Algumas Fibrações sobre S^7

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Pedro Antonio Cayetano Ontaneda Portal e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de Agosto de 1989.

Rigas

Prof. Dr. Alcebíades Rigas

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

ALGUMAS FIBRAÇÕES SOBRE S^7

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho tem como tema algumas fibrações sobre S^7.

Além das mais simples como $SP(1) \ldots SP(2) \to S^7$; $SU(3) \ldots SU(4) \to S^7$; $SO(7) \ldots SO(8) \to S^7$, temos também a fibração $G_2 \ldots Spin(7) \to S^7$, onde G_2 é o grupo de automorfismos dos números de Cayley, cujas propriedades utilizadas apresentamos no apendice A.

Fazemos uma prova elementar de que $SO(7)/G_2 \cong \mathbb{R}P^7$, usando somente ações de grupo, o que prova que Spin(7) Fibra sobre S^7 com fibra G_2.

Utilizando a propriedade da trialidade (que diz que para todo $A \in SO(8)$, existem B e C em SO(8), tais que $A(x.Y)=B(x).C(y)$, para x e y quaisquer números de Cayley, onde "•" é produto Cayley) constroem-se mergulhos simples que provam que $SU(4) \cong Spin(6)$ e $Sp(2) \cong Spin(5)$ e que nos levam ao seguinte gráfico:

$$\begin{tikzcd}
Sp(1) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dotted, no head] & SU(3) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dotted, no head] & G_2 \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dotted, no head] & SO(7) \arrow[d, dotted, no head] \\
Sp(2) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\sigma"] & SU(4) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\sigma"] & Spin(7) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\sigma"] & SO(8) \arrow[d, "\sigma"] \\
S^7 & S^7 & S^7 & S^7
\end{tikzcd}$$

onde $\sigma : SO(8) \to S^7$ é a projeção na primeira coluna.

Apresentamos também a constrição de Spin(n), assim como algumas de suas propriedades no apendice B.

Í N D I C E

ALGUMAS FIBRAÇÕES SOBRE S^7.

SEÇÃO O - PRELIMINARES

1. Representamos por $M(n,F)$, o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em F, onde $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (: a álgebra dos quaternions; $\mathbb{H} = \{z + jw \mid z,w \text{ em } \mathbb{C},\ ij = -ij \equiv k,\ j^2 = -1,\ 1j = j1 = j\}$).

$$O(n) := \{A \in M(n,\mathbb{R}) / A A^t = I\}$$

$$SO(n) = \{A \in O(n) / \det. A = 1\}$$

$$U(n) = \{A \in M(n,\mathbb{C}) / A A^* = I\} \qquad \text{onde } A^* = \bar{A}^t$$

$$SU(n) = \{A \in U(n) / \det. A = 1\}$$

$$Sp(n) = \{A \in M(n,\mathbb{H}) / AA^* = I\}$$

Assim $O(1) = \{1,-1\}$; $SO(1) = \{1\}$; $U(1) = S^1$, $SU(1) = \{1\}$ e

$Sp(1) = S^3$.

Todos estes são grupos de Lie, com a multiplicação matricial. Para todo n temos as inclusões usuais. Por exemplo para $SO(n)$:

$$SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$$

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Dizemos então que $SO(K)$ é subgrupo (canonicamente) de $SO(n)$ para $K \leq n$. Analogamente para os outros grupos.

Agora, sabemos que os complexos se incluem em $M(2,\mathbb{R})$ por

$$\mathbb{C} \xhookrightarrow{i_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}} M(2,\mathbb{R})$$

$$x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \text{como subálgebra.}$$

Também $\mathbb{H} \xhookrightarrow{i_{\mathbb{H}-\mathbb{C}}} M(2,\mathbb{C})$

$$Z+jw \longmapsto \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}$$

Logo estas inclusões determinam inclusões:

$$M(n,\mathbb{C}) \xhookrightarrow{i_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}} M(2n,\mathbb{R})$$

$$M(n,\mathbb{H}) \xhookrightarrow{i_{\mathbb{H}-\mathbb{C}}} M(2n,\mathbb{C})$$

e definindo $i_{\mathbb{H}-\mathbb{R}} := i_{\mathbb{C}-\mathbb{R}} \circ i_{\mathbb{H}-\mathbb{C}}$, temos

$$M(n,\mathbb{H}) \xhookrightarrow{i_{\mathbb{H}-\mathbb{R}}} M(4n,\mathbb{R}).$$

Estas inclusões "canônicas", preservam os grupos clássicos:

$$i_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(U(n)) \subset SO(2n)$$

$$i_{\mathbb{H}-\mathbb{C}}(Sp(n)) \subset U(2n)$$

$$i_{\mathbb{H}-\mathbb{R}}(Sp(n)) \subset SO(4n),$$

pelo fato que $(i_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(z))^* = i_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(\overline{z})$ e $(i_{\mathbb{H}-\mathbb{C}}(z+jw))^* =$

$$= i_{\mathbb{H}-\mathbb{C}}(\overline{z+jw}).$$

2. Todos os grupos acima definidos, atuam naturalmente sobre a esfera de dimensão apropriada. POr exemplo, para SO(n):

$$SO(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

$$(A,x) \longrightarrow A.x$$

como órbita de $e_1 \cong SO(n)/_{\text{isotropia } e_1}$, onde $e_1 = (1,\dots,o)$ e como órbita de $e_1 = S^{n-1}$, e Isotropia $e_1 = SO(n-1)$ temos $\dfrac{SO(n)}{SO(n-1)} \cong S^{n-1}$, onde $\cong$ significa difeomorfismo.

Analogamente temos $\dfrac{SU(n)}{SU(n-1)} \cong S^{2n-1}$ e $\dfrac{Sp(n)}{Sp(n-1)} \cong S^{4n-1}$

Em particular temos as seguintes fibrações sobre S^7

Usando reais: $SO(7) \dots SO(8) \longrightarrow S^7$,

usando complexos: $SU(3) \dots SU(4) \longrightarrow S^7$,

usando quatérnios: $Sp(1) \dots Sp(2) \longrightarrow S^7$.

Fornecemos agora uma outra fibração, usando os números de Cayley (ver apêndice A).

<u>Proposição 1</u> $\dfrac{SO(7)}{G_2} \cong \mathbb{R}P^7$ onde G_2 é o grupo de automorfismos da álgebra de Cayley, e $\mathbb{R}P^7$ é o espaço projetivo real de dimensão 7. (Daremos depois uma prova direta deste fato).

<u>Prova</u>: Seja Bil $= \{F: \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \text{—} \mathbb{R}^7 / F \text{ bilinear}\} \cong \mathbb{R}^{7^3}$

Definimos uma ação de $SO(7)$ em Bil:

$$\mu: SO(7) \times \text{Bil} \longrightarrow \text{Bil}$$
$$(A,F) \longrightarrow ((x,y) \text{—} A^t. F(Ax,Ay))$$

(i.e, a aplicação bilinear F na base A).

Seja $F_{\mathbb{C}_a}(x,y) = x.y$ (produto Cayley). Temos $F_{\mathbb{C}_a} \in$ Bil.

Assim $\dfrac{SO(7)}{\text{Isotropia}(F_{\mathbb{C}_a})} \cong$ Órbita $F_{\mathbb{C}_a}$

Mas Isotropia $(F_{\mathbb{C}_a}) = G_2$. Com efeito, $A \in G_2 \iff A(xy) =$

$= A(x).A(y) \; \forall x,y \in \mathbb{C}_a \iff x.y = A^t(A(x).A(y)) \; \forall x,y \in \mathbb{C}_a \iff F_{\mathbb{C}_a}(x,y) =$

$= \mu(A,F_{\phi_a})(x,y)\ \forall x,y \in \phi_a \Leftrightarrow F_{\phi_a} = \mu(A,F_{\phi_a}) \Leftrightarrow A \in \text{Isotropia } (F_{\phi_a})$

temos então $\frac{SO(7)}{G_2} \cong$ Órbita de $F_{\phi_a} \equiv M$

assim, M é compacto, conexo e dimM = 7.

Agora, seja $\rho : S^7 \longrightarrow M$

$p \longrightarrow F_p$, onde $F_p(x,y) = (xp).(\bar{p}y)$

($F_p \in M$, pois $F_p = \mu(A_q, F_{\phi_a})$, onde $\bar{q}^3 = p$ e $A_q(x) = q\,x\,\bar{q}$; ver apêndice A, ítem 4.)

Como $F_p = F_{-p}$ temos $\tilde{\rho}: \mathbb{R}p^7 \longrightarrow M$ como ρ é contínua

$\{-p,p\} \longrightarrow F_p$

temos que $\tilde{\rho}$ também o é, mais ainda, $\tilde{\rho}$ é C^∞.

Também $\tilde{\rho}$ é injetora (ver apêndice A, ítem 5).

Como $\mathbb{R}p^7$ é compacto, sem bordo e de dimensão 7, então é sobrejetora pois M é conexo, logo $\tilde{\rho}: \mathbb{R}p^7 \cong M$, e assim $\frac{SO(7)}{G_2} \cong \mathbb{R}p^7$

Notemos que o isomorfismo ρ nos diz que os conjuntos de funções bilineares F_A e F_p com

$$F_A(x,y) = A^t(Ax,Ay),\ A \in SO(7)$$

$$F_p(x,y) = (xp).(\bar{p}y),\ p \in S^7, \text{ são iguais.}$$

i.e. $\forall A \in SO(7),\ \exists p \in S^7 / F_A = F_p$ e vice-versa.

