

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística

e Computação Científica

Departamento de Matemática

Desenvolvimentos em Teoria de Representações de Grupos Quânticos

Adriano Adrega de Moura

Tese de Doutorado orientada pelos professores

Dr. Alcibiades Rigas (UNICAMP)

Dr. Pavel I. Etingof (M.I.T.)

Desenvolvimentos em Teoria de Representações de Grupos Quânticos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Adriano Adrega de Moura e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de Maio de 2003

Prof. Dr. Alcibiades Rigas
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Alcibiades Rigas
Prof. Dr. Antonio Lima Santos
Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Prof. Dr. Tomas Edson Barros

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP.

M865d Moura, Adriano Adrega de
Desenvolvimentos em teoria de representações de grupos
quânticos / Adriano Adrega de Moura – Campinas, SP:[s.n.], 2003.

Orientador: Alcibiades Rigas
Co-orientador: Pavel I. Etingof
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Representações de álgebras. 2. Grupos quânticos. 3. Lie,
Álgebras de. I. Rigas, Alcibiades. II. Etingof, Pavel I.. III. Uni-
versidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Es-
tatística e Computação Científica. IV. Título

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo de alguns aspectos da Teoria de Representações de Grupos Quânticos. O problema motivador era estender, para o caso de Grupos Quânticos Dinâmicos Elípticos, o Teorema de Drinfeld-Kohno para monodromia da equação de Knizhnik-Zamolodchikov. Neste sentido, nosso resultado principal é a construção explícita de uma versão quantizada do funtor de Kazhdan-Lusztig para $\mathfrak{sl}_n$. Os métodos empregados nesta construção foram prescritos por I. Frenkel e N. Reshetikhin no artigo em que construíram operadores de vértice quânticos e conjecturaram a existência da quantização deste funtor. Além deste resultado principal, também obtivemos a parametrização da decomposição em blocos da categoria abeliana das representações de dimensão finita da álgebra universal envelopante quantizada de uma álgebra de Lie afim simples sobre os complexos (não torcida). Aqui as ferramentas principais foram os resultados de Chari-Presley e Kashiwara sobre a teoria de representações destas álgebras, além de um resultado de Kazhdan-Soibelman sobre a elipticidade de uma certa composição de restrições da R-matriz universal a representações de “avaliação”. Este último resultado nos motivou a definição de um novo objeto, que chamamos de Caráter Elíptico Central, o qual desempenha papel fundamental nesta parte do trabalho.

Abstract

The objective of this work is to study some aspects of the Representation Theory of Quantum Groups. The central motivating problem was to generalize, for Dynamical Elliptic Quantum Groups, the Drinfeld-Kohno Theorem about monodromy of the Knizhnik-Zamolodchikov equations. In this direction, our main result is the explicit construction of a quantum version of the Kazhdan-Lusztig functor. The methods we used here were predicted by I. Frenkel and N. Reshetikhin, when they constructed quantum vertex operators and conjectured the existence of such a quantized version of this functor. Besides, we also obtained the parametrization of the block decomposition of the abelian category of finite dimensional representations of Quantum Affine Algebras associated to (non-twisted) complex simple Lie algebras. Here, the main tools were the results of Chari-Pressley and Kashiwara on the representation theory of these algebras, and a result of Kazhdan-Soibelman about the ellipticity of a certain composition of the restrictions of the universal R-matrix to “evaluation” representations. The later result motivated us to define a new object, which we named Elliptic Central Character, that plays a fundamental role in this part of the work.

Agradecimentos (Acknowledgements)

I would like to thank Professor Etingof for all the suggested problems and knowledge shared. But most of all, I would like to thank you for having so kindly and friendly received me at M.I.T., despite my clear demonstration of immaturity on Quantum Groups two years ago; for having so patiently answered all my (several times) foolish questions and, finally, for showing your confidence in my capacity of performing the tasks that are now the shape of this Doctoral dissertation. Maybe you will want me to start calling you Pavel from now on. That's fine, but in the history of my life, you will always be Dear Professor Etingof!

Agradeço também aos meus eternos orientadores, Alcibiades Rigas e Francesco Mercuri. Aqueles que estiveram muito mais preocupados com que minha formação fosse a mais completa possível, e não em ter um soldadinho para realizar aquelas contas reservadas aos alunos de doutorado. Olha no que deu: do assunto que eu venho me especializando, pouco temos aproveitado nas especialidades de vocês. Mas, quem sabe, eu ainda não consiga entender como os mundos da Geometria e das Álgebras de Lie se encontram, agora em suas versões quânticas. Mais do que fornecedores de problemas, vocês têm sido orientadores profissionais.

I also thank Professors Vyjayanthi Chari and Edward Frenkel for several explanations that were crucial for our success in proving Theorem 1.3.8.

À FAPESP pelo apoio aos meus estudos no Brasil e à CAPES por financiar minha ida ao M.I.T.. I thank M.I.T. for hospitality.

Aos meus pais. Agradecer àquele apoio que só encontramos em nossos pais parece mais um “chavão” do que um agradecimento sincero. Mas nunca antes ele foi tão importante como durante os últimos cinco meses em Boston. Obrigado! Mais uma vez, agradeço à minha mãe por ter se aventurado em meio ao tão misterioso “matematiquês” em busca dos meus escorregões gramaticais e considerações estéticas desse texto. Os erros que permaneceram são, evidentemente, de total responsabilidade minha.

A todos da minha família que sempre estiveram do meu lado e acompanharam meu “diário de bordo”.

Aos amigos de sempre: Sandro, André, meu primo Célio, Adreane, Márcio, Doretto, Vitor, Janaína, Gil, ... Afinal de contas, pizza, vinho, Rolling Stones, Pink Floyd, Star Wars, tenis e tantas outras futilidades são absolutamente necessárias para que se consiga seguir em frente.

The new friends: Andrey, Pei-ning, Laura, Lorenzo and everyone else in Boston, thanks for providing me such a nice time along those eleven months. To one of them I am specially grateful. Jonathan, maybe it was such a simple thing for you to host me in your place during my first week in Boston. But, doubtlessly, it was the greatest help I have ever received. I wish the world had many more Jons around!

A todos os professores, tanto do IMECC quanto do M.I.T. ou da Física e Matemática da USP e UFSCar, e também aos colegas que, direta ou indiretamente, demonstraram seu incentivo. Permitam-me não enumerá-los, do contrário, esses agradecimentos tomariam o volume de um capítulo!

Finalmente, Jana. É verdade, podia ter sido uma caminhada muito mais suave. O importante é que crescemos. Agradeço por ter me “achado”, ter trazido um pouco de doce a minha vida e, sobretudo, por continuarmos sonhando juntos com uma vida muito mais completa.

Adriano,
Maio de 2003.

*A vida é aquilo que te acontece
enquanto você a planeja.
(John Lennon)*

Conteúdo

Introdução	1
Organização do Texto	6
Capítulo 1. Representações de Dimensão Finita de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$	7
1.1. Polinômios de Drinfeld	7
1.2. R-matrizes com Parâmetro Espectral	13
1.3. O Caráter Elíptico Central	18
Capítulo 2. Uma Versão Quantizada do Funtor de Kazhdan-Lusztig	25
2.1. R-matrizes Dinâmicas	25
2.2. A Construção de Intercâmbio	30
2.3. A Equação Quântica de Knizhnik-Zamolodchikov	35
2.4. Monodromia da Equação Quântica de Knizhnik-Zamolodchikov para $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$	40
2.5. Construção do Funtor qKL	43
Apêndice I. Álgebras de Hopf	51
I.1. Definições e Propriedades Básicas	51
I.2. Estrutura Quase Triangular	54
I.3. Representações	55
I.4. A Construção de FRT	58
I.5. O Duplo de uma Álgebra de Hopf	59
I.6. Álgebras de Deformação	60
Apêndice II. Álgebras Universais Envelopantes Quantizadas	63
II.1. Álgebras de Lie	63
II.2. Representações de Álgebras de Lie	67
II.3. A Quantização de Drinfeld-Jimbo	71
II.4. Representações de $U_q(\mathfrak{g})$	75
Apêndice III. Fórmulas Úteis e Resultados Diversos	77
III.1. Equações de Diferenças de Segunda Ordem	77
III.2. Funções Téta, Gama Elíptica e Gama Quântica	78
III.3. Blocos de uma Categoria Abelianiana	79
III.4. A Representação Natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$	80
III.5. Enumeração dos Nódulos dos Diagramas de Dynkin	81
Índice Remissivo.	83
Bibliografia.	87

Introdução

Os últimos 25 anos tem assistido uma interação extremamente frutífera entre Física e Matemática, resultando no nascimento de várias áreas de pesquisa e na descoberta de poderosas ferramentas em outras tantas. Grupos Quânticos é uma delas. Apesar de seu berço ter sido a literatura Física, ao longo dos anos eles passaram a causar grande entusiasmo à medida em que, quase que inesperadamente, se estabeleceram como “pontes” ligando áreas da Matemática que, a priori, pareciam desconexas. Como exemplos citamos a construção de invariantes topológicos que possibilitaram teoremas de classificação em Teoria de Nós e a Representação de Grupos Algébricos em característica p . Também na Física a Teoria de Grupos Quânticos foi além de suas motivações originais, tomando um lugar de destaque em diversas áreas da Física-Matemática como Teoria Quântica de Campos, Teoria de Cordas e Física de Altas Energias.

Do ponto de vista matemático, a Teoria de Grupos Quânticos pode ser entendida como uma generalização da Teoria de Álgebras de Lie. Grupos e Álgebras de Lie propiciaram a criação de diversas ferramentas e exemplos importantes em vários assuntos diferentes. Uma ramificação especialmente bem sucedida desta teoria é aquela de Grupos de Lie compactos e suas Álgebras de Lie correspondentes. Em decorrência deste sucesso, foram feitas várias tentativas de produzir generalizações. Uma das generalizações mais importantes foi descoberta no final dos anos 60 e, as álgebras de Lie obtidas, são hoje conhecidas como Álgebras de Kac-Moody. Essencialmente, as Álgebras de Kac-Moody são obtidas da apresentação das álgebras de Lie simples em geradores de Chevalley e relações de Serre, por uma generalização da matriz de Cartan, i.e., para cada matriz de Cartan generalizada, constrói-se uma Álgebra de Kac-Moody através de geradores e com relações codificadas na matriz dada. Uma família de Álgebras de Kac-Moody de particular interesse é a das chamadas Álgebras de Kac-Moody Afim, que ocorrem quando a matriz de Cartan correspondente é semi-definida positiva de posto $n - 1$ (onde n é o número de linhas e colunas da matriz). O principal fator que faz das Álgebras de Kac-Moody Afim ser um objeto extremamente rico, é que elas admitem uma construção concreta, a partir de uma álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ dada. Ou seja, para cada $\mathfrak{g}$ simples, temos associada uma Álgebra de Kac-Moody Afim (não torcida) que denotamos por $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Neste contexto, Grupos Quânticos são obtidos a partir de uma generalização das relações de Serre. Drinfeld e Jimbo, em 1985, interpretaram as relações de Serre no contexto de álgebras associativas, i.e., eles olharam para os geradores de Chevalley e relações de Serre como o conjunto

de dados que define a Álgebra Universal Envelopante $U(\mathfrak{a})$ da álgebra de Kac-Moody original $\mathfrak{a}$. Então eles apresentaram uma surpreendente deformação das relações de Serre. Na realidade, essa deformação, também chamada de quantização, está associada a um parâmetro $q \in \mathbb{C}$ e dá origem a uma família de álgebras que são denotadas por $U_q(\mathfrak{a})$. Um fator fundamental na construção de Drinfeld e Jimbo é que $U_q(\mathfrak{a})$, assim como $U(\mathfrak{a})$, admite uma estrutura de álgebra de Hopf com um elemento especial R , chamado de R-matriz universal, responsável por toda riqueza da teoria. A R-matriz universal é solução do que hoje conhecemos como Equação Quântica de Yang-Baxter (QYB) e que é o berço de toda teoria (na literatura de Mecânica Estatística QYB era conhecida como *The Star-Triangle Relation*). A partir dos trabalhos de Drinfeld e Jimbo, ficou claro que o “mundo” matemático para se trabalhar com o que genericamente se chamava de Grupos Quânticos era o das Álgebras de Hopf. Por este motivo, as álgebras de Hopf $U_q(\mathfrak{a})$ foram batizadas de um Grupo Quântico associado a $\mathfrak{a}$.

Em 1984, Knizhnik e Zamolodchikov deduziram equações diferenciais para blocos conformes da Teoria Conforme de Campos de Wess-Zumino-Witten. Atualmente estas equações são conhecidas como as equações de Knizhnik-Zamolodchikov (KZ). As equações KZ formam um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem para uma função de m variáveis complexas a valores no produto tensorial $V^{\otimes m}$, onde V é uma representação de $\mathfrak{g}$. Este sistema tem singularidades regulares ao longo dos hiperplanos $z_i = z_j$ ($i \neq j$) em $\mathbb{C}^m$, e pode ser interpretada como uma conexão em um fibrado sobre o complemento $\mathcal{D}_m$ destes hiperplanos, com fibra $V^{\otimes m}$. Mais ainda, esta conexão possui uma simetria que induz uma conexão em um fibrado sobre o espaço $\mathcal{C}_m$ das órbitas da ação óbvia do Grupo Simétrico S_m em $\mathcal{D}_m$. O ponto crucial é que esta conexão é plana e, conseqüentemente, a monodromia das soluções das equações KZ define uma representação do grupo fundamental de $\mathcal{C}_m$, que é isomorfo ao Grupo de m Tranças (*Braid Group*) B_m , em $V^{\otimes m}$. O Teorema de Drinfeld-Kohno estabelece uma relação entre a monodromia das equações KZ e a Teoria de Grupos Quânticos, ao dizer que esta representação é equivalente a uma representação de B_m obtida a partir das propriedades da ação da R-matriz universal de $U_q(\mathfrak{g})$ relacionadas à equação QYB!

Um dos resultados mais espetaculares em Teoria de Representações nos últimos anos foi a descoberta do funtor de Kazhdan-Lusztig (KL) [KL93, KL94], que nada mais é que uma extensão altamente não trivial do Teorema de Drinfeld-Kohno. O funtor de Kazhdan-Lusztig vai da categoria de fusão das representações de uma álgebra de Kac-Moody Afim na categoria de representações do Grupo Quântico correspondente e, genericamente, estabelece uma equivalência entre essas categorias. Uma outra maneira de olhar para a construção deste funtor é explorando a associatividade da “álgebra” de certos operadores de intercâmbio para a Álgebra de Lie Afim. Tais operadores de intercâmbio (isto é, homomorfismo de representações), são também conhecidos na Física como Operadores de Vértice.

Em 1992, no artigo pioneiro [FR92], I. Frenkel e N. Reshetikhin generalizaram a noção de blocos conformes para o caso q -deformado, e propuseram uma versão quantizada das equações KZ, batizadas de equações qKZ. Essas equações não são mais diferenciais, mas equações de diferenças com passo $q^{-2\kappa}$, onde κ depende da álgebra de Lie simples em questão e de um parâmetro $k \in \mathbb{C}$ (a carga central da Álgebra de Kac-Moody Afim). Eles também calcularam a conexão destas equações (o que dá origem ao conceito de q -monodromia) em um caso particular. O resultado coincidiu com certas soluções elípticas da equação QYB. Isto deu origem a uma conjectura sobre a existência de uma versão quantizada do funtor KL. De fato, estava implicitamente sugerido em [FR92] que, uma vez que as matrizes que codificam a monodromia das equações qKZ são elípticas, o funtor qKL deveria levar a categoria das representações da Álgebra Afim Quantizada $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, na categoria das representações de um objeto a ser batizado Grupo Quântico Elíptico. Porém, na época, não era claro o que tal objeto deveria ser.

A Teoria dos Grupos Quânticos Elípticos passou a se desenvolver a partir dos trabalhos de G. Felder [F94]. Ali foi constatado que a equação central da teoria não era a usual QYB, mas uma generalização, agora chamada de Equação Quântica Dinâmica de Yang-Baxter (QDYB), que também já havia aparecido anteriormente na Física. Em particular, Felder definiu Grupos Quânticos Elípticos do tipo A, $E_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_{n+1})$, usando a solução correspondente da equação DQYB. De fato, a mesma definição também funciona para os tipos BCD, usando-se as R-matrizes dinâmicas adequadas encontradas em [JMO87]. Entretanto, por razões técnicas, os respectivos Grupos Quânticos Elípticos ainda não são tão bem entendidos como os de tipo A. De qualquer maneira, após os trabalhos de Felder, foi possível formular a conjectura de Frenkel-Reshetikhin precisamente, pelo menos para tipo A: a monodromia das equações qKZ é codificada pela R-matriz do Grupo Quântico Elíptico definido por Felder. Isto foi provado por Tarasov e Varchenko, primeiramente para $\mathfrak{sl}_2$ [TV97] e, posteriormente para $\mathfrak{sl}_{n+1}$, usando uma sofisticada teoria de fórmulas integrais. Muitos outros trabalhos dedicados ao assunto surgiram desde então [FV96, TV97, JKOS97, ABR98, EV99] clarificando as idéias por trás destes objetos (veja também [F02] para um *survey* sobre a literatura). Mas o funtor qKL permanecia apenas como “folclore”.

A construção explícita de uma versão do funtor qKL para tipo A é o **problema central resolvido neste trabalho**. Em particular, mostramos que ele é totalmente fiel, i.e., que define uma equivalência entre a categoria das representações de dimensão finita de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ (com escalares estendidos) e uma subcategoria da categoria das representações do Grupo Quântico Elíptico $E_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_{n+1})$, para valores apropriados dos parâmetros. Para isso, além das idéias de [FR92], também usamos a chamada Construção de Intercâmbio desenvolvida por Etingof e Varchenko em [EV99]. Com esta técnica, é possível deduzir a formulação geral da conjectura de Frenkel-Reshetikhin a partir de sua versão em um caso especial: no produto tensorial de duas cópias da representação natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$. Estes cálculos são feitos através da teoria clássica da função q -hipergeométrica ${}_2\phi_1$, como sugerido em [FR92]. Também fica claro que todos os cálculos

funcionam para representações de dimensão infinita de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$, cujos espaços de vetores homogêneos sejam de dimensão finita. Isso implica numa extensão do funtor qKL que confirma a conjectura de Tarasov e Varchenko [TV01] sobre a existência de uma deformação elíptica para tais representações.

Um dos cálculos envolvidos neste programa é o da restrição da R-matriz universal de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ no produto tensorial de duas “representações de avaliação”. De fato, ao contrário do caso clássico, esta nomenclatura não é completamente apropriada para o caso quântico, uma vez que nem toda representação de dimensão finita de $U_q(\mathfrak{g})$ pode ser transformada numa representação de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$. Para $\mathfrak{sl}_{n+1}$ isto é sempre verdade devido a aplicação de Jimbo [J86], mas em geral temos que aumentar o espaço de representação. Todavia, existe uma teoria bem desenvolvida de afinizações (ao invés de avaliações) de representações de $U_q(\mathfrak{g})$, para toda álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$. Essa teoria foi desenvolvida por Chari-Pressley em diversos artigos. Desse modo, não precisamos aqui nos restringir a $\mathfrak{sl}_{n+1}$ e considerar este cálculo de maneira geral. Mas estas considerações já indicam que existe algo de diferente na categoria das representações de dimensão finita de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ em relação à de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Uma diferença essencial é a seguinte. É bem conhecido que toda representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ é completamente redutível, ou seja, a categoria de representações correspondente é semi-simples. Este resultado vale, de uma maneira um pouco mais fraca, para $\tilde{\mathfrak{g}}$, devido a um resultado geral de Chevalley que diz que a categoria abeliana gerada por produtos tensoriais dos objetos simples da categoria de representações de dimensão finita de qualquer álgebra de Lie é semi-simples. Porém, mesmo nessa versão mais fraca, o resultado é falso para $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, até quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ (lembre que $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ não é uma álgebra de Lie).

No entanto, como toda categoria abeliana cujos objetos tem comprimento finito, esta categoria também admite uma decomposição em soma direta de subcategorias abelianas irredutíveis, chamadas de blocos da categoria original. A pergunta natural então é: Quem são os blocos neste caso? A resposta a esta pergunta é **o outro resultado importante deste trabalho**. A motivação para esta resposta veio de um resultado de Kazhdan-Soibelman sobre a elipticidade de uma certa composição de restrições da R-matriz universal de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ no produto tensorial de duas de suas representações de dimensão finita. Mais precisamente, isto nos motivou a definição do Caráter Elíptico Central (ECC) de tais representações: uma certa coleção de funções elípticas que parametriza os blocos da categoria. A demonstração deste resultado é baseada num resultado de Chari e Kashiwara sobre a ciclicidade de produtos tensoriais de representações fundamentais. Infelizmente nossa demonstração recorre a uma longa análise caso a caso, por isso só apresentamos aqui a demonstração para tipo A. Para os tipos B–G ela pode ser consultada no *preprint* [EM02b]. Seria interessante encontrar uma demonstração uniforme para este resultado. Neste *preprint* também usamos o ECC para decidir quando uma representação irredutível ocorre no produto tensorial de outras duas, indicando que este novo objeto pode ter outras aplicações. Assim, também seria interessante entender a relação do ECC com outros objetos tais como afinizações minimais e q -caracteres.

Por fim, é preciso dizer que nem tudo foi flores. Este trabalho deveria contar com a resposta de mais um problema ao qual nos dedicamos. Infelizmente (ou felizmente?), não consegui chegar à resposta. O problema é o seguinte.

Suponha que R seja uma solução da equação QDYB com passo $\gamma \in \mathbb{C}^*$ que pode ser expandida na forma $R = 1 + \gamma r + O(\gamma^2)$. Então o limite quase clássico r é solução da chamada Equação Clássica Dinâmica de Yang-Baxter (CDYB). O processo inverso, i.e., dada uma solução r da equação CDYB, obter uma solução R da QDYB cujo limite quase clássico seja r , é chamado de quantização. A importância das soluções das equações CYB reside no fato que as equações diferenciais do tipo KZ através delas contruídas são consistentes. Em [S98], O. Schiffmann classificou soluções das equações CDYB para álgebras de Lie simples, estendendo a classificação dada por Drinfeld e Belavin para as soluções das equações CYB ao contexto dinâmico. Um exemplo interessante obtido é uma família de soluções correspondentes às rotações T do diagrama de Dynkin de $\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}$. No caso desta rotação ser trivial, isto é, T é a identidade, obtemos uma solução r cuja quantização R é *gauge* equivalente àquela do Grupo Quântico Elíptico definido por Felder. No caso de o ângulo de rotação ser tal que exista uma única órbita para a ação de $T^l, l \in \mathbb{Z}$, obtemos uma solução *gauge* equivalente a outra celebrada solução das CDYB, a solução elíptica de Belavin (que não depende da variável dinâmica, ou seja, é solução da CYB). Para outras rotações obtemos soluções “intermediárias”, com a variável dinâmica pertencendo a uma subálgebra (não trivial) da subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Em [EK95], Etingof e Kazhdan provaram que quantizações das soluções das equações CDYB (associadas a álgebras de Lie simples) sempre existem. Porém esse resultado é puramente existencial, não fornecendo um método para calcular. Em [ESS99] foram construídas quantizações “explícitas”, através de produtos infinitos, das soluções classificadas por Schiffmann. Gostaríamos de ter usado esta fórmula em produto infinito para obter uma expressão “finita” em termos de funções téta, para a família de soluções consideradas acima, como as existentes para os casos limite de Felder e Belavin. Embora pareça um problema ingênuo, ele se mostrou tecnicamente impraticável. Observe que um passo fundamental na construção do nosso funtor qKL é justamente o cálculo da solução da QDYB correspondente à rotação trivial! Fica aqui a pergunta se estes métodos podem ser generalizados de modo a ser aplicável a este problema. A resposta a esta pergunta continua fazendo parte dos nossos planos. De fato, o primeiro passo é formular a pergunta de modo que ela faça sentido tecnicamente.

*You can't always get what you want
But if you try sometimes
You might find
You get what you need
(The Rolling Stones/1968)*

Organização do Texto

Tentei organizar o texto da maneira que me parece mais apropriada a um minicurso sobre o assunto. Como os cálculos são, em geral, longos, também tentei evitar a “abertura de parênteses” para cálculos auxiliares. Por exemplo, os cálculos necessários para a construção do funtor qKL , mas que pertencem ao âmbito da teoria de representações de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$, são feitos no capítulo 1, ainda que só venham a ser usados no 2. Espero que isto também facilite a procura por resultados específicos, uma vez que eles não estão “perdidos” no meio de “outro” assunto.

Como já foi antecipado, o capítulo 1 trata da teoria de representações das álgebras $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$. As duas primeiras seções são um apanhado de resultados necessários para o desenvolvimento dos problemas principais. Em particular, o cálculo das restrições da R-matriz universal a “representações de avaliação” são feitos na seção 1.2. O capítulo é finalizado com nosso resultado principal sobre esse assunto: a parametrização dos blocos da categoria das representações de dimensão finita de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ através dos Caracteres Elípticos Centrais.

O segundo capítulo é destinado à construção do funtor qKL . Começamos com uma revisão sobre teoria de representações das soluções das equações QDYB. A seguir apresentamos a chamada Construção de Intercâmbio, nosso principal método para obter soluções das QDYB a partir da teoria de representações de álgebras de Kac-Moody e suas quantizações. Na seção seguinte definimos funções de correlação, já contextualizadas à Construção de Intercâmbio, e enunciamos o teorema de Frenkel-Reshetkhin que diz que essas funções satisfazem as equações qKZ. Nessa seção também calculamos as soluções de qKZ para o produto tensorial de duas cópias (com *shifts*) da representação natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Na seção 2.4 calculamos a monodromia dessas soluções, i.e., calculamos a matriz de conexão correspondente. Na última seção provamos que essa matriz de conexão é *gauge* equivalente à usada por Felder na definição do Grupo Quântico Elíptico e, feito isso, passamos à construção explícita do funtor qKL . Finalizamos com algumas palavras que justificam olhar nossa construção como uma versão quantizada do funtor KL .

Também inclui três apêndices com os pré requisitos e resultados diversos usados ao longo da parte principal. Em particular, a definição de $U_q(\mathfrak{a})$ se encontra no apêndice II. A princípio, as informações contidas nos apêndices são suficientes para um leitor que sequer sabe o que é uma álgebra de Lie ou de Hopf conseguir ler o trabalho. Evidentemente que estas informações estão longe de serem suficientes para que tal leitor aprenda estes assuntos.

O apêndice I dá conta dos resultados básicos da Teoria de Álgebras de Hopf e suas representações. O II é reservado às Álgebras de Lie, de Kac-Moody e suas quantizações. O apêndice III é uma miscelânea de resultados diversos: equações de diferenças, funções especiais, blocos em categorias abelianas e fórmulas básicas para a representação natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$.

CAPÍTULO 1

Representações de Dimensão Finita de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$

Neste capítulo trataremos da teoria de representações de dimensão finita da álgebra universal envelopante quantizada $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ da álgebra de Kac-Moody afim $\tilde{\mathfrak{g}}$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie complexa, simples e de dimensão finita. As definições de $\tilde{\mathfrak{g}}$ e $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ se encontram no apêndice II. A seção 1.1 é baseada no trabalho de Chari e Pressley [CP91a, CP95, CP] e dá conta da classificação das representações irredutíveis. Na seção 1.2 apresentamos o conceito de R-matrizes com parâmetro espectral e estudamos sua relação com a redutibilidade de produtos tensoriais de representações irredutíveis. Os resultados dessa seção são de autoria variada e a bibliografia apropriada será dada no momento oportuno. Alguns deles serão importantes para o capítulo 2. Na seção 1.3 introduzimos o conceito de caráter elíptico central de uma representação de dimensão finita de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ e mostramos, para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, que ele caracteriza a decomposição em blocos de tais representações (a demonstração geral é dada em [EM02b]). Essa seção não terá influência no capítulo 2. Como explicamos na seção II.4, assumiremos que q é um número complexo que não é raiz da unidade.

1.1. Polinômios de Drinfeld

A teoria de representações de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ e $U_q(\mathfrak{g})$ são muito semelhantes, como recordamos nas seções II.2 e II.4. Esse paralelo não se aplica no caso de $\tilde{\mathfrak{g}}$ e $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$. A teoria de representações de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ passou a ser melhor entendida a partir do momento que Drinfeld [D88] mostrou a existência de outra apresentação de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, também em termos de geradores e relações como a definição de Drinfeld-Jimbo II.3.3. Porém, ao contrário dos geradores de Chevalley, os novos geradores de Drinfeld apresentam um comportamento muito semelhante aos elementos xt^n de $\tilde{\mathfrak{g}}$ e, por isso, são também chamados de *loop like generators*. A forma que usaremos, ligeiramente modificada em relação à original, foi proposta por Beck [B93].

Antes, vamos fixar alguma notação. Seja n o posto de $\mathfrak{g}$, $I = \{1, \dots, n\}$ e recorde, na seção II.1, as notações para a matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$, $A = (a_{ij})$, e sua simetrização dada por $D = \text{diag}(d_i)$, assim como suas extensões para $\tilde{\mathfrak{g}}$. Recorde também a apresentação de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ em termos de seus geradores de Chevalley $k_i^{\pm 1}, x_i^{\pm}, i = 0, \dots, n$. De maneira análoga à seção II.4, dizemos que um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo V é de tipo **1** se V for do tipo **1** como $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo. Seja $\theta = \sum \theta_i \alpha_i$ a raiz maximal de $\mathfrak{g}$. Não é difícil mostrar que o elemento $k_0 \prod k_i^{\theta_i}$, correspondente ao elemento central de $\tilde{\mathfrak{g}}$,

age como a identidade em V [CP]. Por isso consideraremos V como um módulo sobre $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ e denotaremos por $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ a categoria das representações de tipo **1** de dimensão finita de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$.

TEOREMA 1.1.1. [B93] $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ é isomorfa à álgebra com geradores $k_i^{\pm 1}$, $h_{i,l}$, $x_{i,r}^{\pm}$, onde $i \in I$, $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $r \in \mathbb{Z}$, satisfazendo as relações

$$\begin{aligned}
 (1.1.1) \quad & k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1 \\
 & k_i k_j = k_j k_i \quad k_i h_{j,r} = h_{j,r} k_i \\
 & k_i x_{j,r}^{\pm} k_i^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}} x_{j,r}^{\pm} \quad [h_{i,r}, x_{j,s}^{\pm}] = \pm \frac{1}{r} [ra_{ij}]_{q_i} x_{j,r+s}^{\pm} \\
 & x_{i,r+1}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} - q_i^{\pm a_{ij}} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r+1}^{\pm} = q_i^{\pm a_{ij}} x_{i,r}^{\pm} x_{j,s+1}^{\pm} - x_{j,s+1}^{\pm} x_{i,r}^{\pm} \\
 & [x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \frac{\delta_{ij}}{q_i - q_i^{-1}} (\phi_{i,r+s}^+ - \phi_{i,r+s}^-) \\
 & \sum_{s \in S_m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q_i} x_{i,r_{s(1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{s(k)}}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r_{s(k+1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{s(m)}}^{\pm} = 0 \quad \text{if } i \neq j
 \end{aligned}$$

onde $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}$, $m = 1 - a_{ij}$, S_m é o grupo simétrico e $\phi_{i,r}^{\pm}$ são dados pela identidade de séries

$$(1.1.2) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \phi_{i,r}^{\pm} u^{\pm r} = k_i^{\pm 1} \exp \left(\pm (q_i - q_i^{-1}) \sum_{s=1}^{\infty} h_{i,\pm s} u^{\pm s} \right)$$

DEMONSTRAÇÃO. Denote por H_q a álgebra enunciada no teorema. Apenas fornecemos a definição do isomorfismo $f : U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow H_q$, deixando a verificação de que f é de fato um isomorfismo a cargo do leitor (ela pode ser encontrada em [B93, D88]). Lembre-se que $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ tem geradores $k_i^{\pm 1}, x_i^{\pm}$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Como a notação já sugere, $f(k_i) = k_i$ para $i = 1, \dots, n$. Considere $k_{\theta} = \prod k_i^{\theta_i}$. Então $f(k_0) = k_{\theta}^{-1}$. Para $i = 1, \dots, n$, $f(x_i^{\pm}) = x_{i,0}^{\pm}$. A definição de $f(x_0^{\pm})$ é mais trabalhosa e, claro, envolve o vetor $e_{\theta} \in \mathfrak{g}_{\theta}$. Escolha uma expressão para e_{θ} da forma $e_{\theta} = \lambda [e_{i_1}, [e_{i_2}, \dots, [e_{i_k}, e_{i_{k+1}}] \dots]]$, com $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $e_{i_j} \in \mathfrak{n}^+$. Defina $w_i^{\pm} : H_q \rightarrow H_q$ por $w_i^{\pm}(a) = x_{i,0}^{\pm} a - k_i^{\pm 1} a k_i^{\mp 1} x_{i,0}^{\pm}$ e $\mu \in \mathbb{C}^*$ pela condição $[x_0^+, x_0^-] = \frac{k_0 - k_0^{-1}}{q_0 - q_0^{-1}}$. Então $f(x_0^+) = \mu w_{i_1}^- \dots w_{i_k}^-(x_{i_{k+1},1}^-) k_{\theta}^{-1}$ e $f(x_0^-) = \lambda k_{\theta} w_{i_1}^+ \dots w_{i_k}^+(x_{i_{k+1},-1}^+)$. $\square$

Sejam $U^{\pm}$ as subálgebras geradas por $x_{i,r}^{\pm}$ e U^0 a gerada por $k_i^{\pm 1}, h_{i,l}$. Então temos uma decomposição triangular

$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \cong U^- \otimes U^0 \otimes U^+$$

Observação: Essa decomposição não coincide com a decomposição triangular obtida em termos dos geradores de Chevalley.

DEFINIÇÃO 1.1.2. Seja V um objeto de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$. Dizemos que um vetor homogêneo $v \in V[\lambda]$ tem peso máximo λ , com relação aos geradores de Drinfeld, se $x_{i,r}^+ v = 0 \forall i, r$. Se V for gerado por um vetor de peso máximo, V é dito uma representação de peso máximo.

Observação: A definição de vetor de peso máximo com relação aos geradores de Drinfeld e com relação aos geradores de Chevalley não coincidem. Às vezes usa-se a palavra pseudo peso máximo na definição 1.1.2, mas cremos não ser necessário, pois o contexto estará sempre claro.

PROPOSIÇÃO 1.1.3. [CP] Seja V uma representação irredutível de dimensão finita de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$.

- (a) V pode ser obtida a partir de um objeto de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ através dos automorfismos dados por (II.3.8) ou do automorfismo σ dado por

$$\sigma(k_i) = k_i \quad \sigma(h_{i,l}) = h_{i,l} \quad \sigma(x_{i,r}^\pm) = (-1)^r x_{i,r}^\pm$$

- (b) Se $V \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\hat{\mathfrak{g}}))$, então V é de peso máximo com relação aos geradores de Drinfeld.

