

SEMI-GRUPOS MULTIPARAMÉTRICOS
APROXIMAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA E
A TEORIA DE INTERPOLAÇÃO PARA
 2^{a} ESPAÇOS DE BANACH

OLIVIO AUGUSTO WEBER



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

88s

28/BC

SEMI-GRUPOS MULTIPARAMÉTRICOS,
APROXIMAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA E
A TEORIA DE INTERPOLAÇÃO PARA
 2^n ESPAÇOS DE BANACH

OLIVIO AUGUSTO WEBER

Tese apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Ciência da
Computação da Universidade Estadual
de Campinas, como requisito parcial
para a obtenção do título de Doutor
em Matemática.

ORIENTADOR: PROF.DR: DICESAR LASS FERNANDEZ

Dezembro de 1983

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dicesar Lass Fernandez, pelo trabalho de dedicado e seguro de orientação, pela sua amizade e o que tem feito por nós ao longo de todos estes anos, a começar em 1974, quando nos conhecemos.

Aos colegas, em especial, ao Ulysses Sodré, pelas sugestões e pela pacienciosa ajuda em muitos fastidiosos cálculos.

Ao Prof. H. Berens (Universität Erlangen-Nürnberg) pela prontidão com que respondeu a consulta nossa e pelas várias sugestões dadas e ao Prof. D. Mangeron (Iasi-Romania) pelo imediato atendimento na solicitação de trabalhos importantes para a realização deste estudo e não disponíveis no Brasil.

A Universidade Estadual de Londrina, na pessoa dos seus dirigentes, pelo apoio dado.

Ao CNPq, que por determinado período forneceu su-porte financeiro.

A minha esposa Iza e meus filhos Glauco, Gustavo e Priscila, cujos motivos de agradecimento se fazem desnecessários mencionar.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para viabilizar este trabalho.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	II
CAPÍTULO I: SEMI-GRUPOS n -PARAMÉTRICOS	1
1.1 Definições e propriedades básicas	1
1.2 O problema dos geradores infinitesimais	4
CAPÍTULO II: SEMI-GRUPOS MULTIPARAMÉTRICOS DE OPERADORES DUAIS	19
2.1 Definições e propriedades básicas	19
2.2 O problema dos geradores infinitesimais	22
CAPÍTULO III: CLASSES DE FAVARD DE PROCESSOS DE APROXIMAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA	33
3.1 A soma booleana de processos de aproximação	33
3.2 Ordem de saturação biparamétrica e classes de Favard	35
CAPÍTULO IV: SATURAÇÃO PARA SEMI-GRUPOS MULTI- PARAMÉTRICOS DUAIS	46
4.1 Preliminares	46
4.2 O teorema de saturação para semi-grupo duais	47
CAPÍTULO V: A TEORIA DOS ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO ENTRE 2^n ESPAÇOS DE BANACH	51
5.1 Definição básicas	51
5.2 As normas funcionais $K(t;x)$ e $J(t;x)$	54
5.3 Os espaços $(E_k k \in \mathbb{N})_{\theta, q, K}$	54
5.4 A discretização do K-método	56

5.5 Os espaços $(E_k k \in \mathbb{Q})_{0, Q, J}$	56
5.6 A discretização do J-método	58
5.7 A identidade entre os métodos K e J	58

CAPÍTULO VI: ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO E SEMI-

GRUPOS

	61
6.1 Espaços de Banach $X(A, R, Q)$ gerados por <u>se</u> mi-grupos biparamétricos de operadores	61
6.2 Os espaços $X(A, R, Q)$ e sua relação com os espaços de interpolação	84

CAPÍTULO VII: APLICAÇÕES

	93
7.1 O semi-grupo das Translações	93
7.2 O semi-grupo de Gauss-Weierstrass	106
7.3 O semi-grupo de Cauchy-Poisson	125

APÊNDICE: SEMI-GRUPOS DE OPERADORES UNI-PARA-

MÉTRICOS

	153
--	-----

BIBLIOGRAFIA

157

INTRODUÇÃO

A teoria de interpolação teve os seus fundamentos assentados na década de 60, especialmente através dos trabalhos de J.L. Lions e J. Peetre (Ver [22], [26]) e teve um rápido desenvolvimento.

A teoria inicial de J.L. Lions e J. Peetre envolvia dois espaços normados e um parâmetro.

Extensões dos chamados K- e J- métodos de Lions-Peetre, considerando $n+1$ espaços e n parâmetros foram considerados por Johnen [20] e Sparr [28].

Um aspecto fundamental do K- e o J- método de interpolação de Lions-Peetre é que, mediante pequenas restrições nos parâmetros, geram os mesmos espaços. Isto é fundamental, tanto nos aspectos teóricos como nas aplicações, porque esta equivalência entre os métodos permite demonstrar resultados de reiteração e dualidade, por um lado, e por outro lado, permite estudar teoremas de aproximação diretos e inversos (Ver [26]). Isto já não se passa com as teorias para $n+1$ espaços e n parâmetros (Ver [28], [30]).

D.L. Fernandes, em sua tese de Doutorado, em 1974 ([11]) e em uma série de trabalhos complementares (Ver [12], [13], [14], [15] e [16]) desenvolveu uma teoria de interpolação para 2^n espaços de Banach e n - parâmetros, onde a equivalência dos K- e J- métodos e suas consequências continuam válidas.

Entre as inúmeras aplicações, Lions-Peetre estudaram os chamados $X_{\alpha, r, q}$ espaços de Banach gerados por semi-grupos de operadores e os caracterizaram como espaços de interpolação (Ver [23], [24]).

Um dos objetivos do nosso trabalho é estudar a conexão existente entre uma generalização dos espaços $X_{\alpha, r, q}$, obtida mediante a consideração de semi-grupos multiparamétricos, e os espaços de interpolação obtidos via teoria de Fernandez.

Por outro lado, P.L. Butzer, formulou em 1956, o conceito de saturação para semi-grupos de operadores em espaços de Banach (Ver [04], [05]).

Visamos também, neste trabalho, estender o conceito de saturação de Butzer para processos de aproximação biparamétricos e caracterizar as chamadas classes de saturação ou de Favard no caso dos processos de aproximação gerados por semi-grupos biparamétricos.

Faremos, a seguir, uma descrição rápida dos diversos capítulos que compõem este trabalho.

No capítulo I, apresentamos o conceito de semi-grupo n -paramétrico e fizemos um estudo detalhado das suas propriedades fundamentais. Com o objetivo de estabelecer as conexões com a teoria de saturação, introduzimos um conceito de gerador infinitesimal diferente do habitual, que levasse em consideração o comportamento das chamadas diferenças mistas, o que foi feito inspirando-nos na experiência acumulada neste setor do grupo de Fernandez.

No capítulo II, estudamos o problema da dualidade dos semi-grupos n -paramétricos, que se reveste de especial importância no caso dos espaços não reflexivos.

No capítulo III, introduzimos o conceito de saturação para processos de aproximação biparamétricos e o fizemos em dois sentidos: o sentido restrito e o sentido amplo e caracterizamos as suas respectivas classes de saturação.

No capítulo IV estudamos o problema da saturação em espaços não reflexivos, com a passagem ao dual.

No capítulo V, com o objetivo de tornar este trabalho didaticamente mais completo, apresentamos um resumo dos conceitos e resultados básicos da teoria de interpolação de Fernandez.

No capítulo VI, que é um dos centrais deste trabalho, generalizamos os espaços $X_{\alpha, r, q}$ de Lions-Peetre e estabelecemos as suas conexões com os espaços de interpolação multi-paramétricos de Fernandez.

No capítulo VII, o final, procuramos estudar os semi-grupos biparamétricos das translações, de Gauss-Weierstrass e de Cauchy-Poisson, para podermos visualizar de forma concreta a estrutura estabelecida no capítulo I.

Considerando que a teoria dos semi-grupos n -paramétricos está estreitamente relacionada com a teoria dos semi-grupos uniparamétricos, apresentamos um apêndice, com as definições e resultados básicos desta teoria.

Queremos observar que não consideramos este trabalho completo. O tema está longe de ser exaurido, pelo contrário, consideramos este trabalho uma exploração inicial de um campo bastante rico e o que foi feito até agora, foi essencialmente, estruturar a exploração futura, definindo uma linha de ação.

Finalmente, queremos ressaltar que, ao escrevermos este trabalho, além da preocupação de produzir um trabalho científico, sempre tivemos a preocupação de que fosse didaticamente bom. Procuramos não poupar detalhes, talvez pecan

do por excesso, fazendo, na medida do possível, todas as demonstrações, mesmo as consideráveis elementares.

CAPÍTULO I

SEMI-GRUPOS n -PARAMÉTRICOS

Neste primeiro capítulo procuramos assentar os conceitos básicos dos semi-grupos multiparamétricos e deixar bem clara a sua estreita conexão com os semi-grupos uniparamétricos.

Em virtude desta conexão, os trabalhos existentes na literatura especializada e que são do nosso conhecimento, tratam do problema, que poderia ser chamado de iterativo.

Tendo em vista o objetivo de estabelecer conexões com a teoria de interpolação de Fernandez e a teoria de saturação de Butzer sentimos a necessidade de estudar o comportamento das chamadas diferenças mistas. Nesta linha introduzimos um conceito de gerador infinitesimal diferente do habitual (Ver [06],[21]) que caracterizasse melhor esta problemática. Procuramos ainda fazer uma análise sobre as duas formas de tratamento: o processo iterativo e a análise "global" das diferenças mistas.

1.1. Definições e Propriedades Básicas

1.1.1. Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano n -dimensional com a métrica e as definições das operações aritméticas usuais.

Seja $\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t_k < \infty \text{ } k=1, \dots, n\}$

X um espaço de Banach real ou complexo e se-

$\mathcal{L}(X)$ de Banach dos endomorfismos de X .

1.1.2. Definição: Uma família de operadores lineares limitados $\{T(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ de X em X é chamada de semi-grupo n -paramétrico de classe (C_0) em $L(X)$, se as seguintes condições são satisfeitas

$$T(s+t) = T(s)T(t) \quad (s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n) \quad (1)$$

$$T(0) = I \quad (2)$$

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{\substack{t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n \\ t \rightarrow 0}} T(t)f &= f \quad (f \in X) \end{aligned} \quad (3)$$

1.1.3. Proposição: Se $\{T(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ é um semi-grupo n -paramétrico de classe (C_0) em $L(X)$, então existem n semi-grupos uniparamétricos $\{T_k(t_k) : 0 \leq t_k < \infty\}$ de classe (C_0) em $L(X)$, tais que

$$T(t) = \prod_{k=1}^n T_k(t_k) \quad (1)$$

Os operadores $T_k(t_k)$, $0 \leq t_k < \infty$ ($k = 1, \dots, n$) comutam um com o outro.

Demonstração: Basta tomar $T_k(t_k) = T(t_k e_k)$, onde $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ é o k -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, vale:

1.1.4. Proposição: Se $\{T_i(t_i) : 0 \leq t_i < \infty\}$ ($i = 1, \dots, n$) são n semi-grupos uniparamétricos de classe (C_0) em $L(X)$ tais que

$$T_i(t_i)T_j(t_j) = T_j(t_j)T_i(t_i) \quad (i, j=1, \dots, n; i \neq j) \quad (1)$$

para todo $0 \leq t_i < \infty$ e todo $0 \leq t_j < \infty$, então.

$$T(t) = \prod_{i=1}^n T_i(t_i), \quad t = (t_1, \dots, t_n)$$

é um semi-grupo n-paramétrico de classe (C_0) em $L(X)$.

Demonstração: A propriedade 1.1.2 (1) segue imediatamente da correspondente propriedade dos semi-grupos unidimensionais e da hipótese 1.1.4 (1).

A verificação de 1.1.2 (2) é imediata.

Das propriedades dos semi-grupos unidimensionais segue que existem constantes $M_i > 0$ tais que

$$\|T_i(t_i)\| \leq M_i \quad \text{para} \quad t_i \in [0, 1] \quad (3)$$

Temos

$$\|T(t)f - f\| = \left\| \prod_{i=1}^n T_i(t_i)f - T_1(t_1)f + T_1(t_1)f - f \right\| \leq$$

$$M_1 \left\| \prod_{i=2}^n T_i(t_i)f - f \right\| + \|T_1(t_1)f - f\|$$

Procedendo assim iteradamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|T(t)f - f\| &\leq M_1 \dots M_{n-1} \|T_n(t_n)f - f\| + \dots + \\ &M_1 \|T_2(t_2)f - f\| + \|T_1(t_1)f - f\| \end{aligned} \quad (4)$$

$t_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$. Logo 1.1.2 (3) é também verificada.

1.1.5. Observação: Em particular, deduz-se do teorema 1.4 que, se uma família de operadores $\{T(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ em $L(X)$ satisfaz as condições 1.1.2 (1) e 1.1.2 (2) e se

$$s - \lim_{t_j \rightarrow 0_+} T(t_j e_j) f = f \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1)$$

Então,

$$s - \lim_{\substack{t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n \\ t \rightarrow 0}} T(t) f = f \quad (2)$$

Ou seja, a família $\{T(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ é um semi-grupo n -paramétrico de classe (C_0) em $L(X)$.

1.2. O Problema dos Geradores Infinitesimais

Seja A_k o gerador infinitesimal de $\{T_k(t_k) : 0 \leq t_k < \infty\}$ com domínio $D(A_k)$, $k = 1, \dots, n$.

1.2.1. Proposição: a) $\|T(t)\|$ é limitado em todo retângulo limitado de $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ e, para cada $f \in X$, a aplicação

$$t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n \rightarrow T(t)f$$

é contínua, na topologia forte, em $\overline{\mathbb{R}}_+^n$.

b) Se $f \in D(A_k)$, então $T(t)f \in D(A_k)$ para todo $t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ e

$$A_k T(t)f = T(t)A_k f \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1)$$

c) $\bigcap_{k=1}^n D(A_k)$ é um subespaço denso de X e $\tilde{E}$ de Banach sob a norma

$$\|f\|_{\bigcap_{k=1}^n D(A_k)} = \|f\| + \sum_{k=1}^n \|A_k f\| \quad (2)$$

d) Se $f \in D(A_j) \cap D(A_j A_k)$, então $f \in D(A_k A_j)$ e $A_k A_j f = A_j A_k f$ ($j, j = 1, \dots, n; j \neq k$).

Demonstração: a) Como $T(t) = \prod_{k=1}^n T_k(t_k)$, temos que

$\|T(t)\| \leq \prod_{k=1}^n \|T_k(t_k)\|$ e $\|T_k(t_k)\|$ é limitado em cada intervalo limitado de $[0, \infty)$ (Ver Apêndice, Proposição 3). Além disso, para cada $k = 1, \dots, n$, a aplicação

$$t_k \in [0, \infty) \rightarrow T_k(t_k)f$$

$f \in X$, é contínua. (Ver Apêndice, Proposição 3). Logo

$$t \in \mathbb{R}_+^n \rightarrow T(t)f = \prod_{k=1}^n T_k(t_k)f$$

$f \in X$, é contínua.

b) Temos

$$\begin{aligned} A_k(\tau)T(t)f &= \frac{T(\tau e_k) - I}{\tau} T(t)f \\ &= T(t) \frac{T(\tau e_k) - I}{\tau} f \end{aligned}$$

Como o operador $T(t)$ é contínuo e $\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_k(\tau)f$ existe, temos

$$A_k T(t)f = T(t)A_k f \quad (f \in D(A_k))$$

c) Sejam $f \in X$ e $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Consideremos

$$f_t = \frac{1}{t_1 \dots t_n} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} T(s)f \, ds_1 \dots ds_n \quad (3)$$

Como, para todo $f \in X$, a aplicação

$$s \in \mathbb{R}_+^n \rightarrow T(s)f$$

é fortemente contínua, a integral está bem definida.

De 1.1.2 (3) segue imediatamente que f_t converge para f , quando $t \rightarrow 0$, $t \in \mathbb{R}_+^n$.

Mostremos agora que $f_t \in \bigcap_{k=1}^n D(A_k)$, para todo t em $\mathbb{R}_+^n$. Como

$$\begin{aligned} A_k(\tau)f_t &= \frac{T(\tau e_k) - I}{\tau} f_t \\ &= \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{t_1 \dots t_n} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} [T(s + \tau e_k) - T(s)]f \, ds \\ &= \frac{1}{\tau t_1 \dots t_n} \int_0^{t_1} \dots \int_{\tau}^{t_k + \tau} \dots \int_0^{t_n} T(s)f \, ds_1 \dots ds_n \\ &\quad - \frac{1}{\tau t_1 \dots t_n} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} T(s)f \, ds_1 \dots ds_n \\ &= \frac{1}{t_1 \dots t_n \tau} \int_0^{t_1} \dots \int_{t_k}^{t_k + \tau} \dots \int_0^{t_n} T(s)f \, ds_1 \dots ds_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t_1 \dots t_n \tau} \int_0^{t_1} \dots \int_0^\tau \dots \int_0^{t_n} T(s) f ds_1 \dots ds_n \\
&= \frac{1}{t_1 \dots t_n \tau} \int_0^{t_1} \dots \int_0^\tau \dots \int_0^{t_n} [T(s+t_k e_k) - T(s)] f ds \\
&= A_k(t_k) f(t_1, \dots, t_{k-1}, \tau, t_{k-1}, \dots, t_n)
\end{aligned}
\tag{4}$$

obtemos

$$s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_k(\tau) f_t = s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_k(t_k) f(t_1, \dots, t_{k-1}, \tau, t_{k+1}, \dots, t_n)
\tag{5}$$

Mas

$$\begin{aligned}
s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0} f(t_1, \dots, t_{k-1}, \tau, t_{k+1}, \dots, t_n) &= f(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n) = \\
&= \frac{1}{t_1 \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_n} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \int_0^{t_{k+1}} \dots \int_0^{t_n} T(s_1, \dots, s_{k-1}, 0, s_{k+1}, \dots, s_n) f ds \\
&\quad ds_{k-1} ds_{k+1} \dots ds_n
\end{aligned}
\tag{6}$$

Pois,

$$\|T(s_1, \dots, s_k, \dots, s_n) f - T(s_1, \dots, s_{k-1}, 0, s_{k+1}, \dots, s_n) f\|
\tag{7}$$

converge para zero, quando $s_k \rightarrow 0_+$. Como $A_k(t_k)$ é um operador contínuo, concluímos que

$$s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_k(\tau) f_t = A_k(t_k) f(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n) \quad (8)$$

Para todo $t \in \mathbb{R}_+^n$ e $k = 1, \dots, n$.

Afirmamos também que $\bigcap_{k=1}^n D(A_k)$ é um espaço de Banach sob a norma

$$\|f\|_{D(A_k)} = \|f\|_X + \sum_{k=1}^n \|A_k f\|_X$$

Com efeito, seja (f_j) uma sequência de Cauchy em $\bigcap_{k=1}^n D(A_k)$. Então (f_j) e $(A_k f_j)$ são sequências de Cauchy em X ($k=1, \dots, n$). Logo, f_j converge para $f \in X$ e $A_k f_j$ converge para $g_k \in X$. Como A_k é fechado, $k = 1, \dots, n$, vamos ter

$$f \in \bigcap_{k=1}^n D(A_k) \quad \text{e} \quad g_k = A_k f$$

Portanto

$$\|f_j - f\|_{\bigcap_{k=1}^n D(A_k)} = \|f_j - f\|_X + \sum_{k=1}^n \|A_k(f_j - f)\|_X$$

Converge para zero, quando $j \rightarrow \infty$.

d) Temos

$$\begin{aligned} A_j A_k f &= s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_j(\tau) A_k f \\ &= s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_j(\tau) (s\text{-}\lim_{\sigma \rightarrow 0_+} A_k(\sigma) f) \\ &= s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} (s\text{-}\lim_{\sigma \rightarrow 0_+} A_j(\tau) A_k(\sigma) f) \quad (A_j(\tau) \text{ é contínuo}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} (s\text{-}\lim_{\sigma \rightarrow 0_+} A_k(\sigma) A_j(\tau) f) \\
&= s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_k A_j(\tau) f \\
&= A_k A_j f,
\end{aligned}$$

pois $s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A_j(\tau) f$ existe e A_k é fechado.

A demonstração está completa.

1.2.2. Consideremos agora um semi-grupo biparamétrico

$\{T(t) : t \in \bar{\mathbb{R}}_+^2\}$ de classe (C_0) em $L(X)$ e sejam A_{10} e A_{01} , respectivamente, os geradores infinitesimais dos semi-grupos uniparamétricos:

$$\{T(t_1)e_1\} = T_1(t_1) \quad ; \quad 0 \leq t_1 < \infty \quad (1)$$

$$\{T(t_2)e_2\} = T_2(t_2) \quad ; \quad 0 \leq t_2 < \infty \quad (2)$$

1.2.3. Proposição: Se $f \in D(A_{10}) \cap D(A_{10}A_{01})$, então $T(t)f \in D(A_{10}) \cap D(A_{10} \cdot A_{01})$ para todo t em $\bar{\mathbb{R}}_+^2$ e

$$T(t)A_{10}A_{01}f = A_{10}A_{01}T(t)f \quad (1)$$

e

$$[T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I]f =$$

$$\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)A_{10}A_{01}f \, du dv \quad (2)$$

Demonstração: a) Por 1.2.1 (b), $T(t)f \in D(A_{10}) \cap D(A_{01})$, para todo $t \in \mathbb{R}_+^2$, e

$$A_{10}T(t)f = T(t)A_{10}f \quad (2)$$

$$A_{01}T(t)f = T(t)A_{01}f \quad (3)$$

Como $A_{01}f \in D(A_{10})$, novamente, por 1.2.1 (2) $T(t)A_{01}f \in D(A_{10})$ e

$$A_{10}T(t)A_{01}f = T(t)A_{10}A_{01}f \quad (4)$$

De (3) e (4) segue que $T(t)f \in D(A_{10}A_{01})$ e

$$A_{10}A_{01}T(t)f = T(t)A_{10}A_{01}f$$

b) Por hipótese $f \in D(A_{10})$. Então

$$[T_1(t_1) - I]f = \int_0^{t_1} T_1(u)A_{10}f \, du \quad (5)$$

Por outro lado $[T_1(t_1) - I]f \in D(A_{01})$, para todo $t_1 \in \mathbb{R}_+$. Assim

$$\begin{aligned} [T_2(t_2) - I][T_1(t_1) - I]f &= \int_0^{t_2} T_2(v)A_{01}[T_1(t_1) - I]f \, dv \\ &= \int_0^{t_2} A_{01}T_2(v) \left[\int_0^{t_1} T_1(u)A_{10}f \, du \right] dv \\ &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)A_{01}A_{10}f \, dudv \end{aligned}$$

pois $T_2(v) \in L(X)$ e $A_{10}f \in D(A_{01})$. cq.d

1.2.4. Se $f \in D(A_{10}) \cap D(A_{10}A_{01})$, então segue, imediatamente, de 1.2.3 (2) e da continuidade forte do semi-grupo $\{T(t) : t \in \bar{\mathbb{R}}_+^2\}$ na origem que, o limite duplo

$$\text{s-lim}_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} \frac{[T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I]f}{t_1 t_2} \quad (1)$$

existe e é igual a $A_{10}A_{01}f = A_{01}A_{10}f$.

Uma pergunta que formulamos neste momento é a seguinte: Se o limite duplo (1) existe, então $f \in D(A_{10}) \cap D(A_{10}A_{01})$? Vejamos

1.2.5. Definição: Seja $\{T(t) : t \in \bar{\mathbb{R}}_+^2\}$ um semi-grupo biparamétrico de classe $[C_0]$ em $L(X)$. Seja

$$D(A_{11}) = \{f \in X \mid \text{s-lim}_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} \frac{[T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I]f}{t_1 t_2} \text{ existe}\}$$

Definimos, para $f \in D(A_{11})$,

$$A_{11}f = \text{s-lim}_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} \frac{[T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I]f}{t_1 t_2}$$

1.2.6. Proposição: a) $D(A_{11})$ é um subespaço de X e A_{11} é um operador linear.

b) Se $f \in D(A_{11})$, então $T(t)f \in D(A_{11})$ para todo $t \in \bar{\mathbb{R}}_+^2$ e

$$A_{11}T(t)f = T(t)A_{11}f \quad (1)$$

c) Para toda $f \in X$ e todo $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2$, a integral

$$\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)f \, dudv$$

pertence ao domínio do operador A_{11} e

$$[T_1(t_1)-I][T_2(t_2)-I]f = A_{11} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)f \, dudv \quad (2)$$

Além disso, se $f \in D(A_{11})$, então

$$[T_1(t_1)-I][T_2(t_2)-I]f = \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)A_{11}f \, dudv$$

d) $D(A_{11})$ é denso em X e A_{11} é um operador fechado.

Demonstração: a) Segue imediatamente da definição 1.2.5 e da linearidade dos elementos do semi-grupo.

b) Suponhamos que $f \in D(A_{11})$. Temos

$$\frac{[T_1(s_1)-I][T_2(s_2)-I]}{s_1 s_2} T(t)f =$$

$$T(t) \frac{[T_1(s_1)-I][T_2(s_2)-I]}{s_1 s_2} f$$

Donde, pela continuidade do operador $T(t)$, segue o resultado.

c) Temos

$$\begin{aligned} & [T_1(s_1) - I][T_2(s_2) - I] \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)f \, dudv = \\ & = [T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I] \int_0^{s_2} \int_0^{s_1} T_1(u)T_2(v)f \, dudv, \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} & s\text{-}\lim_{\substack{s_1 \rightarrow 0_+ \\ s_2 \rightarrow 0_+}} \frac{1}{s_1 s_2} \int_0^{s_2} \int_0^{s_1} T_1(u)T_2(v)f \, dudv = f \end{aligned}$$

e $T(t) \in L(X)$, para todo $t \in \mathbb{R}_+^2$, vemos que

$$s\text{-}\lim_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_2 \rightarrow 0}} A_{10}(s_1)A_{01}(s_2) \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)f \, dudv =$$

$$[T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I]f, \quad \forall f \in X \quad (4)$$

o que demonstra (2).

Suponhamos agora que $f \in D(A_{11})$. Então

$$s\text{-}\lim_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_2 \rightarrow 0}} A_{10}(s_1)A_{01}(s_2) \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)f \, dudv =$$

$$\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)A_{11}f \, dudv \quad (5)$$

Com efeito

$$\left\| \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)[A_{10}(s_1)A_{01}(s_2) - A_{11}]f \, dudv \right\| \leq$$

$$\sup_{\substack{0 \leq u \leq t_1 \\ 0 \leq v \leq t_2}} \{ \|T_1(u)\| \|T_2(v)\| \|A_{10}(s_1)A_{01}(s_2)f - A_{11}f\| \} t_1 t_2$$

converge para zero, quando $s_1 \rightarrow 0_+$ e $s_2 \rightarrow 0_+$. Portanto (4) e (5) demonstram (3).

d) Mostremos que $D(A_{11})$ é denso em X . Seja $f \in X$. Consideremos

$$f_{t_1 t_2} = \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u) T_2(v) f \, du dv \quad (6)$$

Temos que

$$\|f_{t_1 t_2} - f\| \leq \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \|T_1(u) T_2(v) f - f\| \, du dv \quad (7)$$

converge para zero, quando $t_1 \rightarrow 0_+$ e $t_2 \rightarrow 0_+$. Além disso $f_{t_1 t_2} \in D(A_{11})$, para todo $t_1, t_2 > 0$. De fato, temos

$$A_{10}(s_1)A_{01}(s_2)f_{t_1 t_2} = A_{10}(t_1)A_{01}(t_2)f_{s_1 s_2}$$

Donde concluímos que

$$\text{s-lim}_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_2 \rightarrow 0}} A_{10}(s_1)A_{01}(s_2)f_{t_1 t_2} = A_{10}(t_1)A_{01}(t_2)f$$

Finalmente, mostremos que A_{11} é fechado.