Agora, para $A \in SO(7)$, podemos encontrar seu correspondente $\pm p \in \mathbb{R}p^7$ explicitamente, em forma algébrica. Para isto notemos o seguinte: fazendo contas, temos que se $e_0, e_1, \ldots, e_7$ é a base canônica de $\mathbb{R}^8$, então $< e_1P.Pe_2, e_3 >= P_0 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - (P_4^2 + P_5^2 + P_6^2 + P_7^2) = 2(P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) - 1$ onde $P = (P_0, \ldots, P_7)$. Lembremos que $\|P\| = 1$).

Em geral, para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 7$

$$<e_iP.\bar{P}e_j, e_i.e_j> = 2(P_0^2 + P_i^2 + P_j^2 + P_k^2) - 1.$$

onde k é tal que $e_i.e_j = \pm e_k$

Por exemplo:

$$<e_4P.\bar{P}\,e_5,\ e_4.e_5> = 2(P_0^2+P_4^2+P_5^2+P_1^2)-1, \text{ pois } e_4.e_5=e_1,$$

$$<e_3P.\bar{P}\,e_7,\ e_3.e_7> = 2(P_0^2+P_3^2+P_7^2+P_4^2)-1, \text{ pois } e_3.e_7=e_4.$$

logo, somando para todos i,j tais que $1\leq i<j\leq 7$, uma conta simples mostra que

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq 7} <e_iP.\bar{P}\,e_j,\ e_i.e_j> &= 21P_0^2-3(P_1^2+P_2^2+\ldots+P_7^2)\\ &= 21P_0^2-3(1-P_0^2)\\ &= 24P_0^2-3\end{aligned}$$

$$P_0^2 = \frac{1}{24}\left(\sum_{1\leq i<j<7} <e_iP.\bar{P}\,e_j,\ e_i.e_j>+3\right)$$

tendo P_0^2, podemos calcular P_1^2:

$$\begin{aligned}\sum_{0<j\neq 1} <e_iP.\bar{P}\,e_j,\ e_i.e_j> &= 6(P_0^2+P_1^2)-2(P_2^2+\ldots+P_7^2)\\ &= 6(P_0^2+P_1^2)-2(1-(P_0^2+P_1^2))\\ &= 8(P_0^2+P_1^2)-2\end{aligned}$$

assim: $P_1^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{j=2}^{7} <e_1P.\bar{P}\,e_j,\ e_i.e_j>+2\right)-P_0^2.$

Em geral, vale:

$$P_i^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{7} <e_iP.\bar{P}\,e_j,\ e_i.e_j>+2\right)-P_0^2.$$

Analogamente, podem ser calculados todos os produtos $P_i.P_j$, $i\neq j$, como função dos números $<e_kP.\bar{P}\,e_\ell,\ e_s>$; chamemos estas fun ções de ρ_{ij}: $\rho_{ij}(\{<e_k P.\bar{P} e_\ell, e_s>\}_{k,\ell,s}) = P_i . P_j$.

Agora, como para todo $A \in SO(7)$, existe $p \in S^7$, tal que $F_A = F_P$, i.e, $\bar{A}(Ax.Ay) = xP.\bar{P}y$, temos que para $A \in SO(7)$, seu correspondente P, tem $P_i P_j = \rho_{ij}(\{<\bar{A}(Ae_k\ Ae_\ell, e_s>\}_{k,\ell,s})$

i.e., o produto das coordenadas i e j do vetor P correspondente a A se pode expressar como função das colunas e filas de A.

Lembremos agora, a aplicação de Veronese, que em nosso caso seria uma imersão (em realidade, um mergulho) de $\mathbb{R}P^7$ em $\mathbb{R}P^{35}$:

Se $[x_o, \ldots, x_7]$ são as coordenadas homogêneas de um x $\mathbb{R}P^7$, então Veronese: $\mathbb{R}P^7 \hookrightarrow \mathbb{R}P^{35}$

$$[x_o, \ldots, x_7] \longrightarrow [x_o^2, x_o x_1, x_1 x_2, \ldots, x_i x_j \ldots x_7^2]$$

(como o número de escolhas de pares de números dentro de 8 possibilidades é 36, temos que o codomínio é $\mathbb{R}P^{36-1} = \mathbb{R}P^{35}$).

(Em geral, $\forall m,n$, Veronese: $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{\binom{n+m}{n}-1}$

$$[x_o, \ldots, x_n] \longrightarrow [(x_o^{i_1} \ldots x_n^{i_n})_{i_1+\ldots+i_n=m}],$$

i.e., a imagem de $[x_o, \ldots, x_n]$ são todos os possíveis monomios de grau m).

Temos então que a aplicação $\Phi: SO(7) \longrightarrow \mathbb{R}P^7 \xhookrightarrow[\text{Veronese}]{} \mathbb{R}P^{35}$

$$A \longmapsto [\rho_{k\ell}(A)_{k \leq \ell}]$$

(coord. homogêneas)

i.e., a partir das colunas de A podemos calcular explicitamente, em forma algébrica, os números $P_k P_\ell$ que correspondem ao $P \in S^7$ tal que $F_A = F_P$, e os valores $P_k P_\ell$ são simplesmente as coordenadas homogêneas do ponto $\{P,-P\} \in \mathbb{R}P^7$, onde $\mathbb{R}P^7$ está mergulhado em $\mathbb{R}P^{35}$ mediante a aplicação de Veronese. (Ver por exemplo: Shafarevich, Basic Algebraic Geometry).

Finalmente, como Spin(7) é recobrimento (universal de duas folhas) de SO(7), Spin(7) $\xrightarrow{\pi}$ SO(7), temos que $\pi^{-1}(G_2)$ é recobrimento, de duas folhas, de G_2. Mas, G_2 é simplesmente conexo (ver apêndice B ...), então $\pi^{-1}(G_2) \cong G_2 \times Z_2$. Assim $G_2 \cong \pi^{-1}(G_2)_0$ (componente conexa da identidade) e podemos dizer que $G_2 \subset$ Spin(7).

Logo $\dfrac{\text{Spin}(7)}{G_2} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \dfrac{SO(7)}{G_2}$ é recobrimento conexo de duas folhas, onde $\tilde{\pi}(aG_2) = \pi(a)G_2$.

Mas $\dfrac{SO(7)}{G_2} \cong \mathbb{R}P^7$, logo $\dfrac{\text{Spin}(7)}{G_2} \cong S^7$, e obtemos assim outra fibração sobre S^7, esta vez usando números de Cayley.

SEÇÃO 1 - TRIALIDADE

1. A propriedade da trialidade diz que para todo $A \in SO(8)$, existem $B, C \in SO(8)$ tal que $A(xy) = B(x).C(y)$, $\forall x,y$ ¢a.

   Usaremos este fato na próxima Seção, para mergulhar

   $G_2 \ldots$ Spin(7) $\xrightarrow{\alpha} S^7$ dentro de $SO(7) \ldots SO(8) \xrightarrow{\sigma} S^7$

   tal que $\sigma\big|_{\text{spin}(7)} = \alpha$.

   Também usaremos a "trialidade Infinitesimal" (que é a "trialidade derivada", i.e., a nível de álgebra de Lie), para incluir $SU(3) \ldots SU(4) \xrightarrow{\beta} S^7$ dentro de $G_2 \ldots$ Spin(7) $\xrightarrow{\alpha} S^7$ com este último já contido em $SO(7) \ldots SO(8) \xrightarrow{\sigma} S^7$, e tal que $\beta\big|_{SU(4)} = \alpha\big|_{SU(4)} = \sigma\big|_{SU(4)}$.

   Em primeiro lugar, provaremos a propriedade da trialidade e da trialidade infinitesimal: Seja u S^7, escrevemos $R_u(x)$ denotando a reflexão de x correspondente ao hiperplano deter minado por u, i.e., $R_u(u) = -u$, e $R_u(x) = x$, se $x \perp u$, explicitamente, $R_u(x) = x - 2\langle x,u\rangle u$.

<u>Lema 1</u>. $R_u(x) = -u\bar{x}u$

<u>Prova</u>: $R_u(u) = -u = -u\bar{u}u$.

Se $x \perp u \implies x\bar{u} = -u\bar{x}$ (ver apêndice A, ítem 2).

Logo $R_u(x) = x = u(\bar{u}x) = -u\bar{x}u$.

Como $R_u \in O(8)$ e $(x \longrightarrow -u\bar{x}u) \in O(8)$, temos que coincidem.

<u>Lema 2</u>. Seja $A \in O(n)$, então existem $v_1, \ldots, v_k$, $k \leq n$, com $v_i \in S^{n-1}$ tal que $R_{v_1} \ldots R_{v_k} = A$.

<u>Prova</u> por indução. Para n=1, é claro.

Suponhamos valer para n. Seja $A \in O(n+1)$.

Se $A(e_1) = e_1$, então por indução $A = R_{v_1} \ldots R_{v_k}$, $k \leq n < n+1$.

Se $A(e\;) \neq e_1$, seja $u = \dfrac{A(e_1) - e_1}{|A(e_1) - e_1|}$, então

$R_u(A(e_1)) = e_1$ e assim $R_u . A(e_1) = e_1$, então $R_u . A \in O(n)$, e por hipótese indutiva, $R_u . A = R_{v_1} \ldots R_{v_k}$, $k \leq n$. Logo, como $R_u{}^2 = I$ temos $A = R_u \ldots R_{v_k}$, $k+1 \leq n+1$.

