Linhas Assintóticas em Superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$.

Osmar Aléssio

Orientador
Prof. Dr. Irwen Valle Guadalupe

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril - 1998

Linhas Assintóticas em Superfícies Mínimas de $I\!R^3$.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por OSMAR ALÉSSIO e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de Abril de 1998

Prof. Dr:. Irwen Valle Guadalupe.
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Tìtulo de MESTRE em MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Aléssio, Osmar

AL25L Linhas assintóticas em superfícies mínimas de R^3 / Osmar Aléssio -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Irwen Valle Guadalupe

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfícies mínimas. 2. Curvas em superfícies. I. Valle Guadalupe, Irwen. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Linhas Assintóticas em Superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Osmar Aléssio

Abril 1998

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 03 de abril de 1998

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof (a). Dr (a). IRWEN VALLE GUADALUPE

____

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

____

Prof (a). Dr (a).VALERY MARENICH

Agradecimentos

Agradeço

• ao Professor Irwen por toda paciência, dedicação e amizade prestada em sua orientação.
• aos professores com os quais fiz cursos, aos funcionários da biblioteca e da secretaria de Pós-graduação pela boa vontade com que me serviram quando precisei.
• aos meus pais Sergio e Ignêz e aos irmãos Celia, Paulo e Andreia pelo incentivo, carinho e compreensão nos momentos que mais necessitei.
• em especial à Florência Cúneo, que foi importantíssima nesta etapa da minha vida.
• ao meu cunhado Aureo, aos meus tios: Clóvis e Dirceu, e suas famílias.
• aos meus queridos sobrinhos Jéssica e Juninho.
• aos companheiros de república: Mustafá, Virgilio e Cláudio.
• ao Prof. Kilhl por incentivo e orientação na graduação.
• a todos os amigos da Pós-Graduação do IMECC e em especial a todos os amigos do terceiro andar do "predinho".

Dedicatória

aos meus pais Sergio e Ignêz pelo exemplo, carinho e amor

aos meus irmãos Celia, Paulo e Andreia

e a minha namorada Florência.

Resumo

Configurações de linhas assintóticas ao redor de pontos planares (ou flat) de superfícies mínimas são estudados. Modelos analíticos para essas configurações ao redor de pontos planares isolados e tipos particulares de fins são exibidos. Exemplos ilustrando todos os possíveis casos são também dados.

Introdução

Em [4] os autores estudam possíveis configurações de linhas de curvatura principal ao redor de pontos umbílicos de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, com curvatura média constante. Seguindo as ideias de [4], no presente trabalho estudamos possíveis configurações de linhas assintóticas ao redor de pontos planares (ou flat) de superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$. Exceto no caso onde a imagem da imersão mínima está contida em um plano, os pontos planares são isolados.

Um modelo analítico é exibido para a família de linhas assintóticas, ao redor de pontos planares isolados. Este modelo está relacionado a um resultado de H. Hopf[7], o qual permite o cálculo do índice de um ponto planar isolado. O comportamento das linhas assintóticas, no infinito ao redor de certos tipos de fins, chamados aqui fins elementares da imersão mínima, é também descrito por meio de modelos analíticos.

Este trabalho é organizado como segue: Cap.1 contém conceitos da teoria local de superfícies regulares e as definições dos objetos envolvidos neste trabalho. Cap.2 contém uma revisão de propriedades de coordenadas isotérmicas e o cálculo do índice do ponto planar. No Cap.3 são encontradas formas analíticas para as linhas assintóticas ao redor de um ponto planar e de um fin tipo elementar, para imersões mínimas e no Cap.4 são discutidas exemplos de imersões mínimas. Alguns destes exemplos aparecem tambem em [4].

Conteúdo

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Primeira Forma Fundamental

Seja S uma superfície regular dada pela parametrização $X : U \subset I\!R^2 \to S \subset I\!R^3$, onde U é um aberto de $I\!R^2$. Denotemos por T_pS o espaço tangente a S em p. O produto interno $<,>_p$ em $T_pI\!R^3$, quando restrito a T_pS define um produto interno $<,>_p$ em T_pS. A este produto interno corresponde uma forma quadrática:

$$I_p : T_pS \longrightarrow I\!R \text{ onde } I_p(v_p) =< v_p, v_p > \text{ em } p \in S, v_p \in T_pS$$

Esta forma quadrática é chamada de **primeira forma fundamental** da superfície S.
Vamos expressar a primeira forma fundamental com relação a uma base$\{X_u, X_v\}$ de T_pS. Seja $w_p \in T_pS$ o vetor tangente a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, então $I_p(w_p) = I_p(\dot{\alpha}(0)) =< \dot{\alpha}(0), \dot{\alpha}(0) >_p =< X_u\dot{u}(0) + X_v\dot{v}(0), X_u\dot{u}(0) + X_v\dot{v}(0) >$

$$= \dot{u}(0)^2 < X_u, X_u > +2\dot{u}(0)\dot{v}(0) < X_u, X_v > +\dot{v}(0)^2 < X_v, X_v > .$$

Denotando $E =< X_u, X_u >$,
$F =< X_u, X_v >$,
$G =< X_v, X_v >$.

$$\mathbf{I_p}(\dot{\alpha}(0)) = \mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}(0)^2 + 2\mathbf{F}\dot{\mathbf{u}}(0)\dot{\mathbf{v}}(0) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{v}}(0)^2$$

E, F e G são chamados de coeficientes da primeira forma quadrática na base$\{X_u, X_v\}$ do espaço tangente T_pS.

