

MÉTODOS DE PROJEÇÃO DO SUBGRADIENTE PARA O  
PROBLEMA DE FACTIBILIDADE CONVEXA

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida defendida pelo Sr. LUCIO TUNES DOS SANTOS e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 13 de fevereiro de 1985.

Prof.Dr. JOSÉ MÁRIO MARTÍNEZ  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de "Mestre em Matemática Aplicada".

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

INDICE

INTRODUÇÃO . . . . .	1
PRELIMINARES . . . . .	3
CAPÍTULO I:	
MÉTODOS DE PROJEÇÃO DO SUBGRADIENTE . . . . .	9
CAPÍTULO II:	
PROCEDIMENTOS DE ACELERAÇÃO . . . . .	22
CAPÍTULO III:	
EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS . . . . .	34
CONCLUSÃO . . . . .	48
BIBLIOGRAFIA . . . . .	51

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr. José Mário Martinez, por sua atenção e eficiente orientação.

Ao Prof.Dr. Miguel Taube Netto, por seu apoio e incentivo.

Aos Professores do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC pelo excelente relacionamento.

À FAPESP pelo custeio total dos meus estudos.

À minha mãe

Adelaide

## INTRODUÇÃO

Recentemente algumas aplicações, que requerem a solução de sistemas de igualdades e desigualdades de porte "enorme", despertaram a atenção para certos métodos que não fazem alteração no sistema original, requerem acesso à somente uma restrição de cada vez e computam cada iteração a partir somente do ponto anterior. Tais métodos foram chamados por Censor de "*Métodos de ação por linhas*" (veja [1]).

Em algumas dessas aplicações, como por exemplo, a reconstrução de imagens na tomografia computadorizada, as desigualdades e igualdades são definidas por funções convexas, e é justamente sobre esse caso que trata este trabalho.

O método de ação por linhas mais conhecido para o problema convexo é o "*Método das Projeções Ortogonais Sucessivas*" (POS) proposto por Gubin et al.

De Pierro e Iusem desenvolveram uma versão paralela do método POS, onde em cada iteração é tomada uma combinação convexa (com coeficientes pré-determinados) das projeções ortogonais.

Censor & Lent desenvolveram um método baseado em projeções de subgradientes, chamado "*Método das Projeções Cíclicas do Subgradiente*" (PCS) o qual é uma tentativa de suprimir o cálculo da projeção ortogonal. Este método é a base fundamental desta pesquisa.

Além de existirem vários outros métodos para o problema, foram desenvolvidos procedimentos de aceleração para melhorar a velocidade de convergência dos métodos de ação por linhas.

O objetivo deste trabalho é introduzir e demonstrar o teorema de convergência de um novo método usando as idéias expostas anteriormente.

Inicialmente são apresentados alguns resultados que serão úteis posteriormente. No capítulo I, é descrito o método PCS e é introduzida a versão paralela, bem como a demonstração de sua convergência. No capítulo II, é apresentado o esquema de aceleração desenvolvido por De Pierro e é aplicada uma generalização desse procedimento ao método introduzido no capítulo I. As experiências numéricas são descritas no capítulo III. Finalmente são expostas algumas conclusões e fornecemos as linhas para futuras pesquisas.

## PRELIMINARES

## 1. DEFINIÇÕES E TEOREMAS IMPORTANTES

Nesta seção apresentaremos algumas notações e alguns resultados básicos em forma condensada, que serão usados no decorrer do trabalho.

DEFINIÇÃO 1: Dado um conjunto  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  e um ponto  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $P_Q(y)$  denotará a *Projeção Ortogonal* de  $y$  sobre  $Q$ , isto é, o ponto tal que:

$$\|y - P_Q(y)\| = \inf_{z \in Q} \|y - z\|$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ . Se  $Q$  é fechado e não vazio então  $P_Q(y)$  sempre existe e se  $Q$  é também convexo então  $P_Q(y)$  é unicamente determinado por  $y$ .

O operador projeção é não-expansivo, ou seja,

$$\|P_Q(x) - P_Q(y)\| \leq \|x - y\|$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

DEFINIÇÃO 2: Um vetor  $t \in \mathbb{R}^n$  é dito um *subgradiente* de uma fun-

ção convexa  $g$  no ponto  $y$  se  $\langle t, x-y \rangle \leq g(x) - g(y)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica o produto interno em  $\mathbb{R}^n$ ). Esta desigualdade será referida como a *Desigualdade do Subgradiente*. O conjunto de todos os subgradientes de  $g$  em  $y$  será denotado por  $\partial g(y)$ .

Observações:

(i) Se  $g$  é diferenciável em  $y$  então seu gradiente  $\nabla g(y)$  é o único subgradiente de  $g$  em  $y$ .

(ii) Uma função convexa sempre possui um subgradiente.

(veja Rockafellar [10]).

DEFINIÇÃO 3: Uma sequência  $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$  é chamada *Fejer-Monotônica* com respeito a um conjunto fechado  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  se:

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \|x^k - x\|, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x \in S.$$

Uma sequência Fejer-Monotônica é claramente limitada.

DEFINIÇÃO 4: A função  $g^+(x)$  obtida de uma função real  $g(x)$  definida em  $\mathbb{R}^n$  pela operação:  $g^+(x) = \max\{0, g(x)\}$  é chamada "Kink" de  $g$ . Se  $g(x)$  é convexa então  $g^+(x)$  também é convexa e  $\min g^+(x) = 0$ . Também é verdade que  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g^+(x) = 0\}$ .

DEFINIÇÃO 5: Seja  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ . Uma sequência de índices  $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$  é chamada *Cíclica* em  $M$  se  $i_k = k \pmod{m} + 1$ . Uma se-

sequência de índices  $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$  é chamada *Quase-cíclica* em  $M$  se  $i_k \in M$  para todo  $k \geq 0$  e existe um inteiro  $C$  tal que para todo  $k \geq 0$ ,  $M \subseteq \{i_{k+1}, \dots, i_{k+C}\}$ . Uma sequência cíclica é quase-cíclica com  $C = m$ .

## 2. O MÉTODO DE KACZMARZ

O método desenvolvido por S.Kaczmarz [6] para resolver um sistema de equações lineares pode ser descrito geometricamente como segue: tomando um ponto inicial qualquer  $x^0$ , é gerada uma sequência onde cada ponto pertence ao segmento de reta entre a iteração anterior e sua reflexão em um dos hiperplanos definidos pelas equações lineares (a posição da nova iteração no segmento depende de um parametro de relaxação). Os hiperplanos são tomados sucessivamente numa sequência quase-cíclica.

### Método de Kaczmarz:

Inicialização:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  é arbitrário.

$$\text{Passo: } x^{k+1} = x^k + \alpha_k \frac{(b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x^k \rangle)}{\|a_{i_k}\|^2} \cdot a_{i_k}$$

onde  $\varepsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \varepsilon_2$  para  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ;  $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$  é uma sequência quase cíclica e  $\langle a_{i_k}, x^k \rangle = b_{i_k}$  denotam as equações  $l_{i_k}$

neares do sistema.

Na figura 1 temos uma ilustração para o caso de  $\alpha_k = 1$  para todo  $k \geq 0$ , onde  $H_{i_k} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_{i_k}, x \rangle = b_{i_k}\}$ .