Notemos que $A \in SO(n)$ se e só se k é par, pois $\det(R_u) = -1$.

<u>Corolário</u>: Para $A \in SO(8)$, existem $v_1, \ldots, v_r$, $r \leq 8$, r par tal que $Ax = v_r(\ldots(v_2(\bar{v}_1 x \bar{v}_1)v_2 \ldots)v_r$

Com efeito, pelos lemas 1 e 2, e pelo fato de r ser jugação aparecem um número par de vezes, por exemplo:

$$R_{v_2} \cdot R_{v_1}(x) = R_{v_2}(-v_1 \bar{x} v_1) = -v_2(\overline{-v_1 \bar{x} v_1})v_2 = v_2(\bar{v}_1 x \bar{v}_1)v_2.$$

Agora, como para todo $a,x,y \in ¢_a$,

$$a(xy)a = (ax)(ya) \qquad \text{(ver apêndice A, ítem 4(i))}$$

temos que

$$v_r(\ldots(v_2(v_1(xy)v_1)v_2)\ldots)v_r =$$

$$= [v_r(\ldots(v_2(v_1x))\ldots)][(\ldots((yv_1)v_2)\ldots)v_r]$$

logo, se definimos $\lambda_v(x) = v \cdot x$ e $\rho_v(x) = x.v$, então $\lambda_v, \rho_v \in SO(8)$. (Ver apêndice A, ítem 3). Temos, que para r par, $R_{v_1} \ldots R_{v_k}(xy) = (\lambda_{v_1} \ldots \lambda_{\bar{v}_k}(x)).(\rho_{v_1} \ldots \rho_{\bar{v}_k}(y))$

e como para $A \in SO(8)$, $A = R_{v_1} \ldots R_{v_r}$, $r \leq 8$, r par,

temos

<u>Teorema</u> 1 (Trialidade)

Para A SO(8), existe um par $\pm(B,C)$ (módulo sinal), B,C em SO(8), tal que $A(x.y) = B(x).C(y)$, $\forall x,y \in ¢a$.

<u>Prova</u>: Só resta provar a "unicidade".

Escrevemos trial(A,B,C) se $A(x.y) =$

$= B(x).C(y) \;\; \forall x,y \in ¢a$.

Evidentemente trial $(A,B,C) \Longleftrightarrow$ trial$(A,-B,-C)$.

Vamos provar que estas são as únicas possibilidades.

Suponhamos que $A(x.y) = B_1(x).C_1(y) =$

$= B_2(x).C_2(y)$, $\forall x,y \in ¢a$.

Substituindo x por $A_1^{-1}(x)$, e y por $B_1^{-1}(y)$, e fazendo

$$A_3 = A_2 . A_1^{-1} \; ; \; B_3 = B_2 . B_1^{-1}$$

temos

$$x.y = A_3(x) . B_3(y), \quad \forall x,y \in ¢_a.$$

Fazendo $y = 1$: $A_3(x) = xb$, $b = B_3(1)$, $\forall x \in ¢_a$.

Também $x = 1$: $B_3(y) = ay$, $a = A_3(1)$, $\forall y \in ¢_a$

Logo $x.y = xb.ay$, e $x = y = 1 \Rightarrow ba = 1$, e substituindo x por xa, temos

$$(x.a).y = x.(ay), \quad \forall x,y \in ¢_a.$$

É fácil verificar que a deve ser real. Logo $a = \pm 1$.

Se $a=1$, temos $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$. Se $a=-1$, $A_1 = -1$, $A_1 = -A_2$, $B_1 = -B_2$.

2. Damos agora, várias propriedades simples de trialidade. Para $A \in SO(8)$, escrevemos $\tilde{A}$ para $\tilde{A}(x) = \overline{A(\bar{x})}$.

<u>Proposição</u> 1:

a) $\text{trial}(A,B,C) \Leftrightarrow \text{trial}(A,-B,-C) \Leftrightarrow \text{trial}(-A,-B,C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \text{trial}(-A,B,-C)$.

b) $\text{trial}(A,B,C) \Leftrightarrow \text{trial}(B,A,\tilde{C}) \Leftrightarrow \text{trial}(C,\tilde{B},A)$.

c) Se $\text{trial}(A_1,B_1,C_1)$ e $\text{trial}(A_2,B_2,C_2)$ então $\text{trial}(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2)$.

d) $\text{trial}(A,B,C) \Leftrightarrow \text{trial}(A^{-1},B^{-1},C^{-1})$.

<u>Prova</u> Imediata:

Pela proposição anterior, se definimos

$\text{trial}_{\mathbb{C}_a} \subset SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$

como $\text{trial}_{\mathbb{C}_a} = \{(A,B,C) \in SO(8) \times SO(8) \times SO(8) / \text{trial}(A,B,C)\}$

temos que $\text{trial}_{\mathbb{C}_a}$ é um grupo de Lie (pois é subgrupo de $SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$, e é fechado: Se $(A_n, B_n, C_n) \longrightarrow (A,B,C)$ com $(A_n, B_n, C_n) \in \text{trial}_{\mathbb{C}_a}$, como x,y fixos temos

$$0 = A_n(xy) - B_n(x).C_n(y) \longrightarrow A(x.y) - B(x).C(y) \therefore (A,B,C) \in \text{trial}_{\mathbb{C}_a}).$$

Temos também três homomorfismos de grupo (obviamente C^∞),

$$\pi : \text{Trial}_{\mathbb{C}_a} \longrightarrow SO(8)$$
$$(A_1, A_2, A_3) \longrightarrow A_i$$

e sabemos, pelo teorema, e pela proposição 1, que as π_i são sobrejetoras.

Também, pela proposição anterior, $\pi_i^{-1}(\{A\})$ tem só dois elementos, temos então que $\dim(\text{trial}_{\mathbb{C}_a}) = \dim(SO(8))$ e que cada π_i é um homomorfismo de recobrimento de duas folhas. Mais ainda, $\text{trial}_{\mathbb{C}_a}$ é conexo. Com efeito se $\text{trial}_{\mathbb{C}_a}$ não for conexo, então $\text{trial}_{\mathbb{C}_a} \cong SO(8) \times Z_2$, pois é recobrimento de duas folhas de SO(8). Como $\pi_1^{-1}(I) = \{(I,-I,-I),(I,I,I)\}$, teríamos que (I,I,I) e $(I,-I,-I)$ estão em componentes diferentes. Mas, se definirmos $A_t = R_i \cdot R(e^{i\pi t}.i)$, e se $B_t = \lambda_i \cdot \lambda(e^{i\pi t}.i)$ e $C_t = \rho_i \cdot \rho(e^{i\pi t}.i)$, teremos $(A_t, B_t, C_t) \in \text{trial}_{\mathbb{C}_a}$.

Mas, $(A_0, B_0, C_0) = (I,-I,-I)$ e $(A_1, B_1, C_1) = (I,I,I)$.

Logo, $(I,-I,-I)$ e (I,I,I) são unidos por um caminho contínuo, assim, $\text{trial}_{\mathbb{C}_a}$ é conexo.

Lembremos agora, que Spin(8) (ver apêndice B) é recobrimento universal (de duas folhas) de SO(8).

Temos então, $\mathrm{trial}_{\mathbb{C}a} \cong \mathrm{Spin}(8)$.

Lembremos também que o homomorfismo de recobrimento é:

$$\pi : \mathrm{Spin}(8) \longrightarrow SO(8)$$

$$a = v_1 \dots v_k \longrightarrow R_{v_1} \dots R_{v_k}, \; v_i \in S^7, \; k \text{ par.}$$

Podemos definir então outros dois recobrimentos (também homomorfismos):

$$\lambda : \mathrm{Spin}(8) \longrightarrow SO(8)$$

$$a = v_1 \dots v_k \longrightarrow \lambda_{v_1} \dots \lambda_{v_k}$$

$$\rho : \mathrm{Spin}(8) \longrightarrow SO(8)$$

$$a = v_1 \dots v_k \longrightarrow \rho_{v_1} \dots \rho_{v_k}$$

temos que λ e ρ são C^∞ (ver apêndice B...)

Assim, temos explicitamente o isomorfismo entre $\mathrm{trial}_{\mathbb{C}a}$ e Spin(8):

$$\gamma = (\pi, \lambda, \rho) : \mathrm{Spin}(8) \longrightarrow \mathrm{trial}_{\mathbb{C}a}$$

$$a \longrightarrow (\pi(a), \lambda(a), \rho(a))$$

e em realidade, $\pi = \pi_1 \circ \gamma$; $\lambda = \pi_2 \circ \gamma$; $\rho = \pi_3 \circ \gamma$.

3. Trataremos, agora, da trialidade infitesimal.

Como $\pi, \lambda, \rho : \mathrm{Spin}(8) \longrightarrow SO(8)$, nos dão três recobrimentos de SO(8), $d\pi_1$, $d\lambda_1$, $d\rho_1$ são isomorfismos entre as álgebras de Lie $T_1(\mathrm{Spin}(8))$ e $T_1(SO(8))$

Para $A\varepsilon(T_I SO(8))$, definimos:

$$A^{\lambda}:=d\lambda_1 \,.\, (d\pi_1)^{-1} (A)$$

$$A^{\rho}:=d\rho_1 \,.\, (d\pi_1)^{-1} (A).$$

Temos então a "trialidade Infinitesimal":

Teorema 2.

