topológico $(Q, \mathcal{T})$.

- (i) Para cada vizinhança U de 0 em Q , existe uma vizinhança V de 0 em Q tal que $V \subseteq (U \cap a_1 F) \oplus (U \cap a_2 F) \oplus \cdots \oplus (U \cap a_n F)$, para alguma F -base regular $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de Q .
- (ii) $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia produto, induzida pela topologia de F .

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Vamos verificar que $\mathcal{T} \sim \Pi$, para $\Pi = \mathcal{T}|_{a_1 F} \oplus \mathcal{T}|_{a_2 F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}|_{a_n F}$, e em função do Lema 2.10 podemos trabalhar apenas com abertos contendo a origem. Seja $A \in \mathcal{T}$ com $0 \in A$, então a continuidade da função soma em relação a topologia $\mathcal{T}$, garante a existência de um aberto $A' \in \mathcal{T}$ tal que $0 \in A'$ e $A' + A' + \cdots + A' \subseteq A$, para n -cópias de A' . Como $B_i = A' \cap a_i F \in \mathcal{T}|_{a_i F}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, vem que $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n \in \Pi$, e se $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \in B$ então $b_i \in A'$ para todo i , e daí $b \in A$. Assim $B \subseteq A$ e $\Pi \succ \mathcal{T}$. Seja agora C um aberto de Π com $0 \in C$, e então para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe $C_i \in \mathcal{T}|_{a_i F}$ tal que $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n \subseteq C$, com $0 \in C_i$ e $C_i = U_i \cap a_i F$ para algum $U_i \in \mathcal{T}$. Tomando $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ temos pela hipótese (i) que existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $V \subseteq (U \cap a_1 F) \oplus (U \cap a_2 F) \oplus \cdots \oplus (U \cap a_n F) \subseteq C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n \subseteq C$, provando que $\mathcal{T} \succ \Pi$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma base regular de Q tal que $\mathcal{T} \sim \Pi$, para $\Pi = \mathcal{T}|_{a_1 F} \oplus \mathcal{T}|_{a_2 F} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}|_{a_n F}$. Se U é uma vizinhança de 0 em Q , então existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $0 \in A \subseteq U$. Segue que $B_i = A \cap a_i F \in \mathcal{T}|_{a_i F}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, que leva a $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n \in \Pi$ e $0 \in B$. Como $\mathcal{T} \succ \Pi$, existe $V \in \mathcal{T}$, V vizinhança de 0 em Q , tal que $V \subseteq B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n = (A \cap a_1 F) \oplus (A \cap a_2 F) \oplus \dots \oplus (A \cap a_n F) \subseteq (U \cap a_1 F) \oplus (U \cap a_2 F) \oplus \dots \oplus (U \cap a_n F)$.

Note que para uma topologia $\mathcal{T}$ em Q , temos que $\mathcal{T}$ ser Hausdorff implica em $\mathcal{T}|_F$ ser Hausdorff, e $\mathcal{T}$ ser discreta implica em $\mathcal{T}|_F$ ser discreta. A recíproca das implicações acima não vale em geral, pois tomando $Q = M_2(\mathbb{F}_2)$ e

$$\mathcal{T} = \left\{ \emptyset, Q, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\},$$

temos que $\mathcal{T}$ não é discreta e nem Hausdorff. Mas $F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{T}|_F = \left\{ \emptyset, F, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$, assim $\mathcal{T}|_F$ é discreta e Hausdorff.

Veremos que estas recíprocas sempre são verdadeiras, quando trabalhamos com anéis topológicos onde valem as condições equivalentes do Lema 4.2.

Lema 4.3: Seja $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico, onde $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia produto induzida pela topologia de F .

(a) $(Q, \mathcal{T})$ é Hausdorff se, e somente se, $(F, \mathcal{T}|_F)$ é Hausdorff.

(b) $(Q, \mathcal{T})$ é discreto se, e somente se, $(F, \mathcal{T}|_F)$ é discreto.

Demonstração:

Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a F -base regular de Q , para a qual $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}|_{a_1 F} \oplus \mathcal{T}|_{a_2 F} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}|_{a_n F}$.

(a) Sendo $(F, \mathcal{T}|_F)$ Hausdorff e $a_i \in Q^*$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que $(a_i F, \mathcal{T}|_{a_i F})$ é Hausdorff por ser homeomorfo a $(F, \mathcal{T}|_F)$. Segue que $(Q, \mathcal{T}|_{a_1 F} \oplus \mathcal{T}|_{a_2 F} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}|_{a_n F})$ é Hausdorff, e portanto $(Q, \mathcal{T})$ é Hausdorff.

(b) Se $(F, \tau|_F)$ é discreto, então $\{0\}$ é aberto em F . Como $a_i \in Q^*$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos do homeomorfismo entre $(F, \tau|_F)$ e $(a_i F, \tau|_{a_i F})$ que $\{0\}$ é aberto em $(a_i F, \tau|_{a_i F})$. Segue que $\{0\}$ é aberto em $(Q, \tau|_{a_1 F} \oplus \tau|_{a_2 F} \oplus \dots \oplus \tau|_{a_n F})$. Portanto $\{0\}$ é aberto em (Q, τ) e (Q, τ) é discreto.

Teorema 4.4: Para que o anel topológico (Q, τ) seja V -topológico, é necessário e suficiente que sejam verificadas as seguintes condições:

(a₁) $(F, \tau|_F)$ é corpo V -topológico.

(b₁) τ é equivalente a topologia produto induzida pela topologia de F .

Demonstração:

Se (Q, τ) é anel artinian simples V -topológico, então a condição (b₁) segue do Lema 4.2. A continuidade das aplicações soma e produto de $(F, \tau|_F) \times (F, \tau|_F)$ em $(F, \tau|_F)$, e a propriedade Hausdorff para $(F, \tau|_F)$ são herdadas de (Q, τ) . A continuidade de $\phi : (F^*, \tau|_{F^*}) \rightarrow (F^*, \tau|_{F^*})$ dada por $\phi(x) = x^{-1}$, é consequência da condição (a) da definição de V -topologia, conforme a Proposição 2.8. Para concluir que $(F, \tau|_F)$ é corpo V -topológico, falta verificar que $(F, \tau|_F)$ não é discreto, mas como (Q, τ) não é discreto, isso segue do Lema 4.3. Portanto todo anel artinian simples V -topológico satisfaz as condições (a₁) e (b₁). Reciprocamente, se (Q, τ) é um anel artinian simples topológico para o qual valem as condições (a₁) e (b₁), temos pelo Lema 4.2 que para cada vizinhança U de 0 em Q , existe uma vizinhança V de 0 em Q tal que $V \subseteq (U \cap a_1 F) \oplus (U \cap a_2 F) \oplus \dots \oplus (U \cap a_n F)$, para alguma F -base regular $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de Q . É evidente que $(F, \tau|_F)$ sendo um corpo V -topológico, então para cada vizinhança W de 0 em F , o conjunto $(F \setminus W)^{-1}$ é limitado. Além disso, como $(F, \tau|_F)$ não é discreto segue que (Q, τ) não é discreto. Finalmente, como $(F, \tau|_F)$ é Hausdorff, temos pelo Lema 4.3 que (Q, τ) é Hausdorff. Portanto todo anel artinian simples topológico que satisfaz as condições (a₁) e (b₁) é um anel artinian simples V -topológico.

Corolário: (Q, τ_R) é anel artinian simples V -topológico.

Demonstração:

As condições (a₁) e (b₁) do Teorema anterior, seguem dos Teoremas 2.9 e 2.17.

O próximo Lema será usado para verificar que as V -topologias em Q , para as quais F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, são equivalentes a topologias geradas por anéis de valorização próprios de Q .

Lema 4.5: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico e $x \in Q$.

(a) Se $A \in \mathcal{T}$ e $0 \in A$, então existe $B \in \mathcal{T}$ com $0 \in B$ tal que $Bx \subseteq A$.

(b) Se $A \in \mathcal{T}$, $u \in A$ e $x \in Q^*$, então existe $B \in \mathcal{T}$ com $u \in Bx$ tal que $Bx \subseteq A$.

Demonstração:

(a) A continuidade da função produto no ponto $(0, x)$ assegura a existência de abertos B e C tais que $0 \in B$, $x \in C$ e $B \cdot C \subseteq A$, daí $0 \in Bx \subseteq A$.

(b) Como $\mathcal{T}$ é uma topologia de anel, para cada $u \in A$ temos que $(-ux^{-1} + Ax^{-1})$ é aberto contendo 0, e então pelo item (a) existe $B' \in \mathcal{T}$ tal que $0 \in B'x^{-1} \subseteq (-ux^{-1} + Ax^{-1})$. Tomando $B = ux^{-1} + B'x^{-1}$ vem que $B \in \mathcal{T}$, $ux^{-1} \in B$ e $B \subseteq ux^{-1} + (-ux^{-1} + Ax^{-1}) = Ax^{-1}$ que leva a $u \in Bx \subseteq A$.

Teorema 4.6: Seja $(Q, \mathcal{T})$ um anel artinian simples V -topológico. Se F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, então $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia gerada por um anel de valorização próprio de Q .

Demonstração:

Por hipótese, $(F, \mathcal{T}|_F)$ é corpo V -topológico sem elemento analítico nilpotente não nulo, e então pelo Teorema 4.1 existe uma valorização de Krull v de F tal que $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_v$. Como $\mathcal{T}|_F$ é não discreta, vem que $\mathcal{T}_v$ é não discreta e segue da Proposição 3.11 que v é não trivial. Agora usamos o Teorema 3.13 para garantir a existência de um anel de valorização V de F tal que $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_v$. Pelo Teorema da Extensão existe um anel de valorização R de Q que satisfaz $R \cap F = V$, e $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_R|_F$ pelo Corolário da Proposição 2.6. Como $\mathcal{T}$ é uma V -topologia, chamando $n = [Q : F]$, vem do Teorema 4.4 que existe uma F -base $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ de Q tal que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}|_{b_1F} \oplus \mathcal{T}|_{b_2F} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}|_{b_nF}$. Vimos no Corolário da Proposição 2.14, que existem $v_1, v_2, \dots, v_n \in V^*$ tais que para $a_i = b_i v_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, o conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é uma F -base regular de Q contida em R^* e $a_i F = b_i F$ pois $v_i F = F$. Usando o Teorema 2.17 temos $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_R|_{a_1F} \oplus \mathcal{T}_R|_{a_2F} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}_R|_{a_nF}$, e portanto para provar que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R$, é suficiente verificar que $\mathcal{T}|_{a_iF} \sim \mathcal{T}_R|_{a_iF}$ para cada índice i . Para isso, fixamos i , tomamos $E \in \mathcal{T}|_{a_iF}$, E não vazio e escolhemos $u \in E$. Então $E = A \cap a_i F$ para algum $A \in \mathcal{T}$ e $u \in A$. Usamos o Lema 4.5 para obter $B \in \mathcal{T}$ que satisfaz $u \in Ba_i \subseteq A$, donde vemos que $ua_i^{-1} \in B$. Também $ua_i^{-1} \in F$ pois $u \in E \subseteq a_i F$, assim $ua_i^{-1} \in B \cap F$ e $B \cap F \in \mathcal{T}|_F$ que é equivalente a $\mathcal{T}_R|_F$, garantindo a existência de $A' \in \mathcal{T}_R$ tal que $ua_i^{-1} \in A' \cap F \subseteq B \cap F$. Aplicamos novamente o Lema 4.5 para $a_i^{-1} \in Q^*$ e $A' \in \mathcal{T}_R$ obtendo $B' \in \mathcal{T}_R$ para o qual vale $ua_i^{-1} \in B'a_i^{-1} \subseteq A'$. Tomando $C = B' \cap a_i F$ temos que $u \in C$ e $C \in \mathcal{T}_R|_{a_iF}$. Além disso se $c \in C$, então $c = a_i s$ com $s \in F$ e $c \in B'$. Segue que $s = ca_i^{-1} \in B'a_i^{-1} \subseteq A'$