Uma desvantagem dos geradores de Drinfeld em relação aos de Chevalley é que não se tem conhecimento de uma fórmula para a comultiplicação escrita explicitamente em termos deles. Também não é verdade que a subálgebra U_i gerada por $x_{i,r}^\pm, k_i^{\pm 1}, h_{i,l}$ seja uma subálgebra de Hopf, como é o caso da subálgebra $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_i)$ definida em termos dos geradores de Chevalley. No entanto, a informação parcial fornecida pelo lema a seguir será suficiente

LEMA 1.1.4. [CP96a] Considere os subespaços $X^\pm = \sum_{i,r} \mathbb{C}x_{i,r}^\pm$ e $X_i^\pm = \sum_{j \neq i,r} \mathbb{C}x_{j,r}^\pm$. A restrição de Δ a U_i satisfaz

- (a) Módulo $U_q(\hat{\mathfrak{g}})(X^+)^2 \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})X^- + U_q(\hat{\mathfrak{g}})X_i^+ \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})X^-$, vale

$$(1.1.3) \quad \Delta(x_{i,r}^+) = 1 \otimes x_{i,r}^+ + x_{i,r}^+ \otimes k_i + \sum_{j=1}^r x_{i,r-j}^+ \otimes \phi_{i,j}^+ \quad \text{para } r \geq 0$$

$$(1.1.4) \quad \Delta(x_{i,-r}^+) = 1 \otimes x_{i,-r}^+ + x_{i,-r}^+ \otimes k_i^{-1} + \sum_{j=1}^{r-1} x_{i,j-r}^+ \otimes \phi_{i,-j}^- \quad \text{para } r > 0$$

- (b) Módulo $U_q(\hat{\mathfrak{g}})X^+ \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})(X^-)^2 + U_q(\hat{\mathfrak{g}})X_i^- \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})X^-$,

$$(1.1.5) \quad \Delta(x_{i,r}^-) = k_i \otimes x_{i,r}^- + x_{i,r}^- \otimes 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \phi_{i,j}^- \otimes x_{i,r-j}^- \quad \text{para } r > 0$$

$$(1.1.6) \quad \Delta(x_{i,-r}^-) = k_i^{-1} \otimes x_{i,-r}^- + x_{i,-r}^- \otimes 1 + \sum_{j=1}^r \phi_{i,-j}^- \otimes x_{i,j-r}^- \quad \text{para } r \leq 0$$

- (c) Módulo $U_q(\hat{\mathfrak{g}})X^+ \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})X^-$,

$$(1.1.7) \quad \Delta(h_{i,l}) = 1 \otimes h_{i,l} + h_{i,l} \otimes 1$$

O seguinte teorema [CP95] caracteriza as representações irredutíveis de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

TEOREMA 1.1.5. Existe uma correspondência biunívoca entre objetos simples de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ e n -uplas de polinômios $\mathbb{P} = (P_i(u))$ com termo constante 1.

DEFINIÇÃO 1.1.6. As n -uplas $\mathbb{P}$ são chamadas de polinômios de Drinfeld. Dado $\mathbb{P}$ denotaremos por $V(\mathbb{P})$ a representação irredutível correspondente.

Para $z \in \mathbb{C}^*$, considere o automorfismo de álgebra de Hopf $D_z : U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ definido por

$$(1.1.8) \quad D_z(x_{i,r}^\pm) = z^r x_{i,r}^\pm \quad D_z(k_i) = k_i \quad D_z(\phi_{i,r}^\pm) = z^r \phi_{i,r}^\pm$$

Dada uma representação V de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, denotaremos por $V(z)$ o *pull-back* D_z^*V .

LEMA 1.1.7. [CP] O polinômio de Drinfeld de $D_z^*V(\mathbb{P})$ é $\mathbb{P}(z)$, onde $P(z)_i(u) = P_i(zu)$.

DEFINIÇÃO 1.1.8. As representações irredutíveis $V_j = V(\mathbb{P}^j)$, onde $P_i^j(u) = 1 - \delta_{ij}u$, são chamadas de representações fundamentais.

PROPOSIÇÃO 1.1.9. [CP] Sejam $v_{\mathbb{P}}, v_{\mathbb{Q}}$ vetores de peso máximo em $V(\mathbb{P}), V(\mathbb{Q})$ e denote por $\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}$ a n -upla $(P_i Q_i)$. Então $V(\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q})$ é isomorfa a um quociente da subrepresentação de $V(\mathbb{P}) \otimes V(\mathbb{Q})$ gerada por $v_{\mathbb{P}} \otimes v_{\mathbb{Q}}$.

COROLÁRIO 1.1.10. $V(\mathbb{P})$ é isomorfa a um subquociente de um produto tensorial da forma $V_{j_1}(z_1) \otimes \cdots \otimes V_{j_k}(z_k)$.

DEMONSTRAÇÃO. Decomponha cada $P_i(u)$ (não constante) em um produto de polinômios de grau 1 com termo constante 1 e considere o produto tensorial das representações associadas a cada fator. $\square$

Vale ressaltar o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 1.1.11. [KS95] Dados $V, W \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ irredutíveis, o produto tensorial $V(z) \otimes W$ é irredutível para valores genéricos de z , isto é, para z no complementar de um conjunto enumerável.

Uma vez que temos uma caracterização dos irredutíveis de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$, vale tentar traçar o paralelo com o caso clássico. Como já dissemos, o procedimento vai falhar, mas servirá para motivar a próxima definição. Recorde (seção II.2) que no caso clássico temos aplicações de avaliação $\tau_z : U(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ que nos permitem, dado um $U(\mathfrak{g})$ -módulo V , definir representações de avaliação $V(z)$. No caso quântico, já construímos famílias de representação $V(z)$, mas com V sendo um módulo sobre $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$. De fato essas representações farão, no caso quântico, o papel que representações de avaliação faziam no caso clássico, o que justifica a notação similar. Porém, em geral, não é verdade que se pode construir uma família $V(z)$ de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -módulos a partir de um $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo V . Isso acontece devido ao fato de não existir um homomorfismo de álgebras $\tau : U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ para qualquer álgebra de Lie simples e, portanto, não é possível construir aplicações de avaliação $\tau_z = \tau \circ D_z$. O único caso em que esse procedimento é possível é para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$.

TEOREMA 1.1.12. Existe um homomorfismo de álgebras $\tau : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ que age como identidade em $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1}) \subset U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$.

DEMONSTRAÇÃO. Recorde a realização usual de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ na seção III.4. A primeira meta é construir, no caso de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$, elementos E_{ij}^q correspondentes às matrizes elementares E_{ij} . Faremos por indução. Primeiro observamos que os geradores de Chevalley $x_i^\pm, i > 0$, continuam associados às mesmas matrizes, i.e., $x_i^+ = E_{ii+1}^q = E_{ii+1}$ e $x_i^- = E_{i+1i}^q = E_{i+1i}$. Também não é difícil prever que $k_i = q^{h_i}$, onde $h_i = E_{ii} - E_{i+1i+1}$. Suponha então que E_{ij}^q tenha sido definido pra $0 < |i - j| < k$, tome i, j tais que $|i - j| = k$ e defina

$$E_{ij}^q = \begin{cases} E_{ii+1}^q E_{i+1j}^q - q E_{i+1j}^q E_{ii+1}^q & \text{se } i < j \\ E_{ii-1}^q E_{i-1j}^q - q^{-1} E_{i-1j}^q E_{ii-1}^q & \text{se } j < i \end{cases}$$

Finalmente defina τ como

$$\tau(x_0^+) = E_{n1}^q \quad \tau(x_0^-) = E_{1n}^q$$

O restante da demonstração consiste em verificar que τ estende a um homomorfismo de álgebras. Nos referimos ao artigo original [J86] ou a [CP] para essa parte (veja também [EFK] no caso de $\mathfrak{sl}_2$). $\square$

Ainda assim, mesmo no caso de $\mathfrak{sl}_{n+1}$, a analogia com o caso clássico não é completa, pois τ não é um homomorfismo de álgebras de Hopf. De qualquer maneira, todo objeto de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$ pode ser afinizado, i.e., podemos estender a ação de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ a $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$. Quando $\mathfrak{g}$ não é $\mathfrak{sl}_{n+1}$ fica a pergunta sobre o que seria uma afinização de um $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo. A definição, razoavelmente natural, foi dada por Chari e Pressley [CP95].

DEFINIÇÃO 1.1.13. Dado um $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo irredutível V de peso máximo λ e uma n -ulpa de polinômios $\mathbb{P}$, dizemos que $V(\mathbb{P})$ é uma afinização de V , se sua decomposição em componentes irredutíveis, como representação de $U_q(\mathfrak{g})$, se escreve como

$$V(\mathbb{P}) \cong V_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu < \lambda} V_\mu^{\oplus m_\mu}$$

Dizemos que duas afinizações de V são equivalentes se forem isomorfas como representações de $U_q(\mathfrak{g})$.

A proposição a seguir garante a existência de afinizações e justifica a nomenclatura de representação fundamental para $V_i = V(\mathbb{P}^i)$.

PROPOSIÇÃO 1.1.14. [CP95] Para cada $i = 1, \dots, n$, as representações fundamentais $V_i(z)$ são afinizações equivalentes da representação fundamental V_{ω_i} de $U_q(\mathfrak{g})$. Essas são as únicas afinizações de V_{ω_i} .

COROLÁRIO 1.1.15. Se $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i$ e $\mathbb{P}$ satisfaz $\text{grau}(\mathbb{P}_i) = \lambda_i$, então $V(\mathbb{P})$ é uma afinização de V_λ . Consequentemente V_λ tem finitas afinizações a menos de equivalência.

Em geral, V_λ pode ter muitas afinizações não equivalentes. A definição abaixo é uma tentativa de escolher uma afinização preferencial. Antes precisamos do seguinte lema, cuja demonstração é imediata.

LEMA 1.1.16. Dadas afinizações de V_λ , $V(\mathbb{P})$ e $V(\mathbb{Q})$, diga que $V(\mathbb{P}) \leq V(\mathbb{Q})$ se, para todo $\mu \in P^+$, uma das seguintes alternativas for válida

- (a) $m_\mu(V(\mathbb{P})) \leq m_\mu(V(\mathbb{Q}))$.
- (b) Existe $\nu > \mu$ com $m_\nu(V(\mathbb{P})) < m_\nu(V(\mathbb{Q}))$.

onde $m_\mu(V(\mathbb{P}))$ é a multiplicidade do $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo V_μ em $V(\mathbb{P})$. Então temos uma ordem parcial no conjunto das afinizações (ou de suas classes de equivalência).

DEFINIÇÃO 1.1.17. Uma afinização de V_λ é dita minimal se ela for minimal com relação a ordem parcial definida no lema anterior.

Devido a existência do homomorfismo de Jimbo $\tau : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$, é claro que o *pull-back* por τ de todo $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ -módulo é sua própria afinização minimal. Os polinômios de Drinfeld correspondentes podem ser encontrados em [CP95]. O seguinte teorema dá conta da caracterização de algumas afinizações minimais.

TEOREMA 1.1.18. [CP95] Enumere os nós dos diagramas de Dynkin como na seção III.5.

- (a) V_i é isomorfo a V_{ω_i} , como representação de $U_q(\mathfrak{g})$, nos seguintes casos
 - (i) Para todo i quando $\mathfrak{g}$ é do tipo A_n ou C_n .
 - (ii) Para $i = 1, n$ se $\mathfrak{g}$ for do tipo B_n .
 - (iii) Para $i = 1, n-1, n$ se $\mathfrak{g}$ for do tipo D_n .
- (b) Se $\mathfrak{g}$ é do tipo B_n ou D_{n+1} com $n > 3$ e $1 < i < n$, a decomposição de V_i em componentes irredutíveis, como representação de $U_q(\mathfrak{g})$, é a seguinte

$$V_i \cong \bigoplus_{j=0}^{[i/2]} V_{\omega_{i-2j}}$$

- (c) Para $\mathfrak{g}$ do tipo E_6 temos

$$\begin{aligned} V_1 &\cong V_{\omega_1} & V_5 &\cong V_{\omega_5} & V_2 &\cong V_{\omega_2} \oplus V_{\omega_5} & V_4 &\cong V_{\omega_4} \oplus V_{\omega_1} \\ V_3 &\cong V_{\omega_3} \oplus V_{\omega_1+\omega_5} \oplus 2V_{\omega_6} \oplus \mathbb{C} & V_6 &\cong V_{\omega_6} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

(d) Para $\mathfrak{g}$ do tipo E_7 temos

$$\begin{aligned} V_1 &\cong V_{\omega_1} & V_6 &\cong V_{\omega_6} \oplus \mathbb{C} & V_7 &\cong V_{\omega_7} \oplus V_{\omega_1} \\ V_2 &\cong V_{\omega_2} \oplus V_{\omega_6} \oplus \mathbb{C} & V_5 &\cong V_{\omega_5} \oplus V_{\omega_2} \oplus 2V_{\omega_6} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

(e) Para $\mathfrak{g}$ do tipo E_8 temos

$$\begin{aligned} V_1 &\cong V_{\omega_1} \oplus \mathbb{C} & V_7 &\cong V_{\omega_7} \oplus V_{\omega_1} \oplus \mathbb{C} \\ V_2 &\cong V_{\omega_2} \oplus V_{\omega_7} \oplus 2V_{\omega_1} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

(f) Para $\mathfrak{g}$ do tipo F_4 temos

$$\begin{aligned} V_1 &\cong V_{\omega_1} & V_2 &\cong V_{\omega_2} \oplus V_{\omega_1} & V_4 &\cong V_4 \oplus \mathbb{C} \\ V_3 &\cong V_{\omega_3} \oplus V_{2\omega_1} \oplus 2V_{\omega_4} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

(g) Para $\mathfrak{g}$ do tipo G_4 temos

$$V_1 \cong V_{\omega_1} \quad V_2 \cong V_{\omega_2} \oplus \mathbb{C}$$

Observação: A tarefa de descrever a estrutura de $V(\mathbb{P})$ como $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo não é fácil, mesmo quando $\mathbb{P} = \mathbb{P}^i$. Recentemente Nakajima [N02] encontrou um método, razoavelmente sofisticado, que resolve o problema, teoricamente, para todos os casos não listados no teorema acima.

1.2. R-matrizes com Parâmetro Espectral

Recorde na seção II.3 que o produto tensorial completo $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \hat{\otimes} U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ possui uma estrutura quase triangular $\mathcal{R}$. Dados dois módulos V, W em $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ e uma variável formal z , defina

$$(1.2.1) \quad R_{V,W}(z) = \mathcal{R}|_{V(z) \otimes W}$$

É fácil ver que $R_{V,W}(z) \in \text{End}(V \otimes W)[[z]]$. Além disso, como $\mathcal{R} \in U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^+) \hat{\otimes} U_q(\widehat{\mathfrak{b}}^-)$, temos $R_{V,W(u)}(z) \in \text{End}(V \otimes W)[[z/u]]$, onde u é outra variável formal. Nosso primeiro objetivo será mostrar que, de fato, $R_{V,W}(z)$ converge numa vizinhança de $z = 0$ e, portanto, podemos olhar $R_{V,W}(z)$ como uma função meromorfa $R_{V,W} : \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(V \otimes W)$.

PROPOSIÇÃO 1.2.1. O elemento $k_{2\rho}$ define um isomorfismo $V(zq^{2r^\vee h^\vee}) \rightarrow V(z)^{**}$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata da proposição II.3.4 e do corolário I.3.4. $\square$

Vamos introduzir a seguinte notação. Dada uma aplicação linear $T : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$, $T = \sum_i a_i \otimes b_i$, defina $T^{t_1} : V^* \otimes W \rightarrow V^* \otimes W$ por $T^{t_1} = \sum_i a_i^* \otimes b_i$.

PROPOSIÇÃO 1.2.2. Temos as seguintes identidades

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} R_{V^*,W}(z) &= (R_{V,W}(z)^{-1})^{t_1} \\ (((R_{V,W}(z)^{-1})^{t_1})^{-1})^{t_1} &= (k_{2\rho} \otimes 1) R_{V,W}(z q^{2r^\vee h^\vee}) (k_{-2\rho} \otimes 1) \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. A primeira identidade é consequência da equação (I.2.4). Para obter a segunda basta aplicar a primeira duas vezes e usar a proposição 1.2.1. $\square$

LEMA 1.2.3. Seja U uma vizinhança de zero em $\mathbb{C}^n$, $G : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função analítica com $G(0) = 0$ e $p \in \mathbb{C}$ tal que $|p| > 1$. Suponha que $f \in z\mathbb{C}^n[[z]]$ seja uma solução formal para a equação de diferenças

$$f(pz) = G(f(z))$$

Então f converge a uma função analítica em uma vizinhança de zero.

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $f(z) = \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ e $G(y) = \sum_{n \geq 1} g_n y^n$, onde g_n são aplicações multilineares. Como G é analítica em zero, existe $A > 0$ tal que $|g_n| < A^n \forall n$. Tome k_0 grande o suficiente para que, se $k \geq k_0$, então $|(p^k - g_1)^{-1}| < 2|p|^{-k}$ e $2A < |p|^{k/2}$. Seja C tal que $|f_k| < C$ para $k < k_0$ e tome $B > \max(1, \frac{AC}{|p|^{1/2}-1})$.

Mostraremos por indução em k que $|f_k| < CB^{k-1}$. Para $k < k_0$ está claro, pois $B > 1$. Assuma que a afirmação tenha sido provada para $n < k$, onde $k \geq k_0$. Temos

$$f_k = (p^k - g_1)^{-1} \sum_{1 \leq r \leq k} \sum_{\sum i_j = k} g_r(f_{i_1}, \dots, f_{i_r})$$

Mas, $|g_r(f_{i_1}, \dots, f_{i_r})| \leq |g_r| \prod_{l=1}^r |f_{i_l}| < (AC)^r B^{k-r}$ e o número de termos com g_r é dominado pela combinatória $\binom{k-1}{r-1}$, pois $i_j \geq 1$, $r > 1$. Então

$$|f_k| < 2(AC/B)(1 + AC/B)^{k-1} |p|^{-k} B^k < CB^{k-1}$$

já que $2A < |p|^{k/2}$ e $1 + AC/B < |p|^{1/2}$. Logo $f(z)$ converge para z pequeno. $\square$

TEOREMA 1.2.4. Sejam $V, W \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$. Então $R_{V,W}(z)$ é analítica perto de zero e se estende meromorficamente a $\mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $|q| \neq 1$, a equação (1.2.2) pode ser vista como uma equação do tipo $f(pz) = G(f(z))$ como no lema. Mais precisamente, f assume valores em $\text{End}(V \otimes W)$, $p = q^{\pm 2r^\vee h^\vee}$, $G(X) = (((X^{-1})^{t_1})^{-1})^{t_1}$ e a origem em $\text{End}(V \otimes W)$ é o ponto $X = R_{V,W}(0)$, que é um ponto fixo de G . Assim, pelo lema 1.2.3, $R_{V,W}(z)$ é analítica ao redor de zero. Como G é um isomorfismo bi-racional, a extensão de $R_{V,W}(z)$ a $\mathbb{C}$ meromorficamente é consequência de (1.2.2) $\square$

Observação: Este teorema foi provado originalmente por Kazhdan e Soibelman [KS95], mas a demonstração é bem mais complicada do que a que acabamos de apresentar.

PROPOSIÇÃO 1.2.5. [FR92, EFK] Sejam $V, W \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ irredutíveis. Então

$$(1.2.3) \quad R_{V,W}(z) = f_{V,W}(z) \bar{R}_{V,W}(z)$$

onde $f_{V,W} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função meromorfa, regular em 0 com $f_{V,W}(0) \neq 0$, e $\bar{R}_{V,W}(z)$ é uma função racional regular em 0 normalizada de modo que $\bar{R}_{V,W}(z)(v_0 \otimes w_0) = v_0 \otimes w_0$. Aqui v_0, w_0 são os vetores de peso máximo em V e W . Se $|q| < 1$, $f_{V,W}$ pode ser representada como

$$(1.2.4) \quad f_{V,W}(z) = q^{r^\vee(\lambda, \mu)} \prod_{j=0}^{\infty} \varrho_{V,W}(q^{2jr^\vee h^\vee} z)$$

onde λ e μ são os pesos de v_0 e w_0 , olhando V e W como $U_q(\mathfrak{g})$ -módulos, e $\varrho_{V,W}(z)$ é uma função racional com $\varrho_{V,W}(0) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Considere $V((z))$, o espaço de séries de Laurent formais com coeficiente em V , com a “mesma” estrutura de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -módulo que $V(z)$. Então $PR_{V,W}(z) : V((z)) \otimes W \rightarrow W \otimes V((z))$ é um isomorfismo de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -módulos. Segue da proposição 1.1.11 que $V((z)) \otimes W$ é irredutível e, portanto, a menos de normalização, existe um único homomorfismo de módulos $V((z)) \otimes W \rightarrow W \otimes V((z))$. Logo, a fatoração (1.2.3) é única. Que $\bar{R}_{V,W}(z)$ é uma função racional segue do fato que $P\bar{R}_{V,W}(z)$ é um homomorfismo de módulos, ou seja, satisfaz um sistema de equações lineares cujos coeficientes são polinômios em z . Para calcular $f_{V,W}(z)$, considere

$$\bar{R}_{V^{**},W}(z) = (((\bar{R}_{V,W}(z)^{-1})^{t_1})^{-1})^{t_1}$$

Como $V^{**}(z) \cong V(q^{2r^\vee h^\vee} z)$, existe uma função racional $\varrho_{V,W}(z)$ tal que

$$(1.2.5) \quad \varrho_{V,W}(z) \bar{R}_{V^{**},W}(z) = (k_{2\rho} \otimes 1) \bar{R}_{V,W}(z q^{2r^\vee h^\vee}) (k_{-2\rho} \otimes 1)$$

de onde segue que $\varrho_{V,W}(0) = 1$. Comparando com (1.2.2) obtemos

$$\varrho_{V,W}(z) f_{V,W}(q^{2r^\vee h^\vee} z) = f_{V,W}(z)$$

de onde deduzimos (1.2.4). □

Observação: Veja que $\bar{R}_{V,W}(0)$ coincide com a R-matriz universal de $U_q(\mathfrak{g})$.

PROPOSIÇÃO 1.2.6. $R_{V,W}(z)$ satisfaz a equação de Yang-Baxter com parâmetros espectrais

$$(1.2.6) \quad R_{V_1,V_2}(z_1/z_2) R_{V_1,V_3}(z_1/z_3) R_{V_2,V_3}(z_2/z_3) = R_{V_2,V_3}(z_2/z_3) R_{V_1,V_3}(z_1/z_3) R_{V_1,V_2}(z_1/z_2)$$

e, para V e W irredutíveis, a condição de unitariedade

$$(1.2.7) \quad P \bar{R}_{W,V}(z^{-1}) P \bar{R}_{V,W}(z) = 1$$

onde P é a permutação de fatores.

DEMONSTRAÇÃO. A equação (1.2.6) é consequência da equação de Yang-Baxter para $\mathcal{R}$. O lado esquerdo de (1.2.7) é um homomorfismo de módulos $V(z) \otimes W \rightarrow V(z) \otimes W$. Como, para valores genéricos de z , $V(z) \otimes W$ é irreduzível, esse homomorfismo é uma constante. Que essa constante é 1 segue da normalização de $\bar{R}_{V,W}$. $\square$

Agora veremos que os pólos ou, equivalentemente, os pontos onde $\bar{R}_{V,W}(z)$ não é invertível, estão estreitamente relacionados com os valores de z para os quais $V(z) \otimes W$ é redutível. Vamos começar por caracterizar tais conjuntos para V, W representações fundamentais. Em [FM01], E. Frenkel e E. Mukhin mostraram que se $\bar{R}_{V_i, V_j}(z)$ tem um pólo em z_0 , então $z_0 \in \mathcal{P} = \{q^k; 2 \leq k \leq r^\vee h^\vee, k \in \mathbb{Z}\}$ e, se $\bar{R}_{V_i, V_j}(z_0)$ não é invertível, então $z_0 \in \mathcal{P}^{-1} = \{q^{-k}; 2 \leq k \leq r^\vee h^\vee, k \in \mathbb{Z}\}$.

COROLÁRIO 1.2.7. Seja $\mathcal{P}_{ij}$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ onde $\varrho_{V_i, V_j}(z)$ tem um pólo. Então $\bar{R}_{V_i, V_j}(z)$ não é invertível exatamente em $\mathcal{P}_{ij}^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO. Da demonstração da proposição 1.2.5 sabemos que $\varrho_{V,W}(z)$ é caracterizada pela equação:

$$((\bar{R}_{V,W}(z))^{-1})^{t_1} = \varrho_{V,W}(z)((\bar{R}_{V,W}(q^{2r^\vee h^\vee} z))^{t_1})^{-1}$$

Recorde que $V_j(z)^* \cong V_{j^*}(q^{r^\vee h^\vee} z)$, onde $V_{\omega_j^*}$ é a representação fundamental de $U_q(\mathfrak{g})$ dual a V_{ω_j} . Então, se $z_0 \in \mathcal{P}_{ij}^{\pm 1}$ e $\bar{R}_{V_i, V_j}(z_0)$ é invertível, tanto $((\bar{R}_{V_i, V_j}(z))^{-1})^{t_1}$ quanto $((\bar{R}_{V_i, V_j}(q^{2r^\vee h^\vee} z))^{t_1})^{\pm 1}$ são regulares em z_0 . Portanto $\varrho_{V_i, V_j}(z)$ também é. Reciprocamente, se $\bar{R}_{V_i, V_j}(z_0)$ não for invertível, segue que $((\bar{R}_{V_i, V_j}(z))^{-1})^{t_1}$ tem um pólo em z_0 , mas $((\bar{R}_{V_i, V_j}(q^{2r^\vee h^\vee} z))^{t_1})^{-1}$ é regular. Logo $\rho_{X,Y}$ tem um pólo em z_0 . $\square$

É claro que caracterizar os pontos onde $\bar{R}_{V_i, V_j}(z)$ não é invertível é equivalente a caracterizar os pontos onde $(\bar{R}_{V_i, V_j}(z))^{-1}$ tem um pólo. Consequentemente, segue de (1.2.7) que $\mathcal{P}_{ij}$ é o conjunto dos pólos de $\bar{R}_{V_i, V_j}(z)$.

PROPOSIÇÃO 1.2.8. O produto tensorial $V_i(z) \otimes V_j$ é redutível se e somente se $z \in \mathcal{S}_{ij} = \mathcal{P}_{ij} \cup \mathcal{P}_{ij}^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $z \in \mathcal{S}_{ij}$, basta tomar o núcleo de $(\bar{R}_{V_i, V_j}(z))^{\pm 1}$. A recíproca requer argumentos bem mais sofisticados [FM01]. $\square$

Finalizamos essa seção com a fórmula para $R_{V,V}(z)$, onde $V = V_1$ é a afinização minimal da representação natural de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$.

PROPOSIÇÃO 1.2.9. Seja $v_1, \dots, v_{n+1}$ a base canônica de V . A ação de $\bar{R}_{V,V}(z)$ em $V(z) \otimes V$ é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{V,V}(z)(v_m \otimes v_m) &= v_m \otimes v_m \\ \bar{R}_{V,V}(z)(v_m \otimes v_l) &= \zeta(z)(v_m \otimes v_l) + \eta(z)z(v_l \otimes v_m) \\ \bar{R}_{V,V}(z)(v_l \otimes v_m) &= \eta(z)(v_m \otimes v_l) + \zeta(z)(v_l \otimes v_m)\end{aligned}$$

onde

$$(1.2.8) \quad \zeta(z) = \frac{1-z}{q-q^{-1}z} \quad \text{and} \quad \eta(z) = \frac{q-q^{-1}}{q-q^{-1}z}$$

DEMONSTRAÇÃO. Essa fórmula é conhecida de longa data, embora não seja tão fácil encontrar uma demonstração publicada. Temos essa demonstração disponível em [M01], onde usamos uma técnica “ingênua”: recursivamente, usando-se apenas a propriedade de $P\bar{R}_{V,V}(z)$ ser um homomorfismo de módulos e sua normalização. Evidentemente, este é um cálculo longo. $\square$

Em termos das matrizes elementares E_{ij} (veja seção III.4), $\bar{R}_{V,V}(z)$ se escreve como

$$(1.2.9) \quad \begin{aligned}\bar{R}_{V,V}(z) &= \sum_{i=0}^n E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \zeta(z) \left(\sum_{j>i} E_{i,i} \otimes E_{j,j} + E_{j,j} \otimes E_{i,i} \right) \\ &\quad + \eta(z) \left(\sum_{j>i} z E_{j,i} \otimes E_{i,j} + E_{i,j} \otimes E_{j,i} \right)\end{aligned}$$

Agora vamos calcular $\varrho_{n+1}(z) = \varrho_{V,V}(z)$. Seja $\det \bar{R}_{V,V}(z) = \zeta(z)^2 - z\eta(z)^2$, o determinante de $\bar{R}_{V,V}(z)$ no subespaço $V_{m,l}$ de $V(z) \otimes V$ gerado por $v_m \otimes v_l$ e $v_l \otimes v_m$. Então temos

$$\begin{aligned}(\bar{R}_{V,V}(z)^{-1})^{t_1} &= \sum_{i=0}^n E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \frac{\zeta(z)}{\det R(z)} \left(\sum_{j>i} E_{i,i} \otimes E_{j,j} + E_{j,j} \otimes E_{i,i} \right) \\ &\quad - \frac{\eta(z)}{\det \bar{R}_{V,V}(z)} \left(\sum_{j>i} z E_{i,j} \otimes E_{i,j} + E_{j,i} \otimes E_{j,i} \right)\end{aligned}$$

Os subespaços invariantes dessa aplicação são $V_{=} = \bigoplus_i \mathbb{C}(v_i \otimes v_i)$ e $V_{i \neq j} = \mathbb{C}(v_i \otimes v_j)$, e sua ação em $V_{=}$ é dada pela matriz

$$(1.2.10) \quad T_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & zp(z) & \cdots & zp(z) \\ p(z) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & zp(z) \\ p(z) & \cdots & p(z) & 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad \text{onde} \quad p(z) = -\frac{\eta(z)}{\det R(z)} = \frac{1-q^2}{1-q^2z}$$

Então, aplicando (1.2.5) a $v_1 \otimes v_1$, é fácil ver que

$$\varrho_{n+1} = \frac{\det T_{n+1}}{\det T_n}$$

Uma vez calculado $\det T_k$ temos

$$(1.2.11) \quad \varrho_{n+1}(z) = \frac{(1-z)(1-zq^{2(n+1)})}{(1-zq^2)(1-zq^{2n})}$$

Finalmente, $f_{V,V}(z) = f_{n+1}(z)$ é dada por

$$(1.2.12) \quad f_{n+1}(z) = q^{\frac{n}{n+1}} \prod_{j=0}^{\infty} \varrho_{n+1}(q^{2j(n+1)}z)$$

Observação: Lembre que $\frac{n}{n+1} = (\omega_1, \omega_1)$ (seção III.4).

Embora este método seja tecnicamente simples, para $\mathfrak{g}, V_i, V_j$ quaisquer, ele pode se tornar impraticável. No caso de $\mathfrak{sl}_2$ é possível levá-lo a cabo em completa generalidade [EFK]. Em geral, tudo o que se consegue, usando-se outros métodos, é calcular $f_{V_i, V_j}(z)$ [AK97, FR00]. Mas, geralmente, isso também é tudo o que se precisa.

1.3. O Caráter Elíptico Central

Agora podemos nos perguntar se $V_i(z) \otimes V_j$ é completamente redutível quando $z \in \mathcal{S}_{ij}$ (compare com o teorema II.2.8). A resposta a essa pergunta é negativa como mostra o seguinte exemplo calculado em [CP91b]. Tome $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ e lembre que os objetos simples de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ são parametrizados por sua dimensão, i.e., para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, existe um único $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -módulo irreduzível V^m com dimensão $m+1$. Considere $V^m(z)$, o $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ -módulo correspondente construído a partir da aplicação de avaliação de Jimbo. Então as seguintes sequências exatas não cindem

$$(1.3.1) \quad 0 \rightarrow V^{m-1}(zq^{-1}) \rightarrow V^m(z) \otimes V^1(zq^{m+1}) \rightarrow V^{m+1}(zq) \rightarrow 0$$

$$(1.3.2) \quad 0 \rightarrow V^{m+1}(zq) \rightarrow V^1(zq^{m+1}) \otimes V^m(z) \rightarrow V^{m-1}(zq^{-1}) \rightarrow 0$$

A segunda sequência é obtida dualizando-se a primeira. Então vemos que $V^m(z) \otimes V^1(zq^{m+1})$ e $V^1(zq^{m+1}) \otimes V^m(z)$ sequer são isomorfos. De fato, $V^m(z) \otimes V^1(zq^{m+1})$ é cíclico, gerado pelo produto tensorial dos vetores de peso máximo de $V^1(zq^{m+1})$ e $V^m(z)$, enquanto em $V^1(zq^{m+1}) \otimes V^m(z)$, o produto tensorial destes vetores gera uma subrepresentação própria. De qualquer maneira, este exemplo já sugere que o seguinte teorema ainda é verdadeiro.

TEOREMA 1.3.1. [FR00] O anel de Grothendieck de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$, $\mathbf{Gr}(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$, é comutativo.

A questão da ciclicidade de um produto tensorial $V_{i_1}(z_1) \otimes \cdots \otimes V_{i_l}(z_l)$ foi levantada por Akasaka e Kashiwara em [AK97]. A resposta foi dada por Kashiwara [K00] usando *crystal bases* e por Chari [C01] usando ação do Grupo de Tranças. Enunciamos o resultado já utilizando a proposição 1.2.8.

PROPOSIÇÃO 1.3.2. Para que o produto tensorial $V_{k_1}(z_1) \otimes \cdots \otimes V_{k_l}(z_l)$ seja cíclico no produto tensorial dos vetores de peso máximo, basta que $\frac{z_r}{z_s} \notin \mathcal{P}_{k_r k_s}$ para $r < s$. Em outras palavras, basta que $\bar{R}_{V_{k_r}, V_{k_s}}(\frac{z_r}{z_s})$ seja regular para $r < s$. Em particular, nesses casos, $V_{k_1}(z_1) \otimes \cdots \otimes V_{k_l}(z_l)$ é indecomponível.

Uma vez que, ao contrário de $\mathbf{Rep}_f(U(\widehat{\mathfrak{g}}))$, $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ não é semi simples nem quando consideramos apenas a subcategoria abeliana gerada por produto tensoriais de objetos simples, nosso próximo objetivo será determinar a decomposição em blocos de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$. Os resultados básicos sobre blocos de uma categoria abeliana se encontram na seção III.3. Recorde que, se A é uma álgebra de dimensão finita, então os blocos de $\mathbf{Rep}_f(A)$, a categoria abeliana dos A -módulos de dimensão finita, são parametrizados por caracteres centrais, $\chi : Z(A) \rightarrow \mathbb{C}$. Apesar de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ não ter dimensão finita e de seu centro ser trivial, definiremos um conceito análogo ao de caráter central, que nos permitirá parametrizar os blocos de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ de maneira similar.

Dados $X, Y \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ defina

$$(1.3.3) \quad \mathfrak{R}_{X,Y}(z) = R_{Y,X}^{21}(z^{-1})R_{X,Y}(z) \in \text{End}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(X(z) \otimes Y).$$

PROPOSIÇÃO 1.3.3. [KS95] $\mathfrak{R}_{X,Y}$ é uma função elíptica de z com período $q^{2r^\vee h^\vee}$. Em outras palavras, é uma função meromorfa na curva elíptica

$$E = \frac{\mathbb{C}^*}{q^{2r^\vee h^\vee \mathbb{Z}}}$$

Denote por Id_E o funtor identidade de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))_E := \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}})) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(E)$, onde $\mathbb{C}(E)$ é o corpo das funções meromorfas em E .