Seja $\{f_n\} \subset D(A_{11})$ tal que f_n converge para f e $A_{11}f_n$ converge para g . Então

$$\begin{aligned} \|T_1(u)T_2(v)A_{11}f_{11} - T_1(u)T_2(v)g\| &\leq \\ &\leq Me^{w_1 t_1 + w_2 t_2} \|A_{11}f_n - g\| \end{aligned}$$

converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em relação a (u,v) no compacto $[0, t_1] \times [0, t_2]$. Assim, por 1.2.6 (3), obtemos

$$\begin{aligned} [T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I]f &= \lim_{n \rightarrow \infty} [T_1(t_1) - I][T_2(t_2) - I]f_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)A_{11}f_n \, dudv \\ &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u)T_2(v)g \, dudv. \end{aligned}$$

Donde segue que,

$$f \in D(A_{11}) \quad \text{e} \quad A_{11}f = g.$$

1.2.7. Proposição: $\bigcap_{k \in \square} D(A_k)$ é um espaço de Banach sob a norma

$$\|f\|_{\bigcap_{k \in \square} D(A_k)} = \sum_{k \in \square} \|A_k f\|, \text{ onde } A_{00} = I.$$

$$\square = \{(00), (01), (10), (11)\}.$$

Demonstração: Segue imediatamente do fato de A_k , $k \in \square$, ser fechado.

1.2.6. Observação: Como, para cada $f \in X$,

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \rightarrow 0+} \lim_{t_2 \rightarrow 0+} \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u) T_2(v) f \, du dv &= \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow 0+} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} T_1(u) f \, du = f \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \rightarrow 0+} \lim_{t_2 \rightarrow 0+} \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_1(u) T_2(v) f \, du dv &= \\ \lim_{t_1 \rightarrow 0+} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} T_2(v) f \, dv &= f \end{aligned}$$

em virtude da representação integral 1.2.6 (3) vemos claramente que, se $f \in D(A_{11})$, então

$$s\text{-}\lim_{t_1 \rightarrow 0+} \lim_{t_2 \rightarrow 0+} A_{10}(t_1) A_{01}(t_2) f =$$

$$s\text{-}\lim_{t_2 \rightarrow 0+} \lim_{t_1 \rightarrow 0+} A_{10}(t_1) A_{01}(t_2) f = A_{11} f$$

No entanto, nada podemos afirmar sobre a existência dos limites

$$s\text{-}\lim_{t_1 \rightarrow 0+} A_{10}(t_1) f \tag{1}$$

$$s\text{-}\lim_{t_2 \rightarrow 0+} A_{01}(t_2) f \tag{2}$$

Por outro lado, temos imediatamente

1.2.9. Proposição: Se $f \in D(A_{11})$ e se os limites 1.12 (1) e 1.13 (2) existem, então $f \in D(A_{10}A_{01}) \cap D(A_{01}A_{10})$ e

$$A_{11}f = A_{10}A_{01}f = A_{01}A_{10}f.$$

1.2.10. Observação: É oportuno lembrar aqui um resultado devido a W. Kohnen (Ver [21]) e que será muito explorado por nós no capítulo final.

O teorema é bem geral e destacamos uma de suas consequências, que diz o seguinte:

Se $\{T(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ é um semi-grupo de classe (C_0) uniformemente limitado, isto é,

$$\|T(t)\| \leq K, \quad (t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n)$$

e se X é um espaço reflexivo, então

$$D(A_{10}^n A_{01}^m) = D(A_{01}^m A_{10}^n) \quad (1)$$

Para finalizar este capítulo, apresentamos uma generalização da proposição 7 do Apêndice. (Ver [17]).

1.2.11. Proposição: Seja $r = (r_1, r_2)$, $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. $D(A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2})$ é um subespaço de X e $A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2}$ é um operador linear tal que

$$b) \frac{\partial^{r_1} T(t) f}{\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2}} = A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2} T(t) f \quad (1)$$

$$c) [T_1(t_1) - I]^{r_1} [T_2(t_2) - I]^{r_2} f =$$

$$\int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_1} T_1(u_1 + \dots + u_{r_1}, v_1 + \dots + v_{r_2}) A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2} f \, du_1 \dots du_{r_1} \dots dv_{r_1} \dots dv_{r_2}$$

(2)

para todo $f \in D(A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2} f)$. Mas ainda $A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2}$ é um operador fechado e $D(A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2})$ é um espaço de Banach sob a norma

$$\|f\|_{D(A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2})} = \|f\| + \|A_{01} f\| + \|A_{01}^2 f\| + \dots +$$

$$\|A_{01}^{r_2} f\| + \|A_{10} A_{01}^{r_2} f\| + \dots + \|A_{10}^{r_1} A_{01}^{r_2} f\|.$$

(3)

CAPÍTULO II

SEMI-GRUPOS MULTIPARAMÉTRICOS DE OPERADORES DUAIS

Neste capítulo apresentamos essencialmente a versão biparamétrica da teoria dos semi-grupos de operadores duais uniparamétricos, como é desenvolvida por P.L. Butzer e H. Berens na seção 1.4 da referência [06]. Observamos que Butzer e Berens se basearam, por sua vez, nos trabalhos de K. de Leeuw e R.S. Phillips (ver [06] seção 1.6).

2.1. Definição e Propriedades Básicas

2.1.1. Seja X um espaço de Banach real ou complexo.

Seja $\{T(t): t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ um semi-grupo n -paramétrico de classe (C_0) em $L(X)$.

Seja X^* o espaço dual (ou adjunto) de todos os funcionais lineares contínuos f^* definidos em X . X^* é um espaço de Banach sob a norma

$$\|f^*\| = \sup\{|\langle f^*, f \rangle|, \|f\| \leq 1, f \in X\}$$

Para nos situarmos bem, lembremos a seguinte definição

2.1.2. Definição: Seja U um operador linear de X em X com domínio denso em X . O dual (ou adjunto) U^* de U é o operador cujo domínio $D(U^*)$ consiste em todos os elementos $f^* \in X^*$ para os quais existe $g^* \in X^*$ tal que

$$\langle g^*, f \rangle = \langle f^*, Uf \rangle \quad ;$$

para todo $f \in D(U)$. Neste caso definimos

$$U^*f^* = g^* = f^* \circ U \quad (1)$$

e então

$$D(U^*) = \{f^* \in X^* \mid f^* \circ U \in X^*\}$$

A seguinte proposição, fundamental no nosso contexto, é clássica e pode ser encontrada em textos de Análise Funcional. Por esta razão omitimos a sua demonstração. Veja, por exemplo, [06]

2.1.3. Proposição: Seja U um operador linear de X em X , com domínio $D(U)$ denso em X . Então,

- a) O dual U^* é um operador linear ω^* -fechado. Se U é limitado, então $U^* \in L(X^*)$ e $\|U^*\| = \|U\|$.
- b) Se U é fechado, então $D(U^*)$ é ω^* -denso em X^* e, se X é reflexivo, $D(U^*)$ é denso em X^* , na topologia da norma.

2.1.4. Proposição: Seja $\{T(t): t \in \mathbb{R}_+^n\}$ um semi-grupo n -paramétrico de operadores de classe (C_0) em $L(X)$. Então, $T^*(t) \in L(X^*)$ e, $\|T^*(t)\| = \|T(t)\|$ para todo $t \in \mathbb{R}_+^n$. Além disso

$$T^*(s+t) = T^*(s) \cdot T^*(t) \quad , \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+^n \quad (1)$$

$$T^*(0) = I^* \quad (\text{identidade em } X^*) \quad ; \quad (2)$$

$$\omega^* - \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}_+^n}} T^*(t)f^* = f^* \quad , \quad \text{para toda } f^* \in X^* \quad (3)$$

(continuidade ω^* de $T^*(t)$ na origem).

Demonstração: Para cada $t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ fixado, $T^*(t)$ define, pela proposição 2.3 (a), uma transformação linear limitada de X^* em X^* , com $\|T^*(t)\| = \|T(t)\|$.

As relações (1) e (2) são consequência imediata da definição de operador dual.

Também

$$|\langle T^*(t)f^* - f^*, f \rangle| = |\langle f^*, T(t)f - f \rangle| \leq \|f^*\| \|T(t)f - f\|$$

Portanto

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n}} \langle T^*(t)f^* - f^*, f \rangle = 0 \quad ,$$

para todo $f \in X$ e todo $f^* \in X^*$, o que demonstra (3).

2.1.5. Observação: Pelas propriedades i) e ii) de 2.4 (1) vemos que $\{T^*(t): t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ define um semi-grupo de operadores em $L(X^*)$ que, em geral, não é de classe (C_0) . Mas, como a função

$$t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n \rightarrow T(t)f \quad , \quad (f \in X)$$

é contínua na topologia da norma para toda função $f \in X$, se-

gue imediatamente que, a aplicação

$$t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n \rightarrow T^*(t)f^* \quad (f^* \in X^*)$$

é ω^* -contínua para toda $f^* \in X$. Assim, diremos que $\{T^*(t): t \in \overline{\mathbb{R}}_+^n\}$ é um semi-grupo ω^* -contínuo ou um semi-grupo de classe $(C_0)^*$ em $L(X^*)$.

2.2. O Problema dos Geradores Infinitesimais

2.2.1. Proposição: Seja $\{T(t): t \in \overline{\mathbb{R}}_+^2\}$ um semi-grupo biparamétrico de classe (C_0) em $L(X)$. Então,

- a) O dual A_{11}^* do gerador infinitesimal A_{11} é um operador linear ω^* -fechado e $D(A_{11}^*)$ é ω^* -denso em X^* .
 b) Se $f^* \in D(A_{11})$, então $T^*(t)f^* \in D(A_{11}^*)$ para todo $t \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$ e $A_{11}^* T^*(t)f^* = T^*(t)A_{11}^* f^*$. Além disso,

$$\begin{aligned} & \langle [T_1^*(t_1) - I^*][T_2^*(t_2) - I^*]f^*, f \rangle = \\ & \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \langle T^*(u,v)A_{11}^* f^*, f^* \rangle du dv \end{aligned} \quad (1)$$

($f \in X$, $t = (t_1, t_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$).

- c) Seja $f^* \in X^*$. Então, $f^* \in D(A_{11}^*)$ se, e somente se, o limite

$$\omega^* - \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} (A_{10}(t_1)A_{01}(t_2))^* f^* =$$

$$= \omega^* \text{-} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} t_1^{-1} t_2^{-1} [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^*$$

existe e

$$\omega^* \text{-} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} (A_{10}(t_1) A_{01}(t_2))^* f^* = A_{11}^* \dot{f}^*$$

Demonstração: a) Como A_{11} é um operador fechado com $D(A_{11})$ denso em X , pela proposição 2.1.3., o dual A_{11}^* satisfaz as condições do item a).

b) Se $f^* \in D(A_{11}^*)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}_+^2$ e toda $f \in D(A_{11})$ temos, pela definição do adjunto e pela proposição 1.2.3 (b)

$$\begin{aligned} \langle T^*(t) A_{11}^* f^*, f \rangle &= \langle A_{11}^* f^*, T(t) f \rangle \\ &= \langle f^*, A_{11} T(t) f \rangle \\ &= \langle f^*, T(t) A_{11} f \rangle \\ &= \langle T^*(t) f^*, A_{11} f \rangle \end{aligned}$$

provando que, $T^*(t) f^* \in D(A_{11}^*)$ e

$$A_{11}^* T^*(t) f^* = T^*(t) A_{11}^* f^*$$

Além disso, para toda $f^* \in D(A_{11}^*)$ fixada, a função

$$t \in \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \langle T^*(t) A_{11}^* f^*, f \rangle$$

é contínua para toda $f \in X$. Com efeito

$$\begin{aligned} & \left| \langle T^*(t) A_{11}^* f^*, f \rangle - \langle T^*(t_0) A_{11}^* f^*, f \rangle \right| = \\ & = \left| \langle A_{11}^* f^*, T(t)f - T(t_0)f \rangle \right| \\ & \leq \|A_{11}^* f^*\| \|T(t)f - T(t_0)f\| \end{aligned}$$

e a última expressão converge para zero quando $t \rightarrow t_0$. Assim, para todo $t = [t_1, t_2] > 0$ ($t_1 > 0$, $t_2 > 0$)

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \langle T^*(u_1, u_2) A_{11}^* f^*, f \rangle du_1 du_2 = \\ & = \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} \langle A_{11}^* f^*, T(u_1, u_2)f \rangle du_1 du_2 \\ & = \langle A_{11}^* f^*, \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T(u_1, u_2)f du_1 du_2 \rangle \\ & = \langle f^*, A_{11} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T(u_1, u_2)f du_1 du_2 \rangle \\ & = \langle f^*, [T_1(t_1) - I] [T_2(t_2) - I] f \rangle \\ & = \langle [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^*, f \rangle \end{aligned}$$

o que prova (1)

c) Suponhamos que $f^* \in X^*$ seja tal que exista $g^* \in X^*$ satisfazendo

$$\omega^* - \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} (A_{10}(t_1)A_{01}(t_2))^* f^* = g^*$$

Portanto, para toda $f \in D(A_{11})$, temos

$$\langle g^*, f \rangle = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0_+ \\ t_2 \rightarrow 0_+}} \langle A_{10}(t_1)A_{01}(t_2)^* f^*, f \rangle$$

$$= \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0_+ \\ \sigma \rightarrow 0_+}} \langle f^*, A_{10}(t_1)A(t_2)f \rangle$$

$$= \langle f^*, A_{11}f \rangle$$

provando que $f^* \in D(A_{11}^*)$ e $A_{11}^* f^* = g^*$.

Reciprocamente, para toda $f^* \in D(A_{11}^*)$ fixada, pela relação

2.2.1 (1) obtemos

$$\langle (A_{10}(t_1)A_{01}(t_2))^* f^*, f \rangle =$$

$$= t_1^{-1} t_2^{-2} \langle [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^*, f \rangle$$

$$= t_1^{-1} t_2^{-1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \langle T^*(u_1, u_2) A_{11}^* f^*, f \rangle du_1 du_2$$

$$= t_1^{-1} t_2^{-1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \langle A_{11}^* f^*, T(u_1, u_2) f \rangle du_1 du_2$$

$$= \langle A_{11}^* f^*, t_1^{-1} t_2^{-1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T(u_1, u_2) f du_1 du_2 \rangle$$

para toda $f \in X$. Como

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0_+ \\ \sigma \rightarrow 0_+}} t_1^{-1} t_2^{-1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T(u_1, u_2) f \, du_1 du_2 = f$$

segue que

$$\lim \langle A_{10}(t_1) A_{01}(t_2) f^*, f \rangle = \langle A_{11}^* f^*, f \rangle$$

ou seja

$$\omega^* \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow 0}} (A_{10}(t_1) A_{01}(t_2)) f^* = A_{11}^* f^*$$

2.2.2. Corolário: O operador adjunto A_{11}^* é igual ao ω^* -gerador infinitesimal do semi-grupo dual.

2.2.3. Consideremos agora

$$X_{11}^* = \{f^* \in X^* \mid \lim_{t \rightarrow 0_+} \|T^*(t)f^* - T_1^*(t_1)f^* - T_2^*(t_2)f^* + f^*\| = 0\}$$

$$X_{10}^* = \{f^* \in X^* \mid \lim_{t_1 \rightarrow 0_+} \|T_1^*(t_1)f^* - f^*\| = 0\}$$

$$X_{01}^* = \{f^* \in X^* \mid \lim_{t_2 \rightarrow 0} \|T_2^*(t_2)f^* - f^*\| = 0\}$$

$$X_{00}^* = \{f^* \in X^* \mid \lim_{t \rightarrow 0} \|T^*(t)f^* - f^*\| = 0\}$$

Temos imediatamente que

$$X_{00}^* = X_{10}^* \cap X_{01}^* \quad (1)$$

e

$$X_{00}^* \subset X_{11}^* \quad (2)$$

2.2.4. Proposição: a) X_{00}^* , X_{10}^* , X_{01}^* e X_{11}^* são subespaços invariantes e fechados de X^* , na topologia da norma.

b) $D(A_{11}^*) \subset X_{11}^*$. Ainda mais,

$$\| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^* \| \leq$$

$$\sup_{\substack{0 \leq u \leq t_1 \\ 0 \leq v \leq t_2}} \{ \|T_1(u)\| \|T_2(v)\| \|A_{11}^* f^*\| t_1 \cdot t_2 \}.$$

c) Quando X é reflexivo, então

$$X_{11}^* = X_{10}^* = X_{01}^* = X_{00}^* = X^*$$

Demonstração: a) Como X_{10}^* e X_{01}^* são subespaços invariantes e fechados de X^* , na topologia da norma (Ver [06] p. 50), o mesmo podemos concluir de $X_{00}^* = X_{10}^* \cap X_{01}^*$. Resta, apenas, estudar X_{11}^* .

Claro que X_{11}^* é um subespaço vetorial de X^* . Para provar que X_{11}^* é fechado na topologia da norma, consideremos uma sequência $\{(f_u^*)_n$ em X_{11}^* tal que

$$f_n^* \rightarrow f^* \in X^* \quad (n \rightarrow \infty)$$

em norma, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$\|f^* - f_n^*\| < \varepsilon/2(3M+1)$$

para todo $n \geq n_0$, onde

$$M = \sup \{ \|T^*(t)\| = \|T(t)\|, t \in [0,1] \times [0,1] \}$$

Seja $n \geq n_0$ fixado. Então,

$$\begin{aligned} & \| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^* \| = \\ & \| T_1^*(t_1) T_2^*(t_2) f^* - T_1^*(t_1) f^* - T_2^*(t_2) f^* + f^* - T_1^*(t_1) T_2^*(t_2) f_n^* \\ & + T_1^*(t_1) T_2^*(t_2) f_n^* - T_1^*(t_1) f_n^* - T_2^*(t_2) f_n^* + T_1^*(t_1) f_n^* + \\ & T_2^*(t_2) f_n^* - f_n^* + f_n^* \| \\ & \leq \| T_1^*(t_1) T_2^*(t_2) f^* - T_1^*(t_1) T_2^*(t_2) f_n^* \| + \\ & \| T_1^*(t_1) f_n^* - T_1^*(t_1) f^* \| + \\ & \| T_2^*(t_2) f_n^* - T_2^*(t_2) f^* \| + \\ & \| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f_n^* \| + \| f_n^* - f^* \| \\ & \leq (3M+1) \| f_n^* - f^* \| + \| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f_n^* \| \end{aligned}$$

Pela hipótese, existe $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ ($0 < \delta \leq 1$) tal que

$$\| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f_n \| < \varepsilon/2$$

para $0 \leq t_1, t_2 < \delta$. Logo

$$\| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^* \| < \varepsilon$$

para $0 \leq t_1, t_2 < \delta$, o que prova que X_{11}^* é um subespaço fechado de X^* , na topologia da norma.

Além disso, se $f^* \in X_{11}^*$, então $T^*(s)f^* \in X_{11}^*$, para todo $s \in \bar{\mathbb{R}}_+^2$. Com efeito

$$\begin{aligned} & \| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] T^*(s)f^* \| = \\ & = \| T^*(s) [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^* \| \\ & \leq \| T^*(s) \| \cdot \| [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^* \| \end{aligned}$$

e a última expressão converge para zero, quando $t \rightarrow 0$. Portanto

$$T^*(s) [X_{11}^*] \subset X_{11}^*$$

para todo $s \in \bar{\mathbb{R}}_+^2$.

b) De 2.2.1 (1) obtemos

$$\begin{aligned} & | \langle [T_1^*(t_1) - I^*] [T_2^*(t_2) - I^*] f^*, f \rangle | \leq \\ & \leq \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} | \langle T_1^*(u) T_2^*(v) A_n^* f^*, f \rangle | \, du \, dv \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \|T_1^*(u)\| \|T_2^*(v)\| \|A_{11}^* f^*\| \|f\| \, du \, dv$$

$$\leq \sup \{ \|T_1(u)\| \|T_2(v)\| \} \|A_{11}^* f^*\| \|f\| \quad t_1 \cdot t_2$$

onde o supremo é tomado sobre $(u,v) \in [0,t_1] \times [0,t_2]$. Donde segue (1).

c) Quando X é reflexivo, então

$$X_{10}^* = X_{01}^* = X^*$$

(ver [06], p. 52). Como

$$X_{00}^* = X_{10}^* \cap X_{01}^* \quad \text{e} \quad X_{00}^* \subset X_{11}^*$$

temos também que,

$$X_{11}^* = X_{00}^* = X^*$$

2.10. Como X_{00}^* é um subespaço fechado do espaço de Banach X^* , sabemos que X_{00}^* também é de Banach. Assim, a restrição $\{T_0^*(t): t \in \mathbb{R}_+^2\}$ do semi-grupo $\{T^*(t): t \in \mathbb{R}_+^2\}$ a X_{00}^* define um semi-grupo de classe (C_0) em $L(X^*)$. Denotaremos o gerador infinitesimal de $\{T_0^*(t): t \in \mathbb{R}_+^2\}$, no sentido da definição 1.2.5 por A_{11}^{0*} e seu domínio por $D(A_{11}^{0*})$.

Na seguinte proposição estudaremos a conexão entre o semi-grupo dual $\{T^*(t): t \in \mathbb{R}_+^2\}$ e sua restrição $\{T_0^*(t): t \in \mathbb{R}_+^2\}$ a X_{00}^* .

2.11. Proposição: a) Temos

$$D(A_{11}^{0*}) \subset D(A_{11}^*) \subset X_{11}^*$$

e $D(A_{11}^*) \cap X_{00}^*$ é densa em X_{00}^* , na topologia da norma.

b) A_{11}^{0*} é a maior restrição de A_{11}^* com domínio e imagem contidos em X_{00}^* .

Demonstração: a) Se $f^* \in D(A_{11}^{0*})$ então, pela definição,

$$(A_{10}(t)A_{01}(s))^* f^* \rightarrow A_{11}^{0*} f^*,$$

quando $t \rightarrow 0_+$ e $s \rightarrow 0_+$, em norma. Mas convergência em norma implica w^* -convergência. Logo, pela proposição 2.2.1 (c), $f^* \in D(A_{11}^*)$.

A inclusão $D(A_{11}^*) \subset X_{11}^*$ já foi mostrada na proposição anterior.

Como $D(A_{11}^{0*})$ é denso em X_{00}^* , na topologia da norma e como $D(A_{11}^{0*}) \subset D(A_{11}^*)$, temos que $D(A_{11}^*) \cap X_{00}^*$ é fortemente denso em X_{00}^* .

b) Precisamos mostrar que, um elemento $f^* \in D(A_{11}^*)$ pertence a $D(A_{11}^{0*})$ se $A_{11}^* f^* \in X_{00}^*$. Mas, se $A_{11}^* f^* \in X_{00}^*$, então a função

$$u \in \bar{\mathbb{R}}_+^2 \rightarrow T_0^*(u) A_{11}^* f^*$$

é fortemente contínua em $\bar{\mathbb{R}}_+^2$ e por 2.6 (1) temos

$$\begin{aligned}
& \langle [T_0^*(t_1 e_1) - I^*] [T_0^*(t_2 e_2) - I^*] f^*, f \rangle = \\
& = \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \langle T_0^*(u_1, u_2) A_{11}^{0*} f^*, f \rangle du_1 du_2 \\
& = \langle \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_0^*(u_1, u_2) A_{11}^{0*} f^* du_1 du_2, f \rangle
\end{aligned}$$

para toda $f \in X$ e todo $t = (t_1, t_2) > 0$ fixado.

Por um corolário do teorema de Hahn-Banach, obtemos

$$[T_0^*(t_1 e_1) - I^*] [T_0^*(t_2 e_2) - I^*] f^* =$$

$$\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} T_0^*(u_1, u_2) A_{11}^{0*} f^* du_1 du_2$$

o que prova que $f^* \in D(A_{11}^{0*})$ e $A_{11}^{0*} f^* = A_{11}^* f^*$.

CAPÍTULO III

CLASSES DE FAVARD DE PROCESSOS DE APROXIMAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA

O pioneiro do conceito de saturação foi J. Favard, que o estabeleceu em 1947 para métodos de somabilidade de séries de Fourier (Ver [09], [10]) e foi formulado para semi-grupos de operadores em espaços de Banach, por P.L. Butzer, em 1956 (ver [04], [05]).

Nós procuramos estender o conceito de saturação de P.L. Butzer para semi-grupos biparamétricos e o fizemos em dois sentidos; um que chamamos de sentido restrito e outro de sentido amplo e caracterizamos as classes de Favard dos semi-grupos biparamétricos em cada um dos dois sentidos.

Iniciaremos o capítulo introduzindo o conceito de soma booleana de processos de aproximação com o sentido dado por Birkhoff e Gordon [03].

3.1. A Soma Booleana de Processos de Aproximação

3.1.1. Seja X um espaço de Banach real ou complexo e seja $L(X)$ a álgebra de Banach dos endomorfismos em X .

Seja $R = \{R(r) | r \leq 0\}$ uma família de operadores comutativos em $L(X)$ tal que

$$\|R(r)f\| \leq M\|f\| \tag{1}$$

para todo $r \geq 0$ e $f \in X$

$$\lim_{r \rightarrow 0_+} \|R(r)f - f\| = 0 \quad (2)$$

Uma família nas condições acima é denominada "processo de aproximação da identidade" no sentido forte.

Consideremos, agora, dois processos de aproximação da identidade em X : $\zeta = \{S(s) | s \geq 0\}$ e $\tau = \{T(t) | t \geq 0\}$. Suponhamos ainda que

$$S(s)T(t) = T(t)S(s) \quad , \quad (3)$$

para todo $s \geq 0$ e $t \geq 0$.

3.1.2. Definição: A soma Booleana de um elemento $S(s) \in \zeta$ com $T(t) \in \tau$ é definida por

$$S(s) \oplus T(t) = S(s) + T(t) - S(s)T(t) \quad . \quad (1)$$

Temos imediatamente o seguinte resultado

3.1.3. Proposição: Sejam $\zeta = \{S(s) | s \geq 0\}$ e $\tau = \{T(t) | t \geq 0\}$ dois processos de aproximação da identidade no sentido forte. Então

$$\|S(s) \oplus T(t)f\| \leq M\|f\| \quad (1)$$

onde M independe de f e de (s, t)

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \|S(s) \oplus T(t)f - f\| =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \|S(s) \oplus T(t)f - f\| =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \|S(s) \oplus T(t)f - f\|$$

Ou seja, a família das somas Booleanas

$$\zeta \oplus \tau = \{S(s) \oplus T(t) \mid s, t \geq 0\}$$

é um processo de aproximação biparamétrico.

3.2. Ordem de saturação Biparamétrica e Classes de Favard

Recordemos, inicialmente, a noção de ordem de saturação e de classe de saturação ou classe de Favard, para processos uniparamétricos.

3.2.1. Seja X um espaço de Banach e $R = \{R(r); 0 \leq r < \infty\}$ um processo de aproximação uniparamétrico em X . Suponhamos que exista $\alpha > 0$ e uma classe $F \subset X$ tal que

$$\|R(r)f - f\| = O(r^\alpha) \Rightarrow R(r)f = f \quad (r \rightarrow 0) \quad (1)$$

$$\|R(r)f - f\| = O(r^\alpha) \Leftrightarrow f \in F \quad (2)$$

onde F contém pelo menos um elemento não invariante. Então, o processo de aproximação R diz-se saturado em X com ordem $O(r^\alpha)$

é F é chamada *classe de saturação* ou *classe de Favard*.

É o seguinte o teorema central da teoria de saturação de semi-grupos de operadores em espaços de Banach, na versão de P.L. Butzer.

3.2.2. Teorema: Suponhamos que $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ seja um semi-grupo de classe (C_0) em $L(X)$

a) Sejam f, g elementos de X , fixados, tais que:

$$\liminf_{t \rightarrow 0_+} \|t^{-1}(T(t)f - f) - g\| = 0$$

Então $f \in D(A)$ e $Af = g$. Quando $g = 0$, temos que $T(t)f = f$ para todo $t \geq 0$

b) Para toda $f \in D(A)$, temos

$$\|T(t)f - f\| \leq \sup_{0 \leq u \leq t} \|T(u)\| \|Af\| \cdot t$$

c) Se X é reflexivo e $f \in X$ é tal que

$$\liminf_{t \rightarrow 0_+} \|t^{-1}(T(t)f - f)\| < \infty$$

então $f \in D(A)$.

Em termos de saturação, temos imediatamente o seguinte

3.2.3. Corolário: Seja X um espaço de Banach reflexivo e

$\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ um semi-grupo de classe (C_0) em $L(X)$. Então, o semi-grupo está saturado com ordem $O(t)$ e a classe de Favard $F = F(T(t)-I; X)$ é igual ao domínio do gerador infinitesimal A .