e daí $s \in A' \cap F \subseteq B \cap F$. Portanto $c = a_i s = s a_i \in B a_i \subseteq A$ que mostra que $C \subseteq A$, mas como $C \subseteq a_i F$ temos $C \subseteq A \cap a_i F = E$, e então $\mathcal{T}_R|_{a_i F} \succ \mathcal{T}|_{a_i F}$. Para verificar que $\mathcal{T}|_{a_i F} \succ \mathcal{T}_R|_{a_i F}$ procedemos da mesma forma. Obtivemos um anel de valorização R de Q que gera uma topologia equivalente a $\mathcal{T}$, e resta provar que R é subanel próprio de Q . Se $R = Q$ temos $V = F$, e assim $\mathcal{T}_V$ tem $\{aF; a \in F^*\} = \{F\}$ como sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem. Isso leva a $\mathcal{T}_V = \{\emptyset, F\}$ que não é uma topologia de Hausdorff, em contradição com $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}|_F$ e $\mathcal{T}|_F$ topologia de Hausdorff. Portanto R é anel de valorização próprio de Q .

Corolário: Se w é uma função valorização não trivial de Q tal que R_w/J_w é anel artinianiano simples, então $\mathcal{T}_w$ é uma V -topologia em Q . Reciprocamente, se $\mathcal{T}$ é uma V -topologia em Q e F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, então existe uma função valorização não trivial w em Q tal que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_w$.

Demonstração:

A primeira parte é uma combinação do Teorema 3.13 com o Corolário do Teorema 4.4, e a segunda é obtida dos Teoremas 3.13 e 4.6.

Recordamos, conforme ([E], pg 20), que existe uma correspondência biunívoca entre os valores absolutos não arquimedianos, e as valorizações exponenciais do corpo F . Com as convenções $e^{-\infty} = 0$ e $-\ln 0 = \infty$, a cada valor absoluto não arquimediano $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}_+$, associamos a valorização exponencial $v : F \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por $v(x) = -\ln(\varphi(x))$. Reciprocamente, a cada valorização exponencial $v : F \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fazemos corresponder o valor absoluto não arquimediano $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}_+$, dado por $\varphi(x) = e^{-v(x)}$.

Se V é o anel de valorização de F correspondente a v , pela identificação acima, temos que $J(V) = \{x \in F; v(x) > 0\} = \{x \in F; \varphi(x) < 1\}$.

A partir de um valor absoluto $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}_+$, definimos $d_\varphi : F \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$ por $d_\varphi(x, y) = \varphi(x - y)$. É fácil ver que d_φ é uma métrica e define uma topologia $\mathcal{T}_\varphi$ em F , cujo sistema fundamental de vizinhanças abertas para a origem é $\{\mathcal{V}_\epsilon; \epsilon > 0\}$, onde $\mathcal{V}_\epsilon = \{y \in F; \varphi(y) < \epsilon\}$. Mais ainda, $(F, \mathcal{T}_\varphi)$ é um corpo V -topológico, como pode ser visto em ([PZ], §3).

Nossa afirmação é que através da identificação entre os valores absolutos não arquimedianos e as valorizações exponenciais, produzimos topologias equivalentes em F . Apesar deste resultado ser imediato, colocamo-o em forma de proposição para facilitar referências futuras.

Proposição 4.7: Sejam v e φ respectivamente uma valorização exponencial e um valor absoluto não arquimediano no corpo F . Se $v(x) = -\ln(\varphi(x))$ para todo $x \in F$, então $\tau_v \sim \tau_\varphi$.

Demonstração:

Vimos no Capítulo III que para $\mathcal{U}_\delta = \{y \in F; v(y) > \delta\}$, o conjunto $\{\mathcal{U}_\delta; \delta \in \mathbb{R}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para a origem na topologia τ_v , e que (F, τ_φ) é um corpo V -topológico. Para provar que τ_v é equivalente a τ_φ , usamos o Lema 2.10, e então podemos trabalhar apenas com os abertos dos sistemas de vizinhanças acima. Dado $\mathcal{U}_\delta \in \tau_v$, temos $\epsilon = e^{-\delta} > 0$ e tomamos $\mathcal{V}_\epsilon \in \tau_\varphi$. Se $y \in \mathcal{V}_\epsilon$ então $\varphi(y) = e^{-v(y)} < \epsilon = e^{-\delta}$ implicando em $v(y) > \delta$ e $y \in \mathcal{U}_\delta$. Assim $\mathcal{V}_\epsilon \subseteq \mathcal{U}_\delta$ e $\tau_\varphi \succ \tau_v$. Por outro lado, dado $\mathcal{V}_\epsilon \in \tau_\varphi$, tomamos $\delta = -\ln \epsilon$ e $\mathcal{U}_\delta \in \tau_v$. Se $y \in \mathcal{U}_\delta$ então $v(y) = -\ln(\varphi(y)) > \delta = -\ln \epsilon$, implicando em $\varphi(y) = e^{-v(y)} < e^{-\delta} = \epsilon$, e $y \in \mathcal{V}_\epsilon$. Portanto $\mathcal{U}_\delta \subseteq \mathcal{V}_\epsilon$ e $\tau_v \succ \tau_\varphi$.

Corolário: Se V é um anel de valorização maximal do corpo F , então a topologia gerada por V é equivalente a topologia gerada por um valor absoluto não arquimediano de F .

Demonstração:

Seja v o valor absoluto correspondente a V , então sabemos que $\tau_v \sim \tau_V$. Como V é maximal, temos que $\text{rank}(V) = 1$ e então por ([E], pg 50), a valorização correspondente a V é equivalente a uma valorização exponencial. Tomamos agora φ o valor absoluto não arquimediano correspondente a v , e pela Proposição $\tau_\varphi \sim \tau_v \sim \tau_V$.

Um valor absoluto φ no corpo F é chamado trivial quando $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(t) = 1$ para todo $t \in F, t \neq 0$.

Lema 4.8: Se F é um corpo com uma topologia gerada por um valor absoluto não trivial, então F possui elemento analítico nilpotente não nulo.

Demonstração:

Seja φ o valor absoluto não trivial que gera a topologia τ_φ em F . Sendo φ não trivial, existe $x \in F, x \neq 0$, tal que $\varphi(x) \neq 1$, e como $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ temos um

elemento não nulo $y = x$ ou $y = x^{-1}$ em F tal que $0 < \varphi(y) < 1$. Na topologia usual dos números reais a sequência $\{\varphi(y)^n\}$ converge para zero. Seja $B(0, \epsilon)$ um aberto de $\mathcal{T}_\varphi$, para este ϵ , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $\varphi(y^n) = \varphi(y)^n < \epsilon$, e assim $y^n \in B(0, \epsilon)$. Portanto $\{y^n\}$ converge para zero em $\mathcal{T}_\varphi$ e y é um elemento analítico nilpotente não nulo de F .

Corolário: Se $(Q, \mathcal{T})$ é anel artiniano simples V -topológico, para o qual F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, e R é o anel de valorização próprio de Q que gera $\mathcal{T}$, então R não é maximal em Q e portanto não é anel de valorização discreto.

Demonstração:

Se R é maximal, segue de [13] da página 18, que $V = R \cap F$ é anel de valorização maximal de F , e $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}_R|_F$ pelo Corolário da Proposição 2.6. Usando o Corolário da Proposição 4.7 obtemos um valor absoluto φ em F tal que $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}_\varphi$, e φ é não trivial, pois caso contrário $\mathcal{T}_R|_F \sim \mathcal{T}_\varphi$ seria discreta. Assim podemos aplicar o Lema 4.8 para concluir que F com a topologia $\mathcal{T}_R|_F$ tem elemento analítico nilpotente não nulo. Isso contradiz a hipótese, e portanto R não é anel de valorização maximal de Q .

Definição: Se φ é um valor absoluto em F , diremos que uma aplicação $\psi : Q \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma norma em Q quando:

- (i) $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (ii) $\psi(tx) = \varphi(t)\psi(x)$, para quaisquer $t \in F$ e $x \in Q$.
- (iii) $\psi(x + y) \leq \psi(x) + \psi(y)$, para quaisquer $x, y \in Q$.

A aplicação $d_\psi : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $d_\psi(x, y) = \psi(x - y)$ é uma métrica em Q , e define uma topologia Hausdorff $\mathcal{T}_\psi$ em Q , cujo sistema fundamental de vizinhanças abertas para a origem são as bolas abertas $B(0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$.

Uma norma ψ em Q é dita trivial quando $\psi(0) = 0$ e $\psi(x) = 1$ para todo $x \in Q, x \neq 0$.

Sejam $n = [Q : F]$ e $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base de Q . É fácil ver que $\psi : Q \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $\psi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \max_i \{\varphi(x_i)\}$ é uma norma em Q , e que ψ

é trivial se e somente se φ é trivial.

Lema 4.9: Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base de Q . Então para a norma definida acima vale:

(a) ψ é a norma trivial se, e somente se, $\mathcal{T}_\psi$ é a topologia discreta.

(b) $s : (Q, \mathcal{T}_\psi) \times (Q, \mathcal{T}_\psi) \rightarrow (Q, \mathcal{T}_\psi)$; $s(x, y) = x - y$ é contínua.