1.2 Aplicação Normal de Gauss

Seja $S \subset I\!R^3$ uma superfície regular com uma orientação N e $S^2 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária e denotamos por $N(p)$ o vetor normal unitário a S em p. A aplicação $N : S \to S^2$ que associa a cada ponto $p \in S$, o vetor $N(p) \in S$ é chamada de **aplicação normal de**

Gauss.(Fig 1.1)

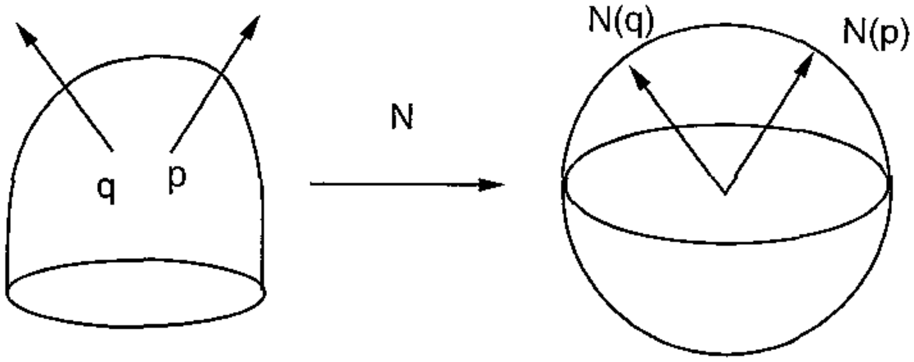

figura 1.1: Aplicação normal de Gauss

Observação

Se o domínio da superfície S é um aberto $U \subset I\!R$ então, variando $(u, v) \in U$ temos que esta aplicação N é diferenciável. Logo $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2(1)$

é uma aplicacão linear. Temos que T_pS e $T_{N(p)}S^2(1)$ são paralelos e então podemos considerar:

$$dN_p : T_pS \to T_pS$$

1.3 Proposição

A diferencial $dN_p : T_pS \to T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Prova: Visto que dN_p é linear, é suficiente verificar que $< dN_p(w_1), w_2 >=< w_1, dN_p(w_2) >$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS. Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u, X_v\}$ a base associada de T_pS. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$, nós temos

$$\begin{aligned} dN_p(\dot{\alpha}(0)) &= dN_p(X_u\dot{u}(0) + X_v\dot{v}(0)) = dN_p(X_u\dot{u}(0)) + dN_p(X_v\dot{v}(0)) \\ &= dN_p(X_u)\dot{u}(0) + dN_p(X_v)\dot{v}(0) \ = N_u\dot{u}(0) + N_v\dot{v}(0) \end{aligned}$$

em particular, $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Portanto, para provar que dN_p é auto-adjunta, é suficiente mostrar que,

$$< N_u, X_v >=< X_u, N_v > .$$

Para ver isto, derivando $< N, X_u >= 0$ e $< N, X_v >= 0$, relativa para v e u, respectivamente e obtemos:

$$\begin{aligned} &< N_v, X_u > + < N, X_{uv} >= 0 \\ &< N_u, X_v > + < N, X_{vu} >= 0 \end{aligned}$$

então

$$< N_u, X_v >=< N_v, X_u > \qquad \square$$

O fato de $dN_p : T_pS \to T_pS$ ser uma aplicação linear auto-adjunta permite-nos associar dN_p a uma forma quadrática Q em T_pS.

Para aplicação linear simétrica dN_p temos associado a forma bilinear simétrica.

$$B : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$$
$$(v, w) \to B(v, w) =< dN_p(v), w >$$

A B temos associado a forma quadrática

$$Q : T_pS \to \mathbb{R}$$
$$Q(v) = B(v, v) =< dN_p(v), v >$$

A **segunda forma fundamental** de S é definida por

$$II_p : T_pS \to \mathbb{R}$$
$$v \to - < dN_p(v), v >$$

Isto é,

$$II_p(v) = - < dN_p(v), v >.$$

Na base $\{X_u, X_v\}$ calculemos a segunda forma quadrática II_p.

$$\begin{aligned} II_p(\dot\alpha(0)) &= - < dN_p(\dot\alpha(0)), \dot\alpha(0) > \\ &= - < N_u\dot u(0) + N_v\dot v(0), X_u\dot u(0) + X_v\dot v(0) > \\ &= - < N_u, X_u > \dot u(0)^2 - 2 < N_u, X_v > \dot u(0)\dot v(0) - < N_v, X_v > \end{aligned}$$
$\dot v(0)^2$.