Para processos biparamétricos podemos introduzir dois conceitos de saturação, antes porém, convencionemos o seguinte: Se $\psi(s, t)$ está definido para todo $s, t > 0$, dizemos que

$$\psi(s, t) = o(s^\alpha t^\beta)$$

se

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} s^{-\alpha} t^{-\beta} \psi(s, t) = 0$$

3.2.4. Definição: Seja $\{S(s) \oplus T(t); 0 \leq s, t < \infty\}$ a soma booleana dos processos de aproximação $\{S(s); 0 \leq s < \infty\}$ e $\{T(t); 0 \leq t < \infty\}$. Suponhamos que existe um par $(\alpha, \beta) > 0$ e uma classe $F \subset X$ tal que:

$$\|S(s) \oplus T(t)f - f\| = o(s^\alpha t^\beta) \implies S(s) \oplus T(t)f = f \quad (1)$$

e

$$\|S(s) \oplus T(t)f - f\| = o(s^\alpha t^\beta) \iff f \in F \quad (2)$$

onde F contém pelo menos um elemento não invariante sob $S(s) \oplus T(t)$. Então o processo de aproximação $\{S(s) \oplus T(t); 0 \leq s, t < \infty\}$ diz-se saturado em X , no sentido restrito, com

ordem $O(s^\alpha t^\beta)$ e H é chamada *classe de saturação restrita* ou *classe de Favard restrita*.

3.2.5. Definição: Sob as mesmas hipóteses da definição 3.2.4, suponhamos que exista um par $(\alpha, \beta) > 0$ e uma classe H em X tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \| S(s) \oplus T(t)f - f \| = o(s^\alpha t^\beta) \\ \| S(s)f - f \| = o(s^\alpha) \\ \| T(t)f - f \| = o(t^\beta) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S(s) \oplus T(t)f = f \\ S(s)f = f \\ T(t)f = f \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \| S(s) \oplus T(t)f - f \| = O(s^\alpha t^\beta) \\ \| S(s)f - f \| = O(s^\alpha) \\ \| T(t)f - f \| = O(t^\beta) \end{array} \right. \Leftrightarrow f \in H \quad (2)$$

Onde H contém, pelo menos, um elemento não invariante sob $S(s) \oplus T(t)$, $S(s)$ e $T(t)$. Então, o processo de aproximação $\{S(s) \oplus T(t); 0 \leq s, t < \infty\}$ diz-se saturado em X , no sentido amplo, com ordem $O(s^\alpha t^\beta)$ e H é chamada *classe de saturação ampla* ou *classe de Favard ampla*.

Estabeleceremos agora dois teoremas de saturação para somas booleanas de semi-grupos uniparamétricos; um versará sobre saturação restrita e outro sobre saturação ampla.

3.2.6. Sejam $\{S(s); 0 \leq s < \infty\}$ e $\{T(t); 0 \leq t < \infty\}$ semi-gru-

pos uniparamétrico de classe (C_0) em $L(X)$, que satisfazem a condição de comutatividade 3.1.1 (3). Pela proposição 1.1.4, podemos considerar o semi-grupo biparamétrico $\{V(s,t) = S(s).T(t): 0 \leq s, t < \infty\}$ de classe (C_0) em $L(X)$. Consideremos ainda o operador A_{11} como foi definido em 1.2.5.

3.2.7. Teorema: Sob as hipóteses feitas em 3.2.6, temos:

a) Se f, g são elementos de X tais que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \inf \|t^{-1}s^{-1}[T(t) \oplus S(s)f - f] + g\| = 0 \quad (1)$$

Então, $f \in D(A_{11})$ e $A_{11}f = g$. Quando $g = 0$ temos $T(t) S(s)f = f$, para todo $s, t \geq 0$, isto é, f é um elemento invariante do processo de aproximação $\{T(t) \oplus S(s): 0 \leq t, s < \infty\}$.

b) Para toda $f \in D(A_{11})$, temos

$$\|T(t) \oplus S(s)f - f\| \leq \sup_{\substack{0 \leq u \leq t \\ 0 \leq v \leq s}} \{\|T(u)\| \|S(v)\|\} \|A_{11}f\| ts \quad (2)$$

c) Se X é reflexivo e se $f \in X$ é tal que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \inf \|t^{-1}s^{-1}[S(s) \oplus T(t)f - f]\| < \infty \quad (3)$$

Então, $f \in D(A_{11})$

Demonstração: a) Sejam $f, g \in X$ tais que (1) se verifique. Fa-

çamos

$$A_{10}(t)f = t^{-1}[T(t)-I]f$$

e

$$A_{01}(s)f = s^{-1}[S(s)-I]f$$

Vimos em 1.2.6 (5) que

$$\begin{aligned} S\text{-}\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \int_0^w \int_0^z T(u)S(v)A_{10}(t)A_{01}(s)f \, dudv &= \\ &= [I - T(w) \oplus S(z)]f \end{aligned} \quad (4)$$

Além disso

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^w \int_0^z T(u)S(v)[A_{10}(t)A_{01}(s)f - g] \, dudv \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{0 \leq u \leq w \\ 0 \leq v \leq z}} \{ \|T(u)\| \cdot \|S(v)\| \|A_{10}(t)A_{01}(s)f - g\| \} \quad w.z \end{aligned} \quad (5)$$

Pela hipótese, o limite inferior ($t \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$) do segundo membro da última desigualdade é zero.

Portanto,

$$\int_0^w \int_0^z T(u)S(v)g \, dudv = f - T(w) \oplus S(z)f \quad (6)$$

Donde segue que, $f \in D(A_{11})$ e $A_{11}f = g$. A igualdade (6) tam-

bém mostra que, se $g = 0$, então $T(w) \oplus S(z)f = f$ para todos os $w, z \geq 0$.

b) Se $f \in D(A_{11})$, temos

$$T(t) \oplus S(s)f - f = - \int_0^s \int_0^t T(u)S(v)A_{11}f \, du \, dv$$

Portanto,

$$\|T(t) \oplus S(s)f - f\| \leq \sup_{\substack{0 \leq u \leq t \\ 0 \leq v \leq s}} \{\|T(u)\| \|S(v)\|\} \|A_{11}f\| \cdot t \cdot s.$$

c) Se a relação (3) é satisfeita, então existe uma sequência $(t_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $(t_n, s_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, quando $n \rightarrow \infty$, e

$$\{A_{11}(t_n, s_n)f; n \in \mathbb{N}\} = \{A_{10}(t_n)A_{01}(s_n)f; n \in \mathbb{N}\}$$

é um subconjunto limitado de X . Como X é reflexivo, existe uma subsequência $(t_{n_k}, s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f)$ converge fracamente para um elemento $g \in X$. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f^*, A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \rangle = \langle f^*, g \rangle,$$

para todo $f^* \in X^*$. Além disso, pela definição de operador dual, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f^*, T(u)S(v)A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \rangle = \langle f^*, T(u)S(v)g \rangle$$

para todo $u, v \geq 0$ e toda $f^* \in X^*$.

Visto que:

$$\begin{aligned}
 | \langle f^*, T(u)S(v)A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \rangle | &\leq \\
 &\leq \| f^* \| \| T(u)S(v) \| \| A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \| \\
 \| f^* \| \sup_{\substack{0 \leq u \leq w \\ 0 \leq v \leq z}} \{ \| T(u) \| \| S(v) \| \} \| A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \|
 \end{aligned}$$

e o último membro da desigualdade acima é limitado em cada retângulo limitado $0 \leq (u,v) < (w,z)$ (w, z arbitrários, mas fixados) uniformemente em relação a k , temos, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, que para toda $f^* \in X^*$

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f^*, \int_0^w \int_0^z T(u)S(v)A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \, dudv \rangle &= \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^w \int_0^z \langle f^*, T(u)S(v)A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \rangle \, dudv \\
 &= \int_0^w \int_0^z \langle f^*, T(u)S(v)g \rangle \, dudv \\
 &= \langle f^*, \int_0^w \int_0^z T(u)S(v)g \, dudv \rangle \tag{7}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como convergência forte implica em convergência fraca, temos também por (4) que

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f^*, \int_0^w \int_0^z T(u)S(v)A_{11}(t_{n_k}, s_{n_k})f \, dudv \rangle &= \\
 &= \langle f^*, f - T(w) \oplus S(z)f \rangle \tag{8}
 \end{aligned}$$

Comparando as relações (7) e (8) temos para todo par $(w, z) > 0$ e toda $f^* \in X^*$

$$\begin{aligned} & \langle f^*, \int_0^w \int_0^z T(u)S(v)g \, dudv \rangle \\ &= \langle f^*, f - T(w) \oplus S(z)f \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

Pelo teorema de Hahn-Banach, obtemos

$$f - T(w) \oplus S(z)f = \int_0^w \int_0^z T(u)S(v)f \, dudv \quad (10)$$

Donde concluímos que $f \in D(A_{11})$ e $A_{11}f = g$, como queríamos de monstrar.

Na terminologia da teoria de saturação temos o se guinte

3.2.8. Corolário: Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\{S(s) \oplus T(t); 0 \leq s, t < \infty\}$ o processo de aproximação bi-paramétrico gerado pelos semi-grupos uni-paramétricos $\{S(s); 0 \leq s < \infty\}$ e $\{T(t); 0 \leq t < \infty\}$. Então o processo de aproximação $\{S(s) \oplus T(t); 0 \leq s, t < \infty\}$ é saturado em X , no sentido restrito, com ordem $O(s, t)$ e a classe de Favard $F = F(S(s) \oplus T(t) - I; X)$ é igual ao domínio do operador A_{11} .

A combinação dos teoremas 3.2.2 e 3.2.7, fornece o seguinte teorema de saturação no sentido amplo:

3.2.9. Teorema: Sob as hipóteses feitas em 3.2.6 temos:

a) Se f, g são elementos de X tais que

$$\liminf \| t^{-1} s^{-1} [T(t) \oplus S(s)f - f] + g \| = 0 \quad (1)$$

$$\liminf \| t^{-1} [T(t)f - f] - g \| = 0 \quad (2)$$

$$\liminf \| s^{-1} [S(s)f - f] - g \| = 0 \quad (3)$$

Então, $f \in D(A_{11}) \cap D(A_{10}) \cap D(A_{01})$ e $A_{11}f = g$, $A_{01}f = g$ e $A_{10}f = g$.

Quando $g = 0$, temos que

$$T(t) \oplus S(s)f = f \quad (4)$$

$$T(t)f = f \quad (5)$$

$$S(s)f = f \quad (6)$$

b) Para toda $f \in D(A_{11}) \cap D(A_{10}) \cap D(A_{01})$, temos

$$\| T(t) \oplus S(s)f - f \| \leq \sup_{\substack{0 \leq u \leq t \\ 0 \leq v \leq s}} \{ \| T(u) \| \| S(v) \| \} \| A_{11}f \| ts \quad (7)$$

$$\| T(t)f - f \| \leq \sup_{0 \leq u \leq t} \{ \| T(u) \| \} \| A_{10}f \| \cdot t \quad (8)$$

$$\| S(s)f - f \| \leq \sup_{0 \leq v \leq s} \{ \| S(v) \| \} \| A_{01}f \| s$$

c) Se X é reflexivo e se $f \in X$ é tal que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \inf \|t^{-1}s^{-1}[T(t) \oplus S(s)f-f]\| < \infty \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \inf \|t^{-1}[T(t)f-f]\| < \infty \quad (11)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \inf \|s^{-1}[S(s)f-f]\| < \infty \quad (12)$$

Então, $f \in D(A_{11}) \cap D(A_{01}) \cap D(A_{10})$

3.2.10. Corolário: Seja X um espaço de Banach reflexivo e sejam $\{S(s): 0 \leq s < \infty\}$ e $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ semi-grupos uniparamétricos comutativos com geradores infinitesimais A_{01} e A_{10} respectivamente. Seja A_{11} o gerador infinitesimal, no sentido da definição 1.2.5. do semi-grupo biparamétrico

$$\{V(s,t) = S(s)T(t); 0 \leq s, t < \infty\}.$$

Então o processo de aproximação biparamétrico

$$\{S(s) \oplus T(t); 0 \leq s, t < \infty\}$$

é saturado em X , no sentido amplo, com ordem $O(st)$ e classe de Favard $\mathcal{X} = D(A_{11}) \cap D(A_{01}) \cap D(A_{10})$.

CAPÍTULO IV

SATURAÇÃO PARA SEMI-GRUPOS MULTI-PARAMÉTRICOS DUAIS

No capítulo III estudamos o problema da suturação dos processos de aproximação biparamétricos obtidos através das comas booleanas de semi-grupos fortemente contínuos em espaços reflexivos. Podemos, entretanto, estudar este problema em espaços não reflexivos, passando aos semi-grupos duais.

4.1. Preliminares

4.1.0. Sejam, então, $\{S(s); 0 \leq s < \infty\}$, $\{T(t); 0 \leq t < \infty\}$ e $\{V(s,t); 0 \leq s, t < \infty\}$ como em 3.2.6. Sejam $\{S^*(s); 0 \leq s < \infty\}$, $\{T^*(t); 0 \leq t < \infty\}$ e $\{V^*(s,t); 0 \leq s, t < \infty\}$ seus respectivos semi-grupos duais e sejam

$$X_{01}^* = \{f^* \in X^*: \lim_{t \rightarrow 0} \|T^*(t)f^* - f^*\| = 0\}$$

$$X_{10}^* = \{f^* \in X^*: \lim_{s \rightarrow 0} \|S^*(s)f^* - f^*\| = 0\}$$

$$X_{00}^* = \{f^* \in X^*: \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \|V^*(s,t)f^* - f^*\| = 0\}$$

Sejam, ainda, A_{10}^{0*} , A_{01}^{0*} e A_{11}^{0*} os geradores infinitesimais dos semi-grupos considerados, restritos a X_{10}^* , X_{01}^* e X_{00}^* .

O problema da suturação dos semi-grupos duais $\{S^*(s); 0 \leq s < \infty\}$ e $\{T^*(t); 0 \leq t < \infty\}$ já foi resolvido e sua solução é devida a K. DE LEEUW [08] (Ver também [06]).

4.2. O Teorema de Saturação para Semi-grupos Duais

4.2.1. Teorema: a) Sejam f^* e g^* elementos de X_{00}^* tais que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \inf \| t^{-1} s^{-1} [S^*(s) \oplus T^*(t)f^*] + g^* \| = 0 \quad (1)$$

então, $f^* \in D(A_{11}^{0*})$ e $A_{11}^{0*} f^* = g^*$. No caso em que $g^* = 0$, temos

$$S^*(s) \oplus T^*(t)f^* = f^* \quad , \quad \forall t, s \geq 0 \quad (2)$$

b) Se $f^* \in D(A_{11}^*)$, então

$$\| S^*(s) \oplus T^*(t)f^* - f^* \| \leq \sup \| S(u) \| \| T(v) \| \| A_{11}^* f^* \| st$$

onde supremo é tomado sobre os $(u, v) \in [0, s] \times [0, t]$.c) Se $f \in X_{00}^*$ e

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \inf \| s^{-1} t^{-1} [S^*(s) \oplus T^*(t)f - f^*] \| < \infty$$

então $f^* \in D(A_{11})$

Demonstração: (a) É apenas um caso especial do teorema 3.2.7(a).

b) Já foi demonstrado em 2.2.9 (b)

c) Pela hipótese, existe uma constante $c > 0$ e uma sequência $((s_j, t_j))_j$ em $\mathbb{R}^2$ tal que, $(s_j, t_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (0, 0)$ e

$$\| s_j^{-1} t_j^{-1} [S^*(s_j) \oplus T^*(t_j)f - f^*] \| \leq c \quad , \quad j = 1, \dots$$

Para cada inteiro $n > 0$, seja $\bar{S}_n$ o ω^* -fecho em X^* do conjunto

$$S_n = \{s_j^{-1} t_j^{-1} [S^*(s) \oplus T^*(t) f^* - f^*] : j \geq n\}$$

Como cada um dos conjuntos $\bar{S}_n$ é limitado na topologia da norma e é ω^* -fechado, segue que $\bar{S}_n$ é ω^* -compacto para todo $n > 0$. Além disso, a família $\{\bar{S}_n; n \geq 1\}$ tem a propriedade da interseção finita. Logo, existe $g^* \in X^*$ tal que $g^* \in \bigcap \{\bar{S}_n; n \geq 1\}$.

Portanto, qualquer que seja a vizinhança fraca de g^* , ela contém um elemento de S_n , para todo $n > 0$. Ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, todo $f \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, existe $j \geq n$ tal que

$$|(s_j^{-1} t_j^{-1} [S^*(s) \oplus T^*(t) f^* - f^*] g^*) f| < \varepsilon$$

Fixemos, agora, $f \in D(A_{11})$ e seja $\varepsilon = 1/2$. Então, existe

$j_1 \geq 1$ tal que

$$|(s_{j_1}^{-1} t_{j_1}^{-1} [S^*(s) \oplus T^*(t) f^* - f^*] - g^*) f| < 1/2$$

Para $\varepsilon = 1/2^k$, existe $j_k \geq j_{k-1} + 1 > j_k$ tal que

$$|(s_{j_k}^{-1} t_{j_k}^{-1} [S^*(s_{j_k}) \oplus T^*(t_{j_k}) f^* - f^*] - g^*) f| < 1/2^k$$

Assim, determinamos uma subsequência $((s_{j_k}, t_{j_k}))_k$ de $((s_j, t_j))_j$, dependendo da escolha de $f \in D(A_{11})$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle s_{j_k}^{-1} t_{j_k}^{-1} (S^*(s_{j_k}) \oplus T^*(t_{j_k}) f^* - f^*), f \rangle = \langle g^*, f \rangle$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle g^*, f \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f^*, s_{j_k}^{-1} t_{j_k}^{-1} (S^*(s_{j_k}) \oplus T^*(t_{j_k}) f^* - f^*) \rangle \\
 &= - \langle f^*, A_{11} f \rangle
 \end{aligned}$$

Donde segue que, $f^* \in D(A_{11}^*)$ e $A_{11}^* = -g$.

4.2.2. Corolário: a) Se $f \in X_{00}^*$ e

$$\|S^*(s) \oplus T^*(t) f^* - f^*\| = O(st) \quad (1)$$

então f^* é um elemento invariante do processo de aproximação biparamétrico $\{S^*(s) \oplus T^*(t): 0 \leq s, t < \infty\}$

b) Se $f^* \in X_{00}^*$, então são equivalentes as afirmações:

$$f^* \in D(A_{11}^*) \quad , \quad (2)$$

existe o limite

$$\omega^* \text{-} \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} s^{-1} t^{-1} \{S^*(s) \oplus T^*(t) - f^*\} \quad (3)$$

$$\|S^*(s) \oplus T^*(t) f^* - f^*\| = O(st) \quad (4)$$

Observemos que a conjugação do corolário 4.2.2. com o corolário 2.1.5. pg. 92 de [06] resolve o problema da saturação do processo de aproximação $\{S^*(s) \oplus T^*(t): 0 \leq s, t < \infty\}$, restrito ao subespaço X_{00}^* de X^* . Explicitamente temos

4.2.3. Corolário: O processo de aproximação $\{S^*(s) \oplus T^*(t) : 0 \leq s, t < \infty\}$

a) Está saturado em X_{00}^* , no sentido restrito, com ordem $O(st)$, sendo a classe de Favard $F = X_{00}^* \cap D(A_{11}^*)$

b) Está saturado em X_{00}^* , no sentido amplo com ordem $O(st)$, sendo a classe de Favard $F = X_{00}^* \cap D(A_{11}^*) \cap D(A_{10}^*) \cap D(A_{01}^*)$.

Observemos ainda que, o Corolário 4.2.3. contém o corolário 3.2.8 e o teorema 3.2.9, uma vez que, se X é reflexivo, então $X^* = X_{00}^*$.

CAPÍTULO V

A TEORIA DOS ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO ENTRE 2^n ESPAÇOS
DE BANACH

Já dissemos que um dos objetivos deste trabalho é estabelecer conexões entre a teoria dos semi-grupos multipara-
métricos e a teoria de Interpolação de Fernandez. Isto será
feito no próximo capítulo e afim de tornar este trabalho dida-
ticamente mais completo, apresentaremos, neste capítulo, um
resumo da referida teoria de Fernandez. Para maiores detalhes
ver [11].

5.1. Definições Básicas

5.1.1. Consideremos $\square = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n \mid k_j = 0 \text{ ou } 1, j = 1, \dots, n\}$ e seja $E = (E_k \mid k \in \square)$ uma família de 2^n espaços de Banach imersos, algébrica e topologicamente, num mesmo espaço linear Hausdorff V . Uma tal família será chamada de família admissível (de espaços de Banach em V).

5.1.2. Se $E = (E_k \mid k \in \square)$ é uma família admissível de espaços de Banach, introduzimos a envoltória linear ΣE e a interseção $\cap E$ como espaços vetoriais na forma usual.

Os espaços vetoriais ΣE e $\cap E$ são espaços de Banach em relação as normas.

$$\|x\|_{\Sigma E} = \inf \left\{ \sum_k \|x_k\|_{E_k} \mid x = \sum_k x_k, x_k \in E_k, k \in \square \right\} \quad (1)$$

e

$$\|x\|_{\cap E} = \max \{ \|x_k\|_{E_k} \mid k \in \square \} \quad (2)$$

respectivamente.

Os espaços ΣE e $\cap E$ estão continuamente imersos em V .

5.1.3. Dada uma família admissível E , chamaremos de espaço intermediário em relação a família a todo espaço de Banach E que satisfaz

$$\cap E \subset E \subset \Sigma E \quad (1)$$

(O símbolo $\subset$ indicará sempre uma imersão contínua)

5.1.4. Diremos que um par de espaços de Banach (E, F) intermediários em relação às famílias admissíveis $E = (E_k; k \in \square)$ e $F = (F_k; k \in \square)$, respectivamente, tem a propriedade de interpolação se para toda aplicação linear de ΣE em ΣF tal que

$$T|_{E_k}: E_k \rightarrow F_k \quad (k \in \square) \quad (1)$$

implicar que

$$T: E \rightarrow F \quad (2)$$

(A flexa $\rightarrow$ denotará sempre aplicações lineares contínuas!)

5.1.5. Observemos que a condição 5.1.4 (1) implica necessária-
mente que $T: \Sigma E \rightarrow \Sigma F$.

5.1.6. Seja G um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e denotemos
por $R_+^n = (0, \infty) \times \dots \times (0, \infty)$.

O espaço das funções $g: R_+^n \rightarrow G$, fortemente mensuráveis em relação à medida $d_* = d_* t_1 \dots d_* t_n = dt_1/t_1 \dots dt_n/t_n$ e que são $Q = (q_1, \dots, q_n)$ integráveis (com as modificações habituais quando $q_j = \infty$, para algum ou todos os j) será denotado por $L_*^Q(G)$.

O espaço das funções $g: R_+^n \rightarrow G$, fortemente mensuráveis em relação a medida usual de Lebesgue sobre o R_+^n , que são $Q = (q_1, \dots, q_n)$ integrais (com as modificações habituais quando $q_j = \infty, \dots$) será denotado por $L_+^Q(G)$.

O espaço das funções $g: R^n \rightarrow G$ fortemente mensuráveis em relação a medida usual de Lebesgue sobre R^n , que são $Q = (q_1, \dots, q_n)$ integráveis (com as modificações usuais quando $q_j = \infty, \dots$) será denotado por $L^Q(G)$.

Quando $G = R$ ou C denotaremos estes espaços simplesmente por L_*^Q , L_+^Q e L^Q .

Para toda a teoria dos espaços L^Q , com normas mistas, a referência básica será sempre Benedek-Panzone [01].

Dada uma família admissível $E = (E_k | k \in \square)$, o que se pretende é desenvolver um método de construção de espaços intermediários em relação a família dada. Ainda mais, que os pares de espaços intermediários construídos em relação a duas famílias admissíveis tenham a propriedade de interpolação.

J. Peetre desenvolveu neste sentido os chamados K - e J -métodos reais de interpolação (Ver [26]) para famílias admissíveis de dois espaços de Banach. Fernandez estendeu es-

tes métodos para 2^n espaços de Banach, como segue:

5.2. As Normas Funcionais $K(t; x)$ e $J(t; x)$

Consideremos $E = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach.

5.2.1. Definição: Para $t = (t_1, \dots, t_n) > 0$ ($t_i > 0$), $y \in E$ e $x \in \Sigma E$ definimos as normas funcionais

$$J(t, y) = J(t, y; E) = \max\{t^k \|y\|_{E_k} | k \in \square\} \quad (1)$$

e

$$K(t, x) = K(t, x; E) = \inf\{\sum_k t^k \|x_k\|_{E_k} | x = \sum_k x_k, x_k \in E_k, k \in \square\} \quad (2)$$

onde $t^k = t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$.

Vemos que para cada t fixo as normas funcionais $J(t; y)$ e $K(t; x)$ definem normas equivalentes a $\|y\|_{\cap E}$ e $\|x\|_{\Sigma E}$ em $\cap E$ e ΣE , respectivamente.

5.2.2. Proposição: Para todo $y \in E$ e $t = (t_1, \dots, t_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n) > 0$ vale

$$K(t; y) \leq \left(\min_k t^k s^{-k}\right) J(s; y)$$

5.3. Os Espaços $(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, K}$

Consideremos $E = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach e os parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$,

$$1 \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty.$$

5.3.1. Definição: Definimos $(E_k | k \in \mathbb{Q})_{\theta, Q, K}$ como o espaço dos $x \in \Sigma E$ tais que

$$t^{-\theta} K(t; x) \in L_*^Q \quad (1)$$

5.3.2. Proposição: Os espaços $(E_k | k \in \mathbb{Q})_{\theta, Q, K}$ não se reduzem necessariamente a $\{0\}$ quando $0 < \theta_j < 1$, $1 \leq q_j < \infty$ e $0 \leq \theta_j \leq 1$, $q_j = \infty$ ($j = 1, \dots, n$).

5.3.3. Proposição: Os espaços $(E_k | k \in \mathbb{Q})_{\theta, Q, K}$ são completos quando munidos da norma

$$\|x\|_{\theta, Q, K} = \|t^{-\theta} K(t; x)\|_{L_*^Q} \quad (1)$$

5.3.4. Proposição: Os espaços $(E_k | k \in \mathbb{Q})_{\theta, Q, K}$ são espaços intermediários em relação a família admissível $E = (E_k | k \in \mathbb{Q})$. Isto é

$$\cap E \subset (E_k | k \in \mathbb{Q})_{\theta, Q, K} \subset \Sigma E \quad (2)$$

A próxima proposição mostra que os espaços $(E_k | k \in \mathbb{Q})_{\theta, Q, K}$ tem a propriedade de interpolação e podem ser chamados de espaços de interpolação.

5.3.5. Proposição: Sejam $E = (E_k | k \in \mathbb{Q})$ e $F = (F_k | k \in \mathbb{Q})$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach em V e W , respectivamente. Se T é uma transformação linear de ΣE em ΣF tal que

$$T|E_k: E_k \rightarrow F_k \quad , \quad (k \in \square) \quad (1)$$

então, para todo $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ e $Q = (q_1, \dots, q_n)$ tem-se

$$T: (E_k | k \in \square)_{\theta, Q, K} \rightarrow (F_k | k \in \square)_{\theta, Q, K} \quad (2)$$

5.4. A Discretização do K-método

Seja $F = (F_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach.

Dados $N \in \mathbb{Z}^n$ e $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, façamos $N \cdot \theta = n_1 \theta_1 + \dots + n_n \theta_n$ e se $M = (m_1, \dots, m_n)$, façamos $e^M = e^{m_1} \dots e^{m_n}$.

5.4.1. Proposição: Seja $x \in \Sigma E$. Então $x \in (E_k | k \in \square)_{\theta, Q, K}$ se, e somente se,

$$(e^{-N\theta} K(e^N; x))_{N \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^Q(\mathbb{Z}^n) \quad (1)$$

mais ainda

$$\begin{aligned} \|(e^{-N \cdot \theta} K(e^N; x))_{N \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^Q(\mathbb{Z}^n)} &= \|x\|_{\theta, Q, K} \\ &\leq e^n e^{-\theta} \|(e^{-N \cdot \theta} K(e^N; x))_{N \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^Q(\mathbb{Z}^n)} \end{aligned}$$

5.5. Os Espaços $(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J}$

Consideremos, como antes, $E = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível de espaços de Banach e os parâmetros

$0 \leq \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \leq 1$ e $1 \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$.