PROPOSIÇÃO 1.3.4. Se X for irredutível, existe um elemento $\xi_X \in \text{End}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(\text{Id}_E)$, tal que $\mathfrak{R}_{X,Y}(z) = 1 \otimes \xi_X(z)|_Y$ para todo $Y \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ e quase todo $z \in \mathbb{C}^*$.

A demonstração segue do lema a seguir.

LEMA 1.3.5. Dados $X, Y \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ com X simples, a aplicação $\xi \mapsto 1 \otimes \xi$, define um isomorfismo $\text{End}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(Y) \cong \text{End}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(X(z) \otimes Y)$ para quase todo $z \in \mathbb{C}^*$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos

$$\text{End}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(X(z) \otimes Y) \cong \text{Hom}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(Y, {}^*X(z) \otimes X(z) \otimes Y) \cong \text{Hom}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(Y \otimes {}^*Y, ({}^*X \otimes X)(z))$$

Sejam $Z_1, \dots, Z_n$ as constituintes não triviais de $*X \otimes X$. Então, para z genérico, nenhum $Z_i(z)$ ocorre como constituinte de $Y \otimes *Y$, pois $Z_i(z)$ são dois a dois não isomorfos para i fixo. Consequentemente, a imagem de qualquer $f : Y \otimes *Y \rightarrow (*X \otimes X)(z)$ tem apenas constituintes triviais. É fácil mostrar que $\text{Ext}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$. Logo, como X é simples, a imagem de f é trivial, i.e., ou é zero ou uni-dimensional. $\square$

COROLÁRIO 1.3.6. Para quase todo $z, u, w \in \mathbb{C}^*$ valem

- (a) Se Y é simples, $\xi_X(z)|_Y$ é o operador escalar dado por $f_{X,Y}(z)f_{Y,X}(z^{-1})$. Além disso $\xi_X(z)|_Y = \xi_Y(z^{-1})|_X$.
- (b) $\xi_X(z)|_{Y_1 \otimes Y_2} = \xi_X(z)|_{Y_1} \otimes \xi_X(z)|_{Y_2}$. Em particular, se Y_i são simples e Y é subquociente de $Y_1 \otimes Y_2$, então $\xi_X(z)|_Y = \xi_X(z)|_{Y_1} \xi_X(z)|_{Y_2} \in \mathbb{C}$. Analogamente, se um objeto irredutível X é subquociente de $X_1 \otimes X_2$ com X_1, X_2 também irredutíveis, então $\xi_X = \xi_{X_1} \xi_{X_2} = \xi_{X_2} \xi_{X_1}$.
- (c) $\xi_X(z)|_{Y^*} = ((\xi_X(z)|_Y)^{-1})^*$.
- (d) $\xi_X(z)|_{Y(u)} = \xi_X(\frac{z}{u})|_Y$ e $\xi_{X(w)}(z) = \xi_X(zw)$.

DEMONSTRAÇÃO. O primeiro item é imediato do lema 1.3.5. O segundo segue de (I.2.2) e o terceiro de (I.2.4). O quarto é consequência da propriedade similar para $R_{X,Y}(z)$. $\square$

DEFINIÇÃO 1.3.7. Seja $\mathcal{I}$ o conjunto das classes de objetos simples isomorfos de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$. Um caráter elíptico central em $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ é um elemento $\chi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}(E)$ satisfazendo

- (a) $\chi_{X(w)}(z) = \chi_X(zw)$ para quase todo $z, w \in \mathbb{C}^*$.
- (b) Se $X \in \mathcal{I}$ é subquociente de $X_1 \otimes X_2$, para $X, X_i \in \mathcal{I}$, então $\chi_X = \chi_{X_1} \chi_{X_2}$.
- (c) $\chi_{\mathbb{C}} = 1$.

Aqui estamos denotando a avaliação de χ na classe de X por χ_X . Dado um caráter elíptico central χ , seja

$$\mathcal{C}_\chi = \{Y \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}})); \xi_X(z)|_Z = \chi_X(z) \text{ para quaisquer } X, Z \in \mathcal{I} \text{ com } Z \text{ constituinte de } Y\}$$

Pode acontecer que $\mathcal{C}_\chi = 0$. Se $Y \in \mathcal{C}_\chi$, dizemos que o caráter elíptico central de Y é χ . É imediato que

$$\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}})) = \bigoplus_{\chi} \mathcal{C}_\chi$$

TEOREMA 1.3.8. As categorias $\mathcal{C}_\chi$ são indecomponíveis, isto é, elas são os blocos de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$.

O restante da seção será dedicada a demonstração do teorema 1.3.8. De fato, como parte da demonstração depende do cálculo de $\xi_{V_i}(z)|_{V_j} = f_{V_i, V_j}(z)f_{V_j, V_i}(z^{-1})$, e nós não apresentamos o método geral para fazê-lo, a demonstração estará completa apenas para $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Embora os passos sejam exatamente os mesmos, eles se tornam muito mais trabalhosos em geral. A demonstração completa se encontra em [EM02b].

Observação: A demonstração deixará claro o conjunto dos caracteres elípticos centrais χ para os quais $\mathcal{C}_\chi \neq 0$. Também ficará claro que se duas representações têm caracteres elípticos centrais que coincidem a menos de multiplicação por uma constante, então eles de fato coincidem. Em outras palavras, o caráter elíptico central de uma representação é completamente determinado pelo seu conjunto de zeros e pólos em E .

O teorema abaixo é um refinamento do corolário 1.1.10.

TEOREMA 1.3.9. Todo objeto simples de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ é um subquociente de um produto tensorial da forma $V_{i_1}(z_1) \otimes \cdots \otimes V_{i_m}(z_m)$ onde i_j percorre o conjunto de índices que enumeram os nós negros do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$, como no apêndice III.5.

Observação: Para $\mathfrak{sl}_{n+1}$ o nóulo corresponde à representação natural. Nesse caso o resultado é conhecido a algum tempo (veja [CP93] por exemplo). De fato, por causa do Corolário 1.1.10, é suficiente provar para representações fundamentais. Isto é feito em [CP96b] para as demais álgebras de Lie clássicas. Para as excepcionais ele pode ser obtido a partir destes casos considerando-se subálgebras associadas a subdiagramas de Dynkin (veja [CP91a] para as explicações sobre este método). No entanto, podemos usar caracteres elípticos centrais para prova-lo diretamente. No caso de $\mathfrak{e}_6$, o mesmo tipo de cálculo foi feito em [CP91a]. Os demais casos estão em [EM02b]. Essa demonstração usando caracteres elípticos centrais é interessante, porém, pode se tornar bastante trabalhosa, como para $\mathfrak{e}_8$.

COROLÁRIO 1.3.10. Para $\mathfrak{g} \neq D_{2m}$, os caracteres elípticos centrais são determinados pelo seu valor em $V = V_b$, onde b é o índice do nóulo negro do diagrama de Dynkin. No caso de D_{2m} , eles são determinados por seus valores nas afinizações minimais das representações *spin*.

Já que só poderemos completar a demonstração do teorema 1.3.8 para $\mathfrak{sl}_{n+1}$ de qualquer maneira, de agora em diante estaremos supondo que $\mathfrak{g} \neq D_n$ para n par. Então fixamos $V = V_b$ e consideraremos produtos tensoriais da forma $V(z_1) \otimes \cdots \otimes V(z_l)$.

PROPOSIÇÃO 1.3.11. Se $z_1, \dots, z_l$ é uma sequência satisfazendo a condição da proposição 1.3.2 e $s \in S_m$ é tal que $z_{s(1)}, \dots, z_{s(l)}$ também a satisfaz, então $V(z_1) \otimes \cdots \otimes V(z_l)$ é isomorfo a $V(z_{s(1)}) \otimes \cdots \otimes V(z_{s(l)})$.

DEMONSTRAÇÃO. O isomorfismo é dado por aplicações sucessivas de $P\bar{R}_{V,V}(z_j/z_k)$, onde k e j são índices que trocam de ordem pela ação de s . Que $P\bar{R}_{V,V}(z_j/z_k)$ define um isomorfismo nos fatores correspondentes segue da hipótese sobre as sequências $z_1, \dots, z_l$ e $z_{s(1)}, \dots, z_{s(l)}$. $\square$

DEFINIÇÃO 1.3.12. Dizemos que uma sequência $z_1, \dots, z_m$ é não resonante se satisfaz a condição da proposição 1.3.2.

Como qualquer sequência pode ser rearranjada numa ordem não resonante, denotaremos por $Y(z_1, \dots, z_m)$ qualquer um dos produtos tensoriais indecomponíveis isomorfos obtidos de $z_1, \dots, z_m$.

Como consequência do lema III.3.4, do teorema 1.3.9 e das proposições 1.3.2 e 1.3.11, para provar o teorema 1.3.8 é suficiente mostrar que se $Y(z_1, \dots, z_l)$ e $Y(w_1, \dots, w_k)$ têm o mesmo caráter elíptico central, então eles estão ligados.

De agora em diante assumiremos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$.

LEMA 1.3.13. Para todo $w \in \mathbb{C}^*$, $Y(z_1, \dots, z_m)$ e $Y(z_1, \dots, z_m, w, q^2 w, \dots, q^{2(r^\vee h^\vee - 1)} w)$ estão ligados. Em particular $Y(z_1, \dots, z_m)$ está ligado a $Y(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j q^{2r^\vee h^\vee}, z_{j+1}, \dots, z_m)$.

Observação: Para $\mathfrak{sl}_{n+1}$ temos $r^\vee = 1$ e $h^\vee = n + 1$. O motivo de enunciarmos o lema desse jeito é apenas uma sugestão da forma “geral” que esse lema terá para outras álgebras de Lie. De fato, como queremos que esse lema liste todas as possíveis relações não triviais de ligação de forma não redundante, não é possível formulá-lo de forma geral, forçando-nos, desde já, a uma análise caso a caso.

DEMONSTRAÇÃO. Como a representação trivial está contida em $Y(w, q^2 w, \dots, q^{2(h^\vee - 1)} w)$ para todo w , como “potência exterior quântica máxima” de $V(w)$, segue que toda constituinte simples de $Y(z_1, \dots, z_m)$ também é constituinte de $Y(z_1, \dots, z_m, w, q^2 w, \dots, q^{2(h^\vee - 1)} w)$. Veja que usamos o teorema 1.3.1 neste argumento. Para a segunda afirmação, sejam Y_1 e Y_2 constituintes simples em cada um dos produtos tensoriais considerados. Então ambos Y_i são subquocientes de $Y(z_1, \dots, z_j, q^2 z_j, \dots, q^{2h^\vee} z_j, z_{j+1}, \dots, z_m)$. $\square$

O lema 1.3.13 reduz nossa tarefa a mostrar que se $Y(z_1, \dots, z_m)$ e $Y(w_1, \dots, w_k)$ tem o mesmo caráter elíptico central, então a sequência $(z_1, \dots, z_m)$ pode ser obtida de $(w_1, \dots, w_k)$ combinatoriamente: por permutações e por adição ou remoção de sequências $(z, q^2 z, \dots, q^{2(h^\vee - 1)} z)$, que já incluem transformações do tipo $z_j \rightarrow z_j q^{2h^\vee}$. Essa parte da demonstração é feita analisando-se a estrutura de zeros e pólos de $\xi(z) = \xi_{V,V}(z) = f_{V,V}(z) f_{V,V}(z^{-1})$. Relembrando a fórmula (1.2.12) para $f_{V,V}(z)$ temos

$$(1.3.4) \quad \xi(z) = q^{\frac{2(h^\vee - 1)}{h^\vee}} \prod_{j=0}^{\infty} \varrho(q^{2jh^\vee} z) \varrho(q^{2jh^\vee} z^{-1})$$

onde ϱ é dada por (1.2.11)

$$\varrho(z) = \frac{(1 - z)(1 - zq^{2h^\vee})}{(1 - zq^2)(1 - zq^{2(h^\vee - 1)})}$$

Assim, a estrutura de zeros e pólos de $\xi(z)$ em E é dada pela seguinte figura

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet^1 & \bullet^{q^2} & \bullet^{q^4} & \dots & \bullet^{q^{2(h^\vee-2)}} & \bullet^{q^{2(h^\vee-1)}} & \bullet^1 & \bullet^{q^2} \\ 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array} \quad \text{para } n \geq 2 \quad \text{e} \quad \text{para } n = 1$$

onde números positivos denotam zeros, da ordem correspondente, e negativos os pólos.

O fato de $\mathbb{C}$ estar contido em $Y(w, q^2w, \dots, q^{2(h^\vee-1)}w)$ é refletido na relação

$$(1.3.5) \quad \prod_{s=0}^{h^\vee-1} \xi(zw^{-1}q^{-2s}) = 1.$$

Para completar a demonstração, mostraremos que qualquer relação multiplicativa entre $\xi(zu)$, $u \in \mathbb{C}^*$, é uma combinação de relações da forma (1.3.5). É suficiente mostrarmos que as funções $\xi(z), \xi(zq^{-2}), \dots, \xi(zq^{-2(h^\vee-2)})$ são multiplicativamente independentes. Veja que para $\mathfrak{sl}_2$ isso é imediato.

Vamos transportar o problema para o contexto de álgebra linear. Considere o grupo $\mathbb{Z}^{h^\vee-1}$. Associe à função $\xi(zq^{-2s})$, $0 \leq s \leq h^\vee - 2$, o vetor $u_s \in \mathbb{Z}^{h^\vee-1}$ dado por

$$\begin{aligned} u_0 &= (2, -1, 0, 0, \dots, 0) \\ u_{h^\vee-2} &= (0, 0, \dots, 0, -1, 2) \\ u_t &= (0, \dots, 0, -1, 2, -1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

para $0 < t < h^\vee - 2$, onde o 2 aparece na s -ésima entrada, se as enumerarmos de 0 a $h^\vee - 2$. As entradas desses vetores correspondem à ordem das singularidades de $\xi(zq^{-2s})$ na sequência $1, q^2, \dots, q^{2(h^\vee-2)}$. Então nos resta mostrar que os vetores u_s são linearmente independentes ou, equivalentemente, que a matriz $\mathcal{S}_n$, cujas linhas são os vetores u_s , tem determinante não nulo. Mas é fácil ver que $\det \mathcal{S}_n = 2 \det \mathcal{S}_{n-1} - \det \mathcal{S}_{n-2}$. Então, usando indução, obtemos $\det \mathcal{S}_n = n + 1$. De fato, $\mathcal{S}_n$ coincide com a matriz de Cartan de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ (essa coincidência não acontece para as outras álgebras de Lie). A demonstração do teorema 1.3.8 para $\mathfrak{sl}_{n+1}$ está completa.

Finalizamos o capítulo com um exemplo. Vamos caracterizar os blocos das afinizações minimais das quantizações das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}_2$. Para isso usaremos a sequência exata que apresentamos no início desta seção:

$$0 \rightarrow V^{m-1}(zq^{-1}) \rightarrow V^m(z) \otimes V^1(zq^{m+1}) \rightarrow V^{m+1}(zq) \rightarrow 0$$

Pondo $m = 1$ temos

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow V^1(z) \otimes V^1(zq^2) \rightarrow V^2(zq) \rightarrow 0$$

e concluímos que as afinizações minimais da representação 3-dimensional pertencem todas, independentemente do valor de z , ao bloco da representação trivial, cujo caráter elíptico central é dado pela

função constante $\chi(z) = 1$. Usando indução vemos que o mesmo vale para todas as representações de dimensão ímpar, ou seja

$$V^{2j}(z) \in \mathcal{C}_1 \quad \forall z$$

De maneira similar, obtemos a seguinte caracterização para as representações de dimensão par

$$V^{2j-1}(z) \in \mathcal{C}_\chi \Leftrightarrow V^1(zq^{1-2(2j-1)}) \in \mathcal{C}_\chi$$

Finalmente, como o período da curva elíptica, neste caso, é q^4 , concluímos que, para duas afinizações minimais da representação natural de $\mathfrak{sl}_2$, temos

$$V^1(z), V^1(w) \in \mathcal{C}_\chi \Leftrightarrow \frac{z}{w} = q^{4k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

CAPÍTULO 2

Uma Versão Quantizada do Funtor de Kazhdan-Lusztig

Neste capítulo construiremos explicitamente uma versão quantizada para o funtor de Kazhdan-Lusztig [KL94] no caso de $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Começamos com os resultados necessários sobre representações de R-matrizes. Ainda na primeira seção, fornecemos a definição de Felder [F94] para o Grupo Quântico Elíptico $E_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_{n+1})$ através de uma solução particular da QDYB. Na seção 2.2 apresentamos o principal método para se obter soluções da equação QDYB a partir de Teoria de Repreapresentações, a chamada Construção de Intercâmbio. Na seção 2.3 definimos funções de correlação, na linguagem da Construção de Intercâmbio, e enunciamos o teorema de Frenkel-Reshetkin [FR92] que diz que tais funções satisfazem uma versão quantizada das equações de Knizhnik-Zamolodchikov. Também calculamos as soluções de fusão destas equações qKZ nos espaços homogêneos do produto tensorial $V(x) \otimes V(y)$, onde V é a afinização minimal da quantização da representação natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ e $x, y \in \mathbb{C}^*$. A seguir, seção 2.4, calculamos a monodromia destas soluções para obter o operador de intercâmbio correspondente. Finalmente, na última seção, provamos que a categoria de representações deste operador é equivalente à da R-matriz utilizada por Felder e construímos o funtor qKL.

2.1. R-matrizes Dinâmicas

Essa seção é uma síntese de [EV98].

Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie abeliana de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Considere a categoria $\mathbf{Rep}_f(\mathfrak{a})$ das representações diagonalizáveis de dimensão finita de $\mathfrak{a}$, i.e., todo objeto V de $\mathbf{Rep}_f(\mathfrak{a})$ admite uma decomposição em espaços homogêneos

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{a}^*} V[\mu]$$

e a ação de $\mathfrak{a}$ em $V[\mu]$ é dada por $xv = \mu(x)v$. Se $v \in V[\mu]$ dizemos que μ é o peso de v . A equação

$$(2.1.1) \quad R_{V_1, V_2}(\lambda - \gamma h^{(3)}) R_{V_1, V_3}(\lambda) R_{V_2, V_3}(\lambda - \gamma h^{(1)}) = R_{V_2, V_3}(\lambda) R_{V_1, V_3}(\lambda - \gamma h^{(2)}) R_{V_1, V_2}(\lambda)$$

com relação a uma família de funções meromorfas $R_{V_i, V_j} : \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V_i \otimes V_j)$, indexadas por pares de objetos em $\mathbf{Rep}_f(\mathfrak{a})$, é chamada de Equação Quântica Dinâmica de Yang-Baxter com passo

$\gamma \in \mathbb{C}^*$. A notação $h^{(i)}$ significa que, por exemplo,

$$R_{V_1, V_2}(\lambda - \gamma h^{(3)})(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (R_{V_1, V_2}(\lambda - \gamma \mu)(v_1 \otimes v_2)) \otimes v_3$$

se v_3 tem peso μ .

De maneira similar definimos a equação quântica dinâmica de Yang-Baxter com parâmetro espectral

$$(2.1.2) \quad R_{V_1, V_2}(u_1 - u_2, \lambda - \gamma h^{(3)}) R_{V_1, V_3}(u_1 - u_3, \lambda) R_{V_2, V_3}(u_2 - u_3, \lambda - \gamma h^{(1)}) =$$

$$R_{V_2, V_3}(u_2 - u_3, \lambda) R_{V_1, V_3}(u_1 - u_3, \lambda - \gamma h^{(2)}) R_{V_1, V_2}(u_1 - u_2, \lambda)$$

com relação a uma família de funções meromorfas $R_{V_i, V_j} : \mathbb{C} \times \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V_i \otimes V_j)$.

Nos restringiremos a equação (2.1.2). Quando todos $V_i = V$, a equação (2.1.2) é usualmente escrita como

$$(2.1.3) \quad R^{12}(u_1 - u_2, \lambda - \gamma h^{(3)}) R^{13}(u_1 - u_3, \lambda) R^{23}(u_2 - u_3, \lambda - \gamma h^{(1)}) =$$

$$R^{23}(u_2 - u_3, \lambda) R^{13}(u_1 - u_3, \lambda - \gamma h^{(2)}) R^{12}(u_1 - u_2, \lambda)$$

com relação a uma função meromórfica $R : \mathbb{C} \times \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes V)$. Uma solução $R(u, \lambda)$ de (2.1.3) é chamada de uma R-matriz dinâmica com parâmetro espectral se for invertível para quase todo (z, λ) . Dizemos que uma R-matriz dinâmica é unitária se satisfizer

$$(2.1.4) \quad R(u, \lambda) R^{21}(-u, \lambda) = 1$$

Suponha que $\dim \mathfrak{a} = \dim V = n$ e que os pesos de V formem uma base para $\mathfrak{a}^*$, ou seja, $\mathfrak{a}$ é a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{gl}_n$ agindo naturalmente em $V = \mathbb{C}^n$. Então toda solução de (2.1.3) tem a forma

$$R(u, \lambda) = \sum_{m, l=1}^n \alpha_{m, l}(u, \lambda) E_{m, m} \otimes E_{l, l} + \sum_{m \neq l} \beta_{m, l}(u, \lambda) E_{l, m} \otimes E_{m, l}$$

para funções meromorfas $\alpha_{m, l}(u, \lambda)$ e $\beta_{m, l}(u, \lambda)$, onde E_{ml} são as matrizes elementares definidas na seção III.4. Neste caso dizemos que $R(u, \lambda)$ é do tipo $\mathfrak{gl}_n$. Em [EV98], Etingof e Varchenko classificaram R-matrizes do tipo $\mathfrak{gl}_n$ sem parâmetro espectral. Eles também classificaram as com parâmetro espectral, mas no sentido formal, isto é, o passo γ não é um número, mas um parâmetro formal.

EXEMPLO 2.1.1. O principal exemplo de R-matriz dinâmica do tipo $\mathfrak{gl}_n$ é a seguinte função elíptica

$$R_{\tau,\gamma}^{ell}(u, \lambda) = \sum_m E_{m,m} \otimes E_{m,m} + \sum_{m \neq l} \alpha(u, \lambda_{m,l}) E_{m,m} \otimes E_{l,l} + \beta(u, \lambda_{m,l}) E_{l,m} \otimes E_{m,l}$$

com

$$\alpha(u, \lambda) = \frac{\vartheta_1(\lambda + \gamma; \tau)}{\vartheta_1(\lambda; \tau)} \frac{\vartheta_1(u; \tau)}{\vartheta_1(u - \gamma; \tau)} \quad \beta(u, \lambda) = \frac{\vartheta_1(\gamma; \tau)}{\vartheta_1(\lambda; \tau)} \frac{\vartheta_1(u - \lambda; \tau)}{\vartheta_1(u - \gamma; \tau)}$$

onde $\lambda_{m,l} = \lambda_m - \lambda_l$ e ϑ_1 é a primeira função teta de Jacobi (III.2.5).

No espírito da seção I.4, podemos pensar “no” grupo quântico associado a uma R-matriz $R(u, \lambda)$, que é chamado, genericamente, de um Grupo Quântico Dinâmico. De fato, dada uma R-matriz dinâmica, o objeto que definimos é sua teoria de representações.

DEFINIÇÃO 2.1.2. Seja $R : \mathbb{C} \times \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes V)$ uma R-matriz dinâmica. A categoria $\mathbf{Rep}_f(R)$ das representações meromorfas de dimensão finita de R consiste de pares (W, L_W) , onde $W \in \mathbf{Rep}_f(\mathfrak{a})$ e L_W é uma função meromorfa,

$$L_W : \mathbb{C} \times \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes W)$$

genericamente invertível e satisfazendo

$$\begin{aligned} R^{12}(u_1 - u_2, \lambda - \gamma h^{(3)}) L_W^{13}(u_1 - u_3, \lambda) L_W^{23}(u_2 - u_3, \lambda - \gamma h^{(1)}) &= \\ L_W^{23}(u_2 - u_3, \lambda) L_W^{13}(u_1 - u_3, \lambda - \gamma h^{(2)}) R^{12}(u_1 - u_2, \lambda) \end{aligned}$$

em $\text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes V \otimes W)$. Se (W, L_W) e (U, L_U) são duas representações de R , um morfismo entre elas é uma função meromorfa $f : \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{a}}(W, U)$ tal que

$$(1 \otimes f(\lambda)) L_W(u, \lambda) = L_U(u, \lambda) (1 \otimes f(\lambda - \gamma h^{(1)}))$$

Observação: Essa definição foi originalmente dada por Felder em [F94]. Veja que $\mathbf{Rep}_f(R)$ é linear sobre o corpo M_V das funções meromorfas em $\mathfrak{a}^*$, periódicas com respeito ao reticulado dos pesos de V .

EXEMPLO 2.1.3. Seja $R : \mathbb{C} \times \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes V)$ uma R-matriz dinâmica.

- (a) Considere um espaço vetorial W onde $\mathfrak{a}$ age trivialmente. Então $(W, 1)$, onde 1 denota a função constante $1 \in \text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes W)$, é uma representação de R chamada de a representação trivial associada a W .
- (b) O próprio par (V, R) é uma representação de R chamada de a representação básica de R .
- (c) Se (W, L_W) é uma representação de R , $f : \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(W)$ é genericamente invertível e $L_W^f = (1 \otimes f(\lambda)^{-1}) L_W(u, \lambda) (1 \otimes f(\lambda - \gamma h^{(1)}))$, então (W, L_W^f) também é uma representação de R . É claro que f fornece um isomorfismo de (W, L_W^f) em (W, L_W) .

EXEMPLO 2.1.4. O grupo quântico cuja teoria de representações é $\mathbf{Rep}_f(R_{\tau,\gamma}^{ell})$, onde $R_{\tau,\gamma}^{ell}$ é a R-matriz elíptica do exemplo 2.1.1, é chamado de um grupo quântico elíptico e é denotado por $E_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_n)$.

Agora vamos munir $\mathbf{Rep}_f(R)$ de uma estrutura tensorial. Dadas representações (W, L_W) e (U, L_U) de $R : \mathbb{C} \times \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes V)$, defina $(W, L_W) \odot (U, L_U) = (W \otimes U, L_{W \odot U})$ onde

$$(2.1.5) \quad L_{W \odot U}(u, \lambda) = L_W^{12}(u, \lambda - \gamma h^{(3)}) L_U^{13}(u, \lambda)$$

para os objetos de $\mathbf{Rep}_f(R)$ e

$$(2.1.6) \quad f \odot g(\lambda) = f(\lambda - \gamma h^{(2)}) \otimes g(\lambda)$$

para os morfismos. É fácil ver que (2.1.5) define uma representação e que (2.1.6) define um morfismo. Consequentemente, $\odot$ é um bifuntor bem definido. De fato, $\odot$ define uma estrutura de categoria tensorial em $\mathbf{Rep}_f(R)$ com o elemento neutro sendo a representação trivial $(\mathbb{C}, 1)$.

De agora em diante vamos nos restringir a R-matrizes do tipo $\mathfrak{gl}_n$. O objetivo será introduzir um conceito que mede quando duas R-matrizes são equivalentes. Precisaremos de alguns conceitos preliminares

Fixe uma álgebra de Lie abeliana n -dimensional $\mathfrak{h}$.

DEFINIÇÃO 2.1.5. Uma m -forma multiplicativa em $\mathfrak{h}^*$ é uma coleção de funções meromorfas $\varphi = \{\varphi_{a_1, \dots, a_m}(\lambda)\}$, onde $\{a_1, \dots, a_m\}$ percorre todos os subconjuntos ordenados de $\{1, \dots, n\}$, satisfazendo

$$\varphi_{a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_m}(\lambda) \varphi_{a_1, \dots, a_m}(\lambda) = 1$$

Denote por Ω^m o conjunto de todas m -formas multiplicativas. Com as definições óbvias podemos munir Ω^m com uma estrutura de grupo abeliano onde a identidade é a forma constante $\mathbf{1}_{a_1, \dots, a_m}(\lambda) = 1$.

Dados $\gamma \in \mathbb{C}^*$ e $s \in \{1, \dots, n\}$, defina o operador δ_s no espaço das funções meromorfas em $\mathfrak{h}^*$ por

$$(2.1.7) \quad \delta_s f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{f(\lambda_1, \dots, \lambda_s - \gamma, \dots, \lambda_n)}$$

e também o homomorfismo diferencial $d_\gamma : \Omega^m \rightarrow \Omega^{m+1}$, $\varphi \mapsto d_\gamma \varphi$

$$(2.1.8) \quad (d_\gamma \varphi)_{a_1, \dots, a_{m+1}}(\lambda) = \prod_{s=1}^{m+1} (\delta_{a_s} \varphi_{a_1, \dots, a_{s-1}, a_{s+1}, \dots, a_{m+1}}(\lambda))^{(-1)^{s+1}}$$

Temos $d_\gamma^2 \varphi = \mathbf{1} \forall \varphi$.

DEFINIÇÃO 2.1.6. Uma forma φ é dita γ -fechada se $d_\gamma \varphi = \mathbf{1}$. Se $\varphi = d_\gamma \psi$ para alguma forma ψ , dizemos que φ é γ -exata.

Observação: Quando $\gamma = 1$ dizemos apenas que φ é fechada ou exata e denotamos d_1 simplesmente por d .

Dada uma R-matriz dinâmica R do tipo $\mathfrak{gl}_n$ com passo γ , defina as seguintes transformações

$$(2.1.9) \quad R(u, \lambda) \mapsto c(u)R(u, \lambda)$$

onde $c(u)$ é uma função meromorfa escalar;

$$(2.1.10) \quad R(u, \lambda) \mapsto R(au, b\lambda + \mu)$$

onde $a, b \in \mathbb{C}^*$ e $\mu \in \mathfrak{h}^*$;

$$(2.1.11) \quad R(u, \lambda) \mapsto \sum_{m=0}^n \alpha_{m,m}(u, \lambda) E_{m,m} \otimes E_{m,m} + \sum_{m \neq l} \varphi_{m,l}(\lambda) \alpha_{m,l}(u, \lambda) E_{m,m} \otimes E_{l,l} + \beta_{m,l}(u, \lambda) E_{l,m} \otimes E_{m,l}$$

onde $\varphi = \{\varphi_{m,l}(\lambda)\}$ é uma 2-forma γ -fechada.

As transformações (2.1.9)-(2.1.11) são chamadas de transformações de calibre¹.

Observação: O conceito de transformações de calibre para R-matrizes do tipo $\mathfrak{gl}_n$ também foi introduzido em [EV98]. De fato outras duas transformações são definidas, mas elas não nos serão úteis.

PROPOSIÇÃO 2.1.7. [EV98] Transformações de calibre levam uma R-matriz do tipo $\mathfrak{gl}_n$ em outra R-matriz do tipo $\mathfrak{gl}_n$. As transformações (2.1.9) e (2.1.11) preservam o passo, enquanto (2.1.10) leva $\gamma \mapsto \gamma/b$. A condição de unitariedade é preservada por (2.1.10) e (2.1.11) e o mesmo vale para (2.1.9) se $c(u)c(-u) = 1$.

TEOREMA 2.1.8. Seja $R : \mathbb{C} \times \mathfrak{a}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{a}}(V \otimes V)$ uma R-matriz dinâmica do tipo $\mathfrak{gl}_n$ com passo γ . Se $\tilde{R}(u, \lambda)$ é obtida de R por transformações de calibre, então $\mathbf{Rep}_f(\tilde{R}) \cong \mathbf{Rep}_f(R)$ desde que a forma usada na transformação (2.1.11) seja γ -exata.

DEMONSTRAÇÃO. O teorema é óbvio para as transformações (2.1.9) e (2.1.10). Então suponha que $\tilde{R}$ é obtida de R pela transformação (2.1.11) com $\varphi = d_\gamma \zeta$. Tome $\xi = \sum_a \zeta_a E_{aa}$ e observe que $\tilde{R}$ é dada por

$$\tilde{R}(u, \lambda) = (\xi^{(1)}(\lambda - \gamma h^{(2)}))^{-1} (\xi^{(2)}(\lambda))^{-1} R(u, \lambda) \xi^{(1)}(\lambda) \xi^{(2)}(\lambda - \gamma h^{(1)})$$

¹do inglês *gauge transformations*

Então, dada uma representação (W, L) de R , defina

$$\tilde{L}(u, \lambda) = (\xi^{(1)}(\lambda - \gamma h^{(2)}))^{-1} L(u, \lambda) \xi^{(1)}(\lambda)$$

Agora é rotina verificar que o funtor $(W, L) \mapsto (W, \tilde{L})$ (identidade nos morfismos) estabelece uma equivalência entre categorias tensoriais. $\square$

Observação: Esse teorema foi originalmente provado em [EV99] usando a linguagem de bialgebróides.

2.2. A Construção de Intercâmbio

Nessa seção apresentamos o principal método para se obter R-matrizes dinâmicas a partir da teoria de representações de $U_q(\mathfrak{g})$ e $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. Recorde as definições de $U_q(\mathfrak{g})$ e $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$, assim como sua teoria de representações, nos capítulos II e 1. De fato, a construção é válida para $U(\mathfrak{g})$ e $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$, tomando-se o limite $q \rightarrow 1$ (ou simplesmente repetindo-se todos os passos).

Precisaremos do seguinte teorema, conhecido como Teorema da Reciprocidade de Frobenius.

TEOREMA 2.2.1. Seja A uma álgebra e B uma subálgebra. Se M é um B -módulo, então $A \otimes_B M$ é um A -módulo e, para todo A -módulo N , vale $\text{Hom}_A(A \otimes_B M, N) \cong \text{Hom}_B(M, N|_B)$.

DEMONSTRAÇÃO. A estrutura de A -módulo em $A \otimes_B M$ é dada por $\tilde{a}(a \otimes m) = (\tilde{a}a) \otimes m$. Então defina $\varphi : \text{Hom}_A(A \otimes_B M, N) \rightarrow \text{Hom}_B(M, N|_B)$ por $\varphi(f)m = f(1 \otimes m)$. Reciprocamente, defina $\psi : \text{Hom}_B(M, N|_B) \rightarrow \text{Hom}_A(A \otimes_B M, N)$ por $\psi(g)(a \otimes m) = ag(m)$. A verificação de que φ, ψ estão bem definidas e são mutuamente inversas é pura rotina. $\square$

Começamos com $U_q(\mathfrak{g})$. Seja M_λ o módulo de Verma correspondente e lembre que, para λ e q genéricos, M_λ é irredutível. Fixe um vetor de peso máximo $v_\lambda \in M_\lambda$. Consideraremos operadores de intercâmbio (homomorfismos de módulos)

$$\phi : M_\lambda \rightarrow M_\mu \otimes V$$

onde $V \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\mathfrak{g}))$. Seja v_μ^* o vetor de peso mínimo do módulo de Verma dual (restrito) M_μ^* tal que $\langle v_\mu, v_\mu^* \rangle = 1$. Defina

$$\langle \phi \rangle = (v_\mu^* \otimes 1)(\phi v_\lambda)$$

e observe que $\phi v_\lambda = v_\mu \otimes \langle \phi \rangle + \text{t.b.o.}$, onde t.b.o. denota termos de ordem (peso) mais baixa que v_μ no primeiro fator. Além disso, como ϕ é um homomorfismo de módulos, temos $\langle \phi \rangle \in V[\lambda - \mu]$.