Seja

$$e = - < N_u, X_u >=< N, X_{uu} >,$$
$$f = - < N_u, X_v >= - < N_v, X_u >=< N, X_{uv} >=< N, X_{vu} >,$$
$$g = - < N_v, X_v >=< N, X_{vv} > .$$

Então a **segunda forma fundamental** fica:

$$II_p(\dot\alpha(0)) = e\dot u(0)^2 + 2f\dot u(0)\dot v(0) + g\dot v(0)^2.$$

1.4 As equações de Weingarten

Seja $X : U \to I\!R^3$ uma parametrização de S. Então o operador dN_p de X é dado em termos da base $\{X_u, X_v\}$ por

$$(*) \quad \begin{cases} -dN_p(X_u) = N_u = \frac{fF-eG}{EG-F^2}X_u + \frac{eF-fE}{EG-F^2}X_v \\ -dN_p(X_v) = N_v = \frac{gF-fG}{EG-F^2}X_u + \frac{fF-gE}{EG-F^2}X_v, \end{cases}$$

e

$$a_{11} = \frac{fF-eG}{EG-F^2},$$

$$a_{12} = \frac{eF-fE}{EG-F^2},$$

$$a_{21} = \frac{gF-fG}{EG-F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}.$$

as equações $(*)$ são conhecidas como as **equações de Weingarten [2].**

1.5 Curvatura Normal

Seja C uma curva regular em S passando sobre $p \in S$, k curvatura de C em p , e $\cos\theta =< n, N >$, onde n é o vetor normal unitário da curva C e N é o vetor normal de S em p. O número $k_n = k\cos\theta$ é então chamado a curvatura normal de $C \subset S$ em p.

Em outras palavras, k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal a superficíe em p, com sinal dado pela orientação N de S em p.(Fig 1.2)

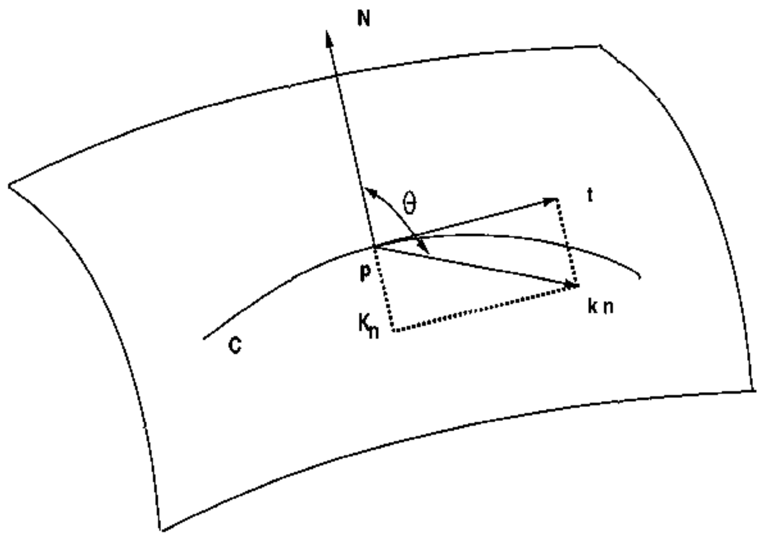

figura 1.2:

Observação

A curvatura normal não depende da orientação de C mas muda de sinal com uma mudança de orientação da superficície.

1.6 Interpretação geométrica da segunda forma fundamental

Seja $\alpha(s)$ uma curva em S, parametrizada pelo comprimento de arco s e tal que $p = \alpha(0)$. Denotamos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N a curva $\alpha(s)$, temos :

$$< N(s), \dot{\alpha}(s) >= 0 \Rightarrow < N(s), \ddot{\alpha}(s) >= - < \dot{N}(s), \dot{\alpha}(s) >$$

Logo

$$\begin{aligned} II_p(\dot{\alpha}(0)) &= - < dN_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0) >= - < \dot{N}(0), \dot{\alpha}(0) >=< N(0), \ddot{\alpha}(0) > \\ &=< N(0), k.n(0) >= k < N(0), n(0) >= k\cos\theta = k_n(\dot{\alpha}(0)). \end{aligned}$$

onde k é a curvatura da curva. Portanto temos:

$$II_p(\dot{\alpha}(0)) = k_n(\dot{\alpha}(0)).$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental (II_p) para um vetor $v \in T_pS$ é igual a curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v.

1.7 Teorema de Meusnier[2]

Todas as curvas em S tendo em $p \in S$ a mesma reta tangente , tem neste ponto a mesma curvatura normal.

O teorema de **Meusnier** permite em falar de curvatura normal k_n numa direção v em p. Para ver melhor a geometria deste fato, vamos introduzir o conceito de **seção normal de S em p.** Dado um vetor unitário $v \in T_pS$, a interseção de S com o plano contento v e a normal $N(p)$ é chamado de uma **seção normal de S em p.**(Fig 1.3)

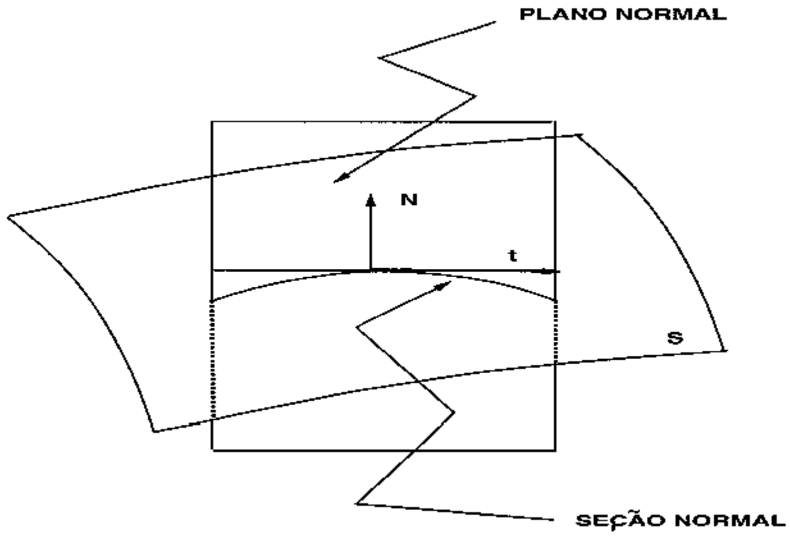

figura 1.3:

Para uma seção normal numa vizinhança de p, temos:

$$\begin{aligned} n = \pm N \Rightarrow < n, \ddot{\alpha} > \quad &= \pm < N, \ddot{\alpha} > \\ < n, k.n > &= \pm\ k_n(p) \\ k &= \pm\ k_n(p) \\ \Rightarrow k &= |k_n(p)| \end{aligned}$$

Temos que a curvatura de seção normal na direção de v é a curvatura normal. Quando o plano normal gira em torno de N, v descreve um círculo S^1 de raio um em T_pS.

É possível mostrar que k_n depende continuamente de $v \in S^1$ e portanto atinge um máximo (k_1) e um mínimo (k_2) em S^1.

1.8 Curvaturas Principais e Vetores Principais

Sabemos que $dN_p : T_pS \to T_pS$ é simétrica (pois dN_p é auto-adjunto). Logo da álgebra linear[6] sabemos que existe uma base $\{e_1, e_2\}$ ortonormal em T_pS tal que

$$\begin{cases} dN_p(e_1) = -k_1 e_1, \\ dN_p(e_2) = -k_2 e_2; \end{cases}$$

Além pode-se verificar [2] que se S é uma superficíe regular e k_n a função curvatura normal de X em p. Então, existem vetores unitários e ortogonais $e_1, e_2 \in T_pS$ tais que $k_n(e_1) = k_1$ e $k_n(e_2) = k_2$ são os valores máximo e mínimo da função k_n.

1.9 Direções Principais

A curvatura normal máxima k_1 e a curvatura normal mínima k_2 são chamadas curvaturas principais no ponto p, e as correspondentes direções e_1 e e_2 são chamadas direções principais.

1.10 Direção assintótica e linha assintótica

Seja p um ponto em S. Uma direção assintótica de S em p é uma direção v $\in T_pS$ tal que a curvatura normal k_n na direcão v é zero, isto é, $k_n(v) = 0$.

Uma linha assintótica ou curva assintótica de S é uma curva conexa regular $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ a reta tangente de C em p é uma direção assintótica.

1.11 Equação diferencial das linhas assintóticas

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t)), t \in I \subset I\!R$ uma curva regular sobre uma superfície S. Então $\alpha(t)$ é uma curva assintótica de S se, e somente se $II(\dot{\alpha}(t)) = 0$, para todo $t \in I$. Isto é, se e somente se

$$(*) \qquad e\dot{u}(t)^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g\dot{v}(t)^2 = 0,\ t \in I$$

A equação $(*)$ é chamada de **equação diferencial das linhas assintóticas.**

1.12 Curvatura Média e Curvatura Gaussiana[12]

Seja S uma superfície regular em $I\!R^3$. A curvatura Gaussiana K e curvatura média H de S são funções $K, H : S \to I\!R$ definidas por

$$K(p) = \det(dN_p) = k_1k_2,$$

$$H(p) = \tfrac{1}{2}tr(dN_p) = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

1.13 Classificação de pontos

Seja p um ponto em uma superfície S$\subset \mathbb{R}^3$. Diremos que:

• p é elíptico se $K(p) > 0$ (equivalentemente k_1 e k_2 tem mesmo sinal);

• p é hiperbólico se $K(p) < 0$ (equivalentemente k_1 e k_2 tem sinais opostos);

• p é parabólico se $K(p) = 0$, com $dN_p \neq 0$ (apenas umas das curvaturas k_1 e k_2 são nulas);

• p é planar (ou flat) se $K(p) = 0$ e $dN_p \equiv 0$ (equivalentemente $k_1 = k_2 = 0$).

1.14 Definição de Superfície Mínima

Uma superfície regular S de $\mathbb{R}^3$ é chamada de superfície mínima se sua curvatura média H é identicamente nula, isto é, para qualquer ponto $p \in S$ temos $H(p) = 0$.

1.15 Proposicão

Seja S uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ e $p \in S$ um ponto não planar. Então neste ponto existem duas direcões assintóticas ortogonais.

Prova: Temos que $k_n(v) = II(v) = - < dN(v), v >$ e seja $v = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$ com $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de vetores principais. Então $k_n(v) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$ (formula de Euler), como $k_1 = -k_2$ logo temos que $k_n(v) = k_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, como $k_n(v) = 0$ implica que $k_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$, logo com $k_1 \neq 0$, temos $\cos^2\theta = \sin^2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Capítulo 2

Coordenadas Isotérmicas

2.1 Definição

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$. Uma parametrização $X : U \to \mathbb{R}^3$ é chamada **isotérmica** se existe uma função diferenciável $\lambda : U \to \mathbb{R}, \lambda > 0$; tal que:

$$< X_u, X_u >=< X_v, X_v >= \lambda^2$$
$$< X_u, X_v >= 0$$

isto é,

$$E = G$$

e

$$F = 0.$$

Estas coordenadas sempre exitem e são diferenciaveis[11].