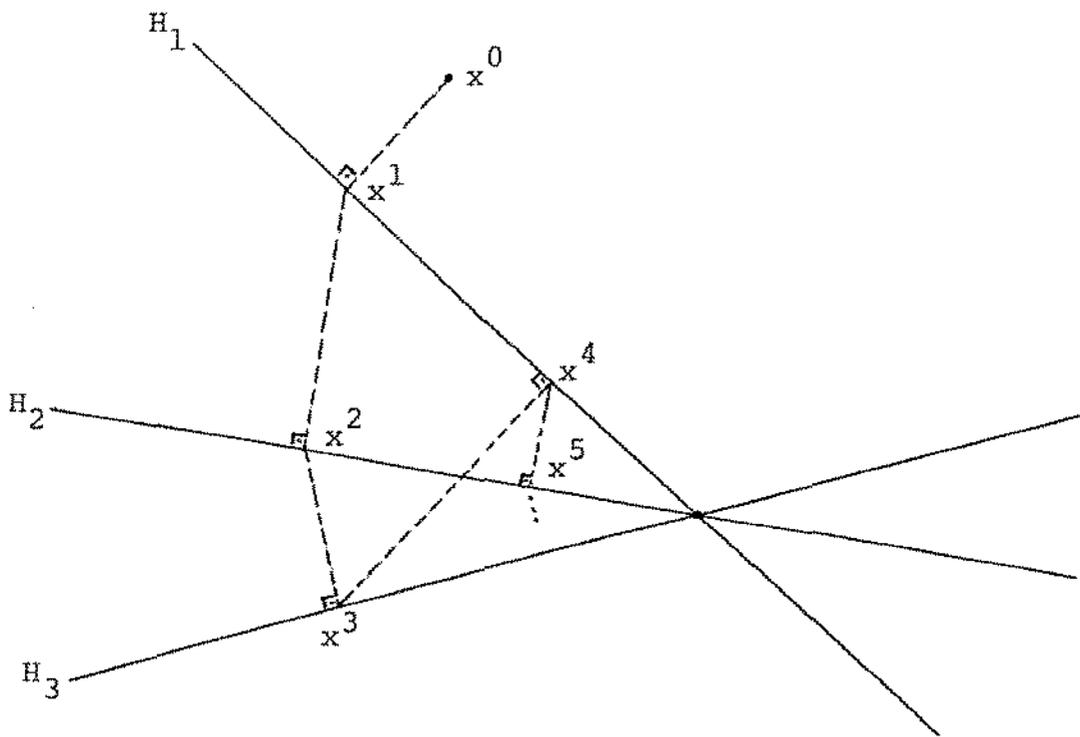


Figura 1. Método de Kaczmarz com relaxação unitária.

### 3. O PROBLEMA DE FACTIBILIDADE CONVEXA

O problema de achar algum ponto na intersecção (não vazia) de uma dada família de conjuntos convexos é uma interessante questão matemática que tem muitas aplicações importantes em

Matemática e em outras áreas.

Neste trabalho trataremos do caso onde todos os conjuntos pertencem ao  $\mathbb{R}^n$ , há somente um número finito de conjuntos na família, e todos os conjuntos convexos, exceto possivelmente um, são descritos por desigualdades envolvendo funções convexas.

Esse problema será chamado de "Problema de Factibilidade Convexa" cuja formulação é: achar  $x \in Q$  tal que  $g_i(x) \leq 0$  para todo  $i \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ , onde  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo fechado e as  $g_i$  são funções convexas em  $\mathbb{R}^n$ .

Chamaremos de  $S$  o conjunto solução, ou seja,

$$S = \{x \in Q / g_i(x) \leq 0, i \in M\}$$

#### 4. O MÉTODO DAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS SUCESSIVAS

Esse método, devido a Gubin et al [5] gera uma sequência que converge para algum ponto na intersecção não vazia de uma dada família de conjuntos convexos, tomando projeções ortogonais sobre os conjuntos convexos da família (veja figura 2). Quando aplicado ao problema de factibilidade convexa, este método pode ser descrito como segue:

Método POS:

Inicialização:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  é arbitrário.

$$\text{Passo: } x^{k+1} = x^k + \alpha_k (P_{Q_{i_k}}(x^k) - x^k)$$

onde  $Q_1 = Q$  da seção 3 e  $Q_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0\}$  para  $i \in M$ ;  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$  é uma sequência de parâmetros de relaxação com  $\epsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \epsilon_2 \quad \forall k \geq 0$  e  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ;  $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$  é uma sequência cíclica em  $M$ .

Este método é particularmente útil quando as projeções nos conjuntos individuais são facilmente calculadas. Em geral, entretanto, a aplicação do método POS requerá em cada passo a solução de um problema de minimização subsidiário, associado à projeção no conjunto em questão.

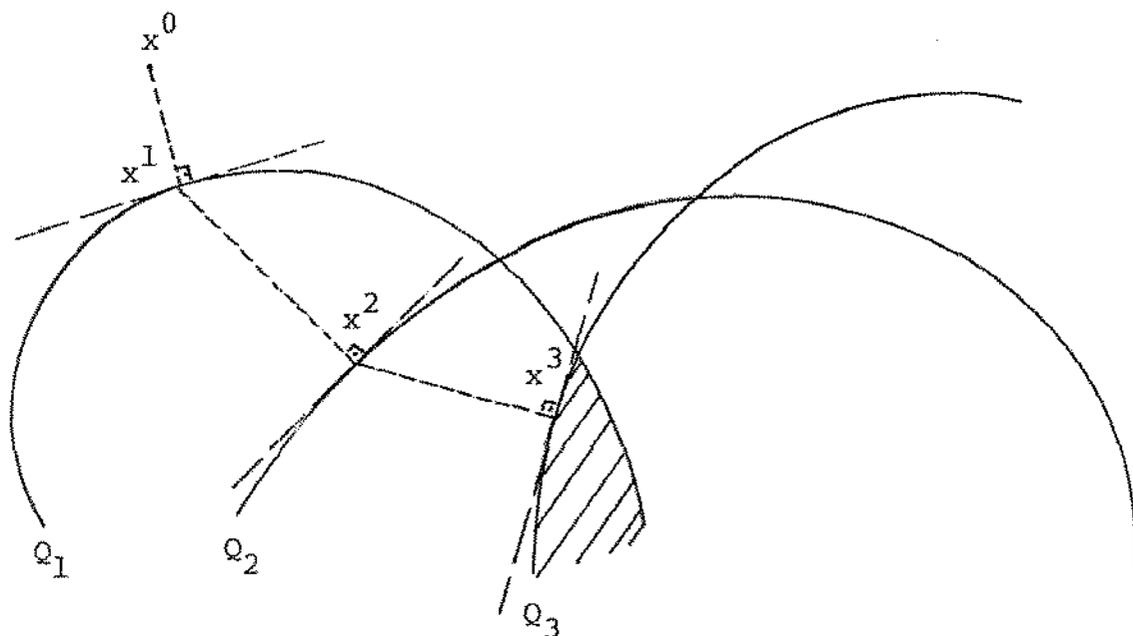


Figura 2. O método das projeções ortogonais sucessivas com  $\alpha_k = 1$ , para todo  $k \geq 0$ .

## CAPÍTULO I

### MÉTODOS DE PROJEÇÃO DO SUBGRADIENTE

Neste capítulo apresentaremos dois métodos cujas iterações usam projeções do subgradiente. No final é feita uma comparação geométrica entre os passos dos algoritmos.

#### 1. MÉTODO DAS PROJEÇÕES CÍCLICAS DO SUBGRADIENTE

O Método das Projeções Cíclicas do Subgradiente (PCS) proposto por Censor & Lent [2] para resolver o problema de factibilidade convexa, possui várias características que o tornam uma excelente ferramenta. É um método iterativo que faz uso dos conjuntos convexos (isto é, das funções convexas) uma de cada vez em cada iteração. Mais ainda, as funções são tomadas em uma ordem cíclica de maneira que nenhum esforço computacional é necessário para selecionar a função a ser usada na próxima iteração.

Sob esse controle cíclico o método requer a cada passo o cálculo do (sub) gradiente da função convexa tomada em particular e não a projeção ortogonal sobre o conjunto convexo descrito pelas desigualdades convexas. Essa eliminação das projeções ortogonais faz com que o método seja favorável quando os conjuntos convexos não possuem uma forma fechada "fácil" para as projeções ortogonais.

Método PCS:

Inicialização:  $x^0 \in Q$  é arbitrário.

Passo:  $x^{k+1} = P_Q(\tilde{x}^{k+1})$ , com

$$\tilde{x}^{k+1} = x^k - \alpha_k \cdot \frac{g_{i_k}^+(x^k)}{\|t_i^k\|^2} \cdot t_i^k$$

onde  $t_i^k \in \partial g_{i_k}^+(x^k)$  e  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$  é uma sequência de parâmetros de relaxação confinados ao intervalo  $\varepsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \varepsilon_2$  para todo  $k \geq 0$ , com  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  e  $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$  é uma sequência quase-cíclica em  $M$ .

Se  $g_{i_k}^+(x^k) = 0$ , o termo de correção é tomado zero, isto é,  $\tilde{x}^{k+1} = x^k$  e não é necessário calcular  $t_i^k$ .