DEFINIÇÃO 2.2.2. A aplicação $\langle \cdot \rangle : \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_\lambda, M_\mu \otimes V) \rightarrow V[\lambda - \mu]$ é chamada de o valor esperado de ϕ .

PROPOSIÇÃO 2.2.3. [ES99] Sejam M_λ e M_μ módulos de Verma sobre $U_q(\mathfrak{g})$ e $V \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\mathfrak{g}))$. Suponha que M_μ seja irredutível. Então, dado um vetor homogêneo $v \in V[\lambda - \mu]$, existe um único operador de intercâmbio

$$\phi_\lambda^v : M_\lambda \rightarrow M_\mu \otimes V$$

com $\langle \phi_\lambda^v \rangle = v$.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\nu \in \mathfrak{h}^*$, vamos denotar por $\mathbb{C}_\nu$ a representação unidimensional de $U_q(\mathfrak{b}^+)$ gerada por um vetor de peso ν . Basta mostrarmos que, nas hipóteses da proposição, $\langle \rangle$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. De fato, pelo teorema 2.2.1, temos

$$\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_\lambda, M_\mu \otimes V) \cong \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{b}^+)}(\mathbb{C}_\lambda, M_\mu \otimes V)$$

que, por sua vez, é isomorfo a $\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{b}^+)}(M_\mu^*, \mathbb{C}_{-\lambda} \otimes V)$. Agora considere a involução de Cartan $\tau = -\omega$, onde ω é a involução de Chevalley. Dado um $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo W , denotaremos por τW o módulo obtido por composição da ação de $U_q(\mathfrak{g})$ com τ . Então temos $\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{b}^+)}(M_\mu^*, \mathbb{C}_{-\lambda} \otimes V) \cong \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{b}^-)}(\tau M_\mu^*, \mathbb{C}_\lambda \otimes \tau V)$. Como M_μ é irredutível, a forma de Shpovalov em M_μ é não degenerada e, consequentemente, $M_\mu \cong \tau M_\mu^*$. Usando o teorema 2.2.1 novamente, temos

$$\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{b}^-)}(M_\mu, \mathbb{C}_\lambda \otimes \tau V) \cong \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{h})}(\mathbb{C}_\mu, \mathbb{C}_\lambda \otimes \tau V) \cong \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{h})}(\mathbb{C}_{\mu-\lambda}, \tau V)$$

Usando τ mais uma vez, finalmente obtemos que

$$\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_\lambda, M_\mu \otimes V) \cong \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{h})}(\mathbb{C}_{\lambda-\mu}, V) \cong V[\lambda - \mu]$$

Agora é só se convencer que esta sequência de isomorfismos é exatamente $\langle \rangle$. $\square$

Observação: Fixado v , o homomorfismo ϕ_λ^v está definido para valores genéricos de λ . Se identificarmos M_λ e M_μ com $U_q(\mathfrak{n}^-)$, podemos interpretar ϕ_λ^v como uma aplicação $U_q(\mathfrak{n}^-) \rightarrow U_q(\mathfrak{n}^-) \otimes V$. É fácil ver que os coeficientes dessa aplicação, em qualquer base, são funções trigonométricas de λ (rationais quando $q = 1$).

Tome $V, W \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\mathfrak{g}))$ e dois vetores homogêneos $v \in V[\nu_1], w \in W[\nu_2]$. Considere a seguinte “composição” de operadores de intercâmbio

$$M_\lambda \xrightarrow{\phi_\lambda^v} M_{\lambda-\nu_1} \otimes V \xrightarrow{\phi_{\lambda-\nu_1}^w \otimes 1} M_{\lambda-\nu_1-\nu_2} \otimes W \otimes V$$

Em geral, escreveremos apenas $\phi_\lambda^{w,v} = \phi_{\lambda-\nu_1}^w \circ \phi_\lambda^v$. Pela proposição 2.2.3, existe um único vetor $u \in W \otimes V[\nu_1 + \nu_2]$ com $\phi_\lambda^u = \phi_\lambda^{w,v}$. Ou seja, temos uma aplicação $U_q(\mathfrak{h})$ -linear

$$J_{W,V}(\lambda) : W \otimes V \rightarrow W \otimes V \quad w \otimes v \mapsto \langle \phi_\lambda^{w,v} \rangle$$

chamada de operador (ou matriz) de fusão.

Observação: $J_{W,V}$ é uma função trigonométrica de λ (racional no caso de $q = 1$).

TEOREMA 2.2.4. Sejam $\sigma(\lambda) = h_\lambda + h_\rho - \frac{1}{2} \sum x_i^2 \in U_q(\mathfrak{h})$, onde $\{x_i\}$ é uma base ortonormal para $\mathfrak{h}$, $U'_q(\mathfrak{b}^\pm)$ os núcleos das projeções $U_q(\mathfrak{b}^\pm) \rightarrow U_q(\mathfrak{h})$ e $\mathcal{R}_0 \in 1 + U'_q(\mathfrak{b}^+) \otimes U'_q(\mathfrak{b}^-)$ dada por $\mathcal{R}_0 = q^{-\frac{1}{2} \sum x_i^2} \mathcal{R}$.

(a) Existe uma única solução $J(\lambda) \in 1 + U'_q(\mathfrak{b}^-) \otimes U'_q(\mathfrak{b}^+)$ da equação

$$(2.2.1) \quad J(\lambda)(1 \otimes q^{2\sigma(\lambda)}) = \mathcal{R}_0^{21}(1 \otimes q^{2\sigma(\lambda)})J(\lambda)$$

(b) $J(\lambda)|_{W \otimes V} = J_{W,V}(\lambda)$, para todos $V, W \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\mathfrak{g}))$.

Para a demonstração nos referimos ao artigo original [ABRR98] ou a [ES99]. A equação (2.2.1) também é chamada de equação de ABRR, os autores de [ABRR98].

PROPOSIÇÃO 2.2.5. Sejam $U, V, W \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\mathfrak{g}))$.

- (a) $J_{W,V}(\lambda)$ é estritamente triangular inferior. Em particular, sempre que $J_{V,W}$ estiver definido, existe $J_{W,V}(\lambda)^{-1}$.
- (b) Vale a equação do *twist* dinâmico

$$(2.2.2) \quad J_{U \otimes W, V}(\lambda)(J_{U, W}(\lambda - h^{(3)}) \otimes 1) = J_{U, W \otimes V}(\lambda)(1 \otimes J_{W, V}(\lambda))$$

em $U \otimes W \otimes V$.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação significa que $J_{W,V}(\lambda) = w \otimes v + \sum w_i \otimes v_i$ sendo que o peso de w_i é estritamente menor que o de w , enquanto o peso de v_i é estritamente maior que o de v . Isso segue diretamente do teorema 2.2.4.

Para demonstrar a segunda afirmação, tome vetores homogêneos u, v, w em U, V, W , respectivamente, e denote seus pesos por ν_u, ν_v, ν_w . Então temos

$$\underbrace{\phi_{\lambda - \nu_v - \nu_w}^u \circ \underbrace{(\phi_{\lambda - \nu_w}^w \circ \phi_\lambda^v)}_{\phi_\lambda^{J_{W,V}(\lambda)w \otimes v}}}_{\phi_\lambda^{J_{U, W \otimes V}(\lambda)(1 \otimes J_{W,V}(\lambda))u \otimes w \otimes v}} = \underbrace{(\phi_{\lambda - \nu_w - \nu_v}^u \circ \phi_{\lambda - \nu_v}^w)}_{\phi_{\lambda - \nu_v}^{J_{U,W}(\lambda - \nu_v)u \otimes w}} \circ \phi_\lambda^v$$

$$\underbrace{\phi_\lambda^{J_{U, W \otimes V}(\lambda)(1 \otimes J_{W,V}(\lambda))u \otimes w \otimes v}}_{\phi_\lambda^{J_{U \otimes W, V}(\lambda)(J_{U, W}(\lambda - \nu_v) \otimes 1)u \otimes w \otimes v}}$$

e a equação segue da proposição 2.2.3. □

Seja $J_{W,V}^{21}(\lambda) = PJ_{W,V}(\lambda)P : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$.

DEFINIÇÃO 2.2.6. O operador (ou matriz) de intercâmbio $R_{V,W}(\lambda) : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ é definido por

$$R_{V,W}(\lambda) = J_{V,W}(\lambda)^{-1} \mathcal{R}_{V,W}^{op} J_{W,V}^{21}(\lambda)$$

onde $\mathcal{R}_{V,W}$ é a restrição da R-matriz universal de $U_q(\mathfrak{g})$ a $V \otimes W$.

É imediato que $R_{V,W}(\lambda)$ é uma função meromorfa de λ , preserva pesos e é invertível, quando está definido.

LEMA 2.2.7. [ES99] Suponha que $R_{V,W}(\lambda)v \otimes w = \sum_i v_i \otimes w_i$. Então

$$\phi_{\lambda-\nu_v}^w \circ \phi_\lambda^v = (1 \otimes P(\mathcal{R}_{V,W}^{op})^{-1}) \sum_i \phi_{\lambda-\nu_{w_i}}^{v_i} \circ \phi_\lambda^{w_i}$$

onde ν_v, ν_w, ν_{w_i} são os pesos dos respectivos vetores.

DEMONSTRAÇÃO. É conveniente escrever a equação que define $R_{V,W}$ como

$$J_{W,V}(\lambda) = P(\mathcal{R}_{V,W}^{op})^{-1} J_{V,W}(\lambda) R_{V,W}(\lambda) P$$

Então

$$\phi_{\lambda-\nu_v}^w \circ \phi_\lambda^v = \phi_\lambda^{P(\mathcal{R}_{V,W}^{op})^{-1} J_{V,W}(\lambda) R_{V,W}(\lambda) v \otimes w} = (1 \otimes P(\mathcal{R}_{V,W}^{op})^{-1}) \phi_\lambda^{J_{V,W}(\lambda) \sum_i v_i \otimes w_i}$$

Na última igualdade usamos que $(1 \otimes P(\mathcal{R}_{V,W}^{op})^{-1}) \phi_\lambda^{v \otimes w}$ é um homomorfismo de módulos com o mesmo valor esperado de $\phi_\lambda^{P(\mathcal{R}_{V,W}^{op})^{-1} v \otimes w}$ e, portanto, coincidem, de acordo com a proposição 2.2.3. $\square$

TEOREMA 2.2.8. O operador de intercâmbio é solução da equação QDYB (2.1.1) com passo $\gamma = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Esse teorema pode ser demonstrado nos moldes da proposição 2.2.5 usando o lema anterior. Mas, de fato, não precisamos mais de Teoria de Representações. A demonstração que daremos usa apenas o fato que o operador de fusão satisfaz a equação (2.2.2). Para enxugar a notação, vamos numerar os espaços U, W, V por 1, 2, 3, de acordo com sua ordem de aparição no produto $U \otimes W \otimes V$, e usaremos apenas os números como índices. Embora tediosa, a demonstração é um exercício instrutivo do uso da notação. Começamos escrevendo a notação de forma mais explícita :

$$R_{13}(\lambda) = P_{23} J_{13}^{-1}(\lambda) \mathcal{R}_{13}^{op} P_{13} J_{31}(\lambda) P_{13} P_{23} \quad R_{23}(\lambda) = P_{12} P_{13} J_{23}^{-1}(\lambda) \mathcal{R}_{23}^{op} P_{23} J_{32}(\lambda) P_{23} P_{13} P_{12}$$

A equação (2.2.2) pode ser escrita como

$$J_{1,2}(\lambda - h^{(3)}) = J_{12,3}(\lambda)^{-1} J_{1,23}(\lambda) J_{2,3}(\lambda)$$

Para os outros índices temos

$$J_{2,3}(\lambda - h^{(1)}) = J_{23,1}(\lambda)^{-1} J_{2,31}(\lambda) J_{3,1}(\lambda) \quad J_{1,3}(\lambda - h^{(2)}) = J_{13,2}(\lambda)^{-1} J_{1,32}(\lambda) J_{3,2}(\lambda)$$

Vamos omitir a dependência de J em λ . Substituindo essas expressões no lado esquerdo de (2.1.1) temos

$$\begin{aligned} & (J_{2,3}^{-1} J_{1,23}^{-1} J_{12,3} \mathcal{R}_{12}^{op} P_{12} J_{21,3}^{-1} J_{2,13} J_{13} P_{12}) (P_{23} J_{1,3}^{-1} \mathcal{R}_{13}^{op} P_{13} J_{3,1} P_{13} P_{23}) (P_{12} P_{13} J_{3,1}^{-1} J_{2,31}^{-1} J_{23,1} \mathcal{R}_{23}^{op} P_{23} J_{32,1}^{-1} J_{3,21} J_{2,1} P_{23} P_{13} P_{12}) \\ &= J_{2,3}^{-1} J_{1,23}^{-1} \underbrace{J_{12,3} \mathcal{R}_{12}^{op} P_{12} J_{21,3}^{-1}}_{P_{12} \mathcal{R}_{12}} \underbrace{J_{2,13} P_{12} P_{23} \mathcal{R}_{13}^{op} P_{13} P_{21} P_{23} J_{2,31}^{-1}}_{P_{13} \mathcal{R}_{13}} \underbrace{J_{23,1} \mathcal{R}_{23}^{op} P_{23} J_{32,1}^{-1}}_{P_{23} \mathcal{R}_{23}} J_{3,21} J_{2,1} P_{23} P_{13} P_{12} \end{aligned}$$

Em todas as chaves usamos que o operador $\mathcal{R}^{op} = P\mathcal{R}P$ e, na chave do meio, que P satisfaz a equação QYB (I.2.6). Fazendo a mesma coisa para o lado direito de (2.1.1), veremos que o teorema segue do fato de $\mathcal{R}$ ser, também, solução de (I.2.6). $\square$

Antes de passarmos para $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$, apresentamos as fórmulas para $J_{V,V}(\lambda)$ e $R_{V,V}(\lambda)$ quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ e V é sua representação natural. Os métodos para obter as fórmulas podem ser encontrados em [ES99, EV98, EV99]. De fato, essas fórmulas podem ser recuperadas das fórmulas correspondentes com parâmetros espectrais que calcularemos nas seções seguintes.

$$(2.2.3) \quad J_{V,V}(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n+1} E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{i < j} \frac{q - q^{-1}}{1 - q^{2(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}} E_{ji} \otimes E_{ij}$$

$$(2.2.4) \quad R_{V,V}(\lambda) = q^{-\frac{1}{n+1}} \left(q \sum_{i=1}^{n+1} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} \frac{q - q^{-1}}{1 - q^{2(\lambda_j - \lambda_i + i - j)}} E_{ji} \otimes E_{ij} + \sum_{i < j} E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{i > j} \frac{(q^{2(\lambda_j - \lambda_i + i - j)} - q^{-2})(q^{2(\lambda_j - \lambda_i + i - j)} - q^2)}{(1 - q^{2(\lambda_j - \lambda_i + i - j)})^2} E_{ii} \otimes E_{jj} \right)$$

Agora vamos “repetir” a construção para $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$. Começamos com uma generalização da proposição 2.2.3. Relembre a definição do módulo de Verma $M_{\lambda,k}$ no capítulo II.

TEOREMA 2.2.9. [EFK] Fixe $k \neq h^\vee$ e $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ tal que $M_{\mu,k}^*$ seja irredutível. Seja Y um $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$ -módulo onde os elementos k_i e q^d ajam diagonalmente e denote por $Y[\nu, \Delta]$ o auto espaço de peso ν onde a ação de q^d é q^Δ . Então

$$\text{Hom}_{U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})}(M_{\lambda,k}, M_{\mu,k} \otimes Y) \cong Y[\lambda - \mu, \Delta_k(\mu) - \Delta_k(\lambda)]$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue nas linhas daquela da proposição 2.2.3. Em particular, o isomorfismo é dado pelo valor esperado $\tilde{\Phi} \mapsto \langle \tilde{\Phi} \rangle = \langle v_{\mu,k}^*, \tilde{\Phi} v_{\lambda,k} \rangle$. $\square$

Então, dado $v \in Y[\lambda - \mu, \Delta_k(\mu) - \Delta_k(\lambda)]$, denotaremos por $\tilde{\Phi}_{\lambda,k}^v$ o homomorfismo correspondente. Usaremos o teorema com $Y = z^{-\Delta} V[z, z^{-1}]$, onde $V \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\tilde{\mathfrak{g}}))$. Assim, dado $v \in V$

com peso ν , existe um único homomorfismo

$$\tilde{\Phi}_{\lambda,k}^v : M_{\lambda,k} \rightarrow M_{\mu,k} \otimes z^{-\Delta} V[z, z^{-1}]$$

onde $\mu = \lambda - \nu$ e $\Delta = \Delta_k(\lambda) - \Delta_k(\mu)$. Considere também o $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -homomorfismo $\Phi_{\lambda,k}^v = z^{\Delta} \tilde{\Phi}_{\lambda,k}^v$. Não é difícil de verificar que $\Phi_{\lambda,k}^v$ pode ser representado por uma série $\Phi_{\lambda,k}^v = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Phi_{\lambda,k}^v[m] z^{-m}$, onde $\Phi_{\lambda,k}^v[m]$ é homogêneo de grau m .

De maneira análoga, denotaremos por $\tilde{\Phi}_{\lambda,k}^{w,v}(z_1/z_2)$ a composição

$$(\tilde{\Phi}_{\lambda-\text{wt}(v),k}^w(z_2) \otimes 1) \circ \tilde{\Phi}_{\lambda,k}^v(z_1) : M_{\lambda,k} \rightarrow M_{\mu,k} \hat{\otimes} z_2^{-\Delta_2} W[z_2, z_2^{-1}] \hat{\otimes} z_1^{-\Delta_1} V[z_1, z_1^{-1}]$$

e por $\Phi_{\lambda,k}^{w,v}(z_1/z_2)$

$$(\Phi_{\lambda-\text{wt}(v),k}^w(z_2) \otimes 1) \circ \Phi_{\lambda,k}^v(z_1) : M_{\lambda,k} \rightarrow M_{\mu,k} \hat{\otimes} W[z_2, z_2^{-1}] \hat{\otimes} V[z_1, z_1^{-1}]$$

Então definimos o operador de fusão com parâmetro espectral

$$J_{W,V}(u, \lambda, k) : W \otimes V \rightarrow W \otimes V$$

onde $e^{2\pi i u} = z_1/z_2$, por $J_{W,V}(u, \lambda, k)w \otimes v = \langle \Phi_{\lambda,k}^{w,v} \rangle$. Que $J_{W,V}$ está bem definido como série formal de $e^{2\pi i u}$ segue de maneira análoga à triangularidade do operador de fusão (sem parâmetro espectral) $J_{W,V}(\lambda)$. Mais adiante veremos que $J_{W,V}(u, \lambda, k)$ é meromorfa em uma região aberta de $\mathbb{C} \times \tilde{\mathfrak{h}}$.

Finalmente definimos o operador de intercâmbio com parâmetro espectral

$$(2.2.5) \quad R_{W,V}(u, \lambda, k) = J_{W,V}(u, \lambda, k)^{-1} \mathcal{R}^{21}|_{V(e^{2\pi i u}) \otimes W} J_{V,W}^{21}(-u, \lambda, k)$$

De maneira similar ao teorema 2.2.8, mostra-se que o operador de intercâmbio com parâmetro espectral é solução da equação QDYB (2.1.2).

2.3. A Equação Quântica de Knizhnik-Zamolodchikov

Sejam $z_1, \dots, z_N$ variáveis complexas, $V_1, \dots, V_N \in \mathbf{Rep}_f(U_q(\tilde{\mathfrak{g}}))$ e $v_i \in V_i$ vetores homogêneos. Considere a composição

$$M_{\lambda,k} \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\lambda,k}^{v_1}} M_{\mu_1,k} \otimes z_1^{-\Delta_1} V[z_1, z_1^{-1}] \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\mu_1,k}^{v_2}} \dots \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\mu_{N-1},k}^{v_N}} M_{\mu_N,k} \otimes z_N^{-\Delta_1} V[z_N, z_N^{-1}]$$

onde $\Delta_i = \Delta_k(\mu_{i-1}) - \Delta_k(\mu_i)$. A função $\Psi_{\lambda,k}^{v_N, \dots, v_1}(z_1, \dots, z_N) = \langle \tilde{\Phi}_{\mu_{N-1},k}^{v_N} \circ \dots \circ \tilde{\Phi}_{\lambda,k}^{v_1} \rangle$ é chamada de função de correlação. Pelo que vimos na seção anterior, ela está bem definida como um elemento de $z_1^{-\Delta_1} \dots z_N^{-\Delta_N} \mathbb{C}[[\frac{z_1}{z_2}, \dots, \frac{z_{N-1}}{z_N}]]$. O seguinte teorema é central. Nos referimos ao artigo original [FR92] ou a [EFK] para a demonstração.

TEOREMA 2.3.1. A função de correlação definida acima satisfaz a equação quântica de Knizhnik-Zamolodchikov.

$$\begin{aligned} \Psi(z_1, \dots, pz_j, \dots, z_N) &= R_{V_j, V_{j+1}}\left(\frac{pz_j}{z_{j+1}}\right) \dots R_{V_j, V_N}\left(\frac{pz_j}{z_N}\right) q^{\lambda + \mu_N + 2\rho}|_{V_j} \times \\ &\quad R_{V_1, V_j}\left(\frac{z_1}{z_j}\right)^{-1} \dots R_{V_{j-1}, V_j}\left(\frac{z_{j-1}}{z_j}\right)^{-1} \Psi(z_1, \dots, z_j, \dots, z_N) \end{aligned}$$

onde $p = q^{-2r^\vee \kappa}$ e $\kappa = k + h^\vee$.

Observação: A idéia da demonstração do teorema 2.3.1 é a mesma da equação de ABRR. De fato, ABRR é um caso limite da equação quântica de Knizhnik-Zamolodchikov

Também chamamos as funções de correlação de soluções de fusão da equação quântica de Knizhnik-Zamolodchikov. Veja que a equação qKZ é na realidade um sistema de equações de diferenças. De fato ela é um sistema holonômico, de onde segue

COROLÁRIO 2.3.2. A função de correlação é da forma $\Psi(z_1, \dots, z_N) = z_1^{-\Delta_1} \dots z_N^{-\Delta_N} \Psi(z_1, \dots, z_N)$, onde $\Psi(z_1, \dots, z_N)$ é meromorfa em $\mathbb{C}^N$.

Veja [EFK] para os detalhes.

COROLÁRIO 2.3.3. O operador de fusão $J_{V,W}(u, \lambda, k)$ e o operador de intercâmbio $R_{V,W}(u, \lambda, k)$ são meromorfos em $\mathbb{C} \times \mathfrak{U}$, onde $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{h}^* \times \mathbb{C}$ é definido pela condição $|p| < 1$.

Observação: De fato, o conjunto das singularidades é a união de hiperplanos da forma $u - bk = c$, $(\lambda, \nu) - bk = c$ com $b, c \in \mathbb{C}$ e $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Mais ainda, $J_{V,W}(u, \lambda, k)$ é regular em 0 [EM02a].

De agora em diante estaremos interessados em resolver a equação qKZ num caso especial. A saber, fixamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ e $N = 2$ com $V_1 = V_2 = V = \mathbb{C}^{n+1}$. Denote por $V_{m,l}$, $m \leq l$, o subespaço de $V \otimes V$ gerado por $v_m \otimes v_l$ e $v_l \otimes v_m$.

Então comece com $v_i \otimes v_j \in V_{m,l}$. Temos um operador de intercâmbio

$$\Phi_{\lambda,k}^{v_i, v_j}(y/x) : M_{\lambda,k} \rightarrow M_{\mu,k} \otimes V[x, x^{-1}] \otimes V[y, y^{-1}]$$

onde $\mu = \lambda - (\mu_m + \mu_l)$ (lembre que μ_i é o peso de v_i). Como vimos anteriormente, a função de correlação $\Psi_{\lambda,k}^{v_i, v_j}(x, y)$ é da forma $x^{-\Delta_1} y^{-\Delta_2} \Psi_{\lambda,k}^{v_i, v_j}(y/x)$ com $\Psi_{\lambda,k}^{v_i, v_j}(y/x) \in V_{m,l}$, onde

$$\Delta_1 = \Delta_k(\lambda - \mu_j) - \Delta_k(\lambda - (\mu_l + \mu_m)) \quad \Delta_2 = \Delta_k(\lambda) - \Delta_k(\lambda - \mu_j)$$

Não é difícil ver que $\Psi_{\lambda,k}^{v_i, v_j}(z)$ está bem definida em 0 e $\Psi_{\lambda,k}^{v_i, v_j}(0) = J_{V,V}(\lambda)(v_i \otimes v_j)$. A equação quântica de Knizhnik-Zamolodchikov para $\Psi_{\lambda,k}^{v_i, v_j}(x, y)$ se escreve

$$(2.3.1) \quad \Psi(px, y) = q_{(1)}^{\lambda+\mu+2\rho} R^{2,1}(y/x)^{-1} \Psi(x, y)$$

$$\Psi(x, py) = R^{2,1}(py/x) q_{(2)}^{\lambda+\mu+2\rho} \Psi(x, y)$$

onde $R(z) = R_{V,V}(z)$ é a R-matriz universal de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ avaliada em $V(z) \otimes V$. É conveniente começar resolvendo o sistema modificado

$$(2.3.2) \quad \Psi(px, y) = q_{(1)}^{\lambda+\mu+2\rho} \bar{R}(x/y) \Psi(x, y)$$

$$\Psi(x, py) = \bar{R}^{2,1}(py/x) q_{(2)}^{\lambda+\mu+2\rho} \Psi(x, y)$$

obtido do original substituindo-se $R_{V,V}(z)$ pela R-matriz normalizada $\bar{R}_{V,V}(z)$ dada pela proposição 1.2.9.

Denote por $\Psi_{\lambda,k}^{m,l}(x, y)$ as soluções de (2.3.1) no espaço $V_{m,l}$. Então

$$(2.3.3) \quad \Psi_{\lambda,k}^{m,l}(x, y) = G(x, y) \Psi_{\lambda,k}^{m,l}(x, y)$$

onde $\Psi_{\lambda,k}^{m,l}(x, y)$ são as soluções de (2.3.2) e G é uma função escalar satisfazendo

$$(2.3.4) \quad G(x, y) = f(y/x) G(px, y) \quad G(x, py) = f(py/x) G(x, y)$$

com f dada por (1.2.12)

$$(2.3.5) \quad f_{n+1}(z) = q^{\frac{n}{n+1}} g(z) \quad \text{e} \quad g(z) = \prod_{j=0}^{\infty} \varrho_{n+1}(q^{2j(n+1)} z)$$

Então re-escrevemos (2.3.4)

$$G(x, y) = p^{-\frac{n}{2\kappa(n+1)}} g(y/x) G(px, y) \quad G(x, py) = p^{-\frac{n}{2\kappa(n+1)}} g(py/x) G(x, y)$$

cujas soluções são

$$(2.3.6) \quad G(x, y) = (x/y)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(y/x)$$

onde

$$(2.3.7) \quad h(z) = \prod_{l=0}^{\infty} g(p^{l+1} z)^{-1} = \prod_{j,l=0}^{\infty} \varrho_{n+1}(q^{2j(n+1)} p^{l+1} z)^{-1}$$

Observação: Se estivéssemos supondo $|p| > 1$ (mas ainda $|q| < 1$), a expressão para $h(z)$ seria $h(z) = \prod_{l=0}^{\infty} g(p^{-l} z)$. Mais adiante expressaremos $f(z^{-1})^{\frac{h(z)}{h(z^{-1})}}$ em termos de funções gama elípticas.

Queremos achar as soluções de fusão em $V_{m,l}$ correspondentes aos vetores $v_m \otimes v_l$ e $v_l \otimes v_m$. Quando não causar confusão omitiremos os índices λ, k, m, l . Defina

$$\begin{aligned}
(2.3.8) \quad \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{\langle 2\lambda - (\mu_m + \mu_l) + 2\rho, \mu_m + \mu_l \rangle}{2\kappa} \\
\varpi &= \frac{\langle \lambda + \rho, \mu_l - \mu_m \rangle}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa}(\lambda + \rho)_{l,m}
\end{aligned}$$

Quando $m = l$ é fácil deduzir que a solução de (2.3.2) em $V_{m,m}$ é

$$\Psi(x, y) = (xy)^{-\Delta/2} v_m \otimes v_m$$

a menos de multiplicação por uma pseudo-constante $C(z)$, i.e., $C(pz) = C(z)$. Então, a solução de fusão procurada é $\Psi(x, y) = G(x, y)\Psi(x, y)$, pois

$$(2.3.9) \quad \Psi(x, y) = (xy)^{-\Delta/2} (x/y)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(y/x)(v_m \otimes v_m)$$

e $J_{V,V}(\lambda)(v_m \otimes v_m) = v_m \otimes v_m$.

Agora fixe $m < l$. Combinando as 2 equações em (2.3.2) vemos que

$$\Psi(px, py) = p^{-\Delta} \Psi(x, y)$$

Logo

$$\Psi(x, y) = (xy)^{-\Delta/2} \psi(x/y)$$

e $\psi(z)$ satisfaz

$$\psi(pz) = p^{\Delta/2} p_{(1)}^{-\frac{2\lambda - (\mu_m + \mu_l) + 2\rho}{2\kappa}} \bar{R}(z) \psi(z)$$

Escreva

$$\psi(z) = \psi_1(z)(v_m \otimes v_l) + \psi_2(z)(v_l \otimes v_m)$$

e use a proposição 1.2.9 para obter

$$(2.3.10) \quad \begin{pmatrix} \psi_1(pz) \\ \psi_2(pz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta(z)p^\varpi & \eta(z)p^\varpi \\ z\eta(z)p^{-\varpi} & \zeta(z)p^{-\varpi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix}$$

onde ζ, η são dadas por (1.2.8).

Então reduzimos este sistema à seguinte equação para ψ_1

$$(2.3.11) \quad (q^{-1}pz - q)\psi_1(p^2z) + (p^\varpi + p^{-\varpi} - (p^{\varpi+1} + p^{-\varpi})z)\psi_1(pz) + (qz - q^{-1})\psi_1(z) = 0$$

que é uma equação de diferenças como no apêndice III.1 (proposição III.1.1). No nosso caso

$$A_0 = q^{-1}p, \quad A_1 = -(p^{\varpi+1} + p^{-\varpi}), \quad A_2 = q, \quad B_0 = -q, \quad B_1 = (p^\varpi + p^{-\varpi}), \quad B_2 = -q^{-1}$$

e temos dois conjuntos de soluções, (u_i, r_i, s_i, t_i) , dados a menos de soma de um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi i}{\log p}$ e a menos de inversão de r e s em cada conjunto.

$$\begin{aligned}
(2.3.12) \quad u_1 &= -\varpi + \frac{1}{2\kappa} & r_1 &= \frac{1}{\kappa} + 1 & s_1 &= \frac{1}{\kappa} - 2\varpi & t_1 &= -2\varpi + 1 \\
u_2 &= \varpi + \frac{1}{2\kappa} & r_2 &= \frac{1}{\kappa} & s_2 &= \frac{1}{\kappa} + 2\varpi + 1 & t_2 &= 2\varpi + 1
\end{aligned}$$

Como as soluções de fusão pertencem a $x^{-\Delta_1}y^{-\Delta_2}V_{m,l}[[y/x]]$, ao invés de tomar as soluções regulares em 0 das equações de Heine correspondentes, tomamos as soluções quase meromorfas dadas pela proposição III.1.2. Estamos prontos para a

PROPOSIÇÃO 2.3.4. As soluções de fusão da equação (2.3.1) são

$$\Psi_{\lambda,k}^{v_m,v_m}(x,y) = (xy)^{-\Delta/2}(x/y)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(y/x)(v_m \otimes v_m)$$

se $m = l$ e, para $m < l$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\lambda,k}^{v_m,v_l}(x,y) &= (xy)^{-\Delta/2}(x/y)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(y/x) \left(\psi_1^{(1)}(x/y)(v_m \otimes v_l) + \psi_2^{(1)}(x/y)(v_l \otimes v_m) \right) \\
\Psi_{\lambda,k}^{v_l,v_m}(x,y) &= (xy)^{-\Delta/2}(x/y)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(y/x) \left(\psi_1^{(2)}(x/y)(v_m \otimes v_l) + \psi_2^{(2)}(x/y)(v_l \otimes v_m) \right)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\psi_1^{(1)}(x/y) &= (x/y)^{\varpi-1/2\kappa} {}_2\phi_1(p^{1/\kappa}, p^{-2\varpi+1/\kappa}, p^{-2\varpi}; p, p^{1-1/\kappa}y/x) \\
\psi_1^{(2)}(x/y) &= \epsilon (x/y)^{-\varpi-1/2\kappa} (y/x) {}_2\phi_1(p^{1+1/\kappa}, p^{1+2\varpi+1/\kappa}, p^{2(\varpi+1)}; p, p^{1-1/\kappa}y/x) \\
\psi_2^{(i)}(z) &= \frac{p^{-\varpi}(q - q^{-1}z)\psi_1^{(i)}(pz) - (1-z)\psi_1^{(i)}(z)}{q - q^{-1}}
\end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{< 2\lambda - (\mu_m + \mu_l) + 2\rho, \mu_m + \mu_l >}{2\kappa} \quad \varpi = \frac{< \lambda + \rho, \mu_l - \mu_m >}{2\kappa} \quad \epsilon = \frac{q - q^{-1}}{1 - p^{-(2\varpi+1)}}$$

$p = q^{-2\kappa}$ e $h(y/x)$ é dada por (2.3.7).

DEMONSTRAÇÃO. Já sabemos que são de fato soluções de (2.3.1). Falta checar que são de fusão. Observe que $x^{-\Delta_1}y^{-\Delta_2} = (xy)^{-\frac{\Delta}{2}}(x/y)^{-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}}$ e que $-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = \pm\varpi + \frac{<\mu_m, \mu_l>}{2\kappa}$ respectivamente para $\Psi_{\lambda,k}^{v_m,v_l}$ e $\Psi_{\lambda,k}^{v_l,v_m}$. Relembrando a expressão para $<\mu_m, \mu_l>$ no apêndice III.4, nos resta checar que os termos constantes em $V_{m,l}[[y/x]]$ coincidem com os valores esperados desejados. Já fizemos isso quando $m = l$. Agora veja que, apesar da expressão para $\psi_2^{(i)}$ aparentar conter um termo em x/y , ele de fato cancela em ambos os casos. Para $\Psi_{\lambda,k}^{v_l,v_m}$ está claro que o termo constante na direção de $v_m \otimes v_l$ se anula. Então só precisamos multiplicar por uma constante (1 e ϵ respectivamente) para obter os valores esperados preditos. $\square$

2.4. Monodromia da Equação Quântica de Knizhnik-Zamolodchikov para $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$

Nessa seção veremos como obter o operador de intercâmbio $R_{V,V}(u, \lambda, k)$ a partir da monodromia da equação quântica de Knizhnik-Zamolodchikov. Aqui V é a quantização da representação natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Seja Ψ a função de correlação associada a um homomorfismo

$$(\tilde{\Phi}_1 \otimes 1)\tilde{\Phi}_2 : M_{\lambda,k} \rightarrow M_{\mu,k} \hat{\otimes} x^{-\Delta_1} V[x, x^{-1}] \hat{\otimes} y^{-\Delta_2} V[y, y^{-1}]$$

e defina

$$\phi(y, x) = PR(x/y)\Psi(x, y)$$

Como consequência imediata da equação (2.3.1) para Ψ temos

PROPOSIÇÃO 2.4.1.

$$\phi(py, x) = f(py/x)q_{(1)}^{(2\lambda - (\mu_m + \mu_l) + 2\rho)} \bar{R}(y/x)\phi(y, x)$$

$$\phi(y, px) = \frac{1}{f(y/x)} \bar{R}^{21}(px/y)q_{(2)}^{(2\lambda - (\mu_m + \mu_l) + 2\rho)} \phi(y, x)$$

onde f é dada por (1.2.12).