Demonstração:

(a) Se ψ é a norma trivial, então para cada $x \in Q$ temos que $B(x, 1/2) = \{x\}$. Assim todo subconjunto de Q é aberto como uma reunião de abertos, e portanto $\mathcal{T}_\psi$ é a topologia discreta. Reciprocamente, se $\mathcal{T}_\psi$ é discreta existe $\epsilon > 0$ tal que $B(0, \epsilon) = \{0\}$ pois $\{0\}$ é aberto. Supondo que ψ não é trivial, teremos φ não trivial e então existe $x \in F$, $x \neq 0$, tal que $\varphi(x) \neq 1$. Se $\varphi(x) < 1$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n < \epsilon$ e daí $x^n \in B(0, \epsilon)$. Se $\varphi(x) > 1$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x^m) = \varphi(x)^m > 1/\epsilon$ que leva a $\varphi(x^{-m}) = \varphi(x)^{-m} < \epsilon$ e $x^{-m} \in B(0, \epsilon)$. Portanto em qualquer caso obtemos um elemento não nulo na bola $B(0, \epsilon) = \{0\}$ que não é possível. Concluimos então que ψ é trivial.

(b) Fixamos $(x_0, y_0) \in Q \times Q$ e consideramos $B(x_0 - y_0, \epsilon)$ o aberto contendo $x_0 - y_0$. Tomando $B = B(x_0, \epsilon/2) \times B(y_0, \epsilon/2)$ que é aberto de $Q \times Q$ contendo (x_0, y_0) , e $u = (x, y) \in B$ temos $s(u) = x - y$. Mas $\psi((x - y) - (x_0 - y_0)) \leq \psi(x - x_0) + \psi(y_0 - y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, implicando em $s(u) \in B(x_0 - y_0, \epsilon)$. Portanto s é contínua em todo $(x_0, y_0) \in Q \times Q$.

Proposição 4.10: Sejam φ um valor absoluto não trivial em F , e $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base regular de Q . Então para a norma $\psi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \max_i \{\varphi(x_i)\}$ são equivalentes:

(i) $(Q, \mathcal{T}_\psi)$ é anel artiniano simples V -topológico.

(ii) $p : (Q, \mathcal{T}_\psi) \times (Q, \mathcal{T}_\psi) \rightarrow (Q, \mathcal{T}_\psi)$; $p(x, y) = xy$ é contínua.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) É imediato.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Vamos verificar as condições (a₁) e (b₁) do Teorema 4.4. Pelo Lema 4.9 temos que $(Q, \mathcal{T}_\psi)$ é um anel topológico. Como φ é um valor absoluto não trivial, segue de ([PZ], §3) que $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}_\psi|_F$ é uma V -topologia em F , e assim $(F, \mathcal{T}_\psi|_F)$ é corpo V -topológico, e assim vale (a₁). Sejam agora U uma vizinhança de 0 em Q e A o aberto de $\mathcal{T}_\psi$ tal que $0 \in A \subseteq U$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a continuidade da aplicação p

garante que $a_i^{-1}A \in \mathcal{T}_\psi$, e daí temos $a_i^{-1}A \cap F$ aberto em $\mathcal{T}_\varphi$ contendo 0. Assim existe $\epsilon_i > 0$ tal que $B_\varphi(0, \epsilon_i) \subseteq a_i^{-1}A \cap F$, implicando em $a_i B_\varphi(0, \epsilon_i) \subseteq A \cap a_i F \subseteq U \cap a_i F$. Tomando $\epsilon = \min_i \{\epsilon_i\}$ e $V = B(0, \epsilon) \in \mathcal{T}_\psi$, vemos que para $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ vale $\varphi(x_i) \leq \max_i \{\varphi(x_i)\} = \psi(x) < \epsilon \leq \epsilon_i$. Portanto $x_i \in B_\varphi(0, \epsilon_i)$ e $x \in a_1 B_\varphi(0, \epsilon_1) + a_2 B_\varphi(0, \epsilon_2) + \dots + a_n B_\varphi(0, \epsilon_n) \subseteq (U \cap a_1 F) \oplus (U \cap a_2 F) \oplus \dots \oplus (U \cap a_n F)$, que prova que $V \subseteq (U \cap a_1 F) \oplus (U \cap a_2 F) \oplus \dots \oplus (U \cap a_n F)$. Agora aplicamos o Lema 4.2 para ver que $\mathcal{T}_\psi$ é equivalente a topologia produto induzida por F , e portanto vale (b₁).

Teorema 4.11: Seja $(Q, \mathcal{T})$ um anel artiniano simples V -topológico. Se F tem elemento analítico nilpotente não nulo, então $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia gerada por uma norma não trivial em Q .

Demonstração:

Sejam $n = [Q : F]$ e $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma F -base regular de Q , para a qual $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}|_{a_1 F} \oplus \mathcal{T}|_{a_2 F} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}|_{a_n F} = \Pi$, que existe pelo Teorema 4.4. Como F tem elemento analítico nilpotente não nulo, segue do Teorema 4.1 que existe um valor absoluto não trivial φ em F tal que $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_\varphi$. Definimos em Q a norma $\psi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \max_i \{\varphi(x_i)\}$, $x_i \in F$, que é não trivial e $\mathcal{T}_\psi|_F = \mathcal{T}_\varphi$. Vamos verificar que $\mathcal{T}_\psi$ é equivalente a Π , mas pelos Lemas 2.10 e 4.9 basta trabalhar com abertos contendo a origem. Seja A um aberto na topologia produto contendo 0. Então para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe $B_i \in \mathcal{T}|_{a_i F}$ tal que $0 \in B_i$ e $B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n \subseteq A$, com $B_i = A_i \cap a_i F$ para algum $A_i \in \mathcal{T}$. Como $(Q, \mathcal{T})$ é anel topológico e $a_i \in Q^*$, temos que $a_i^{-1}A_i$ é um aberto de $\mathcal{T}$ contendo 0, e $a_i^{-1}A_i \cap F \in \mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_\varphi$, que implica na existência de uma bola aberta $B_\varphi(0, \epsilon_i)$ em F tal que $B_\varphi(0, \epsilon_i) \subseteq a_i^{-1}A_i \cap F$ e portanto $a_i B_\varphi(0, \epsilon_i) \subseteq A_i \cap a_i F = B_i$. Tome $\epsilon = \min_i \{\epsilon_i\}$ e considere $B(0, \epsilon) \in \mathcal{T}_\psi$. Dado $x \in B(0, \epsilon)$ temos $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, e para cada i , $\varphi(x_i) \leq \max_i \{\varphi(x_i)\} = \psi(x) < \epsilon \leq \epsilon_i$, implicando que $x_i \in B_\varphi(0, \epsilon_i)$ e assim $x \in a_1 B_\varphi(0, \epsilon_1) + a_2 B_\varphi(0, \epsilon_2) + \dots + a_n B_\varphi(0, \epsilon_n) \subseteq B_1 + B_2 + \dots + B_n \subseteq A$ que prova que $\mathcal{T}_\psi \succ \mathcal{T}$. Por outro lado, seja $B(0, \epsilon)$ um aberto de $\mathcal{T}_\psi$ contendo 0. Como $B(0, \epsilon) \cap F = B_\varphi(0, \epsilon) \in \mathcal{T}_\varphi \sim \mathcal{T}|_F$, e para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a aplicação $x \mapsto a_i x$ é um homeomorfismo de $(F, \mathcal{T}|_F)$ em $(a_i F, \mathcal{T}|_{a_i F})$, então $a_i B_\varphi(0, \epsilon) \in \mathcal{T}|_{a_i F}$. Tome $A = a_1 B_\varphi(0, \epsilon) + a_2 B_\varphi(0, \epsilon) + \dots + a_n B_\varphi(0, \epsilon)$ que é aberto na topologia produto e contém 0. Se $q \in A$, então $q = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ com $x_i \in B_\varphi(0, \epsilon)$. Assim $\psi(q) = \max_i \{\varphi(x_i)\} < \epsilon$ e $q \in B(0, \epsilon)$. Portanto $A \subseteq B(0, \epsilon)$ e $\mathcal{T} \succ \mathcal{T}_\psi$.

Corolário: Seja $(Q, \mathcal{T})$ um anel artiniano simples V -topológico.

(a) F tem elemento analítico nilpotente não nulo se, e somente se, $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_\psi$ para

alguma norma não trivial ψ em Q .

(b) F não tem elemento analítico nilpotente não nulo se, e somente se, $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R$ para algum anel de valorização próprio R de Q , e $\mathcal{T}$ não é equivalente a topologia gerada por uma norma em Q .

Demonstração:

(a) Uma direção é o Teorema 4.11. Sejam ψ a norma não trivial tal que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_\psi$, e φ o valor absoluto que gera ψ . Então φ é não trivial, $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_\psi|_F = \mathcal{T}_\varphi$ e pelo Lema 4.8 F tem elemento analítico nilpotente não nulo.

(b) Se F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, então pelo Teorema 4.6 existe um anel de valorização próprio R de Q tal que $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}$. Pelo item (a) uma norma não trivial não pode gerar $\mathcal{T}$. Como a norma trivial gera a topologia discreta e $\mathcal{T}$ é não discreta, vem que $\mathcal{T}$ não pode ser gerada pela norma trivial. A recíproca segue de (a).

O próximo Teorema é devido a Ostrowski. Nós o usaremos para concluir que se $\mathcal{T}$ é uma V -topologia em Q , para a qual F tem elemento analítico nilpotente não nulo, e se o valor absoluto que gera $\mathcal{T}|_F$ é arquimediano então $F \subseteq \mathbb{C}$.

Teorema 4.12: ([B], §6, N^o 4, Théorème 2) Sejam F um corpo e $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação, tais que para $x, y \in F$ vale:

- (1) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- (3) $\varphi(x + y) > \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.
- (4) $\varphi(x + y) \leq A \cdot \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ para algum $A > 0$.

Então existe $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, e um isomorfismo j de F em um subcorpo denso de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tal que $\varphi(x) = |j(x)|^s$ para todo $x \in F$, onde $|\cdot|$ é a norma usual de $\mathbb{C}$. Para que φ seja um valor absoluto é necessário e suficiente que $s \leq 1$.

Teorema 4.13: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel artinian simples V -topológico, para o qual F tem elemento analítico nilpotente não nulo, e φ o valor absoluto que gera $\mathcal{T}|_F$.

(a) Se φ é não arquimediano então $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia gerada por anel

de valorização maximal R de Q , e R é anel de valorização discreto se e somente se, $J(V)^2 \neq J(V)$ onde $V = R \cap F$ e $J(V) = \{x \in F; \varphi(x) < 1\}$.

(b) Se φ é arquimediano então $\mathcal{T}$ não é equivalente a topologia gerada por um anel de valorização maximal de Q . Mais ainda, $F \subseteq \mathcal{C}$ e $\varphi(x) = |x|^s$ para algum $s \in (0, 1]$.

