# TÓPICOS DE APROXIMAÇÃO

MÁRCIA SAYURI KASHIMOTO

Orientador: Prof. Dr. JOÃO BOSCO PROLLA

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutora em Matemática Pura.

**IMECC –UNICAMP**
**Campinas – Estado de São Paulo**
**Junho - 1998**

# TÓPICOS DE APROXIMAÇÃO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Márcia Sayuri Kashimoto e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de junho de 1998

João Bosco Prolla

Prof. Dr:. João Bosco Prolla
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTORA em Matemática Pura.

**Tese de Doutorado defendida e aprovada em 23 de junho de 1998**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

João Bosco Prolla

**Prof (a). Dr (a). JOÃO BOSCO PROLLA**

Ary O. Chiacchio

**Prof (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO**

**Prof (a). Dr (a). ANTONIO ROBERTO DA SILVA**

**Prof (a). Dr (a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI**

Luiza Amália de Moraes

**Prof (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES**

Aos

meus pais

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho. Em especial:

- Ao Prof. João Bosco Prolla pela orientação, paciência e dedicação.
- Aos professores Mário Matos, Mujica e Raimundo pelas valiosas discussões.
- Aos membros da banca examinadora, os professores Antônio Roberto, Ari Chiacchio, Luiza Amália e Sueli Roversi, pelas várias sugestões que em muito contribuíram para a redação final da tese.
- Ao Edson Agustini pelas dicas na digitação.
- Ao CNPq e FAEP pelo suporte financeiro.
- A minha família pelo apoio e estímulo constante.
- Aos amigos Marcelo, Sônia, Maria Teresa, Marisa e Raquel por tornarem este período mais ameno.
- Ao "pessoal" do Predinho e da Unicamp pelo companheirismo e momentos de descontração.

# ÍNDICE

# RESUMO

Nesta tese, são abordados três problemas em Teoria da Aproximação, os quais, estão distribuídos em três capítulos. O primeiro capítulo trata da densidade uniforme de determinados subconjuntos do espaço das funções contínuas definidas num grupo de Hausdorff compacto e com valores num espaço de Banach. A aproximação é feita utilizando-se a convolução. O segundo capítulo aborda uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para espaços ponderados de funções vetoriais contínuas num espaço de Hausdorff completamente regular. A prova é baseada na construção de uma partição da unidade conveniente. Como consequência, obtemos uma caracterização do fecho de módulos e subconjuntos dos espaços ponderados. O terceiro capítulo trata da localização da distância de um portador semicontínuo superiormente e nulo no infinito a subconjuntos do espaço das funções vetoriais contínuas e nulas no infinito, definidas num espaço localmente compacto. Obtemos, como consequência, resultados aplicáveis à teoria de melhor aproximação simultânea.

# ABSTRACT

In this thesis we study three problems about Approximation Theory. These problems are distributed in three chapters. The first chapter treats uniform density of determinated subsets of space of vector-valued continuous functions defined in a compact Hausdorff group. The approximation is done through convolution. The second chapter treats a Stone-Weierstrass Theorem version for weighted spaces of vector-valued continuous functions defined in a completely regular Hausdorff space. The proof is based in the construction of a convenient partition of unit. As a result, we get a characterization of the closure of modules and subsets of weighted spaces. The third chapter treats a localization formula for the distance of an upper semicontinuous carrier that vanishes at infinity from a subset of the space of all vector-valued continuous functions that vanish at infinity in a locally compact Hausdorff space. As an application, some results in best simultaneous approximation are obtained.

# INTRODUÇÃO

O objetivo desta tese consiste em estudar três problemas em Teoria da Aproximação :

(1) a densidade uniforme de determinados subconjuntos do espaço das funções vetoriais contínuas num grupo de Hausdorff compacto;

(2) uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para módulos e subconjuntos do espaço ponderado;

(3) uma fórmula de localização da distância de determinados portadores a subconjuntos do espaço das funções nulas no infinito.

Distribuímos estes problemas em três capítulos.

No Capítulo 1, estudamos a densidade uniforme de determinados subconjuntos de $C(G;E)$, o espaço das funções contínuas definidas num grupo de Hausdorff compacto $G$ e com valores num espaço de Banach $E$. Utilizamos a técnica de aproximação por convolução. A motivação se deve ao segundo teorema de aproximação de Weierstrass (Natanson [14]): "*Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua $2\pi$-periódica, então $f$ é uniformemente aproximada por um polinômio trigonométrico*". Uma das demonstrações deste resultado foi feita por De La Vallée Poussin em 1908 [5], através da convolução da função dada com um 'núcleo' conveniente. Observamos que, provar esse resultado é equivalente a provar que se $F : \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $F$ pode ser uniformemente aproximada por uma 'identificação' de um polinômio trigonométrico. Daí, surgiu a seguinte questão: Se $f$ for uma função vetorial contínua num grupo de Hausdorff compacto $G$, será que podemos aproximá-la uniformemente, por elementos de algum subconjunto das funções vetoriais contínuas em $G$, que tenha propriedades semelhantes às do conjunto dos polinômios trigonométricos? Assim, obtemos um primeiro resultado para álgebras polinomiais invariantes por translações e, posteriormente, conseguimos uma generalização para determinados subconjuntos de $C(G;E)$.

Sejam $V$ um conjunto de pesos, $X$ um espaço de Hausdorff completamente regular e $E$ um espaço normado.O espaço ponderado $CV_\infty(X;E)$ é o espaço vetorial das funções contínuas, $f : X \to E$, tais que as funções $vf$ são nulas no infinito, para cada $v \in V$, munido da topologia determinada pela família de seminormas $f \to \sup\{v(x)\|f(x)\|;\, x \in X\}$. No Capítulo 2, abordamos uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para subconjuntos e módulos de $CV_\infty(X;E)$. Na verdade, trata-se de generalizações de dois resultados de Prolla [18] (Teorema 1, Cap. 2 e Teorema 1, Cap. 4): os Teoremas de Stone-Weierstrass para módulos e subconjuntos do espaço das funções contínuas num espaço de Hausdorff compacto e com imagens num espaço normado. Prolla usou argumentos de Jewett [9] baseando-se sempre na compacidade do espaço. O fato da restrição de $vf$ a qualquer fechado de $X$ assumir máximo foi o que essencialmente permitiu a obtenção das generalizações.

Sejam $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto e $E$ um espaço normado. $C_0(X;E)$ denota o espaço das funções contínuas de $X$ em $E$, nulas no infinito. No Capítulo 3, apresentamos uma fórmula de localização para a distância de determinados portadores, funções definidas em $X$ e com valores na coleção de subconjuntos limitados de $E$, a subconjuntos não vazios de $C_0(X;E)$. Utilizamos a técnica de Ransford [19], que é baseada no Lema de Zorn, juntamente com argumentos de Machado [10] e Prolla [18]. A idéia foi inspirada na demonstração de um resultado de Prolla (veja [18], Teorema 1, Cap. 6). Os primeiros resultados nesta linha foram obtidos em 1982, por Machado e Prolla [17], para o caso de módulos de $C_0(X;E)$. A principal ferramenta utilizada por eles foi um teorema sobre partição da unidade construída através de funções de uma subálgebra fechada de $C_b(X;\mathbb{K})$, a álgebra das funções contínuas limitadas em $X$ com valores em $\mathbb{K}$ (o corpo dos reais ou complexos). Esse teorema sobre partições encontra-se em Nachbin (veja [13], Lema 1) e é baseado no teorema clássico de Stone-Weierstrass. Um dos interesses em estudar portadores vem, em parte, da aplicação na teoria de melhor aproximação simultânea.

# Capítulo 1

# Aproximação de funções vetoriais contínuas num grupo compacto através da convolução

## 1.1 Introdução

Este capítulo consiste no estudo da densidade uniforme de determinados subconjuntos das funções vetoriais contínuas num grupo de Hausdorff compacto. A técnica utilizada foi a aproximação por convolução. Para definirmos a convolução, usamos o fato de que todo grupo de Hausdorff compacto admite uma medida de Borel regular, invariante por translações.

## 1.2 Preliminares

Esta seção contém notações, definições e alguns resultados que serão usados posteriormente.

**1.2.1. Definição.** Um *grupo topológico* $G$ é um espaço topológico que tem uma estrutura de grupo (com a operação $(x, y) \to xy$) tal que a aplicação de $G \times G$ (munido da topologia produto) em $G$, definida por $(x, y) \to xy^{-1}$ é contínua .

Neste capítulo, $G$ sempre denotará um grupo topológico, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o corpo dos reais ou complexos e $E$, um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. $\mathbb{N}$

e $\mathbb{Z}$ representam o conjunto dos números naturais e dos números inteiros, respectivamente.

Denotamos o elemento *identidade de* $G$ por $e$, e se $B \subset G$ e $a \in G$ definimos :

$$\begin{aligned} aB &= \{ax \,;\, x \in B\} \\ Ba &= \{xa \,;\, x \in B\} \\ B^{-1} &= \{x^{-1};\, x \in B\} \end{aligned}$$

Dizemos que $B \subset G$ é simétrico se $B = B^{-1}$.

Para cada $a \in G$, as aplicações $s \to as$ e $s \to sa$ são homeomorfismos de $G$ em $G$. Logo, se $V$ é uma vizinhança da *identidade* $e \in G$, então os conjuntos $Va$ e $aV$ são vizinhanças de $a$. A aplicação inversa $s \to s^{-1}$ também é um homeomorfismo de $G$ em $G$. Assim $V$ é uma vizinhança de $e$ se, e somente se, $V^{-1}$ é uma vizinhança de $e$. As vizinhanças simétricas de $e$ formam uma base de vizinhanças de $e$, ou seja, se $U$ for uma vizinhança qualquer de $e$, existe uma vizinhança simétrica $V$ de $e$ tal que $V \subset U$. Ressaltamos que durante todo o capítulo, quando falarmos em vizinhança, estaremos considerando esta vizinhança um aberto de $G$.

Dizemos que $G$ é um grupo compacto se $G$ é compacto como espaço topológico. Usaremos uma convenção de terminologia análoga para os demais conceitos topológicos, tais como: grupo localmente compacto, grupo de Hausdorff. Alguns exemplos mais conhecidos de grupos compactos são os seguintes:

(a) $S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ com a topologia herdada de $\mathbb{C}$ e a multìplicação como operação do grupo;

(b) $O(n)$ o conjunto das matrizes ortogonais $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, com a operação de multiplicação de matrizes e com a topologia herdada de $\mathbb{R}^{n^2}$(grupo ortogonal);

(c) $SO(n) = \{A \in O(n)\,; \det A = 1\}$ com a topologia induzida de $O(n)$ e com a mesma operação de $O(n)$;

(d) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ com a topologia quociente e a operação natúral de soma. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é isomorfo e homeomorfo a $S^1$;

(e) Se $G$ é um grupo compacto, então $G \times G$ com a topologia produto e a operação dada por$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$ é um grupo compacto.

**1.2.2. Definição.** Sejam $G$ um grupo topológico e $f : G \to E$. Para cada $a \in G$ definimos $f_a$: $G \to E$, ${}_af : G \to E$ e $\overset{\vee}{f}$: $G \to E$ por $f_a(s) = f(sa)$, ${}_af(s) = f(as)$ e $\overset{\vee}{f}(s) = f(s^{-1})$ para todo $s \in G$. As funções $f_a$ e ${}_af$ são chamadas de *translação à direita de* $f$ *por* $a$ e *translação à esquerda de* $f$

*por a*, respectivamente.

$C(G; E)$ denota o conjunto das funções contínuas de $G$ em $E$. No caso em que $G$ for compacto, consideraremos em $C(G; E)$ a topologia da convergência uniforme. O suporte de $f \in C(G; E)$ é o fecho do conjunto $\{x \in G; f(x) \neq 0\}$.

Uma ferramenta muito utilizada em teoria de aproximação é a partição da unidade. Para os nossos propósitos, consideraremos somente o caso finito.

**1.2.3. Definição.** Seja $X$ um espaço topológico. Uma *partição contínua da unidade em* $X$ é uma família de funções contínuas

$$f_i : X \to [0,1] \ ; i = 1, ..., n$$

tal que $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Anunciaremos a seguir um resultado de Dieudonné e Bochner que garante a existência de uma partição da unidade em todo espaço normal, em particular, nos espaços de Hausdorff compactos.

**1.2.4. Proposição.** *Se* $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *é uma cobertura aberta de um espaço normal* $X$, *então existe uma partição da unidade* $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *tal que* $supp f_i \subset U_i$ *para* $i = 1, ..., n$.

**Prova.**

Nachbin [12], Teorema 4, p. 41. ■

**1.2.5. Observação.** Analisando a demonstração desta Proposição, nota-se que para cada $i$, $f_i \neq 0$. Logo, supp$f_i$ é um 'conjunto não desprezível', isto é, sempre contém um aberto de $X$.

Dado um grupo topológico $G$, mesmo não metrizável, faz sentido falar de continuidade uniforme de uma função $f : G \to E$, devido à estrutura do grupo topológico. A definição seguinte encontra-se em Dinculeanu [6].

**1.2.6. Definição.** Dizemos que $f : G \to E$ é *uniformemente contínua à esquerda* (respectivamente à *direita*) se existe uma vizinhança $V$ da identidade $e \in G$ tal que $s \in V$ implica $\|f(sx) - f(x)\| < \varepsilon$ (respectivamente $\|f(xs) - f(x)\| < \varepsilon$) para todo $x \in G$, ou equivalentemente, tal que $xy^{-1} \in V$ (respectivamente $y^{-1}x \in V$) implica $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ para todo $x, y \in G$.

**1.2.7. Observação.** Esta noção de continuidade uniforme coincide com a usual no caso em que $G$ é um espaço vetorial normado com a operação soma.

**1.2.8. Proposição.** *Seja $G$ um grupo de Hausdorff compacto. Se $f \in C(G;E)$, então $f$ é uniformemente contínua à esquerda e à direita .*

**Prova :**

Análoga à de Nachbin [12], Proposição 1, p. 63. ∎

**1.2.9. Definição.** Um subconjunto $\mathcal{F} \subset C(G;E)$ é *uniformemente equicontínuo à esquerda* ( respectivamente à *direita* ) se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V$ de $e$ tal que, para quaisquer $x, y \in G$ em que $xy^{-1} \in V$ ( respectivamente $y^{-1}x \in V$ ), temos $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

O fato crucial a respeito desta definição é que a vizinhança $V$ da identidade $e$ obtida a partir do $\varepsilon$ dado é a mesma para todas as funções $f$ de $\mathcal{F}$.