Observe que $\phi(y, x) = G(x, y)\check{\Psi}(y, x)$, onde G é dada por (2.3.6) e $\check{\Psi}(y, x)$ é a solução da equação (2.3.2) correspondente com x, y na ordem oposta. Vamos chamar de equação e solução intercambiadas. Consequentemente, podemos escrever as soluções de fusão intercambiadas como combinação linear (a menos de multiplicação por $\frac{G(y, x)}{G(x, y)}$) das soluções (não intercambiadas) da equação (2.3.2), usando suas soluções ao redor de $x/y = 0$, após multiplicá-las por $PR(x/y)$. Tais soluções eram dadas por (2.3.12)

$$\begin{aligned} (xy)^{-\Delta/2} \dot{\psi}_1^{(1)}(x/y) &= (xy)^{-\Delta/2} (x/y)^{-\varpi+1/2\kappa} {}_2\phi_1(p^{1+1/\kappa}, p^{-2\varpi+1/\kappa}, p^{-2\varpi+1}; p, p^{-1/\kappa} x/y) \\ (2.4.1) \quad (xy)^{-\Delta/2} \dot{\psi}_1^{(2)}(x/y) &= (xy)^{-\Delta/2} (x/y)^{\varpi+1/2\kappa} {}_2\phi_1(p^{1/\kappa}, p^{2\varpi+1+1/\kappa}, p^{2\varpi+1}; p, p^{-1/\kappa} x/y) \\ \dot{\psi}_2^{(i)}(z) &= \frac{p^{-\varpi}(q - q^{-1}z)\dot{\psi}_1^{(i)}(pz) - (1 - z)\dot{\psi}_1^{(i)}(z)}{q - q^{-1}} \end{aligned}$$

Agora, de maneira similar à proposição 2.3.4, vemos que as soluções de fusão intercambiadas da equação (2.3.1) são dadas por

$$(2.4.2) \quad \check{\Psi}_{\lambda,k}^{v_m, v_m}(y, x) = (xy)^{-\Delta/2} (y/x)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(x/y)(v_m \otimes v_m)$$

se $m = l$ e, para $m < l$

$$(2.4.3) \quad \check{\Psi}_{\lambda,k}^{v_m, v_l}(y, x) = \check{\epsilon}_1(xy)^{-\Delta/2}(y/x)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(x/y) (\check{\psi}_1^{(1)}(y/x)(v_m \otimes v_l) + \check{\psi}_2^{(1)}(y/x)(v_l \otimes v_m))$$

$$(2.4.4) \quad \check{\Psi}_{\lambda,k}^{v_l, v_m}(y, x) = \check{\epsilon}_2(xy)^{-\Delta/2}(y/x)^{\frac{n}{2\kappa(n+1)}} h(x/y) (\check{\psi}_1^{(2)}(y/x)(v_m \otimes v_l) + \check{\psi}_2^{(2)}(y/x)(v_l \otimes v_m))$$

onde

$$\check{\psi}_1^{(i)}(y/x) = (x/y)\eta(x/y)\dot{\psi}_1^{(i)}(x/y) + \zeta(x/y)\dot{\psi}_2^{(i)}(x/y)$$

$$\check{\psi}_2^{(i)}(y/x) = \zeta(x/y)\dot{\psi}_1^{(i)}(x/y) + \eta(x/y)\dot{\psi}_2^{(i)}(x/y)$$

$$\check{\epsilon}_1 = \frac{q(q-q^{-1})}{p^{-2\varpi}-1}, \check{\epsilon}_2 = q \text{ e } \zeta, \eta \text{ são dadas por (1.2.8).}$$

Por outro lado, o $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ -homomorfismo $\Phi_{\lambda,k}^{v,w}(x/y) : M_{\lambda,k} \rightarrow M_{\mu,k} \hat{\otimes} V[y, y^{-1}] \hat{\otimes} V[x, x^{-1}]$, que é analítico na região $|y| \gg |x|$, pode ser analiticamente continuado a um meromorfo na região $|y| \ll |x|$. Manteremos a notação $\Phi_{\lambda,k}^{v,w}(x/y)$ para a continuação analítica. Assim, o produto $(1 \otimes P\bar{R}(y/x))\Phi_{\lambda,k}^{v,w}(x/y)$ é um $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ -homomorfismo $M_{\lambda,k} \rightarrow M_{\mu,k} \hat{\otimes} V[x, x^{-1}] \hat{\otimes} V[y, y^{-1}]$ e, portanto, deve ser da forma $\Phi_{\lambda,k}^{\tilde{w}, \tilde{v}}(y/x)$, onde $\tilde{w} \otimes \tilde{v} = \check{B}_k(x/y, \lambda)(v \otimes w)$, para alguma aplicação

$$\check{B}_k(x/y, \lambda) : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$$

Chamamos a aplicação

$$B_k(z, \lambda) = \check{B}_k(z, \lambda)P$$

de operador de intercâmbio unitário, pois ela satisfaz [EFK]

$$(2.4.5) \quad B_k^{21}(z, \lambda)B_k(z^{-1}, \lambda) = 1$$

Então, o operador de intercâmbio $R_k(u, \lambda) = R_{V,V}(u, \lambda, k)$ é dado por

$$(2.4.6) \quad R_k(u, \lambda) = f(z^{-1})B_k(z, \lambda)$$

onde $z = x/y = e^{-2\pi i u}$ e f é dada por (1.2.12). De fato, basta calcular os valores esperados:

$$P\bar{R}(y/x)J_{V,V}(-u, \lambda, k)(v \otimes w) = J_{V,V}(u, \lambda, k)(\tilde{w} \otimes \tilde{v}) = J_{V,V}(u, \lambda, k)\check{B}_k(x/y, \lambda)(v \otimes w)$$

Vamos começar calculando $\check{B}_k(z, \lambda)$. Voltaremos a omitir os subíndices λ, k . Temos os operadores de intercâmbio $\Phi^{v_i, v_j}(y/x)$ e $\Phi^{\tilde{v}_j, \tilde{v}_i}(y/x) = PR(y/x)\Phi^{v_i, v_j}(x/y)$ cujos valores esperados são

$$J^{v_i, v_j}(y/x) = \langle \Phi^{v_i, v_j}(y/x) \rangle \quad \check{J}^{v_i, v_j}(y/x) = \langle \Phi^{\tilde{v}_j, \tilde{v}_i}(y/x) \rangle$$

Usando a proposição 2.3.4 e as equações (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) e (2.4.4), achamos os valores esperados em $V_{m,l}$ (basta apagar $x^{-\Delta_i}y^{-\Delta_j}$ das soluções de (2.3.1) correspondentes). Para $V_{m,m}$ temos

$$J(y/x) = h(y/x)v_m \otimes v_m \quad \text{e} \quad \check{J}(y/x) = h(x/y)v_m \otimes v_m$$

Portanto

$$\check{B}_k(x/y, \lambda)(v_m \otimes v_m) = \frac{h(x/y)}{h(y/x)} v_m \otimes v_m$$

Para $m < l$

$$J^{v_m, v_l}(y/x) = h(y/x) (J_1^{(1)}(x/y)(v_m \otimes v_l) + J_2^{(1)}(x/y)(v_l \otimes v_m))$$

$$J^{v_l, v_m}(y/x) = h(y/x) (J_1^{(2)}(x/y)(v_m \otimes v_l) + J_2^{(2)}(x/y)(v_l \otimes v_m))$$

onde

$$J_1^{(1)}(z) = {}_2\phi_1(p^{1/\kappa}, p^{-2\varpi+1/\kappa}, p^{-2\varpi}; p, p^{1-1/\kappa}z^{-1})$$

$$J_1^{(2)}(z) = \epsilon z^{-1} {}_2\phi_1(p^{1+1/\kappa}, p^{1+2\varpi+1/\kappa}, p^{2(\varpi+1)}; p, p^{1-1/\kappa}z^{-1})$$

$$J_2^{(1)}(z) = \frac{p^{-1/2\kappa}(q - q^{-1}z)J_1^{(1)}(pz) - (1-z)J_1^{(1)}(z)}{q - q^{-1}}$$

$$J_2^{(1)}(z) = \frac{p^{-2\varpi-1/2\kappa}(q - q^{-1}z)J_1^{(2)}(pz) - (1-z)J_1^{(2)}(z)}{q - q^{-1}}$$

e

$$\check{J}^{v_m, v_l}(y/x) = h(x/y) (\check{J}_1^{(1)}(x/y)(v_m \otimes v_l) + \check{J}_2^{(1)}(x/y)(v_l \otimes v_m))$$

$$\check{J}^{v_l, v_m}(y/x) = h(x/y) (\check{J}_1^{(2)}(x/y)(v_m \otimes v_l) + \check{J}_2^{(2)}(x/y)(v_l \otimes v_m))$$

onde

$$\check{J}_1^{(1)}(z) = \check{\epsilon}_1 {}_2\phi_1(p^{1+1/\kappa}, p^{-2\varpi+1/\kappa}, p^{-2\varpi+1}; p, p^{-1/\kappa}z)$$

$$\check{J}_1^{(2)}(z) = \check{\epsilon}_2 {}_2\phi_1(p^{1/\kappa}, p^{1+2\varpi+1/\kappa}, p^{2\varpi+1}; p, p^{-1/\kappa}z)$$

$$\check{J}_2^{(1)}(z) = \frac{p^{-2\varpi+1/2\kappa}(q - q^{-1}z)\check{J}_1^{(1)}(pz) - (1-z)\check{J}_1^{(1)}(z)}{q - q^{-1}}$$

$$\check{J}_2^{(2)}(z) = \frac{p^{1/2\kappa}(q - q^{-1}z)\check{J}_1^{(2)}(pz) - (1-z)\check{J}_1^{(2)}(z)}{q - q^{-1}}$$

Agora usamos o teorema III.1.3 para expressar $\check{J}_1^{(i)}$ como combinação de $J_1^{(i)}$. É claro que automaticamente estaremos fazendo o mesmo para $\check{J}_2^{(i)}$.

$$\begin{aligned} \check{J}_1^{(1)}(z) &= \frac{\Gamma_p(1-2\varpi)\Gamma_p(1+2\varpi)}{\Gamma_p(1+1/\kappa)\Gamma_p(1-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp^{-2\varpi}; p)}{\Theta(zp^{-1/\kappa}; p)} \check{\epsilon}_1 J_1^{(1)}(z) \\ &\quad + \frac{\Gamma_p(1-2\varpi)\Gamma_p(-1-2\varpi)}{\Gamma_p(-2\varpi+1/\kappa)\Gamma_p(-2\varpi-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp; p)}{\Theta(zp^{-1/\kappa}; p)} \frac{\check{\epsilon}_1 z}{\epsilon} J_1^{(2)}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{J}_1^{(2)}(z) &= \frac{\Gamma_p(1+2\varpi)\Gamma_p(1+2\varpi)}{\Gamma_p(2\varpi+1+1/\kappa)\Gamma_p(2\varpi+1-1/\kappa)} \frac{\Theta(z; p)}{\Theta(zp^{-1/\kappa}; p)} \check{\epsilon}_2 J_1^{(1)}(z) \\ &\quad + \frac{\Gamma_p(1+2\varpi)\Gamma_p(-1-2\varpi)}{\Gamma_p(1/\kappa)\Gamma_p(-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp^{1+2\varpi}; p)}{\Theta(zp^{-1/\kappa}; p)} \frac{\check{\epsilon}_2 z}{\epsilon} J_1^{(2)}(z) \end{aligned}$$

Finalmente, na base $\{v_m \otimes v_l, v_l \otimes v_m\}$ para $V_{m,l}$, temos

$$(2.4.7) \quad \check{B}_k(z, \lambda) = \frac{h(z)}{h(z^{-1})} \times \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_p(1-2\varpi)\Gamma_p(1+2\varpi)}{\Gamma_p(1+1/\kappa)\Gamma_p(1-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp^{-2\varpi};p)}{\Theta(zq^2;p)} \check{\epsilon}_1 & \frac{\Gamma_p(1+2\varpi)\Gamma_p(1+2\varpi)}{\Gamma_p(2\varpi+1+1/\kappa)\Gamma_p(2\varpi+1-1/\kappa)} \frac{\Theta(z;p)}{\Theta(zq^2;p)} \check{\epsilon}_2 \\ \frac{\Gamma_p(1-2\varpi)\Gamma_p(-1-2\varpi)}{\Gamma_p(-2\varpi+1/\kappa)\Gamma_p(-2\varpi-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp;p)}{\Theta(zq^2;p)} \frac{\check{\epsilon}_1 z}{\epsilon} & \frac{\Gamma_p(1+2\varpi)\Gamma_p(-1-2\varpi)}{\Gamma_p(1/\kappa)\Gamma_p(-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp^{1+2\varpi};p)}{\Theta(zq^2;p)} \frac{\check{\epsilon}_2 z}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

com $z = x/y = e^{-2\pi i u}$. Portanto $R_k(u, \lambda)$ tem a forma

$$R_k(u, \lambda) = f(z^{-1}) \frac{h(z)}{h(z^{-1})} \left(\sum_{m=1}^{n+1} E_{m,m} \otimes E_{m,m} + \sum_{m \neq l} \alpha_k^{m,l}(z, \lambda) E_{m,m} \otimes E_{l,l} + \beta_k^{m,l}(z, \lambda) E_{l,m} \otimes E_{m,l} \right)$$

onde, para $m < l$

$$\begin{aligned} \alpha_k^{m,l}(z, \lambda) &= \frac{\Gamma_p(1+2\varpi)\Gamma_p(1+2\varpi)}{\Gamma_p(2\varpi+1+1/\kappa)\Gamma_p(2\varpi+1-1/\kappa)} \frac{\Theta(z;p)}{\Theta(zq^2;p)} \check{\epsilon}_2 \\ \alpha_k^{l,m}(z, \lambda) &= \frac{\Gamma_p(1-2\varpi)\Gamma_p(-1-2\varpi)}{\Gamma_p(-2\varpi+1/\kappa)\Gamma_p(-2\varpi-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp;p)}{\Theta(zq^2;p)} \frac{\check{\epsilon}_1 z}{\epsilon} \\ \beta_k^{m,l}(z, \lambda) &= \frac{\Gamma_p(1+2\varpi)\Gamma_p(-1-2\varpi)}{\Gamma_p(1/\kappa)\Gamma_p(-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp^{1+2\varpi};p)}{\Theta(zq^2;p)} \frac{\check{\epsilon}_2 z}{\epsilon} \\ \beta_k^{l,m}(z, \lambda) &= \frac{\Gamma_p(1-2\varpi)\Gamma_p(1+2\varpi)}{\Gamma_p(1+1/\kappa)\Gamma_p(1-1/\kappa)} \frac{\Theta(zp^{-2\varpi};p)}{\Theta(zq^2;p)} \check{\epsilon}_1 \end{aligned}$$

Usando as identidades (III.2.4), (III.2.2) e relembrando as expressões para $\epsilon, \check{\epsilon}_1, \check{\epsilon}_2$, obtemos expressões para $\beta_k^{i,j}$ escritas exclusivamente em termos das funções téta (III.2.1)

$$(2.4.8) \quad \beta_k^{m,l}(z, \lambda) = -p^{-2\varpi} \frac{\Theta(q^2;p)}{\Theta(p^{-2\varpi};p)} \frac{\Theta(zp^{2\varpi};p)}{\Theta(zq^2;p)} \quad \beta_k^{l,m}(z, \lambda) = \frac{\Theta(q^2;p)}{\Theta(p^{-2\varpi};p)} \frac{\Theta(zp^{-2\varpi};p)}{\Theta(zq^2;p)}$$

Para $\alpha_k^{i,j}$ obtemos

$$(2.4.9) \quad \alpha_k^{m,l}(z, \lambda) = \sigma_{m,l} q^2 \frac{\Theta(p^{-2\varpi} q^{-2};p)}{\Theta(p^{-2\varpi};p)} \frac{\Theta(z;p)}{\Theta(zq^2;p)} \quad \alpha_k^{l,m}(z, \lambda) = \sigma_{l,m} \frac{\Theta(p^{-2\varpi} q^2;p)}{\Theta(p^{-2\varpi};p)} \frac{\Theta(z;p)}{\Theta(zq^2;p)}$$

onde

$$(2.4.10) \quad \sigma_{l,m}(\lambda, k) = q \frac{\Gamma_p(1+2\varpi+1/\kappa)}{\Gamma_p(1+2\varpi)} \frac{\Gamma_p(-2\varpi)}{\Gamma_p(-2\varpi+1/\kappa)} \quad \text{e} \quad \sigma_{m,l}(\lambda, k) = \frac{1}{\sigma_{l,m}(\lambda, k)}$$

2.5. Construção do Funtor qKL

O principal objetivo desta seção é mostrar que $\mathbf{Rep}_f(U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}))$ (com corpo de escalares estendido) é uma subcategoria de $\mathbf{Rep}_f(R_{\tau,\gamma}^{ell})$, para valores apropriados dos parâmetros τ e γ . A

primeira tarefa é mostrar que o operador de intercâmbio $R_k(u, \lambda)$ calculado na seção anterior e a R-matriz elíptica $R_{\tau, \gamma}^{ell}$ são equivalentes via transformações de calibre.

Recorde que o operador de intercâmbio é uma R-matriz dinâmica com passo 1. A primeira transformação de calibre que usaremos é do tipo (2.1.9). Ela apenas remove $f(z^{-1}) \frac{h(z)}{h(z^{-1})}$, sem alterar o passo. Para os próximos passos será conveniente escrever $R_k(u, \lambda)$ em termos da função téta ϑ_1 . Fixe $\tau \in \mathbb{C}$ com $\text{Im}(\tau) > 0$ tal que $p = e^{2\pi i \tau}$, i.e.,

$$\tau = \frac{\log p}{2\pi i} = -\frac{\log q}{\pi i} \kappa$$

e, como sempre, ponha $z = e^{-2\pi i u}$. Então usamos (III.2.6) e que ϑ_1 é impar para obter

$$\begin{aligned} \alpha_k^{m,l}(z, \lambda) &= \sigma_{m,l} \frac{\vartheta_1(2\varpi\tau - \tau/\kappa; \tau)}{\vartheta_1(2\varpi\tau; \tau)} \frac{\vartheta_1(u; \tau)}{\vartheta_1(u + \tau/\kappa; \tau)} \\ \alpha_k^{l,m}(z, \lambda) &= \sigma_{l,m} \frac{\vartheta_1(-2\varpi\tau - \tau/\kappa; \tau)}{\vartheta_1(-2\varpi\tau; \tau)} \frac{\vartheta_1(u; \tau)}{\vartheta_1(u + \tau/\kappa; \tau)} \\ \beta_k^{m,l}(z, \lambda) &= \frac{\vartheta_1(-\tau/\kappa; \tau)}{\vartheta_1(2\varpi\tau; \tau)} \frac{\vartheta_1(u - 2\varpi\tau; \tau)}{\vartheta_1(u + \tau/\kappa; \tau)} \\ \beta_k^{l,m}(z, \lambda) &= \frac{\vartheta_1(-\tau/\kappa; \tau)}{\vartheta_1(-2\varpi\tau; \tau)} \frac{\vartheta_1(u + 2\varpi\tau; \tau)}{\vartheta_1(u + \tau/\kappa; \tau)} \end{aligned}$$

se $m < l$. Tome

$$\gamma = -\tau/\kappa = \frac{\log q}{\pi i}$$

e aplique a transformação de calibre (2.1.10) com $a = 1$, $b = 1/\gamma$ e $\mu = -\rho$. O passo da R-matriz resultante é γ . É fácil ver que

$$(2.5.1) \quad \varphi_{m,l}(\lambda) = \sigma_{l,m}(\lambda/\gamma - \rho, k)$$

é uma 2-forma γ -fechada (de fato, provaremos mais adiante que é γ -exata). Finalmente, aplique a transformação de calibre (2.1.11) com esta forma multiplicativa para obter $R_{\tau, \gamma}^{ell}$ para os valores de γ e τ fixados acima.

Observação: Etingof e Varchenko [EV98] classificaram R-matrizes dinâmicas do tipo $\mathfrak{gl}_{n+1}$, a menos de transformações de calibre, quando γ é visto como um parâmetro formal (no caso de limite quase clássico elíptico). O resultado é que todas as soluções são equivalentes à usada por Felder. Acredita-se que no caso analítico (não formal) tal classificação ainda é válida, o que torna esperado, a priori, a existência das transformações de calibre que acabamos de calcular.

Antes de prosseguirmos com o objetivo principal desta seção, vamos aproveitar todos esses cálculos para, finalmente, apresentar a fórmula para $R_k(u, \lambda)$. De fato, ainda podemos “melhorar” a fórmula um pouco mais, obtendo uma expressão para

$$\chi(u, \tau, \gamma) = f(z^{-1}) \frac{h(z)}{h(z^{-1})}$$

em termos das funções gama elípticas (III.2.7) estudadas em [FV99]. Mais uma vez, escreva $z = e^{-2\pi i u}$, $p = e^{2\pi i \tau}$ ($\Rightarrow q = e^{2\pi i \gamma/2}$) e relembre as expressões para $f(z)$ (1.2.12) e $h(z)$ (2.3.7). Então escrevemos χ como

$$\chi(u, \tau, \gamma) = q^{\frac{n}{n+1}} P_1 P_2 P_3 P_4$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} q^{2(n+1)} z^{-1}}{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} z} (1 - q^{2j(n+1)} q^{2(n+1)} z^{-1}) \\ P_2 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} z^{-1}}{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} q^{2(n+1)} z} (1 - q^{2j(n+1)} z^{-1}) \\ P_3 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} q^2 z}{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} q^{2n} z^{-1}} \frac{1}{(1 - q^{2j(n+1)} q^{2n} z^{-1})} \\ P_4 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} q^{2n} z}{1 - q^{2j(n+1)} p^{l+1} q^2 z^{-1}} \frac{1}{(1 - q^{2j(n+1)} q^2 z^{-1})} \end{aligned}$$

Cada um desses produtos pode ser escrito em termos de uma única função gama elíptica, como segue

$$\begin{aligned} P_1 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{(j+1)2(n+1)} p^l z^{-1}}{1 - q^{j2(n+1)} p^{l+1} z} = \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{(j+1)2(n+1)} p^{l+1} (p^{-1} z^{-1})}{1 - q^{j2(n+1)} p^l (p^{-1} z^{-1})^{-1}} = \Gamma_e(-u + \tau, (n+1)\gamma, \tau) \\ P_2 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{j2(n+1)} p^l z^{-1}}{1 - q^{(j+1)2(n+1)} p^{l+1} z} = \frac{1}{\Gamma_e(u, (n+1)\gamma, \tau)} \\ P_3 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{j2(n+1)} p^{l+1} q^2 z}{1 - q^{j2(n+1)} p^l q^{2n} z^{-1}} = \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{j2(n+1)} p^l (pq^2 z)}{1 - q^{(j+1)2(n+1)} p^{l+1} (pq^2 z)^{-1}} = \frac{1}{\Gamma_e(-u + \tau + \gamma, (n+1)\gamma, \tau)} \\ P_4 &= \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{j2(n+1)} p^{l+1} q^{2n} z}{1 - q^{j2(n+1)} p^l q^2 z^{-1}} = \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - q^{(j+1)2(n+1)} p^{l+1} (q^2 z^{-1})^{-1}}{1 - q^{j2(n+1)} p^l (q^2 z^{-1})} = \Gamma_e(u + \gamma, (n+1)\gamma, \tau) \end{aligned}$$

Finalmente

PROPOSIÇÃO 2.5.1.

$$R_k(u, \lambda) = \chi(u, \tau, \gamma) \times$$

$$\left(\sum_{m=0}^n E_{m,m} \otimes E_{m,m} + \sum_{l \neq m} \sigma_{m,l}(\lambda, k) \alpha(u, \gamma(\lambda + \rho)_{m,l}) E_{m,m} \otimes E_{l,l} + \beta(u, \gamma(\lambda + \rho)_{m,l}) E_{l,m} \otimes E_{m,l} \right)$$

onde

$$\begin{aligned} \chi(u, \tau, \gamma) &= q^{\frac{n}{n+1}} \frac{\Gamma_e(-u + \tau, (n+1)\gamma, \tau)}{\Gamma_e(-u + \tau + \gamma, (n+1)\gamma, \tau)} \frac{\Gamma_e(u + \gamma, (n+1)\gamma, \tau)}{\Gamma_e(u, (n+1)\gamma, \tau)} \\ \alpha(u, \lambda) &= \frac{\vartheta_1(\lambda + \gamma; \tau)}{\vartheta_1(\lambda; \tau)} \frac{\vartheta_1(u; \tau)}{\vartheta_1(u - \gamma; \tau)} \quad \beta(u, \lambda) = \frac{\vartheta_1(\gamma; \tau)}{\vartheta_1(\lambda; \tau)} \frac{\vartheta_1(u - \lambda; \tau)}{\vartheta_1(u - \gamma; \tau)} \end{aligned}$$

$$\sigma_{l,m}(\lambda, k) = q \frac{\Gamma_p(1 + \frac{1}{\kappa}(\lambda + \rho)_{l,m} + \frac{1}{\kappa})}{\Gamma_p(1 + \frac{1}{\kappa}(\lambda + \rho)_{l,m})} \frac{\Gamma_p(-\frac{1}{\kappa}(\lambda + \rho)_{l,m})}{\Gamma_p(-\frac{1}{\kappa}(\lambda + \rho)_{l,m} + \frac{1}{\kappa})} \quad \text{e} \quad \sigma_{m,l}(\lambda, k) = \frac{1}{\sigma_{l,m}(\lambda, k)}$$

para $m < l$. Aqui $p = q^{-2\kappa}$, $|q| < 1$, $|p| < 1$, $\tau = \frac{\log p}{2\pi i} = -\kappa \frac{\log q}{\pi i}$, $\gamma = -\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\log q}{\pi i}$, ϑ_1 é a função teta de Jacobi (III.2.5), Γ_q é a função gama quântica (III.2.1) e Γ_e é a função gama elíptica (III.2.7).

Observação: Relembre que estamos sempre supondo $|q| < 1$ e $|p| < 1$. Expressões para $|q| < 1 < |p|$, $|p| < 1 < |q|$ e $|q| > 1, |p| > 1$ são obtidas de forma similar, bastando escrever os produtos infinitos nas regiões de convergência corretas. Mas avisamos que o resultado final não é apenas uma troca dos sinais de τ e γ na proposição 2.5.1. Para $|q| = |p| = 1$, mencionamos os artigos [MT00, MTT99], que lança mão de técnicas de integração.

LEMA 2.5.2. A 2-forma (2.5.1) é γ -exata.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que $\tilde{\varphi}_{i,j}(\lambda) = \varphi_{i,j}(\gamma\lambda)$ é exata. Seja $\xi = \{\xi_j\}$ a 1-forma dada por $\xi_j(\lambda) = \prod_{i < j} q^{\lambda_i}$. Então $\delta_s \xi_j(\lambda) = 1$, se $s > j$, e $\delta_s \xi_j(\lambda) = q$, se $s < j$. Logo, para $m < l$, $(d\xi)_{m,l}(\lambda) = q$ e $(d\xi)_{l,m}(\lambda) = q^{-1}$. Analogamente, mostra-se que $\tilde{\varphi} = d(\xi\eta\zeta)$ onde

$$\eta_j(\lambda) = \prod_{i < j} \Gamma_p\left(\frac{\lambda_{i,j} + 1}{\kappa}\right)^{-1} \quad \text{and} \quad \zeta_j(\lambda) = \prod_{i < j} \Gamma_p\left(1 + \frac{\lambda_{j,i}}{\kappa}\right)^{-1}$$

□

Então temos provado a

PROPOSIÇÃO 2.5.3. Seja V a representação natural de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ e $R_k(u, \lambda) = R_{V,V}(u, \lambda, k)$ o operador de intercâmbio correspondente. Então $\mathbf{Rep}_f(R_k(u, \lambda))$ é equivalente a $\mathbf{Rep}_f(R_{\tau,\gamma}^{ell})$ para $\tau = -\kappa \frac{\log q}{\pi i}$ e $\gamma = -\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\log q}{\pi i}$, onde $R_{\tau,\gamma}^{ell}$ é a R-matriz dinâmica de Felder.

Assim acabamos a primeira etapa no caminho de mostrar que $\mathbf{Rep}_f(U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}))$ é uma subcategoria do grupo elíptico $E_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_{n+1})$. Para a segunda etapa não precisamos fixar $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$. Relembre que definimos $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{h}^* \times \mathbb{C}$ pela condição $|q^{-2r^\vee \kappa}| < 1$ e seja M o corpo das funções meromorfas em $\mathfrak{U}$. Dada uma representação V de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, considere o subcorpo M_V das funções com período no reticulado dos pesos de V . Vamos estender o corpo de escalares da categoria $\mathbf{Rep}_f(U_q(\tilde{\mathfrak{g}}))$ a M_V . Mais precisamente, seja $\mathcal{C}(V) = \mathbf{Rep}_f(U_q(\tilde{\mathfrak{g}})) \otimes_{\mathbb{C}} M_V$. Como vimos na seção 2.1, temos um funtor

$$\mathcal{F}_V : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathbf{Rep}_f(R_V) \quad W \mapsto (W, R_{V,W})$$

onde $R_{V,W}(u, \lambda)$ é o operador de intercâmbio correspondente e $R_V = R_{V,V}$.

TEOREMA 2.5.4. O funtor $\mathcal{F}_V : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathbf{Rep}_f(R_V)$ é um funtor tensorial, exato e fiel. Além disso, se V não for trivial, ele é totalmente fiel².

²fully faithful.

DEMONSTRAÇÃO. Começamos com o seguinte lema. Relembre que $J_{V,W}(u, \lambda, k)$ é regular em 0 e seja $J_{V,W}(\lambda, k) = J_{V,W}(0, \lambda, k)$.

LEMA 2.5.5.

$$(2.5.2) \quad R_{V,W}^{12}(u, \lambda - h^{(3)}, k) R_{V,U}^{13}(u, \lambda, k) = J_{W,U}^{23}(\lambda, k)^{-1} R_{V,W \otimes U}^{1,23}(u, \lambda, k) J_{W,U}^{23}(\lambda - h^{(1)}, k)$$

DEMONSTRAÇÃO. Para abreviar a notação escreveremos $V[u]$ ao invés de $V(e^{-2\pi i u})$ e $\hat{\lambda} = (\lambda, k)$. Seja $\mathbf{R}_{W,V}^{21}[u] = \mathcal{R}^{21}|_{W \otimes V[u]}$ (analogamente para os outros pares de índices). Então

$$\begin{aligned} \text{l.h.s.} &= J_{V,W}^{12}(u, \hat{\lambda} - h^{(3)})^{-1} \mathbf{R}_{W,V}^{21}[u] J_{W,V}^{21}(-u, \hat{\lambda} - h^{(3)}) J_{V,U}^{13}(u, \hat{\lambda})^{-1} \mathbf{R}_{U,V}^{31}[u] J_{U,V}^{31}(-u, \hat{\lambda}) = \\ &= J_{V[u],W}^{12}(\hat{\lambda} - h^{(3)})^{-1} \mathbf{R}_{W,V}^{21}[u] \left(J_{W,V[u]}^{21}(\hat{\lambda} - h^{(3)}) J_{V[u],U}^{13}(\hat{\lambda})^{-1} \right) \mathbf{R}_{U,V}^{31}[u] J_{U,V[u]}^{31}(\hat{\lambda}) \stackrel{(2.2.2)}{=} \\ &= J_{V[u],W}^{12}(\hat{\lambda} - h^{(3)})^{-1} \mathbf{R}_{W,V}^{21}[u] \left(J_{W \otimes V[u],U}^{21,3}(\hat{\lambda})^{-1} J_{W,V[u] \otimes U}^{2,13}(\hat{\lambda}) \right) \mathbf{R}_{U,V}^{31}[u] J_{U,V[u]}^{31}(\hat{\lambda}) = \\ &= \left(J_{V[u],W}^{12}(\hat{\lambda} - h^{(3)})^{-1} J_{V[u] \otimes W,U}^{12,3}(\hat{\lambda})^{-1} \right) \mathbf{R}_{W,V}^{21}[u] \mathbf{R}_{U,V}^{31}[u] \left(J_{W,U \otimes V[u]}^{2,31}(\hat{\lambda}) J_{U,V[u]}^{31}(\hat{\lambda}) \right) \stackrel{(2.2.2)}{=} \\ &= \left(J_{W,U}^{23}(\hat{\lambda})^{-1} J_{V[u],W \otimes U}^{1,23}(\hat{\lambda})^{-1} \right) \mathbf{R}_{W,V}^{21}[u] \mathbf{R}_{U,V}^{31}[u] \left(J_{W \otimes U,V[u]}^{23,1}(\hat{\lambda}) J_{W,U}^{23}(\hat{\lambda} - h^{(1)}) \right) = \text{r.h.s.} \end{aligned}$$

A quarta igualdade está clara, enquanto a última segue da equação QYB com parâmetro espectral. $\square$

Agora vamos mostrar que $\mathcal{F}_V$ é tensorial. Definimos a estrutura tensorial $\mathcal{F}_V(W) \odot \mathcal{F}_V(U) \rightarrow \mathcal{F}_V(W \otimes U)$ por

$$J_{W,U}(\lambda, k) : (W, R_{V,W}) \odot (U, R_{V,U}) \rightarrow (W \otimes U, R_{V,W \otimes U})$$

O lema 2.5.5 mostra que $J_{W,U}$ é um morfismo (de fato isomorfismo) e a equação (2.2.2) que ele satisfaz as propriedades de uma estrutura tensorial em um funtor.

Por fim, vamos supor que V é não trivial e mostrar que, então, $\mathcal{F}_V$ é totalmente fiel. Defina $L_W^+(z) = R_{W,V}^{21}(z)$.