Observação: se  $t_i^k = 0$ , então  $g_{i_k}$  assume um mínimo em  $x^k$  implicando, por  $S$  ser não vazio, que  $g_{i_k}^+(x^k) = 0$  e  $g_{i_k}(x^k) \leq 0$ , daí  $\tilde{x}^{k+1} = x^k$ . Isto mostra que o passo do algoritmo está bem definido.

TEOREMA 1: Se:

- (i) as  $g_i(x)$  são funções contínuas e convexas em  $\mathbb{R}^n$  para

- todo  $i \in M$ ,
- (ii)  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo e fechado,
- (iii)  $S \neq \emptyset$  e
- (iv) para algum  $\hat{x} \in S$  existe uma constante  $K \equiv K(\hat{x})$  tal que  $\|t\| \leq K$  para todo  $t \in \partial g_i^+(x)$  para todo  $i \in M$  e para todo  $x \in Q$  para o qual  $\|x - \hat{x}\| \leq \|x^0 - \hat{x}\|$ . (Esta suposição será referida como a "Limitação uniforme dos Subgradients"),

então a sequência  $\{x^k\}$  gerada pelo método PCS converge para uma solução do problema de factibilidade convexa, isto é,  $x^k \rightarrow x^* \in S$ .

*Prova:* A prova consiste nos seguintes cinco passos:

- 1)  $\{x^k\}$  é uma sequência Fejer-monotônica com respeito a  $S$ .
- 2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{i_k}^+(x^k) = 0$
- 3)  $\|x^{k+1} - x^k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
- 4) Para todo  $i \in M$  fixo,  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_i^+(x^k) = 0$
- 5)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^* \in S$

1) Seja  $x \in S$ .

$$\|x^{k+1} - x\|^2 = \|P_Q(x^{k+1}) - x\|^2 \leq \|x^{k+1} - x\|^2$$

porque  $x = P_Q(x)$  (desde que  $x \in Q$ ) e o operador projeção é não expansivo (veja a definição 1).

Denotando  $\beta_k = \alpha_k \frac{g_{i_k}^+(x^k)}{\|t_i^k\|^2}$ , temos

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\|^2 &\leq \|x^k - \beta_k t_i^k - x\|^2 \\ &= \|x^k - x\|^2 + \beta_k^2 \|t_i^k\|^2 - 2\beta_k \langle t_i^k, x^k - x \rangle \end{aligned}$$

Da desigualdade do subgradiente (veja definição 2) e porque  $g_{i_k}^+(x) = 0$  desde que  $x \in S$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\|^2 &\leq \|x^k - x\|^2 + \beta_k^2 \|t_i^k\|^2 - 2\beta_k g_{i_k}^+(x^k) \\ &= \|x^k - x\|^2 + (\alpha_k^2 - 2\alpha_k) \frac{[g_{i_k}^+(x^k)]^2}{\|t_i^k\|^2} \end{aligned}$$

Do fato que  $\alpha_k \in [\epsilon_1, 2 - \epsilon_2]$ , para todo  $k \geq 0$ , temos

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k - x\|^2 - \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{[g_{i_k}^+(x^k)]^2}{\|t_i^k\|^2}, \quad (1)$$

da qual Fejer-monotonicidade segue.

2) Para  $x \in S$  a sequência  $\{\|x^k - x\|\}$  é monotonicamente decrescente, daí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\| = d, \text{ digamos.}$$

Isto implica, via (1), que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[g_{i_k}^+(x^k)]^2}{\|t_i^k\|^2} = 0 \quad (2)$$

Agora usamos a limitação uniforme dos subgradientes. Seja  $\hat{x}$  o ponto cuja existência é assumida. Se denotamos

$$S_{\hat{x}} \triangleq \{x \in Q \mid \|x - \hat{x}\| \leq \|x^0 - \hat{x}\|\} \quad (3)$$

então  $x^k \in S_{\hat{x}}$ , para todo  $k \geq 0$ , porque  $\hat{x} \in S$ ,  $x^k \in Q$  e por aplicações sucessivas de Fejer-monotonicidade. A hipótese (iv) garante que  $\|t_i^k\| \leq K$ , e daí,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{i_k}^+(x^k) = 0 \quad (4)$$

segue.

$$3) \|x^{k+1} - x^k\|^2 = \|P_Q(x^{k+1}) - P_Q(x^k)\|^2 \leq \|x^{k+1} - x^k\|^2,$$

porque  $x^k \in Q$ , para todo  $k \geq 0$ . Novamente, a não-expansividade de  $P_Q$  foi usada.

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq \alpha_k^2 \frac{[g_{i_k}^+(x^k)]^2}{\|t_i^k\|^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (5)$$

por substituição e o uso de (2).

Note que isto implica que

$$\|x^{k+j} - x^k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (6)$$

para todo inteiro  $j$ .

4) Seja  $i \in M$  fixo, então

$$|g_i^+(x^k)| \leq |g_i^+(x^k) - g_i^+(x^{k'})| + |g_i^+(x^{k'})| \quad (7)$$

onde  $k'$  é escolhido como o inteiro mais próximo de  $k$  tal que

$$k' = k + r, \quad r \geq 0 \quad \text{e} \quad i_{k'} = i \quad (8)$$

Para todo  $k \geq 0$ , temos  $|k - k'| \leq C$ , com  $C$  a constante do controle quase-cíclico (veja definição 5).

O conjunto  $S_{\hat{x}}$  definido por (3) é compacto, então  $g_i^+(x)$  é uniformemente contínua nele, daí (6) implica

$$|g_i^+(x^k) - g_i^+(x^{k'})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

A escolha (8) de  $k'$  diz que

$i = i_k$ , para todo  $k \geq 0$ .

daí, (4) implica que  $|g_i^+(x^{k'})| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ .

através de (7) temos o resultado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_i^+(x^k) = 0, \text{ para todo } i \in M, \text{ fixo.} \quad (9)$$

5) Desde que  $\{x^k\} \subseteq S_{\bar{x}}$ , o qual é um conjunto compacto, qualquer subsequência convergente de  $\{x^k\}$  deve satisfazer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{k_m} = x^* \in Q, \quad (10)$$

porque  $Q$  é fechado. Para todo  $i \in M$  fixo, (9) acontece para essa subsequência. Então, por continuidade de  $g_i^+$ ,  $g_i^+(x^*) = 0$ , o que prova que  $x^* \in S$ .

No passo (2) provamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = d,$$

Mas agora temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{k_m} - x^*\| = 0;$$

Então,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = 0$ , e a prova está completa.  $\square$

## 2. MÉTODO DAS PROJEÇÕES PARALELAS DO SUBGRADIENTE

De Pierro e Iusem [4] fizeram uma versão paralela do método das Projeções Ortogonais sucessivas, isto é, em cada iteração fazem-se as projeções sobre todos os conjuntos convexos e o novo ponto pertence a reta definida pelo ponto anterior e a combinação convexa (com coeficientes fixados) dessas projeções, sendo o local na reta determinado por um parâmetro de relaxação.

O algoritmo introduzido nesta seção usa a mesma idéia sendo que ao invés de tomarmos projeções ortogonais, aplicamos o método PCS. Chamaremos a esse novo método de "Método das Projeções Paralelas do Subgradiente" (PPS).

### Método PPS:

Inicialização:  $x^0 \in Q$  é arbitrário.

Passo:  $x^{k+1} = P_Q(x^{k+1})$ , com

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{g_i^+(x^k)}{\|t_i^k\|^2} : t_i^k$$

onde  $t_i^k \in \partial g_i^+(x^k)$ ,  $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$  é uma sequência de parâmetros de relaxação com  $\varepsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \varepsilon_2$  para todo  $k \geq 0$ , para  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ e } 0 < \lambda_i < 1 \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Como no método PCS, o passo do PPS está bem definido.

TEOREMA 2: Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1, qualquer sequência gerada pelo método PPS converge para um ponto em S.

*Prova:* A prova consiste em demonstrar os passos 1, 4, 5 da prova do teorema 1.