Para $A\varepsilon T_I(SO(8))$ vale a identidade:

$$A(x.y)=A^{\lambda}(x).y+x.A^{\rho}(y),\ \forall x,y\varepsilon\mathbb{C}_a.$$

Prova: Esta identidade se obtem "derivando a trialidade":

Sejam $x,y\ \mathbb{C}_a$, fixos.

$$\begin{aligned} \text{Sejam } f: \mathrm{Spin}(8) &\longrightarrow \mathbb{C}_a \\ a &\longmapsto \pi(a)(x.y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: \mathrm{Spin}(8) &\longrightarrow \mathbb{C}_a \\ a &\longmapsto (\lambda(a)(x)).(\rho(a)(y)) \end{aligned}$$

temos então $f=g$

Logo $df_1 = dg_1$

Mas $df_1(B) = d\pi_1(B)(x.y)$

$dg_1(B) = (d\lambda_1(B)(x)).y + x.(d\rho_1(B)(y))$, para

$B\epsilon T_1(\mathrm{Spin}(8))$

tomando $A\epsilon T_I(SO(8)$ e fazendo $B=(d\pi_1)^{-1}(A)$

temos $A(x.y) = A^{\lambda}x.y + x.A^{\rho}y.$

Fazendo uma prova similar à unicidade da trialidade, e usando o fato de que os elementos de $T_I SO(8)$ têm traço zero, podemos provar, também, a unicidade da trialidade infinitesimal

(Ver Postnikov, Lie groups and Lie algebras).

Seção 2 - Aplicação da Trialidade

1. Definimos um mergulho de Spin(7) em SO(8) usando trialidade:

Seja $Spin(7)^* = \{B \varepsilon SO(8) /$ trial (A,B,C), $A \varepsilon SO(7)\}$,

i.e., A deve ser tal, que deixe invariante os reais: $A(1)=1$.

Temos que $Spin(7)^*$ é subgrupo de SO(8), pois se $B_1, B_2 \varepsilon Spin(7)^*$,

então trial(A_1,B_1,C_1) e trial (A_2, B_2, C_2) com $A_i \varepsilon SO(7)$.

Logo, trial (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) e $A_1A_2 \varepsilon SO(7)$.

Analogamente para o inverso.

Se $B \varepsilon Spin(7)^*$, então trial(A,B,C), com $A(1)=1$.

Logo $\quad 1 = B(x).C(\bar{x}) \quad \therefore \quad B(x) = \overline{C(\bar{x})} = \tilde{C}(x)$.

Assim $\quad C = \tilde{B}$ e também $A(x) = B(x).\overline{B(1)}$.

Logo $$A(x) = B(x).\overline{B(1)}$$

$$C(x) = \tilde{B}(x).$$

Como trial $(A,B,C) \Longleftrightarrow$ trial$(B,A,\tilde{C})$

temos a trialidade para $Spin(7)^*$:

$$B(xy) = (B(x).\overline{B(1)}).B(y) \quad \forall x,y \varepsilon ₵_a \Leftrightarrow B \varepsilon Spin(7)^*.$$

Isto implica que $Spin(7)^*$ é fechado, pois se $B_n \longrightarrow B$, então

$B_n(x).B_n(1) \longrightarrow B(x).B(1)$ e assim $B(xy) = (B(x).\overline{B(1)}).B(y)$

Sempre que $B_n \epsilon\ Spin(7)^*$.

Portanto, $Spin(7)^*$ é subgrupo de Lie compacto, de SO(8).

Definimos agora, um homomorfismo de grupos:

$$\delta : Spin(7)^* \longrightarrow SO(7)$$

(Notemos que δ está bem definido, pois se $A \in SO(7) \Rightarrow$
$\Rightarrow -A \notin SO(7)$).

Temos então que $\delta(B) = \delta(-B)$, e que $\delta^{-1}(A) = \{B,-B\}$.

É claro também que δ é homomorfismo e que é sobre.

Assim, Spin(7)* é recobrimento de duas folhas de SO(7).

Mais ainda, localmente δ é igual a $\lambda \cdot \pi^{-1}$, logo δ é contínua, logo C^∞.

É claro também que Spin(7)* = $\lambda(\pi^{-1}(SO(7))$ e como $\pi^{-1}(SO(7)) = \mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{Spin}(8)$, temos finalmente que Spin(7)* é conexo, o que implica que $\mathrm{Spin}(7)^* \cong \mathrm{Spin}(7)$.

Agora, como todo elemento de SO(7) se pode escrever como $R_{v_1} \dots R_{v_k}$, k par, com $v_i \in \mathrm{Im}\,\mathbb{C}a\ S^7 = S^6$, temos que

$$\mathrm{Spin}(7)^* = \{B \in SO(8) \,/\, B = \lambda_{v_1} \dots \lambda_{\bar{v}_k},\ k \text{ par},\ v_i \in S^6\}.$$

Lembremos agora que $SO(7) \dots SO(8) \xrightarrow{\sigma} S^7$, onde $\sigma(A) = A.1$.

<u>Proposição</u> 1. $G_2 \dots \mathrm{Spin}(7)^* \xrightarrow{\sigma|\mathrm{spin}(7)^*} S^7$

<u>Prova</u>: Temos primeiro, que $G_2 \subset \mathrm{Spin}(7)^*$, pois se $A \in G_2$ então $A(1) = 1$ e trial (A,A,A)

Agora, restringindo a ação de SO(8) em S^7, a Spin(7)* obtemos uma ação com projeção $\sigma|_{\mathrm{Spin}(7)^*}$.

Temos que Isotropia (1) = G_2.

Com efeito, lembremos que para $A \in \mathrm{Spin}(7)^*$ vale:

$$A(xy) = (A(x).\overline{A(1)}\,A(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{C}a,$$

o que implica que se $A(1) = 1$ então $B \in G_2$.

Também, se $B\epsilon G_2$, então $B(1)=1$ (ver apêndice A, ítem 6).

$\therefore$ Isotropia$(1) = G_2$

Falta provar que a ação é transitiva.

Para $p\epsilon S^7$, a aplicação $(x \longrightarrow p\,x\,\bar{p})\,\epsilon SO(7)$

(pois se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow p\,x\,\bar{p} = xp\bar{p} = x$), e como

$p(xy)\bar{p} = (p\,x\,p^2)(\bar{p}^{-2}y\,\bar{p})$ (ver apêndice A, ítem 4(ii))

temos que $(x \longrightarrow p\,x\,p^2) \in Spin(7)^*$.

Logo, existem $v_1, \ldots, v_k \in S^6$, k par, tal que

$p\,x\,p^2 = v_1(\ldots(v_k\,x)\ldots)$. Fazendo $x=1$ temos

$p^3 = v_1(\ldots(v_{k-1}\,v_k).)$. Como todo elemento de S^7 tem pelo menos uma raiz cúbica, isto prova que a ação é transitiva.

2. Usando, agora, a trialidade infinitesimal, provamos que podemos mergulhar $SU(4) \xrightarrow{\varepsilon} Spin(7)^*$, de tal forma que $\varepsilon(SU(3))\ldots\varepsilon(SU(4)) \xrightarrow{\sigma|\varepsilon} S^7$ é uma fibração homogênea.

Este ε fornecerá uma prova simples, de que $SU(4) \cong Spin(6)$.

Para isto, definimos

$$Spin(6)^* = \delta^{-1}(SO(6)),$$

i.e, $Spin(6)^* = \{B\epsilon SO(8) / B = \lambda_{v_i} \ldots \lambda_{\bar{v}_k}, k \text{ par}, v_i \epsilon S^5\}$

onde $S^5 = S^7 \cap \text{Span}\langle e_3, \ldots, e_8\rangle$, pois todo $A \in SO(6)$, se pode escrever como $R_{v_1} \ldots R_{v_k}$, k par, $v_i \epsilon S^6$.

Seja agora $E = \begin{bmatrix} I_{6\times 6} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

Temos que $Ex = R_{u_o}(x)$, onde $u_o = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_7 + e_8)$,

i.e., E troca a ordem das coordenadas 7 e 8.

Definimos:

$$\varepsilon : U(4) \longrightarrow SO(8), \text{ como } \varepsilon := E.\dot{\iota}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}.E$$

i.e., $\varepsilon(A) = E.(\dot{\iota}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(A).E$, onde $\dot{\iota}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}$ é a inclusão canônica dada na seção 0. Notamos que a conjugação por E simplesmente troca a ordem das duas últimas colunas e das duas últimas linhas.

<u>Proposição 2</u>. $\varepsilon(SU(4)) = Spin(6)^*$.

(i.e., a inclusão canônica de SU(4) é $Spin(6)^*$, salvo uma conjugação).

<u>Prova</u>: Nós temos que $\varepsilon(U(4)) = \{B \varepsilon SO(8) / B(ix) = i.B(x)\}$

Isto é claro, pois se $B \varepsilon \varepsilon(U(4))$, então

$B = [a, ia_1, a_2, ia_2, \dots, a_4, ia_4]$, onde os a_k são ortogonais (real) dois a dois.