**1.2.10. Proposição.** *Seja $G$ um grupo de Hausdorff compacto. Se $f \in C(G;E)$, então $\{{}_af\}_{a\in G}$ e $\{f_a\}_{a\in G}$ são, respectivamente, uniformemente equicontínuo à direita e uniformemente equicontínuo à esquerda.*

**Prova :**

Como $f \in C(G;E)$, segue da Proposição 1.2.8 que $f$ é uniformemente contínua à direita, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V$ de $e$ tal que para quaisquer $x, y \in G$ em que $y^{-1}x \in V$ temos $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Agora, como $(ay)^{-1}ax = y^{-1}a^{-1}ax = y^{-1}x$ , temos $\|{}_af(x) - {}_af(y)\| <$ $< \varepsilon$, para todo $a \in G$. Portanto $\{{}_af\}_{a\in G}$ é uniformemente equicontínuo à direita. Analogamente, prova-se que $\{f_a\}_{a\in G}$ é uniformemente equicontínuo à esquerda. ∎

**1.2.11. Proposição.** *Seja $G$ um grupo de Hausdorff compacto. Se $f \in C(G;E)$ e $\psi \in C(G;\mathbb{K})$, então $\left\{{}_a\psi \overset{\vee}{f}\right\}_{a\in G}$ é uniformemente equicontínuo à direita.*

**Prova :**

Segue da proposição anterior que $\{{}_a\psi\}_{a\in G}$ é uniformemente equicontínuo à direita. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_1$ de $e$ tal que $y^{-1}x \in V_1$ implica

$$\|{}_a\psi(x) - {}_a\psi(y)\| < \frac{\varepsilon}{2(\|\psi\| + \|f\| + 1)}$$

para todo $a \in G$. Por outro lado, $\overset{\vee}{f} : G \to E$ é uniformemente contínua à direita, logo existe uma vizinhança $V_2$ de $e$ tal que $y^{-1}x \in V_2$ implica

$$\left|\overset{\vee}{f}(x) - \overset{\vee}{f}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2\left(\|\psi\| + \|f\| + 1\right)}.$$

Assim para $y^{-1}x \in V_1 \cap V_2$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left\|\left({}_a\psi \overset{\vee}{f}\right)(x) - \left({}_a\psi \overset{\vee}{f}\right)(y)\right\| &\leq \left\|{}_a\psi(x)\overset{\vee}{f}(x) -_a \psi(y)\overset{\vee}{f}(x)\right\| + \\
&+ \left\|{}_a\psi(y)\overset{\vee}{f}(x) -_a \psi(y)\overset{\vee}{f}(y)\right\| \leq \\
&\leq \left\|\overset{\vee}{f}(x)\right\| \left|{}_a\psi(x) -_a \psi(y)\right| + \\
&+ \left|{}_a\psi(y)\right| \left\|\overset{\vee}{f}(x) - \overset{\vee}{f}(y)\right\| \leq \\
&\leq \varepsilon \frac{\left(\|f\| + \|\psi\|\right)}{\left(\|\psi\| + \|f\| + 1\right)} < \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $a \in G$. Portanto $\left\{{}_a\psi \overset{\vee}{f}\right\}_{a \in G}$ é uniformemente equicontínuo à direita. ■

**1.2.12. Proposição. (Dini).** *Se uma sequência de funções reais contínuas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas sobre um compacto $X$, converge simplesmente para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ e, além disso, se $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona para cada $x \in X$, então a convergência é uniforme em $X$.*

**Prova.**

Encontra-se em qualquer livro clássico de topologia. ■

A medida de Lebesgue na reta $\mathbb{R}$ e no $\mathbb{R}^n$ é caracterizada pela invariância por translações, em função de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ serem grupos aditivos topológicos. O resultado abaixo mostra que em todo grupo localmente compacto, há uma medida invariante por translações que é uma generalização natural da medida de Lebesgue clássica.

**1.2.13. Proposição.** *Se $G$ é um grupo de Hausdorff localmente compacto, então existe uma medida de Borel regular positiva $\mu$ não nula em $G$ que* *é invariante por translações à esquerda, isto é, $\mu(xH) = \mu(H)$ para todo conjunto de Borel $H$ em $G$ e para todo $x \in G$. A medida $\mu$ é única a menos de multiplicação por uma constante positiva.*

**Prova.**

Cohn [4], Teorema 9.2.1 (p. 305) e Teorema 9.2.3 (p. 309). ■

$\mu$ é chamada *medida de Haar invariante à esquerda em $G$.* Quando $G$ é um grupo compacto, toda medida de Haar invariante à esquerda também é invariante à direita ( i.é., $\mu(Hx) = \mu(H)$, para todo $x \in G$ e todo boreliano $H$) e vice-versa. Neste caso $\mu$ é dita apenas *medida de Haar.*

Seja $\mathcal{L}_1(G, \mu, E)$ o espaço vetorial das funções $f : G \to E$ $\mu$ - Bochner integráveis. A *invariância à esquerda* de $\mu$ nos permite concluir que para $f \in \mathcal{L}_1(G, \mu, E)$, tem-se

$$\int_G f(as)\, d\mu(s) = \int_G f(s)\, d\mu(s) \text{ para todo } a \in G. \qquad (1)$$

Em particular, se $G$ é um grupo compacto, então a igualdade (1) é válida para toda $f \in C(G; E)$.

As propriedades que essencialmente caracterizam a medida de Haar $\mu$ invariante à esquerda, além de (1) são :

$i)$ Se $U$ é aberto não vazio em $G$ então $\mu(U) > 0$;

$ii)$ Se $K \subset G$ é compacto então $\mu(K) < \infty$.

**1.2.14. Observação.** $G$ é grupo compacto se, e somente se, $\mu(G) < \infty$. Logo, se $G$ é um grupo compacto, então escolheremos a medida de Haar $\mu$ tal que $\mu(G) = 1$.

Para um tratamento detalhado da medida de Haar e integral de Bochner, recomendamos Cohn [4].

**1.2.15. Definição.** Seja $G$ um grupo de Hausdorff compacto. Se $\mu$ for uma medida de Haar em $G$, chama-se *convolução* das funções $\psi \in C(G; \mathbb{K})$ e $f \in C(G; E)$ a função representada por

$$(\psi * f)(x) = \int_G \psi(s)\, f\left(s^{-1}x\right) d\mu(s)$$

Note que $\psi * f \in C(G; E)$.

A identidade (1) permite-nos escrever

$$(\psi * f)(x) = \int_G \psi(xs) f(s^{-1})\, d\mu(s); \quad x \in G.$$

Esta outra forma de representar a convolução de $\psi$ e $f$ será útil na demonstração do Lema 1.3.3.

## 1.3 Lemas Fundamentais

Antes de estudarmos a densidade de determinados subconjuntos de $C(G, E)$, onde $G$ é um grupo de Hausdorff compacto e $E$ um espaço de Banach, veremos dois pré-requisitos fundamentais :

1) Toda função $f \in C(G; E)$ é limite uniforme de uma sequência definida através da convolução.

2) A integral de uma função $f$ pertencente a um subconjunto de $C(G, E)$, uniformemente equicontínuo à direita, é aproximada por um elemento da envoltória convexa da imagem de $f$.

**1.3.1. Lema**. *Seja $G$ um grupo de Hausdorff compacto. Se $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $C(G, \mathbb{K})$ tal que*

$(a)$ $\left\{\int_G \psi_n(s)\ d\mu(s)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para 1;*

$(b)$ *Existe $M > 0$ tal que $\int_G |\psi_n(s)|\ d\mu(s) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

$(c)$ *Dado $\varepsilon > 0$, para toda vizinhança aberta $V$ da identidade $e \in G$,* existe $n_1 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$\int_{G\setminus V} |\psi_n(s)|\ d\mu(s) < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq n_1,\ n \in \mathbb{N};$$

*então, para toda $f \in C(G; E)$, a sequência $\{\psi_n * f\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f$.*

**Prova**.

Seja $f \in C(G; E)$. Para cada $x \in G$, temos

$$
\begin{aligned}
(\psi_n * f)(x) - f(x) &= \int_G \psi_n(s) f(s^{-1}x)\ d\mu(s) - f(x) \\
&= \int_G \psi_n(s) [f(s^{-1}x) - f(x)]\ d\mu(s) + \qquad (1) \\
&+ \int_G \psi_n(s) f(x)\ d\mu(s) - f(x)
\end{aligned}
$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pelo item $(a)$ e pelo fato de $f$ ser limitada, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica

$$
\left\| \int_G \psi_n(s) f(x)\ d\mu(s) - f(x) \right\| < \varepsilon
$$

para todo $x \in G$. Usando a igualdade (1) para $n \geq n_0$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|(\psi_n * f)(x) - f(x)\| &\leq \left\| \int_G \psi_n(s) [f(s^{-1}x) - f(x)]\ d\mu(s) \right\| + \\
&+ \left\| \int_G \psi_n(s) f(x)\, d\mu(s) - f(x) \right\| < \\
&< \left\| \int_G \psi_n(s) [f(s^{-1}x) - f(x)]\ d\mu(s) \right\| + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Agora, pela Proposição 1.2.8, $f$ é uniformemente contínua à esquerda, logo, podemos tomar uma vizinhança aberta simétrica $V$ de $e$, isto é, tal que $V = V^{-1}$, de modo que $\|f(s^{-1}x) - f(x)\| < \varepsilon$ para todo $s \in V$ e $x \in G$. Pela condição $(c)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{G \setminus V} |\psi_n(s)|\ d\mu(s) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_1$. Usando tais fatos juntamente com o item $(b)$ da hipótese e a limitação da $f$ por $L = \max\{\|f(t)\|;\ t \in G\}$, obtemos para $n \geq n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ e $x \in G$, a seguinte desigualdade:

$$
\begin{aligned}
\|(\psi_n * f)(x) - f(x)\| &< \int_{G \setminus V} |\psi_n(s)|\, \|f(s^{-1}x) - f(x)\|\, d\mu(s) \quad + \\
&+ \int_V |\psi_n(s)|\, \|f(s^{-1}x) - f(x)\|\, d\mu(s) + \varepsilon \quad < \\
&< 2L\varepsilon + \varepsilon \int_G |\psi_n(s)|\, d\mu(s) + \varepsilon \quad <
\end{aligned}
$$

$$< \quad \varepsilon\,(2L+M+1)\,.$$

Concluímos assim, que a sequencia $\{\psi_n * f\}_{n\in N}$ converge uniformemente para $f$. ■

**1.3.2. Lema**. *Sejam $G$ um grupo de Hausdorff compacto e $\mathcal{F} \subset C\,(G;E)$ uniformemente equicontínuo à direita. Dado $\varepsilon > 0$, existem números reais positivos $c_1,...,c_m$ com $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i = 1$ e $s_1,...s_m \in G$, $m \in \mathbb{N}$, tais que*

$$\left\| \int_G g\,(s)\,d\mu\,(s) - \sum_{i=1}^{m} c_i g\,(s_i) \right\| < \varepsilon \quad \textit{para toda } g \in \mathcal{F}.$$

**Prova.**

Como $\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínuo à direita, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V$ de $e$ tal que $y^{-1}x \in V$ implica $\|g\,(x) - g\,(y)\| < \varepsilon$ para toda $g \in \mathcal{F}$. Agora $\{sV\}_{s\in G}$ é uma cobertura aberta de $G$. A compacidade de $G$ nos garante a existência de elementos $s_1,...,s_m \in G$ tais que $G \subset \bigcup_{i=1}^{m} s_i V$. Pelo resultado de Dieudonné-Bochner sobre partições contínuas da unidade (Proposição 1.2.4), existem funções $h_1,...,h_m \in C\,(G,[0,1])$, todas com suporte de medida positiva (Observação 1.2.5 e propriedade $(i)$ da medida de Haar), tais que

$(a)$ $\sum\limits_{i=1}^{m} h_i\,(x) = 1$ para todo $x \in G$;

$(b)$ $\mathrm{supp} h_i \subset s_i V$ , $i = 1,...,m$.

Mostremos que

$$\left\| \int_G g\,(s)\,d\mu\,(s) - \sum_{i=1}^{m} \left( \int_G h_i\,(s)\,d\mu\,(s) \right) g\,(s_i) \right\| < \varepsilon$$

para toda $g \in \mathcal{F}$. De fato, seja $g \in \mathcal{F}$. Temos

$$\left\| \int_G g\,(s)\,d\mu\,(s) - \sum_{i=1}^{m} \int_G h_i\,(s)\,g\,(s_i)\,d\mu\,(s) \right\| \qquad =$$

$$= \left\| \int_G \sum_{i=1}^{m} h_i\,(s)\,g\,(s)\,d\mu\,(s) - \sum_{i=1}^{m} \int_G h_i\,(s)\,g\,(s_i)\,d\mu\,(s) \right\| \quad =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{m} \int_G h_i(s) [g(s) - g(s_i)] \; d\mu(s) \right\| \quad \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \int_G h_i(s) \|g(s) - g(s_i)\| \; d\mu(s) \quad =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{s_i V} h_i(s) \|g(s) - g(s_i)\| \; d\mu(s).$$

Se $s \in s_i V$, segue da equicontinuidade de $\mathcal{F}$ que $\|g(s) - g(s_i)\| < \varepsilon$ para toda $g \in \mathcal{F}$. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \int_{s_i V} h_i(s) \|g(s) - g(s_i)\| \, d\mu(s) &< \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \int_{s_i V} h_i(s) \, d\mu(s) \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \int_G h_i(s) \, d\mu(s) \\ &= \varepsilon \int_G \sum_{i=1}^{m} h_i(s) \, d\mu(s) = \varepsilon \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \int_G g(s) \, d\mu(s) - \sum_{i=1}^{m} \left( \int_G h_i(s) \, d\mu(s) \right) g(s_i) \right\| < \varepsilon$$

Temos que $\int_G h_i(s) \, d\mu(s) \geq \int_{\operatorname{supp} h_i} h_i(s) \, d\mu(s) > 0$. Como $\sum_{i=1}^{m} h_i(x) = 1$ para todo $x \in G$ e $\mu(G) = 1$, obtemos $\sum_{i=1}^{m} \int_G h_i(s) \, d\mu(s) = 1$. Logo, $c_i = \int_G h_i(s) \, d\mu(s)$ e $s_i \in G$; $i = 1, ..., m$, satisfazem as exigências do teorema. ∎

Note que a equicontinuidade de $\mathcal{F}$ foi fundamental para garantir a existência dos mesmos elementos $s_1, ..., s_m \in G$ e reais positivos $c_1, ...c_m$ para toda função de $\mathcal{F}$. Isto será útil na demonstração do próximo lema.

**1.3.3. Lema.** *Seja $G$ um grupo de Hausdorff compacto. Sejam $\psi \in C(G; \mathbb{K})$ e $W \subset C(G; E)$ tais que para quaisquer $c_1, ...c_k \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$,*

$\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$; $v_1, ... v_k \in E$; $s_1, ... s_k \in G$; $k \in \mathbb{N}$, *a função definida em* $G$ *por* $x \to \sum_{i=1}^{k} c_i \psi_{s_i}(x) v_i$ *pertence a* $W$. *Então para toda* $f \in C(G; E)$, *a função* $\psi * f$ *pertence a* $\overline{W}$.

**Prova.**

Pela Proposição 1.2.11, $\left\{ {}_x\psi \overset{\vee}{f} \right\}_{x \in G} \subset C(G; E)$ é uniformemente equicontínuo à direita. Tomando $\mathcal{F} = \left\{ {}_x\psi \overset{\vee}{f} \right\}_{x \in G}$ no Lema 1.3.2, resulta que dado $\varepsilon > 0$ existem $c_i \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} c_i = 1$ e $s_i \in G$; $i = 1, ... m$, tais que

$$\left\| \int_G \left( {}_x\psi \overset{\vee}{f} \right)(s)\, d\mu(s) - \sum_{i=1}^{m} c_i \left( {}_x\psi \overset{\vee}{f} \right)(s_i) \right\| < \varepsilon$$

para todo $x \in G$, ou seja,

$$\left\| \int_G \psi(xs) f\left(s^{-1}\right)\, d\mu(s) - \sum_{i=1}^{m} c_i \psi(xs_i) f\left(s_i^{-1}\right) \right\| < \varepsilon$$

Mas, $\psi * f(x) = \int_G \psi(xs) f\left(s^{-1}\right)\, d\mu(s)$ e $\psi_{s_i}(x) = \psi(xs_i)$, para todo $x \in G$. Temos então

$$\left\| (\psi * f)(x) - \sum_{i=1}^{m} c_i \psi_{s_i}(x) f\left(s_i^{-1}\right) \right\| < \varepsilon$$

para todo $x \in G$. Usando a hipótese, concluímos que $\psi * f \in \overline{W}$. ■

## 1.4 Teorema principal

Podemos agora provar o resultado principal deste capítulo.