1) Seja  $x \in S$ . Denotamos  $\beta_k^i = \alpha_k \frac{g_i^+(x^k)}{\|t_i^k\|^2}$ . Analogamente a prova anterior temos que

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\| &\leq \|x^{k+1} - x\| \\ &= \|x^k - \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta_k^i t_i^k - x\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i (x^k - \beta_k^i t_i^k - x) \right\| \end{aligned}$$

pois  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ .

Agora,

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x^k - \beta_k^i t_i^k - x\|$$

e usando os cálculos do passo 1 da prova anterior chegamos a

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (\|x^k - x\| - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{[g_i^+(x^k)]^2}{\|t_i^k\|^2})^{1/2} \quad (11)$$

Então,

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x^k - x\| = \|x^k - x\|$$

2) Aqui também temos que a sequência  $\{\|x^k - x\|\}$  é monotonicamente decrescente para  $x \in S$ .

Isto implica, como no passo 2 da prova anterior e pela relação (11), que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[g_i^+(x^k)]^2}{\|t_i^k\|^2} = 0.$$

Usando o raciocínio idêntico ao do teorema 1, é completada a prova.  $\square$

Façamos agora alguns comentários sobre esse método. No cálculo de cada iteração os únicos requisitos necessários são o ponto  $x^k$  e o parâmetro  $\alpha_k$ . Fazendo uso de "computação paralela" é possível calcular as "projeções" em paralelo, ou seja, todas simultaneamente (veja [9]), visto que são independentes. Posteriormente calculamos a combinação convexa.

Assim, quando é usada computação paralela, uma iteração do método PPS é equivalente (em "tempo" computacional) a uma

projeção do método PCS.

### 3. COMPARAÇÃO GEOMÉTRICA ENTRE OS MÉTODOS POS, PCS e PPS

A figura 3 mostra a diferença básica entre os métodos POS e PCS. Tomar a projeção ortogonal de um ponto  $\hat{x}$  sobre o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$  significa fazer um movimento na direção do gradiente negativo de  $f$  no ponto  $x'$ , o qual é a projeção ortogonal de  $\hat{x}$  sobre o conjunto. Mas, nesse instante  $x'$  ainda não é conhecido; então a direção do movimento não pode ser calculada pelo gradiente, mas somente através da solução de um problema de minimização para minimizar a distância entre  $\hat{x}$  e o conjunto.

Em contraste com isso, para calcular o próximo ponto  $x''$ , o método PCS faz um movimento de  $\hat{x}$  na direção do gradiente negativo de  $f$  no ponto  $\hat{x}$ . Tal movimento pode ser "menos eficiente" que a projeção ortogonal, em termos de taxa de convergência do processo inteiro, mas em compensação eliminamos a necessidade de um problema de minimização subsidiário para calcular o próximo ponto.

A figura 4 ilustra a diferença entre os métodos PCS e PPS para o caso com duas equações. O ponto  $x_1'$  é obtido quando aplicamos o PCS com o ciclo  $\{1, 2\}$  e  $x_2'$  com o ciclo  $\{2, 1\}$ . O ponto obtido com o método PPS,  $x''$  está na reta definida por  $\hat{x}$  e por uma combinação convexa de  $x_1$  e  $x_2$ .

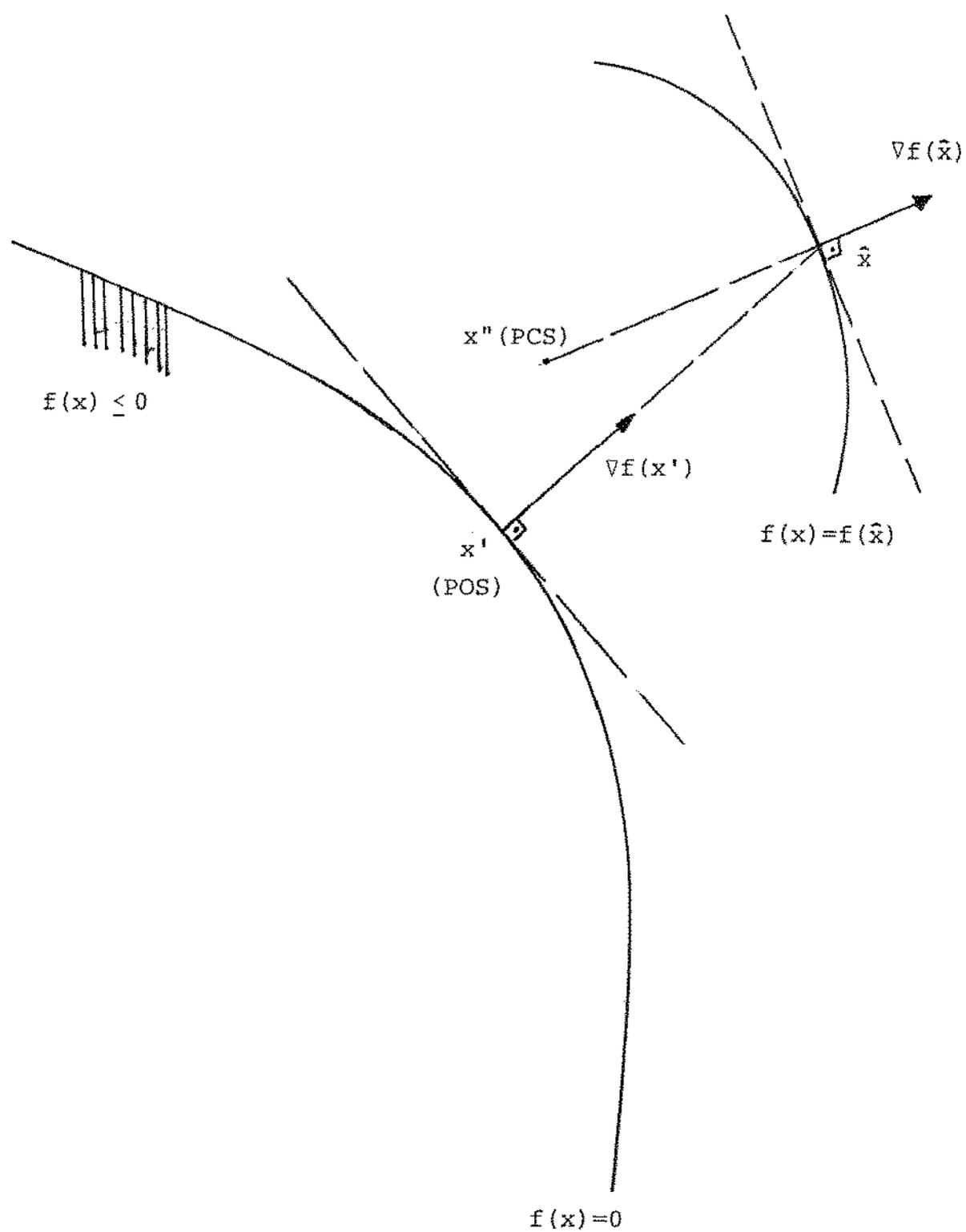


Figura 3. Comparação entre os métodos POS e PCS.