2.2 Teorema

Seja $X : U \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S. Então em coordenadas isotérmicas a curvatura Gaussiana e a curvatura média de X

são dadas por:

$$K = \frac{eg - f^2}{E^2} = \frac{eg - f^2}{\lambda^4};$$

$$H = \frac{e + g}{2\lambda^2}.$$

Prova: Temos que

$$K(p) = \det(dN_p) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

e

$$H(p) = \frac{1}{2} tr(dN_p) = \frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$$

usando as equações de Weingarten temos,

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

e

$$H(p) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)},$$

como em coordenadas isotérmicas temos

$E = G \quad \text{e} \quad F = 0$

então

$$K = \frac{eg - f^2}{E^2} = \frac{eg - f^2}{\lambda^4};$$

$$H = \frac{e+g}{2\lambda^2}.$$

Se a superfície S é mínima temos que $e = -g$ pois $H \equiv 0$. Então neste caso temos que a equação diferencial das **linhas assintóticas** é dada por:

$$e(du^2 - dv^2) + 2f du dv = 0.$$

2.3 Função Complexa Associada as Coordenadas Isotérmicas

Dado uma parametrização isotérmica $X : U \to I\!R^3$ de uma superfície mínima regular S. Seja a função de variável complexa associada aos parametros isotérmicos $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $\phi(w) = e(w) - if(w)$ onde $w = u + iv \in \mathbb{C}$.

2.4 Proposição

$\phi(w)$ é holomorfa.

Prova: De fato, das equações de Mainardi-Codazzi[3] temos

$$(\frac{e-g}{2})_v - f_u = -\lambda H_v,$$

$$(\frac{e-g}{2})_u + f_v = \lambda H_u.$$

Quando S é uma superfície mínima, isto é, $H \equiv 0$, essas equações são precisamente as equações de Cauchy-Riemann para a função complexa ϕ associada a coordenadas isotérmicas (u, v), $e_u = -f_v$ e $e_v = f_u$ e, portanto é holomorfa.

Pode-se ver que $\frac{|\phi|^2}{\lambda^4} = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 = H^2 - K$. Sendo S uma superfície mínima, temos

$\frac{|\phi|^2}{\lambda^4} = -K \geq 0.$

Portanto, desta expressão, segue, que se S é uma superfície mínima em $I\!R^3$ que não é um plano então os pontos planares (ou flat) de S são isolados.

Em termos de ϕ e $w = u + iv$, a equação das linhas assintóticas é dada por[3]:

$$(1) \qquad Re[\phi(w)(dw)^2] = 0.$$

De fato, sabemos que a equação diferencial das linhas assintóticas é dada por $e(du^2 - dv^2) + 2fdudv = 0$. Temos que $dw = du + idv \Rightarrow (dw)^2 = du^2 - dv^2 + 2idudv$
então

$$\begin{aligned}\phi(w)(dw)^2 &= (e - if)(du^2 - dv^2 + 2idudv) \\ &= e(du^2 - dv^2) + 2fdudv + i[2edudv + f(dv^2 - du^2)].\end{aligned}$$

Daqui segue que $Re[\phi(w)(dw)^2] = e(du^2 - dv^2) + 2fdudv = 0$.

Agora queremos achar outra equação equivalente a (1), para isso inicialmente observamos que fazendo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, i,é $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2}$

temos que

$$z_1(z_2)^2 = r_1(r_2)^2ei(\theta_1 + 2\theta_2) = r_1(r_2)^2\{cos(\theta_1 + 2\theta_2) + isen(\theta_1 + 2\theta_2)\}$$

logo concluimos que

$$(\star)\ Re[z_1(z_2)^2] = 0 \Longleftrightarrow cos(\theta_1 + 2\theta_2) = 0 \Longleftrightarrow \theta_1 + 2\theta_2 = \tfrac{\pi}{2} + m\pi, m \in \boldsymbol{Z}.$$

Aplicando $(\star)$ a $\phi(w)$ e dw, obtemos

$$(2)\ Re[\phi(w)(dw)^2] = 0 \Longleftrightarrow Arg\phi(w) + 2Arg(dw) = \tfrac{(2m+1)\pi}{2}, m \in \boldsymbol{Z}$$

$$Arg(dw) = \tfrac{(2m+1)\pi}{4} - \tfrac{Arg\phi(w)}{2}, m \in \boldsymbol{Z}$$

onde

$$dw = du + idv = (du, dv)$$

é o elemento tangente a uma linha assintótica.

A equação (2) diz:

$$Arg\phi(w) + 2Arg(dw) = \tfrac{(2m+1)\pi}{2}, \text{ qualquer w}$$

onde m é constante. Isto é devido ao fato que o lado esquerdo desta última igualdade depende continuamente de w e o lado direito tem valores no conjunto discreto $\frac{(2m+1)\pi}{2}\boldsymbol{Z}$.

2.5 O índice de um ponto planar isolado

Um **elemento de linha** sobre uma superfície S é determinado por um vetor não-nulo tangente á superfície. É claro que todo múltiplo do vetor define o mesmo elemento de linha. Portanto não é possível distinguir direções. Um campo de elementos de linhas, ou melhor, um campo de linhas(regular) em uma região, corresponde a uma família de curvas na região, tal que em cada ponto da região o elemento de linha no ponto é tangente a curva que passa pelo ponto.