LEMA 2.5.6. Temos $\text{Hom}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(W, U) = \{A \in \text{Hom}_{U_q(\widehat{\mathfrak{h}})}(W, U); L_U^+(z)^{-1}(1 \otimes A)L_W^+(z) \text{ preserva pesos em ambas componentes}\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Está claro que o primeiro espaço é subespaço do segundo. Para mostrar a recíproca basta provar que, se $A : W \rightarrow U$ é tal que $L_U^+(z)^{-1}(1 \otimes A)L_W^+(z)$ preserva pesos em ambas componentes, então $A \in \text{Hom}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}})}(W, U)$. Para tanto observe que a R-matriz universal agindo em módulos com carga central 0 pode ser escrita como

$$\mathcal{R} = q^{\sum x_i \otimes x_i} \left(1 + \sum_{i \geq 0} (q_i - q_i^{-1}) e_i \otimes f_i + \dots \right)$$

onde os x_i formam uma base ortonormal para $\mathfrak{h}$ e os termos restantes estão em $U_q(\widehat{\mathfrak{n}}_+) \otimes U_q(\widehat{\mathfrak{n}}_-)$, correspondendo a outros pesos. Isso significa que, para V não trivial, a hipótese de que a aplicação

$L_U^+(z)^{-1}(1 \otimes A)L_W^+(z)$ preserva pesos em ambas componentes implica que A também preserva pesos e $f_i|_V \otimes [e_i, A] = 0 \forall i \geq 0$ (basta olhar os termos correspondentes a raízes simples na expressão da R-matriz universal). Logo $[e_i, A] = 0$ e A é um homomorfismo sobre $U_q(\tilde{\mathfrak{b}}_+)$. Em [KS95] (proposição 4.1.3), Kazhdan e Soibelman mostraram que as imagens de $U_q(\tilde{\mathfrak{b}}_+)$ e $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ na álgebra de endomorfismos de qualquer objeto de $\mathbf{Rep}_f(U_q(\tilde{\mathfrak{g}}))$ coincidem. Consequentemente, A é um homomorfismo sobre $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$, como queríamos. $\square$

Seja $\mathcal{M}(W, U) = \text{Hom}_{U_q(\tilde{\mathfrak{g}})}(W, U) \otimes_{\mathbb{C}} M_V$, o espaço dos morfismos entre W e U na categoria $\mathcal{C}(V)$, e $\tilde{\mathcal{M}}(W, U) = \mathcal{M}(W, U) \otimes_{M_V} M$. O lema 2.5.6 diz que $\tilde{\mathcal{M}}(W, U)$ é o espaço de soluções sobre M do sistema de equações lineares em finitas variáveis (entradas de A), expressando a condição de $L_U^+(z)^{-1}(1 \otimes A)L_W^+(z)$ preservar pesos em ambas componentes. Então defina $\mathcal{N}(W, U) = \text{Hom}_{\mathbf{Rep}_f(R_V)}(\mathcal{F}(W), \mathcal{F}(U))$. Mostraremos que $\tilde{\mathcal{N}}(W, U) = \mathcal{N}(W, U) \otimes_{M_V} M$ está contido no espaço de soluções sobre M de uma “deformação” deste sistema. Consequentemente, $\dim \mathcal{N}(W, U) \leq \dim \mathcal{M}(W, U)$, de onde segue que a aplicação injetiva $\mathcal{M}(W, U) \rightarrow \mathcal{N}(W, U)$ dada por $\mathcal{F}_V$ é de fato um isomorfismo. Em outras palavras, $\mathcal{F}_V$ é totalmente fiel. Precisaremos do lema abaixo.

LEMA 2.5.7. Denote por L_W, L_U os operadores de intercâmbio $R_{V,W}, R_{V,U}$ e seja $\tilde{\mathcal{M}}'(W, U) = \{A(\hat{\lambda}) \in \text{Hom}_{U_q(\tilde{\mathfrak{h}})}(W, U) \otimes_{\mathbb{C}} M; L_U(u, \hat{\lambda})^{-1}(1 \otimes A(\hat{\lambda}))L_W(u, \hat{\lambda}) \text{ preserva pesos em ambas componentes}\}$. Então a aplicação natural $\xi : \mathcal{N}(W, U) \otimes_{M_V} M \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}'(W, U)$ é injetiva. Aqui usamos a notação $\hat{\lambda} = (\lambda, k)$ novamente.

DEMONSTRAÇÃO. Precisamos mostrar que todo conjunto linearmente independente sobre M_V , $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathcal{N}(W, U)$, é também linearmente independente sobre M . Suponha que não e tome um contra exemplo de comprimento mínimo. Podemos assumir que $a_m = g_1 a_1 + \dots + g_{m-1} a_{m-1}$ com $g_i \in M$, não todos em M_V . Então

$$\begin{aligned} a_m(\hat{\lambda} - h^{(1)}) &= L_U(u, \hat{\lambda})^{-1}(1 \otimes a_m(\hat{\lambda}))L_W(u, \hat{\lambda}) \\ &= \sum g_i(\hat{\lambda})L_U(u, \hat{\lambda})^{-1}(1 \otimes a_i(\hat{\lambda}))L_W(u, \hat{\lambda}) = \sum g_i(\hat{\lambda})a_i(\hat{\lambda} - h^{(1)}) \end{aligned}$$

Tome $v \in V$ homogêneo de peso μ e aplique a última igualdade a $v \otimes \text{Id}$. Temos

$$a_m(\hat{\lambda} - \mu) = \sum g_i(\hat{\lambda})a_i(\hat{\lambda} - \mu) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad a_m(\hat{\lambda}) = \sum g_i(\hat{\lambda} + \mu)a_i(\hat{\lambda})$$

Logo, para algum μ , $\sum (g_i(\hat{\lambda}) - g_i(\hat{\lambda} + \mu))a_i(\hat{\lambda})$ é uma combinação linear não trivial (pois existe $g_i \notin M_V$) de comprimento ainda menor. Contradição. $\square$

Resta mostrar que $L_W(u, \lambda, k)$ é uma deformação de $L_W^+(z)$, onde $z = e^{2\pi i u}$. Recorde que $\kappa = k + h^\vee$ e $p = q^{-2r^\vee \kappa}$. Escreveremos $k \rightarrow \infty$ para dizer que $p \rightarrow 0$ com q fixo.

LEMA 2.5.8. Seja $J_{V,W}(\lambda)$ o operador de fusão correspondente ao grupo quântico $U_q(\mathfrak{g})$. Então $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{V,W}(u, \lambda, k) = J_{V,W}(\lambda)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam v e w homogêneos em V e W respectivamente e considere a função de correlação $\Psi(z, \lambda, k) = z^\Delta J_{V,W}(u, \lambda, k)(v \otimes w)$. Relembre que Δ depende dos pesos de v e w e também de λ e k . Temos

$$\Psi(z, \lambda, k) = z^\Delta \sum_{m \geq 0} \psi_m(\lambda, k) z^m$$

e $\Psi_0(\lambda, k) = J_{V,W}(\lambda)(v \otimes w)$. Também sabemos que Ψ satisfaz a equação qKZ, de onde

$$\Psi(pz, \lambda, k) = R_{W,V}^{21}(pz) q_{(2)}^\Lambda \Psi(z, \lambda, k)$$

com Λ dependendo apenas de λ e dos pesos de v, w (não de k). Escreva $R_{W,V}^{21}(z) = \sum_{j \geq 0} R_j^{21} z^j$ e veja que

$$p^\Delta \sum_{m \geq 0} \Psi_m(\lambda, k) p^m z^m = \left(\sum_{j \geq 0} R_j^{21} p^j z^j \right) q_{(2)}^\Lambda \left(\sum_{i \geq 0} \Psi_i(\lambda, k) z^i \right)$$

De fato, p^Δ é uma constante c dependendo apenas de q, λ e dos pesos de v, w . Coletando os termos em z^l em ambos os lados temos

$$(cp^l - R_0^{21} q_{(2)}^\Lambda) \psi_l = \sum_{m=1}^l R_m^{21} p^m q_{(2)}^\Lambda \psi_{l-m}$$

de onde concluímos por indução que $\psi_l \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $l > 1$. $\square$

Agora diga que $\lambda \rightarrow -\infty$ quando $\mathcal{R}e(\lambda, \alpha_i) \rightarrow -\infty$, onde α_i são as raízes simples. Analisando a equação de ABRR (2.2.1), mostra-se que $J_{V,W}(\lambda) \rightarrow 1$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$ [E00]. Assim, concluímos que $L_W(u, \lambda, k) \rightarrow R_{W,V}^{21}(z)$ e, portanto, $L_W(u, \lambda, k)$ é uma “deformação” de $L_W^+(z)$. A demonstração do teorema 2.5.4 está completa. $\square$

Combinando a proposição 2.5.3 com o teorema 2.5.4 temos

TEOREMA 2.5.9. Para cada $k \neq -h^\vee$, existe um funtor tensorial exato e totalmente fiel $\mathcal{F}$ que leva a categoria $\mathbf{Rep}_f(U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}))$ (com escalares estendidos) na categoria das representações de dimensão finita de $E_{\tau, \gamma}(\mathfrak{sl}_{n+1})$, onde $q = e^{\pi i \gamma} = e^{-\frac{\pi i}{\kappa} \tau}$ e $\kappa = k + h^\vee$.

Chamamos o funtor $\mathcal{F}$ do teorema 2.5.9 de o funtor quântico de Kazhdan-Lusztig. Finalizamos com algumas palavras explicando esta nomenclatura. O funtor de Kazhdan-Lusztig original [KL94] levava uma certa categoria de fusão das representações de uma álgebra de Kac-Moody afim $\widetilde{\mathfrak{g}}$, para um nível dado k , na categoria das representações do grupo quântico $U_v(\mathfrak{g})$, onde $v = e^{\frac{\pi i}{r^\vee(k+h^\vee)}}$. Por outro lado, nós nem ao menos definimos o que vem a ser uma categoria de fusão. Mas existe um sentido no qual o funtor $\mathcal{F}$ que construímos é um análogo quântico do original. Uma breve justificativa é que, enquanto o funtor de Kazhdan-Lusztig provem da monodromia da equação de Knizhnik-Zamolodchikov, o funtor $\mathcal{F}$, de maneira similar, provem da monodromia da equação quântica de Knizhnik-Zamolodchikov. Este ponto de vista é explicado em [FR92] e [KS95]. Em [EM02a] damos uma explicação mais concreta para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, lançando mão do Grupo Quântico Elíptico Pequeno de Tarasov-Varchenko [TV01].

APÊNDICE I

Álgebras de Hopf

Este capítulo se destina a uma breve introdução à teoria das Álgebras de Hopf. As referências básicas usadas foram [CP, K] (veja também [ES]). Por todo capítulo, K denotará um anel comutativo com identidade.

I.1. Definições e Propriedades Básicas

DEFINIÇÃO I.1.1. Uma K -álgebra é um anel A munido de um homomorfismo de anéis $i : K \rightarrow A$ satisfazendo os seguintes diagramas comutativos

- Associatividade :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes 1} & A \otimes A \\ 1 \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

- Unidade :

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes K & \xrightarrow{1 \otimes i} & A \otimes A & & K \otimes A & \xrightarrow{i \otimes 1} & A \otimes A \\ \cong \downarrow & & \downarrow \mu & & \cong \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xlongequal{\quad} & A & & A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

onde μ é a multiplicação em A . A é dita comutativa se o seguinte diagrama for comutativo

- Comutatividade :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{P} & A \otimes A \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

onde P é a permutação $P(a \otimes a') = a' \otimes a$.

Observação: Veja que i define uma estrutura de K -módulo em A . Os produtos tensoriais na definição I.1.1 são sempre sobre K e, assim, todas as aplicações envolvidas são K -lineares.

EXEMPLO I.1.2. O produto tensorial de duas álgebras A e B é também uma álgebra

$$(I.1.1) \quad (a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

onde a multiplicação $\mu(a \otimes a')$ é denotada pela justaposição aa' , o mesmo ocorrendo com B .

DEFINIÇÃO I.1.3. Uma aplicação K -linear $f : A \rightarrow B$ entre duas álgebras é dita um homomorfismo de álgebras se $\mu_B \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_A$ e $f \circ i_A = i_B$.

Em dualidade ao conceito de álgebra temos o conceito de coálgebra.

DEFINIÇÃO I.1.4. Um K -módulo C é dito uma coálgebra sobre K se existirem aplicações K -lineares $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$, chamada de comultiplicação, e $\varepsilon : C \rightarrow K$, a counidade, satisfazendo os seguintes diagramas comutativos

- Coassociatividade :
$$\begin{array}{ccc} C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes 1} & C \otimes C \\ 1 \otimes \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\ C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C \end{array}$$
- Counidade :
$$\begin{array}{ccccc} C \otimes K & \xleftarrow{1 \otimes \varepsilon} & C \otimes C & & K \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1} & C \otimes C \\ \cong \uparrow & & \uparrow \Delta & & \cong \uparrow & & \uparrow \Delta \\ C & \xlongequal{\quad} & C & & C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

C é dita co-comutativa se o seguinte diagrama for comutativo

- Co-comutatividade :
$$\begin{array}{ccc} C \otimes C & \xleftarrow{P} & C \otimes C \\ \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

Observação: Devido a coassociatividade, está bem definido o elemento $\Delta^n(c) \in C^{\otimes n+1}$.

DEFINIÇÃO I.1.5. Um homomorfismo de coálgebras é uma aplicação K -linear $f : C \rightarrow D$ tal que $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ e $\varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$.

EXEMPLO I.1.6. K é uma coálgebra com $\varepsilon_K(1) = 1$ e $\Delta_K(1) = 1 \otimes 1$. Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então $\varepsilon : C \rightarrow K$ é um homomorfismo de coálgebras.

EXEMPLO I.1.7. O produto tensorial de duas coálgebras C e D tem uma estrutura de coálgebra dada por $\varepsilon = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$ e $\Delta = (1_C \otimes P_{C,D} \otimes 1_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$.

A proposição seguinte, cuja demonstração é pura álgebra linear, reafirma o papel dual entre álgebras e coálgebras.

PROPOSIÇÃO I.1.8.

- (a) Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então $(C^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ é uma álgebra.
- (b) Se (A, μ, i) é uma álgebra de dimensão finita sobre K , então (A^*, μ^*, i^*) é uma coálgebra.

Observação: Existem maneiras de se dar sentido a uma estrutura coalgébrica dual ao de uma álgebra de dimensão infinita. Veja a seção 4.1.D de [CP].

PROPOSIÇÃO I.1.9. Seja $(H, \mu, i, \Delta, \varepsilon)$ um K -módulo munido de uma estrutura algébrica e coalgébrica. As afirmações abaixo são equivalentes.

- (a) As aplicações μ e i são homomorfismos de coálgebras.
- (b) As aplicações Δ e ε são homomorfismos de álgebras.

DEMONSTRAÇÃO. Basta olhar os diagramas comutativos envolvidos. □

A próxima definição se torna natural agora.

DEFINIÇÃO I.1.10. Um K -módulo H satisfazendo as condições equivalentes da proposição I.1.9 é dito uma biálgebra. Um homomorfismo de biálgebras é um homomorfismo de ambas estruturas simultaneamente.

DEFINIÇÃO I.1.11. Uma biálgebra H é dita uma álgebra de Hopf se possuir uma aplicação K -linear $S : H \rightarrow H$ que faz os seguintes diagramas comutarem

$$\begin{array}{ccccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes 1} & H \otimes H & & H \otimes H & \xrightarrow{1 \otimes S} & H \otimes H \\
 \Delta \uparrow & & \downarrow \mu & & \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\
 H & \xrightarrow{i \circ \varepsilon} & H & & H & \xrightarrow{i \circ \varepsilon} & H
 \end{array}$$

S é chamada de antípoda. Um homomorfismo de álgebras de Hopf é um homomorfismo de biálgebras que comuta com S .

O seguinte teorema coleta algumas propriedades essenciais da antípoda.

TEOREMA I.1.12. Seja H uma biálgebra.

- (a) Se H possuir uma aplicação antípoda, então ela é única.
- (b) A antípoda é um anti-homomorfismo de biálgebras, i.e.,

$$S \circ \mu = \mu^{\text{op}} \circ (S \otimes S), \quad S(1) = 1, \quad (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{\text{op}} \circ S \quad \text{e} \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon$$

onde $\mu^{\text{op}} = \mu \circ P$ e $\Delta^{\text{op}} = P \circ \Delta$.

(c) As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) $S^2 = 1$.

(ii) $\mu \circ (S \otimes 1) \circ \Delta^{\text{op}} = \mu \circ (1 \otimes S) \circ \Delta^{\text{op}} = i \circ \varepsilon$.

(d) Se H for comutativa ou co-comutativa então $S^2 = 1$, quando existir.

(e) Se H tiver dimensão finita então S^* é a antípoda de H^* .

I.2. Estrutura Quase Triangular

A estrutura quase triangular é um “controle” sobre a não co-comutatividade.

DEFINIÇÃO I.2.1. Uma biálgebra é dita quase co-comutativa se existir um elemento invertível $R \in H \otimes H$ satisfazendo

$$(I.2.1) \quad \Delta^{\text{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1} \quad \forall x \in H$$

EXEMPLO I.2.2. Toda biálgebra co-comutativa é quase co-comutativa com $R = 1 \otimes 1$.

Notação: Sejam $X = \sum_i x_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_i^{(m)} \in H^{\otimes m}$, $n \geq m \geq 1$ e $(k_1, \dots, k_m)$ uma m -upla de elementos distintos em $\{1, \dots, n\}$. Usaremos a notação $X_{k_1, \dots, k_m}$ para o elemento

$$X_{k_1, \dots, k_m} = \sum_i y_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes y_i^{(n)}$$

onde $y_i^{(k_j)} = x_i^{(j)}$ se $j \leq m$ e $y_i^{(k)} = 1$ caso contrário. Quando não houver confusão não escreveremos as vírgulas em $X_{k_1, \dots, k_m}$. Às vezes usaremos os índices em cima.

DEFINIÇÃO I.2.3. Uma biálgebra quase co-comutativa é dita quase triangular se

$$(I.2.2) \quad (\Delta \otimes 1)(R) = R_{13}R_{23} \quad \text{e} \quad (1 \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

O elemento R é então chamado de uma R -matriz universal em H . Se além disso, $R_{21} = R^{-1}$ então a estrutura é dita triangular.

Observação: Se R satisfizer apenas $R_{21} = R^{-1}$ ela é chamada de uma estrutura de cobordo [CP].

PROPOSIÇÃO I.2.4. A R -matriz universal de uma álgebra de Hopf quase triangular satisfaz as seguintes propriedades

$$(I.2.3) \quad (\varepsilon \otimes 1)(R) = (1 \otimes \varepsilon)(R) = 1$$

$$(I.2.4) \quad (S \otimes 1)(R) = (1 \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$$

$$(I.2.5) \quad (S \otimes S)(R) = R$$

as duas últimas ocorrendo quando S for invertível.

O próximo teorema estabelece a propriedade fundamental da estrutura quase triangular.

TEOREMA I.2.5. $[\mathbf{CP}, \mathbf{K}]$ A R-matriz universal de uma álgebra de Hopf quase triangular satisfaz a Equação Quântica de Yang-Baxter (QYB)

$$(I.2.6) \quad R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

Observação: De agora em diante assumiremos que a antípoda de uma álgebra de Hopf é sempre invertível.

O fato da R-matriz universal ser solução da Equação Quântica de Yang-Baxter torna a teoria das álgebras de Hopf quase triangulares extremamente rica. Em particular, o elemento

$$(I.2.7) \quad u = \mu \circ (S \otimes 1)(R_{21})$$

desempenha um papel fundamental na teoria de representações devido à equação (I.2.8) abaixo.

PROPOSIÇÃO I.2.6. O elemento u definido acima é invertível com $u^{-1} = \mu \circ (S \otimes 1)(R_{21}^{-1})$ e

$$(I.2.8) \quad S^2(x) = uxu^{-1} \quad \forall x \in H$$

Além disso, as seguintes identidades são verificadas

$$(I.2.9) \quad \varepsilon(u) = 1, \quad \Delta(u) = (R_{21}R)^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(R_{21}R)^{-1},$$

$$(I.2.10) \quad \Delta(S(u)) = (R_{21}R)^{-1}(S(u) \otimes S(u)) = (S(u) \otimes S(u))(R_{21}R)^{-1},$$

O elemento $uS(u)$ está no centro de H e

$$(I.2.11) \quad \Delta(uS(u)) = (R_{21}R)^{-2}(uS(u) \otimes uS(u)) = (uS(u) \otimes uS(u))(R_{21}R)^{-2}$$

Finalizamos essa seção com algumas palavras sobre a dualização do conceito de estrutura quase triangular. Suponha que A seja uma álgebra de Hopf quase triangular de dimensão finita e considere a álgebra de Hopf $H = A^*$. O elemento $R^* \in H \otimes H$, onde R é a R-matriz universal de A , controla a não comutatividade de H , assim como R controla a não co-comutatividade de A . As propriedades de R^* em relação a multiplicação de H são obtidas dualizando-se as propriedades de R em relação a comultiplicação de A . De fato, tais relações podem ser expressas em termos de R , vista como um elemento em $H^* \otimes H^*$. Tais propriedades, para uma forma linear em $H^* \otimes H^*$, definem o conceito de álgebra de Hopf quase comutativa cotriangular e R é dita a R-forma universal de H . Como essa estrutura não será importante para nossos objetivos, deixamos a cargo do leitor escrever as definições precisas ou olhá-las em [K].

I.3. Representações

Representações de uma álgebra de Hopf são módulos (à esquerda) sobre sua estrutura algébrica. Porém a estrutura de cóalgebra e a antípoda desempenham papéis fundamentais enriquecendo sua

teoria de representações. Sejam H uma biálgebra e V, W dois módulos sobre H . A comultiplicação permite definir uma ação de H em $V \otimes W$

$$(I.3.1) \quad x(v \otimes w) = \Delta(x)(v \otimes w)$$

Por outro lado, a counidade induz uma representação em qualquer K -módulo V

$$(I.3.2) \quad x v = \varepsilon(x)v$$

Em particular, quando $V = K$, tal representação é chamada de Representação Trivial.

Observações:

1. Dessa maneira, a categoria das representações de uma biálgebra se torna uma categoria tensorial.
2. Se H for co-comutativa, $V \otimes W$ é isomorfo a $W \otimes V$ como H -módulo, mas isso não é necessariamente verdade em geral.

PROPOSIÇÃO I.3.1. Seja H uma biálgebra quase co-comutativa, V e W H -módulos. Então a ação de R em $V \otimes W$ induz um isomorfismo de H -módulos

$$P_{V,W} \circ R : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$$

Observação: A R -matriz universal de H induz em sua categoria de representações, através da equação QYB, uma estrutura de categoria tensorial trançada¹ [K]. Esse nome vem da sua relação com os Grupos de Tranças B_n ². Devido a essa relação, a teoria de Álgebras de Hopf serviu como ferramenta fundamental para construir invariantes em Teoria de Nós.

Se V e W são módulos sobre uma álgebra de Hopf H , a aplicação antípoda permite definir uma estrutura de módulo em $\text{Hom}_K(V, W)$.

$$(I.3.3) \quad (x f)(v) = \sum_i x_i^{(1)} f(S(x_i^{(2)}) v)$$

onde $x \in H, f \in \text{Hom}_K(V, W), v \in V$ e $\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$. Em particular, quando $W = K$ é a Representação Trivial, definimos o dual de V denotado por V^* .

Observação: A categoria de representações de uma álgebra de Hopf é, então, uma categoria tensorial rígida.

Se S for invertível podemos usar S^{-1} na definição da representação dual de V . As duas representações resultantes (usando S e S^{-1}) não são isomorfas em geral. Neste caso chamamos V^* de dual à esquerda e denotamos o dual à direita por *V . É imediata a verificação de que V é isomorfa a ${}^*V^*$ mas, em geral, não é isomorfa a V^{**} ou a ${}^{**}V$.

¹em inglês *Braided Tensor Category*

²*Braid Groups*

PROPOSIÇÃO I.3.2. As aplicações canônicas

$$W \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}_K(V, W) \quad V^* \otimes V \rightarrow K \quad K \rightarrow V \otimes V^*$$

onde, na última, V tem dimensão finita, são isomorfismos de H -módulos.

Observação: Aqui cabe alguns alertas. As aplicações canônicas $\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow V^* \otimes W$, $V \otimes V^* \rightarrow K$ e $K \rightarrow V^* \otimes V$, não são isomorfismos de H -módulos em geral.

PROPOSIÇÃO I.3.3. Suponha que numa álgebra de Hopf H exista um elemento invertível u tal que $S^2(x) = u x u^{-1} \forall x \in H$. Então, a aplicação $\lambda : V^* \rightarrow {}^*V$ definida por $\lambda(f)(v) = f(uv)$ é um isomorfismo de H -módulos.

COROLÁRIO I.3.4. Se H for quase triangular, V^* é isomorfo a *V . Além disso, a aplicação $\nu : V \rightarrow V^{**}$ dada por $\nu(v)(f) = f(uv)$ é um homomorfismo injetivo de H -módulos.

COROLÁRIO I.3.5. Se H for quase triangular e V for um H -módulo de dimensão finita, então V é isomorfo a V^{**} .

Observação: Evidentemente que pode-se formular resultados análogos para *V .

O conceito de correpresentação é dual ao de representação.

DEFINIÇÃO I.3.6. Seja C uma coálgebra. Um comódulo V sobre C é um K -módulo munido de uma aplicação K -linear, $\Delta_V : V \rightarrow C \otimes V$, chamada de coação de C em V , satisfazendo os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} \bullet \text{ Coassociatividade :} & C \otimes C \otimes V & \xleftarrow{\Delta_V \otimes 1} C \otimes V \\ & \uparrow 1 \otimes \Delta_V & \uparrow \Delta_V \\ & C \otimes V & \xleftarrow{\Delta_V} V \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet \text{ Counidade :} & k \otimes V & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1} C \otimes V \\ & \cong \uparrow & \uparrow \Delta_V \\ & V & \xlongequal{\quad} V \end{array}$$

Uma aplicação K -linear entre dois comódulos, $f : V \rightarrow W$, satisfazendo $(1 \otimes f) \circ \Delta_V = \Delta_W \circ f$ é dita um homomorfismo de comódulos.

Se H for uma biálgebra, o produto tensorial de dois H -comódulos, $V \otimes W$, é um comódulo com

$$(I.3.4) \quad \Delta_{V \otimes W} = (\mu \otimes 1_{V \otimes W})(1_H \otimes P_{V,H} \otimes 1_W)(\Delta_V \otimes \Delta_W)$$

Qualquer K -módulo V pode ser munido de uma H -correpresentação

$$(I.3.5) \quad V \cong K \otimes V \xrightarrow{i \otimes 1} H \otimes V$$

Observação: Se H for quase comutativa e cotriangular, a categoria das correpresentações de H adquire as mesmas propriedades da categoria de representações de uma álgebra de Hopf quase triangular.

I.4. A Construção de FRT

A R -matriz universal de uma biálgebra induz soluções da equação QYB em seus módulos, i.e., se V é um H -módulo, o elemento $R_{V,V} \in \text{End}(V) \otimes \text{End}(V)$, obtido pela restrição de R a $V \otimes V$, satisfaz a equação QYB em $\text{End}(V) \otimes \text{End}(V) \otimes \text{End}(V)$. O mesmo acontece com a R -forma universal de uma biálgebra quase comutativa e cotriangular em seus comódulos. Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan [FRT89] consideraram o problema no sentido inverso, dada uma solução da equação QYB num K -módulo V , construir uma biálgebra com estrutura (co)triangular (co)agindo em V .

Então, sejam V um K -módulo de dimensão finita, com base $v_1, \dots, v_d$, e $C \in \text{End}(V) \otimes \text{End}(V)$. Escreva

$$C(v_i \otimes v_j) = \sum_{l,m} c_{ij}^{lm} v_l \otimes v_m$$

DEFINIÇÃO I.4.1. A álgebra de FRT, $F(C)$, associada ao par (V, C) é a K -álgebra com geradores t_j^i , onde $i, j = 1, \dots, d$, sujeitos às relações

$$(I.4.1) \quad \sum_{k,l} c_{kl}^{ji} t_m^k t_n^l = \sum_{k,l} t_k^i t_l^j c_{mn}^{kl} \quad \forall i, j, m, n$$

Podemos escrever as relações de $F(C)$ de maneira mais concisa. Olhe $T = (t_j^i)$ como uma matriz $d \times d$, onde i indexa linhas e j colunas, e introduza a notação $T_1 = T \otimes 1, T_2 = 1 \otimes T$, onde 1 é matriz identidade $d \times d$. Então (I.4.1) se reduz a $CT_1T_2 = T_2T_1C$

Defina

$$(I.4.2) \quad \Delta(t_j^i) = \sum_k t_k^i \otimes t_j^k \quad \varepsilon(t_j^i) = \delta_{ij}$$

ou, em linguagem matricial, $\Delta(T) = T \otimes T, \varepsilon(T) = 1$. Defina também

$$(I.4.3) \quad \Delta_V(v_j) = \sum_k t_j^k \otimes v_k$$

TEOREMA I.4.2. [K] Seja $H = F(C)$. Então

- (a) As fórmulas (I.4.2) definem uma estrutura de biálgebra em H .
- (b) A equação (I.4.3) transforma V em um comódulo sobre H . Além disso, C passa a ser um homomorfismo de comódulos e H é universal em relação a esta propriedade.
- (c) Se C for uma solução da equação QYB, então existe uma única forma linear R em $H \otimes H$, definindo uma estrutura quase cotriangular em H com $R_{V,V} = C$.

Observação: A definição da R-forma R é $R(T_m^i \otimes T_n^j) = c_{mn}^{ji}$.

Se quisermos obter uma biálgebra quase triangular, basta dualizarmos $H(C)$. De qualquer forma, é conveniente descrevermos a construção de maneira análoga, pois as relações podem ser usadas (na forma matricial) quando não estamos em dimensão finita.

DEFINIÇÃO I.4.3. A álgebra $U(C)$ associada ao par (V, C) é gerada por elementos l_{ij}^+, l_{ji}^- , onde $i, j = 1, \dots, d$, com relações

$$(I.4.4) \quad \sum_{k,l} l_{jk}^\pm l_{il}^\pm c_{nm}^{kl} = \sum_{k,l} c_{kl}^{ji} l_{kn}^\pm l_{lm}^\pm \quad \sum_{k,l} l_{jk}^- l_{il}^+ c_{nm}^{kl} = \sum_{k,l} c_{kl}^{ji} l_{kn}^+ l_{lm}^-$$

Observação: Pondo $L^\pm = (l_{ij}^\pm)$, as relações podem ser escritas como $L_1^\pm L_2^\pm C = C L_2^\pm L_1^\pm$ e $L_1^- L_2^+ C = C L_2^+ L_1^-$.

A estrutura coalgébrica em $U(C)$ é dada por

$$(I.4.5) \quad \Delta(l_{ij}^\pm) = \sum_k l_{ik}^\pm \otimes l_{kj}^\pm \quad \varepsilon(l_{ij}^\pm) = \delta_{ij}$$

ou, em notação matricial, $\Delta(L^\pm) = L^\pm \otimes L^\pm, \varepsilon(L^\pm) = 1$.

Suponha que C seja invertível. A dualidade entre $F(C)$ e $U(C)$ é dada por

$$(I.4.6) \quad l_{ij}^+(t_m^n) = c_{mj}^{ni} \quad l_{ij}^-(t_m^n) = (c^{-1})_{jm}^{in}$$

ou, $L^+(T) = C^{21}, L^-(T) = C^{-1}$.

Observação: Em geral a aplicação antípoda não existe. Sua existência está associada ao conceito de determinante quântico, i.e., gostaríamos de poder definir um elemento invertível $D \in F(C)$ correspondente a “ $\det T$ ”. Então poderíamos inverter formalmente T (localizar $F(C)$) e definir $S(T) = T^{-1}$. Veja [CP] para condições sobre C que viabilizam a construção do determinante quântico.

I.5. O Duplo de uma Álgebra de Hopf

O duplo de uma álgebra de Hopf H (de dimensão finita e com antípoda invertível) é uma nova álgebra de Hopf $D(H)$, construída a partir de H , que possui uma estrutura quase triangular

canônica. Como álgebra o duplo é dado simplesmente por

$$D(H) = H \otimes (H^{\text{op}})^*$$

onde H^{op} denota H munida com a multiplicação μ^{op} (e, conseqüentemente, com antípoda $(S^{-1})^*$). Lembre do isomorfismo

$$\begin{aligned} \lambda: H \otimes H^* &\longrightarrow \text{End}_K(H) \\ (x \otimes f) &\mapsto f(\cdot)x \end{aligned}$$

TEOREMA I.5.1. Existe uma única estrutura de álgebra de Hopf em $D(H)$ que faz de H e $H^{\text{op}*}$ subálgebras de Hopf (através das inclusões naturais). A estrutura de coálgebra é dada por

$$(I.5.1) \quad \varepsilon(x \otimes f) = \varepsilon(a)f(1), \quad \Delta(x \otimes f) = (1 \otimes P \otimes 1)(\Delta(x) \otimes \Delta(f))$$

$D(H)$ é quase triangular com $R = \lambda^{-1}(1) \in H \otimes H^{\text{op}*} \subset D(H) \otimes D(H)$.

É conveniente escrever explicitamente a fórmula para a multiplicação em $D(H)$. Introduza a notação $\Delta^2(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)} \otimes x_i^{(3)}$.

$$(I.5.2) \quad (x \otimes f)(y \otimes g) = \sum_i x_i^{(2)}y \otimes fg(S^{-1}(x_i^{(3)}) \cdot x_i^{(1)})$$

onde justaposição denota a multiplicação na álgebra correspondente e $g(S^{-1}(x_i^{(3)}) \cdot x_i^{(1)})$ é o elemento de H^* dado por $z \mapsto g(S^{-1}(x_i^{(3)})zx_i^{(1)})$.

I.6. Álgebras de Deformação

Nessa seção $K = \mathbb{C}[[h]]$, a álgebra de séries formais em uma variável sobre $\mathbb{C}$. O lema a seguir, de demonstração elementar, caracteriza os elementos invertíveis de k .

LEMA I.6.1. Uma série formal $f = \sum_{n \geq 0} a_n h^n$ é invertível se, e somente se, $a_0 \neq 0$. Em outras palavras, K é um anel local com ideal maximal gerado por h .

Fixe uma constante $C > 1$ e defina a norma h -ádica em K dada por

$$(I.6.1) \quad \|a_n h^n + a_{n+1} h^{n+1} + \dots\| = C^{-n} \quad (a_n \neq 0)$$

Então K se torna um espaço normado completo e a topologia correspondente é chamada de topologia h -ádica. Às vezes será conveniente usar outra construção dessa topologia usando limites inversos, já que $K \cong \varprojlim \mathbb{C}[h]/h^n [\mathbf{K}]$.

Dado um K -módulo V , os espaços quocientes $V_n = V/h^n V$ formam um sistema projetivo. O limite inverso $\hat{V} = \varprojlim V_n$ é chamado de a complementação de V na topologia h -ádica. As projeções $p_n : V \rightarrow V_n$ induzem uma aplicação natural $p : V \rightarrow \hat{V}$. Em geral, o núcleo de p , $\ker(p) = \bigcap_n h^n V$ é diferente de $\{0\}$, ou seja, p não é injetiva.

DEFINIÇÃO I.6.2. Um K -módulo V será dito separado se $\bigcap_n h^n V = \{0\}$, ou seja, se $V \hookrightarrow \hat{V}$. V será dito completo se $p : V \rightarrow \hat{V}$ for sobrejetiva.

O exemplo natural de K -módulo é $V[[h]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} v_n h^n; v_n \in V \right\}$, onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um K -módulo isomorfo a $V[[h]]$ é dito topologicamente livre.