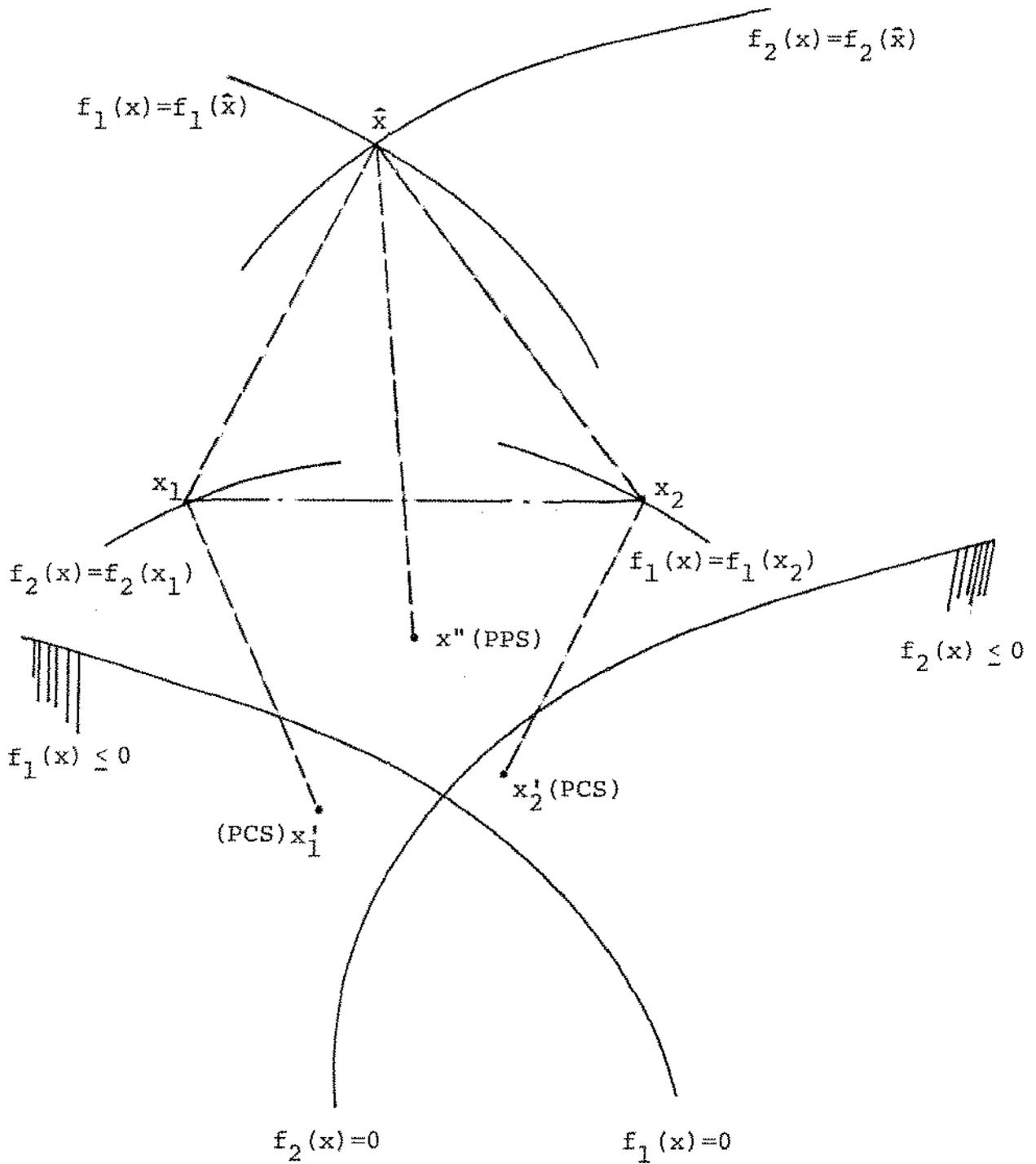


Figura 4. Comparação entre os métodos PCS e PPS.

## CAPÍTULO II

## PROCEDIMENTOS DE ACELERAÇÃO

Alguns autores incorporaram procedimentos de aceleração para aumentar a velocidade de convergência dos métodos de ação por linhas (veja, por exemplo [7]). Neste capítulo são acelerados os métodos PCS e PPS usando uma generalização do esquema introduzido por De Pierro [3] para sistemas lineares. A idéia é simples: dadas duas iterações  $x^k$  e  $x^{k+1}$ , a iteração acelerada é uma aproximação do ponto no segmento de reta  $[x^k, x^{k+1}]$  que está mais próximo da solução. De Pierro provou a convergência desse algoritmo para o caso linear em ambas as situações de singularidade e não singularidade.

## 1. O MÉTODO DE KACZMARZ ACELERADO

Seja  $x$  o ponto em uma iteração qualquer. Fazemos um ciclo completo do método de Kaczmarz com  $\alpha_k = 1, \forall k \geq 0$ , ou seja,

$$x_0 = x$$

$$x_1 = x_0 - u_1 a_1$$

$$\vdots$$

$$x_m = x_{m-1} - u_m a_m$$

$$\text{com } u_i = \frac{-b_i + \langle a_i, x_{i-1} \rangle}{\|a_i\|^2} .$$

Denotemos por  $y$  a iteração acelerada. Assim,  $y$  deve estar na reta  $[x, x_m]$  e também estar o mais próximo possível da solução (veja a figura 5 para o caso de  $m=2$ ). Logo:

$$y = x + \lambda(x_m - x), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$

$$\langle x^* - y, x_m - x \rangle = 0$$

onde  $x^*$  é a solução do sistema (estamos supondo o caso de não singularidade). Daí,

$$\langle x^* - y, x_m - x \rangle = \langle x^* - x - \lambda(x_m - x), x_m - x \rangle = 0$$

o que implica em 
$$\lambda = \frac{\langle x^* - x, x_m - x \rangle}{\|x_m - x\|^2}$$

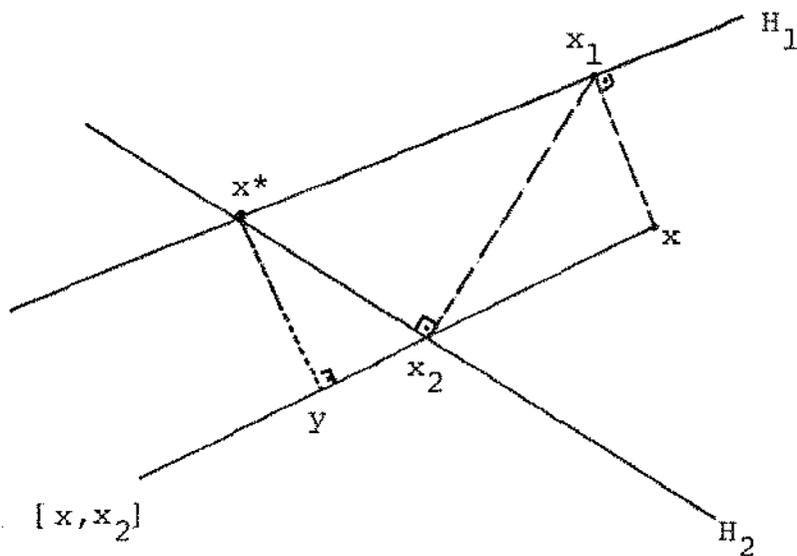


Figura 5. Método de Kaczmarz acelerado

Agora,

$$\begin{aligned} x_m - x &= (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_1 - x) \\ &= -u_m a_m - u_{m-1} a_{m-1} - \dots - u_1 a_1 \\ &= -A^T u \end{aligned}$$

onde  $A^T = [a_1 \dots a_m]$  e  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle x^* - x, x_m - x \rangle &= \langle x^* - x, -A^T u \rangle = \langle Ax^* - Ax, -u \rangle = \\ &= \langle b - Ax, -u \rangle = \langle Ax - b, u \rangle \end{aligned}$$

Concluindo

$$y = x + \frac{\langle Ax - b, u \rangle}{\|x_m - x\|^2} (x_m - x) \quad (12)$$

Note que para o cálculo de  $y$  somente é necessário o ponto anterior  $x$  e uma restrição de cada vez.

## 2. O MÉTODO PCS ACELERADO

Neste caso, estamos trabalhando com desigualdades, mas como já vimos,  $g(x) \leq 0$  é equivalente a  $g^+(x) = 0$  (veja defini-

ção 4).

Podemos agora, fazer uma generalização da equação (12).