Demonstração. :

(a) Seja v a valorização exponencial correspondente a φ . Como vimos na Proposição 4.7, $\mathcal{T}_v \sim \mathcal{T}_\varphi$ e também $V = \{x \in F; v(x) \geq 0\} = \{x \in F; \varphi(x) \leq 1\}$ é o anel de valorização de F correspondente a V com $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}_v$. Pelo Teorema da Extensão, existe um anel de valorização R de Q tal que $R \cap F = V$, e $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}$ conforme provado na demonstração do Teorema 4.6. Como v é uma valorização exponencial, vem de ([E], pg 50) que $rank(V) \leq 1$. Note que $rank(V) = 0$ não é possível, pois neste caso teríamos $V = F$ implicando que $\mathcal{T}_V$ é caótica, mas $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}_\varphi$ é Hausdorff. Portanto $rank(V) = 1$ e V é subanel maximal de F , que por [13] da página 18, leva a R maximal em Q . Pela Proposição 1.20, R é discreto se e somente se V é discreto, mas como V é maximal isso equivale a $J(V) \neq J(V)^2$. Mas pela definição de v , temos $J(V) = \{x \in F; \varphi(x) < 1\} = \{x \in F; v(x) > 0\}$. Portanto R é anel de valorização discreto se, e somente se, $J(V) \neq J(V)^2$.

(b) Se $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R$ para algum anel de valorização maximal R de Q , então pelo Corolário da Proposição 2.6 temos $\mathcal{T}_\varphi \sim \mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_V$, para $V = R \cap F$. Como V é maximal segue do Corolário da Proposição 4.7 que $\mathcal{T}_V$ é equivalente a topologia gerada por um valor absoluto não arquimediano de F . Isso é uma contradição, pois por hipótese $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}_\varphi$, com φ arquimediano, assim $\mathcal{T}$ não pode ser gerada por um anel de valorização maximal de Q . Claramente φ satisfaz as condições (1), (2) e (3) do Teorema de Ostrowski, por ser valor absoluto arquimediano. Além disso φ satisfaz a condição (4) para $A = 2$ pois $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \leq 2 \cdot \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$. Portanto $F \subseteq \mathcal{C}$ e como φ é valor absoluto, $\varphi(x) = |x|^s$ para algum $s \in (0, 1]$.

Corolário: Seja $(Q, \mathcal{T})$ um anel artiniano simples V -topológico. Para que $\mathcal{T}$ seja equivalente a topologia gerada por um anel de valorização discreto R de Q , é necessário e suficiente que sejam verificadas as condições abaixo:

- (a) F tem elemento analítico nilpotente não nulo.
- (b) $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_\varphi$, para algum valor absoluto não arquimediano φ em F .
- (c) $J(V) \neq J(V)^2$ para $V = \{x \in F; \varphi(x) \leq 1\}$.

Demonstração:

Se $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia gerada por um anel de valorização discreto de Q , então segue do Corolário do Lema 4.8 que F tem elemento analítico nilpotente não nulo. Pelo Teorema 4.1 vemos que $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_\varphi$, para algum valor absoluto φ em F . Agora usamos os itens (b) e (a) do Teorema 4.13 para concluir que φ é não arquimediano e $J(V) \neq J(V)^2$. A recíproca é imediata.

Um corpo topológico não discreto e Hausdorff é localmente limitado, conforme ([KD], §2), quando possui um sistema fundamental de vizinhanças abertas para a origem, que contém uma vizinhança limitada, no sentido da definição dada na página 30. Em ([KD], §3, Satz 8) vemos que toda V -topologia em um corpo é localmente limitada. Nosso próximo objetivo é verificar que as V -topologias, em anéis artinianos simples, são localmente limitadas segundo a definição abaixo.

Definição: Seja $(S, \mathcal{T})$ um anel topológico não discreto e Hausdorff. A topologia $\mathcal{T}$ é dita localmente limitada, quando possui um sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem que contém uma vizinhança limitada.

A exigência da topologia ser não discreta, para a definição de topologia localmente limitada, é imposta para evitar que $\{0\}$ seja vizinhança de 0. Caso contrário, pela definição de conjunto limitado, teríamos que toda vizinhança de 0 é limitada.

Se Q é anel artiniano simples com centro F , e R é anel de valorização de Q , então a topologia dos R -ideais, $\mathcal{T}_R$, é localmente limitada. De fato, verificamos no Capítulo II que $\mathcal{V}'' = \{aR; a \in R \cap F^*\}$ é sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem para a topologia $\mathcal{T}_R$. É claro que $R \in \mathcal{V}''$ e R é limitado.

Proposição 4.14: Se $(S, \mathcal{T})$ é anel topológico localmente limitado e F é o centro de S , então $(F, \mathcal{T}|_F)$ é corpo topológico localmente limitado.

Demonstração:

Seja $\mathcal{V}$ o sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem para a topologia $\mathcal{T}$, com vizinhança limitada U . Tome $\mathcal{V}_F = \{V \cap F; V \in \mathcal{V}\}$ que é um sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem para $\mathcal{T}|_F$. Se $V \cap F \in \mathcal{V}_F$, então $V \in \mathcal{V}$, e como U é limitada em $\mathcal{T}$, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $U.W \subseteq V$. Tomando

$W \cap F \in \mathcal{V}_F$ temos $(U \cap F).(W \cap F) \subseteq (V \cap F)$. Portanto $U \cap F$ é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}|_F$, e $\mathcal{T}|_F$ é corpo topológico localmente limitado.

Lema 4.15: Sejam $(S, \mathcal{T})$ um anel topológico, F o centro de S e $M \subseteq S$. Se $\mathcal{T}|_F$ não é a topologia discreta, então são equivalentes:

- (i) M é limitado.
- (ii) Para toda vizinhança U de 0, existe $x \in F^*$ tal que $xM \subseteq U$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sendo M limitado, existe uma vizinhança W de 0 tal que $W.M \subseteq U$. Como $\mathcal{T}|_F$ não é discreta, vem que $W \cap F \neq \{0\}$ e assim existe $x \in F^* \cap W$. Claramente $xM \subseteq W.M \subseteq U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja W uma vizinhança de 0. Como a função produto é contínua, existe um aberto A contendo 0 tal que $A.A \subseteq W$. Por (ii) existe $x \in F^*$ tal que $xM \subseteq A$. Aplicando o Lema 4.5 para A e x^{-1} , obtemos uma vizinhança V de 0 tal que $Vx^{-1} \subseteq A$. Agora $V.M = Vx^{-1}xM \subseteq A.A \subseteq W$ e portanto M é limitado.

Teorema 4.16: Se $(Q, \mathcal{T})$ é anel artiniiano simples V -topológico, então a topologia $\mathcal{T}$ é localmente limitada.

Demonstração:

Sendo $\mathcal{T}$ uma V -topologia temos que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R$ para algum anel de valorização R de Q , ou $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_\psi$ para alguma norma não trivial ψ de Q . No primeiro caso já observamos que $\mathcal{T}$ é localmente limitada. Para ver que $\mathcal{T}_\psi$ é localmente limitada, basta provar que $B(0, 1) = \{x \in Q; \psi(x) < 1\}$ é limitada, pois $\{B(0, \epsilon); \epsilon > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\mathcal{T}_\psi$. Como $(F, \mathcal{T}|_F)$ é corpo V -topológico temos que $\mathcal{T}|_F$ não é discreta, e podemos aplicar o Lema 4.15. Seja $B(0, \delta)$, $\delta > 0$, outra bola aberta, então é suficiente obter $u \in F^*$ tal que $uB(0, 1) \subseteq B(0, \delta)$. Já que $\varphi = \psi|_F$ é um valor absoluto não trivial, $\mathcal{T}_\varphi$ é uma V -topologia e portanto $\{0\} \notin \mathcal{T}_\varphi$. Assim $B(0, \delta) \cap F \neq \{0\}$ e tomamos $u \in B(0, \delta) \cap F^*$. Se $a \in B(0, 1)$, então $\psi(a) < 1$ e daí $\psi(ua) = \varphi(u)\psi(a) < \varphi(u) < \delta$ que leva a $ua \in B(0, \delta)$, e $uB(0, 1) \subseteq B(0, \delta)$. Logo $\mathcal{T}_\psi$ é localmente limitada.

Para o anel topológico $(Q, \mathcal{T})$, vimos até o momento que se $\mathcal{T}$ é equivalente a topologia gerada por anel de valorização de Dubrovin de Q , então:

- (1) $(F, \mathcal{T}|_F)$ é corpo V -topológico.

- (2) Existe uma vizinhança limitada U de 0 em $\mathcal{T}$, tal que $U \neq Q$ e $U + U \subseteq U$.
- (3) $\mathcal{T}$ é uma topologia localmente limitada.

Apresentaremos agora alguns resultados envolvendo topologias que satisfazem as condições (1), (2) e (3) acima, e terminaremos verificando que tais topologias são exatamente as topologias geradas por anéis de valorização de Dubrovin. Mais ainda, veremos na Proposição 4.19 que quando F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, a condição (2) pode ser obtida de (1) e (3).

Proposição 4.17: Seja $(Q, \mathcal{T})$ uma anel topológico. Se $\mathcal{T}$ é localmente limitada com vizinhança limitada da origem U e $\mathcal{T}|_F$ não é discreta, então:

- (a) $U \neq Q$.
- (b) U define uma topologia $\mathcal{T}_U$ em Q .
- (c) Para cada $x \in F^*$, xU é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_U$.
- (d) $\mathcal{V}_U = \{xU; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_U$.
- (e) A aplicação soma é contínua em $(Q, \mathcal{T}_U)$.
- (f) $\mathcal{T}_U \sim \mathcal{T}$.

Demonstração:

(a) Supondo $U = Q$ teríamos Q limitado, mas então pelo Lema 4.15, dada uma vizinhança W de 0 em $\mathcal{T}$, existiria $x \in F^*$ tal que $xQ = Q \subseteq W$. Assim toda vizinhança de 0 conteria Q , que contradiz o fato de $\mathcal{T}$ ser topologia Hausdorff.

(b) Defina $A \subseteq Q$ como aberto em $(Q, \mathcal{T}_U)$, se para cada $a \in A$, existir $x \in F^*$ tal que $a + xU \subseteq A$. Claramente $\emptyset, Q \in \mathcal{T}_U$ e $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha \in \mathcal{T}_U$, quando $A_\alpha \in \mathcal{T}_U$ e L é um conjunto de índices. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_U$ e $a \in A_1 \cap A_2$, então existem $x_1, x_2 \in F^*$ tais que $a + x_1U \subseteq A_1$ e $a + x_2U \subseteq A_2$. Como U é vizinhança de 0 na topologia $\mathcal{T}$, $x_1, x_2 \in F^*$ e a função produto é contínua em $(Q, \mathcal{T})$ temos que x_1U e x_2U são vizinhanças de 0 em $\mathcal{T}$. Assim existem $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ com $0 \in B_1, 0 \in B_2, B_1 \subseteq x_1U$ e $B_2 \subseteq x_2U$. Tomando $B = B_1 \cap B_2$ vem que $B \in \mathcal{T}, 0 \in B$ e $B \subseteq x_1U \cap x_2U$. Sendo U limitada, aplicamos o Lema 4.15 e obtemos $x \in F^*$ tal que $xU \subseteq B$. Portanto $xU \subseteq x_1U \cap x_2U$, daí $a + xU \subseteq (a + x_1U) \cap (a + x_2U) \subseteq A_1 \cap A_2$ e $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_U$.