PROPOSIÇÃO I.6.3. **[K]** Um K -módulo é topologicamente livre se, e somente se, for separado, completo e livre de torsão.

Observação: Veja que se V tiver dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, então $V[[h]] \cong V \otimes K$, mas isso não é verdade se V tiver dimensão infinita (nesse caso $V[[h]]$ é “maior” que $V \otimes K$).

Dados K -módulos V e W , denotaremos por $V \hat{\otimes} W$ a complementação de $V \otimes_K W$.

DEFINIÇÃO I.6.4. Uma álgebra de Hopf H sobre K é dita topologicamente livre se for um K -módulo topologicamente livre e os produtos tensoriais envolvidos nas definições de suas estruturas (co)algébricas forem completos.

DEFINIÇÃO I.6.5. Uma álgebra de Hopf H topologicamente livre é dita uma álgebra de Hopf de deformação. Dada uma álgebra de Hopf H_0 sobre $\mathbb{C}$, uma álgebra de deformação H será dita uma deformação de H_0 se $H/hH \cong H_0$.

PROPOSIÇÃO I.6.6. **[ES]** Seja H uma biálgebra (não necessariamente de Hopf) que é uma deformação da álgebra de Hopf H_0 (apenas como biálgebra). Então existe uma única estrutura de álgebra de Hopf em H tornando-a uma deformação de H_0 como álgebra de Hopf.

Observação: O conceito de álgebras de deformação está intimamente ligado com estruturas de Poisson. Nos referimos aos primeiros capítulos de **[CP, ES]** para um tratamento detalhado dessa relação.

APÊNDICE II

Álgebras Universais Envelopantes Quantizadas

Na linguagem da seção I.6, uma álgebra universal envelopante quantizada é uma álgebra de Hopf de deformação H que deforma $U(\mathfrak{g})$, a álgebra universal envelopante da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Álgebras universais envelopantes quantizadas são um dos principais exemplos do que se chama genericamente de grupos quânticos. Estaremos interessados principalmente em álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e suas correspondentes afinizações, embora apresentemos as construções para uma álgebra de Kac-Moody com matriz de Cartan generalizada simetrizável.

II.1. Álgebras de Lie

Essa seção é uma rápida recordação sobre álgebras de Lie simples complexas de dimensão finita $\mathfrak{g}$ e suas afinizações $\widehat{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$. Nos referimos a [S, Kc, FH] para uma exposição mais completa. Começamos lembrando que podemos fixar uma subálgebra de Lie abeliana maximal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, chamada de uma subálgebra de Cartan. Então $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = \alpha(h)x \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Se $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, α é dita uma raiz de $\mathfrak{g}$. Denotaremos o conjunto de todas as raízes por R . É conveniente usarmos a notação $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Temos os seguintes fatos :

- (a) $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$, se $\alpha \in R$.
- (b) Se α é raiz, $-\alpha$ também é.
- (c) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Por causa de (b), podemos escolher uma decomposição de $R = R^+ \cup R^-$. Raízes em R^+ serão ditas positivas e as outras negativas. Considere o reticulado de raízes $Q = \sum_R \mathbb{Z}\alpha$ e o cone de raízes positivas $Q^+ = \sum_{R^+} \mathbb{Z}^+\alpha$. Uma raiz positiva α é dita simples se existe um único jeito de representá-la em Q^+ . O número de raízes simples é igual a dimensão de $\mathfrak{h}$, chamada o posto de $\mathfrak{g}$. Em outras palavras, temos uma base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de $\mathfrak{h}^*$ formada por raízes simples. Definimos uma ordem parcial em $\mathfrak{h}^*$ dizendo que $\lambda \leq \mu$ se $\mu - \lambda \in Q^+$. Temos então uma única raiz θ maximal em relação a essa ordem.

A menos de normalização, existe uma única forma bilinear simétrica invariante e não degenerada em $\mathfrak{g}$. Recorde que a palavra invariante significa que

$$(x, [y, w]) = ([x, y], w) \quad \forall x, y, w \in \mathfrak{g}$$

Usando $(\cdot, \cdot)$ podemos identificar $\mathfrak{h}^*$ com $\mathfrak{h}$, $\lambda \mapsto h_\lambda$. No que segue assumiremos que $(\cdot, \cdot)$ está normalizada de modo que $(\theta, \theta) = 2$. Vamos introduzir mais notação: $\alpha^\vee = \frac{2h_\alpha}{(\alpha, \alpha)}$ são as corraízes, $Q^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ é o reticulado de corraízes, $P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*; \lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\}$ é o reticulado de pesos, $P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*; \lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}^+ \text{ para } \alpha \in R^+\}$ é o cone de pesos dominantes, $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ são os pesos fundamentais, i.e., $\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$, $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha = \sum \omega_i$, $h^\vee = (\rho, \theta) + 1$ é o número dual de Coxeter¹. A matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$ é $A = (a_{ij})$ dada por $a_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. Lembre que $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ se $i \neq j$, $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$ e $a_{ij} = -2, -3 \Rightarrow a_{ji} = -1$. A é positiva definida e indecomponível, i.e., A não pode ser escrita como $A_1 + A_2$ com A_i preservando estas propriedades. Quando todos $a_{ij} \in \{-1, 0, 2\}$, dizemos que $\mathfrak{g}$ é *simply laced*. Em geral definimos

$$(II.1.1) \quad r^\vee = \max_{i \neq j} \{-a_{ij}\}$$

Sejam

$$(II.1.2) \quad d_i = \frac{r^\vee(\alpha_i, \alpha_i)}{2} \quad D = \text{diag}(d_i)$$

Então, $B = DA$ é simétrica.

Observação: Relembrando a classificação das álgebras de Lie complexas simples e de dimensão finita nas famílias A, B, C, D, E, F e G, temos que $r^\vee = 1$ para ADE, $r^\vee = 2$ para BCF e $r^\vee = 3$ para G.

Escolha uma base $x_\alpha^\pm$ para $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ de modo que $(x_\alpha^+, x_\alpha^-) = 1$. Então $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha$. No caso de raízes simples α_i , denote por $h_i = \alpha_i^\vee = \frac{2h_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)}$, $x_i^+ = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} x_{\alpha_i}^+$, $x_i^- = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} x_{\alpha_i}^-$. Os elementos $h_i, x_i^\pm$ satisfazem as seguintes relações

$$(II.1.3) \quad \begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0 & [h_i, x_j^+] &= a_{ij} x_j^+ & [h_i, x_j^-] &= -a_{ij} x_j^- \\ [x_i^+, x_j^-] &= \delta_{ij} h_i \\ (\text{ad } x_i^+)^{1-a_{ij}} x_j^+ &= 0 & (\text{ad } x_i^-)^{1-a_{ij}} x_j^- &= 0 & \text{se } i \neq j \end{aligned}$$

onde $(\text{ad } x)y = [x, y] \forall x, y \in \mathfrak{g}$ é a representação adjunta.

TEOREMA II.1.1 (Serre). A álgebra de Lie gerada por elementos $h_i, x_i^\pm$, $i = 1, \dots, n$, satisfazendo as relações (II.1.3) é isomorfa a $\mathfrak{g}$.

Os geradores $h_i, x_i^\pm$ são chamados de geradores de Chevalley.

¹O número de Coxeter é definido por $g = 1 + \sum \theta_i$ se $\theta = \sum \theta_i \alpha_i$. Ele não será importante para nossos objetivos

DEFINIÇÃO II.1.2. Uma matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$, é dita uma matriz de Cartan generalizada se satisfizer as seguintes propriedades

- (a) $a_{ii} = 2$.
- (b) $a_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$.
- (c) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$.

Assumiremos também que A é indecomponível.

DEFINIÇÃO II.1.3. A álgebra de Kac-Moody associada a uma matriz de Cartan generalizada A é a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$ gerada por elementos $h_i, x_i^\pm, i = 1, \dots, n$, satisfazendo as relações (II.1.3).

Se A é positiva definida, então $\mathfrak{g}(A)$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita. Se A é semi-definida positiva (de posto $n-1$), $\mathfrak{g}(A)$ é dita afim. Álgebras de Kac-Moody afim têm uma outra construção mais concreta. Fixe uma álgebra de Lie simples de dimensão finita $\mathfrak{g}$. A álgebra de *loops* associada a $\mathfrak{g}$ é

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathfrak{g}[t, t^{-1}]$$

com colchete dado por $[xt^k, yt^l] = [x, y]t^{k+l}$. Estamos usando a notação xt^k para $x \otimes t^k$. A álgebra de *loops* tem uma única extensão central não trivial

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c$$

com colchete dado por

$$(II.1.4) \quad [xt^k, yt^l] = [x, y]t^{k+l} + k\delta_{k,-l}(x, y)c$$

Finalmente, podemos estender $\widetilde{\mathfrak{g}}$ por uma derivação exterior $d = t \frac{d}{dt}$

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}} = \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d$$

e colchete $[d, c] = 0, [d, xt^k] = kxt^k$.

Existe uma forma bilinear simétrica invariante e não degenerada em $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$ dada por

$$(II.1.5) \quad (xt^k, yt^l) = \delta_{k,-l}(x, y) \quad (c, d) = 1 \quad (c, c) = (d, d) = (c, xt^k) = (d, yt^l) = 0$$

É claro que a restrição de $(\cdot, \cdot)$ a $\widetilde{\mathfrak{g}}$ é degenerada.

Defina subálgebras de Cartan $\widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$ e $\widetilde{\mathfrak{h}}_{\text{ext}} = \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d \subset \widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$. Defina também $\Lambda_0 \in \widetilde{\mathfrak{h}}^*$ e $\delta \in \widetilde{\mathfrak{h}}_{\text{ext}}^*$ por

$$(II.1.6) \quad \Lambda_0(c) = 1 \quad \delta(d) = 1 \quad \Lambda_0(d) = \delta(c) = \Lambda_0(h) = \delta(h) = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{h}$$

de modo que $\widetilde{\mathfrak{h}}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ e $\widetilde{\mathfrak{h}}_{\text{ext}}^* = \widetilde{\mathfrak{h}}^* \oplus \mathbb{C}\delta$. Para $\gamma \in \widetilde{\mathfrak{h}}_{\text{ext}}^*$, seja $\widetilde{\mathfrak{g}}_\gamma = \{x \in \widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}; [h, x] = \gamma(h)x \forall h \in \widetilde{\mathfrak{h}}_{\text{ext}}\}$. Diremos que γ é uma raiz afim se $\widetilde{\mathfrak{g}}_\gamma \neq \{0\}$ e $\gamma \neq 0$. O conjunto de todas as raízes afim será

denotado por $\tilde{R}$ e é fácil verificar que

$$\tilde{R} = \{\alpha + k\delta; \alpha \in R, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \alpha = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

$\tilde{R}$ admite uma polarização $\tilde{R} = \tilde{R}^+ \cup \tilde{R}^-$ dada por $\tilde{R}^+ = \{\alpha + k\delta; k > 0 \text{ ou } k = 0, \alpha \in R^+\}$ e $\tilde{R}^- = -\tilde{R}^+$. Raízes simples são definidas como antes. É imediato que as raízes simples de $\mathfrak{g}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, continuam sendo simples, mas temos uma nova raiz simples: $\alpha_0 = \delta - \theta$. Então defina a matriz de Cartan afim $\tilde{A}$ analogamente, agora com índices de 0 a n .

TEOREMA II.1.4. **[Kc]** A álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ é isomorfa a álgebra de Kac-Moody afim $\mathfrak{g}(\tilde{A})$. Os geradores $h_i, x_i^\pm, i = 1, \dots, n$, são os mesmos de $\mathfrak{g}$. Os geradores $x_0^\pm \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\mp\theta} \otimes t^{\pm 1}$ são tais que $(x_0^+, x_0^-) = 1$ e $h_0 = [x_0^+, x_0^-] = c - \theta^\vee$.

Observação: A matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$ forma um bloco em $\tilde{A}$. Também podemos definir $\tilde{D}$ de modo que $\tilde{B} = \tilde{D}\tilde{A}$ seja simétrica. Como as matrizes A, B, D são blocos de $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{D}$, continuaremos denotando as entradas dessas matrizes por a_{ij}, b_{ij} e d_i , mas com índices correndo de 0 a n . As definições de $\tilde{Q}, \tilde{Q}^+, \tilde{P}, \tilde{P}^+$ são feitas da mesma maneira.

Terminamos essa seção relembrando a definição da álgebra universal envelopante de uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ e algumas de suas propriedades.

DEFINIÇÃO II.1.5. A álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{a})$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ é

$$U(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})/I(\mathfrak{a})$$

onde $T(V)$ denota a álgebra tensorial de um espaço vetorial V , i.e., $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$, e $I(\mathfrak{a})$ é o ideal bilateral gerado por elementos da forma $xy - yx - [x, y]$, com $x, y \in \mathfrak{a}$.

Observação: Quando escrevemos xy na realidade estamos nos referindo a $x \otimes y \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \subset T(\mathfrak{a})$, enquanto $[x, y] \in \mathfrak{a} \subset T(\mathfrak{a})$. O “esquecimento” do símbolo $\otimes$ é, em geral, conveniente e não causará confusões.

O teorema a seguir mostra que estudar $\mathfrak{a}$ é, de certa forma, equivalente a estudar $U(\mathfrak{a})$ e explica o termo universal atribuído a $U(\mathfrak{a})$. Veja **[S, K]** para uma demonstração.

TEOREMA II.1.6. Seja A uma álgebra associativa e denote por $L(A)$ a álgebra de Lie construída a partir de A . Então $\text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{a}, L(A)) \cong \text{Hom}_{\text{alg}}(U(\mathfrak{a}), A)$.

Se $\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Kac-Moody, podemos descrever $U(\mathfrak{a})$ através dos “mesmos” geradores e relações que $\mathfrak{a}$. As relações de Serre, i.e., a última linha de (II.1.3) passam a ser escritas na forma

$$(II.1.7) \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} (x_i^\pm)^k x_j^\pm (x_i^\pm)^{1-a_{ij}-k} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

DEFINIÇÃO II.1.7. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e escolha bases de $\mathfrak{h}$, $\{x_i\}$ e $\{x^i\}$, duais em relação a $(\cdot, \cdot)$. Defina o elemento de Casimir e o tensor simétrico canônico respectivamente por

$$C = \sum_{i=1}^n x_i x^i \in U(\mathfrak{g}) \quad \Omega = \sum_{i=1}^n x_i \otimes x^i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

PROPOSIÇÃO II.1.8. [S] Os elementos C e Ω não dependem da escolha de base. O elemento de Casimir pertence ao centro de $U(\mathfrak{g})$ e $[\Omega, x \otimes 1 + 1 \otimes x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Por fim observamos que $U(\mathfrak{a})$ é uma álgebra de Hopf co-comutativa com estrutura coalgétrica dada por

$$\begin{aligned} \Delta(x_1 \dots x_k) &= 1 \otimes x_1 \dots x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i)} \otimes x_{\sigma(i+1)} \dots x_{\sigma(k)} + x_1 \dots x_k \otimes 1 \\ (II.1.8) \quad \varepsilon(x_1 \dots x_k) &= 0 \quad S(x_1 \dots x_k) = (-1)^k x_k \dots x_2 x_1 \end{aligned}$$

onde σ percorre todos os $(i, k-i)$ -embaralhamentos em S_k .

Observação: Veja o esquecimento de $\otimes$ se justificando aqui.

Podemos escrever

$$(II.1.9) \quad \Omega = \frac{1}{2}(\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$$

II.2. Representações de Álgebras de Lie

Agora relembremos um pouco sobre a teoria de representações de uma álgebra de Lie complexa simples e de dimensão finita $\mathfrak{g}$ e suas afinizações. Em vista do teorema II.1.6, o que estudaremos, de fato, são representações das respectivas álgebras universais envelopantes. Estaremos interessados em representações de peso máximo. Começamos pela decomposição triangular de $U(\mathfrak{a})$, onde $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}, \widehat{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}$ ou $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$,

$$U(\mathfrak{a}) \cong U(\mathfrak{n}^+) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^-)$$

onde $U(\mathfrak{h})$ é a subálgebra gerada por h_i (e d no caso de $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$) e $U(\mathfrak{n}^{\pm})$ são geradas por $x_i^{\pm}$ respectivamente. Essa decomposição é consequência do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que associa uma base de $U(\mathfrak{g})$ para cada base (ordenada) de $\mathfrak{g}$. Também é conveniente introduzir as subálgebras de Borel $U(\mathfrak{b}^{\pm}) = U(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^{\pm}) = U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^{\pm})$.

Observação: A rigor deveríamos escrever $\widetilde{\mathfrak{h}}, \widetilde{\mathfrak{n}}^{\pm}$ quando $\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{g}}$, etc. Mas escolhemos fazer essa parte do tratamento de forma unificada e cremos que isso não causará confusão. Observe também que $\widehat{\mathfrak{n}}^{\pm} = \widetilde{\mathfrak{n}}^{\pm} = \widetilde{\mathfrak{n}}_{\text{ext}}^{\pm} = \mathfrak{n}^{\pm} \oplus \mathfrak{g} \otimes t^{\pm 1} \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$.

DEFINIÇÃO II.2.1. Se V é uma representação de $U(\mathfrak{a})$, dizemos que um vetor $v \in V$ é homogêneo de peso $\mu \in \mathfrak{h}^*$ se $hv = \mu(h)v \forall h \in \mathfrak{h}$. Denotamos por $V[\mu]$ o subespaço vetorial de todos os vetores de peso μ .

Consideraremos apenas representações que admitem decomposição em subespaços de vetores homogêneos

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V[\mu]$$

com $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mu} < \infty$ para todo μ . Em outras palavras, a ação de cada $h \in \mathfrak{h}$ é semi simples com autoespaços de dimensão finita. A categoria de tais representações é usualmente denotada por $\mathcal{O}$.

DEFINIÇÃO II.2.2. Seja V um módulo sobre $U(\mathfrak{a})$. Um vetor homogêneo de peso $\lambda, v \in V$, é dito um vetor singular ou um vetor de peso máximo se $\mathfrak{n}^+ v = \{0\}$. Se $V = U(\mathfrak{a})v = U(\mathfrak{n}^-)v$ para um vetor v de peso máximo λ , dizemos que V é uma representação de peso máximo λ .

Observação: A nomenclatura “peso máximo” se justifica pelo fato de que a ação de x_i^- diminui o peso de v em relação a ordem parcial em $\mathfrak{h}^*$. Assim, fica claro que se V é uma representação de peso máximo λ , $\dim_{\mathbb{C}} V_{\lambda} = 1$. Podemos definir representações de peso mínimo trocando os papéis de $\mathfrak{n}^+$ e $\mathfrak{n}^-$.

O exemplo mais importante de módulos de peso máximo são os módulos de Verma. Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, o módulo de Verma de peso λ é definido por

$$M_{\lambda} = U(\mathfrak{a}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}v_{\lambda}$$

Ou seja, M_{λ} é o maior módulo de peso máximo, no sentido que qualquer outro é obtido a partir de M_{λ} por passagem ao quociente por um submódulo. É claro que $M_{\lambda} \in \mathcal{O}$. Seja I_{λ} a soma de todos os submódulos próprios de M_{λ} , ou seja, I_{λ} é o único submódulo próprio maximal de M_{λ} e o quociente $L_{\lambda} = M_{\lambda}/I_{\lambda}$ é irredutível. Defina a involução de Chevalley $\omega : U(\mathfrak{a}) \rightarrow U(\mathfrak{a})$ como sendo o automorfismo de álgebras $\omega(x_i^{\pm}) = -x_i^{\mp}, \omega(h_i) = -h_i$ (e $\omega(d) = -d$). Existe uma única forma bilinear simétrica e contravariante em M_{λ} dada por

$$(v_{\lambda}, v_{\lambda}) = 1 \quad (xu, w) = -(u, \omega(x)w) \quad \forall u, w \in M_{\lambda}, x \in \mathfrak{a}$$

chamada de Forma de Shapovalov.

LEMA II.2.3. O núcleo da forma de Shapovalov coincide com I_{λ} .

Consequentemente, M_{λ} é irredutível se, e somente se, a forma de Shapovalov for não degenerada. O seguinte teorema sela essa questão e diz que, para λ genérico, M_{λ} é irredutível.

TEOREMA II.2.4. [KK79]

- (a) Se $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, M_λ é irredutível se, e somente se, $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \neq 1, 2, \dots \forall \alpha \in R^+$.
- (b) Se $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$, M_λ é irredutível se e somente se $(\lambda + \tilde{\rho}, \alpha) \neq \frac{N}{2}(\alpha, \alpha) \forall \alpha \in \tilde{R}^+$ e $N = 1, 2, \dots$, onde $\tilde{\rho} = \rho + h^\vee \Lambda_0$.

Para $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, o teorema a seguir caracteriza a outra situação extrema, i.e., quando a dimensão de L_λ é finita.

TEOREMA II.2.5 (Chevalley).

- (a) L_λ tem dimensão finita se, e somente se, $\lambda \in P^+$.
- (b) Os módulos $L_\lambda, \lambda \in P^+$, são dois a dois não isomorfos e qualquer representação irredutível de dimensão finita de $U(\mathfrak{g})$ é isomorfa a algum L_λ .
- (c) Se $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i \in P^+$, então L_λ é gerado por um vetor de peso máximo v satisfazendo $(x_i^-)^{\lambda_i+1}v = 0$.
- (d) A categoria das representações de dimensão finita de $U(\mathfrak{g})$ é semi simples.

De agora em diante estaremos estudando representações de $U(\hat{\mathfrak{g}}), U(\tilde{\mathfrak{g}})$ e $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$. Queremos estudar módulos de Verma M_Λ onde $\Lambda = \lambda + k\Lambda_0 + \Delta_k(\lambda)\delta$ com $\lambda \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $k \in \mathbb{C}$ e

$$(II.2.1) \quad \Delta_k(\lambda) = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + h^\vee)}$$

que serão denotados por $M_{\lambda,k}$. O número k é chamado de carga central² da ação da álgebra afin ou de o nível da representação. $M_{\lambda,k}$ admite uma graduação sobre $\mathbb{Z}$, $M_{\lambda,k} = \bigoplus_{j \geq 0} M_{\lambda,k}[-j]$, onde $M_{\lambda,k}[-j]$ é o autoespaço da ação de d com autovalor $-j - \Delta_k(\lambda)$. $M_{\lambda,k}[-j]$ é naturalmente um módulo sobre $U(\mathfrak{g})$ e, em particular, $M_{\lambda,k}[0]$ é isomorfo ao $U(\mathfrak{g})$ -Verma módulo M_λ . Observe, então, que M_Λ é um exemplo de módulo sobre $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$ induzido por um módulo sobre $U(\mathfrak{g})$: Se V é um $U(\mathfrak{g})$ -módulo, V adquire automaticamente uma estrutura de $U(\tilde{\mathfrak{b}}_{\text{ext}}^+)$ -módulo onde $\mathfrak{g} \otimes t\mathbb{C}[t]$ age trivialmente e c, d agem por constantes $k, -\Delta$. Então, o módulo $\tilde{V}$ induzido pela ação de $U(\mathfrak{g})$ é

$$\tilde{V} = \text{Ind}_{U(\tilde{\mathfrak{b}}_{\text{ext}}^+)}^{U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})} V = U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}) \otimes_{U(\tilde{\mathfrak{b}}_{\text{ext}}^+)} V$$

$M_{\lambda,k}$ é induzido por M_λ . Quando fazemos esta construção com $V = L_\lambda$, o $U(\mathfrak{g})$ -módulo irredutível com peso máximo λ , o $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$ -módulo obtido é chamado módulo de Weyl e será denotado por $V_{\lambda,k}$.

Observação: A escolha em (II.2.1) é justificada pela construção de Sugawara, que estende representações de peso máximo de $\tilde{\mathfrak{g}}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$ através da inclusão $\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}} \subset \text{Vir} \ltimes \tilde{\mathfrak{g}}$, onde Vir é a álgebra de Virasoro [EFK].

²Do inglês *central charge*

Mesmo que L_λ tenha dimensão finita, $V_{\lambda,k}$ terá dimensão infinita, uma vez que toda representação não trivial de peso máximo de $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$ tem dimensão infinita. As representações de $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$ com comportamento semelhante às de dimensão finita para $U(\mathfrak{g})$ são chamadas representações integrais.

DEFINIÇÃO II.2.6. Uma representação V de $U(\mathfrak{a})$, onde $\mathfrak{a} = \hat{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}}$, é dita integral se a ação de $\hat{\mathfrak{n}}^-$ for localmente nilpotente. Em outras palavras, se para todo $v \in V$ e cada i , existir um inteiro positivo n_i de modo que $(x_i^-)^{n_i}v = 0$.

Observação: A terminologia integral vem do fato de que a ação da álgebra afim pode ser integrada a uma ação do grupo de Lie afim correspondente. Evidentemente que tal discussão está completamente fora dos nossos objetivos.

TEOREMA II.2.7. [Kc]

- (a) O $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$ -módulo irredutível L_Λ é integral se, e somente se, $\Lambda \in \tilde{P}^+$.
- (b) As representações $L_\Lambda, \Lambda \in \tilde{P}^+$, são duas a duas não isomorfas e qualquer representação de peso máximo, irredutível e integral é isomorfa a algum L_Λ .
- (c) Se $\Lambda \in \tilde{P}^+$, $\Lambda_i = \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle$ e v é um vetor de peso máximo, temos $(x_i^-)^{\Lambda_i+1}v = 0 \forall i$.
- (d) A categoria das representações integrais de $U(\mathfrak{a})$ é semi simples.

Agora vamos estudar uma classe de representações de $U(\hat{\mathfrak{g}})$ e $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ (mas não de $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$) que é de especial importância para nós. São chamadas de representações de avaliação associadas a um módulo V sobre $U(\mathfrak{g})$. Estaremos particularmente interessados no caso de V ser de dimensão finita, mas a construção pode ser feita com qualquer módulo na categoria $\mathcal{O}$. Dado um número complexo não nulo z , a aplicação de avaliação $\tau_z : U(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ é dada por

$$\tau_z(xt^m) = z^m x \quad \forall x \in \mathfrak{g} \quad \tau_z(c) = 0$$

O *pull-back* de τ_z define uma representação de $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ que denotamos por $V(z)$. Como $\tau_z(c) = 0$, é mais apropriado olhar $V(z)$ como uma representação de $U(\hat{\mathfrak{g}})$. Os elementos da família $V(z), z \in \mathbb{C}^*$, recebem o nome de representações de avaliação. Quando V tem dimensão finita, $V(z)$ também tem, já que, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, $V \cong V(z)$. Dessa maneira, podemos nos perguntar sobre a categoria das representações de dimensão finita de $U(\hat{\mathfrak{g}})$. Em particular, é interessante se perguntar quais são os objetos simples dessa categoria.

TEOREMA II.2.8. [C86, CP86] Sejam $V_1, \dots, V_m$ representações irredutíveis de dimensão finita de $U(\mathfrak{g})$ e $z, z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}^*$.

- (a) $V_1(z_1) \otimes \dots \otimes V_m(z_m)$ é uma representação irredutível de $U(\hat{\mathfrak{g}})$ se, e somente se, $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$.
- (b) Toda representação de $U(\hat{\mathfrak{g}})$ com dimensão finita e irredutível é da forma acima.

- (c) Suponha que $V_1 \otimes V_2$ se decomponha como $V_1 \otimes V_2 = \sum_j W_j$, com W_j irredutível. Então
- $$V_1(z) \otimes V_2(z) = \sum_j W_j(z).$$
- (d) A categoria abeliana gerada pelos objetos simples da categoria das representações de dimensão finita de $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ é semi simples.

Observação: Na realidade o último item é um teorema não trivial de Chevalley válido para qualquer álgebra de Lie. No nosso caso ele é um corolário imediato do item anterior e do fato de a categoria das representações de dimensão finita de $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ ser semi simples.

Apesar de $V(z)$ não se estender a uma representação de $U(\widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$, existe uma maneira de “engordá-la” com esse objetivo. Primeiro, dado um $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ módulo V , considere o espaço $V[z, z^{-1}]$, onde z é uma variável formal. A ação de $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ em $V[z, z^{-1}]$ é construída analogamente a sua ação em $V(z)$. Finalmente, dado $\Delta \in \mathbb{C}^*$, considere $\tilde{V}(z) = z^{-\Delta} V[z, z^{-1}] = V \otimes z^{-\Delta} \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ e defina a ação de d em $\tilde{V}(z)$ por $z \frac{d}{dz}$. Para $z_0 \neq 0$, existe um homomorfismo sobrejetivo de $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ -módulos $\tilde{V}(z) \rightarrow V(z_0)$ (bem definido a menos de escolha de ramo da função logaritmo).

II.3. A Quantização de Drinfeld-Jimbo

Em [D85, D86, J85], Drinfeld e Jimbo apresentaram versões quantizadas de $U(\mathfrak{a})$ para álgebras de Kac-Moody com matriz de Cartan generalizada simetrizável. Trata-se de uma deformação das relações (II.1.3). Embora a “forma” de apresentação seja essencialmente a mesma, dependendo do contexto em que se entende a palavra deformação, as álgebras universais envelopantes quantizadas correspondentes podem ter comportamentos muito diferentes. O primeiro contexto que apresentaremos é o de álgebras de deformação da seção I.6.

Primeiro introduzimos um pouco de notação. Seja K um anel comutativo com identidade e $q \in K$ um elemento invertível, diferente da identidade. Dados números inteiros m, r defina

$$(II.3.1) \quad [m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} \quad [m]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [m]_q \quad \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[r]_q! [m-r]_q!}$$

Então seja $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}(A)$ uma álgebra de Kac-Moody com matriz de Cartan generalizada simetrizável $A_{n \times n}$, i.e., $B = DA$ é simétrica para uma matriz diagonal D com entradas $d_i \in \mathbb{Z}^+$ (escolha d_i relativamente primas). Fixe $K = \mathbb{C}[[h]]$ e $q = e^h$.

DEFINIÇÃO II.3.1. A álgebra universal envelopante quantizada $U_h(\mathfrak{a})$ é a K -álgebra topologicamente gerada por $h_i, x_i^\pm$, onde $i = 1, \dots, n$, satisfazendo as relações

$$(II.3.2) \quad \begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0 & [h_i, x_j^+] &= a_{ij} x_j^+ & [h_i, x_j^-] &= -a_{ij} x_j^- \\ [x_i^+, x_j^-] &= \delta_{ij} \frac{q_i^{h_i} - q_i^{-h_i}}{q_i - q_i^{-1}} \\ \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (x_i^\pm)^m x_j^\pm (x_i^\pm)^{1-a_{ij}-m} &= 0 & \text{se } i \neq j \end{aligned}$$

onde $q_i = q^{d_i}$.

TEOREMA II.3.2. [CP] A álgebra $U_h(\mathfrak{a})$ admite uma estrutura de álgebra de Hopf de deformação dada por

$$(II.3.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_h(h_i) &= \varepsilon_h(x_i^\pm) = 0 & \Delta_h(h_i) &= 1 \otimes h_i + h_i \otimes 1 \\ \Delta_h(x_i^+) &= x_i^+ \otimes q_i^{h_i} + 1 \otimes x_i^+ & \Delta_h(x_i^-) &= x_i^- \otimes 1 + q_i^{-h_i} \otimes x_i^- \\ S_h(h_i) &= -h_i & S_h(x_i^+) &= -x_i^+ q_i^{-h_i} & S_h(x_i^-) &= -q_i^{h_i} x_i^- \end{aligned}$$

Além disso, $U_h(\mathfrak{a})$ é uma deformação de $U(\mathfrak{a})$. Ainda mais importante, $U_h(\mathfrak{a})$ possui uma estrutura quase triangular $\mathcal{R}_h$ com $\mathcal{R}_h \equiv 1 \otimes 1 \pmod{h}$.

A construção de $\mathcal{R}_h$ é feita usando os métodos da seção I.5, observando que $U_h(\mathfrak{a})$ é “quase” um dobro. Na realidade, como estamos trabalhando com álgebras de dimensão infinita, precisamos adaptar as construções da seção I.5. São essencialmente duas adaptações: produtos tensoriais devem ser entendidos no sentido da seção I.6; duais devem ser entendidos no sentido restrito. Para uma melhor compreensão do que vem a ser o dual restrito no contexto h -ádica nos referimos a [CP]. De maneira geral, o espaço dual restrito de um espaço graduado $V = \sum_{\alpha \in Q} V_\alpha$, onde Q é o grupo de graduação e a dimensão de V_α é finita, é definido por $V^* = \sum_{\alpha} V_\alpha^*$.

Observação: Sempre que trabalharmos com espaços de dimensão infinita e considerarmos espaços duais, na realidade estaremos nos referindo ao dual restrito. Por isso não criaremos notação especial para distinguir dual restrito e dual “completo”.

Então observe que, em particular, o teorema II.3.2 diz que $U_h(\mathfrak{a})$ é topologicamente livre. A demonstração deste fato não é trivial e consiste em encontrar uma base de Poincaré-Birkhoff-Witt. Uma consequência é

$$U_h(\mathfrak{a}) \cong U_h(\mathfrak{n}^+) \otimes U_h(\mathfrak{h}) \otimes U_h(\mathfrak{n}^-)$$

Agora vemos que $U_h(\mathfrak{b}^+) = U_h(\mathfrak{n}^+)U_h(\mathfrak{h})$ e $U_h(\mathfrak{b}^-) = U_h(\mathfrak{h})U_h(\mathfrak{n}^-)$ são graduadas pelo espaço de raízes. Ao construir o dobro de $U_h(\mathfrak{b}^+)$ observa-se que

$$D(U_h(\mathfrak{b}^+)) \cong U_h(\mathfrak{b}^+) \hat{\otimes} U_h(\mathfrak{b}^-)$$

e, finalmente, que existe um homomorfismo de álgebras de Hopf sobrejetivo

$$D(U_h(\mathfrak{b}^+)) \rightarrow U_h(\mathfrak{a})$$

Essa construção permite (com muito suor) obter fórmulas explícitas para $\mathcal{R}_h$. Moralmente a fórmula é da forma

$$(II.3.4) \quad \mathcal{R}_h = q^{\sum x_i \otimes x^i} \sum a_j \otimes a^j$$

onde $\{x_i\}, \{x^i\}$ são bases duais para $\mathfrak{h}$, $\{a_j\}$ é uma base formada de elementos homogêneos para $U(\mathfrak{n}^+)$ e $\{a^j\}$ é a base dual para $U_h(\mathfrak{n}^-)$.

O contexto em que estaremos realmente interessados a dar para a palavra deformação é o seguinte. Deixe q ser uma variável e considere $K = \mathbb{C}(q)$, o corpo das funções racionais em uma variável.

DEFINIÇÃO II.3.3. Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Kac-Moody com matriz de Cartan simetrizável. A álgebra universal envelopante quantizada $U_q(\mathfrak{a})$ é a K -álgebra associativa gerada por $k_i^{\pm 1}, x_i^{\pm}$, onde $i = (0), 1, \dots, n$, com relações

$$(II.3.5) \quad \begin{aligned} k_i k_i^{-1} &= 1 & k_i k_j &= k_j k_i \\ k_i x_j^+ k_i^{-1} &= q_i^{a_{ij}} x_j^+ & k_i x_j^- k_i^{-1} &= q_i^{-a_{ij}} x_j^- \\ [x_i^+, x_j^-] &= \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \\ \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} (x_i^{\pm})^m x_j^{\pm} (x_i^{\pm})^{1-a_{ij}-m} &= 0 & \text{se } i \neq j \end{aligned}$$

onde $q_i = q^{d_i}$.