**1.4.1. Teorema.** *Seja* $G$ *um grupo de Hausdorff compacto e* $W$ *um subconjunto não vazio de* $C(G; E)$. *Se existe* $\psi \in C(G; \mathbb{K})$ tal que:

$(a)$ $\psi(e) = 1$ *e* $|\psi(x)| < 1$ *para todo* $x \neq e$, $x \in G$;

$(b)$ *existe* $M > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_G |\psi(s)|^n \, d\mu(s) \leq M \left| \int_G \psi^n(s) \, d\mu(s) \right|$; *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$(c)$ *para quaisquer* $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$, $\sum_{i=1}^k c_i = 1$; $v_1, ...v_k \in E$; $s_1, ...s_k \in G$, *a função* $x \to \sum_{i=1}^k c_i \psi_{s_i}^n(x) v_i$ *pertence a* $W$, *para todo* $n, k \in \mathbb{N}$ .

*então* $W$ *é denso em* $C(G; E)$.

**Prova.**

Como $\psi(e) = 1$, a continuidade de $\psi$ e o item $(b)$ implicam que $\displaystyle\int_G \psi^n(s) \, d\mu(s) \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos então, a função $\phi_n : G \to \mathbb{K}$, por

$$\phi_n = \frac{\psi^n}{\displaystyle\int_G \psi^n(s) \, d\mu(s)}$$

Note que $\displaystyle\int_G \phi_n(s) \, d\mu(s) = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Além disso, segue da condição $(b)$ que

$$\int_G |\phi_n(s)| \, d\mu(s) \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, dada uma vizinhança aberta $V$ de $e$, considere a sequência de funções $\{|\psi|^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ restrita a $G \backslash V$. Como $|\psi(s)| < 1$ para todo $s \neq e$, segue do Teorema de Dini que $\left\{ \left| \psi_{|G \backslash V} \right|^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função nula. Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|\psi(s)|^{n_0} < 1/2$, para todo $s \in G \backslash V$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $n = n_0(n/n_0)$, temos então

$$\int_{G \backslash V} |\psi(s)|^n \, d\mu(s) \leq (1/2)^{n/n_0} \mu(G \backslash V) \tag{1}$$

Considerando o aberto

$$U = \{s \in G; |\psi(s)|^{n_0} > 3/4\}$$

temos,

$$\int_G |\psi(s)|^n \, d\mu(s) \geq \int_U |\psi(s)|^n \, d\mu(s) \geq \mu(U)(3/4)^{n/n_0} > 0 \qquad (2)$$

Usando o item $(b)$ e as desigualdades (1) e (2), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{G\backslash V} |\phi_n(s)| \, d\mu(s) &= \frac{\int_{G\backslash V} |\psi(s)|^n \, d\mu(s)}{\left|\int_G \psi(s)^n \, d\mu(s)\right|} \\
&\leq M \frac{\int_{G\backslash V} |\psi(s)|^n \, d\mu(s)}{\int_G |\psi(s)|^n \, d\mu(s)} \\
&\leq M \frac{\mu(G\backslash V)(1/2)^{n/n_0}}{\mu(U)(3/4)^{n/n_0}} \\
&\leq \frac{M}{\mu(U)} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n_0}}\right]^n
\end{aligned}$$

Consequentemente, para $n$ suficientemente grande,

$$\int_{G\backslash V} |\phi_n(s)| \, d\mu(s) < \varepsilon.$$

Mostramos assim, que a sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as condições do Lema 1.3.1, logo, podemos concluir que para qualquer $f \in C(G;E)$, a sequência $\{\phi_n * f\}_{n\in N}$ converge uniformemente para $f$. O Lema 1.3.3, por sua vez, garante que $\phi_n * f \in \overline{W}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $f \in \overline{W}$. ∎

**1.4.2. Exemplo.** Seja $G = (\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})$. O subconjunto

$$W = \left\{ f([x],[y]) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} a_{m,n} e^{i(mx+ny)};\ a_{m,n} \in E,\ M,\ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

é denso em $C(G,E)$, pois a função

$$\psi([x],[y]) = \frac{(e^{ix} + e^{-ix} + 2)(e^{iy} + e^{-iy} + 2)}{16}$$

e $W$ satisfazem as condições do teorema anterior.

Antes de vermos um corolário do teorema principal, introduziremos algumas definições.

**1.4.3. Definição.** Um subconjunto $A$ de $C(G;E)$ é *invariante por translação à direita* quando $\phi \in A$ implica $\phi_x \in A$, para todo $x \in G$.

**1.4.4. Definição.** Sejam $E$ e $F$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_f^n(E;F)$ denota o subespaço vetorial de $C(E;F)$ gerado pelo conjunto de todas as funções da forma

$$p(x) = [\phi(x)]^n u; \;\; x \in E$$

onde $\phi$ pertence ao espaço dual $E^*$ e $u \in F$. Os elementos de $P_f^n(E,F)$ são chamados *polinômios n-homogêneos contínuos de tipo finito de E em F.*

**1.4.5. Exemplo.** No caso em que $E = \mathbb{K}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o espaço $P_f^n(\mathbb{K},F)$ é o conjunto das funções da forma $z \to az^n$, onde $a \in F$.

Nas duas próximas definições e na proposição 1.4.6, consideraremos $X$ um espaço de Hausdorff completamente regular.

**1.4.6. Definição.** Um subespaço vetorial $W \subset C(X;E)$ é uma *álgebra polinomial* se a função $x \to (p \circ g)(x)$ pertence a $W$, sempre que $g \in W$ e $p \in P_f^n(E;E)$, $n \geq 1$.

**1.4.7. Exemplos.** Se $W$ é uma subálgebra de $C(X;\mathbb{K})$, então $W$ é uma álgebra polinomial. Um outro exemplo seria o subespaço de $C(E;F)$ constituído de todas as funções da forma

$$p(x) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k(x), \;\; x \in E,$$

onde $p_0 \in F, p_k \in P_f^k(E;F)$, $k = 1,2,...,n$, $n \in \mathbb{N}$.

**1.4.8. Definição.** Seja $A \subset C(X;\mathbb{K})$. $A \bigotimes E$ é o conjunto das funções da forma

$$t(x) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) v_i, \quad x \in X$$

onde $\psi_i \in A$; $v_i \in E$; $i = 1,...,m$; $m \in \mathbb{N}$.

**1.4.9. Proposição.** *Seja $W$ um subespaço vetorial de $C(X, E)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$W$ é uma álgebra polinomial:*

(2) *$A =: \{\phi \circ g; \phi \in E^*,\ g \in W\}$ é uma subálgebra de $C(X; \mathbb{K})$ e $A \bigotimes E \subset W$.*

**Prova.** Ver Prolla [18] p. 22. ■

Uma abordagem mais detalhada sobre álgebras polinomiais pode ser encontrado em Prolla ([16],[18]).

**1.4.10. Teorema.** *Sejam $G$ um grupo de Hausdorff compacto e $W \subset C(G, E)$ uma álgebra polinomial invariante por translação à direita. Se existe $\psi \in A = \{\phi \circ g;\ \phi \in E^*,\ g \in W\}$ tal que*

$(a)$ $\psi(e) = 1$ *e* $|\psi(x)| < 1$ *para todo* $x \neq e$ .

$(b)$ *Existe* $M > 0$ *satisfazendo*

$$\int_G |\psi(s)|^n \, d\mu(s) \leq M \left| \int_G \psi^n(s) \, d\mu(s) \right| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*então $W$ é denso em $C(G; E)$.*

**Prova.**

$W \subset C(G; E)$ sendo invariante por translação à direita implica que $A$ também é invariante por translação à direita. Assim, para cada $s \in G$ temos que $\psi_s \in A$. Como $W$ é uma álgebra polinomial, segue da Proposição 1.4.9 que para quaisquer $c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$; $v_1, ...v_m \in E$; $s_1, ..., s_m \in G$, $m \in \mathbb{N}$, a função $x \to \sum_{i=1}^{m} c_i \psi_{s_i}^n(x) v_i$ pertence a $W$. De posse desse fato e os itens $(a)$ e $(b)$ da hipótese, podemos aplicar o Teorema 1.4.1 e concluir que $W$ é denso em $C(G, E)$. ■

Como caso particular, provaremos o segundo teorema de aproximação de Weierstrass que consistiu na motivação do trabalho deste capítulo.

**1.4.11. Definição.** Uma função$f : \mathbb{R} \to E$ é *periódica*, se existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, $f$ tem período $T$ e dizemos que $f$ é $T$-*periódica.*

Note que se $f \in C(\mathbb{R}, E)$ é periódica, então $f$ é limitada.

Toda função $2\pi$-periódica em $\mathbb{R}$ com valores em $E$ pode ser identificada com uma função em $\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ com valores em $E$ e vice-versa, isto é, se $f : \mathbb{R} \to E$ é uma função $2\pi$-periódica, então definimos a função $F : \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \to E$, $F([x]) = f(x)$ e se $F$ é qualquer função de $\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ em $E$, a função $f(x) = F([x])$ é uma função $2\pi$-periódica em $\mathbb{R}$. Além do mais, $f$ é contínua se, e somente se, $F$ é contínua.

**1.4.12. Definição.** Seja $E$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *polinômio trigonométrico* definido em $\mathbb{R}$ com valores em $E$ é uma expressão da forma

$$p(t) = a + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kt + b_k senkt)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $a, a_k, b_k \in E$, $N \in \mathbb{N}$.

Se $E$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, um *polinômio trigonométrico* definido em $\mathbb{R}$ com valores em $E$ tem a forma

$$p(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $c_k \in E$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Todo polinômio trigonométrico é uma função $2\pi$-periódica.

**1.4.13. Teorema.** *Seja $E$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Toda $f \in C(\mathbb{R}; E)$ $2\pi$-periódica pode ser uniformemente aproximada por um polinômio trigonométrico.*

**Prova.**

Seja $W = \left\{ P([t]) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}; t \in \mathbb{R}, c_k \in E \right\}$. $W$ é uma álgebra polinomial invariante por translações à direita contido em $C(\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}; E)$. A função

$$\psi([t]) = \frac{1 + \cos t}{2} = \frac{2 + e^{it} + e^{-it}}{4}$$

pertence a $A = \{\phi \circ g; \phi \in E^*, g \in W\}$. Basta tomar $g = u\dfrac{2 + e^{it} + e^{-it}}{4}$ onde $u \in E$, $\|u\| = 1$ e $\phi \in E^*$ tal que $\phi(u) = \|u\|$ (isto é possível pelo Teorema de Hahn Banach). Como $\psi$ satisfaz as condições do Teorema 1.4.10, temos que $W$ é denso em $C(\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}; E)$. Agora, para toda $f \in C(\mathbb{R}; E)$ $2\pi$-periódica, a função $F([t]) = f(t)$ pertence a $C(\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}; E)$, logo, dado

$\varepsilon > 0$, existe $P([t]) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$, $c_k \in E$, tal que $\|F([t]) - P([t])\| < \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$, assim, $\left\| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt} \right\| < \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $f$ pode ser uniformemente aproximada por um polinômio trigonométrico. ■

Se tomarmos

$$W = \left\{ p[t] = a + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kt + b_k senkt;\ t \in \mathbb{R},\ a, a_k, b_k \in E \right\}$$

e seguirmos o argumento do teorema anterior, obteremos o resultado também para o caso em que $E$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$. Em particular, obteremos uma prova do segundo teorema de aproximação de Weierstrass.

# Capítulo 2

# Aproximação em espaços ponderados de funções contínuas

## 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo consiste em provar uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para módulos e subconjuntos não vazios de espaços ponderados. Os argumentos utilizados por Jewett [9] e Prolla [18] têm um papel fundamental na demonstração destes resultados. Como aplicação, caracterizaremos o fecho de um subconjunto não vazio de um espaço ponderado e veremos um resultado sobre interpolação e aproximação simultâneas nos espaços ponderados.

## 2.2 Preliminares

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos reais, $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos reais positivos e $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos. A menos que haja menção explícita, consideraremos $X$ um espaço de Hausdorff completamente regular e $E$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $C(X;E)$ denota o espaço das funções contínuas em $X$ com valores em $E$.

Para $A \subset C(X;\mathbb{R})$, introduzimos a seguinte relação de equivalência em $X : x \sim t$, se, e somente se, $g(x) = g(t)$, para toda $g \in A$. Representamos a classe de equivalência de $x$ por $[x]_A$. Notemos que $[x]_A$ é fechado em $X$, pois, os elementos de $A$ são funções contínuas. Uma vizinhança de $[x]_A$ em $X$ é um conjunto $U \subset X$, tal que $[x]_A \subset$ interior de $U$. Dizemos que $A$ separa pontos de $X$ se, dado um par de pontos distintos $x, y \in X$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Se $A$ separa pontos de $X$, então $[x]_A = \{x\}$. Assim, se $A$=$C(X;\mathbb{R})$, então $[x]_A = \{x\}$. Por outro lado, se $A$ é um conjunto de funções reais constantes, temos $[x]_A = X$. É importante observar também, que se $A_1 \subset A_2 \subset C(X;\mathbb{R})$, então $[x]_{A_2} \subset [x]_{A_1}$.

Denotamos por $[0,1]^X$ o conjunto das funções definidas em $X$ e com valores no intervalo $[0,1]$ e por $D(X)$ o conjunto $\{f \in C(X;\mathbb{R}); 0 \leq f \leq 1\}$.

**2.2.1. Definição.** Um subconjunto não vazio $A \subset [0,1]^X$ tem a *Propriedade* $V$, se satisfaz as seguintes condições:

(1) se $\phi \in A$, então $1 - \phi \in A$;

(2) se $\phi, \psi \in A$, então $\phi\psi \in A$.

Como exemplo, temos que se $A$ é uma subálgebra de $C(X;\mathbb{R})$ que contém as funções constantes, então $A \cap D(X)$ tem a Propriedade $V$.

Considerando a topologia da convergência uniforme em $[0,1]^X$, note que se $A$ tem a Propriedade $V$, então $\overline{A}$ tem a Propriedade $V$. A noção de Propriedade $V$ foi introduzida por Von Neumann [15].

**2.2.2. Definição.** Se $W$ é um subconjunto não vazio de $C(X;E)$, uma função $\phi \in D(X)$ é um *multiplicador* de $W$, se $\phi f + (1-\phi) g \in W$, para todo par $f, g \in W$. Denotamos o conjunto de todos os multiplicadores de $W$ por $M(W)$.

Notemos que $M(W)$ é sempre não vazio, pois as funções constantes $\phi \equiv 0$ e $\phi \equiv 1$ são multiplicadores de $W$.