5.5.1. Definição: Definimos $(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J}$ como o espaço dos $x \in \Sigma E$ para os quais existe $u \in L^1_*(\Sigma E)$ com $u(\mathbb{R}_+^n) \subset \cap E$ e tal que

$$x = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(t) d_* t \quad (1)$$

e

$$t^{-\theta} J(t, u(t)) \in L^Q_* \quad (2)$$

Da mesma forma que os espaços do tipo K temos a seguinte proposição.

5.5.2. Proposição: Os espaços $(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J}$ não se reduzem necessariamente a $\{0\}$ quando $0 < \theta_j < 1$, $1 \leq q_j < \infty$ e $0 \leq \theta_j \leq 1$, $q_j = \infty$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

5.5.3. Proposição: Os espaços $(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J}$ são completos quando munidos da norma

$$\|x\|_{\theta, Q, J} = \inf \{ \|t^{-\theta} J(t, u(t))\|_{L^Q_*}, x = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(t) d_* t \}.$$

5.5.3. Proposição: Os espaços $(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J}$ são espaços intermediários em relação a família admissível $E = (E_k | k \in \square)$. Isto é,

$$E \subset (E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J} \subset \Sigma E \quad (1)$$

5.5.4. Proposição: Sejam $E = (E_k | k \in \mathbb{N})$ e $F = (F_k | k \in \mathbb{N})$ duas famílias admissíveis de espaços de Banach em V e W respectivamente. Se T é uma transformação linear de ΣE em ΣF tal que

$$T|E_k: E_k \rightarrow F_k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

então, para todo $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ e $Q = (q_1, \dots, q_n)$ tem-se

$$T: (E_k | k \in \mathbb{N})_{\theta, Q, J} \rightarrow (F_k | k \in \mathbb{N})_{\theta, Q, J}.$$

5.6. A Discretização do J-método

5.6.1. Proposição: Seja $x \in \Sigma E$. Então $x \in (E_k | k \in \mathbb{N})_{\theta, Q, J}$ se, e somente se, existe $(u_M)_M$ em $\cap E$, $M \in \mathbb{Z}^n$, tal que

$$x = \sum_{M \in \mathbb{Z}^n} u_M \quad (\text{em } \Sigma E) \quad (1)$$

e

$$(M^{\theta} J(e^M; u_M))_{M \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^Q(\mathbb{Z}^n) \quad (2)$$

5.7. A Identidade entre os Métodos K e J

5.7.1. Proposição: Se $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, $1 \leq P = (p_1, \dots, p_n) \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, então

$$(E_k | k \in \mathbb{N})_{\theta, P, J} \subset (E_k | k \in \mathbb{N})_{\theta, Q, K}.$$

5.7.2. Lema: Seja $x \in \Sigma E$ para o qual existem constantes $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ e $C = C(x) > 0$ tais que

$$K(s; x) \leq C s^{-\theta} \quad (1)$$

Nestas condições existe $u \in L^1_*(\Sigma E)$, com $u(\mathbb{R}_+^n) \subset \cap E$, tal que

$$x = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(t) d_* t \quad (2)$$

e

$$J(s, u(s)) \leq (4e)^n K(s; x) \quad (3)$$

5.7.3. Proposição: Se $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ e $1 \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, então

$$(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, K} \subset (E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J}$$

5.7.4. Teorema: Seja $E = (E_k | k \in \square)$ uma família admissível, $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ e $1 \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. Então vale a identidade

$$(E_k | k \in \square)_{\theta, Q, K} = (E_k | k \in \square)_{\theta, Q, J} \quad (1)$$

com equivalência de normas.

OBSERVAÇÃO: Em vista da identidade 5.2.6.4 (1) e não havendo necessidade, por razões de cálculo, explicitar-se o espaço de interpolação foi gerado pelo método K ou pelo método J, escrevemos simplesmente $(E_k | k \in \square)_{\theta, Q}$.

5.7.5. Corolário: Se $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ e $1 \leq P = (p_1, \dots, p_n) \leq Q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, vamos ter

$$(E_k | k \in \square)_{\theta, P} \subset (E_k | k \in \square)_{\theta, Q} \quad (1)$$

Em particular

$$(E_k | k \in \square)_{\theta, 1} \subset (E_k | k \in \square)_{\theta, Q} \subset (E_k | k \in \square)_{\theta, \infty} \quad (2)$$

[Aqui $1 = (1, \dots, 1)$ e $\infty = (\infty, \dots, \infty)$.]

CAPÍTULO VI

ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO E SEMI-GRUPOS

Neste capítulo apresentamos uma versão biparamétrica dos espaços intermediários gerados por semi-grupos de operadores em espaços de Banach, introduzidos por J.L. Lions-J. Peetre ([23], [24]) e mostramos que estes espaços são espaços de interpolação, segundo a teoria de interpolação para Z^n espaços de Banach de Fernandez.

6.1. Espaços de Banach Gerados por Semi-grupos Biparamétricos de Operadores

6.1.1. Seja X um espaço de Banach real ou complexo e seja $\{S(s)T(t); (s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}$ um semi-grupo equilimitado (com limitante M).

Suponhamos que uma das seguintes condições, para α e β em $\mathbb{R}$, m e n em $\mathbb{N}$ e p e q em $\mathbb{R}_+$, seja satisfeita

$$0 < \alpha < m, \quad 0 < \beta < n, \quad 1 \leq p, q \leq \infty \quad (1)$$

$$0 \leq \alpha \leq m, \quad 0 < \beta < n, \quad p = \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty \quad (2)$$

$$0 < \alpha < m, \quad 0 \leq \beta \leq n, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad q = \infty \quad (3)$$

$$0 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq \beta \leq n, \quad p = q = \infty \quad (4)$$

6.1.2. Definição: Sejam $A = (\alpha, \beta)$, $R = (m, n)$ e $Q = (p, q)$ satisfazendo uma das condições 6.1.1. (1), 6.1.1. (2), 6.1.1. (3) ou 6.1.1. (4). Definimos $X(A, R, Q)$ como sendo o conjunto de todos os elementos $f \in X$ tais que

$$s^{-\alpha k_1} t^{-\beta k_2} \| [S(s)-I]^{mk_1} [T(t)-I]^{nk_2} f \|_{L_*^{Q_{0k}}(\mathbb{R}_+^{|k|})}$$

$k = (k_1, k_2) \in \square - \{(0,0)\}$, e onde $Q_{0k} = (pk_1, qk_2)$ (aqui identificamos $(p,0)$ com p e $(0,q)$ com q).

6.1.3. Proposição: Os conjuntos $X(A,R,Q)$ são subespaços de X e são completos sob a norma

$$\| f \|_{A,R,Q} = \| f \| + \sum_{\substack{k \in \square \\ k \neq (0,0)}} s^{-\alpha k_1} t^{-\beta k_2} \| [S(s)-I]^{mk_1} [T(t)-I]^{nk_2} f \|_{L_*^{Q_{0k}}(\mathbb{R}_+^{|k|}, X)} \quad (1)$$

ou seja

$$\| f \|_{A,R,Q} = \| f \| + \left\{ \int_0^\infty (s^{-\alpha} \| [S(s)-I]^{m_f} \|)^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p} +$$

$$\left\{ \int_0^\infty (t^{-\beta} \| [T(t)-I]^{n_f} \|)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} +$$

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s)-I]^m [T(t)-I]^n f \|)^{p ds} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

com as modificações habituais no caso infinito. Ainda mais,

$$\bigcap_{k \in \square} (A_{10}^{k_1 m} A_{01}^{k_2 n}) \subset X(A,R,Q) \subset X \quad (2)$$

Demonstração: Obviamente 6.1.3 (1) define uma norma em $X(A,R,Q)$. Mostremos, então, que os espaços $X(A,R,Q)$ são completos. Restringiremos a discussão ao caso $1 \leq Q < \infty$; os demais são mais simples.

Suponhamos que $(f_j)_j$ seja uma sequência de Cauchy em $X(\Lambda, R, Q)$. Como

$$\|f\|_X \leq \|f\|_{A,R,Q} \quad (3)$$

$(f_j)_j$ é uma sequência de Cauchy em X . Portanto, existe $f \in X$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_X = 0 \quad (4)$$

Ainda mais, para todo $0 < (s, t) < \infty$ fixado, temos

$$s\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} s^{-\alpha} [S(s) - I]^m f_j = s^{-\alpha} [S(s) - I]^m f \quad (5)$$

$$s\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} t^{-\beta} [T(t) - I]^n f_j = t^{-\beta} [T(t) - I]^n f \quad (6)$$

$$s\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} s^{-\alpha} t^{-\beta} [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f_j = s^{-\alpha} t^{-\beta} [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \quad (7)$$

e pelo lema de Fatou

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (s^{-\alpha} \| [S(s) - I]^m f \|)^p \frac{ds}{s} \leq \\ & \leq \liminf \int_0^\infty (s^{-\alpha} \| [S(s) - I]^m f_j \|)^p \frac{ds}{s} < \infty \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (t^{-\beta} \| [T(t) - I]^n f \|)^q \frac{dt}{t} \leq \\ & \leq \liminf \int_0^\infty t^{-\beta} \| [T(t) - I]^n f_j \|)^q \frac{dt}{t} < \infty \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^{n_f} \|)^p \frac{ds}{s} \leq$$

$$\leq \liminf \int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^{n_{f_j}} \|)^q \frac{ds}{s}$$

Assim,

$$\left[\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^{n_f} \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \leq$$

$$\leq \left[\liminf \int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^{n_{f_j}} \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p}$$

$$= \liminf \left[\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^{n_{f_j}} \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p}$$

Novamente, pelo lema de Fatou, obtemos

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^{n_f} \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \liminf \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^{n_{f_j}} \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} < \infty \quad (11)$$

(11)

Do (8), (9) e (11) concluímos que $f \in X(A, R, Q)$. Resta mostrar que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \| f_j - f \|_{A, R, Q} = 0 \quad (12)$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_i - f_j\|_{A,R,Q} < \varepsilon \quad (13)$$

para todo $i, j \geq N$. Consequentemente

$$\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n (f_i - f_j) \|)^p \frac{ds}{s} < \varepsilon^p \quad (14)$$

$$\int_0^\infty (t^{-\beta} \| [T(t) - I]^n (f_i - f_j) \|)^q \frac{dt}{t} < \varepsilon^q \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n (f_i - f_j) \| \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} < \varepsilon^q \quad (16)$$

Aplicando o lema de Fatou, da mesma forma como antes, com

$j \rightarrow \infty$, temos:

$$\int_0^\infty (s^{-\alpha} \| [S(s) - I]^m (f_j - f) \|)^p \frac{ds}{s} < \varepsilon^p \quad (17)$$

$$\int_0^\infty (t^{-\beta} \| [T(t) - I]^n (f_j - f) \|)^q \frac{dt}{t} < \varepsilon^q \quad (18)$$

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n (f_j - f) \| \frac{ds}{s})^{q/p} \frac{dt}{t} \right] < \varepsilon^q \quad (19)$$

para todo $j \geq N$, o que demonstra (12) e portanto, $X(A,R,Q)$ é um espaço de Banach.

A desigualdade (3) demonstra a segunda inclusão em (2). Resta demonstrar a primeira inclusão em (2). Novamente consideremos

o caso $1 \leq Q < \infty$. Suponhamos que $f \in \bigcap_{k \in \mathbb{D}} (A_{10}^{k_1 m} A_{01}^{k_2 n})$. Temos

$$\| [S(s) - I]^m f \| \leq M \| A_{10}^m f \| s^m \quad s > 0 \quad (20)$$

$$\| [S(s) - I]^m f \| \leq (M+1)^m \| f \| \quad s > 0 \quad (21)$$

De (20) e (21) concluímos que

$$\| [S(s) - I]^m f \| \leq (M+1)^m \min(1, s^m) (\| f \| + \| A_{10}^m f \|) \quad (22)$$

Analogamente

$$\| [T(t) - I]^n f \| \leq (M+1)^n \min(1, t^n) (\| f \| + \| A_{01}^n f \|) \quad (23)$$

Por outro lado

$$\| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \| \leq M \| A_{10}^m A_{01}^n f \| s^m t^n \quad (24)$$

$$\| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \| \leq (M+1)^m M \| A_{10}^n f \| s^n \quad (25)$$

$$\| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \| \leq (M+1)^m M \| A_{01}^n f \| t^n \quad (26)$$

$$\| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \| \leq (M+1)^m (M+1)^n \| f \| \quad (27)$$

De (24), (25), (26) e (27) segue que

$$\begin{aligned} & \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \| \leq (M+1)^{m+n} \min(1, s^m, t^n, s^m t^n) \times \\ & \times (\| f \| + \| A_{10}^m f \| + \| A_{01}^n f \| + \| A_{10}^m A_{01}^n f \|) \end{aligned} \quad (28)$$

Portanto

$$\|f\|_{A,R,Q} \leq \|f\| + (M+1)^m \left\{ \int_0^\infty (s^{-\alpha} \min(1,s)^m)^{\frac{pds}{s}} \right\}^{1/p}.$$

$$(\|f\| + \|A_{10}^m f\|) + (M+1)^n :$$

$$\left\{ \int_0^\infty (t^{-\beta} \min(1,t^n))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} (\|f\| + \|A_{01}^n f\|) +$$

$$(M+1)^{m+n} \left\{ \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (s^{-\alpha} t^{-\beta} \min(1,s^m, t^n, s^m t^n))^{\frac{pds}{s}} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}.$$

$$(\|f\| + \|A_{10}^m f\| + \|A_{01}^n f\| + \|A_{10}^m A_{01}^n f\|)$$

Como

$$s^{-\alpha} \min(1,s^m) \in L_*^p(\mathbb{R}_+), \quad t^{-\beta} \min(1,t^n) \in L_*^q(\mathbb{R}_+)$$

e

$$s^{-\alpha} t^{-\beta} \min(1,s^m, t^n, s^m t^n) \in L_*^Q(\mathbb{R}_+^2)$$

Temos

$$\|f\|_{A,R,Q} \leq C(\alpha, R, Q, M) (\|f\| + \|A_{10}^m f\| + \|A_{01}^n f\| + \|A_{10}^m A_{01}^n f\|) \quad (30)$$

6.1.4. Proposição: Seja $A' = (\alpha', \beta') \leq A'' = (\alpha'', \beta'')$ e

$$1 \leq Q \leq \infty.$$

$$X(A'', R, Q) \subset X(A', R, Q) \quad (1)$$

Mas ainda, para $0 < A < R$ e $1 \leq R < \infty$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} D(A_{10}^{mk}, A_{01}^{nk_2})$ é um subespaço denso de $X(A, R, Q)$.

Demonstração: Como $s^{-\alpha'} \leq s^{-\alpha''}$ e $t^{-\beta'} \leq t^{-\beta''}$ para $0 < s, t \leq 1$ e $0 < A' = (\alpha', \beta') \leq A'' = (\alpha'', \beta'')$ temos

$$\begin{aligned}
 & \|f\|_{A', R, Q} = \\
 & = \|f\| + \left\{ \int_0^\infty (s^{-\alpha'} \| [S(s) - I]^m f \|)^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p} + \\
 & \left\{ \int_0^\infty (t^{-\beta'} \| [T(t) - I]^n f \|)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
 & \left\{ \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (s^{-\alpha'} t^{-\beta'} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \\
 & \leq \|f\| + \left\{ \int_0^1 (s^{-\alpha'} \| [S(s) - I]^m f \|)^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p} + \\
 & \left\{ \int_1^\infty (s^{-\alpha'} \| [S(s) - I]^m f \|)^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p} + \\
 & \left\{ \int_0^1 (t^{-\beta'} \| [T(t) - I]^n f \|)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
 & \left\{ \int_1^\infty (t^{-\beta'} \| [T(t) - I]^n f \|)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
 & \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 (s^{-\alpha'} t^{-\beta'} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
 & \left\{ \int_0^1 \left[\int_1^\infty (s^{-\alpha'} t^{-\beta'} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
 & \left\{ \int_1^\infty \left[\int_0^1 (s^{-\alpha'} t^{-\beta'} \| [S(s) - I]^m [T(t) - I]^n f \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_1^\infty \left[\int_1^\infty (s^{-\alpha'} t^{-\beta'}) \| [S(s)-I]^m [T(t)-I]^n f \| \right)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \\
& \leq \| f \| + \left\{ \int_0^1 (s^{-\alpha''} \| [S(s)-I] f \|)^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p} + \\
& \frac{(M+1)^m}{(\alpha' p)^{1/p}} \| f \| + \left\{ \int_0^1 (t^{-\beta''} \| [T(t)-I]^n f \|)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
& \frac{(M+1)^n}{(\beta' q)^{1/q}} \| f \| + \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 (s^{-\alpha''} t^{-\beta''} \| [S(s)-I]^m [T(t)-I]^n f \|)^p \frac{ds}{s} \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
& \frac{(M+1)^m}{(\alpha' p)^{1/p}} \left\{ \int_0^1 (t^{-\beta''} \| [T(t)-I]^n f \|)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \\
& \frac{(M+1)^n}{(\beta' q)^{1/q}} \left\{ \int_0^1 (s^{-\alpha''} \| [S(s)-I]^m f \|)^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p} + \frac{(M+1)^{m+n}}{(\alpha' p)^{1/p} (\beta' q)^{1/q}} \| f \| \\
& \leq \left(1 + \frac{(M+1)^m}{(\alpha' p)^{1/p}} + \frac{(M+1)^n}{(\beta' q)^{1/q}} + \frac{(M+1)^{m+n}}{(\alpha' p)^{1/p} (\beta' q)^{1/q}} \right) \| f \|_{A'', B, Q}
\end{aligned}$$

Agora sejam $f \in X(A, R, Q)$ e $(s, t) > 0$. Definimos

$$f_s = s^{-m} \int_0^s \int_0^s S(u_1 + \dots + u_m) f \, du_1 \dots du_m \quad (1)$$

$$f_t = t^{-n} \int_0^t \int_0^t T(v_1 + \dots + v_n) f \, dv_1 \dots dv_n \quad (2)$$

$$f_{st} = s^{-m} t^{-n} \int_0^t \dots \int_0^t \int_0^s \dots \int_0^s S(u_1 + \dots + u_m) T(v_1 + \dots + v_n) f \, du_1 \dots du_m \, dv_1 \dots dv_n$$

Obviamente temos que $f_{st} \in \bigcap_{k \in \mathbb{Q}} (A_{10}^{k_1 m} A_{01}^{k_2 n})$ e

$$A_{10}^m f_{st} = s^{-m} |S(s) - I|^m f_t \quad (4)$$

$$A_{01}^n f_{st} = t^{-n} |T(t) - I|^n f_s \quad (5)$$

$$A_{10}^m A_{01}^n f_{st} = s^{-m} t^{-n} |S(s) - I|^m |T(t) - I|^n f \quad (6)$$

Para a e b fixado, temos

$$\|f - f_{st}\|_{A,R,Q} \leq$$

$$\|f - f_{st}\|_X + \left\{ \int_0^a (u^{-\alpha} \| [S(u) - I]^m (f - f_{st}) \|)^p \frac{du}{u} \right\}^{1/p} +$$

$$\left\{ \int_a^\infty (u^{-\alpha} \| [S(u) - I]^m (f - f_{st}) \|)^p \frac{du}{u} \right\}^{1/p} +$$

$$\left\{ \int_0^b (v^{-\beta} \| [T(v) - I]^n (f - f_{st}) \|)^q \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} +$$

$$\left\{ \int_b^\infty (v^{-\beta} \| [T(v) - I]^n (f - f_{st}) \|)^q \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} +$$

$$\left\{ \int_0^b \left[\int_0^a (u^{-\alpha} v^{-\beta} \| [S(u) - I]^m [T(v) - I]^n (f - f_{st}) \|)^p \frac{du}{u} \right]^{q/p} \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} +$$

$$\left\{ \int_0^b \left[\int_a^\infty (u^{-\alpha} v^{-\beta} \| [S(u) - I]^m [T(v) - I]^n (f - f_{st}) \|)^p \frac{du}{u} \right]^{q/p} \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} +$$

$$\left\{ \int_b^\infty \left[\int_0^a (u^{-\alpha} v^{-\beta} \| [S(u)-I]^m [T(v)-I]^n (f-f_{st}) \|)^p \frac{du}{u} \right]^{q/p} \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} +$$

$$\left\{ \int_b^\infty \left[\int_a^\infty (u^{-\alpha} v^{-\beta} \| [S(u)-I]^m [T(v)-I]^n (f-f_{st}) \|)^p \frac{du}{u} \right]^{q/p} \frac{dv}{v} \right\}^{1/q}$$

$$= \| f-f_{st} \| + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8$$

Visto que

$$\| [S(u)-I]^m f_{st} \| \leq M \| [S(u)-I]^m f \| \quad (7)$$

$$\| [T(v)-I]^n f_{st} \| \leq M \| [T(v)-I]^n f \| \quad (8)$$

$$\| [S(s)-I]^m [T(v)-I]^n f_{st} \| \leq M \| [S(u)-I]^m [T(v)-I]^n f \| \quad (9)$$

Temos

$$I_1 \leq (M+1) \left\{ \int_0^a (u^{-\alpha} \| [S(u)-I]^m f \|)^p \frac{du}{u} \right\}^{1/p} \quad (10)$$

$$I_2 \leq \frac{(M+1)^m}{(\alpha p)^{1/p}} a^{-\alpha} \| f-f_{st} \| \quad (11)$$

$$I_3 \leq (M+1) \left\{ \int_0^b (v^{-\beta} \| [T(v)-I]^n f \|)^q \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} \quad (12)$$

$$I_4 \leq \frac{(M+1)^n}{(\beta q)^{1/q}} b^{-\beta} \| f-f_{st} \| \quad (13)$$

$$I_5 \leq (M+1) \left\{ \int_0^b \left[\int_0^a (u^{-\alpha} v^{-\beta} \| [S(u)-I]^m [T(v)-I]^n f \|)^p \frac{du}{u} \right]^{q/p} \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} \quad (14)$$

$$I_6 \leq (M+1) \left\{ \int_0^b \left[\int_0^\infty (u^{-\alpha} v^{-\beta} \| [S(u)-I]^m [T(v)-I]^n f \|)^p \frac{du}{u} \right]^{q/p} \frac{dv}{v} \right\}^{1/q} \quad (15)$$

$$I_7 \leq (M+1)^{n+1} \frac{b^{-\beta}}{(\beta q)^{1/q}} \left\{ \int_0^a (u^{-\alpha} \| [S(u)-I]^m f \|)^p \frac{du}{u} \right\}^{1/p} \quad (16)$$

$$I_8 \leq (M+1)^{m+n} \frac{a^{-\alpha}}{(\alpha p)^{1/p}} \frac{b^{-\beta}}{(\beta q)^{1/q}} \| f - f_{st} \| \quad (17)$$

Como $f \in X(A, R, Q)$, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher a e b de forma que $I_1, I_3, I_5, I_7 \leq \varepsilon$. Por outro lado, como $\| f - f_{st} \| \rightarrow 0$, quando $(s, t) \rightarrow (0, 0)$, fixados a e b , podemos escolher s e t de modo que tenhamos I_2, I_4 e $I_8 \leq \varepsilon$.

6.1.5. Observação: É fácil ver que, se $f \in X(A, R, Q)$ então $S(s)T(t)f \in X(A, R, Q)$ para todo $(s, t) \in \bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+$ e

$$\| S(s)T(t)f \|_{A, R, Q} \leq M \| f \|$$

ou seja, os espaços $X(A, R, Q)$ são invariantes em relação ao semi-grupo $\{S(s)T(t); (s, t) \in \bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+\}$ e a restrição deste semi-grupo a $X(A, R, Q)$ define um semi-grupo equi-limitado em $L(X(A, R, Q))$. Queremos determinar agora a classe das funções $f \in X(A, R, Q)$ para as quais a restrição é de classe (C_0) em $L(X(A, R, Q))$.

6.1.6. Definição: Denotaremos por $X^0(A, R, Q)$ o conjunto das $f \in X(A, R, Q)$, tais que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0_+ \\ t \rightarrow 0_+}} \| S(s)T(t)f - f \|_{A, R, Q} = 0$$

6.1.7. Proposição: $X^0(A, R, Q)$ é um subespaço fechado de $X(A, R, Q)$ e é igual ao fecho de $\bigcap_k D(A_{10}^{mk} A_{01}^{nk})^2$ em $X(A, R, Q)$.

Demonstração: Claro que $X^0(A, R, Q)$ é um subespaço de $X(A, R, Q)$. Para provar que é fechado, suponhamos que $(f_j)_j$ seja uma sequência em $X^0(A, R, Q)$ que convirja a um elemento g pertencente ao fecho de $X^0(A, R, Q)$ em $X(A, R, Q)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem $j \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tal que

$$\|f_j - g\|_{A, R, Q} < \varepsilon/2(M+1) \quad , \quad j \geq N \quad (1)$$

$$\|S(s)T(t)f_j - f_j\|_{A, R, Q} < \varepsilon/2 \quad \text{para } 0 < s, t < \delta \quad (2)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|S(s)T(t)g - g\|_{A, R, Q} &\leq \|S(s)T(t)g - S(s)T(t)f_j\|_{A, R, Q} + \\ &\quad \|S(s)T(t)f_j - f_j\|_{A, R, Q} + \|f_j - g\|_{A, R, Q} \\ &\leq (M+1) \|f_j - g\|_{A, R, Q} + \|S(s)T(t)f_j - f_j\|_{A, R, Q} < \varepsilon \end{aligned}$$

para $0 < s, t < \delta$ e consequentemente $X^0(A, R, Q)$ é fechado.

Pela proposição 6.1.3, $\bigcap_k D(A_{10}^{mk} A_{01}^{nk})^2 \subset X(A, R, Q)$.

Afirmamos que $\bigcap_k D(A_{10}^{mk} A_{01}^{nk})^2 \subset X^0(A, R, Q)$. Com efeito, de 6.1.3(30) obtemos, para toda $f \in \bigcap_k D(A_{10}^{mk} A_{01}^{nk})^2$:

$$\begin{aligned} \|S(s)T(t)f - f\|_{A, R, Q} &\leq C(\|S(s)T(t)f - f\| + \|S(s)T(t)A_{10}^m f - A_{10}^m f\| + \\ &\quad + \|S(s)T(t)A_{01}^n f - A_{01}^n f\| + \|S(s)T(t)A_{10}^m A_{01}^n f - A_{10}^m A_{01}^n f\|) \end{aligned} \quad (3)$$

e a expressão da direita converge para zero, quando $(s,t) \rightarrow (0,0)$. Resta mostrar que $\cap_k D(A_{10}^{mk} A_{01}^{nk} f)$ é denso em $X^0(A,R,Q)$. Para toda $f \in X^0(A,R,Q)$, a função

$$(s,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \rightarrow S(s)T(t)f \in X(A,R,Q)$$

é fortemente contínua e portanto a integral 6.1.4. (3) existe no sentido de Riemann e

$$\|f - f_{st}\|_{A,R,Q} \leq s^{-m} s^{-n} \int_0^t \dots \int_0^t \int_0^s \dots \int_0^s \|ST(u_1 + \dots + u_m, v_1 + \dots + v_n)f - f\|_{A,R,Q} du_1 \dots du_m dv_1 \dots dv_n < \epsilon$$

para s e t suficientemente pequenos. Por outro lado

$$f_{st} \in \cap_k D(A_{10}^{mk} A_{01}^{nk} f), \text{ para todo } s, t > 0.$$

6.1.8. Corolário: O subespaço $X^0(A,R,Q)$ é igual a $X(A,R,Q)$ para $0 < A < R$, $1 \leq Q < \infty$.

Demonstração: Segue imediatamente das proposições 6.1.4(b) e 6.1.7.