Um campo de linhas regular tem uma singularidade em p se não pode ser extendido a p por continuidade.

Suponha que $p \in S$ é uma singularidade isolada de um campo de linhas e C uma curva fechada simples tal que

1) p é a única singularidade no interior de C

2) não existem singularidade em C.

Então o campo dado induz um campo F de linhas sobre C. Escrevemos C em forma paramétrica $C = C(t), 0 \leq t \leq 1$. Escolhendo uma das possiveis direções do elemento de linha em C(0) isto por continuidade determina uma direção em C(t) para qualquer t.

Denotamos por $\angle(U, F)$ o ângulo determinado pela direção U e o campo F e $\delta_C \angle(U, F)$ a variação total deste ângulo ao redor de C na direção positiva(estamos supondo C suficientemente pequena para que esteja contida em uma região com um sistema de coordenadas fixa).

Definimos o índice do ponto planar isolado por

$$j = \frac{\delta_C \angle(U, F)}{2\pi}.$$

Em uma vizinhança de um ponto planar isolado de uma superfície mínima S, consideremos a distribuição $\triangle$ de dimensão um, formada pelos vetores tangentes a linha assintótica.

2.6 Proposição[11]

Seja $X : U \to S$ uma imersão de uma superfície mínima S, e ϕ a função holomorfa associada. Suponhamos que $p = X(0)$ é um ponto planar isolado. Então o índice de $\triangle$ em p é $-\frac{n}{2}$, onde n é ordem do zero de ϕ.

Prova: Como $p = X(0)$ temos que $\phi(0) = 0$, e consequentemente

$\phi(w) = a_n w^n + a_{n+1} w^{n+1} + ..., a_n \neq 0, n \geq 1.$

Consideremos a distribuição em U que é X^{-1} de Δ. Seja $\gamma : [0,1] \to U$ um círculo pequeno ao redor de 0. Para calcular o índice desta distribuição em 0, escolhemos uma função contínua $\theta : [0,1] \to I\!R$ tal que $\theta(t)$ é um ângulo entre o eixo-x e a direção da distribuição em $\gamma(t)$, então o índice é $\frac{[\theta(1)-\theta(0)]}{2\pi}$. Primeiro escolhemos uma função contínua $\varphi : [0,1] \to I\!R$ tal que $\varphi(t)$ é um argumento para $\phi(\gamma(t))$. Então a equação $argdw = -\frac{1}{2}\arg\phi + \frac{(2m+1)\pi}{4}$ mostra que temos $\theta(t) = -\frac{\varphi(t)}{2} + \frac{(2m+1)\pi}{4}$ onde m=cte., por continuidade $\frac{[\theta(1)-\theta(0)]}{2\pi} = -\frac{1}{2}\frac{[\varphi(1)-\varphi(0)]}{2\pi}$, temos que $\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{2\pi} = n, n \in I\!N$, pois seja $\alpha(t) = \frac{\phi(\gamma(t))}{a_n} = \gamma(t)^n(1+d(t)), |d(t)| < 1$ para $\gamma(t)$ pequena, é de fácil vereificação que $\alpha(t)$ é homotopica a $\gamma(t)^n$ cujo grau é n. Logo o índice da Δ em p $= \frac{[\theta(1)-\theta(0)]}{2\pi} = -\frac{n}{2}$ $\square$

Segue que o índice de um ponto planar isolado com coordenada complexa $w = 0$, de uma imersão mínima é igual a$-\frac{n}{2}$, onde n é a ordem do zero de ϕ em $w = 0$.

Observação

Se (u,v) e $(\tilde{u},\tilde{v})$ são coordenadas isotérmicas de $X : U \to I\!R^3$ em um domínio comum de S, então a mudança de coordenadas $\tilde{w} = \tilde{w}(w)$ onde $\tilde{w} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ e $w = u + iv$, é um difeomorfismo holomórfico. Reciprocamente, se é um difeomorfismo holomórfico e $w = u+iv$ define coordenada isotérmica, para $X : U \to I\!R^3$, então $\tilde{w} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ também é.

Segue [7] que a relação entre a função $\phi(u+iv)$ e $\tilde{\phi}(\tilde{u}+i\tilde{v})$ é

2.7 $\phi(w) = \tilde{\phi}(\tilde{w}(w))\left(\frac{d\tilde{w}}{dw}(w)\right)^2.$

Capítulo 3

Pontos planares e fins

O seguinte lema em forma parcial devido a Briot e Bouquet[10,p.62;21,cap. III], será utilizado nesta seção.

3.1 Lema

Seja $R(x,y)$ uma função holomorfa em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}$ com $R(0,0) = R_x(0,0) = R_y(0,0) = 0$. Se $b < 0$, a equação diferencial

$x\frac{dy}{dx} = ax + by + R(x,y), y(0) = 0,$

tem uma única solução holomorfa $y = y(x)$, em uma vizinhança de 0.

3.2 Proposição

Seja p um ponto planar isolado de uma imersão mínima $X : S \to \mathbb{R}^3$. Existem coordenadas isotérmicas, $(u,v) : (S,p) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ na qual a função complexa associada é dada por $\phi(w) = w^n$, onde $-\frac{n}{2}$ é o índice do ponto planar.