Claramente, se $\phi \in M(W)$ então $1 - \phi \in M(W)$. A identidade

$$(\phi\psi) f + (1 - \phi\psi) g = \psi [\phi f + (1-\phi) g] + (1-\psi) g$$

mostra que $\phi\psi \in M(W)$, sempre que $\phi, \psi \in M(W)$. Assim, o conjunto dos multiplicadores de $W$ tem a propriedade $V$.

Antes de vermos alguns exemplos de multiplicadores, introduziremos a definição de cone convexo, segundo Grotendieck [8].

**2.2.3. Definição.** Seja $E$ um espaço vetorial. Um *cone* num espaço vetorial é um subconjunto $C$ de $E$, tal que $\lambda C \subset C$, para todo $\lambda > 0$.

Um cone $C$ num espaço vetorial $E$ é convexo se, e somente se, $C + C \subset C$ e $\lambda C \subset C$, para todo $\lambda > 0$.

**2.2.4. Exemplos.** (a) Seja $H$ um espaço de Hilbert real ou complexo e $E = L(H)$ o espaço de todos os operadores lineares limitados em $H$. Seja $P(H)$ o cone convexo de todos os operadores lineares positivos, isto é, $P(H) = \{T \in L(H)\,;\, (Tv, v) \geq 0, \forall v \in H\}$. Seja $W$ o cone convexo formado pelas funções da forma

$$g(t) = \sum_{i+j\leq n} t^i (1-t)^j P_{ij}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

onde $P_{ij} \in P(H)$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A função $\phi(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, é um multiplicador de $W$.

(b) Seja $A$ uma subálgebra de $C(X; \mathbb{R})$ e $W$ um subespaço vetorial de $C(X; E)$. Se $AW \subset W$, então $M(W) = D(X)$.

(c) Seja $W$ o conjunto das funções poligonais definidas em $[0, 1]$. Neste caso, $M(W)$ é o conjunto das funções constantes entre 0 e 1.

A noção de multiplicador de $W$ é devido a Feyel e de La Pradelle [7] no caso em que $W$ é um cone convexo, e foi estendido para subconjuntos arbitrários por Chao-Lin [3].

**2.2.5. Definição.** Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *semicontínua superiormente* se o conjunto $\{x \in X;\, f(x) < \alpha\}$ é aberto, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

**2.2.6. Observação.** Quando $K \subset X$ é compacto, toda função semicontínua superiormente $f : K \to \mathbb{R}$ atinge seu valor máximo num ponto de $K$.

**2.2.7. Definição.** Uma função $f : X \to E$ é *nula no infinito* se, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{x \in X;\, \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$ é relativamente compacto.

As três próximas definições foram introduzidas por Nachbin [13].

**2.2.8. Definição.** Seja $V$ é um conjunto de funções positivas semicontínuas superiormente em $X$. Cada elemento de $V$ é denominado *peso.*

**2.2.9. Definição.** Um conjunto de pesos $V$ será dito *dirigido* se, dados $v_1, v_2 \in V$, existem $\lambda > 0$ e $v \in V$ tais que $v_1 \leq \lambda v$ e $v_2 \leq \lambda v$. Analogamente, um conjunto $\Gamma = \{p_i\}_{i \in L}$ de seminormas sobre um espaço vetorial é *dirigido* se, para quaisquer $i_1, i_2 \in L$, existem $i \in L$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$ tais que $p_{i_1} \leq \lambda p_i$ e $p_{i_2} \leq \lambda p_i$.

Durante todo o capítulo, assumiremos que $V$ é dirigido. Além disso, exigiremos que para cada $x \in X$, exista $v \in V$ tal que $v(x) > 0$.

**2.2.10. Definição.** O subespaço vetorial de $C(X;E)$ constituído de todas as funções $f$ tais que, para quaisquer $v \in V$, $vf$ é nula no infinito, é denotado por $CV_\infty(X;E)$.

Notemos que se $f \in CV_\infty(X;E)$, então para cada $v \in V$, a função $vf$ é limitada em $X$. Assim, dado $v \in V$, obtemos uma seminorma

$$\begin{array}{rccl} p_v : & CV_\infty(X;E) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & f & \to & \sup\{v(x)\|f(x)\|; x \in X\} \end{array}$$

A topologia $\tau_V$ sobre $CV_\infty(X;E)$ é definida pela família de seminormas $\{p_v\}_{v\in V}$ tendo como subbase conjuntos do tipo

$$B_{v,\varepsilon}(f) = \{g \in CV_\infty(X;E); p_v(f-g) < \varepsilon\},$$

onde $f \in CV_\infty(X;E)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$. Notemos que se $V$ é dirigido, então $\{p_v\}_{v\in V}$ é dirigido. Logo, para cada $f \in CV_\infty(X;E)$, a coleção $\{B_{v,\varepsilon}(f)\}_{v\in V,\varepsilon>0}$ é uma base de vizinhanças abertas de $f$, com relação a $\tau_V$. O espaço $CV_\infty(X;E)$ munido da topologia $\tau_V$ é dito um *espaço ponderado.*

**2.2.11. Observação.** Mesmo que um conjunto de pesos $V = \{v_\alpha\}_{\alpha\in L}$ não seja dirigido, sempre existe um conjunto $\mathcal{W}$ de funções positivas semicontínuas superiormente dirigido que contém $V$ e satisfaz as igualdades

$$CV_\infty(X;E) = C\mathcal{W}_\infty(X;E) \text{ e } \tau_V = \tau_{\mathcal{W}}.$$

Basta tomar $\mathcal{W} = \left\{\sup_{\alpha\in J} v_\alpha;\ J \subset L \text{ finito}\right\}$. Portanto, não há perda de generalidade em assumir que $V$ seja dirigido.

**2.2.12. Exemplos.** a) Seja $V$ o conjunto das funções características de todos os subconjuntos compactos de um espaço completamente regular $X$. Então o espaço ponderado $CV_\infty(X;E)$ é o espaço $C(X;E)$ munido da topologia compacto-aberta.

b) Seja $v : X \to \mathbb{R}$ definida por $v(x) = 1$, para todo $x \in X$ e consideremos $V = \{v\}$. Então $CV_\infty(X;E)$ é o subespaço vetorial das funções $f \in C(X;E)$ que se anulam no infinito. Este espaço é usualmente denotado por $C_0(X;E)$. A topologia $\tau_V$ é a topologia da convergência uniforme. No caso em que $X$ é compacto, temos $CV_\infty(X;E) = C(X;E)$.

c) Seja $X$ um espaço localmente compacto e

$$V = \{\phi \in C_0(X;\mathbb{R}); \phi \geq 0\}.$$

Então $CV_\infty(X;E) = C_b(X;E) = \{f \in C(X;E)\,;\ f \text{ limitada}\}$ como espaços vetoriais e a topologia $\tau_V$ é chamada topologia estrita. (Veja Buck [2]).

Veremos a seguir, um resultado de Jewett baseado na elementar desigualdade de Bernoulli. O interessante é que, com um argumento simples, ele garante a existência de um polinômio satisfazendo certas condições e exibe a forma deste polinomio. Este fato é extremamente útil para a obtenção dos nossos resultados.

**2.2.13. Proposição (Jewett).** *Sejam $0 < a < b < 1$ com $2a < b$. Para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe um polinômio $p_\varepsilon(x) = (1 - x^m)^n$ tal que*

(1) $p_\varepsilon(t) > 1 - \varepsilon$, *para* $0 \leq t \leq a$,
(2) $p_\varepsilon(t) < \varepsilon$, *para* $b \leq t \leq 1$.

**Prova.**

Encontra-se em Prolla [18], página 1 ou em Jewett [9]. ■

**2.2.14. Definição.** Seja $X$ um conjunto não vazio. Dadas $f, g : X \to \to \mathbb{R}$, $f \vee g$ e $f \wedge g$ são as funções de $X$ em $\mathbb{R}$ definidas por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in X$. Um subconjunto $L$ do espaço das funções de $X$ em $\mathbb{R}$ é um *reticulado* se $f, g \in L$ implica $f \vee g \in L$ e $f \wedge g \in L$.

**2.2.15. Proposição( Jewett ).** *Sejam $X$ um conjunto não vazio e $F$ um subconjunto de $[0,1]^X$ fechado na topologia da convergência uniforme. Se $F$ tem a Propriedade $V$ então $F$ é um reticulado.*

**Prova.**

Veja Jewett [9], Teorema 1. ■

## 2.3 Uma versão do teorema de Stone-Weierstrass para subconjuntos e módulos de CV$_\infty$(X;E).

O seguinte lema, apesar de simples, foi fundamental para a obtenção de uma solução do problema deste capítulo via argumentos utilizados num resultado de Prolla (Teorema 1, Cap. 4, [18]). Este lema também será extremamente útil no Capítulo 3. A demonstração, a menos de algumas adaptações, é análoga à proposição 3, p. 65 - Nachbin [11].

**2.3.1. Lema.** *Se $h : X \to \mathbb{R}^+$ é uma função semicontínua superiormente e nula no infinito, então para qualquer fechado não vazio $F \subset X$, a restrição de $h$ a $F$, $h_F : F \to \mathbb{R}^+$, assume máximo em $F$.*

**Prova.**

Seja $\lambda = \sup\{h(x)\,;\, x \in F\}$. Podemos assumir $\lambda > 0$ pois, se $\lambda = 0$, não há o que provar. Como $h$ é semicontínua superiormente e nula no infinito, temos que o subconjunto $K = \{x \in X;\, h(x) \geq \lambda/2\}$ é compacto. Pela definição de $\lambda$ e, a compacidade de $K$, temos que $K \cap F$ é um compacto não vazio. Assim, a função restrição $h_{K\cap F} : K \cap F \to \mathbb{R}^+$ atinge máximo em algum $x_0 \in K \cap F$. Notemos que $h(x_0) = \lambda$. De fato, se $h(x_0) < \lambda$, então existe $x_1 \in F$ tal que $h(x_0) < h(x_1) \leq \lambda$ e portanto, $x_1 \in K \cap F$. Mas, pela maximalidade de $h_{K\cap F}$ em $x_0$, $h(x_1) \leq h(x_0)$, o que leva a uma contradição. ■

A demonstração do próximo lema é essencialmente a mesma do Lema 1, Capítulo 4, Prolla [18], feito para espaços de Hausdorff compactos. Só observamos que, tirando a compacidade de $X$ e exigindo a compacidade de determinados subconjuntos de $X$, ainda conseguíamos o mesmo resultado. A demonstração é baseada nos resultados de Jewett.

**2.3.2. Lema.** *Seja $A$ um subconjunto de $D(X)$ com a propriedade $V$. Sejam $x \in X$ e $N$ uma vizinhança aberta de $[x]_A$ em $X$, tal que o complementar de $N$, $X \backslash N$, é compacto. Então, existe uma vizinhança aberta $U$ de $[x]_A$ em $X$, tal que $U \subset N$ e para cada $0 < \delta < 1$ existe $\phi \in A$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $\phi(t) < \delta$ para $t \notin N$;
(2) $\phi(t) > 1 - \delta$ para $t \in U$.

**Prova.**

Seja $K = X \backslash N$. Para cada $y \in K$, existe $\phi_y \in A$ tal que $\phi_y(y) < \phi_y(x)$. Podemos assumir que $2\phi_y(y) < \phi_y(x)$. De fato, como $\phi_y(y)/\phi_y(x) < 1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2(\phi_y(y))^k < (\phi_y(x))^k$ e temos $\phi_y^k \in A$, pois, $A$ tem a propriedade $V$. Pela Proposição 2.2.13, tomando $a = \phi_y(y)$, $b = \phi_y(x)$ e $\varepsilon = 1/4$, existe um polinômio da forma $p_y(t) = (1 - t^m)^n$ tal que $(p_y \circ \phi_y)(x) < 1/4$ e $(p_y \circ \phi_y)(y) > 3/4$. Consideremos

$$W(y) = \left\{t \in X;\, \left(p_y \circ \phi_y\right)(t) > 3/4\right\}$$

$W(y)$ é um aberto contendo $y$ e $W(y) \cap [x]_A = \emptyset$ pois $p_y \circ \phi_y \in A$. Pela compacidade de $K$, existem $y_1, ..., y_m \in K$ tais que $K \subset W(y_1) \cup ... \cup W(y_m)$. Seja

$$\psi = (p_{y_1} \circ \phi_{y_1}) \vee ... \vee (p_{y_m} \circ \phi_{y_m})$$

Segue da Proposição 2.2.15 que $\overline{A}$ é um reticulado e portanto, $\psi \in \overline{A}$. Notemos que $\psi(x) < 1/4$ e $\psi(t) > 3/4$ para todo $t \in K$. Consideremos

$$U = \{t \in X; \psi(t) < 1/4\}$$

Claramente, $U$ é uma vizinhança aberta de $[x]_A$ e $U \subset N$.

Dado $0 < \delta < 1$, seja $q$ o polinômio obtido pela Proposição 2.2.13 para $a = 1/4$, $b = 3/4$ e $\varepsilon = \delta/2$. Definamos

$$\xi(t) = q(\psi(t)), t \in X.$$

Observemos que $\xi \in \overline{A}$. Se $t \notin N$, então $t \in K$ e $\psi(t) > 3/4$. Logo $\xi(t) < \delta/2$. Se $t \in U$, então $\psi(t) < 1/4$ e assim $\xi(t) > 1 - \delta/2$. Escolhendo $\phi \in A$ tal que $\|\phi - \xi\| < \delta/2$, é fácil verificar que $\phi$ satisfaz as condições (1) e (2). ■

Veremos a seguir o resultado principal deste capítulo. A idéia central é definir uma função aproximativa através de uma partição da unidade conveniente.