6.1.9. Corolário: Para $R = (m,n)$, temos

$$\cap_k D(A_{10}^{mk} A_{01}^{nk} f) \equiv X^0(R,R,\infty) \quad (1)$$

Demonstração: Como

$$\| [S(s) - I]^m f \| \leq M s^m \| A_{10}^m f \|, \quad \| [T(t) - I]^n f \| \leq M t^n \| A_{01}^n f \|^2$$

e

$$\| [S(s)-I]^m [T(t)-I]^n f \| \leq M s^m t^n \| A_{10}^m A_{01}^n f \|$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \| f \|_{R, R, \infty} &= \| f \| + \sup_{0 < s < \infty} s^{-m} \| [S(s)-I]^m f \| + \\ &\quad \sup_{0 < t < \infty} t^{-n} \| [T(t)-I]^n f \| + \\ &\quad \sup_{\substack{0 < s < \infty \\ 0 < t < \infty}} s^{-m} t^{-n} \| [S(s)-I]^m [T(t)-I]^n f \| \\ &\leq M (\| f \| + \| A_{10}^m f \| + \| A_{01}^n f \| + \| A_{10}^m A_{01}^n f \|) \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\| A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2} f \| = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow 0}} s^{-mk_1} t^{-nk_2} \| [S(s)-I]^{mk_1} [T(t)-I]^{nk_2} f \|$$

Donde concluimos que

$$\| f \|_X + \| A_{10}^m f \| + \| A_{01}^n f \| + \| A_{10}^m A_{01}^n f \| \leq \| f \|_{R, R, \infty}$$

$$\text{se } f \in \bigcap_k^D (A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2})$$

De (1) segue que $\bigcap_k^D (A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2}) \subset X(R, R, \infty)$ e de (2) segue que $\bigcap_k^D (A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2})$ é um subespaço fechado de $X(R, R, \infty)$. De fato, se $\{f_j\}$ em $\bigcap_k^D (A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2})$ tal que

$$f_j \rightarrow f \in X(R, R, \infty)$$

Então (f_j) é de Cauchy em $X(R, R, \infty)$. Por (2) $(A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2} f_n)$ é de Cauchy em X , para $k \in \mathbb{Q}$. Portanto

$$A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2} f_j \rightarrow g_{k_1, k_2}$$

Como $A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2}$ é fechado, temos que $f \in \bigcap_k D(A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2})$ e $A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2} f = g_{k_1, k_2}$.

Como $\bigcap_k D(A_{10}^{mk_1} A_{01}^{nk_2})$ é denso em $X^0(R, R, \infty)$, estes espaços são iguais.

6.1.10. Para concluir esta seção daremos uma caracterização equivalente do espaço $X(A, R, Q)$. Para tanto consideremos

$$\omega_{m,0}(s;f) = \sup_{0 \leq u \leq s} (||[S(u)-I]^m f||) \quad (1)$$

$$\Omega_{0,n}(t;f) = \sup_{0 \leq v \leq t} (||[T(v)-I]^n f||) \quad (2)$$

$$\omega_{m,n}(s,t;f) = \sup_{\substack{0 \leq u \leq s \\ 0 \leq v \leq t}} (||[S(u)-I]^m [T(v)-I]^n f||) \quad (3)$$

$$\Delta_s^m f = [S(s)-I]^m f \quad (4)$$

$$\Delta_t^n f = [T(t)-I]^n f \quad (5)$$

$$\Delta_{s,t}^{m,n} = [S(s)-I]^m [T(t)-I]^n f \quad (6)$$

$$H_m(s) = m^{m-1}/(m-1)! \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{m}{k} (s-k/m)^{m-1} \quad (7)$$

se $j/m \leq s \leq (j+1)/m$, $(j = 0, \dots, m-1)$.

A função H_m goza das seguintes propriedades (Ver Peetre [26]):

$$H_m^{(i)}(0) = H_m^{(i)}(1) = 0 \quad \text{se } i = 0, 1, \dots, m-2 \quad (8)$$

$$H_m^{(m-1)}(s) = m^{m-1} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{m}{k} \quad \text{se } j/m \leq s < (j+1)/m \quad (9)$$

$$\int_0^1 H_m(s) ds = 1 \quad (10)$$

$$\int_0^1 H_m^{(i)}(s) ds = 0 \quad \text{se } i = 1, \dots, m-1 \quad (11)$$

$H_m \in C^{m-2}$, $H_m^{(m-1)}$ é uma função em escada.

Além disso, se $\{T(-t): 0 \leq t < \infty\}$ é um semi-grupo de classe (C_0) em $L(X)$, uniformemente limitado por 1 e com gerador infinitesimal A e se definirmos

$$f_t = \int_0^1 H_m(s) (I - (I - T(st))^m) f ds$$

então

$$f_t \in D(A^m)$$

para todo $t \in (0, \infty)$ e

$$t^m A^m f_t = m^{m-1} \sum_{j=1}^m (-1)^{j+m+1} \binom{m}{j} j^{-m} \left[I - T\left(\frac{j}{m} t\right) \right]^m f \quad (13)$$

6.1.11. Proposição: Para $0 < A < R$, $1 \leq Q = (p, q) \leq \infty$, as seguintes normas são equivalentes

$$\begin{aligned} & \|f\| + \|s^{-\alpha} \omega_{m,0}(s;f)\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+)} + \|t^{-\beta} \omega_{0,n}(t;f)\|_{L_*^q(\mathbb{R}_+)} + \\ & + \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \mu_{m,n}(s,t;f)\|_{L_*^Q(\mathbb{R}_+^2)} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \|f\| + \|s^{-\alpha} \|\Delta_s^m f\|\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+)} + \|t^{-\beta} \|\Delta_t^n f\|\|_{L_*^q(\mathbb{R}_+)} + \\ & + \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \|\Delta_{s,t}^{m,n} f\|\|_{L_*^Q(\mathbb{R}_+^2)} \end{aligned} \quad (2)$$

Demonstração: É claro que a segunda norma é menor ou igual do que a primeira.

Dado $f \in X$, definimos

$$f_{00}(s,t) = (-1)^{m+n} \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) \Delta_{us,vt}^{m,n} f \, du dv$$

$$f_{1,0}(s,t) = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) \Delta_{vt}^m [I - (-1)^m \Delta_{ns}^m] f \, du dv$$

$$f_{01}(s,t) = (-1)^m \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) \Delta_{us}^n [I - (-1)^n \Delta_{vt}^n] f \, du dv$$

$$f_{11}(s,t) = \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) [I - (-1)^m \Delta_{us}^m] [I - (-1)^n \Delta_{vt}^n] f \, du dv$$

Temos, para todo $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, que

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Q}} f_k(s,t)$$

$$f_{00}(s, t) \in X = X_{00}$$

$$f_{10}(s, t) \in D(A^m) = X_{10}$$

$$f_{01}(s, t) \in D(A^n) = X_{01}$$

$$f_{11}(s, t) \in \bigcap_k D(A_{10}^{k,m} A_{01}^{k,n}) = X_{11}$$

e valem as estimadas

$$\|\Delta_u^m f_{00}(s, t)\| \leq 2^m \|f_{00}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_v^n f_{00}(s, t)\| \leq 2^n \|f_{00}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_{u,v}^{m,n} f_{00}(s, t)\| \leq 2^{m+n} \|f_{00}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_u^m f_{10}(s, t)\| \leq u^m \|A_{10}^m f_{10}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_v^n f_{10}(s, t)\| \leq 2^n \|f_{10}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_{u,v}^{m,n} f_{10}(s, t)\| \leq 2^m u^n \|A_{10}^m f_{10}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_n^m f_{01}(s, t)\| \leq 2^m \|f_{01}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_v^n f_{01}(s, t)\| \leq v^n \|A_{01}^n f_{01}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_{u,v}^{m,n} f_{01}(s, t)\| \leq 2^m v^n \|A_{01}^n f_{01}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_u^m f_{11}(s, t)\| \leq u^m \|A_{10}^m f_{11}(s, t)\|$$

$$\|\Delta_{v,11}^n f(s,t)\| \leq v^n \|A_{01}^n f_{11}(s,t)\|$$

$$\|\Delta_{u,v}^{m,n} f_{11}(s,t)\| \leq u^m v^n \|A_{10}^m A_{01}^n f_{11}(s,t)\|$$

$$\|f_{00}(s,t)\| \leq \int_0^1 \int_0^1 |H_m(u) H_n(v)| \|\Delta_{us,vt}^{m,n} f\| du dv$$

$$\|f_{10}(s,t)\| \leq (2^m - 1) C(m) \int_0^1 |H_n(v)| \|\Delta_{vt}^n f\| dv$$

$$\|f_{01}(s,t)\| \leq (2^n - 1) C(n) \int_0^1 |H_m(u)| \|\Delta_{us}^m f\| du$$

$$s^m \|A_{10}^m f_{10}(s,t)\| \leq m^{m-1} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} j^{-m} \int_0^1 |H_n(v)| \|\Delta_{j/m}^n s \Delta_{vt}^m f\| dv$$

$$t^n \|A_{01}^n f_{01}(s,t)\| \leq n^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j^{-n} \int_0^1 |H_m(u)| \|\Delta_{j/n}^n t \Delta_{us}^m f\| du$$

$$s^m \|A_{10}^m f_{11}(s,t)\| \leq m^{m-1} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} j^{-m} \int_0^1 |H_n(s2)| \|\Delta_{j/m}^m [I - (-1)^n \Delta_{vt}^n] f\| dv$$

$$t^n \|A_{01}^n f_{11}\| \leq n^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j^{-n} \int_0^1 |H_m(u)| \|\Delta_{j/n}^n [I - (-1)^m \Delta_{us}^m] f\| du$$

$$s^m t^n \|A_{10}^m A_{01}^n f_{11}\| \leq m^{m-1} n^{n-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \binom{m}{j} \binom{n}{i} j^{-m} i^{-n} \|\Delta_{j/m}^m \Delta_{i/n}^n s \Delta_{vt}^n f\| du dv$$

Assim, para $0 \leq u \leq s$, temos

$$\|\Delta_u^m f\| \leq \|\Delta_u^m f_{00}(s,t)\| + \|\Delta_u^m f_{10}(s,t)\| + \|\Delta_u^m f_{01}(s,t)\| +$$

$$+ \|\Delta_u^m f_{11}(s,t)\|$$

$$\leq C(\|f_{00}(s,t)\| + u^m \|A_{10}^m f_{10}(s,t)\| +$$

$$\|f_{01}(s,t)\| + u^m \|A_{10}^m f_{11}(s,t)\|)$$

$$\leq C(\|f_{00}(s,t)\| + s^m \|A_{10}^m f_{10}(s,t)\| +$$

$$\|f_{01}(s,t)\| + s^m \|A_{10}^m f_{11}(s,t)\|)$$

Portanto

$$\omega_{m,0}(s,f) \leq C(R)(\|f_{00}(s,t)\| + s^m \|A_{10}^m f_{10}(s,t)\| +$$

$$\|f_{01}(s,t)\| + s^m \|A_{10}^m f_{11}(s,t)\|)$$

$$\leq C\left(\int_0^1 \int_0^1 |H_m(u)H_n(v)| \|\Delta_{us}^m \Delta_{vt}^n f\| \, du dv +\right.$$

$$\int_0^1 |H_m(u)| \|\Delta_{us}^m f\| \, du +$$

$$\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} j^{-m} \int_0^1 |H_n(v)| \|\Delta_{j/s}^m \Delta_{vt}^n f\| \, dv +$$

$$\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} j^{-m} \int_0^1 |H_n(v)| \|\Delta_{j/s}^m [I - (-1)^n \Delta_{vt}^n] f\| \, dv$$

$$\leq C(R) \left(\int_0^1 |H_m(u)| \|\Delta_{us}^m f\| \, du + \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} j^{-m} \|\Delta_{j/s}^m f\| \right)$$

Desse modo, pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
& \|s^{-\alpha} \omega_{m,0}(s,f)\|_{L_*^p} \leq \\
& \leq C \int_0^1 |H_{m_1}(u)| \|s^{-\alpha} \|\Delta_{us}^m f\| \|_{L_*^p} + \\
& C \sum_{j=1}^m (j) j^{-m} \|s^{-\alpha} \|\Delta_{j/m}^m f\| \|_{L_*^p} \\
& \leq C \|s^{-\alpha} \|\Delta_s^m f\| \|_{L_*^p} \int_0^1 |H_m(u)| u^\alpha du \\
& + C \|s^{-\alpha} \|\Delta_s^m f\| \|_{L_*^p} \\
& \leq C \|s^{-\alpha} \|\Delta_s^m f\| \|_{L_*^p}
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\|t^{-\beta} \omega_{0,n}(t,f)\|_{L_*^q} \leq C \|t^{-\beta} \|\Delta_t^n f\| \|_{L_*^q} \quad (4)$$

Por outro lado, para $0 \leq u \leq s$ e $0 \leq v \leq t$, temos

$$\begin{aligned}
& \|\Delta_u^m \Delta_v^n f\| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\Delta_u^m \Delta_v^n f_k\| \\
& \leq C(m,n) \left(\|f_{00}(s,t)\| + u^m \|A_{10}^m f_{10}(s,t)\| + v^n \|A_{01}^n f_{01}(s,t)\| + \right. \\
& \quad \left. u^m v^n \|A_{10}^m A_{01}^n f_{11}(s,t)\| \right) \\
& \leq C(m,n) \left(\|f_{00}(s,t)\| + s^m \|A_{10}^m f_{10}(s,t)\| + t^n \|A_{01}^n f_{01}(s,t)\| + \right. \\
& \quad \left. s^m t^n \|A_{10}^m A_{01}^n f_{11}(s,t)\| \right) .
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $(u, v) \in [0, s] \times [0, t]$, obtemos

$$\omega_{m,n}(s, t; f) \leq C(m, n) \left[\int_0^1 \int_0^1 |H_m(u) H_n(v)| \|\Delta_{us}^m \Delta_{vt}^n f\| \, du dv + \right.$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i)(j) i^{-m} j^{-n} \int_0^1 |H_n(v)| \|\Delta_{i/m}^m \Delta_{j/n}^n f\| \, dv +$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (j)(i) j^{-n} i^{-m} \int_0^1 |H_m(u)| \|\Delta_{j/n}^n \Delta_{i/m}^m f\| \, du +$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i)(j) i^{-m} j^{-n} \|\Delta_{i/m}^m \Delta_{j/n}^n f\|$$

Donde, pela desigualdade de Minkowski

$$\|s^{-\alpha} t^{-\beta} \omega_{m,n}(s, t; f)\|_{L_*^Q} \leq$$

$$\leq C(m, n) \left[\int_0^1 \int_0^1 |H_m(u) H_n(v)| \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \Delta_{us}^m \Delta_{vt}^n f\| \, du dv + \right.$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i)(j) i^{-m} j^{-n} \int_0^1 |H_n(v)| \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \Delta_{i/m}^m \Delta_{j/n}^n f\| \, dv +$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (j)(i) j^{-n} i^{-m} \int_0^1 |H_m(u)| \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \Delta_{j/n}^n \Delta_{i/m}^m f\| \, du +$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i)(j) i^{-m} j^{-n} \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \Delta_{i/m}^m \Delta_{j/n}^n f\|$$

$$\leq C \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \Delta_{s,t}^{m,n} f\|_{L_*^Q}$$

Portanto

$$\|s^{-\alpha}t^{-\beta}\omega_{m,n}(s,t;f)\|_{1,Q} \leq C \|s^{-\alpha}t^{-\beta}\|_{s,t}^{m,n} \|f\|_{L_*^Q} \quad (5)$$

De (3), (4) e (5) segue o resultado

6.2. Os espaços de Banach $X(A,R,Q)$ e sua relação com espaços de interpolação

Sejam $E_{00} = X$, $E_{10} = D(A_{10}^m)$, $E_{01} = D(A_{01}^n)$ e $E_{11} = \bigcap_{k_1, k_2} D(A_{10}^{k_1} A_{01}^{k_2})$. Seja

$$K(s,t;f) = K(s,t;f;E_{00},E_{10},E_{01},E_{11})$$

e consideremos ainda o módulo da continuidade generalizado de ordem $R = (m,n)$:

$$\Omega_{m,n}(s^m, t^n; f) = \min(1, s^m, t^n, s^m t^n) \|f\| +$$

$$\min(1, t^n) \omega_{m,0}(s, f) +$$

$$\min(1, s^m) \omega_{0,n}(t, f) + \omega_{mn}(s, t; f)$$

6.2.1. Lema: $K(s^m, t^n; f)$ é equivalente ao módulo de continuidade generalizado $\Omega_{m,n}(s^m, t^n; f)$.

Demonstração: Mostremos que $\Omega_{m,n}(s^m, t^n; f) \leq C K(s^m, t^n; f)$.

Consideremos uma decomposição de f da forma $f = \sum_{k \in \square} f_k$, onde

$f_k \in E_k$. Então

$$\Omega_{m,n}(s^m, t^n, f) \leq \sum_{k \in \square} \Omega_{m,n}(s^m, t^n; f_k)$$

e valem as estimadas

$$\Omega_{m,n}(s^m, t^n; f_{00}) \leq 4(M+1)^{m+n} \|f_{00}\| \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}(s^m, t^n; f_{10}) &\leq s^m \|f_{10}\| + (M+1)^m s^m \|A_{10}^m f_{10}\| + \\ &\quad (M+1)^n s^m \|f_{10}\| + (M+1)^{m+n} s^m \|A_{10}^m f_{10}\| \\ &\leq 2(M+1)^n s^m \|f_{10}\| + 2(M+1)^{m+n} s^m \|A_{10}^m f_{10}\| \\ &\leq 2(M+1)^{m+n} s^m \|f_{10}\|_{E_{10}} \end{aligned} \quad (2)$$

Analogamente

$$\Omega_{m,n}(s^m, t^n; f_{01}) \leq 2(M+1)^{m+n} t^n \|f_{01}\|_{E_{01}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}(s^m, t^n; f_{11}) &\leq s^m t^n \|f_{11}\| + s^m t^n (M+1)^m \|A_{10}^m f_{11}\| + \\ &\quad (M+1)^n s^m t^n \|A_{01}^n f_{11}\| + (M+1)^{m+n} s^m t^n \|A_{10}^m A_{01}^n f_{11}\| \\ &\leq (M+1)^{m+n} s^m t^n \|f_{11}\|_{E_{11}} \end{aligned} \quad (4)$$

Portanto:

$$\Omega_{m,n}(s^m, t^n; f) \leq 4(M+1)^{m+n} (\|f_{00}\| + s^m \|f_{10}\|_{E_{10}} +$$

$$t^n \|f_{01}\|_{E_{01}} + s^m t^n \|f_{11}\|_{E_{11}})$$

Logo

$$\Omega_{m,n}(s^m, t^n; f) \leq 4(M+1)^{m+n} K(s^m, t^n; f)$$

Mostremos agora que $K(s^m, t^n; f) \leq C \Omega(s^m, t^n; f)$.

1º Caso: $(s, t) \geq 1$

Como $E_{00} = X$, temos que $K(s^m, t^n; f) \leq \|f\|$

Assim

$$K(s^m, t^n; f) \leq \|f\|_X = \min(1, s^m, t^n, s^m t^n) \|f\|$$

$$\leq \Omega_{m,n}(s^m, t^n; f)$$

2º Caso: $0 < s < 1 < t$

$$K(s^m, t^n; f, E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}) \leq K(s^m, f; E_{00}, E_{10})$$

$$\leq C(\omega_{m,0}(s, f) + \min(1, s^m) \|f\|)$$

$$\leq C(\min(1, s^m, t^n, s^m t^n) \|f\| +$$

$$\min(1, t^n) \omega_{m,0}(s, f) +$$

$$\min(1, s^m) \omega_{0,n}(t, f) + \omega_{m,n}(s, t; f) \quad .$$

3º Caso: $0 < t < 1 < s$

Análogo ao caso nº 2

4º Caso: $0 < s, t < 1$

Dada $f \in X$, consideremos novamente a decomposição $f = \sum_{k \in \mathbb{Q}^k} f_k(t)$,
onde

$$f_{00}(s, t) = (1)^{m+n} \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) \Delta_{us, vt}^{m, n} f \, du dv,$$

$$f_{10}(s, t) = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) \Delta_{vt}^n [I - (-1)^m \Delta_{us}^m] f \, du dv,$$

$$f_{01}(s, t) = (-1)^m \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) \Delta_{us}^m [I - (-1)^n \Delta_{vt}^n] f \, du dv,$$

$$f_{11}(s, t) = \int_0^1 \int_0^1 H_m(u) H_n(v) [I - (-1)^m \Delta_{us}^m] [I - (-1)^n \Delta_{vt}^n] f \, du dv.$$

Valem as estimativas

$$\|f_{00}(s, t)\| \leq C(m, n) \omega_{m, n}(s, t; f),$$

$$\|f_{10}(s, t)\| \leq C(m, n) \omega_{0, n}(t; f),$$

$$\|f_{01}(s, t)\| \leq C(m, n) \omega_{m, 0}(s; f),$$

$$\|f_{11}(s, t)\| \leq C(m, n) \|f\|$$

$$\|A_{10}^m f_{10}(s, t)\| \leq C(m, n) s^{-m} \omega_{m, n}(s, t; f)$$

$$\|A_{01}^n f_{01}(s, t)\| \leq C(m, n) t^{-n} \omega_{m, n}(s, t; f)$$

$$\|A_{10}^m f_{11}(s, t)\| \leq C(m, n) s^{-m} \omega_{m, 0}(s; f)$$

$$\|A_{01}^n f_{11}(s, t)\| \leq C(m, n) t^{-n} \omega_{0, n}(t; f)$$

$$\|A_{10}^m A_{01}^n f_{11}(s, t)\| \leq C(m, n) s^{-m} t^{-n} \omega_{m, n}(s, t; f)$$

Assim,

$$K(s^m, t^n; f) \leq \|f_{00}(s, t)\|_{E_{00}} + s^m \|f_{10}(s, t)\|_{E_{10}} + t^n \|f_{01}(s, t)\|_{E_{01}} + s^m t^n \|f_{11}(s, t)\|_{E_{11}}$$

$$= \|f_{00}\|_X + s^m (\|f_{10}\| + \|A_{10}^m f_{10}\|) + t^n (\|f_{01}\| +$$

$$\|A_{01}^n f_{01}\|) + s^m t^n (\|f_{11}\| + \|A_{10}^m f_{10}\| + \|A_{01}^n f_{01}\| + \|A_{10}^m A_{01}^n f_{11}\|)$$

$$\leq C [\omega_{m, n}(s, t; f) + s^m \omega_{0, n}(t, f) + \omega_{m, n}(s, t; f) +$$

$$t^n \omega_{m, 0}(s, f) + \omega_{m, n}(s, t; f) + s^m t^n \|f\| +$$

$$t^n \omega_{1, 0}(t, f) + s^m \omega_{0, n}(t, f) + \omega_{m, n}(s, t; f).$$

$$\leq C [s^m t^n \|f\| + t^n \omega_{m, 0}(s, f) +$$

$$s^m \omega_{0,n}(t,f) + \omega_{m,n}(s,t,f)]$$

$$\leq C[\min(1, s^m, t^n, s^n t^m) \|f\| +$$

$$\min(1, t^n) \omega_{m,0}(s,f) +$$

$$\min(1, s^m) \omega_{0,n}(t,f) + \omega_{m,n}(s,t,f)]$$

Estamos agora em condições de estabelecer a relação entre os espaços $X(A,R,Q)$ e os espaços de interpolação de Fernandez.

Consideremos a família admissível $E = (E_k : k \in \square)$ com E_k como definido anteriormente.

6.2.2. Teorema: Para $0 < A = (\alpha, \beta) < R = (m, n)$, com $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $1 \leq Q = (p, q) \leq \infty$, temos

$$(E_k : k \in \square)_{\theta, Q, K} = X(A, R, Q) \quad (1)$$

onde $\theta = A/R = (\alpha/m, \beta/n)$. Além disso, para $X(A, R, Q)$ temos as seguintes normas equivalentes:

$$\|f\| + \|s^{-\alpha} \|\Delta_s^m f\| \|_{L^p_{*}(\mathbb{R})} + \|t^{-\beta} \|\Delta_t^n f\| \|_{L^q_{*}} +$$

$$\|s^{-\alpha} t^{-\beta} \|\Delta_{s,t}^{m,n} f\| \|_{L^Q_{*}} \quad (2)$$

$$\|f\| + \|s^{-\alpha} \omega_{m,o}(s,f)\|_{L_*^P} + \|t^{-\beta} \omega_{o,n}(t,f)\|_{L_*^Q} +$$

$$\|s^{-\alpha} t^{-\beta} \omega_{m,n}(s,t,f)\|_{L_*^Q}, \quad (3)$$

$$\|s^{-\alpha/m} t^{-\beta/n} K(s,t,f)\|_{L_*^Q}, \quad (4)$$

$$\|s^{-\alpha/m} t^{-\beta/n} J(s,t;u(s,t))\|_{L_*^Q}, \quad (5)$$

onde $f = \int u(s,t) ds/s dt/t$.

Demonstração: A equivalência das normas (2) e (3) já foi demonstrada em 6.1.11, assim como a equivalência entre (4) e (5) segue da equivalência dos métodos J e K. Mostremos então a equivalência entre (3) e (4).

Primeiro mostraremos que (4) $\leq$ (3). Como $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (\alpha/m, \beta/n)$, obtemos

$$\|s^{-\theta_1} t^{-\theta_2} K(s,t,f)\|_{L_*^Q(\mathbb{R}_+^2)} = C' \|s^{-m\theta_1} t^{-n\theta_2} K(s^m, t^n, f)\|_{L_*^Q}$$

$$\leq C' [\|s^{-\alpha} t^{-\beta} \min(1, s^m, t^n, s^m t^n) \|f\| \|_{L_*^Q} +$$

$$\|s^{-\alpha} t^{-\beta} \min(1, s^m) \omega_{o,n}(t,f)\|_{L_*^Q} +$$

$$\|s^{-\alpha} t^{-\beta} \min(a, t^n) \omega_{m,o}(s,f)\|_{L_*^Q} +$$

$$\begin{aligned}
& \| s^{-\alpha} t^{-\beta} \omega_{m,n}(s,t;f) \|_{L_*^Q} \\
& = C [C_{00} \|f\| + C_{01} \|s^{-\alpha} \omega_{m,0}(s,f)\|_{L_*^P} \\
& + C_{10} \|t^{-\beta} \omega_{0,n}(t,f)\|_{L_*^Q} + \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \omega_{m,n}(s,t;f)\|_{L_*^Q}] \\
& \leq C [\|f\| + \|s^{-\alpha} \omega_{m,0}(s,f)\|_{L_*^P} + \|t^{-\beta} \omega_{0,n}(t,f)\|_{L_*^Q} \\
& + \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \omega_{m,n}(s,t;f)\|_{L_*^Q}]
\end{aligned}$$

Reciprocamente, temos que

$$\| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \min(1, s^m, t^n, s^m t^n) \|f\|_{L_*^Q} \leq \| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \omega_{m,n}(s^m, t^n; f) \|_{L_*^Q}$$

$$\| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \min(1, t^n) \omega_{m,0}(s, f) \|_{L_*^Q} \leq \| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \omega_{m,n}(s^m, t^n; f) \|_{L_*^Q}$$

$$\| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \min(1, s^m) \omega_{0,n}(t, f) \|_{L_*^Q} \leq \| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \omega_{m,n}(s^m, t^n; f) \|_{L_*^Q}$$

$$\| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \omega_{m,n}(s, t; f) \|_{L_*^Q} \leq \| s^{-m\theta} t^{-n\theta} \omega_{m,n}(s^m, t^n; f) \|_{L_*^Q}$$

Como

$$s^{-m\theta_1} t^{-n\theta_2} \min(1, s^m, t^n, s^m t^n) = \{s^{-m\theta_1} \min(1, s^m)\} \{t^{-n\theta_2} \min(1, t^n)\} ,$$

$$s^{-m\theta_1} \min(1, s^m) \in L_*^P \text{ e } t^{-n\theta_2} \min(1, t^n) \in L_*^Q ,$$

temos que

$$C [\|f\| + \|s^{-m\theta_1} \omega_{m,o}(s, f)\|_{L_*^P} + \|t^{-n\theta_2} \omega_{o,n}(t, f)\|_{L_*^Q} +$$

$$+ \|s^{-m\theta_1} t^{-n\theta_2} \omega_{m,n}(s, t; f)\|_{L_*^Q}] \leq$$

$$\leq 4 \|s^{-m\theta_1} t^{-n\theta_2} \Omega_{m,n}(s^m, t^n; f)\|_{L_*^Q}$$

$$\leq 4C \|s^{-m\theta_1} t^{-n\theta_2} K(s^m, t^n; f)\|_{L_*^Q}$$

$$\leq 4C m^{-1/p} n^{-1/q} \|s^{-\theta_1} t^{-\theta_2} K(s, t; f)\|_{L_*^Q} .$$

Ou seja

$$C \|s^{-\theta_1} t^{-\theta_2} K(s, t; f)\|_{L_*^Q} \geq \|f\| + \|s^{-\alpha} \omega_{m,o}(s, f)\|_{L_*^P} +$$

$$+ \|t^{-\beta} \omega_{o,n}(t, f)\|_{L_*^Q} + \|s^{-\alpha} t^{-\beta} \omega_{m,n}(s, t; f)\|_{L_*^Q} .$$

CAPÍTULO VII

APLICAÇÕES

Neste capítulo final procuramos caracterizar os geradores infinitesimais dos semi-grupos biparamétricos das Translações, de Gauss-Weierstrass e Cauchy-Poisson, à luz da teoria desenvolvida no capítulo I, o que permite visualizar de forma concreta a estrutura abstrata lá introduzida e analisada. Além disto, relacionando os resultados obtidos com o trabalho de Köhnen [21] (Veja observação 1.15), obtemos alguns resultados de regularidade.