(c) Para ver que xU é vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_U$ para cada $x \in F^*$, mostraremos que

$A = \{a \in Q; a + yU \subseteq xU, \text{ para algum } y \in F^*\}$ é aberto em $\mathcal{T}_U$, $0 \in A$ e $A \subseteq xU$. É fácil ver que $0 \in A$, pois tomamos neste caso $y = x$. Também se $a \in A$ temos que $a + yU \subseteq xU$ e como $0 \in yU$, vem que $a \in xU$ e então $A \subseteq xU$. Para verificar que A é aberto em $\mathcal{T}_U$, tomamos $a \in A$ e pela definição do conjunto A , existe $y \in F^*$ tal que $a + yU \subseteq xU$. Agora como a operação soma é contínua na topologia $\mathcal{T}$ e U é vizinhança de 0, existe uma vizinhança W de 0 em $\mathcal{T}$ tal que $W + W \subseteq U$. Por ser U limitada, vem do Lema 4.15 que existe $z \in F^*$ tal que $zU \subseteq W$ e então $z(U + U) \subseteq U$. Afirmamos que $a + zyU \subseteq A$, que provará que A é aberto em $\mathcal{T}_U$, pois $zy \in F^*$. De fato, para $a + zyu \in a + zyU$, tomamos $zy \in F^*$ e então $a + zyu + zyU \subseteq a + yz(U + U) \subseteq a + yU \subseteq xU$. Pela definição de A vem que $a + zyU \subseteq A$ e portanto xU é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_U$.

(d) Seja M uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_U$, então M contém um aberto A de $\mathcal{T}_U$ com $0 \in A$. Por definição, como $0 \in A$, existe $x \in F^*$ tal que $xU \subseteq A \subseteq M$. Assim toda vizinhança de 0 em $\mathcal{T}_U$ contém uma vizinhança de $\mathcal{V}_U = \{xU; x \in F^*\}$, isto é, $\mathcal{V}_U = \{xU; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para $\mathcal{T}_U$.

(e) Sejam $a, b \in Q$ e $A \in \mathcal{T}_U$ com $a + b \in A$, então existe $x \in F^*$ tal que $(a + b) + xU \subseteq A$. Como vimos no item (c), existe $z \in F^*$ tal que $z(U + U) \subseteq U$, e sendo zxU vizinhança de 0, existe $B \in \mathcal{T}_U$ com $0 \in B$ e $B \subseteq zxU$. Note que $a + B \in \mathcal{T}_U$, pois dado $r \in B$ existe $t \in F^*$ tal que $r + tU \subseteq B$ e daí $(a + r) + tU \subseteq a + B$. Tomamos então $C = (a + B, b + B) \in \mathcal{T}_U \times \mathcal{T}_U$, e se $(a + r, b + s) \in C$ temos $a + r + b + s = (a + b) + r + s \in (a + b) + B + B \subseteq (a + b) + zxU + zxU \subseteq (a + b) + xU \subseteq A$. Logo a operação soma é contínua em $\mathcal{T}_U$.

(f) Já sabemos que a soma é contínua em ambas as topologias, e então pelo Lema 2.10, para provar que $\mathcal{T}$ é equivalente a $\mathcal{T}_U$ basta trabalhar com abertos contendo a origem. Seja $A \in \mathcal{T}$ com $0 \in A$, então como U é um conjunto limitado em $\mathcal{T}$, aplicamos o Lema 4.15 para obter $x \in F^*$ tal que $xU \subseteq A$, que prova que $\mathcal{T}_U \succ \mathcal{T}$. Por outro lado, se $B \in \mathcal{T}_U$ com $0 \in B$, então existe $y \in F^*$ tal que $yU \subseteq B$. Como U é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}$, U contém um aberto $C \in \mathcal{T}$ com $0 \in C$, mas $y \in F^*$ e a função produto contínua em $\mathcal{T}$ garante que $yC \in \mathcal{T}$. Assim $yC \subseteq yU \subseteq B$ e $\mathcal{T} \succ \mathcal{T}_U$.

Corolário: Seja $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico. Se $\mathcal{T}$ é localmente limitada com vizinhança limitada da origem U e $\mathcal{T}|_F$ não é discreta, então:

(a) $\mathcal{O} = \{x \in Q; xU \subseteq U\}$ é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$.

(b) $\mathcal{O} \neq Q$, $\mathcal{O}$ define uma topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ em Q , que tem $\mathcal{V}_{\mathcal{O}} = \{x\mathcal{O}; x \in F^*\}$ como

sistema fundamental de vizinhanças da origem e $\mathcal{T}_O \sim \mathcal{T}$.

Demonstração:

(a) Sendo $\mathcal{T}|_F$ não discreta, existe $u \in U \cap F^*$ e como $OU \subseteq U$ temos que $Ou \subseteq U$ e daí $O \subseteq u^{-1}U$, com $\{u^{-1}\}$ limitado e U limitado. Portanto O é um subconjunto limitado contendo 0. Pela definição de conjunto limitado aplicada a vizinhança U , vemos que existe uma vizinhança W de 0 em $\mathcal{T}$ tal que $WU \subseteq U$. Segue que $W \subseteq O$ e assim O é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$.

(b) Segue da Proposição 4.17 aplicada a vizinhança limitada da origem O .

Para uma topologia $\mathcal{T}$ localmente limitada, com vizinhança limitada da origem U , fixamos a notação:

$$O = \{x \in Q; xU \subseteq U\}.$$

Note que pelo Corolário anterior, quando $\mathcal{T}|_F$ não é discreta, O é uma vizinhança limitada da origem em $\mathcal{T}$ que tem a propriedade $OO \subseteq O$.

A notação acima, bem como os próximos resultados, são motivados pelas construções técnicas desenvolvidas em [KD].

Lema 4.18: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico, $\mathcal{T}$ localmente limitada com vizinhança limitada da origem U e $(F, \mathcal{T}|_F)$ V -topologia. Se $z \in O \cap F^*$ e z não é analítico nilpotente então:

(a) Existe $y \in F^*$ tal que $z^n \notin yO$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\{z^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado.

Demonstração:

(a) Chame $Z = \{z^n; n \in \mathbb{N}\}$ e suponha que $Z \cap yO \neq \emptyset$ para todo $y \in F^*$. Dado $A \in \mathcal{T}$ com $0 \in A$, como O é vizinhança limitada, existe $x \in F^*$ tal que $xO \subseteq A$. De $Z \cap xO \neq \emptyset$ temos um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z^{n_0} \in xO$, e como $z \in O$ vem que $z^{n_0+1} \in xOO \subseteq xO$. Da mesma forma, $z^{n_0+t} \in xO$ para todo $t \in \mathbb{N}$, e assim para cada $n \geq n_0$ temos $z^n \in xO \subseteq A$. Mas isso não é possível pois z não é nilpotente analítico. Portanto existe $y \in F^*$ tal que $Z \cap yO = \emptyset$, isto é, $z^n \notin yO$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Por (a) existe $y \in F^*$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $z^n \in F - (F \cap y\mathcal{O})$, e assim $\{z^{-n}; n \in \mathbb{N}\} \subseteq (F - (F \cap y\mathcal{O}))^{-1}$. Como $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_{\mathcal{O}}$, temos que $y\mathcal{O}$ é vizinhança de 0 em $\mathcal{T}$, e daí $y\mathcal{O} \cap F$ é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}|_F$ que é V -topologia. Segue que $(F - (F \cap y\mathcal{O}))^{-1}$ é limitado, e portanto $\{z^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado.

Proposição 4.19: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico, para o qual $\mathcal{T}$ é localmente limitada e $(F, \mathcal{T}|_F)$ é uma V -topologia. Se F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, então existe uma vizinhança limitada da origem U , $U \neq Q$, tal que $U + U = U$.

Demonstração:

Pelo Corolário da Proposição 4.17, temos que $\mathcal{O}$ é uma vizinhança limitada da origem para a topologia $\mathcal{T}$, satisfazendo $\mathcal{O}\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$. Como $\mathcal{O}$ é limitada, vem que $\mathcal{O} + \mathcal{O}$ é um conjunto limitado, e então pelo Lema 4.15 existe $z \in F^*$ tal que $z(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$. Assim $z\mathcal{O} \subseteq z(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$ implicando em $\mathcal{O} \subseteq z^{-1}\mathcal{O}$ que leva a $\mathcal{O} \subseteq z^{-1}\mathcal{O} \subseteq z^{-2}\mathcal{O} \subseteq \dots$. Tomando $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} z^{-n}\mathcal{O}$ temos $\mathcal{O} \subseteq U$, e daí U é uma vizinhança de 0. Claramente $U \subseteq U + U$, e por outro lado, se $x, y \in U$ então $x = uz^{-i}$, $y = vz^{-j}$ com $u, v \in \mathcal{O}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Podemos assumir que $i \geq j$, daí $x = uz^{-i}$, $y = vz^{-i}$ e $x + y = z^{-i}(u + v) \in z^{-i}(\mathcal{O} + \mathcal{O}) = z^{-(i+1)}z(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \subseteq z^{-(i+1)}\mathcal{O} \subseteq U$. Isso prova que $U + U = U$, e para ver que U é limitada, observamos que $U \subseteq \mathcal{O}\{z^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$, com $\mathcal{O}$ limitada e também $\{z^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ limitado como consequência do Lema 4.18. Finalmente, $U \neq Q$ segue da Proposição 4.17.

A Proposição abaixo, fornece o primeiro resultado na direção do nosso objetivo que é provar que se $(Q, \mathcal{T})$ é um anel topológico com $\mathcal{T}$ localmente limitada, $\mathcal{T}|_F$ uma V -topologia e existe uma vizinhança limitada da origem U tal que $U + U \subseteq U$, então $\mathcal{T}$ é gerada por um anel de valorização de Dubrovin de Q .

Proposição 4.20: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico, $\mathcal{T}$ localmente limitada e $\mathcal{T}|_F$ não discreta. Se existe uma vizinhança limitada da origem U tal que $U + U \subseteq U$, então existe um subanel próprio R de Q tal que:

- (a) R é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$.
- (b) $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}$ e $\mathcal{V}_R = \{xR; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_R$.
- (c) R é um anel de Goldie primo e ordem bilateral de Q .