**2.3.3. Teorema.** *Seja $W$ um subconjunto não vazio de $CV_\infty(X,E)$. Dados $f \in CV_\infty(X;E)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *Existe $g \in W$ tal que $p_v(f - g) < \varepsilon$;*

(2) *Para cada $x \in X$, existe $g_x \in W$ tal que $v(t)\|f(t) - g_x(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \in [x]_{M(W)}$.*

**Prova.**

Claramente (1) implica (2). Suponhamos que a condição (2) esteja satisfeita, ou seja, dados $f \in CV_\infty(X;E)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$, existe $g_x \in W$, tal que $v(t)\|f(t) - g_x(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \in [x]_{M(W)}$. Como a função definida em $X$, $t \to v(t)\|f(t) - g_x(t)\|$ é semicontínua superiormente e nula no infinito, segue do Lema 2.3.1 que existe $t_x \in [x]_{M(W)}$ tal que

$$v(t_x)\|f(t_x) - g_x(t_x)\| = \sup\left\{v(t)\|f(t) - g_x(t)\|; t \in [x]_{M(W)}\right\}.$$

Consequentemente, existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que $v(t)\|f(t) - g_x(t)\| < \varepsilon(x) < \varepsilon$, para todo $t \in [x]_{M(W)}$ e assim

$$N(x) = \{t \in X;\, v(t)\|f(t) - g_x(t)\| < \varepsilon(x)\}$$

é uma vizinhança aberta de $[x]_{M(W)}$ em $X$ e $X \backslash N(x)$ é compacto. (Notemos que $t \to v(t)\|f(t) - g_x(t)\|$ é semicontínua superiormente e nula no infinito). Pelo Lema 2.3.2, para cada $x \in X$, é possível tomar uma vizinhança aberta $U(x)$ de $[x]_{M(W)}$ em $X$, tal que $U(x) \subset N(x)$. Escolhendo $x_1$ arbitrário, consideremos $K = X \backslash N(x_1)$. Como $K$ é compacto, existem $x_2, x_3, ... x_n \in K$ tais que $K \subset U(x_2) \cup ... \cup U(x_n)$. Tomemos

$$\begin{array}{rcl} r & = & \max\{\varepsilon(x_i);1 \leq i \leq n\} \\ M & = & \max\{p_v(f - g_{x_i});\, 1 \leq i \leq n\} \\ \text{e} & & 0 < \delta < 1 \text{ tal que } \delta n M < \dfrac{r+\varepsilon}{2} - r. \end{array}$$

Ainda pelo Lema 2.3.2, existem $\phi_2, ..., \phi_n \in M(W)$ tais que

$(a)$ $\phi_i(t) > 1 - \delta$, para todo $t \in U(x_i)$
$(b)$ $\phi_i(t) < \delta$, para todo $t \notin N(x_i)$

para $i = 2, ..., n$. Definamos

$$\begin{array}{rcl} \psi_2 & = & \phi_2, \\ \psi_3 & = & (1 - \phi_2)\phi_3, \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ \psi_n & = & (1 - \phi_2)(1 - \phi_3)...(1 - \phi_{n-1})\phi_n. \end{array}$$

Notemos que $\psi_i \in M(W)$, $i = 1, ..., n$. Agora, usando a indução pode-se provar facilmente a seguinte identidade :

$$\psi_2 + ... + \psi_j = 1 - (1 - \phi_2)(1 - \phi_3)...(1 - \phi_j),\, j = 2, ..., n.$$

Definamos então

$$\psi_1 = (1 - \phi_2)(1 - \phi_3)...(1 - \phi_n).$$

Pode-se observar que $\psi_1 \in M(W)$ e $\sum_{i=1}^{n} \psi_i = 1$. Além disso, temos

(c) $\psi_i(t) < \delta$, para todo $t \notin N(x_i), i = 1, ..., n.$

De fato, se $i \geq 2$, então $\psi_i(t) \leq \phi_i(t)$, e (c) segue de (b). Se $i = 1$, e $t \notin N(x_1)$, então $t \in K$ e, portanto, $t \in U(x_j)$ para algum $j = 2, ..., n$. Pelo item (a), $1 - \phi_j(t) < \delta$ e assim

$$\psi_1(t) = \left(1 - \phi_j(t)\right) \prod_{i \neq j} (1 - \phi_i(t)) < \delta.$$

Definamos

$$g = \sum_{i=1}^{n} \psi_i g_i, \text{ onde } g_i = g_{x_i}, i = 1, ..., n.$$

Observemos que

$$g = \phi_2 g_2 + (1 - \phi_2)\left[\phi_3 g_3 + (1 - \phi_3)\left[\phi_4 g_4 + ... + \left(1 - \phi_{n-1}\right)\left[\phi_n g_n + (1 - \phi_n) g_1\right]...\right]\right].$$

Como $\phi_i \in M(W)$, temos que $g \in W$. Agora, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} v(x)\|f(x) - g(x)\| &= v(x)\left\|\sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)(f(x) - g_i(x))\right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) v(x) \|f(x) - g_i(x)\| \end{aligned}$$

Seja $I = \{i; 1 \leq i \leq n, x \in N(x_i)\}$. Se $i \in I$, então $v(x)\|f(x) - g_i(x)\| < \varepsilon(x_i) \leq r$. Logo,

$$\sum_{i \in I} \psi_i(x) v(x) \|f(x) - g_i(x)\| < r \sum_{i \in I} \psi_i(x) \leq r \tag{1}$$

Se $i \notin I$, então por (c) tem-se $\psi_i(x) < \delta$. Assim, obtemos

$$\sum_{i \notin I} \psi_i(x) v(x) \|f(x) - g_i(x)\| < \delta n M < \frac{\varepsilon + r}{2} - r \tag{2}$$

De (1) e (2) resulta que

$$v(x)\|f(x) - g(x)\| < \frac{\varepsilon + r}{2}$$

e, portanto, $p_v(f - g) < \varepsilon$. ■

**2.3.4. Observação.** Se $A \subset C(X; \mathbb{R})$ e $[x]_{M(W)} \subset [x]_A$, então o teorema acima ainda vale se para cada $x \in X$, considerarmos $[x]_A$ em vez de $[x]_{M(W)}$.

Em particular, vale para todo $A \subset M(W)$ pois, neste caso, temos $[x]_{M(W)} \subset \subset [x]_A$.

**2.3.5. Definição.** Seja $\emptyset \neq W \subset CV_\infty(X;E)$ e $A \subset C(X;\mathbb{R})$. Dizemos que $W$ é $\tau_V$ *localizável sob* $A$ se para quaisquer $f \in CV_\infty(X;E)$, as seguintes condições são equivalentes:

(1) $f \in \overline{W}$ com relação à topologia $\tau_V$.

(2) dados $x \in X$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, existe $g \in W$ tal que $v(t)\|f(t) - g(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in [x]_A$.

Em outras palavras, se $W$ é $\tau_V$ localizável sob $A$, então obtemos uma caracterização do fecho de $W$ com relação à topologia $\tau_V$ por intermédio de $A$.

A noção de localizabilidade foi introduzida por Nachbin [13] para o caso em que $A$ é uma subálgebra de $C(X;\mathbb{R})$.

**2.3.6. Corolário.** *Sejam $W$ um subconjunto não vazio de $CV_\infty(X,E)$ e $A \subset M(W)$. Então $W$ é $\tau_V$ localizável sob $A$.*

**Prova.**

Segue do Teorema 2.3.3 e da Observação 2.3.4. ∎

**2.3.7. Corolário.** *Sejam $W$ um subconjunto não vazio de $CV_\infty(X,E)$ e $A \subset M(W)$. Dado $v \in V$, para cada $f \in CV_\infty(X,E)$ existe $x \in X$ tal que*

$$\inf_{g \in W} p_v(f-g) = \inf_{g \in W} \{\sup\{v(t)\|f(t)-g(t)\|; t \in [x]_A\}\}$$

**Prova.**

Façamos,

$$\begin{aligned} d_v(x) &= \inf_{g \in W}\{\sup\{v(t)\|f(t)-g(t)\|; t \in [x]_A\}\}, \text{ para cada } x \in X; \\ d_v &= \inf_{g \in W} p_v(f-g) \end{aligned}$$

Notemos que $d_v(x) \leq d_v$, para todo $x \in X$. Logo, se $d_v = 0$, então $d_v(x) = 0$ e qualquer $x$ cumpre a igualdade. Se $d_v > 0$, suponhamos por contradição que $d_v(x) < d_v$, para cada $x \in X$. Então existe uma função $g_x \in W$ tal que $\sup\{v(t)\|f(t) - g_x(t)\|; t \in [x]_A\} < d_v$, ou seja, $v(t)\|f(t) - g_x(t)\| < d_v$ para todo $t \in [x]_A$. Pela observação 2.3.4, existe $h \in W$ tal que $p_v(f-h) < d_v$, uma contradição. ∎

**2.3.8. Corolário.** *Seja $W$ um subconjunto não vazio de $CV_\infty(X;E)$ tal que*

(1) *$M(W)$ separa pontos;*

(2) *Dados $x \in X$, $u \in E$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, existe $g \in W$ tal que $v(x)\|g(x) - u\| < \varepsilon$.*

*Sob essas condições, $W$ é denso em $CV_\infty(X;E)$.*

**Prova.**

Sejam $f \in CV_\infty(X;E)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Pelo Corolário 2.3.7 e a condição (1), existe $x \in X$ tal que

$$\inf_{g \in W} p_v(f - g) = \inf_{g \in W} v(x)\|f(x) - g(x)\|.$$

Segue de (2) que, existe $g \in W$ tal que $v(x)\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$, ou seja, $\inf_{g \in W} v(x)\|f(x) - g(x)\| = 0$. Assim, $\inf_{g \in W} p_v(f - g) = 0$, isto é, existe $g \in W$ tal que $p_v(f - g) < \varepsilon$. Logo, $W$ é denso em $CV_\infty(X;E)$. ■

**2.3.9. Corolário.** *Seja $W$ um subconjunto não vazio de $CV_\infty(X;E)$ tal que*

(1) *$M(W)$ separa pontos;*

(2) *Dados $x \in X$, $u \in E$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, existe $g \in W$ tal que $\|g(x) - u\| < \varepsilon$.*

*Sob essas condições $W$ é denso em $CV_\infty(X;E)$.*

**Prova.**

Basta provar que vale a condição (2) do corolário anterior. Sejam $x \in X$, $u \in E$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Se $v(x) = 0$, então a condição é trivialmente satisfeita. Se $v(x) > 0$, por hipótese, existe $g \in W$ tal que $\|g(x) - u\| < \varepsilon(v(x))^{-1}$. Portanto, a condição (2) do corolário anterior é válida. ■

Veremos a seguir aplicações do resultado obtido.

**2.3.10. Exemplo.** Consideremos $C(X;E)$ munido da topologia compacto aberta e $C$ um cone convexo em $E$ que contém o vetor nulo. Seja $W \subset C(X;E)$, o conjunto das somas finitas de funções da forma

$$\begin{array}{rcl} X & \to & E \\ x & \to & \phi(x)\,u \end{array}$$

onde $\phi \in C(X;\mathbb{R}^+)$ e $u \in C$.

Notemos que $W(x) = C$ para todo $x \in X$. Além disso, toda $\phi \in D(X)$ é um multiplicador de $W$ e, portanto, $M(W)$ separa pontos.

Seja

$$B = \left\{ f \in C(X;E);\ f(X) \subset \overline{C} \right\}$$

Afirmamos que $\overline{W} = B$. De fato, sejam $f \in B$, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Temos que $f(x) \in \overline{C}$. Como $W(x) = C$, existe $g_x \in W$ tal que $\|f(x) - g_x(x)\| < \varepsilon$, logo, pelo Corolário 2.3.6, $f \in \overline{W}$. Assim, $B \subset \overline{W}$. Reciprocamente, temos $W \subset B$ e consequentemente $\overline{W} \subset \overline{B}$. Mas $B$ é fechado em $C(X;E)$. Com efeito, se $f \in \overline{B}$, então dado $x \in X$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $g \in B$ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ (note que $\{x\}$ é compacto). Logo, $f(x) \in \overline{C}$. Portanto, $\overline{B} \subset B$.

Como caso particular, tomemos $H$ um espaço de Hilbert real ou complexo, $E = L(H)$, $C = P(H)$ e $W$ o conjunto das somas finitas de funções da forma

$$\begin{array}{rcl} X & \to & L(H) \\ x & \to & \phi(x)\, T \end{array}$$

onde $\phi \in C(X;\mathbb{R}^+)$ e $T \in P(H)$. Como $P(H)$ é fechado em $L(H)$, temos que $\overline{W} = \{ f \in C(X; L(H));\ f(X) \subset P(H) \}$.

**2.3.11. Definição.** Um subconjunto $W \subset CV_\infty(X;E)$ é uma *família interpolante* para $CV_\infty(X;E)$ se, dado qualquer subconjunto finito $S \subset X$ e qualquer função $f \in CV_\infty(X;E)$, existe $g \in W$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in S$.

**2.3.12. Exemplo.** Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Todo subespaço vetorial de $CV_\infty(X;\mathbb{K})$ denso em $CV_\infty(X;\mathbb{K})$ é uma família interpolante para $CV_\infty(X;\mathbb{K})$. De fato, seja $S = \{x_1, ... x_n\} \subset X$ e consideremos $\mathbb{K}^n$ com a norma do máximo (i.e., $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$). Se provarmos que a aplicação linear

$$\begin{array}{rcccl} T & : & CV_\infty(X;\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^n \\ & & f & \to & (f(x_1), ..., f(x_n)) \end{array}$$

é contínua, então tomando qualquer subespaço vetorial $F \subset CV_\infty(X;\mathbb{K})$ denso, obtemos $T(CV_\infty(X;\mathbb{K})) = T\left(\overline{F}\right) \subset \overline{T(F)}$. Por outro lado, $T(F)$ é fechado por ser um subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$. Assim, $T(CV_\infty(X;\mathbb{K})) \subset T(F)$ e, portanto, $T(CV_\infty(X;\mathbb{K})) = T(F)$. Logo, para qualquer $f \in CV_\infty(X;\mathbb{K})$, existe $g \in F$ tal que $(f(x_1), ... f(x_n)) = (g(x_1), ..., g(x_n))$.

Mostremos então que $T$ é contínua. Como $CV_\infty(X;\mathbb{K})$ é um espaço vetorial topológico, basta provar que $T$ é contínua na função nula. Dado $\varepsilon > 0$, seja $B(0;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{K}^n;\ \|x\| < \varepsilon\}$. Para cada $x_i \in S$, existe $v_i \in V$ tal que $v_i(x_i) > 0$. Tomemos $0 < \delta_i < \varepsilon v_i(x_i)$, $i = 1, ..., n$. Seja $U = \bigcap_{i=1}^{n} B_{v_i,\delta_i}(0)$. $U$ é uma vizinhança da função nula. Se $g \in U$, então $\sup_{x\in X} v_i(x)|g(x)| < \delta_i$, $i = 1, ..., n$. Logo, $v_i(x_i)|g(x_i)| < \delta_i < \varepsilon v_i(x_i)$, ou seja, $|g(x_i)| < \varepsilon$, $i = 1, ..., n$. Portanto, $\|(g(x_1), ..., g(x_n))\| < \varepsilon$ e concluímos que $T(U) \subset B(0;\varepsilon)$. Através dos argumentos utilizados acima, observemos que, se $E$ for um espaço normado de dimensão finita, então todo subespaço vetorial de $CV_\infty(X;E)$ denso em $CV_\infty(X;E)$ é uma família interpolante para $CV_\infty(X;E)$.

**2.3.13. Corolário.** *Seja $B \subset CV_\infty(X;E)$ uma família interpolante para $CV_\infty(X;E)$ tal que $M(B)$ separa pontos. Então, dados $f \in CV_\infty(X;E)$, $v \in V$, $\varepsilon > 0$ e $S \subset X$ finito, existe $g \in B$ tal que $p_v(f-g) < \varepsilon$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in S$.*

**Prova.**

Sejam $f \in CV_\infty(X;E)$ e $S \subset X$ finito. Definamos

$$W = \{g \in B;\ f(x) = g(x), \text{ para todo } x \in S\}.$$

$W \neq \emptyset$, pois $B$ é uma família interpolante. Notemos que todo multiplicador de $B$ também é um multiplicador de $W$. Para cada $x \in X$, existe $g_x \in B$ tal que $g_x(s) = f(s)$ para todo $s \in S \cup \{x\}$. Assim, $g_x \in W$ e dados $v \in V$, $\varepsilon > 0$ temos $v(x)\|f(x) - g_x(x)\| = 0 < \varepsilon$. Aplicando o Teorema 2.3.3 a $W$, obtemos uma função $g \in W$ tal que $p_v(f-g) < \varepsilon$. Pela definição de $W$, segue que $g \in B$ e $g(x) = f(x)$, para todo $x \in S$. ■

**2.3.14. Corolário.** *Sejam $E$ um espaço normado de dimensão finita e $B \subset CV_\infty(X;E)$ um subespaço vetorial denso em $CV_\infty(X;E)$ tal que $M(B)$ separa pontos. Então, dados $f \in CV_\infty(X;E)$, $v \in V$, $\varepsilon > 0$ e $S \subset X$ finito, existe $g \in B$ tal que $p_v(f-g) < \varepsilon$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in S$.*

**Prova.**

Segue do Exemplo 2.3.12 e do Corolário 2.3.13. ■

Falaremos agora sobre a versão do Teorema de Stone Weierstrass para módulos que envolvem álgebras limitadas.