Assim, se $B \varepsilon Spin(6)^*$, então trial(A,B,C), com $A \varepsilon SO(6)$, i.e., $A(i) = i$, $A(1) = 1$, mas pela trialidade para $Spin(7)^*$: $B(xy) = (B(x).\overline{B(1)}).B(y)$ onde $A(x) = B(x).\overline{B(1)}$ e $\tilde{B} = C$. Como $A(i) = i$, temos

$$B(iy) = A(i).B(y) = i\,B(y) \quad \therefore \quad Spin(6)^* \subset \varepsilon(U(4)).$$

Para provar que $Spin(6)^* = \varepsilon(SU(4))$ passamos às álgebras de lie, pois é mais fácil trabalhar com o traço que com o determinante.

Temos primeiro que $T_I\,\varepsilon\,(U(4)) = E\,.\,\dot{\iota}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(T_I U(4))\,.\,E$, i.e., a álgebra de Lie de U(4) se inclui canonicamente da mesma forma dentro da álgebra de Lie de SO(8) (pois se extendermos ε a todo $M(4,\mathbb{C})$, ε é linear). Assim, é claro que

$$T_I(\varepsilon(U(4))) = \{A\ T_I(SO(8))\ /\ A(ix) = i.A(x)\}. \qquad (\alpha)$$

Por outro lado, pela trialidade infinitesimal, para $A \varepsilon T_I SO(8)$,

$$A(xy) = A^{\lambda}(x).y + x.A^{\rho}(y),\quad \forall x,y \in \mathbb{C}_a.$$

Se $A \varepsilon T_I\,\mathrm{Spin}(7)^*$, temos $A^{\lambda} \varepsilon T_I(SO(7))$, $\therefore$ $A^{\lambda}(1) = 0$.

Então $A(1.y) = A^{\lambda}(1).y + 1.A^{\rho}(y) = A^{\rho}(y)$, i.e., $A = A^{\rho}$.

Assim, fica $A(x.y) = A^{\lambda}(x).y + x.A(y)$.

Fazendo $y = 1$, temos

$A^{\lambda}(x) = A(x) - xA(1)$, e assim, a trialidade infinitesimal para $T_I(\mathrm{Spin}(7)^*)$ é

$$A(xy) = (A(x) - xA(1)).y + xA(y) \quad \ldots \quad (*)$$

Agora, se $A \varepsilon T_I\,\mathrm{Spin}(6)^*$, então $A \varepsilon T_I(\varepsilon(U(4)))$ (pois $\mathrm{Spin}(6)^* \subset \varepsilon(U(4))$), logo A satisfaz (*), i.e., tem a forma seguinte:

$$A=\left|\begin{array}{cccccccc}
0 & -y_{11} & -x_{12} & +y_{12} & -x_{13} & y_{13} & -y_{14} & -x_{14} \\
y_{11} & 0 & -y_{12} & -x_{12} & -y_{13} & -x_{13} & -x_{14} & +y_{14} \\
\hline
x_{12} & -y_{12} & 0 & -y_{22} & -x_{23} & y_{23} & -y_{24} & -x_{24} \\
y_{12} & x_{12} & y_{22} & 0 & -y_{23} & -x_{23} & -x_{24} & y_{24} \\
\hline
x_{13} & -y_{13} & x_{23} & -y_{23} & 0 & -y_{33} & -y_{34} & -x_{34} \\
y_{13} & x_{13} & y_{23} & x_{23} & y_{33} & 0 & -x_{34} & y_{34} \\
\hline
y_{14} & +x_{14} & y_{24} & +x_{24} & y_{34} & x_{34} & 0 & +y_{44} \\
x_{14} & -y_{14} & x_{24} & -y_{24} & x_{34} & -y_{34} & -y_{44} & 0
\end{array}\right|$$

Vemos que EAE(i.e., trocando a ordem das duas últimas linhas, e também, das duas últimas colunas), pertence a algebra de Lie de $U(4)$ canonicamente mergulhado em $T_I SO(8)$. Para provar que $A \in T_I \ell(SU(4))$, temos que provar que EAE tem traço (complexo) zero, i.e., $y_{11}+y_{22}+y_{33}+y_{44}=0$.

Mas, por $(*)$, fazendo $x=e_3$, $y=e_5$, e olhando para a oitava coordenada resultante, vamos obter, pelo lado esquerdo da $(*)$:

$\langle A(e_3 . e_5),e_8\rangle=\langle A(e_7),e_8\rangle = -y_{44}$ (i.e., a oitava coordenada da sétima coluna), e o lado direito da $(*)$ implicará:

$$<(A(e_3)-e_3.A(1)).e_5+e_3.A(e_5), e_8> = y_{11}+y_{22}+y_{33}$$

(pois $<A(e_3).e_5, e_8> = y_{11}$; $<(e_3.A(1).e_5, e_8> = y_{22}$; $<e_3.A(e_5), e_8> = y_{33}$)

$\therefore$ $T_I\,\mathrm{Spin}(6)^* \subsetneqq T_I\ \varepsilon(SU(4))$ e como os dois grupos são conexos e da mesma dimensão, temos que $\mathrm{Spin}(6)^* = \varepsilon(SU(4))$.

Vemos também que $\varepsilon(SU(3)) \subset G_2$, pois se $B\varepsilon(\varepsilon(SU(3)))$ então $B\varepsilon\mathrm{Spin}(7)^*$, $\therefore$ $(B(x)\overline{B(1)}).B(y) = B(xy)$.

Mas $B(1) = 1$, logo $B(x.y) = B(x).B(y)$, i.e., $B\varepsilon G_2$

Também é fácil ver que

$$\varepsilon(SU(3)) \ \dots\ \varepsilon(SU(4)) \xrightarrow{\sigma|\varepsilon(SU(4))} S^7$$

Pois, como $SU(3)\ \dots\ SU(4) \xrightarrow{\beta} S^7$, onde β é a projeção na primeira coluna, temos

$$\begin{tikzcd}
SU(4) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"'] & \varepsilon(SU(4)) \arrow[d, "\sigma|\varepsilon(SU(4))"] \\
S^7 \arrow[r, "E"] & S^7
\end{tikzcd}$$

i.e., β é $\sigma|_{\varepsilon(SU(4))}$, trocando a ordem das duas últimas coordenadas.

3. Definimos agora:

$$\mathrm{Spin}(5)^* := \delta^{-1}(SO(5))$$

Temos então que $Spin(5)^* \cong Spin(5)$, e que

$$Spin(5)^* = \{A = \lambda_{v_1} \ldots \lambda_{v_k},\ k \text{ par}, v_i \in S^4\}$$

onde $S^4 = S^7 \cap \text{Span} <e_4, \ldots, e_8>$.

Se $A \in Spin(5)^*$, então $A \in Spin(7)^*$, vale então a trialidade

$$A(xy) = (A(x).\overline{A(1)}).A(y). \quad \ldots (**)$$

Mas, como $A(i).\overline{A(1)} = i$ e $A(j).\overline{A(1)} = j$,

$$(\text{pois } (x \longrightarrow A(x).A(1)) \in SO(5))$$

temos
$$A(e_2) = A(i) = i \cdot A(1)$$
$$A(e_3) = A(j) = j \cdot A(1)$$

Logo, fazendo $x=i$ em $(**)$ temos:

$$A(iy) = i.A(y)$$

e fazendo $x=j$ em $(**)$ temos,

$$A(jy) = j\,A(y)$$

temos então $A(i)=i$, $A(j)=j$, $A(k)=A(ij)=ij=k$, e se

$A = [A_1, A_2 \ldots A_8]$ vale:

$$A_2 = i\,A_1 \qquad A_6 = i\,A_5$$
$$A_3 = j\,A_1 \qquad A_7 = j\,A_5$$
$$A_4 = k\,A_1 \qquad A_8 = k\,A_5$$

logo, um elemento de $\mathrm{Spin}(5)^*$ tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A_1 & iA_1 & jA_1 & kA_1 & A_5 & iA_5 & jA_5 & kA_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
x_1 & -y_1 & -x_2 & -y_2 & a_1 & -b_1 & -a_2 & -b_2 \\
y_1 & x_1 & y_2 & -x_2 & b_1 & a_1 & b_2 & -a_2 \\
x_2 & -y_2 & x_1 & y_1 & a_2 & -b_2 & a_1 & b_1 \\
y_2 & x_2 & -y_1 & x_1 & b_2 & a_2 & -b_1 & a_1 \\
x_3 & -y_3 & -x_4 & -y_4 & a_3 & -b_3 & -a_4 & -b_4 \\
y_3 & x_3 & \boxed{-y_4} & \boxed{+x_4} & b_3 & a_3 & \boxed{-b_4} & \boxed{+a_4} \\
x_4 & \boxed{+y_4} & x_3 & \boxed{-y_3} & a_4 & \boxed{+b_4} & a_3 & \boxed{-b_3} \\
y_4 & \boxed{-x_4} & \boxed{-y_3} & x_3 & b_4 & \boxed{-a_4} & \boxed{+b_3} & a_3
\end{array}\right]
\end{array}$$