7.1. O Semi-grupo das Translações

No que segue, denotaremos por $U \subset B(\mathbb{R}^2)$ o espaço vetorial das funções reais definidas no $\mathbb{R}^2$ que são uniformemente contínuas e limitadas, munido da norma do supremo. Este espaço tem a função de substituir o L^∞ .

Utilizaremos as seguintes notações:

- a) $\int$ indica que a integral é tomada sobre a reta;
- b) $\iint$ indica que a integral é tomada sobre o plano;
- c) $\tau_h^1 f(x,y) = f(x+h,y)$ e $\tau_k^2 f(x,y) = f(x,y+k)$ indicam as translações na primeira e segunda variável, respectivamente;
- d) $\Delta_h^1 f(x,y) = f(x+h,y) - f(x,y)$ e $\Delta_k^2 f(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y)$, as diferenças na primeira e segunda variável, respectivamente.

7.1.1. Seja $X = U \subset B(\mathbb{R}^2)$ ou $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$. Definimos as

famílias de operadores

$$[S(s)f](x,y) = f(x+s,y) \quad , \quad s \in [0, \infty) \quad , \quad f \in X \quad ;$$

$$[T(t)f](x,y) = f(x,y+t) \quad , \quad t \in [0, \infty) \quad , \quad f \in X \quad .$$

7.1.2. Proposição: As famílias de operadores $\{S(s); s \in [0, \infty)\}$ e $\{T(t); t \in [0, \infty)\}$ são semi-grupos de contração uniparamétrico de classe (C_0) em $L(X)$.

Demonstração: Consideremos $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$ e a família $\{S(s); s \in [0, \infty)\}$. O caso $X = U \subset B(\mathbb{R}^2)$ é mais simples.

Obviamente, os operadores considerados são lineares. Além disso

$$\begin{aligned} \|S(s)f\|_{L^p} &= \left\{ \iint |S(s)f(x,y)|^p dx dy \right\}^{1/p} \\ &= \left\{ \iint |f(x+s,y)|^p dx dy \right\}^{1/p} = \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

ou seja

$$\|S(s)\| = 1 \quad .$$

As condições i) e ii) da definição 2 do Apêndice são trivialmente satisfeitas.

Também temos que

$$\|S(s)f - f\| = \left\{ \iint |f(x+s,y) - f(x,y)|^p dx dy \right\}^{1/p}$$

converge para zero, quando $s \rightarrow 0$, pela continuidade da norma L^p .

Resultados análogos valem para a família $\{T(t); 0 \leq t < \infty\}$, das translações na segunda variável.

7.1.3. Observemos ainda que as famílias consideradas são comutativas, isto é, para todo s e t em $[0, \infty)$, temos

$$S(s)T(t) = T(t)S(s)$$

Portanto, se definirmos

$$[U(s,t)f](x,y) = f(x+s,y+t) = \tau_t^2 \tau_s^1 f(x,y)$$

ou seja

$$U(s,t)f = T(t)S(s)f$$

então, pela proposição 1.1.4 temos:

7.1.4. Proposição: A família de operadores $\{U(s,t); s,t \in [0,\infty)\}$ é um semi-grupo bi-paramétrico de classe (C_0) em $L(X)$.

Queremos agora caracterizar os geradores infinitesimais dos semi-grupos $\{S(s); 0 \leq s < \infty\}$, $\{T_2(t); 0 \leq t < \infty\}$ e $\{U(s,t); 0 \leq s,t < \infty\}$.

7.1.5. Definição: Dada $f \in X$, se existe $g \in X$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| h^{-1} [\tau_h^1 f - f] - g \| = 0$$

diremos que g é derivada parcial no sentido forte, ou na norma X , de f em relação à primeira variável.

7.1.6. Definição: Seja G um domínio do $\mathbb{R}^2$ e $C_c^\infty(G)$ o conjunto das funções ψ infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em G . Diremos que g é a derivada no sentido de Sobolev, ou no sentido fraco, de f com relação a variável x_1 se ambas as funções f e g forem localmente integráveis em G e

$$\iint f \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx = - \iint g \psi dx,$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

7.1.7. Proposição: Se $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tem derivada à direita no sentido forte em relação à variável x , então f tem derivada no sentido fraco em relação a x .

Demonstração: Suponhamos que exista $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| h^{-1} (\tau_h^1 f - f) - g \| = 0 \quad (1)$$

$$L_h f = \iint f(x, y) h^{-1} (\tau_h \psi(x, y) - \psi(x, y)) dx dy \quad (2)$$

Temos que L_h é um funcional contínuo em $L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo $h > 0$ e toda $\psi \in C_c^\infty(G)$.

Por uma mudança de variáveis, temos

$$L_h f = \iint h^{-1} (\tau_h f(x, y) - f(x, y)) \psi(x, y) dx dy \quad (3)$$

Como

$$\|h^{-1}(\tau_h \psi - \psi) - D_1 \psi\|_\infty$$

converge para zero, quando $h \rightarrow 0_+$, segue por (2) que

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} L_h f = - \iint f(x, y) D_1 \psi(x, y) dx dy \quad (4)$$

De fato

$$\begin{aligned} & |L_h f + \iint f(x, y) D_1 \psi(x, y) dx dy| \\ & \leq \left| \iint f(x, y) \{h^{-1}(\tau_h \psi(x, y) - \psi(x, y)) + D_1 \psi(x, y)\} dx dy \right| \\ & \leq \iint |f(x, y)| |h^{-1}(\tau_h \psi(x, y) - \psi(x, y)) + D_1 \psi(x, y)| dx dy \\ & \leq \|h^{-1}(\tau_h \psi - \psi) + D_1 \psi\| \|f\|_1 \end{aligned}$$

e a última expressão converge para zero, quando $h \rightarrow 0_+$.

Por outro lado, por (1) e (3)

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} L_h f = \iint g(x, y) \psi(x, y) dx dy \quad (5)$$

De fato

$$\begin{aligned} |L_h f - \iint g(x, y) \psi(x, y) dx dy| & \leq \iint |h^{-1}(\tau_h f(x, y) - f(x, y)) - g(x, y)| |\psi(x, y)| dx dy \\ & \leq \|h^{-1}(\tau_h f - f) - g\|_{L^p} \|\psi\|_{L^p}, \end{aligned}$$

e esta última expressão converge para zero, quando $h \rightarrow 0_+$.

Finalmente, por (4) e (5) e para $\psi \in C_c^\infty$, temos

$$\iint f(x,y) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x,y) dx dy = - \iint g(x,y) \psi(x,y) dx dy$$

No que segue, desempenhará um papel importante o clássico teorema de Sobolev-Nikolsky, que enunciaremos a seguir.

7.1.8. Teorema: Sejam f e g funções localmente integráveis em um domínio $G \subset \mathbb{R}^2$. Para que g seja a derivada de f , no sentido fraco, em relação a x_1 em G é necessário e suficiente que, para todo retângulo fechado $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ contido em G seja possível redefinir f , se necessário, em um conjunto de medida 2-dimensional nula, tal que a função modificada f seja representável sob a forma

$$f(x) = f(x_1, y) = \lambda(y) + \int_{a_1}^{x_1} g(t, y) dt$$

Notação: $f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2)$

Observemos que tudo o que foi dito em relação à primeira variável, vale, obviamente, para a segunda variável

7.1.9. Proposição: Os operadores A_{10} e A_{01} , respectivamente, geradores infinitesimais dos semi-grupos $\{T_1(t_1): 0 \leq t_1 < \infty\}$ e $\{T_2(t_2): 0 \leq t_2 < \infty\}$ tem por domínios:

$$D(A_{10}) = \{f \in X: f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x_1} \in X\}$$

$$D(A_{01}) = \{f \in X: f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x_2} \in X\}$$

e além disso

$$A_{10}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad A_{01}f = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Demonstração: Consideremos $X = L^p(\mathbb{R}^2)$ $1 \leq p < \infty$. Para $X = U \subset B(\mathbb{R}^2)$ a demonstração é mais direta.

Suponhamos que $f \in D(A_{10})$. Então existe $g \in X$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|s^{-1}(S(s)-I)f-g\|_X = \lim_{s \rightarrow 0} \|s^{-1}(\tau_s f - f) - g\|_X = 0$$

Portanto f tem uma derivada parcial (à direita) em relação à variável x_1 , no sentido forte. Pela proposição 7.1.7, f tem derivada parcial em relação a variável x_1 no sentido fraco. Logo, pelo teorema 7.1.8, f é localmente absolutamente contínua em relação a variável x_1 , ou seja, f tem uma representação na forma

$$f(x) = f(x_1, y) = \lambda(y) + \int_{a_1}^{x_1} g(t, y) dt$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g = A_{10}f$$

Reciprocamente, se $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in X$, então da igualdade

$$h^{-1}(\tau_h f(x, y) - f(x, y)) - D_1 f(x, y) = h^{-1} \int_0^h D_1(\tau_u f(x, y) - f(x, y)) du$$

segue imediatamente que $f \in D(A_{10})$ e $A_{10}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Argumentos inteiramente análogos caracterizam

$D(A_{01})$.

A demonstração está completa.

Agora é imediato ver que

7.1.10. Proposição:

$$D(A_{10}A_{01}) = \{f \in X \mid f \in AC^{01}(\mathbb{R}^2), D_2f \in AC^{10}(\mathbb{R}^2)\},$$

$$D_2f, D_1D_2f \in X \quad (1)$$

$$A_{10}A_{01}f = D_1D_2f$$

$$D(A_{01}A_{10}) = \{f \in X \mid f \in AC^{10}(\mathbb{R}^2), D_1f \in AC^{01}(\mathbb{R}^2)\},$$

$$D_1f, D_2D_1f \in X \quad (2)$$

e

$$A_{01}A_{10}f = D_2D_1f$$

onde $D_j = \partial/\partial x_j$.

Seja, agora, A_{11} o gerador infinitesimal o semi-grupo biparamétrico

$$[U(s,t)f](x,y) = f(x+s, y+t) = \tau_s^1 \tau_t^2 f(x,y)$$

segundo a definição 1.2.5.

7.1.11. Definição: Sob as mesmas hipóteses da definição 7.1.6, dizemos que $g = D_{12}f$ no sentido fraco, se:

$$\iint g \psi dx dy = \iint f \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} dx dy$$

para toda $\psi \in C_c^\infty$.

7.1.12. Definição: Sejam

$$Y = \{f \in X \mid D_1 D_2 f \text{ existe e } D_1 D_2 f \in X\}.$$

$$Z = \{f \in X \mid D_{12}f \text{ existe e } D_{12}f \in X\}.$$

7.1.13. Proposição: Temos

$$Y \subset D(A_{11}) \subset Z$$

(10)

Demonstração: a) Se $f \in Y$, temos

$$\Delta_k \Delta_h f(x, y) - D_1 D_2 f(x, y) = \int_0^k \int_0^h D_1 D_2 (\tau_v^2 \tau_u^1 f(x, y) - f(x, y)) du dv$$

Donde, dividindo ambos os membros por hk , pela continuidade da norma, segue que $f \in D(A_{11})$ e $A_{11}f = D_1 D_2 f$.

b) Suponhamos que $f \in D(A_{11})$. Então existe $g \in X$ tal que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \|s^{-1} t^{-1} \Delta_t^2 \Delta_s^1 f - g\| = 0$$

Seja $\psi \in C_0^\infty(G)$ e $h, k > 0$. Definimos

$$L(\psi, h, k)f = \iint f(x, y) h^{-1} k^{-1} \Delta_k^2 \Delta_h^1 \psi(x, y) dx dy \quad (1)$$

Temos que $L(\psi, h, k)$ é um funcional contínuo em X para todo $h, k > 0$ e toda $\psi \in C_0^\infty(G)$.

Por uma mudança de variáveis, temos

$$L(\psi, h, k)f = \iint h^{-1} k^{-1} \Delta_k^2 \Delta_h^1 f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Então

$$|h^{-1} k^{-1} \Delta_k^2 \Delta_h^1 \psi(x, y) - D_2 D_1 \psi(x, y)| \leq h^{-1} k^{-1} \iint |\tau_v^2 \tau_u^1 D_2 D_1 \psi(x, y) - D_2 D_1 \psi(x, y)| du dv$$

e como o segundo membro desta desigualdade converge para zero, quando $h, k \rightarrow 0_+$, segue que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \|h^{-1} k^{-1} \Delta_k^2 \Delta_h^1 \psi - D_2 D_1 \psi\|_\infty = 0$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} L(\psi, h, k)f = \iint f(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy \quad (3)$$

Por outro lado

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} L(\psi, h, k) = \iint g(x, y) \psi(x, y) dx dy \quad (4)$$

De fato:

$$\begin{aligned}
|L(\psi, h, k) f - \iint g(x, y) \psi(x, y) dx dy| &\leq \iint |h^{-1} k^{-1} \Delta_k^2 \Delta_h^1 f(x, y) - g(x, y)| |\psi(x, y)| dx dy \\
&\leq \|h^{-1} k^{-1} \Delta_k^2 \Delta_h^1 f - g\|_X \|\psi\|_{L^P},
\end{aligned}$$

e a última expressão converge para zero, quando $h, k \rightarrow 0$.

De (3) e (4) concluímos que

$$\iint f(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy = \iint g(x, y) \psi(x, y) dx dy$$

Logo $D_{12} f$ existe no sentido fraco e

$$A_{11} f = D_{12} f \quad \text{c.q.d.}$$

Sejam, agora,

$$\|f\|_Y = \|f\|_X + \|D_1 D_2 f\|_X$$

$$\|f\|_Z = \|f\|_X + \|D_{12} f\|_X$$

e

$$\|f\|_{D(A_{11})} = \|f\|_X + \|A_{11} f\|_X$$

7.1.14. Proposição: $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em Z .

Demonstração: Dada $f \in Z$, sejam $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_j \subset \mathbb{R}^2$, K_j compactos tais que $\cup K_j = \mathbb{R}^2$ e $f = \chi_{K_j} \cdot f$. Então, $f_j \in L^P(\mathbb{R}^2)$ e

$$D_{12} f_j = \begin{cases} D_{12} f & \text{em } K_j \\ 0 & \text{em } K_j^c \end{cases}$$

Como $D_{12} f \in L^P(\mathbb{R}^2)$, então $D_{12} f_j \in L^P(\mathbb{R}^2)$ e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_Z = 0$$

Portanto, basta provar a proposição para as funções de suporte compacto.

Seja então,

$$P(x) = \begin{cases} 1/c \exp -1/(1-|x|^2) & , \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

onde

$$c = \int_{\mathbb{R}^2} \exp -1/(1-|x|^2) dx$$

Façamos

$$P_\epsilon(x) = \epsilon^{-2} p(x/\epsilon)$$

e consideremos $g_\epsilon = f * P_\epsilon$.

Sabemos que $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e que g_ϵ converge para f em L^P .

Também, g_ϵ converge para f em Z pois

$$\begin{aligned}\|f * P_\epsilon - f\|_Z &= \|f * P_\epsilon - f\|_X + \|D_{12}(f * P_\epsilon) - D_{12}f\|_X \\ &= \|f * P_\epsilon - f\|_X + \|D_{12}f * P_\epsilon - D_{12}f\|_X\end{aligned}$$

converge para zero, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

7.1.15. Proposição: $D(A_{11})$ é fechado em Z .

Demonstração: Se $f \in D(A_{11})$, então $f \in Z$ e $A_{11}f = D_{12}f$. Assim,

$$\|f\|_{D(A_{11})} = \|f\|_Z \quad (1)$$

Seja $f \in \overline{D(A_{11})}^Z$. Então existe $(f_j) \subset D(A_{11})$ tal que f_j converge para f em Z . Portanto, (f_j) é de Cauchy em Z e por (1) é de Cauchy em $D(A_{11})$. Como $D(A_{11})$ é completo segue que f_j converge para g em $D(A_{11})$. Portanto

$$\begin{aligned}\|f - g\|_Z &\leq \|f_j - f\|_Z + \|f_j - g\|_Z \\ &= \|f_j - f\|_Z + \|f_j - g\|_{D(A_{11})}\end{aligned}$$

converge para zero, quando $j \rightarrow \infty$. Logo, $f = g \in D(A_{11})$ e $D(A_{11})$ é fechado em Z .

7.1.16. Corolário. Temos

$$D(A_{11}) = Z \quad (1)$$

Combinando a proposição 7.1.10 com a observação 1.2.10 obtemos o seguinte resultado de regularidade:

7.1.17. Proposição: Seja $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$. Se $f \in X$ é tal que

$$f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2) \quad (1)$$

$$D_1 f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2) \quad (2)$$

$$D_1 f, D_2 D_1 f \in X \quad (3)$$

Então:

$$f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2), D_2 f \in X \quad (4)$$

$$D_2 f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2), D_1 D_2 f \in X \quad (5)$$

$$D_1 D_2 f = D_1 D_2 f \quad (6)$$

Observemos que o dado interessante fornecido por esta proposição é apenas o item (4), em especial, a garantia da existência de $D_2 f$, pois, com a existência de $D_2 f$ e as hipóteses (1), (2) e (3) as propriedades (5) e (6) podem ser demonstradas facilmente de forma direta.

7.2. O Semi-grupo de Gauss-Weierstrass

7.2.1. Seja $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$. Consideremos as integrais parciais de Gauss-Weierstrass de uma função $f \in X$:

$$[W_1(s)f](x,y) = (4\pi s)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x-u,y) e^{-u^2/4s} du \quad (1)$$

$$[W_2(t)f](x,y) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x,y-v) e^{-v^2/4t} dv \quad (2)$$

Convencionemos que $W_i(0) = I$, ($i=1,2$).

7.2.2. Proposição: As famílias de operadores $\{W_1(s): 0 \leq s < \infty\}$ e $\{W_2(t): 0 \leq t < \infty\}$ são semi-grupos de contração uniparamétricos de classe (C_0) em $L(X)$, com geradores infinitesimais A_{10} e A_{01} , cujos domínios são

$$D(A_{10}) = \{f \in X; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_1^2 f \in X\} \quad (1)$$

e

$$D(A_{01}) = \{f \in X; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_2^2 f \in X\} \quad (2)$$

onde as derivadas em (1) e (2) são tomadas no sentido de Sobolev. Além disso

$$A_{10}f = D_1^2 f \quad (3)$$

e

$$A_{01}f = D_2^2 f \quad (4)$$

Demonstração: O núcleo de Gauss-Weierstrass

$$(GW) \quad w(s,x) = (4\pi s)^{-1/2} \exp(-x^2/4s)$$

satisfaz as seguintes propriedades

$$(GW1) \quad w(s, x) > 0 \quad ,$$

para todo $s > 0$ e $x \in \mathbb{R}$;

$$(GW2) \quad \int_{\mathbb{R}} w(s, x) dx = 1 \quad ;$$

$$(GW3) \quad \int_{|x| > \delta} w(s, x) dx \rightarrow 0 \quad , \quad \text{qdo. } s \rightarrow 0_+ \quad ,$$

para todo $\delta > 0$,

$$(GW4) \quad w(s+t; \cdot) = w(s; \cdot) * w(t; \cdot)$$

Como

$$W_1(s)f = [w(s; \cdot) * f]_{(1)} \quad ,$$

Segue imediatamente da propriedade (GW4) e da associatividade do produto de convolução que

$$W_1(s_1 + s_2) = W_1(s_1) \cdot W_1(s_2)$$

Além disso, segue da desigualdade de Young que

$$\|W_1(s)f\|_X \leq \|w(s; \cdot)\|_1 \cdot \|f\|_X = \|f\|_X$$

Ou seja, para todo $s > 0$, temos

$$\|W_1(s)\|_X \leq 1$$

As propriedades (GW2) e (GW3) dizem exatamente que o núcleo de Gauss-Weierstrass é uma aproximação da identidade. Portanto.

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \|W_1(s)f - f\| = 0$$

Assim, as propriedades da definição 1.1.2, são verificadas.

Para caracterizar o domínio do gerador infinitesimal consideraremos alguns resultados preliminares.

7.2.3. Lema: Temos

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \subset D(A_{10}) \cap D(A_{01}) \quad , \quad (1)$$

$$A_{10}f = D_1^2 f \quad (2)$$

e

$$A_{01}f = D_2^2 f \quad , \quad (3)$$

para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração: Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e façamos

$$f(x, y, \epsilon) = \epsilon^{-2} \{f(x+\epsilon, y) + f(x-\epsilon, y) - 2f(x, y)\} - D_1^2 f(x, y) \quad ,$$

se $\epsilon \neq 0$ e $f(x, y, \epsilon) = 0$, se $\epsilon = 0$.

Temos que $\|f(\cdot, \cdot, \epsilon)\|$ é uma função contínua e limitada de ϵ .

De fato

$$f(x+\epsilon, y) + f(x-\epsilon, y) - 2f(x, y) = \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon D_1^2 f(x-\epsilon+u+v, y) du dv$$

Donde segue que

$$\|\epsilon^{-2} \{f(x+\epsilon, y) + f(x-\epsilon, y) - 2f(x, y)\} - D_1^2 f(x, y)\|_X \leq$$

$$\epsilon^{-2} \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon \|D_1^2 f(x-\epsilon+u_1+u_2, y) - D_1^2 f(x, y)\|_X du_1 du_2$$

converge para zero, quando $\epsilon \rightarrow 0$, pela continuidade da norma $L^p(\mathbb{R}^2)$.

A continuidade e a limitação, fora da origem, são claras.

Observemos também que

$$\begin{aligned} s^{-1} \{ |W_1(s)f|(x, y) - f(x, y) \} - D_1^2 f(x, y) &= \\ &= (16\pi s^3)^{-1/2} \int \epsilon^2 e^{-\epsilon^2/4s} f(x, y, \epsilon) d\epsilon \end{aligned}$$

De fato:

$$\begin{aligned} (16\pi s^3)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \epsilon^2 e^{-\frac{\epsilon^2}{4s}} f(x, y, \epsilon) d\epsilon &= \\ &= (16\pi s^3)^{-1/2} \int \epsilon^2 e^{-\epsilon^2/4s} \{ \epsilon^{-2} [f(x+\epsilon, y) + f(x-\epsilon, y) - 2f(x, y)] - D_1^2 f(x, y) \} d\epsilon \\ &= (4\pi s)^{-1/2} \int e^{-\epsilon^2/4s} \epsilon^{-1} [f(x-\epsilon, y) - f(x, y)] d\epsilon - (16\pi s^3)^{-1/2} D_1^2 f(x, y) \int \epsilon^2 e^{-\epsilon^2/4s} d\epsilon \\ &= (4\pi s)^{-1/2} \int e^{-\epsilon^2/4s} s^{-1} [f(x-\epsilon, y) - f(x, y)] d\epsilon - D_1^2 f(x, y) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \|s^{-1}(W_1(s)f-f)-D_1^2f\|_X &\leq (16\pi s^3)^{-1/2} \int \epsilon^2 e^{-\epsilon^2/4s} \|f(x,y;\epsilon)\|_X d\epsilon \\
 &= (16\pi s^3)^{-1/2} \left(\int_{|\epsilon| \leq \delta} + \int_{|\epsilon| > \delta} \right) \epsilon^2 e^{-\epsilon^2/4s} \|f(\cdot, \cdot; \epsilon)\|_X d\epsilon \\
 &\leq \eta + \frac{C}{2} (\pi s)^{-1/2} \int_{|\epsilon| > \delta} \exp(-\epsilon^2/4s) d\epsilon \leq 2\eta
 \end{aligned}$$

para δ e s suficientemente pequenos.

7.2.4. Lema: Se $D_1^2 f$ existe no sentido de Sobolev e está em $L^P(\mathbb{R}^2)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} [W_1(t)D_1^2 f](x,y)\psi(x,y)dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)[W_1(t)D_1^2 \psi](x,y)dx dy$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração: Seja $D_1^2 f = g$. Por hipótese tem o que

$$\iint g(x,y)\psi(x,y)dx dy = \iint f(x,y)D_1^2 \psi(x,y)dx dy$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \iint [W_1(t)g](x,y)\psi(x,y)dx dy &= \iint g(x,y)[W_1(t)\psi](x,y)dx dy \\
 &= \iint g(x,y) \left\{ (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(x-u,y) e^{-u^2/4t} du \right\} dx dy \\
 &= (4\pi t)^{-1/2} \int e^{-u^2/4t} \left\{ \iint g(x,y)\psi(x-u,y)dx dy \right\} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (4\pi t)^{-1/2} \int e^{-u^2/4t} \left\{ \iint f(x,y) D_1^2 \psi(x-u,y) dx dy \right\} dt \\
&= \iint f(x,y) \left\{ (4\pi t)^{-1/2} \int D_1^2 \psi(x-u,y) e^{-u^2/4t} dt \right\} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) [W(t) D_1^2 \psi](x,y) dx dy.
\end{aligned}$$

Estamos agora em condições de caracterizar o domínio do operador A_{10} .

Suponhamos inicialmente que $f \in D(A_{10})$ e observemos que, pelo Lema 7.2.3, temos que para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $1 \leq p' \leq \infty$

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \|s^{-1}(W_1(s)\psi - \psi) - D_1^2 f\|_{L^{p'}} = 0 \quad (1)$$

Como $f \in D(A_{10})$, existe $g \in X$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \|s^{-1}(W_1(s)f - f) - g\|_X = 0$$

Portanto:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y) g(x,y) dx dy = \lim_{s \rightarrow 0_+} \int_{\mathbb{R}^2} s^{-1} \{ [W_1(s)f](x,y) - f(x,y) \} \psi(x,y) dx dy \quad (5)$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. De fato

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^2} s^{-1} \{ [W_1(s)f](x,y) - f(x,y) \} \psi(x,y) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \psi(x,y) dx dy \right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |s^{-1} \{ [W_1(s)f](x,y) - f(x,y) \} - g(x,y)| |\psi(x,y)| dx dy
\end{aligned}$$

$$\leq \|s^{-1}(W_1(s)f-f)-g\|_X \cdot \left\{ \iint |\psi(x,y)|^{P'} dx dy \right\}^{1/P'}$$

e a última expressão converge para zero, quando $s \rightarrow 0_+$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} s^{-1} \{ [W_1(s)f](x,y) - f(x,y) \} \psi(x,y) dx dy &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) s^{-1} \{ [W_1(s)f](x,y) - f(x,y) \} dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

De fato:

$$\begin{aligned} \iint s^{-1} \{ [W_1(s)f](x,y) - f(x,y) \} \psi(x,y) dx dy &= \\ &= \iint s^{-1} [W_1(s)f](x,y) \psi(x,y) dx dy - s^{-1} \iint f(x,y) \psi(x,y) dx dy \\ &= s^{-1} (4\pi s)^{-1/2} \iint \left\{ \int f(x-u,y) e^{-u^2/4s} du \right\} \psi(x,y) dx dy - s^{-1} \iint f(x,y) \psi(x,y) dx dy = \\ &= s^{-1} (4\pi s)^{-1/2} \int \left\{ \iint f(x-u,y) \psi(x,y) e^{-u^2/4s} dx dy \right\} du - s^{-1} \iint f(x,y) \psi(x,y) dx dy = \\ &= s^{-1} (4\pi s)^{-1/2} \int \left\{ \iint f(x,y) \psi(x+u,y) e^{-u^2/4s} dx dy \right\} dy - s^{-1} \iint f(x,y) \psi(x,y) dx dy = \\ &= s^{-1} (4\pi s)^{-1/2} \int \left\{ \iint f(x,y) \psi(x-u,y) e^{-u^2/4s} dx dy \right\} du - s^{-1} \iint f(x,y) \psi(x,y) dx dy = \\ &= s^{-1} (4\pi s)^{-1/2} \iint \left\{ \int f(x,y) \psi(x-u,y) e^{-u^2/4s} du \right\} dx dy - s^{-1} \iint \psi(x,y) f(x,y) dx dy = \\ &= s^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \{ [W_1(s)\psi](x,y) - \psi(x,y) \} f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

Por (4) e pelo mesmo argumento usado para provar (5) temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \iint f(x,y) s^{-1} \{ [W_1(s)\psi](x,y) - \psi(x,y) \} dx dy = \iint f(x,y) D_1^2 \psi(x,y) dx dy \quad (7)$$

Assim, de (5), (6) e (7) segue que

$$\iint \psi(x,y)g(x,y)dx dy = \iint f(x,y)D_1^2\psi(x,y)dx dy$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Logo, $D_1^2 f$ existe no sentido de Sobolev e está em $L^P(\mathbb{R}^2)$.