**2.3.15. Definição.** Seja $C_b(X;\mathbb{R})$ o subespaço vetorial de $C(X;\mathbb{R})$ formado pelas funções limitadas em $X$ e consideremos a topologia da convergência uniforme sobre $C_b(X;\mathbb{R})$. Se $A$ é uma subálgebra de $C_b(X;\mathbb{R})$, então um subespaço vetorial $W \subset CV_\infty(X;E)$ é dito um *$A$-módulo*, se a função $x \to a(x)f(x)$ pertence a $W$, para todo $a \in A$ e $f \in W$.

**2.3.16. Observação.** Notemos que se $B$ é a subálgebra de $C_b(X;\mathbb{R})$ gerada por $A$ e pelas funções constantes, então $W$ é um $A$-módulo se, e somente se, $W$ é um $B$-módulo. Além do mais, $[x]_A = [x]_B$.

Para provarmos o análogo do Teorema 2.3.3 para módulos, precisaremos de dois lemas.

O próximo resultado é semelhante ao Lema 2.3.2. Entretanto, as propriedades de subálgebra facilitam a demonstração e não é preciso usar argumentos como a Proposição 2.2.15 de Jewett. A demonstração é essencialmente a mesma do Lema 2, Capítulo 1, Prolla [18]. Só observamos que tirando a compacidade de $X$ e exigindo a compacidade de determinados subconjuntos de $X$, o resultado ainda era válido. Colocamos a demonstração aqui, para que o leitor possa comparar o Lema 2.3.2 e o presente resultado.

**2.3.17. Lema.** *Seja $A \subset C_b(X;\mathbb{R})$ uma subálgebra que contém as funções constantes. Sejam $x \in X$ e $N$ uma vizinhança aberta de $[x]_A$ em $X$, tal que o complementar de $N$, $X \backslash N$, seja compacto. Então, existe uma vizinhança aberta $U$ de $[x]_A$* em *$X$, $U \subset N$, tal que para cada $0 < \delta < 1$, existe $\phi \in A$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $0 \leq \phi \leq 1$;
(2) $\phi(t) < \delta$, *para todo* $t \notin N$;
(3) $\phi(t) > 1 - \delta$, *para todo* $t \in U$.

**Prova.**

Seja $K = X \backslash N$. Como $[x]_A \subset N$, para cada $t \in K$, existe $g_t \in A$ tal que $g_t(t) \neq g_t(x)$. Definamos

$$f_t(s) = \frac{g_t(s) - g_t(x)}{g_t(t) - g_t(x)}, \ s \in X.$$

Notemos que $f_t \in A$, $f_t(t) = 1$ e $f_t(x) = 0$. Seja $\phi_t = f_t^2$. Temos que $\phi_t \in A$, $\phi_t \geq 0$, $\phi_t(t) = 1$ e $\phi_t(x) = 0$. Consideremos

$$U(t) = \{s \in X;\ \phi_t(s) > 1/2\}.$$

$U(t)$ é uma vizinhança aberta de $t$ e não tem elementos de $[x]_A$ pois, $\phi_t(s) = 0$ para todo $s \in [x]_A$. Pela compacidade de $K$, existem $t_1, ..., t_m$ em $K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(t_i)$. Sejam

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^{m} \phi_{t_i} \\ f &= g/\|g\| \end{aligned}$$

Temos que $f \in A$, $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 0$ e $f(s) \geq c$, para todo $s \in K$, onde $c = (2\|g\|)^{-1}$. Observemos que $0 < c \leq 1$. Escolhamos então $a$ e $b$ tais que $0 < 2a < b < c \leq 1$. Definamos

$$U = \{t \in X;\ f(t) < a\}.$$

Observemos que $[x]_A \subset U \subset N$. De fato, se $s \in [x]_A$ então $\phi_{t_i}(s) = 0$ para $i = 1, ..., m$, de onde segue que $[x]_A \subset U$. Por outro lado, se $s \notin N$, então $f(s) \geq c$ e portanto $s \notin U$.

Agora, dado $0 < \delta < 1$, segue da Proposição 2.2.13 que existe um polinomio $p(x) = (1 - x^m)^n$ tal que

$(i)$ $p(t) > 1 - \delta$, para $0 \leq t \leq a$,
$(ii)$ $p(t) < \delta$, para $b \leq t \leq 1$.

Definamos então

$$\phi(s) = (p \circ f)(s), \text{ para todo } s \in X.$$

Claramente, $\phi \in A$ e $0 \leq \phi \leq 1$. Agora, se $t \notin N$, então $t \in K$ e assim $f(t) \geq c$. Pela parte $(ii)$, temos $\phi(t) = (p \circ f)(t) < \delta$. Se $t \in U$, então $f(t) < a$, e por $(i)$ temos $\phi(t) = (p \circ f)(t) > 1 - \delta$. ■

O próximo lema exibe uma partição da unidade formada por elementos de uma subálgebra de $C_b(X;\mathbb{R})$. Os argumentos são semelhantes aos que utilizamos para o caso de multiplicadores de um subconjunto de $CV_\infty(X;E)$.

**2.3.18. Lema.** *Seja $A \subset C_b(X;\mathbb{R})$ uma subálgebra que contém as funções constantes. Suponhamos que para cada $x \in X$, $N(x)$ é uma vizinhança aberta de $[x]_A$ em $X$, tal que $X \backslash N(x)$ é compacto. Então, existem $x_1, ..., x_m$ em $X$ tais que, dado $0 < \delta < 1$, existem $\psi_1, ...\psi_m$ em $A$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $0 \leq \psi_i \leq 1$, $i = 1, ..., m$;

(2) $\sum \psi_i(t) = 1$, *para todo* $t \in X$;
(3) $0 \leq \psi_i(t) < \delta$, *para todo* $t \notin N(x_i)$, $i = i, ..., n$.

**Prova.**

Escolhamos $x_1 \in X$ arbitrário. Seja $K = X \backslash N(x_1)$. Pelo Lema 2.3.17, para cada $x \in X$, podemos tomar uma vizinhança $U(x)$ de $[x]_A$, $U(x) \subset N(x)$. Pela compacidade de $K$, existem $x_2, ... x_m \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=2}^{m} U(x_i)$. Ainda pelo Lema 2.3.17 temos que dado $0 < \delta < 1$, existem $\phi_2, ..., \phi_m \in A$ tais que

(a) $0 \leq \phi_i \leq 1$;
(b) $\phi_i(t) < \delta$, para todo $t \notin N(x_i)$;
(c) $\phi_i(t) > 1 - \delta$, para todo $t \in U(x_i)$;

para $i = 2, ..., m$. Definamos

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= \phi_2 \\
\psi_3 &= (1 - \phi_2)\phi_3 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\psi_m &= (1 - \phi_2)(1 - \phi_3)...(1 - \phi_{m-1})\phi_m.
\end{aligned}$$

Observemos que $0 \leq \psi_i \leq 1$ e $\psi_i \in A$ para $i = 2, ..., m$.

A seguinte identidade

$$\psi_2 + ...\psi_j = 1 - (1 - \phi_2)(1 - \psi_3)...(1 - \psi_j), \ j = 2, ..., m.$$

pode ser facilmente provada por indução. Definamos então

$$\psi_1 = (1 - \phi_2)(1 - \phi_3)...(1 - \phi_m).$$

Notemos que $0 \leq \psi_1 \leq 1$, $\psi_1 \in A$ e $\sum_{i=1}^{m} \psi_i = 1$. Assim, obtemos (1) e (2). Provemos agora que $\psi_i(t) < \delta$ para todo $t \notin N(x_i)$, $i = 1, 2, ..., m$. De fato, se $i \geq 2$ então $\psi_i(t) \leq \phi_i(t)$ e de (b), obtemos $\psi_i(t) < \delta$. Para $i = 1$, se $t \notin N(x_1)$, então $t \in K$. Logo $t \in U(x_j)$ para algum $j = 2, ..., m$. Pelo item (c), $1 - \phi_j(t) < \delta$ e assim

$$\psi_1(t) = (1 - \phi_j(t)) \prod_{i \neq j} (1 - \phi_i(t)) < \delta.$$

■

**2.3.19. Teorema.** *Sejam $A$ uma subálgebra de $C_b(X;\mathbb{R})$ e $W \subset CV_\infty(X;E)$ um $A$-módulo. Dados $f \in CV_\infty(X;E)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) Existe $g \in W$ tal que $p_v(f-g) < \varepsilon$;*

*(b) Para todo $x \in X$, existe $g_x \in W$ tal que $v(t)\|f(t) - g_x(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \in [x]_A$.*

**Prova.**

A prova é semelhante à do Teorema 2.3.3. Porém, em vez de usar multiplicadores de $W$, utiliza-se a subálgebra $B$ gerada por $A$ e a função constante 1, já que $[x]_A = [x]_B$. Através do Lema 2.3.18 e das propriedades de um $A$-módulo, obtém-se analogamente o resultado. ∎

De posse desse Teorema, obtemos consequências análogas aos resultados 2.3.6 a 2.3.9.

**2.3.20. Exemplo.** Seja $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto. $\mathcal{K}(X;E)$ denota o $C_b(X;\mathbb{R})$-módulo constituído de todas as funções de suporte compacto. $\mathcal{K}(X;E)$ é denso em $CV_\infty(X;E)$, onde $V$ é um conjunto qualquer de pesos. De fato, notemos inicialmente que $C_b(X;\mathbb{R})$ separa pontos (observe que $X$ é completamente regular e Hausdorff). Sejam $u \in E$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Para cada $x \in X$, existe uma função $\phi \in C_b(X;\mathbb{R})$ de suporte compacto tal que $\phi(x) = 1$. Faça $g = \phi(.)u$. Notemos que $g \in \mathcal{K}(X;E)$ e $g(x) = u$. Logo,

$$\|u - g(x)\| = 0 < \varepsilon$$

Portanto, pelo análogo do Corolário 2.3.9 para módulos, temos que $\mathcal{K}(X;E)$ é denso em $CV_\infty(X;E)$.

Seja $C_b(X;E)$ o subespaço vetorial de $C(X;E)$ constituído de todas as funções limitadas. Usando um raciocínio análogo, pode-se provar que o $C_b(X;\mathbb{R})$-módulo, $C_b(X;E) \cap CV_\infty(X;E)$, é denso em $CV_\infty(X;E)$.

**2.3.21. Observação.** Seja $A \subset C_b(X;\mathbb{C})$ uma subálgebra. Indiquemos por $A(\mathbb{R})$, o conjunto $\{f \in A;\ f(X) \subset \mathbb{R}\}$. $A(\mathbb{R})$ é uma subálgebra de $C(X;\mathbb{R})$. O resultado 2.3.19, também vale para o caso em que $E$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $W \subset CV_\infty(X;E)$ é um $A$-módulo, onde $A \subset C_b(X;\mathbb{C})$ é uma subálgebra complexa auto-adjunta. De fato, basta notar que $W$ é um $A(\mathbb{R})$-módulo e para cada $x \in X$, $[x]_A = [x]_{A(\mathbb{R})}$.

Ressaltamos que Nachbin [13] já tinha provado a localizabilidade de um $A$-módulo $W \subset CV_\infty(X;\mathbb{K})$, onde $A$ é uma subálgebra de $C_b(X;\mathbb{R})$ ou uma subálgebra auto-adjunta de $C_b(X;\mathbb{C})$. A demonstração dele é baseada num resultado sobre partição da unidade que depende do Teorema clássico de Stone Weierstrass. Mas, a demonstração vista aqui é baseada no resultado de Jewett que depende da desigualdade de Bernoulli.

# Capítulo 3

# Aproximação de Portadores

## 3.1 Introdução

Sejam $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto e $E$ um espaço normado. Se $W$ é um subconjunto não vazio de $C_0(X;E)$, estamos interessados em estabelecer uma "fórmula de localização" para a distância de um portador $\phi$ a $W$:

$$d(\phi, W) = \inf_{g \in W} \sup_{x \in X} \sup_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\| .$$

Ou seja, se $A$ é um subconjunto dos multiplicadores de $W$, então sob que condições existe $x \in X$ tal que

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x]_A}, W|_{[x]_A}\right) ?$$

O nosso objetivo é mostrar que isto é possível quando $\phi$ é semicontínuo superiormente e nulo no infinito com relação a $W$.

Para isto, utilizaremos os resultados 2.2.13. e 2.3.1 do Capítulo 2, juntamente com os argumentos de Ransford [19], Machado[10] e Prolla[17].

## 3.2 Preliminares

Ressaltamos que no decorrer deste capítulo, utilizaremos algumas notações e definições vistas no Capítulo 2.

Consideremos $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto e $E$ um espaço normado sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se $Y \subset X$ é um subconjunto não vazio e $f : X \to S$ é qualquer função onde $S$ é um conjunto não vazio, indicaremos por $f|_Y$ a função $y \in Y \to f(y)$. Se $F$ é qualquer família não vazia de funções $f : X \to S$, denotamos por $F|_Y$ o conjunto $\{f|_Y ; f \in F\}$.

**3.2.1. Definição.** Um conjunto $F$ de funções $f : X \to E$ é equicontínuo em $x_0 \in X$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U$ de $x_0$, tal que para todo $x \in U$, $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, qualquer que seja $f \in F$. Se $F$ é equicontínuo para todo $x \in X$, dizemos que $F$ é equicontínuo.

**3.2.2. Definição.** Um subconjunto $F \subset C_0(X; E)$ é totalmente limitado se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $f_1, ..., f_n \in F$ tais que $F \subset B(f_1; \varepsilon) \cup ... \cup B(f_n; \varepsilon)$, onde $B(f_i; \varepsilon) = \{f \in C_0(X; E) ; \|f - f_i\| < \varepsilon\}$, $i = 1, ..., n$.

**3.2.3. Proposição.** *Sejam $X$ um espaço de Hausdorff e $\{K_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família de compactos não vazios contidos em $X$. Se $\bigcap_{\alpha \in J} K_\alpha \neq \emptyset$, para todo $J \subset L$ finito, então $\bigcap_{\alpha \in L} K_\alpha \neq \emptyset$.*

**Prova.**

Segue da propriedade da intersecção finita e da compacidade dos subespaços $K_\alpha$, $\alpha \in L$. ■

**3.2.4. Lema de Zorn.** *Se $P$ é um conjunto não vazio parcialmente ordenado em que toda cadeia tem um limite inferior, então $P$ tem um elemento minimal.*

**3.2.5. Definição.** Seja $\mathcal{B}(E)$ o conjunto das partes não vazias e limitadas de $E$. Uma função $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ é chamada de *portador*. Definimos a *distância de $\phi$ a $g \in C_0(X; E)$* como

$$d(\phi, g) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\|$$

e a *distância de $\phi$ a $W \subset C_0(X; E)$* como

$$d(\phi, W) = \inf \{d(\phi, g) ; g \in W\}$$

Analogamente, definimos para $T \subset X$

$$d(\phi|_T, g|_T) = \sup_{x \in T} \sup_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\|$$

$$d(\phi|_T, W|_T) = \inf \{d(\phi|_T, g|_T) ; g \in W\}$$

Se $v \in E$ e $r > 0$, então denotamos o conjunto $\{x \in E; \|x - v\| < r\}$ por $B(v; r)$.