Tomamos

$$\lambda = \frac{\langle G^+(x), u \rangle}{\|x_m - x\|^2}$$

$$\text{onde } G^+(x) = \begin{bmatrix} g_1^+(x) \\ \vdots \\ g_m^+(x) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \text{com}$$

$$u_i = \frac{g_i^+(x_{i-1})}{\|t_i\|^2}, \quad t_i \in \partial g_i^+(x_{i-1}) \quad \text{e}$$

$$x_i = x_{i-1} - u_i t_i \quad \text{para } i = 1, \dots, m.$$

Introduzimos agora um parametro de relaxação  $\alpha, \alpha \in (0, 2)$ :

$$\bar{y} = x + \alpha(y - x)$$

Então,

$$\bar{y} = x + \alpha \frac{\langle G^+(x), u \rangle}{\|x_m - x\|^2} (x_m - x) \quad (13)$$

Chamando de

$$v = x - x_m = u_1 t_1 + \dots + u_m t_m = \sum_{i=1}^m u_i t_i$$

$$\beta = \langle G^+(x), u \rangle = \sum_{i=1}^m g_i^+(x) u_i$$

a equação (13) fica

$$\bar{y} = x - \alpha \cdot \beta \cdot \frac{v}{\|v\|^2} \quad \text{com} \quad \alpha \in (0, 2)$$

Método PCSA:

Inicialização:  $x^0 \in Q$  é arbitrário

$$\text{Passo: } \left\{ \begin{array}{l} x^{k+1} = P_Q(x^{k+1}), \quad \text{com} \\ x^{k+1} = x^k - \alpha_k \cdot \frac{\beta_k v^k}{\|v^k\|^2} \\ \beta_k = \sum_{i=1}^m g_i^+(x^k) u_i \\ v^k = \sum_{i=1}^m u_i^k t_i^k \\ u_i^k = \frac{g_i^+(x_{i-1}^k)}{\|t_i^k\|^2} \\ x_i^k = x_{i-1}^k - u_i^k t_i^k, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad x_0^k = x^k \end{array} \right.$$

onde  $t_i^k \in \partial g_i^+(x_{i-1}^k)$  e  $\epsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \epsilon_2$  para  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  e  $\forall k \geq 0$ .

O caso  $t_i^k = 0$  é análogo ao método PCS. Se  $v^k = 0$  então  $x_m^k = x^k$ , o que implica em  $x^k \in S$ , ou seja, o método já convergiu. Isso mostra que o passo está bem definido.

*Conjectura:* Sob as mesmas hipóteses do teorema 1, o método PCSA converge para uma solução do problema de factibilidade convexa.

### 3. O MÉTODO DAS PROJEÇÕES PARALELAS ACELERADO

No método das projeções paralelas tomamos a próxima iteração como pertencente a reta definida pela iteração anterior e uma combinação convexa das projeções nos hiperplanos. Assim, vamos deduzir o método acelerado como foi feito para o método de Kaczmarz.

Seja  $x$  o ponto atual. Calculamos as projeções de  $x$  sobre os hiperplanos:

$$x_i = x - u_i a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\text{com } u_i = \frac{-b_i + \langle a_i, x \rangle}{\|a_i\|^2}$$

Seja  $\bar{x}$  uma combinação convexa dessas projeções, isto é,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad \text{com} \quad 0 < \lambda_i < 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

A iteração acelerada  $y$  deve satisfazer, como no método de Kaczmarz acelerado (veja figura 6),

$$y = x + \gamma(\bar{x} - x) \quad , \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$

$$\langle x^* - y, \bar{x} - x \rangle = 0.$$

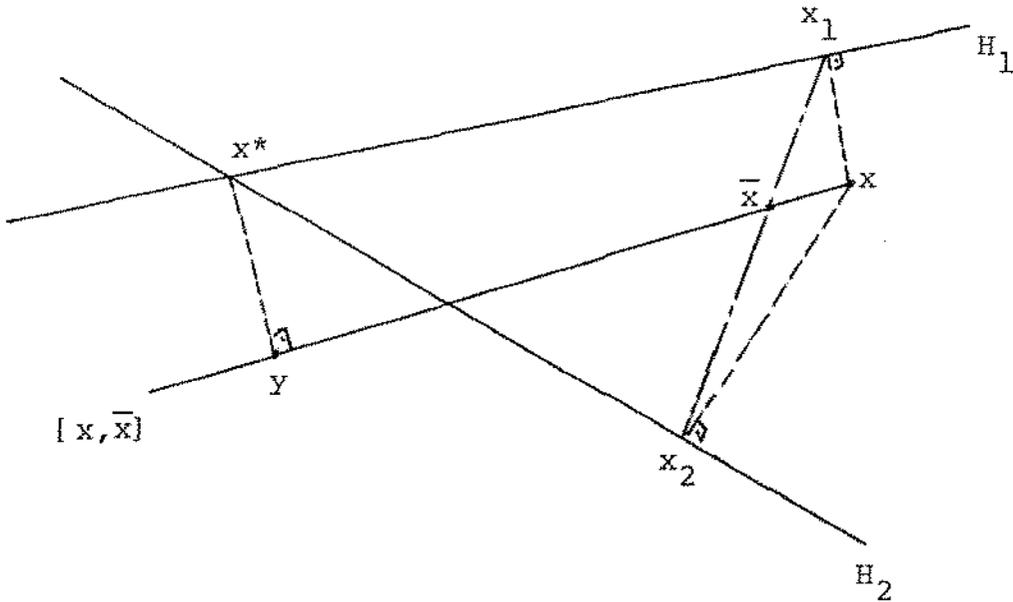


Figura 6. Método das projeções paralelas acelerado

Por um raciocínio análogo ao anterior, e acrescentando um parâmetro de relaxação  $\alpha \in (0, 2)$  chegamos a:

$$\bar{y} = x + \alpha(y - x) = x + \alpha \frac{\langle Ax - b, w \rangle}{2} (\bar{x} - x) \quad (14)$$

$$\text{com } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_i = \lambda_i u_i$$

#### 4. O MÉTODO PPS ACELERADO

Vamos agora, obter uma generalização da expressão (14).

Como no método PCSA:

$$\bar{y} = x + \alpha \cdot \frac{\langle G^+(x), w \rangle}{\| \bar{x} - x \|^2} (\bar{x} - x)$$

$$\text{com } G^+(x) = \begin{bmatrix} g_1^+(x) \\ \vdots \\ g_m^+(x) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_i = \lambda_i u_i = \lambda_i \frac{g_i^+(x)}{\|t_i\|^2}$$

$$\text{e } t_i \in \partial g_i^+(x).$$

Denotando,

$$v = x - \bar{x} = x - \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i t_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{g_i^+(x) t_i}{\|t_i\|^2}$$

$$\beta = \langle G^+(x), w \rangle = \sum_{i=1}^m g_i^+(x) \cdot \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{[g_i^+(x)]^2}{\|t_i\|^2}$$

vem,

$$\bar{y} = x - \alpha \cdot \beta \cdot \frac{v}{\|v\|^2} \quad \text{com } \alpha \in (0, 2)$$

Método PPSA:

Inicialização:  $x^0 \in Q$  é arbitrário

Passo:  $x^{k+1} = P_Q(x^{k+1})$ , com

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{k+1} = x^k - \alpha_k \beta_k \frac{v^k}{\|v^k\|^2} \\ \beta_k = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i^+(x^k)]^2}{\|t_i^k\|^2} \\ v^k = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^+(x^k) t_i^k}{\|t_i^k\|^2} \end{array} \right.$$

onde  $t_i^k \in \partial g_i^+(x^k)$ ,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  e  $0 < \lambda_i < 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$

e  $\epsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \epsilon_2 \forall k \geq 0$ , com  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ .

Analogamente ao método PCSA o passo está bem definido.

**TEOREMA 3:** Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1 o método PPSA gera uma sequência que converge para um ponto em  $S$ .

*Prova:* Seguiremos a mesma linha adotada na prova do teorema 2.

1) Provaremos que a sequência  $\{x^k\}$  é Fejer-monotônica com respeito a  $S$ . Seja  $x \in S$  e denotemos

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k \beta_k}{\|v^k\|^2}$$

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\|^2 &\leq \|x^{k+1} - x\|^2 = \|x^k - \gamma_k v^k - x\|^2 \\ &= \|x^k - x\|^2 + \gamma_k^2 \|v^k\|^2 - 2 \gamma_k \langle v^k, x^k - x \rangle \end{aligned}$$

Agora,

$$\langle v^k, x^k - x \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{g_i^+(x^k)}{\|t_i^k\|} \langle t_i^k, x^k - x \rangle \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{|g_i^+(x^k)|^2}{\|t_i^k\|^2} = \beta_k$$

pelo uso da desigualdade do Subgradiente.

Logo,

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\|^2 &\leq \|x^k - x\|^2 + \frac{\alpha_k^2 \beta_k^2}{\|v^k\|^2} - 2 \frac{\alpha_k \beta_k}{\|v^k\|^2} \\ &= \|x^k - x\|^2 - (\alpha_k^2 - 2\alpha_k) \frac{\beta_k^2}{\|v^k\|^2} \end{aligned}$$

Mas  $\alpha_k \in [\varepsilon_1, 2 - \varepsilon_2]$ . Daí,

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \|x^k - x\| - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\beta_k^2}{\|v^k\|^2} \quad (15)$$

e Fejer-monotonicidade segue.