Prova: Seja $(u,v) : (S,p) :\to (\mathbb{R}^2, 0)$ coordenadas isotérmicas de X e $\phi(u+iv)$ a função complexa associada. Escrevendo $w = u + iv$ e $\phi(w) = cw^n(1+$

$r(w))$, onde $c \neq 0, n \in N$ e r é holomorfa com $r(0) = 0$. Por meio de uma transformação linear, a constante c pode ser tomada igual a 1. Para achar um difeomorfismo holomorfo local $\widetilde{w} = \widetilde{w}(w) = w(1 + \widetilde{W}(w))$, tal que a função complexa $\widetilde{\phi}(\widetilde{w})$ associada as coordenadas isotérmicas $\widetilde{w}$ é dada por $\widetilde{\phi}(\widetilde{w}) = \widetilde{w}^n$ ele é equivalente por (2.7) a resolver a equação diferencial

$$\left(\frac{d\widetilde{w}(w)}{dw}\right)^2 \widetilde{\phi}(\widetilde{w}(w)) = \phi(w)$$

em termos de $\widetilde{W}$ esta equação torna-se

$$\left(1 + \widetilde{W}(w) + w\tfrac{d\widetilde{W}}{dw}(w)\right)^2 w^n \left(1 + \widetilde{W}(w)\right)^n = w^n(1 + r(w))$$

que é equivalente a

$$\frac{wd\widetilde{W}(w)}{dw} = \frac{\sigma(1 + r(w)) - \sigma((1 + \widetilde{W}(w))^{n+2})}{\sigma((1 + \widetilde{W}(w))^n)} = -(\frac{n}{2} + 1)\widetilde{W}(w) + \frac{r(w)}{2}$$

$$+\frac{\sigma(1 + r(w)) - \sigma((1 + \widetilde{W}(w))^{n+2})}{\sigma((1 + \widetilde{W}(w))^n)} + (\frac{n}{2} + 1)\widetilde{W}(w) - \frac{r(w)}{2}$$

onde σ é o ramo holomorfo da raiz quadrada com $\sigma(1) = 1$ e temos que

$$R(w, \widetilde{W}(w)) = \frac{\sigma(1 + r(w)) - \sigma((1 + \widetilde{W}(w))^{n+2})}{\sigma((1 + \widetilde{W}(w))^n)} + (\frac{n}{2} + 1)\widetilde{W}(w) - \frac{r(w)}{2},$$

logo $R(0,0) = R(0,0)_w = R(0,0)_{\widetilde{W}} = 0$. Pelo lema 3.1, esta equação tem uma única solução holomorfa $\widetilde{W}$ em uma vizinhança de 0, com $\widetilde{W}(0) = 0$. Definindo $\widetilde{u} + i\widetilde{v} = \widetilde{w} = \widetilde{w}(w) = w(1 + \widetilde{W}(w))$, a prova está concluida.

Observação

Como $H \equiv 0 \Rightarrow k_1 = -k_2$ e fora de um ponto planar, k_1 e k_2 são diferentes de zero. Seja $v = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$, com e_1 e e_2 sendo direções principais, então:

$$K_n(v)_p = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Tomando v como direção assintótica, temos:

$K_n(v)_p = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = 0 \Rightarrow k_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$, como $k_1 \neq 0 \Rightarrow \cos^2\theta = \sin^2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in N$.

Seja

$F_x = \{\alpha_i;\ \alpha_i$ **curva integral das retas tangentes em p, cuja direção é uma direção assintótica e está na direção de** $v = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$, **onde** $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$.

$f_x = \{\beta_i;\ \beta_i$ **curva integral das retas tangentes em p, cuja direção é uma direção assintótica e está na direção de** $v = -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta$, **onde** $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$.

3.3 Corolário

Nas hipóteses de 3.2, há $n+2$ **raios** $L_0, L_1, L_2, ..., L_{n+1}$ **através de** $0 \in T_pS$, **dos quais dois raios consecutivos fazem um ângulo de** $\frac{2\pi}{n+2}$. **Tangente em p, a cada raio** L_i **existe exatamente uma linha assintótica** α_i **de** F_x **que aproxima-se de p. Duas linhas consecutivas** $\alpha_i, \alpha_{i+1}, i = 0, 1, 2, ..., n+1 (\alpha_{n+2} = \alpha_0)$ **limitam um setor hiperbólico de** F_x. **Os setores angulares limitados por** L_i **e** L_{i+1} **são bissectados pelo raio** l_i, $i = 0, 1, 2, ..., n+1$, **que fazem para** f_x **o mesmo papel que** L_i **faz para** F_x. **Veja figura 3.4 e 3.5 para uma ilustração. As linhas** α_i **são chamadas separatrizes de** F_x **em p. Similarmente para** f_x.