**3.2.6. Definição.** Um portador $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ é *semicontínuo superiormente com relação a* $g \in C_0(X; E)$, se dado $r > 0$, para cada $x \in X$ tal que $\phi(x) \subset B(g(x); r)$ e cada $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U$ de $x$ tal que $\phi(y) \subset B(g(y); r + \varepsilon)$ para todo $y \in U$. Se $W$ é um subconjunto não vazio de $C_0(X; E)$ dizemos que $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ *é semicontínuo superiormente com relação a* $W$, se $\phi$ é semicontínuo superiormente com relação a toda função $g \in W$.

Em particular, se o conjunto $\{x \in X; \phi(x) \subset B(g(x); r)\}$ é aberto para qualquer $g \in W$ e $r > 0$, então $\phi$ é semicontínuo superiormente com relação a $W$.

**3.2.7. Exemplo.** Se $f \in C_0(X; E)$, então $\phi(x) = \{f(x)\}$, $x \in X$, é semicontínuo superiormente com relação a qualquer subconjunto não vazio de $C_0(X; E)$. De fato, seja $W$ um subconjunto não vazio de $C_0(X; E)$. Para cada $g \in W$ e $r > 0$, o conjunto $\{x \in X; \|f(x) - g(x)\| < r\}$ é aberto.

**3.2.8. Exemplo.** Seja $\emptyset \neq F \subset C_0(X; E)$ equicontínuo e limitado. O portador $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$, $\phi(x) = \{f(x); f \in F\}$ é semicontínuo superiormente com relação a qualquer $W \subset C_0(X; E)$. De fato, sejam $g \in W$, $r > 0$, $x \in X$ tal que $\phi(x) \subset B(g(x); r)$ e $\varepsilon > 0$ dados. Pela equicontinuidade de $F$, existe uma vizinhança $U$ de $x$ tal que $\|f(y) - g(y) - (f(x) - g(x))\| < \varepsilon$ para todo $y \in U$ e $f \in F$. Assim, $y \in U$ implica $\phi(y) \subset B(g(y); r + \varepsilon)$. Em particular, se $F \subset C_0(X; E)$ é totalmente limitado, então o portador $\phi$ definido acima é semicontínuo superiormente com relação a $W \subset C_0(X; E)$.

**3.2.9. Definição.** Sejam $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ e $g \in C_0(X; E)$. Dizemos que $\phi$ *é nulo no infinito com relação a* $g$ se para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{x \in X; \phi(x) \cap (E \backslash B(g(x); \varepsilon)) \neq \emptyset\}$ é relativamente compacto. Se $\emptyset \neq W \subset C_0(X; E)$, dizemos que $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ *é nulo no infinito com relação a* $W$ se $\phi$ é nulo no infinito com relação a toda função $g \in W$.

**3.2.10. Exemplo.** O portador $\phi$ do exemplo 3.2.7 é nulo no infinito com relação a qualquer $\emptyset \neq W \subset C_0(X; E)$.

**3.2.11. Observação.** As definições 3.2.6 e 3.2.9 foram introduzidas por Machado e Prolla [17].

## 3.3 Resultados

As duas próximas proposições caracterizam um portador semicontínuo superiormente e nulo no infinito. Estes resultados são de fundamental importância para nossos propósitos.

**3.3.1. Proposição.** *Um portador $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ é semicontínuo superiormente com relação a $g \in C_0(X; E)$, se, e somente se, a função de $X$ em $\mathbb{R}$, $x \to \sup\limits_{y\in\phi(x)} \| y - g(x) \|$, é semicontínua superiormente.*

**Prova.**

Para provar que a função $x \to \sup\limits_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\|$ é semicontínua superiormente, basta provar que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, o conjunto $\left\{x \in X;\ \sup\limits_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\| < \alpha\right\}$ é aberto em $X$. Assim, se $t \in X$ e $\sup\limits_{y\in\phi(t)} \|y - g(t)\| < \alpha$, podemos escolher $\beta > 0$ tal que $\sup\limits_{y\in\phi(t)} \|y - g(t)\| < \beta < \alpha$. Segue daí, que $\phi(t) \subset B(g(t); (\beta + \alpha)/2)$. Pela semicontinuidade de $\phi$, existe uma vizinhança $U$ de $t$ tal que $\phi(z) \subset B(g(z); [(\beta+\alpha)/2] + \varepsilon_0)$ para todo $z \in U$ e $0 < \varepsilon_0 < (\alpha - \beta)/2$. Logo,

$$\sup_{y\in\phi(z)} \|y - g(z)\| \leq [(\beta + \alpha)/2] + \varepsilon_0 < \alpha,$$

para todo $z \in U$. Portanto, $\left\{x \in X;\ \sup\limits_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\| < \alpha\right\}$ é aberto e consequentemente, a função $x \to \sup\limits_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\|$ é semicontínua superiormente. Reciprocamente, sejam $r > 0$ e $t \in X$ tais que $\phi(t) \subset B(g(t), r)$ e $\varepsilon > 0$ dados. Para todo $y \in \phi(t)$, temos $\|y - g(t)\| < r$, e consequentemente $\sup\limits_{y\in\phi(t)} \|y - g(t)\| < r + \varepsilon$. Logo, $t \in \left\{x \in X;\ \sup\limits_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\| < r + \varepsilon\right\}$. Como a função $x \to \sup\limits_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\|$ é semicontínua superiormente, existe uma vizinhança $U$ de $t$ tal que $\sup\limits_{y\in\phi(z)} \|y - g(z)\| < r + \varepsilon$, para todo $z \in U$. Assim, $\phi(z) \subset B(g(z), r + \varepsilon)$, para todo $z \in U$ e portanto, $\phi$ é semicontínuo superiormente com relação a $g$. ■

**3.3.2. Proposição.** *Um portador $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ é nulo no infinito com relação a $g \in C_0(X; E)$, se, e somente se, a função $x \to \sup\limits_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\|$,*

*$x \in X$, é nula no infinito.*

**Prova.**

Dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $K = \overline{\{x \in X;\ \phi(x) \cap (E \setminus B(g(x);\varepsilon/2)) \neq \emptyset\}}$ é compacto. Para cada $x \notin K$, $\phi(x) \subset B(g(x);\varepsilon/2)$, ou seja, $\|y - g(x)\| < \varepsilon/2$, para todo $y \in \phi(x)$. Assim $\sup\limits_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\| < \varepsilon$, para todo $x \notin K$.

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $\left\{x \in X;\ \sup\limits_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\| \geq \varepsilon\right\}$ é relativamente compacto. Afirmamos que

$$\{x \in X;\ \phi(x) \cap (E \backslash B(g(x),\varepsilon)) \neq \emptyset\} \subset \left\{x \in X;\ \sup_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\| \geq \varepsilon\right\}.$$

De fato, se $x \in X$ é tal que $\phi(x) \cap (E \backslash B(g(x),\varepsilon)) \neq \emptyset$ então existe $y_0 \in \phi(x)$ tal que $\|y_0 - g(x)\| \geq \varepsilon$. Logo, $\sup\limits_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\| \geq \|y_0 - g(x)\| \geq \varepsilon$ e a inclusão acima é verdadeira. Portanto, $\overline{\{x \in X;\ \phi(x) \cap (E \backslash B(g(x),\varepsilon)) \neq \emptyset\}}$ é compacto. ∎

O próximo resultado é baseado nos argumentos de Ransford [19] e Machado [10]. Para obtê-lo foram essenciais:

(1) a caracterização dos portadores semicontínuos superiormente e nulos no infinito;

(2) o fato de que a restrição a um fechado, de uma função positiva semicontínua superiormente e nula no infinito, assume máximo;

(3) a propriedade da intersecção finita.

**3.3.3. Proposição.** *Sejam $\emptyset \neq W \subset C_0(X;E)$ e $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ um portador semicontínuo superiormente e nulo no infinito com relação a $W$. Se $d(\phi, W) > 0$, então existe $\emptyset \neq S \subset X$ fechado e minimal com relação à ordem de inclusão, tal que*

$$d(\phi, W) = d(\phi|_S, W|_S).$$

**Prova.**

Para provar esse resultado, utilizaremos o Lema de Zorn. Façamos $d = d(\phi, W)$ e $d_T = d(\phi_T, W_T)$, $T \subset X$. Seja

$$\mathcal{F} = \{\emptyset \neq T \subset X;\ T \text{ fechado e } d = d_T\}.$$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $X \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ é ordenado pela relação de inclusão. Tomemos $\mathcal{C} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma cadeia arbitrária em $\mathcal{F}$. Para cada $g \in W$ e $\alpha \in L$, definimos

$$K(g, T_\alpha) = \left\{ x \in T_\alpha;\ \sup_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\| \geq d \right\}$$

Afirmamos que $K(g, T_\alpha) \neq \emptyset$. De fato, como o portador $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$ é semicontínuo superiormente e nulo no infinito com relação a $W$, segue das proposições 3.3.1 e 3.3.2 que a função $x \to \sup\limits_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\|$, $x \in X$, é semicontínua superiormente e nula no infinito. Assim, pelo Lema 2.3.1 do Cap 2, existe $x_\alpha \in T_\alpha$ tal que

$$\sup_{x \in T_\alpha} \sup_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\| = \sup_{y \in \phi(x_\alpha)} \|y - g(x_\alpha)\|$$

Sendo $d = d_{T\alpha} \leq \sup\limits_{x \in T_\alpha} \sup\limits_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\|$, temos que $x_\alpha \in K(g, T_\alpha)$, logo, $K(g, T_\alpha) \neq \emptyset$. Observemos que o fato da função $x \to \sup\limits_{y \in \phi(x)} \|y - g(x)\|$ ser semicontínua superiormente e nula no infinito também implica que $K(g, T_\alpha)$ é compacto para cada $\alpha \in L$. Assim, $\{K(g, T_\alpha)\}_{\alpha \in L}$ é uma coleção de compactos não vazios. Agora, consideremos uma coleção finita qualquer $\{K(g, T_{\alpha_1}), ..., K(g, T_{\alpha_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, para alguma permutação $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ do conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, temos que

$$T_{\beta_1} \subset ... \subset T_{\beta_n}.$$

Isso implica que $K\left(g, T_{\beta_1}\right) \subset ... \subset K\left(g, T_{\beta_n}\right)$. Logo,

$$\bigcap_{i=1}^{n} K(g, T_{\alpha_i}) = K\left(g, T_{\beta_1}\right) \neq \emptyset.$$

Portanto, segue da Proposição 3.2.3 que $\bigcap\limits_{\alpha \in L} K(g, T_\alpha) \neq \emptyset$ e, consequentemente, $\bigcap\limits_{\alpha \in L} T_\alpha \neq \emptyset$. Para facilitar a notação, consideremos $T = \bigcap\limits_{\alpha \in L} T_\alpha$. Provemos que $d = d_T$. De fato, temos que $d_T \leq d$. Por outro lado, para cada $g \in W$, existe $x_g \in \bigcap\limits_{\alpha \in L} K(g, T_\alpha)$ e, assim,

$$\sup_{y \in \phi(x_g)} \|y - g(x_g)\| \geq d. \tag{1}$$

Mas, como $\bigcap\limits_{\alpha\in L} K(g,T_\alpha) \subset T$, temos que $x_g \in T$ e, portanto,

$$\sup_{y\in\phi(x_g)} \|y - g(x_g)\| \leq \sup_{x\in T} \sup_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\| \tag{2}$$

Como $g$ é arbitrário, segue de (1) e (2) que

$$\inf_{g\in W} \sup_{x\in T} \sup_{y\in\phi(x)} \|y - g(x)\| \geq d,$$

ou seja, $d \leq d_T$. Portanto, $d = d_T$ e $T$ é uma cota inferior de $\mathcal{C}$, logo, segue do Lema de Zorn que $\mathcal{F}$ tem um elemento minimal $\emptyset \neq S \subset X$. ■

■

Demonstraremos a seguir, o principal resultado deste capítulo. A idéia foi inspirada num resultado de Prolla [18] que trata da distância de uma função $f \in C(X;E)$ a um subconjunto de $C(X;E)$, onde $X$ é compacto e Hausdorff. Utilizaremos os resultados 2.2.13 de Jewett e a Proposição 3.3.3.

**3.3.4. Teorema.** *Seja $W$ um subconjunto não vazio de $C_0(X;E)$. Se um portador $\phi : X \to B(E)$ é semicontínuo superiormente e nulo no infinito com relação a $W$, então existe $x \in X$ tal que*

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x]_{M(W)}}, W|_{[x]_{M(W)}}\right).$$

**Prova.**

Consideremos $d = d(\phi, W)$ e $d_T = d(\phi|_T, W|_T)$, onde $T \subset X$. Se $d = 0$, não há o que provar, pois $d_{[x]_{M(W)}} \leq d$, para todo $x \in X$. Consideremos então, $d > 0$. Seja $S \subset X$ o fechado minimal não vazio da Proposição 3.3.3. Provemos que $S \subset [x]_{M(W)}$ para algum $x \in X$. Suponhamos que isso não ocorra. Então, existem $s_1$, $s_2 \in S$ tais que $\psi(s_1) \neq \psi(s_2)$ para algum $\psi \in M(W)$. Podemos assumir que $\psi(s_1) < \psi(s_2)$. Escolhamos $a < b$ tal que $\psi(s_1) < a < b < \psi(s_2)$. Podemos tomar $2a < b$. De fato, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $(a\,/\,b)^k < 1\,/\,2$, então $\psi^k(s_1) < \alpha < \beta < \psi^k(s_2)$, onde $\alpha = a^k$ e $\beta = b^k$. Observemos que $2\alpha < \beta$ e $\psi^k \in M(W)$. Sejam

$$\begin{aligned} Y &:= S \cap \psi^{-1}([0,b]) \\ Z &:= S \cap \psi^{-1}([a,1]) \end{aligned}$$

$Y$ e $Z$ são subconjuntos próprios de $S$, não vazios, fechados e $S = Y \cup Z$. Basta notar que $\psi(s_1) < a < b < \psi(s_2)$ implica $s_1 \in Y \backslash Z$ e $s_2 \in Z \backslash Y$. Pela minimalidade de $S$, existem $v, w \in W$ tais que

$$\begin{aligned} \sup_{x\in Y}\sup_{y\in\phi(x)} \|y - v(x)\| &< d \\ \sup_{x\in Z}\sup_{y\in\phi(x)} \|y - w(x)\| &< d \end{aligned}$$

Seja $r > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{x\in Y}\sup_{y\in\phi(x)} \|y - v(x)\| &< r < d \\ \sup_{x\in Z}\sup_{y\in\phi(x)} \|y - w(x)\| &< r < d\,. \end{aligned}$$

Escolhamos $0 < \varepsilon_0 < 1$ tal que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< r - \sup_{x\in Y}\sup_{y\in\phi(x)} \|y - v(x)\| \\ \varepsilon_0 &< r - \sup_{x\in Z}\sup_{y\in\phi(x)} \|y - w(x)\|\ . \end{aligned}$$