2) Usando raciocínio análogo ao do teorema 1, da expressão (15) vem que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k}{\|v^k\|} = 0 \quad (16)$$

Agora,

$$\|v^k\| = \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{g_i^+(x^k) t_i^k}{\|t_i^k\|^2} \right\| \leq \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i g_i^+(x^k)}{\|t_i^k\|}$$

Denotando por  $w_i^k = \frac{g_i^+(x^k)}{\|t_i^k\|}$ , temos

$$\frac{\beta_k}{\|v^k\|} \geq \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i (w_i^k)^2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^k} \geq 0$$

Tomando os limites quando  $k \rightarrow \infty$  e usando (16) concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i (w_i^k)^2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^k} = 0$$

e é fácil mostrar que isto implica em

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_i^+(x^k)}{\|t_i^k\|} = 0, \quad \forall i \in M.$$

A partir daqui a prova se completa como no teorema 1.  $\square$

Neste método, como no PPS, estamos interessados em computação paralela. O cálculo das parcelas de  $\beta_k$  e  $v^k$  pode ser feito independentemente, ao mesmo tempo. Temos assim, a mesma vantagem que no método PPS, o que o torna um método com grandes vantagens computacionais, quando usado o cálculo em paralelo.

## CAPÍTULO III

## EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS

Foram aplicados os métodos PCS, PPS, PCSA e PPSA para dez problemas testes. Os oito primeiros problemas são funções clássicas (ver Moré et al [8]). Os testes 9 e 10 foram gerados por um programa que cria funções quadráticas, quarticas e lineares, todas convexas, aleatoriamente. O ponto inicial para tais problemas também é aleatório e o conjunto  $Q$  é da forma  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\}$

As experiências foram feitas em um computador PDP-10, usando a linguagem FORTRAN.

O critério de parada é a condição de que  $g_i^+(x^k) \leq \epsilon$  para todo  $i \in M$ . Para  $\epsilon$  foi escolhido o valor  $10^{-4}$ .

As funções testes são as seguintes:

(1) *Função de Freudenstein e Roth (não convexa)*

$$n = 2 \quad , \quad m = 2$$

$$g_1(x) = -13 + x_1 + ((5-x_2) x_2 - 2) x_2$$

$$g_2(x) = -29 + x_1 + ((x_2+1) x_2 - 14) x_2$$

$$\text{Caso I} \quad : \quad x^0 = (10, 4)$$

$$\text{Caso II} \quad : \quad x^0 = (100, 40)$$

Caso III:  $x^0 = (1000, 400)$

(2) Função de Jennrich e Sampson modificada

$$n = 2 \quad , \quad m = 10$$

$$g_i(x) = \exp(i x_1) + \exp(i x_2) - 2i - 2$$

Caso I :  $x^0 = (3, 4)$

Caso II :  $x^0 = (30, 40)$

Caso III:  $x^0 = (300, 400)$

(3) Função singular de Powell

$$n = 4 \quad , \quad m = 4$$

$$g_1(x) = x_1 + 10 x_2$$

$$g_2(x) = \sqrt{5} (x_3 - x_4)$$

$$g_3(x) = (x_2 - 2 x_3)^2$$

$$g_4(x) = \sqrt{10} (x_1 - x_4)^2$$

Caso I :  $x^0 = (3, -1, 0, 1)$

Caso II :  $x^0 = (30, -10, 0, 10)$

Caso III:  $x^0 = (300, -100, 0, 100)$

(4) *Função de Wood modificada*

$$n = 4 \quad , \quad m = 6$$

$$g_1(x) = 10(x_1^2 - x_2)$$

$$g_2(x) = x_1 - 1$$

$$g_3(x) = \sqrt{90} (x_3^2 - x_4)$$

$$g_4(x) = x_3 - 1$$

$$g_5(x) = \sqrt{10} (2 - x_2 - x_4)$$

$$g_6(x) = \frac{1}{\sqrt{10}} (x_4 - x_2)$$

$$\text{Caso I} : x^0 = (3, -1, 3, -1)$$

$$\text{Caso II} : x^0 = (30, -10, 30, -10)$$

$$\text{Caso III} : x^0 = (300, -100, 300, -100)$$

(5) *Função de Rosenbrock extendida modificada*

$$n = 10 \quad , \quad m = 10$$

$$g_{2i-1}(x) = 10(x_{2i-1}^2 - x_{2i})$$

$$g_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1} \quad , \quad i = 1, \dots, 5$$

$$\text{Caso I} : x^0 = (\xi_j) \quad \text{onde} \quad \xi_{2j-1} = -1.2 \quad \text{e} \quad \xi_{2j} = 1$$

$$\text{Caso II : } x^0 = (10 \xi_j)$$

$$\text{Caso III: } x^0 = (100 \xi_j)$$

(6) Função Tridiagonal de Broyden modificada

$$n = 10 \quad , \quad m = 10$$

$$g_i(x) = (2x_i - 3) x_i + x_{i-1} + 2x_{i+1} - 1$$

$$\text{com } x_0 = x_{n+1} = 0$$

$$\text{Caso I : } x^0 = (-1, \dots, -1)$$

$$\text{Caso II : } x^0 = (-10, \dots, -10)$$

$$\text{Caso III: } x^0 = (-100, \dots, -100)$$

(7) Função de Penalidade I

$$n = 10 \quad , \quad m = 11$$

$$g_i(x) = \sqrt{a} (x_i - 1) \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$g_{n+1}(x) = \left( \sum_{j=1}^m x_j^2 \right) - \frac{1}{4}$$

$$\text{com } a = 10^{-5}$$

$$\text{Caso I : } x^0 = (1, 2, \dots, 10)$$

$$\text{Caso II : } x^0 = (10, 20, \dots, 100)$$

$$\text{Caso III: } x^0 = (100, 200, \dots, 1000)$$

## (8) Função Dimensionada Variável

$$n = 10 \quad , \quad m = 12$$

$$g_i(x) = x_i - 1 \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^m j(x_j - 1)$$

$$g_{n+2}(x) = \left( \sum_{j=1}^m j(x_j - 1) \right)^2$$

$$\text{Caso I} : x^0 = (0.9, 0.8, \dots, 0.1, 0)$$

$$\text{Caso II} : x^0 = (9, 8, \dots, 1, 0)$$

$$\text{Caso III} : x^0 = (90, 80, \dots, 10, 0)$$

## (9) e (10) Funções Convexas geradas por um programa, aleatoriamente

Os resultados são apresentados nas tabelas seguintes, onde:

NM = número máximo de iterações.

NI = número de iterações.

NP = número de projeções.

\* = indica que foi ultrapassado o número máximo de iterações.

[1] = indica que os coeficientes da combinação convexa são iguais.

[2] = indica que os coeficientes da combinação convexa são diferentes.

Observação:

No método PCS foi usado o controle cíclico. Para esse método uma iteração corresponde a um ciclo completo, ou seja, m "projeções".