Agora, um elemento de $\dot{\iota}_{\mathbb{H}-\mathbb{R}}(Sp(2))$, tem a forma:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
x_1 & -y_1 & -x_2 & -y_2 & a_1 & -b_1 & -a_2 & -b_2 \\
y_1 & x_1 & y_2 & -x_2 & b_1 & a_1 & b_2 & -a_2 \\
x_2 & -y_2 & x_1 & y_1 & a_2 & -b_2 & a_1 & b_1 \\
y_2 & x_2 & -y_1 & x_1 & b_2 & a_2 & -b_1 & a_1 \\
x_3 & -y_3 & -x_4 & -y_4 & a_3 & -b_3 & -a_4 & -b_4 \\
y_3 & x_3 & \boxed{y_4} & \boxed{-x_4} & b_3 & a_3 & \boxed{+b_4} & \boxed{-a_4} \\
x_4 & \boxed{-y_4} & x_3 & \boxed{+y_3} & a_4 & \boxed{-b_4} & +a_3 & \boxed{+b_3} \\
y_4 & \boxed{+x_4} & \boxed{-y_3} & x_3 & b_4 & \boxed{+a_4} & \boxed{-b_3} & a_3
\end{array}\right]$$

É fácil ver agora, que fazendo algumas mudanças de sinal em algumas das entradas de A, as que estão assinaladas, na Fig. anterior, obtemos um elemento de Sp(2) mergulhado canonicamente em SO(8), i.e., existe uma transformação linear

$\ell : M(8,\mathbb{R}) \longrightarrow M(8,\mathbb{R})$ (simplesmente trocar o sinal de algumas das entradas), tal que

$$\ell_o\, i_{\mathbb{H}-\mathbb{R}}(Sp(2)) = Spin(5)^{*} \subset Spin(6)^{*} = \varepsilon(SU(4))$$

Podemos ver também que $\ell_o\, i_{\mathbb{H}-\mathbb{R}}(Spin(1)) \subset \varepsilon(SU(3))$.

Seja $\quad \tau := \ell_o\, i_{\mathbb{H}-\mathbb{R}}$.

Temos então a fibração

$$\tau(Spin(1)) \;\ldots\; \tau(Sp(2)) \xrightarrow{\sigma|_{\tau(Sp(2))}} S^7$$

E assim, temos finalmente, o diagrama seguinte de fibrações:

$$\begin{array}{ccccccc}
\tau(Sp(1)) & \subset & \varepsilon(SU(3)) & \subset & G_2 & \subset & SO(7) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\tau(Sp(2)) & \subset & \varepsilon(SU(4)) & \subset & Spin(7)^{*} & \subset & SO(8) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \sigma|_{\tau(Sp(2))}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma|_{\varepsilon(SU(4))}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma|_{(Spin(7)^{*}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma} \\
S^7 & = & S^7 & = & S^7 & & S^7
\end{array}$$

SEÇÃO 3 - SEÇÕES PARA OS FIBRADOS

1. Temos que o fibrado

$$SO(7) \dots SO(8) \longrightarrow S^7$$

é trivial, pois $(a \longrightarrow [a\ ai\ aj\ \dots\ ])$ é essa seção.

2. Temos que o fibrado

$$G_2 \text{ --- -- -- } Spin(7) \longrightarrow S^7$$

não é trivial, mas "três vezes" ele é trivial:

$$\begin{tikzcd} & G_2 \arrow[d, dotted, no head] \\ & Spin(7) \arrow[d, "\alpha"] \\ S^7 \arrow[ur, no head, "g"] \arrow[r, "f"'] & S^7 \end{tikzcd}$$

Três vezes ele quer dizer que o pullback do fibrado mediante uma aplicação de grau 3, é trivial.

Se escolhemos f como $f(a) = a^3$, isto equivale a dizer que existe $g: S^7 \longrightarrow Spin(7) \,/\, \alpha_{\,o}\, g = f$.

Como $a(xy)\bar{a} = (a\,x\,a^2)(\bar{a}^2\,ya)$ (ver apêndice A, ítem 4(ii))

e $(x \longrightarrow a\,x\,\bar{a}) \in SO(7)$, temos que $(x \longrightarrow a\,x\,a^2) \in Spin(7)^*$

Logo, a aplicação $g: S^7 \longrightarrow Spin(7)^*$

$$a \longrightarrow (x \rightarrow a\,x\,a^2)$$

Faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
 & G_2 \arrow[d, dotted, dash] \\
 & \mathrm{Spin}(7)^{*} \arrow[d, dash, "\sigma"] \\
S^7 \arrow[ur, dash, "g"] \arrow[r, dash, "f"'] & S^7
\end{tikzcd}$$

Apêndice A, Álgebra de Cayley

1. Definimos uma álgebra $\mathbb{C}_a$, chamada Álgebra de Cayley, fornecendo $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ de um produto:

$$(a.b).(c.d) = (ac-\bar{d}b,\ da+b\bar{c}).$$

A álgebra resultante, não é associativa, tem unidade (1,0) e não tem divisores de zero.

Uma base para $\mathbb{C}_a$ é dada por uma base para $\mathbb{H}$, mas o elemento $e=(0,1)$, e os produtos por e: 1,i,j,k,e, ie,je,ke,

onde $i\equiv(i,0)$, $j\equiv(j,0)$, $k\equiv(k,0)$

Agora, se $x,y \in \mathbb{C}_a$, e se A é a álgebra gerada por estes elementos, não é difícil verificar que $A\cong\mathbb{C}$ no caso que $x\in$ Álgebra gerada por 1 e y, e $A\cong\mathbb{H}$, no caso contrário.

Logo:

Toda álgebra gerada por dois elementos é associativa.

Definimos também uma conjugação:

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a},-b)$$

a conjugação satisfaz $\bar{\bar{x}} = x$, $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$.

Definimos também:

$$Re\,¢_a = \{x \varepsilon ¢_a \,/\, x = \bar{x}\}$$

$$Im\,¢_a = \{x \varepsilon ¢_a \,/ -x = \bar{x}\}$$

e temos $¢_a = Re\,¢_a + Im\,¢_a$, e $Re\,¢_a = \{\, r(1,0), r \varepsilon \mathbb{R}\}$,

i.e, $Re\,¢_a \cong \mathbb{R}$.

2. Se $<\ >$ denota o produto interno real em $\mathbb{R}^8$, um cálculo simples mostra que

$$<x,y> = \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{2}$$

Assim, se $x \perp y$, então $x\bar{y} = -y\bar{x}$.

Também $|x|^2 = x\bar{x}$, e $|xy| = |x|\,|y|$.

3. Agora, se $a \varepsilon S^7$, i.e, Se $|a| = 1$,

Temos que, a aplicação $(x \longrightarrow ax) \varepsilon SO(8)$

Com efeito, $|a| = 1 \Rightarrow |a|\,|x| = |x|$ $\therefore$ $(x \longrightarrow ax) \varepsilon O(8)$.

Mas, como S^7 é conexo, existe $\alpha: [0,1] \longrightarrow S^7$, $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = a$

Logo a homotopia $t \longrightarrow (x \longrightarrow \alpha_t x)$ une a identidade com $(x \longrightarrow ax)$. Logo, $(x \longrightarrow ax) \varepsilon SO(8)$. Analogamente $(x \longrightarrow xa) \varepsilon SO(8)$.

4. Temos também uma identidade muito útil (Moufang identity)

(i) $a(xy)a = (ax)(ya)$ $\quad \forall x,y,a \varepsilon ¢_a$.

Da qual se deduz

(ii) $a(xy)\bar{a} = (a\,x\,a^2)(\bar{a}^{2}\,y\,\bar{a})$.

Assim usando esta última identidade, temos que

$$\bar{p}((px\bar{p}).(py\bar{p}))p = (\bar{p}(px\bar{p})\bar{p}^2).(p^2(py\bar{p})p) = x\bar{p}^3.p^3y.$$

5. Precisamos provar também o seguinte:

Se (1) $xp_1.\bar{p}_1y = xp_2.\bar{p}_2y \quad \forall x,y\epsilon ¢_a$, então $p_1 = \pm p_2$

com efeito, (1) implica

(2) $x.y = (x\bar{p}_1)p_2.\bar{p}_2(p_1x) \quad \forall x,y\epsilon ¢_a$

Fazendo $y = 1$, e depois $x = 1$, temos:

$$x(\bar{p}_1p_2) = (x\bar{p}_1)p_2$$

$$(\bar{p}_2p_1)y = \bar{p}_2(p_1y)$$

Logo, de (2) $\quad x.y = x\bar{a}.ay$, onde $a = p_2.p_1$, vale para todo x,y em $¢_a$.

Substituindo x por xa temos $(xa).y = x(ay)$ e uma conta simples mostra que $a\epsilon\mathbb{R}$. Logo, $a = \pm 1 \quad$ i.e., $p_1 = \pm p_2$.

6. Automorfismos de $¢_a$.

Um isomorfismo linear T: $¢_a \longrightarrow ¢_a$ é dito automorfismo de $¢_a$, se $\qquad T(x.y) = T(x).T(y), \quad \forall x,y\epsilon ¢_a$.

É claro que se T é automorfismo de $¢_a$, T^{-1} também o é, e que se T_1, T_2 são automorfismos de $¢_a$, T_1, T_2 também o é

Logo, o conjunto dos automorfismos de $¢_a$, é um grupo que denotamos por G_2. Por definição $G_2 \subset Gl(8)$.

Mais ainda, $|T(x)|^2 = T(x).\overline{T(x)} = T(x).T(\bar{x}) = T(x\bar{x}) = T(|x|^2) = |x|^2$

logo, $G_2 \subset O(8)$.

(estamos usando o fato de $T(\bar{x}) = \overline{T(x)}$, isto acontece pois T deixa invariante os reais: $T(x)=T(1x)=T(1).T(x) \therefore T(1)=1$.