Podemos incluir $U_q(\mathfrak{a})$ em $U_h(\mathfrak{a})$, $q \mapsto e^h, k_i \mapsto q_i^{h_i}$. Assim fica fácil deduzir a estrutura de álgebra de Hopf em $U_q(\mathfrak{a})$

$$(II.3.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon_q(k_i) &= 1 & \varepsilon_q(x_i^{\pm}) &= 0 & \Delta_q(k_i) &= k_i \otimes k_i \\ \Delta_q(x_i^+) &= x_i^+ \otimes k_i + 1 \otimes x_i^+ & \Delta_q(x_i^-) &= x_i^- \otimes 1 + k_i^{-1} \otimes x_i^- \\ S_q(k_i) &= k_i^{-1} & S_q(x_i^+) &= -x_i^+ k_i^{-1} & S_q(x_i^-) &= -k_i x_i^- \end{aligned}$$

Observação: Em geral não escreveremos o subíndice em $\varepsilon_q, \Delta_q, S_q$. Observe que $U_q(\mathfrak{g})$ está naturalmente contida em $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Para obtermos uma quantização de $\hat{\mathfrak{g}}$, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, basta adicionarmos a relação

$$(II.3.7) \quad k_0 \prod_{i=1}^n k_i^{\theta_i} = 1$$

onde θ_i são as coordenadas da raiz maximal de $\mathfrak{g}$ em relação à base de raízes simples, $\theta = \sum \theta_i \alpha_i$. Também podemos obter $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$ adicionando geradores $q^{\pm d}$ satisfazendo as relações naturais com os outros geradores

$$q^d q^{-d} = 1 \quad q^d k_j = k_j q^d \quad q^d x_i^{\pm} q^{-d} = x_i^{\pm} \quad q^d x_0^{\pm} q^{-d} = q^{\pm 1} x_0^{\pm}$$

e

$$\varepsilon(q^d) = 1 \quad \Delta(q^d) = q^d \otimes q^d \quad S(q^d) = q^{-d}$$

Observe que para cada escolha de sequência de sinais, $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{\pm 1\}$, existe um automorfismo de álgebras em $U_q(\mathfrak{a})$ dado por

$$(II.3.8) \quad k_i \mapsto \sigma_i k_i \quad x_i^+ \mapsto \sigma_i x_i^+ \quad x_i^- \mapsto x_i^-$$

Observação: Veja que estes isomorfismos não existem no caso de $U_h(\mathfrak{a})$.

Em outras palavras, $U_q(\mathfrak{a})$ é uma forma racional de $U_h(\mathfrak{a})$. Uma das vantagens de $U_q(\mathfrak{a})$ sobre $U_h(\mathfrak{a})$ é que $U_q(\mathfrak{a})$ é de fato uma álgebra, sem necessidade de considerações topológicas. No entanto, a estrutura quase triangular de $U_h(\mathfrak{a})$ não desce a este contexto algébrico de $U_q(\mathfrak{a})$. De qualquer maneira, $U_q(\mathfrak{a})$ é moralmente quase triangular, no sentido que existe uma estrutura quase triangular numa complementação. Mais importante, veremos que esta R-matriz moral de fato age no produto tensorial de módulos da categoria $\mathcal{O}_q$ (a versão quantizada da categoria $\mathcal{O}$).

Uma vez que $U_q(\mathfrak{a})$ “é” quase triangular, podemos construir o elemento u_q dado por (I.2.7). Por outro lado, para cada $\lambda = \sum \lambda_i \alpha_i \in Q$, defina o elemento

$$(II.3.9) \quad k_\lambda = k_1^{\lambda_1} \dots k_n^{\lambda_n}$$

É fácil verificar que $k_\lambda x_j^{\pm} k_\lambda^{-1} = q^{\pm r^\vee(\lambda, \alpha_j)} x_j^{\pm}$, onde $r^\vee$ é dado por (II.1.1).

PROPOSIÇÃO II.3.4. [KS, CP] Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa, simples e de dimensão finita, $\rho = \sum \omega_i$ e S a antípoda de $U_q(\mathfrak{g})$. Então

$$(II.3.10) \quad S^2(x) = k_{2\rho} x k_{2\rho}^{-1} \quad \forall x \in U_q(\mathfrak{g})$$

Consequentemente, S é invertível.

Defina então

$$(II.3.11) \quad C_q = k_{2\rho} u^{-1} = u^{-1} k_{2\rho} \quad \nu_q = C_q^{-2} = u_q S(u_q)$$

O elemento C_q é chamado de elemento de Casimir quântico. Para $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}}_{\text{ext}})$, usamos $\tilde{\rho} = \rho + h^\vee \Lambda_0$ no lugar de ρ . Identificando $\mathfrak{h}$ com $\widetilde{\mathfrak{h}}_{\text{ext}}$ através de $(\cdot, \cdot)$, podemos escrever $\tilde{\rho} = \rho + h^\vee d$.

II.4. Representações de $U_q(\mathfrak{g})$

Outra vantagem que $U_q(\mathfrak{a})$ tem sobre $U_h(\mathfrak{a})$ é que, com algum cuidado, podemos especializar q a um número $\epsilon \in \mathbb{C}^*$, de forma a obtermos uma álgebra de Hopf sobre $\mathbb{C}$. A expressão “com cuidado” significa que precisamos considerar uma forma integral de $U_q(\mathfrak{a})$, i.e., uma $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -subálgebra de $U_q(\mathfrak{a})$. Existem diferentes maneiras de se fazer isto, levando a teoria de representações muito diferentes quando ϵ é uma raiz da unidade. Quando ϵ não é uma raiz da unidade este cuidado se torna pouco necessário e a teoria de representações pode ser descrita pela de $U_q(\mathfrak{a})$. Para o sentido mais preciso de todas essas considerações veja [CP]. Nessa seção assumiremos que q é um número complexo não nulo que não é raiz da unidade.

Observação: Na realidade o limite $q \rightarrow 1$ faz sentido em muitos casos. De fato, a teoria de representações de $U_h(\mathfrak{a})$ é completamente paralela, uma vez contextualizada no sentido topológico [K], à teoria de representações de tipo de **1** de $U_q(\mathfrak{a})$ (a ser definida mais adiante). Quando $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, estas teorias são completamente paralelas a teoria de representações de $U(\mathfrak{g})$ e o limite $q \rightarrow 1$ equivale ao isomorfismo $U(\mathfrak{g}) \cong U_h(\mathfrak{g})/hU_h(\mathfrak{g})$. No caso das álgebras afim esse paralelismo é muito mais fraco (veja a primeira parte desse trabalho).

Uma vez que $U_q(\mathfrak{a})$ admite uma decomposição triangular, podemos definir espaços de vetores homogêneos, pesos máximos, módulos de Verma, etc, assim como na seção II.2. No entanto, a “forma” dos pesos, i.e., os valores $\mu(k_i)$ são quantizados [KS, CP]

$$\mu(k_i) = \sigma(\alpha_i) q^{r^\vee(\lambda, \alpha_i)}$$

onde $\sigma : R^+ \rightarrow \{-1, 1\}$, ou seja, um peso na realidade é um par (λ, σ) . A componente σ do peso corresponde aos automorfismos (II.3.8). O primeiro resultado é

PROPOSIÇÃO II.4.1. [CP] Seja $L_{\lambda, \sigma}$ a representação irredutível de $U_q(\mathfrak{a})$ com peso máximo (λ, σ) . Então V é integral (de dimensão finita no caso de $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$) se e somente se $\lambda \in P^+$.

Observação: Deveríamos denotar módulos sobre $U_q(\mathfrak{a})$ por V^q , para distinguir de módulos V sobre $U(\mathfrak{a})$. Novamente acreditamos não haver confusão de contexto e decidimos não sobrecarregar a notação.

Não é difícil verificar que o $U_q(\mathfrak{a})$ -módulo irredutível de peso máximo $(0, \sigma)$ é unidimensional e que

$$L_{\lambda, \sigma} \cong L_{0, \sigma} \otimes L_{\lambda, 1}$$

onde $1(\alpha_i) = 1 \forall i$. Por isso, é suficiente estudarmos representações de tipo **1**, i.e., com $\sigma = 1$. É o que faremos a partir de agora e, portanto, pesos serão denotados somente por sua componente em $\mathfrak{h}$.

Observação: Como os automorfismos (II.3.8) não existem para $U_h(\mathfrak{a})$, todas as representações são automaticamente de tipo **1**.

A teoria de módulos de Verma é desenvolvida de maneira similar. Em particular, para valores genéricos de λ e k , os módulos M_λ e $M_{\lambda,k}$ são irredutíveis.

De agora em diante $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. Os resultados correspondentes para as álgebras afim são discutidos na parte principal deste trabalho. O teorema a seguir [K, CP] estabelece o paralelismo entre os casos quântico e clássico.

TEOREMA II.4.2.

- (a) L_λ tem dimensão finita se, e somente se, $\lambda \in P^+$.
- (b) Os módulos $L_\lambda, \lambda \in P^+$, são dois a dois não isomorfos e qualquer representação irredutível de dimensão finita de $U_q(\mathfrak{g})$ é isomorfa a algum L_λ .
- (c) Se $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i \in P^+$, então L_λ é gerado por um vetor de peso máximo v satisfazendo $(x_i^-)^{\lambda_i+1}v = 0$.
- (d) A categoria das representações de dimensão finita de $U_q(\mathfrak{g})$ é semi simples.
- (e) Seja $\lambda \in P^+$ e denote por V e V^q os módulos L_λ sobre $U(\mathfrak{g})$ e $U_q(\mathfrak{g})$ respectivamente. Sejam $V[\mu], V^q[\mu]$ os correspondentes subespaços de vetores homogêneos de peso μ . Então $\dim V[\mu] = \dim V^q[\mu]$.
- (f) Na notação do item anterior, dados $\lambda_1, \lambda_2 \in P^+$, a decomposição de $V_1^q \otimes V_2^q$ em componentes irredutíveis é a “mesma” de $V_1 \otimes V_2$.

A respeito do último item é conveniente lembrar que, sendo $U_q(\mathfrak{g})$ uma álgebra de Hopf não co-comutativa, o isomorfismo entre $V_1^q \otimes V_2^q$ e $V_2^q \otimes V_1^q$ não é dado apenas pela permutação de componentes. De acordo com o capítulo I, temos que também agir com a R-matriz universal para obter o isomorfismo desejado. Embora $U_q(\mathfrak{g})$ tenha uma R-matriz universal apenas moralmente, não é difícil se convencer que sua ação está bem definida no produto tensorial de dois módulos da categoria $\mathcal{O}_q$. Terminamos essa seção dando um exemplo deste fato, isto é, escreveremos a seguir a fórmula para a ação da R-matriz universal de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ no produto tensorial de duas cópias da sua representação natural $V = \mathbb{C}^{n+1} = L_{\omega_1}$. A dedução dessa expressão pode ser encontrada em [CP]. Recorde as notações que usamos para a representação natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ na seção III.4. Observe que a identificação de V como $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ -módulo é natural, isto é, a ação dos geradores de Chevalley $x_i^\pm$ em V , olhados como geradores de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$, é exatamente a mesma, enquanto que k_i age como q^{h_i} . Então podemos escrever a fórmula para $R_{V,V} = \mathcal{R}|_{V \otimes V}$ em termos das matrizes elementares E_{ij}

$$(II.4.1) \quad R_{V,V} = q^{-\frac{1}{n+1}} \left(q \sum_{i=1}^{n+1} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{j \neq i} E_{ii} \otimes E_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{j>i} E_{ij} \otimes E_{ji} \right)$$

APÊNDICE III

Fórmulas Úteis e Resultados Diversos

III.1. Equações de Diferenças de Segunda Ordem

Dados $p, x \in \mathbb{C}^*$ seja $\{x\}_p = \frac{1-p^x}{1-p}$. Em geral omitiremos o subíndice. A função hipergeométrica quântica de Heine é definida por

$$(III.1.1) \quad {}_2\phi_1(p^r, p^s, p^t; p, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{\{r+j\}\{s+j\}}{\{t+j\}\{1+j\}} \right) z^k$$

Ela satisfaz a seguinte equação de diferenças

$$(III.1.2) \quad (p^{r+s}z - p^{t-1})f(p^2z) + (-(p^r + p^s)z + p^{t-1} + 1)f(pz) + (z - 1)f(z) = 0$$

Considere uma equação de diferenças de segunda ordem da forma

$$(III.1.3) \quad (A_0z + B_0)f(p^2z) + (A_1z + B_1)f(pz) + (A_2z + B_2)f(z) = 0$$

Para valores genéricos dos coeficientes ela se reduz à equação de Heine (III.1.2) [EFK].

PROPOSIÇÃO III.1.1. Sejam r_j, s_j, t_j, u_j , ($j = 1, 2$), as soluções de

$$p^{2u}B_0 + p^uB_1 + B_2 = 0, \quad p^{2u}\frac{A_0}{A_2} = p^{r+s}, \quad p^u\frac{A_1}{A_2} = -(p^r + p^s), \quad p^{2u}\frac{B_0}{B_2} = p^{t-1}$$

Então as funções

$$f^{(j)}(z) = z^{u_j} {}_2\phi_1(p^{r_j}, p^{s_j}, p^{t_j}; p, -zA_2/B_2)$$

são as únicas soluções de (III.1.3) da forma $f(z) = z^u g(z)$ para uma função $g(z)$ regular numa vizinhança de 0 com $g(0) = 1$.

A função $f(z) = {}_2\phi_1(p^r, p^s, p^t; p, z^{-1})$ satisfaz

$$(III.1.4) \quad (1 - p^2z)f(p^2z) + ((p^{t+1} + p^2)z - (p^r + p^s))f(pz) + (p^{r+s} - p^{t+1}z)f(z) = 0$$

obtida da equação de Heine substituindo-se z por z^{-1} . Em geral esta equação também pode ser reduzida a (III.1.2) com novos parâmetros (r, s, t) dados por

$$(III.1.5) \quad (r', s', t') = (r, r - t + 1, r - s + 1) \quad \text{ou} \quad (r'', s'', t'') = (s - t + 1, s, s - r + 1)$$

e podemos concluir a

PROPOSIÇÃO III.1.2. As funções

$$g_1(z) = z^{-r} {}_2\phi_1(p^r, p^{r-t+1}, p^{r-s+1}; p, p^{t+1-r-s} z^{-1})$$

$$g_2(z) = z^{-s} {}_2\phi_1(p^{s-t+1}, p^s, p^{s-r+1}; p, p^{t+1-r-s} z^{-1})$$

são soluções de (III.1.2) quase meromorfas em $\mathbb{C}^* \cup \infty$

TEOREMA III.1.3. [GR, EFK] Sejam Γ_q e $\Theta(z; q)$ as funções gamma quântica e téta definidas por (III.2.1). Então, ${}_2\phi_1(p^r, p^s, p^t; p, z) = \Lambda(z)g_1(z) + \Omega(z)g_2(z)$ onde

$$\Lambda(z) = \frac{\Gamma_p(t)\Gamma_p(s-r)}{\Gamma_p(s)\Gamma_p(t-r)} \frac{\Theta(zp^r; p)}{\Theta(z; p)} z^r$$

$$\Omega(z) = \frac{\Gamma_p(t)\Gamma_p(r-s)}{\Gamma_p(r)\Gamma_p(t-s)} \frac{\Theta(zp^s; p)}{\Theta(z; p)} z^s$$

III.2. Funções Téta, Gama Elíptica e Gama Quântica

Defina as funções téta e gama quântica por

$$(III.2.1) \quad \Theta(z; q) = \prod_{j \geq 0} (1 - zq^j)(1 - z^{-1}q^{j+1})(1 - q^{j+1}) \quad \Gamma_q(a) = (1 - q)^{1-a} \prod_{j \geq 0} \frac{1 - q^{j+1}}{1 - q^{j+a}}$$

Então

$$(III.2.2) \quad z\Theta(qz; q) = -\Theta(z; q) \quad z\Theta(z; q) = -q\Theta(q^{-1}z; q) \quad \Theta(qz; q) = \Theta(z^{-1}; q)$$

$$\text{Seja } C(q) = (1 - q)(q; q)_\infty^3 = (1 - q) \left(\prod_{j=0}^{\infty} (1 - q^{j+1}) \right)^3$$

$$(III.2.3) \quad \Gamma_q(a)\Gamma_q(1-a) = \frac{C(q)}{\Theta(q^a; q)} \quad \Gamma_q(1+a) = \{a\}_q \Gamma_q(a) = \frac{1 - q^a}{1 - q} \Gamma_q(a)$$

De onde obtemos

$$(III.2.4) \quad \Gamma_q(a)\Gamma_q(2-a) = \frac{\{1-a\}_q C(q)}{\Theta(q^a; q)} = \frac{\{a-1\}_q C(q)}{\Theta(q^{2-a}; q)}$$

$$\Gamma_q(a)\Gamma_q(-a) = \frac{C(q)}{\{-a\}_q \Theta(q^a; q)} = \frac{C(q)}{\{a\}_q \Theta(q^{-a}; q)}$$

Agora a relação entre a função téta Θ e a primeira função téta de Jacobi ϑ_1 definida por [WW]

$$(III.2.5) \quad \begin{aligned} \vartheta_1(u; \tau) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(j+1/2)^2 \tau + 2\pi i(j+1/2)(u+1/2)} \\ &= -i e^{\frac{\pi i \tau}{4}} e^{\pi i u} \prod_{j=0}^{\infty} (1 - e^{-2\pi i u} (e^{2\pi i \tau})^j) (1 - e^{2\pi i u} (e^{2\pi i \tau})^{j+1}) (1 - (e^{2\pi i \tau})^{j+1}) \end{aligned}$$

Como consequência imediata da primeira expressão, vemos que ϑ_1 é ímpar em u . Pondo $z = e^{-2\pi i u}$ e $q = e^{2\pi i \tau}$ temos

$$(III.2.6) \quad \Theta(z; q) = i q^{-1/8} z^{1/2} \vartheta_1(u; \tau)$$

Finalmente, a função gama elíptica é dada por [FV99]

$$(III.2.7) \quad \Gamma_e(u, \zeta, \sigma) = \prod_{j,l=0}^{\infty} \frac{1 - e^{2\pi i((j+1)\zeta + (l+1)\sigma - u)}}{1 - e^{2\pi i(j\zeta + l\sigma + u)}}$$

III.3. Blocos de uma Categoria Abeliana

Nessa seção fazemos uma breve recordação sobre o conceito de blocos numa categoria abeliana. A definição de categoria abeliana pode ser encontrada em [M, GM, CP].

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana cujos objetos tem altura finita. Nesse caso, qualquer objeto admite uma única representação como soma direta de objetos indecomponíveis.

DEFINIÇÃO III.3.1. Dois objetos indecomponíveis X_1, X_2 são ditos ligados se não existir uma decomposição de $\mathcal{C}$ em soma direta de duas categorias abelianas, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$, com $X_1 \in \mathcal{C}_1$ e $X_2 \in \mathcal{C}_2$.

É fácil ver que ligação é uma relação de equivalência.

PROPOSIÇÃO III.3.2. $\mathcal{C}$ admite uma única decomposição em soma direta de categorias abelianas indecomponíveis: $\mathcal{C} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja I o conjunto das classes de equivalência com relação a ligação. Para $\alpha \in I$, defina $\mathcal{C}_\alpha$ como a subcategoria de $\mathcal{C}$ cujos objetos são somas diretas de objetos de α . É imediato que $\mathcal{C} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha$. Resta ver que $\mathcal{C}_\alpha$ é indecomponível. De fato, se $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha^1 \oplus \mathcal{C}_\alpha^2$ é uma decomposição não trivial, então quaisquer objetos indecomponíveis $X_1 \in \mathcal{C}_\alpha^1$, $X_2 \in \mathcal{C}_\alpha^2$ não estão ligados: contradição. A unicidade é óbvia. $\square$

DEFINIÇÃO III.3.3. As subcategorias $\mathcal{C}_\alpha$ são chamadas de blocos de $\mathcal{C}$ e a decomposição da proposição III.3.2 é chamada de a decomposição em blocos de $\mathcal{C}$.

Recorde o teorema de Jordan-Holder: para todo $X \in \mathcal{C}$, podemos especificar de maneira única, contando multiplicidade, os objetos simples que constituem suas decomposições em série. Esses objetos simples são chamados de constituintes de X .

O lema a seguir é imediato.

LEMA III.3.4.

- (a) Dois objetos simples estão ligados se ocorrerem como constituintes do mesmo objeto indecomponível.
- (b) Dois objetos indecomponíveis estão ligados se possuírem constituintes ligadas.

III.4. A Representação Natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$

Considere a realização natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ como a álgebra de Lie de matrizes $(n+1) \times (n+1)$ de traço zero, agindo em $V = \mathbb{C}^{n+1}$, com base canônica $v_1, \dots, v_{n+1}$. Chamamos V de Representação Natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Seja E_{ij} a matriz elementar que tem todas as entradas nulas exceto pela (i, j) que é 1.

Fixamos a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \text{span}\{h_i\}$, $i = 1, \dots, n$, onde $h_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$. É fácil verificar que $h_i, x_i^\pm$, onde $x_i^+ = E_{i, i+1}$ e $x_i^- = E_{i+1, i}$, são geradores de Chevalley para $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Então, identificamos $\mathfrak{h}$ com o subespaço de V cuja soma das coordenadas de seus vetores se anula.

$$(III.4.1) \quad h_i = (0, 0, \dots, 1, -1, 0, \dots, 0)$$

A forma bilinear simétrica usual de V , $((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), (\mu_1, \dots, \mu_{n+1})) = \sum \lambda_i \mu_i$, coincide com a forma bilinear simétrica de $\mathfrak{sl}_{n+1}$, com a normalização da seção II.1, quando restrita a $\mathfrak{h}$. Usando $(\cdot, \cdot)$ para identificar $\mathfrak{h}^*$ com $\mathfrak{h}$ vemos que as raízes simples α_i coincidem com h_i . Os pesos fundamentais são dados por

$$(III.4.2) \quad \omega_i = \frac{1}{n+1} (n+1-i, \dots, n+1-i, -i, \dots, -i)$$

onde a última coordenada igual a $\frac{n+1-i}{n+1}$ é a i -ésima.

Os vetores da base canônica de V são vetores homogêneos, sendo que o peso de v_m é $\mu_m = \omega_m - \omega_{m-1}$, onde, por convenção, $\omega_0 = \omega_{n+2} = 0$. Em coordenadas temos

$$(III.4.3) \quad \mu_m = \frac{1}{n+1} (-1, \dots, -1, n, -1, \dots, -1)$$

sendo que a coordenada diferente é a m -ésima.

Agora calculamos alguns produtos internos

$$(III.4.4) \quad (\mu_m, \mu_m) = \frac{n}{n+1} \quad (\mu_m, \mu_l) = \frac{-1}{n+1} \quad (\mu_m + \mu_l, \mu_l - \mu_m) = 0$$

$$(\mu_m - \mu_l, \mu_m - \mu_l) = 2 \quad (\mu_m + \mu_l, \mu_m + \mu_l) = 2 \frac{n-1}{n+1}$$

para $m \neq l$.

Índice Remissivo

Γ_q, Γ_e	funções gama	$V(\mathbb{P})$	10	biálgebra	53
Δ	comultiplicação	$V(z), V_j(z)$	10	quase co-comutativa	54
Δ^{op}	53	$\hat{\otimes}$	61	quase comutativa cotriangular	55
Δ_V	57	$\langle \phi \rangle$	valor esperado	(quase) triangular	54
$\Delta_k(\lambda)$	69	ABRR, equação de	32	blocos	79
ε	counidade	ádica	60	calibre, transformações de	29
$\theta(z; q), \vartheta_1$	funções téta	afinização	11	caráter elíptico central	20
${}_2\phi_1$	77	minimal	12	carga central	69
Ω	67	álgebra	51	Cartan, matriz generalizada de	65
C, C_q	Casimir, elemento de	de FRT	58	Casimir,	
$M_{\lambda, k}$	69	comutativa	51	elemento de	67
$P_{V, W}$	permutação	de deformação	61	elemento quântico de	74
QYB, QDYB	55, 25	homomorfismo de	52	Chevalley, involução de	68
$r^\vee$	64	de Hopf	53	coálgebra	52
$\mathbf{Rep}_f(R)$	27	de Kac-Moody	65	co-comutativa	52
S	antípoda	afim	65	homomorfismo de	52
U_h	71	universal envelopante	66	comódulo	57
u, u_q	55, 74	antípoda	53		
$V_{\lambda, k}$	69	aplicação de avaliação	70		

- complementação 60
- completo 61
- comultiplicação 52
- constituente 79
- construção de FRT 58
- correlação, função de 35
- counidade 52
- decomposição em blocos 79
- deformação 61
- Drinfeld, polinômio de 10
- dual, representação 56
- duplo 59
- equação,
 de ABRR 32
 de Knizhnik-Zamolodchikov 36
 de Yang-Baxter (quântica) 55
 com parâmetros espectrais 15
 dinâmica 25
 do *twist* dinâmico 32
 hipergeométrica de Heine ... 77
- forma multiplicativa 28
 fechada 29
- FRT 58
- função
 de correlação 35
 gama 78
 hipergeométrica de Heine ... 77
 téta 78
- fundamental, representação ... 10
- funtor quântico de Kazhdan-Lusztig
 49
- função
 operador de 31
 solução de 36
 gama, funções 78
 h -ádica 60
 Heine, equação de 77
- homomorfismo
 de álgebras 52
 de álgebras de Hopf 53
 de biálgebras 53
 de coálgebras 52
 de comódulos 57
- Hopf, álgebra de 53
- integral, representação 70
- intercâmbio, operador de 32
- involução de Chevalley 68
- Kac-Moody, álgebra de 65
- Kazhdan-Lusztig, funtor quântico 49
- ligados, objetos 79
- livre, topologicamente 61
- localmente nilpotente 70
- minimal, afinização 12
- módulo
 de Verma 68
 de Weyl 69
- multiplicativa, forma 28
- nilpotente, localmente 70
- norma h -ádica 60
- objetos ligados 79
- operador
 de fusão 31
 com parâmetro espectral 35
 de intercâmbio 32
- peso 68
 máximo 68,8
- polinômio de Drinfeld 10
- quase co-comutativa 54

quase triangular	54	trivial	56	universal	
R-forma universal	55	resonante, sequência não	21	R-forma	55
R-matriz universal	54	separado	61	R-matriz	54
R-matriz dinâmica	26	sequência não resonante	21	valor esperado	30
do tipo $\mathfrak{gl}_n$	26	solução de fusão	36	vetor de peso máximo	68
unitária	26	téta, funções	78	Verma, módulo de	68
representação		tipo 1 , representação de	75	Weyl, módulo de	69
de avaliação	70	topologia h -ádica	60	Yang-Baxter	
dual	56	topologicamente livre	61	equação quântica de	55
fundamental	10	transformações de calibre	29	com parâmetros espectrais ..	15
integral	70	triangular	54	dinâmica	25
de peso máximo	68,8	trivial, representação	56		
de tipo 1	75	unitária, R-matriz	26		

Bibliografia

- [ABRR98] Arnaudon, D. - Buffenoir, E. - Ragoucy, E. - Roche, Ph. Universal solutions of quantum dynamical Yang-Baxter equations. *Lett. Math. Phys.*, 44:201–214, 1998. q-alg/9712037.
- [AK97] Akasaka, T. - Kashiwara, M. Finite dimensional representations of quantum affine algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 33 (5):839–867, 1997.
- [B93] Beck, J. Braid group action and quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 165:555–568, 1993.
- [C86] Chari, V. *Invent. Math.*, 85 (2):317–335, 1986.
- [C01] Chari, V. Braid group actions and tensor products. *preprint*. QA/0106241.
- [CP] Chari, V. - Pressley, A. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, 1994.
- [CP86] Chari, V. - Pressley, A. *Math. Ann.*, 275 (1):87–104, 1986.
- [CP91a] Chari, V. - Pressley, A. Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices. *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 417:87–128, 1991.
- [CP91b] Chari, V. - Pressley, A. Quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 142:261–283, 1991.
- [CP93] Chari, V.-Pressley, A. Quantum affine algebras and affine Hecke algebras. *Pacific J. Math.*
- [CP95] Chari, V. - Pressley, A. Quantum affine algebras and their representations, in Representations of groups. *CMS Conf. Proc (Banff, AB, 1994)*, 16:59–78, 1995. hep-th/9411145.
- [CP96a] Chari, V. - Pressley, A. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the simply laced case. *J. Alg.*, 184 (1):1–30, 1996. hep-th/9410036.
- [CP96b] Chari, V. - Pressley, A. Yangians, integrable systems and Dorey’s rule. *Comm. Math. Phys.*, 181:265–302, 1996. hep-th/9505085.
- [D85] Drinfeld, V. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equations. *Soviet Math. Dokl.*, 32:254–258, 1985.
- [D86] Drinfeld, V. Quantum groups. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley*, pages 798–820, 1986.
- [D88] Drinfeld, V. A new realization of Yangians and quantized affine algebras. *Soviet Math. Dokl.*, 36:212–216, 1988.
- [EFK] Etingof, P. - Frenkel, I. - Kirillov Jr., A. *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, volume 58 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, 1998.
- [EK95] Etingof, P. - Kazhdan, D. Quantization of Lie bialgebras I. *Sel. Math.*, 2 (1):1–41, 1996.
- [EM02a] Etingof, P. - Moura, A. On the quantum Kazhdan-Luzstig functor. QA/0203003.
- [EM02b] Etingof, P. - Moura, A. Elliptic central characters and blocks of finite dimensional representations of quantum affine algebras. QA/0204302.
- [ES] Etingof, P. - Schiffmann, O. *Lectures on quantum groups*. Lectures in Mathematical Physics. International Press, 1998.
- [ES98] Etingof, P.-Schiffmann, O. On highest weight modules over elliptic quantum groups. QA/9809161.
- [ES99] Etingof, P. - Schiffmann, O. Lectures on the dynamical Yang-Baxter equations. QA/9908064.

- [ESS99] Etingof, P. - Schedler, T. - Schiffmann, O. Explicit quantization of dynamical r-matrices for finite dimensional semisimple Lie algebras. *QA/9912009*.
- [EV98] Etingof, P. - Varchenko, A. Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 196:591–640, 1998.
- [EV99] Etingof, P. - Varchenko, A. Exchange dynamical quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 205:19–52, 1999.
- [EV00] Etingof, P. - Varchenko, A. Traces of intertwiners for quantum groups and difference equations, I. *Duke Math. J.*, 104 (3):391–432, 2000. *QA/9907181*.
- [F94] Felder, G. Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves. *Proc. of the ICM*, Zürich, 1994. *hep-th/9407154*. Elliptic quantum groups. *Proc. of the ICMP*, Paris, 1994. *hep-th/9412207*.
- [F02] Frappat, L. Quantum elliptic algebras and double Yangians. *QA/0201245*.
- [FRT89] Faddeev, L. - Reshetikhin, N. - Takhtajan, L. Quantization of Lie groups and Lie algebras. *Leningrad Math. J.*, 1:193–225, 1990.
- [FM01] Frenkel, E. - Mukhin, E. Combinatorics of q-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 216:23–57, 2001. *QA/9911112*.
- [FR00] Frenkel, E. - Reshetikhin, N. The q-characters of representation of quantum affine algebras and deformations of W-algebras. *Contemporary Math.*, 248:163–205, 2000. *QA/9810055*.
- [FR92] Frenkel, I. - Reshetikhin, N. Quantum affine algebras and holonomic difference equations. *Comm. Math. Phys.*, 146:1–60, 1992.
- [FH] Fulton, W. - Harris, J. *Representation theory - a first course*, volume 129 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [FV96] Felder, G. - Varchenko, A. On representations of the elliptic quantum group $E_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_2)$. *q-alg/9601003*.
- [FV99] Felder, G. - Varchenko, A. The elliptic gamma function and $SL(3, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^3$. *Adv. Math.*, 156 (1):44–76, 2000.
- [GM] Gelfand, S. - Manin, Y. *Homological Algebra*, volume 38 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, 1999.
- [GR] Gasper, G. - Rahman, M. *Basic hypergeometric series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 1990.
- [J85] Jimbo, M. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10:63–69, 1985.
- [J86] Jimbo, M. A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(n+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11:257–252, 1986.
- [JKOS97] Jimbo, M. - Konno, H. - Odake, S. - Shiraishi, J. Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups. *Transformation Groups*, 4:303–327, 1999. *q-alg/9712029*.
- [JMO87] Jimbo, M. - Miwa, T. - Okado, M. Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras. *Comm. Math. Phys.*, 116:507–525, 1988.
- [K] Kassel, C. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.
- [K00] Kashiwara, M. On level zero representations of quantized affine algebras. *qa/0010293*.
- [Kc] Kac, V. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.
- [KK79] Kac, V. - Kazhdan, D. Structures of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras. *Advances in Math.*, 34:97–108, 1979.
- [KL93] Kazhdan, D. - Lusztig, G. Tensor structures arising from affine Lie algebras I. *J. Amer. Math. Soc.*, 6:905–947, 1993. Tensor structures arising from affine Lie algebras II. *J. Amer. Math. Soc.*, 6:949–1011, 1993.

- [KL94] Kazhdan, D. - Lusztig, G. Tensor structures arising from affine Lie algebras III. *J. Amer. Math. Soc.*, 7:335–381, 1994. Tensor structures arising from affine Lie algebras IV. *J. Amer. Math. Soc.*, 7:383–453, 1994.
- [KS95] Kazhdan, D. - Soibelman, Y. Representations of quantum affine algebras. *Selecta Math. (N.S.)*, 1 (3):537–595, 1995.
- [KS] Klimyk, A. - Schmüdgen, K. *Quantum groups and their representations*. Texts and monographs in Physics. Springer-Verlag, 1997.
- [M] MacLane, S. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1971.
- [M01] Moura, A. Elliptic dynamical R-matrices from the monodromy of the q-Knizhnik-Zamolodchikov equations for the standard representation of $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$. [rt/0112145](#).
- [MT00] Miwa, T. - Takeyama, Y. The integral formula for the solutions of the quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation associated with $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ for $|q| = 1$. *CRM Proc. Lect. Notes*, 25.
- [MTT99] Miwa, T. - Takeyama, Y. - Tarasov, V. Determinant formula for solutions of the $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ qKZ equation at $|q| = 1$. *Publ. RIMS*, 35 (6).
- [N02] Nakajima, H. Extremal weight modules of quantum affine algebras. [QA/0204183](#).
- [S] San Martin, L. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 1999.
- [S98] Schiffmann, O. On classification of dynamical r -matrices. *Math. Res. Lett.*, 5:13–30, 1998.
- [TV97] Tarasov, V. - Varchenko, A. Geometry of q-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups. *Astérisque*, 246, 1997. [q-alg/9703044](#).
- [TV01] Tarasov, V. - Varchenko, A. Small elliptic quantum group $e_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_n)$. *Moscow Math. J.*, 1 (2), 2001. [QA/0011145](#).
- [WW] Whittaker, E.T. - Watson, G.N. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 1902.