TABELA 1

FUNÇÃO 1				NM = 300				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
I	0.5	NI	*	*	*	2	*	*
		NP				3		
	1.0	NI	*	*	*	2	*	*
		NP				3		
	1.5	NI	235	*	*	1	*	*
		NP	470			2		
II	0.5	NI	*	*	*	*	141	179
		NP					200	254
	1.0	NI	*	*	*	51	26	*
		NP				71	33	
	1.5	NI	*	*	*	27	*	28
		NP				35		36
III	0.5	NI	*	*	*	*	*	*
		NP						
	1.0	NI	*	*	*	240	233	*
		NP				328	303	
	1.5	NI	45	*	*	69	14	*
		NP	58			84	16	

TABELA 2

FUNÇÃO 2				NM = 200				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [1]	PPS [2]	PCSA	PPSA [1]	PPSA [2]
I	0.5	NI	1	25	*	1	9	9
		NP	8	105		5	84	83
	1.0	NI	1	8	31	1	5	5
		NP	5	52	75	5	47	47
	1.5	NI	1	5	5	1	5	5
		NP	3	46	45	5	45	44
II	0.5	NI	5	34	19	76	*	*
		NP	48	196	183	760		
	1.0	NI	5	8	7	39	67	67
		NP	42	78	69	390	660	669
	1.5	NI	4	5	5	27	45	44
		NP	37	43	46	270	448	440
III	0.5	NI	41	*	91	*	*	*
		NP	408		897			
	1.0	NI	40	44	44	*	*	*
		NP	400	438	437			
	1.5	NI	40	29	29	*	*	*
		NP	396	283	286			

TABELA 3

FUNÇÃO 3				NM = 200				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [1]	PPS [2]	PCSA	PPSA [1]	PPSA [2]
I	0.5	NI	19	75	135	22	22	24
		NP	32	137	241	37	40	43
	1.0	NI	9	36	*	9	9	20
		NP	17	66		17	17	34
	1.5	NI	6	23	33	5	5	7
		NP	11	42	60	9	9	11
II	0.5	NI	30	109	185	29	30	32
		NP	57	188	345	58	53	59
	1.0	NI	14	53	*	13	14	22
		NP	28	92		26	25	39
	1.5	NI	8	36	95	7	7	9
		NP	16	62	181	13	14	15
III	0.5	NI	40	157	*	38	37	40
		NP	80	309		76	74	75
	1.0	NI	19	78	*	16	16	32
		NP	38	152		32	32	60
	1.5	NI	11	51	*	9	9	21
		NP	21	99		18	17	38

TABELA 4

FUNÇÃO 4				NM = 200				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
I	0.5	NI	17	130	*	19	19	21
		NP	31	234		45	39	42
	1.0	NI	1	62	*	4	3	5
		NP	5	108		12	9	16
	1.5	NI	1	40	27	1	2	2
		NP	3	68	95	5	6	6
II	0.5	NI	19	148	*	23	23	22
		NP	43	328		92	59	57
	1.0	NI	1	71	153	7	4	6
		NP	5	151	257	30	14	19
	1.5	NI	1	45	*	2	3	10
		NP	5	93		7	10	35
III	0.5	NI	23	176	*	27	27	48
		NP	55	392		112	67	149
	1.0	NI	1	84	77	8	6	6
		NP	5	182	233	35	24	22
	1.5	NI	3	54	72	3	4	4
		NP	9	114	170	9	12	11

TABELA 5

FUNÇÃO 5			NM = 100					
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
I	0.5	NI	15	*	*	15	15	20
		NP	80			80	80	63
	1.0	NI	1	95	*	2	2	5
		NP	10	480		15	15	24
	1.5	NI	2	62	*	3	3	5
		NP	20	315		20	20	25
II	0.5	NI	17	*	*	18	18	21
		NP	95			105	105	58
	1.0	NI	1	*	*	2	2	4
		NP	10			15	15	20
	1.5	NI	2	71	*	1	2	4
		NP	15	385		10	15	20
III	0.5	NI	20	*	*	22	22	26
		NP	115			140	135	78
	1.0	NI	1	*	*	3	3	7
		NP	10			25	25	29
	1.5	NI	2	82	*	2	3	4
		NP	15	465		15	20	19

TABELA 6

FUNÇÃO 6				NM = 100				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
I	0.5	NI	64	*	*	18	37	46
		NP	624			160	310	289
	1.0	NI	21	*	*	15	35	22
		NP	200			130	196	89
	1.5	NI	10	*	*	9	7	11
		NP	47			40	33	44
II	0.5	NI	79	*	*	25	39	56
		NP	766			240	346	192
	1.0	NI	26	*	*	16	34	32
		NP	253			109	190	96
	1.5	NI	11	*	*	6	8	9
		NP	63			38	41	38
III	0.5	NI	88	*	*	33	48	84
		NP	849			320	420	243
	1.0	NI	30	*	*	19	27	81
		NP	285			143	164	293
	1.5	NI	13	*	*	11	9	29
		NP	81			62	57	137

TABELA 7

FUNÇÃO 7				NM = 200				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
I	0.5	NI	18	198	*	18	18	34
		NP	90	990		90	90	136
	1.0	NI	9	99	*	9	9	20
		NP	45	945		45	45	68
	1.5	NI	6	66	*	6	6	11
		NP	33	333		33	33	48
II	0.5	NI	198	*	*	198	198	*
		NP	1080			1080	1080	
	1.0	NI	99	*	*	99	99	173
		NP	540			540	540	722
	1.5	NI	66	*	*	66	66	141
		NP	363			363	363	573

(Não houve convergência para o caso III)

TABELA 8

FUNÇÃO 8				NM = 200				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
I	0.5	NI	12	188	*	19	20	47
		NP	77	1117		133	161	216
	1.0	NI	1	91	*	1	3	26
		NP	10	533		10	35	109
	1.5	NI	3	58	*	4	4	33
		NP	13	339		13	15	152

(Não houve convergência para os casos II e III)

TABELA 9

FUNÇÃO 9				NM = 200				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
N=10	0.5	NI	24	*	*	30	39	41
		NP	53			71	124	128
M=10	1.0	NI	7	146	*	8	12	14
		NP	19	289		20	50	53
M=10	1.5	NI	3	95	*	4	6	7
		NP	12	185		13	29	27

TABELA 10

FUNÇÃO 10				NM = 200				
CASO	$\alpha_K$	CONTA- DORES	PCS	PPS [ 1 ]	PPS [ 2 ]	PCSA	PPSA [ 1 ]	PPSA [ 2 ]
N = 15	0.5	NI	23	*	*	25	42	43
		NP	59			66	218	235
M = 20	1.0	NI	6	*	*	3	14	16
		NP	24			25	94	98
M = 20	1.5	NI	2	186	*	*	8	8
		NP	15	412			58	61

## CONCLUSÃO

Os métodos introduzidos neste trabalho (PPS, PCSA e PPSA) são novos métodos para resolver, iterativamente, o problema de factibilidade convexa.

Algumas conclusões podem ser tiradas das tabelas anteriores:

- 1) A versão paralela sem aceleração é muito menos eficiente que a versão cíclica. Isto se deve ao fato de que a velocidade de convergência do método PPS é extremamente baixa quando o número de restrições violadas ( $g_i^+(x^k) > 0$ ) é pequeno;
- 2) No método PPS, a combinação convexa com coeficientes iguais é mais eficiente. Já no método acelerado não há uma conclusão definitiva: a combinação convexa igualitária tanto pode melhorar como piorar a velocidade de convergência;
- 3) A generalização do procedimento de aceleração para os métodos PCS e PPS se mostrou útil, principalmente para a versão paralela que passou a convergir muito mais rapidamente. Em alguns casos somente as versões aceleradas convergiram.
- 4) Os métodos são mais eficientes para valores de  $\alpha_k > 1$ , visto que estamos trabalhando com desigualdades;

Tomando como base o número de iterações, a tabela 11-A nos mostra as porcentagens de eficiência. Na tabela 11-B estão as porcentagens supondo o uso de computação paralela, ou seja, os cálculos para as versões paralelas em cada iteração podem ser efetuadas simultaneamente.

MÉTODO	%
PCS	56.52
PPS	1.44
PCSA	42.03
PPSA	30.43

TABELA 11-A

MÉTODO	%
PCS	11.60
PPS	1.44
PCSA	7.24
PPSA	82.60

TABELA 11-B

Assim, o método PPSA é um novo método de grande eficiência quando é possível o emprego de computação paralela.

Outras vantagens dos métodos são:

- 1) O uso de projeções do subgradiente ao invés de projeções ortogonais, não havendo necessidade de problemas de minimização intermediários;
- 2) A implementação computacional desses métodos é fácil, e a necessidade de memória é pequena.

Pesquisas futuras poderão ser feitas no sentido de procurar uma maneira apropriada de escolher os coeficientes da combina

ção convexa de maneira a obter uma velocidade de convergência maior, ou ainda, como a existência de um parâmetro de relaxação indica que o passo acelerado não necessita ser exato, poderão se buscar novas fórmulas alternativas para a aceleração.

- [9] H.MUKAI. *Parallel Algorithms for Solving Systems of Non-linear Equations*, *Comp. & Maths. with Appls*, Vol. 7, pp. 235-250, (1981).
- [10] R.T.ROCKAFELLAR. *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).