Demonstração:

(a) Inicialmente lembramos que $\mathcal{O} = \{x \in Q; xU \subseteq U\}$ é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$ e $\mathcal{O}\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$. Da hipótese $U + U \subseteq U$ obtemos também $\mathcal{O} + \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$, pois se $x, y \in \mathcal{O}$ então $(x + y)U \subseteq xU + yU \subseteq U + U \subseteq U$ implicando em $x + y \in \mathcal{O}$. Tomando $R = \{a - b; a, b \in \mathcal{O}\}$, é fácil ver que R é subanel de Q e $\mathcal{O} \subseteq R$. Assim R é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}$. Observamos que o conjunto $\{-1\}$ é limitado como consequência do Lema 4.15. Como $R \subseteq \mathcal{O} + (-1)\mathcal{O}$ e a soma e o produto de conjunto limitado é limitado, vem que R é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$. Pela Proposição 4.17(a) temos que $R \neq Q$.

(b) Segue de (a) e da Proposição 4.17.

(c) Dado $q \in Q$, como a função produto é contínua em $\mathcal{T}$ e $0 \in R$, existe um aberto $B \in \mathcal{T}$, com $0 \in B$ e $Bq \subseteq R$. Sendo $\mathcal{T}|_F$ não discreta, existe $a \in B \cap R \cap F^*$, e assim $aq = r \in R$ implicando $q = ra^{-1} = a^{-1}r$ com $r \in R$ e $a \in R^*$. Além disso, se $u \in R^*$ e $qu = 0$ para $q = a^{-1}r \in Q$, então $a^{-1}ru = 0$ implicando $ru = 0$ e daí $r = 0$. Assim $u \in Q^*$, que pelo Corolário da Proposição 1.4 equivale a $u \in U(Q)$. Logo R é uma ordem bilateral de Q e R é um anel de Goldie primo como consequência do Teorema 1.2

Os Lemas seguintes serão usados para provar que quando $(Q, \mathcal{T})$ é um anel topológico com $\mathcal{T}$ localmente limitada, $\mathcal{T}|_F$ uma V -topologia e existe uma vizinhança limitada da origem U tal que $U + U \subseteq U$, então se F possui elemento analítico nilpotente não nulo, a topologia $\mathcal{T}$ é gerada por um anel de valorização de Dubrovin maximal de Q .

Lema 4.21: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico, $\mathcal{T}$ localmente limitada, $\mathcal{T}|_F$ não discreta e U uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$ tal que $U + U \subseteq U$. Seja R a ordem bilateral de Q obtida na Proposição 4.20. Se $R \cap F$ é um anel de valorização maximal de F , então existe um anel de Dubrovin maximal B de Q tal que $B \cap F = R \cap F$ e $\mathcal{T}_B \sim \mathcal{T}$.

Demonstração:

Sendo $R \cap F$ um anel de valorização maximal de F , segue do Teorema da Extensão que existe um anel de valorização de Dubrovin B de Q tal que $B \cap F = R \cap F$, e por [13] da página 18 temos que B é maximal. Seja $n = [Q : F]$, então pelo Corolário da Proposição 2.14, existe uma F -base de Q , $\{a_1 = 1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq R^*$. Usando ([Gr], §5, Lemma 5.2) obtemos $x \in B$, $x \neq 0$ tal que $xB = Bx \subseteq a_1 J(R \cap F) + a_2 J(R \cap F) + \dots + a_n J(R \cap F) \subseteq R$. Afirmamos que x pode ser tomado em $R \cap F$, pois como $xB = Bx$ é ideal bilateral de B , temos pela Proposição 2.1 um elemento

$x' \in xB \cap F^*$, e $x'B = Bx' \subseteq xB$. Assim podemos trocar x por $x' \in R \cap F$. Seja $I = BR = \{\sum_{i=1}^m b_i r_i; b_i \in B, r_i \in R, m \in \mathbb{N}\}$. Note que I é um R -ideal a direita, pois I é um subgrupo aditivo de Q , I contém o elemento regular 1, $xi \subseteq R$ e $IR = I$. Se $b \in B$, então $bI \subseteq I$, implicando em $B \subseteq O_l(I) = \{q \in Q; qI \subseteq I\}$. Como $O_l(I)$ é subanel de Q que contém o anel de Dubrovin maximal B , temos que $O_l(I) = B$ ou $O_l(I) = Q$. No último caso, temos $Q \subseteq QI \subseteq I$, isto é, $Q = I$. Daí $Q = xQ = xI \subseteq R$ e $R = Q$. Isso não é possível, pois $R = Q$ implica $R \cap F = Q \cap F = F$ e $R \cap F$ é anel de valorização maximal de F . Logo $O_l(I) = B$. Por outro lado, é claro que $R \subseteq O_r(I) = \{q \in Q; Iq \subseteq I\}$ e chamamos $I^{-1} = \{q \in Q; Iq \subseteq O_l(I)\}$. Note que $I^{-1} = \{q \in Q; qI \subseteq O_r(I)\}$ e como $xi \subseteq R \subseteq O_r(I)$ temos $x \in I^{-1}$ e então $Ix \subseteq O_l(I) = B$. Uma vez que $R \subseteq I$ vem que $Rx \subseteq Ix \subseteq B$. Portanto obtivemos $x \in F^*$ tal que $Bx \subseteq R$ e $Rx \subseteq B$. Lembramos que $\mathcal{V}_B = \{yB; y \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_B$, e $\mathcal{V}_R = \{xR; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_R$. Como a operação soma é contínua em ambas topologias, para ver que estas topologias são equivalente usamos o Lema 2.10, e assim basta trabalhar com abertos dos sistemas de vizinhanças acima. Dado $zR \in \mathcal{T}_R$, tomamos $zx B \in \mathcal{T}_B$ e daí $zx B \subseteq zR$ mostrando que $\mathcal{T}_B \succ \mathcal{T}_R$. Analogamente vemos que $\mathcal{T}_R \succ \mathcal{T}_B$ e portanto $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}_B$ com B anel de valorização de Dubrovin maximal de Q .

Lema 4.22: Seja $(F, \mathcal{T})$ um corpo V -topológico. Se $\mathcal{T}$ possui uma vizinhança limitada U de 0 tal que $U + U \subseteq U$, então $\mathcal{T}$ não é gerada por um valor absoluto arquimediano.

Demonstração:

Suponha que $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}_+$ é um valor absoluto arquimediano que gera $\mathcal{T}$, isto é $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_\varphi$. Pelo Teorema 4.12, $F \subseteq \mathcal{C}$ e $\varphi(x) = |x|^s$ para algum $s \in (0, 1]$. Usando a Proposição 4.17, vemos que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_U$, onde $\mathcal{V}_U = \{xU; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_U$. Dado $B(0, \epsilon) \in \mathcal{T}_\varphi$, como $\mathcal{T}_U \succ \mathcal{T}_\varphi$ existe $x \in F^*$ tal que $xU \subseteq B(0, \epsilon)$. Da mesma forma, como xU contém um aberto B de $\mathcal{T}_U$ com $0 \in B$ e $\mathcal{T}_\varphi \succ \mathcal{T}_U$, existe $B(0, \delta) \in \mathcal{T}_\varphi$ tal que $B(0, \delta) \subseteq B \subseteq xU$. Seja $r \in B(0, \delta) \cap \mathbb{R}_+$ e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\sqrt[n]{\epsilon}}{r}$, daí $\varphi(nr) = |nr|^s = (nr)^s > \epsilon$. Tomando n cópias de $B(0, \delta)$, temos $B(0, \delta) + B(0, \delta) + \dots + B(0, \delta) \subseteq xU + xU + \dots + xU \subseteq x(U + U + \dots + U) \subseteq xU \subseteq B(0, \epsilon)$, e como $r \in B(0, \delta)$ vem que $nr \in B(0, \epsilon)$, que implica em $\varphi(nr) < \epsilon$. Esta contradição mostra que $\mathcal{T}$ não pode ser gerada por um valor absoluto arquimediano.

Teorema 4.23: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico, $\mathcal{T}$ localmente limitada e $\mathcal{T}|_F$ uma V -topologia. Se F possui um elemento analítico nilpotente não nulo, e existe uma vizinhança limitada U de 0 em $\mathcal{T}$ tal que $U+U \subseteq U$, então $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_B$ para algum anel de valorização de Dubrovin maximal B de Q .

Demonstração:

Pela Proposição 4.20, existe um anel de Goldie primo R , $R \neq Q$, tal que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R$ e R é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$. Para $A = R \cap F$ temos que $0 \in A$ e $A \in \mathcal{T}|_F$, pois $R \in \mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}$. Como R é limitado em $\mathcal{T}$, vem que A é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}|_F$. Agora aplicamos a Proposição 4.17 para ver que $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_A$ e $\mathcal{V}_A = \{xA; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_A$. Como F tem elemento analítico nilpotente não nulo, segue do Teorema 4.1 que $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_\varphi$ para algum valor absoluto não trivial φ , mas pelo Lema 4.22 φ é não arquimediato. Segue do Teorema 4.13(a) aplicado ao corpo V -topológico $(F, \mathcal{T}|_F)$, que $\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_{A_0}$ para algum anel de valorização maximal A_0 de F , e então $\mathcal{T}_A \sim \mathcal{T}_{A_0}$, donde existe $a \in F^*$ tal que $aA_0 \subseteq A$. Considerando o anel $A_0R = RA_0$ temos que $R \subseteq A_0R$ e $aA_0R \subseteq AR \subseteq RR = R$. De $R \subseteq A_0R$ tiramos que A_0R é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}$, pois R é aberto em $\mathcal{T}$ já que $\mathcal{T}_R \sim \mathcal{T}$. De $aA_0R \subseteq R$ tiramos que A_0R é limitado pois $A_0R \subseteq a^{-1}R$ com R limitado e $\{a^{-1}\}$ limitado. Aplicando a Proposição 4.17 para a vizinhança limitada A_0R de 0, concluímos que A_0R define um topologia $\mathcal{T}_{A_0R}$ em Q tal que $\mathcal{T}_{A_0R} \sim \mathcal{T}$, e $\mathcal{V}_{A_0R} = \{xA_0R; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_{A_0R}$. Pretendemos aplicar o Lema 4.21 ao anel A_0R , portanto vamos verificar que $A_0R \cap F$ é um anel de valorização maximal de F , e que A_0R é uma ordem bilateral de Q . Afirmamos que $A_0R \cap F = A_0$. De fato, claramente $A_0 \subseteq A_0R$ e como A_0R é subanel maximal de F vem que $A_0R \cap F = A_0$ ou $A_0R \cap F = F$. Se $A_0R \cap F = F$ temos $F \subseteq A_0R$ implicando em $RF \subseteq A_0R$, mas pelo Corolário do Lema 2.14 vemos que $Q \subseteq RF$, daí $Q = aQ \subseteq aRF \subseteq aA_0R \subseteq R$ que contadiz $R \neq Q$. Logo $A_0R \cap F = A_0$ e $A_0R \cap F$ é anel de valorização maximal de F . Para ver A_0R é ordem bilateral de Q , tomamos $x \in (A_0R)^*$ e então $ax \in R^*$, pois se $rax = 0$ com $r \in R$, temos $rx = 0$ e daí $x = 0$. Como R é uma ordem bilateral de Q , vem que $(ax)^{-1} \in Q$ e também $a^{-1} \in Q$, implicando que $x^{-1} \in Q$. Logo todo elemento regular de A_0R tem inverso em Q . Além disso, dado $q \in Q$, como R é ordem bilateral de Q escrevemos $q = cd^{-1}$ com $c \in R, d \in R^*$. Mas $R \subseteq A_0R$ implica em $c \in A_0R$. Notamos ainda que $d \in (A_0R)^*$, pois tomando $u \in A_0R$ tal que $ud = 0$, vem que $aud = 0$ e $au \in aA_0R \subseteq R$. Como $d \in R^*$ e $a \in F^*$, segue que $au = 0$ e então $u = 0$. Portanto A_0R é uma ordem bilateral de Q que satisfaz as hipóteses de Lema 4.21, e então existe um anel de Dubrovin maximal B de Q tal que $\mathcal{T}_B \sim \mathcal{T}_{A_0R} \sim \mathcal{T}$.