Como $v, w \in C_0(X; E)$, elas são limitadas e, portanto, podemos tomar $C > 0$ tal que $\|v\| \le C$, $\|w\| \le C$ e $C > \varepsilon_0/2$. Consideremos agora, $\delta = \varepsilon_0 / 2C$. Pela Proposição 2.2.13, Capítulo 2, existe um polinômio $p(x) = (1 - x^m)^n$ tal que

$$\begin{aligned} p(x) &> 1 - \delta, \text{ se } 0 \le x \le a & (1) \\ p(x) &< \delta, \text{ se } b \le x \le 1 & (2) \end{aligned}$$

Seja $\xi(x) = p(\psi(x))$, $x \in X$. Como $M(W)$ tem a Propriedade V, $\xi \in M(W)$ e portanto a função $h = \xi v + (1 - \xi) w \in W$. Provemos agora que $\sup_{y\in\phi(x)} \|y - h(x)\| \le r$, para todo $x \in S$. Dado $x \in S$, analisemos três casos:

$(i)$ $x \in Y \cap Z$

$$\begin{aligned} \|y - h(x)\| &\le \xi(x)\|y - v(x)\| + (1 - \xi(x))\|y - w(x)\| \\ &\le \xi(x)\sup_{y\in\phi(x)}\|y - v(x)\| + (1 - \xi(x))\sup_{y\in\phi(x)}\|y - w(x)\| \\ &< \xi(x) r + (1 - \xi(x)) r = r \end{aligned}$$

Portanto, $\sup_{y\in\phi(x)} \|y - h(x)\| \le r$

$(ii)$ $x \in Y \backslash Z$

se $x \in Y\backslash Z$, então $\psi(x) < a$ e por (1) $\xi(x) > 1 - \delta$. Assim,

$$\|h(x) - v(x)\| \le (1 - \xi(x))\|w(x) - v(x)\| < 2\delta C = \varepsilon_0$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|y-h(x)\| &\leq \|y-v(x)\|+\|v(x)-h(x)\| \\ &\leq \|y-v(x)\|+\varepsilon_0\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\sup_{y\in\phi(x)}\|y-h(x)\|\leq \sup_{x\in Y}\sup_{y\in\phi(x)}\|y-v(x)\|+\varepsilon_0$$

ou seja, $\sup\limits_{y\in\phi(x)}\|y-h(x)\|<r$.

$(iii)$ $x\in Z\backslash Y$

Se $x\in Z\backslash Y$, $\psi(x)>b$ e por (2) $\xi(x)<\delta$. Logo, sendo $w=\xi w+$ $+(1-\xi)w$, temos

$$\|h(x)-w(x)\|\leq\xi(x)\|v(x)-w(x)\|<\delta\|v(x)-w(x)\|\leq 2\delta C=\varepsilon_0$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|y-h(x)\| &\leq \|y-w(x)\|+\|w(x)-h(x)\| \\ &\leq \|y-w(x)\|+\varepsilon_0\end{aligned}$$

e obtemos

$$\sup_{y\in\phi(x)}\|y-h(x)\|\leq\sup_{x\in Z}\sup_{y\in\phi(x)}\|y-w(x)\|+\varepsilon_0$$

Logo, $\sup\limits_{y\in\phi(x)}\|y-h(x)\|<r$.

Como $S=(Y\cap Z)\cup(Y\backslash Z)\cup(Z\backslash Y)$, segue que $\sup\limits_{y\in\phi(x)}\|y-h(x)\|\leq r$, para todo $x\in S$. Assim, $\sup\limits_{x\in S}\sup\limits_{y\in\phi(x)}\|y-h(x)\|\leq r$ e portanto,

$$\inf_{g\in W}\sup_{x\in S}\sup_{y\in\phi(x)}\|y-g(x)\|\leq r<d$$

ou seja, $d_S<d$, que é uma contradição. Logo, concluímos que $S\subset[x]_{M(W)}$ para algum $x\in X$ e, portanto, $d_S\leq d_{[x]_{M(W)}}$. Agora, da proposição anterior, segue que $d=d_S$. Assim, obtemos

$$d=d_S\leq d_{[x]_{M(W)}}\leq d$$

isto é,

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x]_{M(W)}}, W_{[x]_{M(W)}}\right)$$

para algum $x \in X$. ■

**3.3.5. Corolário.** *Sejam $W$ um subconjunto não vazio de $C_0(X;E)$ e $\emptyset \neq A \subset M(W)$. Se um portador $\phi : X \to B(E)$ é semicontínuo superiormente e nulo no infinito com relação a $W$, então existe $x \in X$ tal que*

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x]_A}, W|_{[x]_A}\right)$$

**Prova.**

Notemos que se $A \subset M(W)$ então $[t]_{M(W)} \subset [t]_A$, para todo $t \in X$. Logo, pelo Teorema 3.3.4, existe $x \in X$, tal que $d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x]_{M(W)}}, W|_{[x]_{M(W)}}\right) \leq$ $\leq d\left(\phi|_{[x]_A}, W|_{[x]_A}\right) \leq d(\phi, W)$. ■

**3.3.6. Corolário.** *Sejam $W$ um subconjunto não vazio de $C_0(X;E)$ e $\emptyset \neq A \subset M(W)$. Se um portador $\phi : X \to B(E)$ é semicontínuo superiormente e nulo no infinito com relação a $W$, então obtemos*

$$d(\phi, W) = \sup_{x \in X} d\left(\phi|_{[x]_A}, W_{[x]_A}\right)$$

**Prova.**

Pelo Corolário 3.3.5, existe $x_0 \in X$ tal que $d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x_0]_A}, W|_{[x_0]_A}\right)$ e, portanto

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x_0]_A}, W|_{[x_0]_A}\right) \leq \sup_{x \in X} d\left(\phi|_{[x]_A}, W|_{[x]_A}\right) \leq d(\phi, W)$$

■

**3.3.7. Corolário.** *Sejam $W$ um subconjunto não vazio de $C_0(X;E)$, $\emptyset \neq A \subset M(W)$, $\phi : X \to B(E)$ um portador semicontínuo superiormente e nulo no infinito com relação a $W$* e *$\varepsilon > 0$ dados. Se para cada $x \in X$, existe $g_x \in W$ satisfazendo $\sup_{t \in [x]_A} \sup_{y \in \phi(t)} \|y - g_x(t)\| < \varepsilon$, então existe $g \in W$ tal que $g(z) \in \phi(z) + \{u \in E;\ \|u\| < \varepsilon\}$ para todo $z \in X$.*

**Prova.**

Pelo Corolário 3.3.5, existe $x_0 \in X$ tal que $d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x_0]_A}, W|_{[x_0]_A}\right)$. Agora, por hipótese, existe $g_{x_0} \in W$ tal que

$$\sup_{t\in[x_0]_A} \sup_{y\in\phi(t)} \|y - g_{x_0}(t)\| < \varepsilon.$$

Assim,

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x_0]_A}, W|_{[x_0]_A}\right) \leq \sup_{t\in[x_0]_A} \sup_{y\in\phi(t)} \|y - g_{x_0}(t)\| < \varepsilon.$$

Logo, pela definição de $d(\phi, W)$, existe $g \in W$ tal que

$$\sup_{z\in X} \sup_{y\in\phi(z)} \|y - g(z)\| < \varepsilon.$$

Daí segue que $g(z) \in \phi(z) + \{u \in E;\ \|u\| < \varepsilon\}$, para todo $z \in X$. ■

**3.3.8. Definição.** Um subconjunto $F$ de $C(X;E)$ *é uniformemente nulo no infinito* se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $\|f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$ e $f \in F$.

**3.3.9. Exemplo.** Qualquer $F \subset C_0(X;E)$ totalmente limitado é uniformemente nulo no infinito.

**3.3.10. Proposição.** *Seja $F \subset C(X;E)$ uniformemente nulo no infinito e $W \subset C_0(X;E)$. O portador $\phi(x) = \{f(x);\ f \in F\}$, $x \in X$, é nulo no infinito com relação a $W$.*

**Prova.**

Se $F \subset C(X;E)$ é uniformemente nulo no infinito e $w \in W$, então existe um compacto $K \subset X$ tal que $\|f(x) - w(x)\| < \varepsilon$, para todo $x \notin K$ e $f \in F$. Logo, $\phi(x) \subset B(w(x), \varepsilon)$ para todo $x \notin K$. Assim,

$$X \setminus \{x \in X;\ \phi(x) \subset B(w(x), \varepsilon)\} \subset K$$

Como $K$ é compacto e fechado, e

$$\{x \in X;\ \phi(x) \cap B(w(x), \varepsilon) \neq \emptyset\} \subset X \setminus \{x \in X;\ \phi(x) \subset B(w(x), \varepsilon)\}$$

temos que $\{x \in X;\ \phi(x) \cap B(w(x), \varepsilon) \neq \emptyset\}$ é relativamente compacto. ■

**3.3.11. Teorema.** *Sejam $\emptyset \neq W \subset C_0(X;E)$ e $\emptyset \neq A \subset M(W)$. Se $\emptyset \neq F \subset C_0(X;E)$ é totalmente limitado e $\phi : X \to \mathcal{B}(E)$, $\phi(x) = \{f(x);\ f \in F\}$, então existe $x_0 \in X$ tal que*

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x_0]_A}, W_{[x_0]_A}\right)$$

**Prova.**

Pelo Exemplo 3.2.8, $\phi$ é semicontínuo superiormente. Agora, decorre dos Exemplo 3.3.9 e a Proposição 3.3.10, que $\phi$ é nulo no infinito com relação a qualquer $W \subset C_0(X; E)$. Logo, o resultado segue do Corolário 3.3.5. ■

**3.3.12. Teorema.** *Sejam $X$ um espaço de Hausdorff compacto, $W$ um subconjunto não vazio de $C(X; E)$* e $\emptyset \neq A \subset M(W)$. *Se $\emptyset \neq F \subset C(X; E)$ é equicontínuo, limitado e $\phi : X \to B(E)$, $\phi(x) = \{f(x); f \in F\}$, então existe $x_0 \in X$, tal que*

$$d(\phi, W) = d\left(\phi|_{[x_0]_A}, W_{[x_0]_A}\right)$$

**Prova.**

Pelo Exemplo 3.2.8, $\phi$ é semicontínuo superiormente. Sendo $X$ compacto, qualquer $F \subset C(X; E)$ é uniformemente nulo no infinito, logo, pela Proposição 3.3.10, $\phi$ é nulo no infinito com relação a $W \subset C(X; E) = C_0(X; E)$ e o resultado segue do Corolário 3.3.5. ■

Aplicaremos os resultados 3.3.11 e 3.3.12 em *problemas de melhor aproximação simultânea* em $C_0(X; E)$.

**3.3.13. Definição.** Sejam $(H, \|\|)$ um espaço normado e $W \subset H$ subconjunto não vazio. Para cada $F \subset H$ limitado e não vazio, *o raio de Chebyshev de $F$ relativo a $W$* é

$$rad_W(F) = \inf_{g \in W} \sup_{f \in F} \|f - g\|$$

Quando $W = H$, dizemos *raio de Chebyshev de $F$* e escrevemos

$$rad(F) = \inf_{g \in H} \sup_{f \in F} \|f - g\|$$

Se $H = C_0(X; E)$ com a norma sup e $\phi : X \to E$, $\phi(x) = \{f(x); f \in F\}$, onde $F \subset C_0(X; E)$ é limitado, então para qualquer $W \subset C_0(X; E)$,

$$d(\phi, W) = rad_W(F)$$

e se $A \subset M(W)$ temos para cada $x \in X$,

$$d\left(\phi|_{[x]_A}, W|_{[x]_A}\right) = rad_{W|[x]_A}\left(F|_{[x]_A}\right)$$

Assim, dos Teoremas 3.3.11 e 3.3.12, obtemos, respectivamente, os seguintes resultados :

**3.3.14. Teorema.** *Sejam $\emptyset \neq W \subset C_0(X;E)$ e $\emptyset \neq A \subset M(W)$. Se $\emptyset \neq F \subset C_0(X;E)$ é totalmente limitado e $\phi(x) = \{f(x); f \in F\}$, $x \in X$, então existe $x_0 \in X$ tal que*

$$rad_W(F) = rad_{W|_{[x_0]_A}}\left(F|_{[x_0]_A}\right)$$

**3.3.15. Teorema.** *Sejam $X$ um espaço de Hausdorff compacto, $\emptyset \neq W \subset$ $\subset C_0(X;E)$ e $\emptyset \neq A \subset M(W)$. Se $\emptyset \neq F \subset C(X;E)$ é equicontínuo e limitado e $\phi(x) = \{f(x); f \in F\}$, $x \in X$, então existe $x_0 \in X$ tal que*

$$rad_W(F) = rad_{W|_{[x_0]_A}}\left(F|_{[x_0]_A}\right).$$

# Bibliografia


[1] BROSOWSKI, B. and F. DEUTSCH, *An elementary proof of the Stone-Weierstrass theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 89-92.

[2] BUCK, R. C., *Bounded continuous functions on a locally compact space.* Michigan Math. J. **5** (1958), 95-104.

[3] CHAO-LIN M., *Sur l'approximation uniforme des fonctions continues.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 301, série I, nº 7, (1985), 349-350.

[4] COHN, D. L., *Measure theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[5] DE LA VALLÉE-POUSSIN, J., *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites de Fourier.* Bull. Acad. de Belgique, 1908.

[6] DINCULEANU, N., *Integration on locally compact spaces.* Noordhoff International Publishing Leyden, 1974.

[7] FEYEL, D. et DE LA PRADELLE, A., *Sur certaines extensions du theoreme d'approximation de Bernstein.* Pacific Journal of Mathematics, Vol. **115**, nº 1, (1984), 81-89.

[8] GROTHENDIECK A., *Topological vector spaces.* Gordon and Breach, Science Publishers, London, 1975.

[9] JEWETT, R.I., *A variation on the Stone–Weierstrass Theorem.* Proc. Amer. Math. Soc **14** (1963), 690–693.

[10] MACHADO, S., *On Bishop's generalization of the Weierstrass-Stone Theorem.* Indag Math. **39** (1977), 218-224.

[11] NACHBIN, L., *Elements of approximation theory.* D. Van Nostrand, 1967. Reprinted by R. E. Krieger Publ. Co., Huntington NY, 1976.

[12] NACHBIN, L., *The Haar integral.* D. Van Nostrand Company, Inc.. New Jersey, 1965.

[13] NACHBIN, L., *Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions: real and self-adjoint complex cases.* Ann. of Math. **81** (1965), 281-302.

[14] NATANSON, I. P., *Constructive function theory*, vol. **1**. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1964.

[15] NEUMANN, J. VON, *Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components.* Automata studies, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1956, 93-94.

[16] PROLLA, J. B., *Approximation of vector valued functions.* North-Holland Publishing Company, Netherlands, 1977.

[17] PROLLA, J. B. and S. MACHADO., *Weierstrass-Stone Theorems for set-valued mappings.* Journal of Approximation Theory **36** (1982), 1-15.

[18] PROLLA, J. B., *Weierstrass-Stone, The Theorem.* Verlag Peter Lang Gmbh, Frankfurt am Main, 1993.

[19] RANSFORD, T.J., *A short elementary proof of the Bishop-Stone--Weierstrass theorem.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **96** (1984), 309-311.