Assim, $T(\bar{x})=T(\text{Re}\,x-\text{Im}\,x)=\text{Re}\,x-T(\text{Im}\,x)=\text{Re}\,Tx-\text{Im}\,Tx=\overline{Tx}$).

(Notemos que $T(\text{Im}\,\mathbb{C}a)=\text{Im}\,\mathbb{C}a$ pois $x\in \text{Im}\,\mathbb{C}a \Leftrightarrow x^2=-|x|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (Tx)^2=-|x|^2 \Leftrightarrow Tx \in \text{Im}$)

Como todo $T\in G_2$ deixa invariante os reais, em realidade temos $G_2 \subset O(7)$.

Agora, como e_2, e_3, e_5 (i.e, i, j, $e=(0,1)$)

geram (como álgebra) $\mathbb{C}a$ (pois $-e_2^2=1=e_1$; $e_2e_3=e_4$; $e_2e_5=e_6$;

$e_3e_5=e_7$; $e_4e_5=e_8$).

Temos que para determinar T, basta definir T em e_2, e_3, e_5.

Agora, como $e_2 \perp e_3$ e $e_5 \perp e_2$, e_3, e_2e_3 temos que

$$T(e_2) \perp T(e_3) \quad \text{e} \quad T(e_5) \perp T(e_2), T(e_3), T(e_2).T(e_3).$$

Temos o seguinte lema:

<u>Lema 1</u>: Para $x,y,z \in S^6$, tal que $x \perp y$, e $z \perp x, y, x.y$ existe um (único) $T\in G_2$ / $T(e_2)=x$, $T(e_3)=y$, $T(e_5)=z$.

<u>Prova</u>: Basta definir (da única forma possível)

$T(e_1)=e_1$; $T(e_2)=x$; $T(e_3)=y$; $T(e_4)=x.y$; $T(e_5)=z$;

$T(e_6)=xz$; $T(e_7)=y.z$; $T(e_8)=(x.y).z$.

Resta verificar que $T(e_ie_j) = T(e_i).T(e_j)$.

Do lema vemos que G_2 atua transitivamente em S^6, pois a apli cação $T \longrightarrow T(e_2)$ é sobrejetora.

Isto implica que $S^6 \cong G_2/K$, onde $K=\{T\varepsilon G/T(e_2)=e_2\}$

Mas $K= \varepsilon(SU(3))$ (ver seção 2, ...)

i.e $K \cong SU(3)$.

Como S^6 e $SU(3)$ são simplesmente conexos, temos que G_2 é sim plesmente conexo. Como G_2 é conexo temos $G_2 \subset SO(7)$

APÊNDICE B <u>SPIN (n)</u>

1. Lembremos que $\pi_1(SO(n) \cong \pi_1(SO(3))$, $n \geq 3$.

Com efeito, da fibração $SO(n-1) \ldots SO(n) \text{——} S^{n-1}$

temos a sequência da homotopia

$$\longrightarrow \pi_{k+1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_k(SO(n-1)) \longrightarrow \pi_k(SO(n)) \longrightarrow \pi_k(S^{n-1}) \longrightarrow$$

Para $k = 1$ e $n \geq 3$

$$0 \longrightarrow \pi_1(SO(n)) \longrightarrow \pi_1(SO(n-1) \longrightarrow 0$$

i.e. $\pi_i(SO(n)) \cong \pi_1(SO(3))$, $n \geq 3$

Lembremos também que S^3 é recobrimento universal de $SO(3)$

a prova, em linhas gerais, é a seguinte:

Definimos $\rho : S^3 \text{———} SO(3)$

$$q \text{———} (x \text{——} q\,x\,\bar{q}),$$ onde identificamos $\mathbb{R}^3$ com $\operatorname{Im}\mathbb{H}$

(pois se $x \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \Leftrightarrow x^2 = -|x|^2$, mas se $|q| = 1$, então

$(q x \bar{q})^2 = q x^2 \bar{q} = -q\bar{q}|x|^2 = -|x|^2 = -|q x \bar{q}|^2$, logo ρ está bem definida). Como $\rho_{q_1} \circ \rho_{q_2} = \rho_{q_2 q_2}$ temos que ρ é homomorfismo de grupos.

Agora, $q \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \Rightarrow \rho_q = -R_q$ (reflexão com respeito a q),

pois $\rho_q(q) = q$, e se $x \perp q$, então $\rho_q(x) = -x$

Mas, como para todo $A \in SO(3)$ existem v_1, $v_2 \in S^2 = S^3 \cap \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$

tal que $A = R_{v_1} \circ R_{v_2}$, temos que $\rho_{v_1 v_2} = \rho_{v_1} \circ \rho_{v_2} = -R_{v_1} \circ -R_{v_2} =$

$$= R_{v_1} \circ R_{v_2} = A.$$

Logo ρ é sobre. Além disso, é fácil ver que $\ker\rho = \{1,-1\}$

Assim, S^3 é recobrimento duplo de $SO(3)$.

Sendo S^3 simplesmente conexo, S^3 é recobrimento universal de $SO(3)$, e assim $\pi_1(SO(3)) = Z_2$.

Logo, $\pi_1(SO(n)) = Z_2$, $n \geq 3$.

2. Como $\pi_1(SO(n)) = Z_2$, $n \geq 3$, existem grupos simplesmente conexos que chamamos Spin(n), que recobrem SO(n) com duas folhas.

Para construir os grupos Spin(n), imitaremos a prova de que S^3 recobre $SO(3)$.

Neste caso, tinhamos uma álgebra com um produto (i.e. $\mathbb{H}$), que nos permite fazer o seguinte:

Para $v \in S^2 = S^3 \cap \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$, e $x \in \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$

Temos $(x \longrightarrow v\,x\,v) = R_v$

Isto acontece porque o produto (em $\mathbb{H}$) satisfaz:

(a) $v^2 = -|v|^2, \quad v \in \operatorname{Im}\mathbb{H}$

(b) $vx = -xv, \quad v, x \in \operatorname{Im}\mathbb{H}, \quad v \perp x$

Assim por (a) e (b) $R_v(v) = v^2 v = -v$

$R_v(x) = v\,x\,v = -xvv = x, \text{ se } x \perp v.$

Logo definido $\rho(v) = -R_v$, e extendendo a todos os elementos "compostos" $v_1 . v_2 : \rho(v_1 v_2) = \rho(v_1) . \rho(v_2) = +R_{v_1} . R_{v_2}$, e pelo fato de todo $A \in SO(3)$ decompõe-se em duas reflexões, temos que ρ é homomorfismo sobrejetor.

No caso geral, faremos o mesmo. Desejamos então que R^n se mergulhe (o identifique) em uma algebrà associativa, com unidade , $\mathbb{R}^n \hookrightarrow A$

e que se satisfaça

(a) $x \in \mathbb{R}^n \subset A \Leftrightarrow x^2 = -|x|^2 . 1$ (1 é a unidade em A)

(b) $x, y \in \mathbb{R}^n \subset A$ e $x \perp v \Leftrightarrow xy = -yx$

Mas, notemos que (a) $\Rightarrow$ (b), pois

$$2\langle x,y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle = |x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2$$

e por (a)

$$2\langle x,y\rangle = -x^2 - y^2 + (x-y)^2 = -(xy + yx)$$

$\therefore$ $\langle x,y\rangle = 0 \implies xy = -yx.$

Assim, basta exigir (a).

Desejamos também que esta álgebra seja "universal", no sentido de não ser muito pequena (para poder cobrir todo SO(n)) e de não ser muito grande (para não contar elementos de mais), e assim, generalizando, se substituimos $\mathbb{R}^n$ por um espaço vetorial qualquer, e $-|x|^2$ por uma forma quadrática qualquer, chegamos à definiçaõ de "álgebra de Chifford":

<u>Definição</u>: Seja V um espaço vetorial e Q uma forma quadrática em V. Se A é uma álgebra associativa com unidade, e

$i: V \longrightarrow A$, linear e injetora, tal que

$(i(x))^2 = Q(x).1, \quad \forall x \in V$, dizemos que (A,i) é uma "Álgebra de Chifford" correspondem a (V,Q), se satisfaz a seguinte propriedade universal: Se B é outra álgebra, associativa, com unidade, e $j:V \longrightarrow B$ é linear, tal que $(j(x))^2 = Q(x).1_B$, então existe um único homomorfismo de álgebras $\sigma: A \longrightarrow B$, tal que $\sigma \cdot i = j$.

i.e,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[dl, dashed, "\exists!\sigma"] \\ B & \end{tikzcd}$$

É claro, que todos as álgebras de Chifford CL(V,Q), corresdente a (V,Q) são isomorfas.

Para a prova rigorosa, de existência, ver por exemplo Postnikov.

3. Se $V=\mathbb{R}^n$, $Q(x)=-\langle x,x\rangle$, a álgebra resultante é denotada por $CL(n)$.

Neste caso vamos ter que se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica (ou qualquer outra base ortonormal), a base "canônica" para $CL(n)$ será:

$$\{e_{i_1} \ldots, e_{i_k}, \quad i_1<\ldots<i_k\} \cup \{1\}, \text{ logo}$$

$\dim CL(n) = 2^n$. Vemos que podemos separar $CL(n)$ em soma direta: $CL(n) = CL^0(n) + CL^1(n)$, onde

$$CL^0(n) = \text{Span}\langle e_{i_1} \ldots e_{i_k},\ i_1<\ldots<i_k,\ k \text{ par}\rangle; \text{ (Se } k=0 \text{ temos o } 1)$$

$$CL^1(n) = \text{Span}\langle e_{i_1} \ldots e_{i_k},\ i_1<\ldots<i_k,\ k \text{ impar}\rangle$$

Assim é fácil ver que $CL^0(n)$ é subálgebra de $CL(n)$.