Para concluir a relação entre as topologias geradas por anéis de valorização de Dubrovin de Q , e as topologias localmente limitadas $\mathcal{T}$, com $\mathcal{T}|_F$ V -topologia, precisamos ainda estudar o caso onde F não tem elemento analítico nilpotente não nulo. Iniciamos com a seguinte Lema.

Lema 4.24: Seja R uma ordem bilateral em Q , que gera uma topologia $\mathcal{T}_R$ em Q com sistema fundamental de vizinhanças $\mathcal{V}_R = \{xR; x \in F^*\}$. Se $R \cap F$ é um anel de valorização de F que não possui ideal primo minimal, então $\mathcal{T}_R$ é gerada por um anel de valorização de Dubrovin de Q .

Demonstração:

Seja $n = [Q : F]$, então pelo Corolário da Proposição 2.14, obtemos uma F -base de Q , $\{q_1 = 1, q_2, \dots, q_n\} \subseteq R^*$. Para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, escrevendo $q_i q_j = \sum_{t=1}^n c_{ijt} q_t$, $c_{ijt} \in F$, vamos verificar inicialmente que c_{ijt} pode ser tomado em $A = R \cap F$. De fato, $c_{ijt} \in F$ e A é uma ordem bilateral de F , assim $c_{ijt} = (a_{ijt})(b_{ijt})^{-1}$ com $a_{ijt}, b_{ijt} \in A$. Tome $c = \prod_{i,j,t=1}^n b_{ijt}$, então $c \in F^*$ e $cc_{ijt} \in A$. Agora formamos uma nova base $\{p_1 = 1, p_2, \dots, p_n\}$ onde $p_r = cq_r$ para $r \in \{2, 3, \dots, n\}$, e como $q_i \in R$, $c \in A \subseteq R$, vem que $\{p_1 = 1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq R^*$. Quando $i = j = 1$ temos $p_i p_j = 1 \cdot p_j$ com $1 \in A$, e quando $i, j \neq 1$ temos $p_i p_j = c^2 q_i q_j = c^2 \sum_{t=1}^n c_{ijt} q_t = c^2 c_{ij1} 1 + \sum_{t=2}^n cc_{ijt}(cq_t) = c^2 c_{ij1} p_1 + \sum_{t=2}^n cc_{ijt} p_t$ que é uma combinação na nova base com coeficientes em A . Portanto trocando de base, caso seja necessário, podemos assumir que $q_i q_j = \sum_{t=1}^n c_{ijt} q_t$ com $c_{ijt} \in A$. Como Q é uma F -álgebra central simples, segue de ([A], §3, Theorem 12) que a matriz $(q_i q_j)_{ij}$ é inversível em $M_n(Q)$. Se $(b_{ij})_{ij} = (q_i q_j)_{ij}^{-1} \in M_n(Q)$, escrevemos $b_{ij} = \sum_{t=1}^n d_{ijt} q_t$ com $d_{ijt} \in F$ e $d_{ijt} = m_{ijt}(n_{ijt})^{-1}$, $m_{ijt}, n_{ijt} \in A$. Por hipótese, A não possui ideal primo minimal, assim podemos escolher um ideal primo P de A tal que $n_{ijt} \notin P$. Denotamos por $A_P = \{ab^{-1}; a, b \in A, b \notin P\}$, isto é, a localização do anel A no sistema multiplicativo $(A - P)$, vemos que $d_{ijt} \in A_P$. Chame $S = A_P q_1 + A_P q_2 + \dots + A_P q_n$, que é um subanel de Q , também $q_i q_j \in A_P q_1 + A_P q_2 + \dots + A_P q_n \subseteq S$ pela escolha da base, e $b_{ij} = \sum_{t=1}^n d_{ijt} q_t \in A_P q_1 + A_P q_2 + \dots + A_P q_n = S$. Como $(q_i q_j)_{ij} \in M_n(S)$ e $(q_i q_j)_{ij}^{-1} \in M_n(S)$ segue de ([A], §3, Theorem 12) que S é uma álgebra de Azumaya sobre A_P . Agora usamos ([D2], §2, Proposition 1) e concluimos que S é um anel de Dubrovin de Q . Além disso, em ([A], §3, Theorem 13) vemos que A_P é o centro de S , e existe uma correspondência bijetiva entre os ideais de A_P e os ideais bilaterais de S , dada por $I \mapsto IS$ e $I' \mapsto I' \cap A$ quando I é um ideal de A_P , e I' é um ideal bilateral de S . Claramente tal correspondência preserva a inclusão, e então como PA_P é ideal maximal de A_P , temos que $PA_P S$ é ideal bilateral maximal de S . Nosso objetivo neste momento é verificar que $J(S) = PS$. Para isso, provaremos primeiro que $PA_P = P$. Uma inclusão é imediata, e para a outra tomamos $p \in P$

e $ab^{-1} \in A_P$ com $a, b \in A$ e $b \notin P$. Note que se $pab^{-1} \notin A$ então $(pa)^{-1}b \in A$ implicando em $b \in Apa \subseteq P$, que é absurdo. Assim $pab^{-1} = a' \in A$ e como $pa \in P$ temos $a'b \in P$, e de $b \notin P$ concluímos que $a' \in A$ e portanto $PA_P = P$. Sendo S um anel de Dubrovin de Q , temos pela Proposição 1.7 que $J(S)$ é o único ideal bilateral maximal de S , mas verificamos que PA_P é ideal bilateral de S e $PA_P = P$, de onde $J(S) = PS$. Nosso próximo objetivo é provar que $S = (Aq_1 + Aq_2 + \cdots + Aq_n)_P$. Uma inclusão é óbvia, e na outra direção tomando $u \in S$, $u = u_1q_1 + u_2q_2 + \cdots + u_nq_n$ com $u_i = x_iy_i^{-1}$, $x_i \in A$ e $y_i \in (A - P)$, escolhamos $t = y_1y_2 \cdots y_n \in (A - P)$, daí $t = y_ia_i$ para algum $a_i \in A$ e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. De $y_i^{-1} = a_it^{-1}$ temos $u = x_1a_1t^{-1}q_1 + x_2a_2t^{-1}q_2 + \cdots + x_na_nt^{-1}q_n = (x_1a_1q_1 + x_2a_2q_2 + \cdots + x_na_nq_n)t^{-1}$ com $x_ia_i \in A$ e $t \in (A - P)$, isto é, $u \in (Aq_1 + Aq_2 + \cdots + Aq_n)_P$ e portanto $S = (Aq_1 + Aq_2 + \cdots + Aq_n)_P$. Agora temos $S = (Aq_1 + Aq_2 + \cdots + Aq_n)_P \subseteq R_P$ e como S é anel de Dubrovin de Q , segue da Proposição 2.12 que R_P também é anel de Dubrovin de Q . De $R \subseteq R_P$ temos $\mathcal{T}_R \succ \mathcal{T}_{R_P}$ já que $\mathcal{V}_{R_P} = \{xR_P; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\mathcal{T}_{R_P}$. Por outro lado, de [8] tiramos que $J(R_P) \subseteq J(S) = PS = PA_Pq_1 + PA_Pq_2 + \cdots + PA_Pq_n \subseteq R$. Sendo R_P anel de Dubrovin e $J(R_P)$ um R_P -ideal, segue da Proposição 2.1 que existe $x \in J(R_P) \cap F^*$. Daí $xR_P \subseteq J(R_P) \subseteq R$ e $\mathcal{T}_{R_P} \succ \mathcal{T}_R$. Logo $\mathcal{T}_{R_P} \sim \mathcal{T}_R$ e R_P é o anel de Dubrovin procurado.

Lema 4.25: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico onde $\mathcal{T}$ é localmente limitada, $\mathcal{T}|_F$ é uma V -topologia e F não possui elemento analítico nilpotente não nulo. Então existe uma ordem bilateral R de Q tal que:

(a) $A = R \cap F$ define uma topologia $\mathcal{T}_A$ em Q , com sistema fundamental de vizinhanças para origem $\{xA; x \in F^*\}$, $\mathcal{T}_A \sim \mathcal{T}|_F$ e existe $e \in A \cap F^*$ tal que $e(A - F)^{-1} \subseteq A$.

(b) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} e^{-n}R$ é um subanel próprio de Q , e $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_S$ onde $\{xS; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\mathcal{T}_S$.

Demonstração:

(a) Como F não tem elemento analítico nilpotente não nulo, vem da Proposição 4.19, que existe uma vizinhança limitada da origem U tal que $U \neq Q$ e $U + U \subseteq U$. Pela Proposição 4.20 existe uma ordem bilateral R de Q tal que R é uma vizinhança limitada da origem em $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R$ com $\mathcal{V}_R = \{xR; x \in F^*\}$ um sistema fundamental de vizinhanças da origem em $\mathcal{T}_R$. Assim $A = R \cap F$ é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}|_F$ e aplicamos a Proposição 4.17, para ver que $\mathcal{T}_A \sim \mathcal{T}|_F$ onde $\{xA; x \in F^*\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $\mathcal{T}_A$. Como $\mathcal{T}|_F$ é uma V -topologia e $A \in \mathcal{T}|_F$ temos que $(F - A)^{-1}$ é limitado,

e pelo Lema 4.15 existe $e \in F^*$ tal que $e(F - A)^{-1} \subseteq A$. Sendo A uma ordem em F podemos assumir que $e \in A$, pois $e = ab^{-1}$ com $a, b \in A$ e $ab^{-1}(F - A)^{-1} \subseteq A$ implica $a(F - A)^{-1} \subseteq bA \subseteq A$ e podemos trocar e por a .