Reciprocamente, suponhamos que $f \in L^P(\mathbb{R}^2)$, $D_1^2 f$ exista no sentido de Sobolev e pertença a $L^P(\mathbb{R}^2)$.

Façamos $D_1^2 f = g$. Para todo $S > 0$ temos

$$\begin{aligned} \iint \left[\int_0^S w_1(t)g dt \right] (x,y) \psi(x,y) dx dy &= \\ &= \int_0^S \left\{ \iint [w_1(t)g] (x,y) \psi(x,y) dx dy \right\} dt \\ &= \int_0^S \left\{ \iint f(x,y) [w_1(t)D_1^2\psi] (x,y) dx dy \right\} dt \\ &= \iint f(x,y) \left\{ \int_0^S D_t [w_1(t)\psi] (x,y) dt \right\} dx dy \\ &= \iint f(x,y) [w_1(s)\psi - \psi] (x,y) dx dy \\ &= \iint \psi(x,y) [w_1(s)f - f] (x,y) dx dy, \end{aligned}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Portanto

$$w_1(s)f - f = \int_0^S w_1(t)g dt$$

Donde segue que $g \in D(A_{10})$ e $A_{10}f = g = D_1^2 f$.

Analogamente obtemos a caracterização de $D(A_{01})$.

É imediato ver que:

7.2.5. Proposição: Temos

$$D(A_{01}A_{10}) = \{f \in X \mid D_1^2 f, D_2^2 D_1^2 f \in X\} \quad (1)$$

e

$$D(A_{10}A_{01}) = \{f \in X \mid D_2^2 f, D_1^2 D_2^2 f \in X\} \quad (2)$$

as derivadas em (1) e (2) foram tomadas no sentido de Sobolev.

Além disso

$$A_{01}A_{10}f = D_2^2 D_1^2 f \quad (3)$$

e

$$A_{10}A_{01}f = D_1^2 D_2^2 f \quad (4)$$

7.2.6. Observemos que as famílias

$$\{W_1(s), 0 \leq s < \infty\} \text{ e } \{W_2(t): 0 \leq t < \infty\}$$

são comutativas e que

$$[W_1(s)W_2(t)f](x,y) = (16\pi^2 st)^{-1/2} \iint f(x-u, y-v) \exp\{-(u^2/4s + v^2/4t)\} du dv$$

Definindo

$$W(s,t) = W_1(s)W_2(t)$$

obtemos, pela proposição 1.1.4:

7.2.7. Proposição: A família de operadores

$$\{W(s,t); 0 \leq s,t < \infty\}$$

é um semi-grupo biparamétrico de classe (C_0) em $L(X)$.

Queremos agora caracterizar o gerador infinitesimal A_{11} deste semi-grupo, no sentido da definição 1.2.5. Visando este objetivo, consideremos os seguintes resultados preliminares.

7.2.8. Lema. Se $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, então $\psi \in D(A_{11})$ e

$$A_{11}\psi = D_1^2 D_2^2 \psi$$

Demonstração: Suponhamos que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e seja $\psi(x,y,\epsilon,\eta)$ definida por:

(i) se $\epsilon, \eta \neq 0$

$$\begin{aligned} \psi(x,y,\epsilon,\eta) = & \epsilon^{-2} \eta^{-2} \{ [\psi(x+\epsilon, y+\eta) + \psi(x-\epsilon, y+\eta) + \psi(x+\epsilon, y-\eta) + \psi(x-\epsilon, y-\eta) - \\ & - 2\psi(x+\epsilon, y)] - [2\psi(x-\epsilon, y) + 2\psi(x, y+\eta) + 2\psi(x, y-\eta) - 4\psi(x, y)] \} - \end{aligned}$$

$$- D_2^2 D_2^2 \psi(x, y) \quad ;$$

(ii) se $\epsilon = 0, \eta \neq 0$

$$\psi(x, y, \epsilon, \eta) = \eta^{-2} \{ D_1^2 \psi(x, y, \eta) + D_1^2 \psi(x, y - \eta) - 2 D_1^2 \psi(x, y) \} - D_1^2 D_2^2 \psi(x, y) \quad ;$$

(iii) se $\epsilon \neq 0, \eta = 0$

$$\psi(x, y, \epsilon, \eta) = \epsilon^{-2} \{ D_2^2 \psi(x + \epsilon, y) + D_2^2 \psi(x - \epsilon, y) - 2 D_2^2 \psi(x, y) \} - D_1^2 D_2^2 \psi(x, y) \quad ;$$

(iv) se $\epsilon = 0, \eta = 0$

$$\psi(x, y, \epsilon, \eta) = 0 \quad .$$

Observemos que $\psi(x, y, \epsilon, \eta)$ é contínua como função de ϵ e η e que

(v) se $\epsilon \neq 0, \eta \neq 0$

$$\psi(x, y, \epsilon, \eta) = \epsilon^{-2} \eta^{-2} \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta [D_1^2 D_2^2 \psi(x - \epsilon + u_1 + u_2, y - \eta + v_1 + v_2) - D_1^2 D_2^2 \psi(x, y)] du_1 du_2 dv_1 dv_2 \quad ;$$

(vi) se $\epsilon = 0, \eta \neq 0$

$$\psi(x, y, \epsilon, \eta) = \eta^{-2} \int_0^\eta \int_0^\eta [D_1^2 D_2^2 \psi(x, y - \eta + v_1 + v_2) - D_1^2 D_2^2 \psi(x, y)] dv_1 dv_2 \quad ;$$

(vii) se $\epsilon \neq 0, \eta = 0$

$$\psi(x, y, \epsilon, \eta) = \epsilon^{-2} \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon [D_2^2 D_1^2 \psi(x - \epsilon + u_1 + u_2, y) - D_2^2 D_1^2 \psi(x, y)] du_1 du_2 \quad .$$

Donde segue, pela continuidade da norma $L^P(\mathbb{R}^2)$ que,

$\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\|$ converge para zero quando $\epsilon, n \rightarrow 0$, ou quando $\epsilon = 0$ e $n \rightarrow 0$, ou quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $n = 0$.

Ou seja, $\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\|$ é contínua na origem. Além disso,

$\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\|$ é uma função limitada de (ϵ, n) em $\mathbb{R}^2$. A limitação desta função é clara em pontos não muito próximos aos eixos coordenados ϵ, n . Assim, verifiquemos, por exemplo, a limitação na proximidade do eixo ϵ

$$\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\| \leq \|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n) - \psi(\cdot, \cdot, \epsilon, 0)\| + \|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, 0)\|$$

Mas $\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n) - \psi(\cdot, \cdot, \epsilon, 0)\| = o(1)$ ($n \rightarrow 0$) e $\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, 0)\|$ é limitado para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$. Logo, $\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\|$ é limitada em $\mathbb{R}^2$.

Temos também:

$$\begin{aligned} s^{-1} t^{-1} [W_1(s) - I] [W_2(t) - I] \psi - D_1^2 D_2^2 \psi &= \\ &= (256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \iint \epsilon^2 n^2 \exp(-\epsilon^2/4s) \exp(-n^2/4t) \psi(x, y, \epsilon, n) d\epsilon dn \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \|s^{-1} t^{-1} [W_1(s) - I] [W_2(t) - I] \psi - D_1^2 D_2^2 \psi\| &\leq \\ &\leq (256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \iint \epsilon^2 n^2 \exp\left[-\frac{\epsilon^2}{4s}\right] \exp\left[-\frac{n^2}{4t}\right] \|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\| d\epsilon dn \end{aligned}$$

Pela continuidade da função $\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\|$ na origem, dado

$\delta > 0$, podemos escolher $\lambda > 0$ tal que $\|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\| < \delta$ se $|\epsilon| < \lambda$ e $|n| < \lambda$.

Sejam

$$I_1(s, t) = (256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \int_{|n| < \lambda} \int_{|\epsilon| < \lambda} \exp(-\epsilon^2/4s) \exp(-n^2/4t) \epsilon^2 n^2 \|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\| d\epsilon dn$$

$$I_2(s, t) = (256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \int_{|n| \geq \lambda} \int_{|\epsilon| < \lambda} \epsilon^2 n^2 \exp(-\epsilon^2/4s) \exp(-n^2/4t) \|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\| d\epsilon dn$$

$$I_3(s, t) = (256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \int_{|n| < \lambda} \int_{|\epsilon| \geq \lambda} \epsilon^2 n^2 \exp(-\epsilon^2/4s) \exp(-n^2/4t) \|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\| d\epsilon dn$$

$$I_4(s, t) = (256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \int_{|n| \geq \lambda} \int_{|\epsilon| \geq \lambda} \epsilon^2 n^2 \exp(-\epsilon^2/4s) \exp(-n^2/4t) \|\psi(\cdot, \cdot, \epsilon, n)\| d\epsilon dn$$

Mas,

$$I_1(s, t) \leq \delta \quad \text{para todo } s, t \neq 0$$

$$I_2(s, t) \leq C(256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \int_{|n| \geq \lambda} \int_{|\delta| < \lambda} \exp(-\epsilon^2/4s) \exp(-n^2/4t) \epsilon^2 n^2 d\epsilon dn$$

$$= C(16\pi t^3)^{-1/2} \int_{|n| \leq \lambda} n^2 \exp(-n^2/4t) dn$$

$$= C(4\pi t)^{-1/2} \int_{|n| \geq \lambda} \exp(-n^2/4t) dn < \delta$$

para t suficientemente pequeno. Analogamente

$$I_3(s,t) \leq \frac{c}{\sqrt{4\pi s}} \int_{|\epsilon| \geq \lambda} \exp(-\epsilon^2/4s) d\epsilon < \delta$$

para s suficientemente pequeno.

$$I_4(s,t) \leq C(256\pi s^3 t^3)^{-1/2} \int_{|n| \geq \lambda} \int_{|\epsilon| \geq \lambda} \epsilon^2 n^2 \exp(-\epsilon^2/4s) \exp(-\eta^2/4t) d\epsilon dn$$

$$= C(4\pi s)^{-1/2} \int_{|\epsilon| \geq \lambda} \exp(-\epsilon^2/4s) d\epsilon \cdot (4\pi t)^{-1/2} \int_{|n| \leq \lambda} \exp(-\eta^2/4t) dn < \delta$$

para s, t suficientemente pequenos.

Logo

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \|s^{-1} t^{-1} [W_1(s) - I] [W_2(t) - I] \psi - D_1^2 D_2^2 \psi\| = 0$$

$$\text{Ou seja, } \psi \in D(A_{11}) \quad \text{e} \quad A_{11} \psi = D_1^2 D_2^2 \psi.$$

7.2.9. Lema: Se $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, então

$$\begin{aligned} \iint \{ [W_1(s) - I] [W_2(t) - I] f \} (x, y) g(x, y) dx dy &= \\ &= \iint \{ [W_1(s) - I] [W_2(t) - I] g \} (x, y) f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
& \iint [W(s,t)f](x,y)g(x,y)dxdy = \\
& = \iint \{ (16\pi^2 st)^{-1/2} \iint f(x-u,y-v)\exp(-u^2/4s-v^2/4t)dudv\} g(x,y)dxdy \\
& = (16\pi^2 st)^{-1/2} \iiint f(x-u,y-v)g(x,y)\exp(-u^2/4s-v^2/4t)dxdy dudv \\
& = (16\pi st)^{-1/2} \iiint f(x,y)g(x+u,y+v)\exp(-u^2/4s-v^2/4t)dxdy dudv \\
& = \iint f(x,y)(16\pi st)^{-1/2} \iint g(x-u,y-v)\exp(-u^2/4s-v^2/4t)dudv dxdy \\
& = \iint f(x,y)[W(s,t)g](x,y) dxdy .
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que, para $i = 1, 2$, temos

$$\iint [W_i(\tau)f](x,y)g(x,y)dxdy = \iint f(x,y)[W_i(\tau)g](x,y)dxdy .$$

7.2.10. Lema: Se $g = D_1^2 D_2^2 f$, no sentido de Sobolev, então

$$\iint [W(s,t)g](x,y)\psi(x,y)dxdy = \iint f(x,y)[W(s,t)D_1^2 D_2^2 \psi](x,y)dxdy ,$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\iint [W(s,t)g](x,y)\psi(x,y)dxdy &= \iint g(x,y)[W(s,t)\psi](x,y)dxdy \\
&= \int g(x,y) \{(16\pi^2 st)^{-1/2} \iint \psi(x-u,y-v)\exp(-u^2/4s-v^2/4t)dudv\}dxdy \\
&= (16\pi st)^{-1/2} \iint \exp(-u^2/4s-v^2/4t) \left\{ \iint \psi(x-u,y-v)g(x,y)dxdy \right\} dudv \\
&= (16\pi st)^{-1/2} \iint \exp(-u^2/4s-v^2/4t) \left\{ \iint f(x,y)D_1^2 D_2^2 \psi(x-u,y-v)dxdy \right\} dudv \\
&= \iint f(x,y) \{(16st)^{-1/2} \iint D_1^2 D_2^2 \psi(x-u,y-v)\exp(-u^2/4s-v^2/4t)dudv\}dxdy \\
&= \iint f(x,y) \{W(s,t)D_1^2 D_2^2 \psi(x,y)\}dxdy .
\end{aligned}$$

Antes de enunciarmos o resultado principal desta seção observemos que o cálculo direto nos mostra que, para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos

$$[W(s,t)D_1^2 D_2^2 f](x,y) = D_1^2 D_2^2 [W(s,t)f](x,y) \quad . .$$

7.2.11. Proposição: Temos

$$D(A_{11}) = \{f \in X \mid D_1^2 D_2^2 f \in X\} \quad (1)$$

e

$$A_{11}f = D_1^2 D_2^2 f \quad , \quad (2)$$

onde as derivadas são tomadas no sentido de Sobolev.

Demonstração: Suponhamos que $f \in D(A_{11})$. Observemos inicial-

mente que, pelo lema 7.2.8, para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ temos

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \|s^{-1}t^{-1}[W_1(s)-I][W_2(t)-I]\psi - D_1^2 D_2^2 \psi\| = 0 \quad (1)$$

Como $f \in D(A_{11})$, existe $g \in X$ tal que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \|s^{-1}t^{-1}[W_1(s)-I][W_2(t)-I]f - g\|_{L^p} = 0$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\psi(x,y)dx dy &= \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \int_{\mathbb{R}^2} s^{-1}t^{-1}[W(s)-I][W(t)-I]f(x,y)\psi(x,y)dx dy \\ &= \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)s^{-1}t^{-1}[W_1(s)-I][W_2(t)-I]\psi(x,y)dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)D_1^2 D_2^2 \psi(x,y)dx dy, \end{aligned}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Logo $D_1^2 D_2^2 f$ existe no sentido de Sobolev e $A_{11}f = D_1^2 D_2^2 f$.

Reciprocamente, suponhamos que $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $D_1^2 D_2^2 f$ exista no sentido de Sobolev e pertença a $L^p(\mathbb{R}^2)$. Façamos

$$D_1^2 D_2^2 f = g$$

Para todo par $s, t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \iint \left[\int_0^t \int_0^s W(u,v) g \, dudv \right] (x,y) \psi(x,y) \, dx dy = \\
& = \int_0^t \int_0^s \left\{ \iint [W(u,v) g] (x,y) \psi(x,y) \, dx dy \right\} dudv \\
& = \int_0^t \int_0^s \left\{ \iint f(x,y) [W(u,v) D_1^2 D_2^2 \psi] (x,y) \, dx dy \right\} dudv \\
& = \int_0^t \int_0^s \left\{ \iint f(x,y) D_u D_v [W(u,v) \psi] (x,y) \, dx dy \right\} dudv \\
& = \iint f(x,y) \left\{ \int_0^t \int_0^s D_u D_v [W(u,v) \psi] \, dudv \right\} (x,y) \, dx dy \\
& = \iint f(x,y) \{ [W_1(s) - I] [W_2(t) - I] \psi \} (x,y) \, dx dy \\
& = \iint \psi(x,y) \{ [W_1(s) - I] [W_2(t) - I] \psi \} (x,y) \, dx dy
\end{aligned}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Portanto

$$[W_1(s) - I] [W_2(t) - I] f = \int_0^t \int_0^s W(u,v) g \, dudv$$

Donde segue que $f \in D(A_{11})$ e $A_{11} f = g = D_1^2 D_2^2 f$.

A combinação da proposição 7.2.5. com a observação 1.2.10 fornece o seguinte resultado de regularidade.

7.2.12. Proposição: Seja $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$. Se $f \in X$ é tal que

- i) $D_1^2 f$ existe (no sentido de Sobolev) e $D_1^2 f \in X$
- ii) $D_2^2 D_1^2 f$ existe (no sentido de Sobolev) e $D_2^2 D_1^2 f \in X$

Então:

- a) $D_2^2 f$ existe (no sentido de Sobolev) e $D_2^2 f \in X$
- b) $D_1^2 D_2^2 f$ existe e $D_1^2 D_2^2 f = D_2^2 D_1^2 f \in X$

Novamente observamos que a conclusão relevante desta proposição é o item a), pois, b) pode ser provado diretamente a partir de ii) e a).

7.3. O Semi-grupo de Cauchy Poisson

7.3.1. Seja

$$P_r(z) = P(r, z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{r^2 + z^2} \quad 0 < r < \infty, \quad (1)$$

o núcleo de Poisson no semi-plano superior. Tomemos $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$, e consideremos as integrais singulares parciais de Cauchy-Poisson de uma função $f \in X$, dadas por

$$[V_1(s)f](x, y) = \int P(s, u) f(x-u, y) du \quad 0 < s < \infty \quad (2)$$

$$[V_2(t)f](x, y) = \int P(t, v) f(x, y-v) dx \quad 0 < t < \infty. \quad (3)$$

Convencionemos que $V_i(0) = I$ ($i = 1, 2$), a aplicação identidade.

No que segue, consideremos ainda as transformadas parciais de Hilbert, de Fourier, a convolução parcial, dadas por

$$H_{10}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int \frac{f(u, y)}{x-u} du \quad (4)$$

$$H_{01}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int \frac{f(x, v)}{y-v} dv \quad (5)$$

$$F_{10}f(x, y) = \hat{f}_{(1)}(x, y) = \int f(u, y) e^{-iux} du \quad (6)$$

$$F_{01}f(x, y) = \hat{f}_{(2)}(x, y) = \int f(x, v) e^{-ivy} dv \quad (7)$$

$$(f * g)_{(1)}(x, y) = \int f(u, y) f(x-u, y) du \quad (8)$$

$$(f * g)_{(2)}(x, y) = \int f(x, v) g(x, y-v) dv \quad (9)$$

nos casos em que as integrais tem sentido e também a transformada de Hilbert dupla

$$H_{11}f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \text{v.p.} \iint \frac{f(x-u, y-v)}{uv} dudv \quad (10)$$

7.3.2. Proposição: As famílias de operadores $\{V_1(s): 0 \leq s < \infty\}$ e $\{V_2(t): 0 \leq t < \infty\}$ formam semi-grupos de contração uniparamétricos de classe (C_0) em $L(X)$, com geradores infinitesimais A_{10} e A_{01} , cujos domínios são

$$D(A_{10}) = \{f \in X, H_{10}f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2) \text{ e } D^{10}H_{10}f \in X\} \quad (1)$$

$$D(A_{01}) = \{f \in X, H_{01}f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2) \text{ e } D^{01}H_{01}f \in X\} \quad (2)$$

Além disso

$$A_{10}f = -D^{10}H_{10}f \quad (3)$$

$$A_{01}f = -D^{01}H_{01}f \quad (4)$$

onde

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Demonstração: Observemos que o núcleo de Poisson $P_s(x) = P(s; x) = s/\pi(s^2 + x^2)$ é não-negativo e, para todo $s > 0$, temos

$$\int P(s; x) dx = 1$$

Como

$$V_1(s)f = [P_s * f]_{(1)}$$

Temos que

$$\|V(s)f\| \leq \|P_s\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

ou seja, $V_1(s)$ define um semi-grupo de contração.

A propriedade de semi-grupo de $\{V_1(s): 0 \leq s < \infty\}$ segue da equação funcional de Chapman-Kolmogorov

$$P_{s+t} = P_s * P_t, \quad 0 < s, t < \infty,$$

e usando a associatividade do produto de convolução.

A continuidade forte do semi-grupo na origem é uma consequência imediata do fato do núcleo de Poisson ser uma aproximação da identidade.

A caracterização do gerador infinitesimal resulta da composição de uma série de resultados parciais, que passamos a apresentar.

7.3.3. Lema: Seja $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq 2$. Então

a) $f \in D(A_{10})$ se e somente se existe $g \in X$ tal que

$$\tilde{g}(v) = -|v_1| \tilde{f}(v), \quad v = (v_1, v_2)$$

Além disso

$$[A_{10}f]^\sim(v) = -|v_1| \tilde{f}(v)$$

b) $f \in D(A_{01})$ se e somente se existe $g \in X$ tal que

$$\tilde{g}(v) = -|v_2| \tilde{f}(v)$$

Além disso

$$[A_{01}f]^{\sim}(v) = -|v_2|f^{\sim}(v)$$

Demonstração: Provamos este lema apenas para $p = 1$. Quando $1 < p \leq 2$, os argumentos são essencialmente os mesmos, mas devem ser tomados os devidos cuidados:

a) Suponhamos que dado $f \in D(A_{10})$ exista $g \in X$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \|s^{-1}[V_1(s) - I]f - g\|_{L^p} = 0 \quad (1)$$

Observando que a transformada de Fourier do núcleo de Poisson é:

$$P_s^{\sim}(w) = e^{-s|w|} \quad (w \in \mathbb{R})$$

temos que

$$(s^{-1}[V_1(s) - I]f - g)^{\sim}(u, v) = s^{-1}[e^{-s|u|} - 1]f^{\sim}(u, v) - g^{\sim}(u, v)$$

Como $|f^{\sim}(u, v)| \leq \|f\|_1$, para todo (u, v) em $\mathbb{R}^2$, de (1) segue que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}[e^{-s|u|} - 1]f^{\sim}(u, v) = -|u|f^{\sim}(u, v) = g^{\sim}(u, v)$$

Mas $g = A_{10}f$, por definição.

Reciprocamente, suponhamos que exista $g \in X$ tal que

$$g^{\sim}(u, v) = -|u|f^{\sim}(u, v)$$

Então

$$\begin{aligned}
 [V_1(s)f-f]^\wedge(u,v) &= (e^{-s|u|}-1)f^\wedge(u,v) = \int_0^s e^{-t|u|}(-|u|)f^\wedge(u,v)dt \\
 &= \int_0^s e^{-t|u|} g^\wedge(u,v)dt = \int_0^s [V_1(t)g]^\wedge(u,v)dt \\
 &= \left(\int_0^s V_1(t)g dt\right)^\wedge(u,v) .
 \end{aligned}$$

Pela unicidade da transformada de Fourier temos

$$V_1(s)f-f = \int_0^s V_1(t)g dt$$

Donde segue imediatamente que $f \in D(A_{10})$ e $A_{10}f = g$.

7.3.4. Lema: Se $f, g \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq 2$, então

$$-|u| f_{(1)}^\wedge(u,v) = g_{(1)}^\wedge(u,v) \quad (1)$$

se e somente se

$$-|u| f^\wedge(u,v) = g^\wedge(u,v) \quad (2)$$

Demonstração: Por um lado, o lema segue da unicidade da transformada na segunda variável, por outro

$$\begin{aligned}
 \|g^\wedge(u,v) + |u| f^\wedge(u,v)\|_{L_{uv}^p} &= \| \|F_{01}(f_{10}g(u,v) + |u|F_{10}f(u,v))\|_{L_v^p} \|_{L_u^p} \\
 &\leq \| \|F_{10}g(u,v) + |u|F_{10}f(u,v)\|_{L_v^p} \|_{L_u^p}
 \end{aligned}$$

onde $L_{uv}^{P'}$, $L_u^{P'}$ e $L_v^{P'}$ tem significados óbvios. Portanto, se

$$F_{10} g(u,v) + |u| F_{10} f(u,v) = 0$$

Então

$$\hat{g}(u,v) + |u| \hat{f}(u,v) = 0$$

o que demonstra o lema.

7.3.5. Lema: Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ são tais que

$$\hat{g}_{(1)}(s,t) = -|s| \hat{f}_{(1)}(s,t)$$

então

$$H_{10} f(x,y) = - \int_{-\infty}^x g(t,y) dt$$

e reciprocamente

Demonstração: Da hipótese segue que

$$|\hat{f}_{(1)}(s,t)| \leq C/(1+|s|^2)$$

Assim, se fizermos $f_y(x) = f(x,y)$, temos que $f_y \in L^2(\mathbb{R})$. Portanto,

$$(\hat{f}_y)^{\sim}(s) = (-i \operatorname{sg} s) \hat{f}_y^{\sim}(s)$$

ou seja

$$(H_{10}f)_{(1)}^{\sim}(s,y) = (-i \operatorname{sg} s) f_{(1)}^{\sim}(x,y)$$

Seja

$$M(x,y) = \int_{-\infty}^x g(t,y) dt$$

Então M é contínua na primeira variável e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} M(x,y) = 0$$

Façamos

$$\begin{aligned} q(x,y) &= M(x+k,y) - M(x,y) = \int_x^{x+k} g(t,y) dt \\ &= \int m_k(x-u) g(t,y) dt = m_k * g(x,y) \end{aligned}$$

onde $m_k(z) = m(z/k)$ e $m(w) = 1$ se $w \in [-1,0]$ e $m(w) = 0$ se $x \notin [-1,0]$. Portanto $q \in L^1(\mathbb{R})$ na primeira variável e

$$\begin{aligned} q_{(1)}^{\sim}(s,y) &= \int q(x,y) e^{-isx} dx \\ &= \int \left[\int_x^{x+k} g(t,y) dt \right] e^{-isx} dx \\ &= \iint_0^k g(t+x,y) e^{-isx} dt dx \\ &= \int_0^k \int g(t+x,y) e^{-isx} dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^k \tilde{g}_{(1)}(s, y) e^{ist} dt \\
&= (is)^{-1} (e^{isk} - 1) \tilde{g}_{(1)}(s, y) \\
&= -(is)^{-1} (e^{isk} - 1) [s] \tilde{f}_{(1)}(s, y) \\
&= (isgs)(e^{isk} - 1) \tilde{f}_{(1)}(s, y) \\
&= -(e^{isk} - 1) [H_{10} f]_{(1)}(s, y) \\
&= -[H_{10} f(\cdot + k, \cdot) - H_{10} f(\cdot)]_{(1)}(s, k)
\end{aligned}$$

Logo, pela unicidade da transformada

$$q(x, y) = -H_{10} [f(x+k, y) - f(x, y)]$$

Seja $r \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fixado, então

$$\int_0^r q(x, y) dx = - \int_0^r H_{10} [f(x+k, y) - f(x, y)] dx$$

Mas, por outro lado

$$\begin{aligned}
\int_0^r q(x, y) dx &= \int_0^r [M(x+k, y) - M(x, y)] dx \\
&= \int_k^{k+r} M(x, y) dx - \int_0^r M(x, y) dx
\end{aligned}$$

Então

$$\int_k^{k+r} M(x,y) dx - \int_0^r M(x,y) dx = - \int_k^{k+r} H_{10} f(x,y) dx + \int_0^r H_{10} f(x,y) dx$$

Como

$$\int_k^{k+r} M(x,y) dx \quad \text{e} \quad \int_k^{k+r} H_{10} f(x,y) dx$$

convergem para zero, quando $k \rightarrow -\infty$, temos, que

$$\int_0^r M(x,y) dx = - \int_0^r H_{10} f(x,y) dx$$

para todo $r \in \mathbb{R}$. Logo

$$M(x,y) = -H_{10} f(x,y) \quad ,$$

para quase todo x , ou seja

$$H_{10} f(x,y) = - \int_{-\infty}^x g(t,y) dt$$

para quase todo x .