Mais ainda, se $x \in CL^i(n)$

$y \in CL^j(n)$, $i,j \in Z_2$

Temos $x.y\ CL^{i+j \bmod (2)}(n)$, i.e, $CL(n)$ é uma álgebra Z_2-graduada.

No caso $n=2$ temos:

$$\text{Base } \{1, e_1, e_2, e_1e_2\}, \quad e_i^2 = -1, \ i=e^2$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1.$$

$CL^0(2) = \text{Span}\langle 1, e_1e_2\rangle$

$CL'(2) = \text{Span}\langle e_1, e_2\rangle$.

Vemos que $CL(2) \cong \mathbb{H}$

4. Agora, seja C o conjunto de todos os elementos inversíveis. Temos que C é um grupo: Mais ainda, C é grupo de Lie, pois basta analisar a função $(x \longrightarrow \det(y \longrightarrow xy))$, para ver que C é subgrupo de Lie de $GL(2^n, \mathbb{R})$.

Por exemplo, temos $\mathbb{R}^n - \{0\} \subset C$.

Definimos, agora, o grupo $P\,in(n)$ como o subgrupo de C gerado pelos elementos de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset CL(n)$, i.e:

$$P\,in(n) = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_k,\ v_i \varepsilon S^{n-1}\}$$

Também o grupo Spin(n):

$$Spin(n) := \{ v_1 \ldots v_k,\quad v_i \varepsilon S^{n-1},\ k\ par\}$$

vemos que $Spin(n) = P\,in(n) \cap CL^o(n)$.

Temos que $P\,in(n)$ é fechado, pois é a imagem da função

$$f\colon \underbrace{\{1\} \cup S^{n-1} \times \ldots \times \{1\} \cup S^{n-1}}_{n\text{-vezes}} \longrightarrow CL(n)$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \longrightarrow a_1 \ldots a_n$$

Logo $P\,in(n)$ é compacto

Analogamente,

$$g\colon \underbrace{S^{n-1} \times \ldots \times S^{n-1}}_{k\text{-vezes}} \longrightarrow CL(n) \qquad \begin{array}{l} k=n,\ se\ n\ par \\ k=n-1,\ se\ n\ impar \end{array}$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \longrightarrow a_1 \ldots a_n$$

Assim Imagem de $(g) = Spin(n)$. Logo, Spin(n) é compacto e conexo.

Desejamos também uma conjugação (como em $\mathbb{H}$):

$$a \longrightarrow \bar{a}\ ,\ \text{tal que } \bar{\bar{a}} = a, \text{ e } \overline{ab} = \bar{b}.\bar{a}$$

Definimos: $\overline{e_{i_1} \ldots e_{i_k}} = e_{i_k} \ldots e_{i_1}$ (Se $k=0$, $\bar{1}=1$)

assim $\overline{e_1e_2} = e_2e_1 = -e_1e_2$.

Em geral:
$$\overline{e_{i_1} \ldots e_{i_k}} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} e_{i_1} \ldots e_{i_k}$$

Para $v \varepsilon S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset CL(n)$, temos $\bar{v} = v$ $\therefore$ $v\bar{v} = v^2 = -1$

Mais ainda, se $a = v_1 \ldots v_k$, $v_i \varepsilon S^{n-1}$, então $a\bar{a} = (-1)^k$

Logo, para $a \varepsilon Spin(n)$, $a\bar{a} = 1$.

Agora, para $v \varepsilon S^{n-1}$, $x \varepsilon \mathbb{R}^n$, uma conta simples mostra que $v x \bar{v} \varepsilon \mathbb{R}^n$ $\therefore$ Se $a \varepsilon Pin(n)$, também $a x \bar{a} \varepsilon \mathbb{R}^n$.

Logo, temos uma aplicação

$$\pi: Pin(n) \longrightarrow End(\mathbb{R}^n)$$
$$a \longrightarrow \pi(a): x \longrightarrow ax\bar{a}$$

(notemos que $\pi(-a) = \pi(a)$).

Temos também que $\pi(ab) = \pi(a).\pi(b)$. (π é homomorfismo de grupos de Lie).

Logo, $\pi(a)$ é inversível, pois Pin é grupo,

$\therefore$ $\pi: Pin(n) \longrightarrow Aut(\mathbb{R}^n) \cong GL(n)$.

E mais, como $|\pi(a).x|^2 = |a x \bar{a}|^2 = -(a x \bar{a})(a x \bar{a}) = +(a\bar{a})^2(-x^2) =$
$= +|x|^2$.

temos em realidade que $\pi(a) \varepsilon O(n)$.

Agora, notemos que se $v \in S^{n-1}, \pi(v) = -R_v$

Pois $\pi(v).v = vv\bar{v} = -v$, e se $x \perp v$ $\pi(v).x = v\,x\,\bar{v} = -v\bar{v}x = x$

Logo, como todo $A \in O(n)$ é produto de Reflexões, i.e,

$\forall A \in O(n)$, $\exists v_1 \dots v_k$, $v_i \in S^{n-1} / A = R_{v_1} \dots R_{v_k}$,

temos $\pi(v_1 \dots v_k) = \pi(v_1) \dots \pi(v_k) = R_{v_1} \circ \dots \circ R_{v_k} = A$

$\therefore$ π é sobrejetora. Também uma conta simples (ver Postnikov, Lie Groups and Lie Algebras) mostra que

ker $= \{1,-1\}$

É fácil ver também, que se $a \in \mathrm{Spin}(n)$, então $\pi(a) \in SO(n)$, e reciprocamente. Logo $\pi\ \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow SO(n)$, e assim Spin(n) é recobrimento universal de duas folhas de SO(n).

5. Podemos notar também, que $CL^o(n) \cong CL(n-1)$ mediante o isomorfismo:

$$i_k \leq n-1 \quad \psi(e_i, e_{i_\ell}) = \begin{cases} e_{i_1} \dots e_{i_\ell}, & \text{se } \ell \text{ par} \\ e_{i_1} \dots e_{i_\ell}.e_n, & \text{se } \ell \text{ impar} \end{cases}$$
$$k = 1, \dots, \ell$$

Por exemplo, $CL^o(3) \cong CL(2)$:

Com efeito: $CL^o(3) = \mathrm{Span}\langle 1, e_1, e_2, e_1e_3, e_2e_3 \rangle$

$CL(2) = \mathrm{Span}\langle 1, e_1, e_2, e_1e_2 \rangle$

e temos ψ: $\psi(1) = 1$

$\psi(e_1) = e_1e_3$

$\psi(e_2) = e_2e_3$

$\psi(e_1e_2) = e_1.e_2$

Como Spin(n) $\subset CL^{o}(n)$ (em realidade Spin(n) = Pin(n)$\cap CL^{o}(n)$)

temos que podemos considerar Spin(n) $\subset$ CL(n-1)

6) Para o caso n=8, se consideramos $Im\mathbb{C}_a = \mathbb{R}^7$, identificamos

CL(7) com CL($Im\mathbb{C}_a$).

Agora, para $a \in Im\mathbb{C}_a$, definimos
$$\lambda(a): Im\mathbb{C}_a \longrightarrow Im\mathbb{C}_a$$
$$x \longrightarrow ax$$

Evidentemente $\lambda: Im\mathbb{C}_a \longrightarrow End(\mathbb{C}_a)$. Mas, como $(\lambda(a))^2 = -Id$

(pois $a^2=-1$. $\forall a \in Im\mathbb{C}_a$) temos que pela definição de álgebra

de Chifford, λ se estende a todo CL(7)

Agora, como $\mathbb{C}_a \longrightarrow CL(Im\mathbb{C}_a)$ (pois $\mathbb{C}_a \cong \mathbb{R} + Im\mathbb{C}$), temos que a

aplicação
$$\lambda: \mathbb{C}_a \longrightarrow End(\mathbb{C}_a), \text{ se estende a } CL(Im\mathbb{C}_a)$$
$$a \longrightarrow \lambda(a)$$

Mas, pelo parágrafo anterior, Spin(8) $\hookrightarrow$ CL(7), temos que

λ se estende também a Spin(8); $\lambda: Spin(8) \longrightarrow End(\mathbb{C}_a)$

Mas como Spin(8) é grupo, e λ é homomorfismo,

$\lambda: Spin(8) \longrightarrow Isom(\mathbb{C}_a)$

Mais ainda, é fácil ver que $\lambda: Spin(8) \longrightarrow SO(8)$,

(pois a aplicação $(x \longrightarrow ax) \in SO(8)$, se $|a|=1$).

Em realidade a aplicação λ é dada por:

$$\lambda(v_1 \ldots v_k) = \lambda_{v_1} \circ \ldots \circ \lambda_{v_k}$$

Fazendo o mesmo para
$$\rho: \mathbb{C}_a \longrightarrow SO(8),$$
$$a \longrightarrow (x \longrightarrow xa)$$

Temos que ρ e λ são homomorfismos (C^∞).

B I B L I O G R A F I A

1. Postnikov. Lectures on Lie Groups and Lie Algebras

2. Porteous. Topological Geometry.