(b) Escolhendo $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} e^{-n}R$ e observando que $R \subseteq Re^{-1} \subseteq Re^{-2} \subseteq \dots$, concluímos que S é um subanel de Q com $R \subseteq S$. Segue que S é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{T}$. Note que $e \in \mathcal{O} = \{x \in Q; xR \subseteq R\}$ e $e \in F^*$, então aplicando o Lema 4.18 temos que $\{e^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado. Como $S \subseteq R \cdot \{e^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ vemos que S é uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}$, e então pela Proposição 4.17, sabemos que $S \neq Q$ e $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_S$ com $\{xS; x \in F^*\}$ sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $\mathcal{T}_S$.

Teorema 4.26: Sejam $(Q, \mathcal{T})$ um anel topológico onde $\mathcal{T}$ é localmente limitada, $\mathcal{T}|_F$ é uma V -topologia e F não possui elemento analítico nilpotente não nulo. Então existe um anel de Dubrovin B de Q tal que $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_B$.

Demonstração:

Usando os resultados obtidos no Lema 4.25, provaremos que $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} e^{-n}R$ é uma ordem bilateral de Q para a qual $V = S \cap F$ é um anel de valorização, que não possui ideal primo minimal. Dado $q \in Q$ escrevemos $q = ab^{-1}$ com $a \in R$ e $b \in R^*$. Note que $b \in S^*$ pois se $s = e^{-n}r \in S$ com $r \in R$ e $bs = 0$, então $be^{-n}r = 0$ implicando $r = 0$ e daí $s = 0$. Assim $q = ab^{-1}$ com $a \in S$ e $b \in S^*$. Falta verificar que para $s \in S^*$ existe $s^{-1} \in Q$, mas $s = re^{-n}$ e $r \in R^*$, pois se $t \in R$ e $tr = 0$ então $tre^{-n} = ts = 0$ implicando $t = 0$. Agora de $r \in R^*$ obtemos $r^{-1} \in Q$, daí $s^{-1} = r^{-1}e^n \in Q$ e S é uma ordem bilateral em Q . Chame $V = S \cap F$, se $V = F$ então $F \subseteq S$, mas pelo Corolário da Proposição 2.14 temos $Q = SF$ e daí $Q = S$ que é uma contradição, pois S é subanel próprio de Q pelo Lema 4.25. Logo V é um subanel próprio de F , e $V = S \cap F = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Re^{-n}) \cap F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Re^{-n} \cap F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (R \cap F)e^{-n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Ae^{-n}$. Para ver que V é um anel de valorização de F , tomamos $y \in (F - A)$ e então $ey^{-1} \in A$ implicando em $y^{-1} \in Ae^{-1} \subseteq V$. Falta verificar que V não possui ideal primo minimal, para isso mostraremos inicialmente que $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}_A$. Como $A \subseteq V$ já temos que $\mathcal{T}_A \succ \mathcal{T}_V$, e sendo A uma vizinhança limitada de 0 em $\mathcal{T}|_F$, fazemos $\mathcal{O} = \{x \in F; xA \subseteq A\}$ para aplicar o Lema 4.18, e obter $x \in F^*$ tal que $e^n \notin x\mathcal{O}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $A \subseteq \mathcal{O}$ e daí $e^n \notin xA$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $e^{-n} \in (F - xA)^{-1}$ que é limitado. Agora o Lema 4.15 garante a existência de $t \in F^*$ tal que $t(F - xA)^{-1} \subseteq A$. Escrevendo $t = t_1t_2^{-1}$ com $t_1, t_2 \in A$ temos $t_1(F - xA)^{-1} \subseteq t_2A \subseteq A$ e $t_1e^{-n} \in A$. Dado $v \in V$, escrevemos $v = ae^{-n}$ com $a \in A$ e então $t_1v = at_1e^{-n} \in A$, provando que $t_1V \subseteq A$ e $\mathcal{T}_V \succ \mathcal{T}_A$. Logo

$\mathcal{T}|_F \sim \mathcal{T}_A \sim \mathcal{T}_V$, isto é, $\mathcal{T}|_F$ é gerado pelo anel de valorização V . Suponha que exista um anel de valorização maximal V' de F tal que $V \subseteq V'$, então pela Proposição 2.12 temos que $\mathcal{T}_V \sim \mathcal{T}_{V'}$ e daí $\mathcal{T}|_F$ é gerado por um anel de valorização maximal, mas do Corolário da Proposição 4.7 vem que $\mathcal{T}|_F$ é equivalente a topologia gerada por um valor absoluto, e finalmente pelo Lema 4.8 temos que F possui um elemento analítico nilpotente não nulo. Isso contradiz nossa hipótese, logo V não está contido em nenhum anel de valorização maximal, que equivale, conforme ([E], pg 43), a V não possuir ideal primo minimal. Portanto S é ordem bilateral de Q , $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_S$ e $V = S \cap F$ é um anel de valorização de F que não possui ideal primo minimal, e aplicamos o Lema 4.24 para obter um anel de valorização de Dubrovin B de Q , tal que $\mathcal{T}_B \sim \mathcal{T}_S \sim \mathcal{T}$.

Combinando os resultados obtidos, temos que para o anel artiniano simples topológico $(Q, \mathcal{T})$ são equivalentes:

- (i) $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}_R$ para algum anel de valorização de Dubrovin R de Q .
- (ii) $\mathcal{T}|_F$ é uma V -topologia, $\mathcal{T}$ é localmente limitada e existe uma vizinhança limitada U de 0 em $\mathcal{T}$ tal que $U + U \subseteq U$ e $U \neq Q$.

Observamos ainda que o anel de Dubrovin obtido acima é maximal, se e somente se, F tem elemento analítico nilpotente não nulo. De fato, uma direção é dada pelo Teorema 4.23. Por outro lado, se R é maximal então $V = R \cap F$ é maximal, e segue do Corolário da Proposição 4.7 e do Lema 4.8 que F tem elemento analítico nilpotente não nulo.

Bibliografia

- [A] AZUMAYA, G. - On Maximally Central Algebras, Nagoya Math. J. , 2 (1951), 119-150.
- [B] BOURBAKI, N. - Algèbre Commutative, Chapitre 6, Hermann, Paris, 1964.
- [Br] BRUNGS, H. H. - Noncommutative Valuations Rings, Persp. Ring Theory, 233 (1988), 105-115.
- [BG1] BRUNGS, H. H. and GRÄTER, J. - Valuation Rings in Finite-Dimensional Division Algebras, J. Algebra, 120 (1989), 90-99.
- [BG2] BRUNGS, H. H. and GRÄTER, J. - Extensions of Valuation Rings in Central Simple Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. , 317 (1990), 287-302.
- [C] COHN, P. M. - On Extending Valuations in Division Algebras, Studia Sci. Math. Hungar. , 16 (1981), 65-70.
- [D1] DUBROVIN, N. I. - Noncommutative Valuation Rings, Trudy Moskov Mat. Obshch. , 45 (1982), 265-289. English Translation: Moscow Math. Soc. , 45 (1984), 273-287.
- [D2] DUBROVIN, N. I. - Noncommutative Valuation Rings in Simple Finite-Dimensional Algebras Over a Field, Mat. Sbornik, 123 (1984), 496-509. English Translation: Math. USSR Sbornik, 51 (1985), 493-505.

- [E] ENDLER, O. - Valuation Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [F] FAITH, C. - Algebra I: Rings, Modules and Categories, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [G] GOLDIE, A. W. - The Structure of Prime Rings under Ascending Chain Conditions, Proc. London Math. Soc. , 8 (1958), 589-608.
- [Go] GOODEARL, K. R. - Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules, Marcel Dekker, New York, 1976.
- [Gr] GRÄTER, J. - The Defektsatz for Central Simple Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. , 330 (1992), 823-843.
- [KD] KOWALSKI, H. J. und DÜRBAUM, H. - Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien, J. Reine Angew. Math. , 191 (1953), 135-152.
- [L] LIMA, E. L. - Elementos de Topologia Geral, Ao Livro Técnico S. A. , Rio de Janeiro, 1970.
- [M] MATHIAK, K. - Valuations of Skew Fields and Projective Hjelmslev Spaces, Lectures Notes in Math. , Nº 1175, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Mi] MIORIM, M. A. - Caracterização Topológica de Corpos com Valorização, Dissertação de Mestrado - Unicamp, 1980.
- [Mo] MORANDI, P. J. - Value Functions on Central Simple Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. , 315 (1989), 606-622.
- [MW] MORANDI, P. J. and WADSWORTH, A. R. - Integral Dubrovin Valuation Rings, Trans. Amer. Math. Soc. , 315 (1989), 623-640.
- [N] NACHBIN, L. - On Strictly Minimal Topological Division Rings, Bull. Amer. Math. Soc. , 55 (1949), 1128-1136.
- [P] POSNER, E. C. - Prime Rings Satisfying a Polynomial Identity, Proc. Amer. Math. Soc. , 11 (1960), 180-183.

- [PZ] PRESTEL, A. and ZIEGLER, M. - Model Theoretic Methods in the Theory of Topological Fields, *J. Reine Angew. Math.* , 299/300 (1978), 318-341.
- [Pb] PROBERT, G. A. - Local Rings whose Maximal Ideal is Principal as a Right Ideal, *Proc. London Math. Soc.* , 19 (1969), 403-420.
- [Pc] PROCESI, C. - Rings with Polynomial Identities, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [R] REINER, I. - Maximal Orders, Academic Press, London, 1975.
- [Ro] ROWEN, L. H. - Polynomial Identities in Ring Theory, Academic Press, New York, 1980.
- [S] SHAFAREVITCH, I. - On the Normalizability of Topological Fields, *C.R. Acad. Sci. URSS*, 40 (1943), 133-135.
- [S1] SCHILLING, O. F. G. - Noncommutative Valuations, *Bull. Amer. Math. Soc.* , 51 (1945), 297-304.
- [S2] SCHILLING, O. F. G. - The Theory of Valuations, *Math. Surveys and Monographs*, N^o 4, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. , 1950.
- [W1] WADSWORTH, A. R. - Dubrovin Valuation Rings, *Persp. Ring Theory*, 233 (1988), 359-374.
- [W2] WADSWORTH, A. R. - Dubrovin Valuation Rings and Henselization, *Math. Ann.* , 283 (1989), 301-328.
- [Wi] WISLAW, W. - Topological Fields, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 1982.