Reciprocamente, suponhamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e que exista $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$H_{10} f(x,y) = - \int_{-\infty}^x g(t,y) dt$$

Seja

$$q(x,y) = H_{10} f(x+h,y) - H_{10} f(x,y)$$

Então, $q \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ em relação à primeira variável

Assim, se fizermos

$$M(x,y) = f(x+h,y) - f(x,y)$$

Temos que

$$H_{10} M(x,y) = q(x,y)$$

e $M \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, em relação à primeira variável. Assim

$$\hat{q}_{(1)}(s,t) = (-isg) \hat{M}_{(1)}(s,t) \quad (1)$$

Por outro lado

$$\hat{q}_{(1)}(s,t) = -(is)^{-1} (e^{ish} - 1) \hat{g}_{(1)}(s,t) \quad (2)$$

$$\hat{M}_{(1)}(s,t) = (e^{ish} - 1) \hat{f}_{(1)}(s,t) \quad (3)$$

De (1), (2) e (3) segue que

$$\hat{g}_{(1)}(s,t) = -|s| \hat{f}_{(1)}(s,t)$$

7.3.6. Lema: Seja $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$. Então existe $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$iuf_{(1)}^{\sim}(u,v) = g_{(1)}^{\sim}(u,v) \quad (1)$$

se, e somente se, $f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2)$, q.s., e $D_1 f \in L^P(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração: Suponhamos (1) satisfeita. Seja $m(x) = 1$, se $x \in [0, h]$, e $m(x) = 0$ senão. Então

$$(m * g)_{(1)}(x, y) = \int_{-h}^0 g(x+u, y) du$$

e

$$m^{\sim}(u) = (iu)^{-1}(1 - e^{-ihu})$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} (f - f(\cdot - h, \cdot))_{(1)}^{\sim}(u, v) &= (1 - e^{-ihu}) f_{(1)}^{\sim}(u, v) \\ &= ((m * g)_{(1)})_{(1)}^{\sim}(u, v) \end{aligned}$$

Pela unicidade da transformada

$$f(x, y) - f(x-h, y) = \int_{-h}^0 g(x+u, y) du \quad \text{q.s.}$$

Como $f, g \in L^P(\mathbb{R}^2)$, então $f_{(1)}^{\sim}, g_{(1)}^{\sim} \in L^{P'} na primeira variável.$

Assim, obtemos da hipótese que

$$(1 + |u|) f_{(1)}^{\sim}(u, v) \in L^{P'}(u)$$

Como $(1 + |u|)^{-1} \in L^P$, segue da desigualdade de Hölder que $f_{(1)}^{\sim}$

é uma função L^1 na primeira variável. Logo

$$f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{(1)}(u,y) e^{iux} du = G(x,y)$$

Então, temos que

$$G(x,y) - G(x-h,y) = \int_{-h}^0 g(x+u,y) du ,$$

para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$ e $h > 0$, visto que ambos os membros são funções contínuas em x . Mas

$$\lim_{h \rightarrow \infty} G(x-h,y) = 0$$

Logo

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{x-h}^x g(u,y) du$$

existe e

$$G(x,y) = \int_{-\infty}^x g(u,y) du .$$

Como $G = f$, q.s., temos

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^x g(u,y) du , \quad \text{q.s.} \quad (2)$$

Reciprocamente, se (2) se verifica, então

$$\begin{aligned}
 f(x-h, y) - f(x, y) &= \int_x^{x-h} g(u, y) du \\
 &= - \int_0^h g(x-u, y) du \\
 &= - (m * g)_{(1)}(x, y)
 \end{aligned}$$

Tomando a transformada F_{10} em ambos os membros, obtemos

$$(e^{-ihu} - 1) f_{(1)}^1(u, v) = -(iu)^{-1} (1 - e^{-ihu}) \hat{g}_{(1)}(u, v)$$

ou seja

$$i u \hat{f}_{(1)}(u, v) = \hat{g}_{(1)}(u, v)$$

Finalmente, lembrando que, se $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p \leq 2$, então

$$|u| \hat{f}_{(1)}(u, v) = i u F_{10} H_{10} f(u, v) = F_{10} D_1 H_{10} f(u, v),$$

vemos que os lemas 7.3.3, 7.3.4, 7.3.5 e 7.3.6 caracterizam $D(A_{10})$ no caso $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq 2$

No caso $p > 2$, a caracterização segue por dualidade, como segue:

Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, onde $p > 2$, e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Então, temos

$$\iint [V_1(s)f](x,y)\psi(x,y)dxdy = \iint f(x,y)[V_1(s)\psi](x,y)dxdy.$$

Tomando $f \in D(A_{10})$, vamos ter

$$\iint A_{10}f(x,y)\psi(x,y)dxdy = \lim_{s \rightarrow 0} \iint s^{-1}[V_1(s)f - f]\psi(x,y)dxdy$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \iint f(x,y)s^{-1}[V_1(s)\psi - \psi]dxdy$$

$$= \iint f(x,y)(A_{10}\psi)(x,y)dxdy$$

$$= \iint f(x,y)(-D_1H_{10}\psi)(x,y)dxdy$$

$$= \iint H_{10}f(x,y)D_1\psi(x,y)dxdy,$$

pois $C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \subset D(A_{10})$.

Agora

$$\iint \left\{ \int_0^t A_{10}f(x+h,y)dh \right\} \psi(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^t \left\{ \iint A_{10}f(x+h,y)\psi(x,y)dxdy \right\} dh$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left\{ \iint A_{10} f(x,y) \psi(x-h,y) dx dy \right\} dh \\
&= \int_0^t \left\{ \iint H_{10} f(x,y) \psi'(x-h,y) dx dy \right\} dh \\
&= \iint \left\{ \int_0^t H_{10} f(x,y) \psi'(x-h,y) d\tau \right\} dx dy \\
&= \iint H_{10} f(x,y) [\psi(x,y) - \psi(x-t,y)] dx dy \\
&= - \iint [H_{10} f(x+t,y) - H_{10} f(x,y)] \psi(x,y) dx dy
\end{aligned}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Portanto

$$H_{10} f(x+t,y) - H_{10} f(x,y) = \int_x^{x+t} A_{10} f(h,y) dh$$

Logo, $H_{10} f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2)$, e $D_1 H_{10} f \in L^P(\mathbb{R}^2)$.

Analogamente obtemos a caracterização de $D(A_{01})$ e é imediato ver que

7.3.7. Proposição: Temos

$$D(A_{01} A_{10}) = \{f \in X \mid H_{10} f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2), H_{01} D_1 H_{10} f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2),$$

$$D_1 H_{10} f, D_2 H_{01} D_1 H_{10} f \in X\}$$

(1)

e

$$A_{01}A_{10}f = D_2H_{01}D_1H_{10}f$$

$$D(A_{10}A_{01}) = \{f \in X \mid H_{01}f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2), H_{10}D_2H_{01}f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2)$$

$$D_2H_{01}f, D_1H_{10}D_2H_{01}f \in X\} \quad (2)$$

e

$$A_{10}A_{01}f = D_1H_{10}D_2H_{01}f$$

7.3.8. Observemos que as famílias $\{V_1(s): 0 \leq s < \infty\}$ e $\{V_2(t): 0 \leq t < \infty\}$ são comutativas e que

$$[V_1(s)V_2(t)f](x,y) = [V_2(t),V_1(t)f](x,y)$$

$$= \iint P_t(v)P_s(u)f(x-u,y-v)dudv$$

Portanto, se definirmos

$$V(s,t)f = (P_sP_t) * f$$

e $V(0,0) = I$, temos pela proposição 1.1.4.

7.3.9. Proposição: A família de operadores $\{V(s,t): 0 \leq s,t < \infty\}$ é um semi-grupo de contração biparamétrico de classe (C_0) em $L(X)$.

Seja A_{11} o gerador infinitesimal deste semi-grupo, segundo a definição 1.2.5. A sua caracterização segue da seguinte sequência de lemas.

7.3.10. Lema: Seja $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq 2$. Então $f \in D(A_{11})$ se, e somente se, existe $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$g^*(u,v) = |u| |v| f^*(u,v)$$

Além disso

$$(A_{11}f)^*(u,v) = |u| |v| f^*(u,v)$$

Demonstração: Limitamos a demonstração ao caso $p = 1$.

Suponhamos que $f \in D(A_{11})$. Então existe $g \in X$ tal que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \|s^{-1}t^{-1} [V_1(s) - I] [V_2(t) - I] f - g\| = 0 \quad (1)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} (s^{-1}t^{-1} [V_1(s) - I] [V_2(t) - I] f - g)^*(u,v) &= \\ &= (e^{-s}|u| - 1)(e^{-t}|v| - 1)f^*(u,v) - g^*(u,v) \end{aligned}$$

Como $|f^*(u,v)| \leq \|f\|_1$, para todo (u,v) em $\mathbb{R}^2$, segue de (1) que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} s^{-1}t^{-1} (e^{-s}|u| - 1)(e^{-t}|v| - 1)f^*(u,v) = g^*(u,v)$$

ou seja

$$|u| |v| \hat{f}(u, v) = \hat{g}(u, v) \quad .$$

Mas, por definição $g = A_{11}f$ e portanto

$$(A_{11}f)^{\sim}(u, v) = |u| |v| \hat{f}(u, v) \quad .$$

Reciprocamente, suponhamos que exista $g \in X$ tal que

$$\hat{g}(u, v) = |u| |v| \hat{f}(u, v) \quad .$$

Então

$$([V_1(s) - I][V_2(t) - I]f)^{\sim}(u, v) = (e^{-s|u|} - 1)(e^{-t|v|} - 1)\hat{f}(u, v)$$

$$= \int_0^t \int_0^s e^{-k|u|} e^{-h|v|} \hat{g}(u, v) dk dh$$

$$= \int_0^t \int_0^s (V(k, h)g)^{\sim}(u, v) dk dh$$

$$= \left(\int_0^t \int_0^s V(k, h)g \, dk dh \right)^{\sim}(u, v) \quad .$$

Pela unicidade da transformada de Fourier

$$[V_1(s)-I][V_2(t)-I]f = \int_0^t \int_0^s V(k,h)g \, dkdh$$

Donde segue imediatamente que $f \in D(A_{11})$ e $A_{11}f = g$.

7.3.11. Lema: Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ são tais que

$$|s||t|f^{\sim}(s, t) = g^{\sim}(s, t) \quad (1)$$

Então

$$H_{11}f(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x g(u, v)du dv \quad \text{q.s.} \quad (2)$$

e reciprocamente.

Demonstração: Se a condição (1) está satisfeita, então $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. Isto decorre do seguinte. Temos

$$|g^{\sim}(s, t)| \leq C_1$$

Agora, se $(s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, então

$$|s||f^{\sim}(s, t)| \leq C_2 \quad \text{e} \quad |t||f^{\sim}(s, t)| \leq C_2$$

e se $(s, t) \notin [-1, 1] \times [-1, 1]$, então

$$|s||f^{\sim}(s, t)| \leq |s||t||f^{\sim}(s, t)| = |g^{\sim}(s, t)| \leq C_1$$

e

$$|t||f^{\sim}(s, t)| \leq |s||t||f^{\sim}(s, t)| = |g^{\sim}(s, t)| \leq C_1$$

Assim

$$|\hat{f}(s,t)|^2 \leq C/(1+s^2)(1+t^2).$$

Como $(1+s^2)^{-1}(1+t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, segue que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e consequentemente $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Vamos ter então

$$[H_{11}f]^\sim(s,t) = (-isgs)(-isgt)\hat{f}(s,t).$$

Façamos

$$M(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x g(u,v) du dv$$

e

$$q(x,y) = M(x+h,y+k) - M(x+h,y) - M(x,y+k) + M(x,y)$$

$$= \int_y^{y+k} \int_x^{x+h} g(u,v) du dv.$$

Então $q \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. De fato

$$q(x,y) = m_{hk} * g(x,y),$$

onde $m_{hk}(u,v) = m(u/h, v/k)$ e m é a função característica de $[-1,0] \times [-1,0]$.

Temos

$$\hat{q}(s,t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_y^{y+k} \int_x^{x+h} g(u,v) du dv \right] e^{-i(sx+ty)} dx dy$$

$$= \int_0^k \int_0^h \hat{g}(s,t) e^{i(us+vt)} du dv$$

$$= (is)^{-1} (e^{ish} - 1) (it)^{-1} (e^{itk} - 1) \hat{g}(s,t)$$

$$= (is)^{-1} (e^{ish} - 1) (it)^{-1} (e^{itk} - 1) |s| |t| \hat{f}(s,t)$$

$$= (e^{ish} - 1) (e^{itk} - 1) (-isgs) (-isgt) \hat{f}(s,t)$$

$$= (e^{ish} - 1) (e^{itk} - 1) (H_{10} f)^\wedge(s,t)$$

Pela unicidade da transformada de Fourier, temos

$$q(x,y) = \Delta_k \Delta_h H_1 f(x,y)$$

$$= H_{11} f(x+h, y+k) - H_{11} f(x+h, y) - H_{11} f(x, y+k) + H_{11} f(x, y)$$

Sejam a e b em $\mathbb{R}$, arbitrariamente fixados. Então

$$\int_0^b \int_0^a q(x,y) dx dy = \int_0^b \int_0^a \Delta_k \Delta_h H_{11} f(x,y) dx dy$$

$$= \Delta_k^b \Delta_h^a \int_0^b \int_0^a H_{11} f(x,y) dx dy$$

onde

$$\Delta_k^b \Delta_h^a \int_0^b \int_0^a = \int_0^{b+k} \int_0^{a+h} - \int_0^b \int_0^{a+h} - \int_0^{b+k} \int_0^a + \int_0^b \int_0^a$$

Agora

$$\lim_{\substack{h \rightarrow -\infty \\ k \rightarrow -\infty}} \Delta_k^b \Delta_h^a \int_0^b \int_0^a H_{11} f(x,y) dx dy = \int_0^b \int_0^a H_{11} f(x,y) dx dy$$

e por outro lado

$$\int_0^b \int_0^a q(x,y) dx dy = \int_0^b \int_0^a \Delta_k \Delta_h M(x,y) dx dy$$

converge para

$$\int_0^b \int_0^a M(x,y) dx dy$$

quando $h, k \rightarrow -\infty$. Portanto

$$\int_0^b \int_0^a \{M(x,y) - H_{11} f(x,y)\} dx dy = 0$$

para todo a e b em $\mathbb{R}$. Onde

$$M(x,y) = H_{11} f(x,y) \quad , \quad \text{q.s.}$$

Reciprocamente, suponhamos que exista $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$

tal que

$$H_{11}f(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x g(u,v) du dv$$

Seja

$$q(x,y) = \Delta_k^2 \Delta_h^1 H_{11}f(x,y)$$

Então $q \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. Também, se fizermos

$$M(x,y) = \Delta_k^2 \Delta_h^1 f(x,y)$$

temos que

$$H_{11}M(x,y) = q(x,y)$$

e $M \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim

$$\hat{q}(s,t) = (-isg_s)(-itgt)\hat{M}(s,t) \quad (3)$$

$$\hat{q}(s,t) = (is)^{-1}(e^{ish}-1)(it)^{-1}(e^{itk}-1)\hat{g}(s,t) \quad (4)$$

$$\hat{M}(s,t) = (e^{ish}-1)(e^{itk}-1)\hat{f}(s,t) \quad (5)$$

De (3), (4) e (5) segue imediatamente que

$$\hat{g}(s,t) = |s||t| \hat{f}(s,t)$$

7.3.12. Lema: Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p \leq 2$. Então existe $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$(iu)(iv)f^\wedge(u,v) = g^\wedge(u,v) \quad (1)$$

se e somente se

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x g(u,v) du dv \quad (2)$$

Demonstração: Suponhamos (1) satisfeita. Seja agora $m(x,y)$ a função característica de $[0,h] \times [0,k]$. Então

$$m * g(x,y) = \int_0^k \int_0^h g(x-u, y-v) du dv$$

$$m^\wedge(u,v) = (iu)^{-1}(1-e^{-ihu})(iv)^{-1}(1-e^{-ikv})$$

e

$$(\Delta_k^2 \Delta_h^1 f)^\wedge(u,v) = (m * g)^\wedge(u,v)$$

Pela unicidade da transformada de Fourier segue que

$$\Delta_k^2 \Delta_h^1 f(x,y) = \int_0^k \int_0^h g(x-u, y-v) du dv \quad (3)$$

Como $(1+|u|)^{-1}(1+|v|)^{-1} \in L^p(\mathbb{R}^2)$, de (1) concluímos que

$$(1+|u|)(1+|v|)f^\wedge(u,v) \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$$

Segue então da desigualdade de Hölder que $f^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Portanto

$$f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u,v) e^{iux} e^{ivy} du dv, \quad \text{q.s.}$$

Logo

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x,y) = 0$$

e conseqüentemente, de (3), temos

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 g(x-u, y-v) du dv$$

ou seja,

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x g(u,v) du dv, \quad \text{q.s.}$$

A recíproca é imediata e a demonstração está completa.

Obsevando que, se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, então

$$|u||v|\hat{f}(u,v) = (iu)(iv)(-isg(u))(-isg(v))\hat{f}(u,v)$$

$$= (iu)(iv)(H_{11}f)^{\wedge}(u,v)$$

$$= (D^{11}H_{11}f)^{\wedge}(u,v),$$

vemos que dos lemas 7.3.10, 7.3.11, 7.3.12 e do mesmo argumento de dualidade já usado anteriormente no caso $p > 2$, decorre que:

7.3.13. Proposição: O gerador infinitesimal A_{11} do semi-grupo de Poisson tem por domínio

$$D(A_{11}) = \{f \in X: H_{11}f(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x g(u,v) du dv, g \in X\}$$

e

$$A_{11}f = D^{11}H_{11}f$$

Da proposição 7.3.7 e da observação 1.2.10 decorre imediatamente que

7.3.14. Proposição: Seja $X = L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$. Se $f \in X$ é tal que

$$i) H_{01}f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2)$$

$$ii) H_{01}D_2H_{01}f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2)$$

$$iii) D_2H_{01}f, D_1H_{01}D_2H_{01}f \in X$$

Então

$$a) H_{10}f \in AC_{loc}^{10}(\mathbb{R}^2)$$

$$b) H_{10}D_1H_{10}f \in AC_{loc}^{01}(\mathbb{R}^2)$$

$$c) D_1H_{10}f, D_2H_{10}D_1H_{10}f \in X$$

$$d) D_1H_{10}D_2H_{01}f = D_2H_{10}D_1H_{10}f$$

APÊNDICE

SEMI-GRUPOS DE OPERADORES UNIPARAMÉTRICOS

O tratamento dos problemas dos semi-grupos multi-paramétricos recai quase sempre, num sentido que ficou claro no capítulo inicial, no estudo do correspondente problema para um semi-grupo uniparamétrico. Por esta razão, por uma questão de ordem didática, apresentamos um resumo dos conceitos e resultados básicos dos semi-grupos uniparamétricos. Para maiores detalhes veja [06], [17].

1. Seja X um espaço de Banach real ou complexo e seja $L(X)$ a álgebra de Banach dos endomorfismos de X .

2. Definição: Seja $T: [0, \infty) \rightarrow L(X)$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1) \cdot T(t_2) \quad , \quad (t_1, t_2 \geq 0) \quad (1)$$

$$T(0) = I \quad , \quad (I = \text{operador identidade}) \quad (2)$$

então a família $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ é denominado semi-grupo uni-paramétrico de operadores em $L(X)$. O semi-grupo é dito de classe (C_0) se satisfaz a propriedade adicional

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} T(t)f = f \quad (3)$$

(continuidade forte de $T(t)$ na origem.)

No que segue estaremos supondo que a família de operadores limitados $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ de X em X é um semi-grupo de classe (C_0) .

3. Proposição: (a) $\|T(t)\|$ é limitado em todo subintervalo finito de $[0, \infty)$.

(b) Para cada $f \in X$, a função

$$t: [0, \infty) \rightarrow T(t)f$$

é fortemente contínua.

(c) Temos

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| < \infty. \quad (1)$$

(d) Para todo $\omega > \omega_0$, existe uma constante M tal que para todo $t \geq 0$,

$$\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$$

4. Definição: O gerador infinitesimal A de um semi-grupo $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ é definido por

$$Af = s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} A(\tau)f = s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{1}{\tau} [T(\tau) - I]f \quad (1)$$

quando o limite existe; o domínio de A , denotado por $D(A)$, sendo o conjunto dos elementos $f \in X$ para os quais o limite existe.

5. Proposição: (a) $D(A)$ é um subespaço de X e A é um operador linear.

(b) Se $f \in D(A)$, então $T(t)f \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)f = AT(t)f = T(t)Af \quad (1)$$

além disso

$$T(t)f - f = \int_0^t T(u)Af \, du, \quad t > 0 \quad (2)$$

(c) $D(A)$ é denso em X , e A é um operador fechado.

6. Definição: Para $r = 0, 1, 2, \dots$ o operador A^r é definido indutivamente pelas relações $A^0 = I$, $A^1 = A$ e

$$D(A^r) = \{f \in X : f \in D(A^{r-1}) \text{ e } A^{r-1}f \in D(A)\} \quad (1)$$

e

$$A^r f = A(A^{r-1}f) = s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0^+} A_\tau(A^{r-1}f), \quad (f \in D(A^r)) \quad (2)$$

7. Proposição: (a) $D(A^r)$ é um subespaço de X e A^r é um operador linear.

(b) Se $f \in D(A^r)$, então $T(t)f \in D(A^r)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{d^r}{dt^r} T(t)f = A^r T(t)f = T(t)A^r f \quad (1)$$

Além disso

$$T(t)f - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} A^k f = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t (t-u)^{r-1} T(u) A^r f \, du \quad (2)$$

e

$$[T(t)-I]^r f = \int_0^t \dots \int_0^t T(u_1 + \dots + u_r) A^r f \, du_1 \dots du_r \quad (3)$$

(c) $D(A^r)$ é um subespaço denso de X para todo $r = 0, 1, 2, \dots$.

A^r é um operador fechado.

BIBLIOGRAFIA

- [01] A. BENEDICK-R. PANZONE, The spaces L^p , with mixed norm,
Duke Math. J. 28, (1961), 301-324.
- [02] H. BERENS, Interpolations-methoden zur Behandlung von
Approximationsprozessen auf Banachräumen, Lecture
Notes in Mathematics 64, Berlin, 1968.
- [03] G. BIRKHOFF-W. GORDON, in Theory and Applications of Splines Functions; Ed. I. S. Schoenberg, 1969, Academic Press.
- [04] P.L. BUTZER, Sur la théorie des demigroupes et classes
de saturation de certaines integrales singulières,
C.R. Acad. Sci. Paris 243, (1956), 1473-1475.
- [05] P.L. BUTZER, Über den Grad der Approximation des
Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen
Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der
singulären Integrale, Math. Ann. 133, (1957), 410-
425.
- [06] P.L. BUTZER-H. BERENS, Semi-Groups of Operators and
Approximation, Springer-Verlag, New York, 1967.
- [07] P.L. BUTZER-J.R. NESSEL, Fourier Analysis and Approximation,
1st Vol., Academic Press, 1971, New York.
- [08] K. DE LEEUW, On the Adjoint Semigroup and some Problems
in the Theory of Approximation, Math. Zeitschr.
73, (1960), 219-234.
- [09] J. FAVARD, Sur l'approximation des fonctions d'une
variable réelle (Colloques Internationaux d'Analyse
Harmonique 1947) Publ. Centre National de la
Recherche Scientifique, Paris 15, (1949), 97-100.

- [10] J. FAVARD, Sur l'approximation dans les espaces vectoriels,
Ann. Mat. Pura Appl. 29, (1949), 259-291.
- [11] D.L. FERNANDEZ, Interpolation of 2^n Banach Spaces, Studia
Math. 65, (1979), 175-201.
- [12] D.L. FERNANDEZ, On the interpolation of 2^n Banach spaces
(1), Bull. Inst. Polyth. Iasi, 24 (I-2), (1980),
49-54.
- [13] D.L. FERNANDEZ, Trace spaces in several variables, Anais
Acad. Brasil. Ciências, 53 (1981), 223-232.
- [14] D.L. FERNANDEZ, Duality of interpolation spaces of several
Banach spaces, Acta. Sci. Math. 44 (1982), 43-51.
- [15] D.L. FERNANDEZ, Interpolation of Sobolev-Nikol'sky
spaces, Atas do 18º Seminário Brasileiro de Análise,
Rio de Janeiro, Nov. 1983.
- [16] D.L. FERNANDEZ, Interpolation of 2^d Banach Spaces and
Multiparametric Approximation, J. Approx. Theory
38 (1983), 240-257.
- [17] H. HILLE-R.S. PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-Groups
(revised edition) Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.
Vol. 31, Providence, R.I., 1957.
- [18] O.A. IVANOVA, Semi-grupos n-paramétricos de operadores li-
neares limitados e sua conexão com a teoria de
aproximação, Visnik L'viv, Derz Univ. Ser. Meh-Mat.
2 (1965), 44-52 (Em Russo).
- [19] O.A. IVANOVA, Certos teoremas sobre semi-grupos n-paramé-
tricos de operadores lineares limitados e suas
aplicações à teoria das funções, Teor. Funkcii
Funkcional Anal i Prilozhen 2 (1966), 35-41 (Em
Russo).

- [20] H. JOHNNEN, "Über Sätze von M. Zamansky und Umkehrungen auf der n -dimensionale Torus, J. Approx. Theory, 2 (1969), 97-110.
- [21] W. KÖHNEN, n -Parametrige Halbgruppen von Operatoren in der Approximationstheorie in Approximation Theory, Z. Ciesielski and J. Musielak (eds.), 121-128 (1975), PWN.
- [22] J.L. LIONS, Espaces intermediaires entre espaces hilbertiens et Applications, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roumanie (N.S.) 2 (1958), 419-432.
- [23] J.L. LIONS, Théorèmes de trace et d'interpolation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), 383-403.
- [24] J.L. LIONS-J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964), 5-68.
- [25] A. PAWELKE, Summationsverfahren mehrdimensionaler Fourierreihen mit zerfallenden Konvergenz-faktoren und ihre Saturation, Aachen, 1970 (Tese de Doutorado).
- [26] J. PEETRE, A Theory of Interpolation of Normed Spaces, Notas de Matemática nº 39, IMPA, 1968.
- [27] U. SODRÉ, Alguns teoremas fundamentais de aproximação multiparamétrica, suas versões duais e relações com os espaços de interpolação entre 2^n espaços de Banach (Tese de Doutorado - UNICAMP).
- [28] G. SPARR, Interpolation of several Banach Spaces, Ann. Mat. Pura App. 99 (1974), 247-316.
- [29] A.P. TEREHIN, A multiparameter Semi-Group of Operators,

mixed moduli and Approximation, Math. USSR
Izvestija 9 (1975), 887-910.

- [30] A. YOSHIKAWA, Sur la théorie d'espaces d'interpolation,
les espaces de moyenne des plusieurs espaces de
Banach, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (3), 16 (1970),
407-468.