Prova: Podemos assumir que a equação das linhas assintóticas é dada por $Re[\phi(w)(dw)^2] = 0$. Escolhendo uma orientação local, o elemento tangente para as linhas assintóticas, dw em w, tem o $\arg dw = \frac{\pi - 2n\theta}{4}$ para direções assintóticas cujas curvas integrais $\alpha_i \in F_x$, e $\arg dw = \frac{\pi-2n\theta}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi - 2n\theta}{4}$ para direções assintóticas cujas curvas integrais $\beta_i \in f_x$.
De fato como $Re[w^n(dw)^2] = 0$, seja $w = re^{i\theta}$ e $dw = qe^{i\theta_0}$ então $\arg[w^n(dw)^2] = \arg[r^n e^{in\theta} q^2 e^{i2\theta_0}] = r^n q^2 \arg[e^{i(n\theta + 2\theta_0)}] = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in I\!N \Rightarrow n\theta + 2\theta_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow \theta_0 = \frac{(2k+1)\pi}{4} - \frac{n\theta}{2} = \frac{(2k+1)\pi - 2n\theta}{4}$ tomando $k = 0$, temos $\arg dw = \frac{\pi - 2n\theta}{4}$ para direções assintóticas cujas curvas integrais $\alpha_i \in F_x$ e como as direções assintóticas em um ponto são ortogonais, temos $\arg dw = \frac{\pi-2n\theta}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi - 2n\theta}{4}$ para direções assintóticas cujas integrais $\beta_i \in f_x$.

Vamos considerar o primeiro caso.

A equação mostra que $\arg dw$ é constante ao longo dos raios. Portanto as linhas assintóticas que são também raios, são aquelas cujos argumentos são solução de,

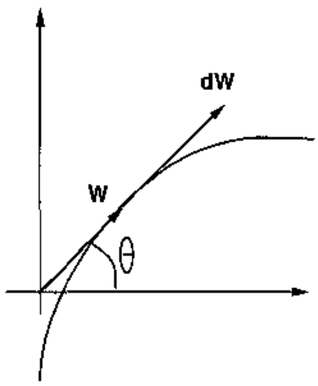

figura 3.1:

$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{4} - \frac{n\theta}{2}$ então $\frac{n\theta}{2} + \theta = \frac{(2k+1)\pi}{4} \Rightarrow n\theta + 2\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow \theta(n+2) = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+2)}$ que são precisamente $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+2)}$, $k = 0, 1, 2, ..., n+1, n+2$. Escolhendo os argumentos dos raios para as linhas assintóticas α_i em F_x que são raios, podemos ter $\theta_k = \frac{(2(2k)+1)\pi}{2(n+2)} = \frac{(4k+1)\pi}{2(n+2)}$ e para as linhas assintóticas β_i em f_x que são raios, podemos tomar,

$\theta_k = \frac{(2(2k+1)+1)\pi}{2(n+2)} = \frac{(4k+3)\pi}{2(n+2)}$

Dois raios consecutivos fazem um ângulo de $\frac{2\pi}{n+2}$.
$\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{(4(k+1)+1)\pi}{2(n+2)} - \frac{(4k+1)\pi}{2(n+2)} = \frac{2\pi}{n+2}$.

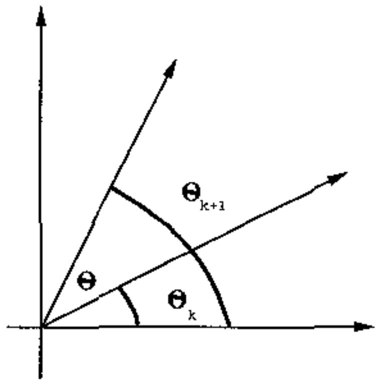

figura 3.2: (argumento entre dois raios)

Para $\theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})$, as retas nas direções assintóticas cuja curvas integrais pertencentes a F_x são transversais para os raios de argumento θ

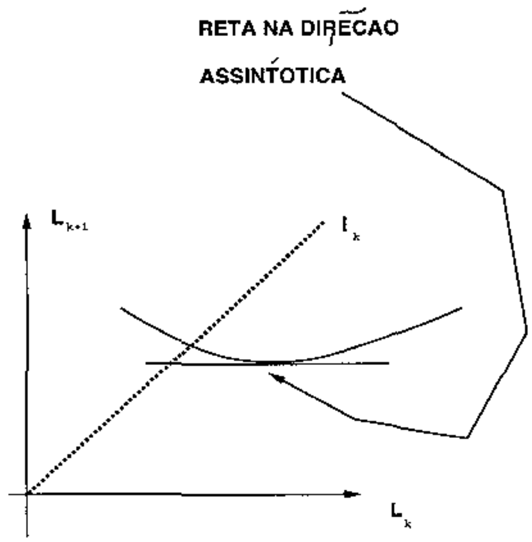

figura 3.3:

As linhas assintóticas pertencentes a F_x cruzam transversalmente todos os raios contidos no setor ângular limitado por θ_k e θ_{k+1}. Do fato do $\arg(dw)$ ser crescente com θ, segue que os raois L_k, L_{k+1} cujos argumentos são respectivamente θ_k e θ_{k+1}, limitam um setor hiperbólico da foliação F_x. Estes raios são separatrizes que são como um limite entre dois setores hiperbólicos.O caso da foliação f_X é similar.
Temos que os raios são determinados por $\theta_k = \frac{(4k+1)\pi}{2(n+2)}$.

Para $n = 2$

$$\begin{aligned}
&\theta_o = \tfrac{\pi}{8} \leftrightarrow L_o,\\
&\theta_1 = \tfrac{5\pi}{8} \leftrightarrow L_1,\\
&\theta_2 = \tfrac{9\pi}{8} \leftrightarrow L_2,\\
&\theta_3 = \tfrac{13\pi}{8} \leftrightarrow L_3,\\
&\theta_4 = \tfrac{17\pi}{8} = 2\pi + \tfrac{\pi}{8} \leftrightarrow L_4 = L_o.
\end{aligned}$$

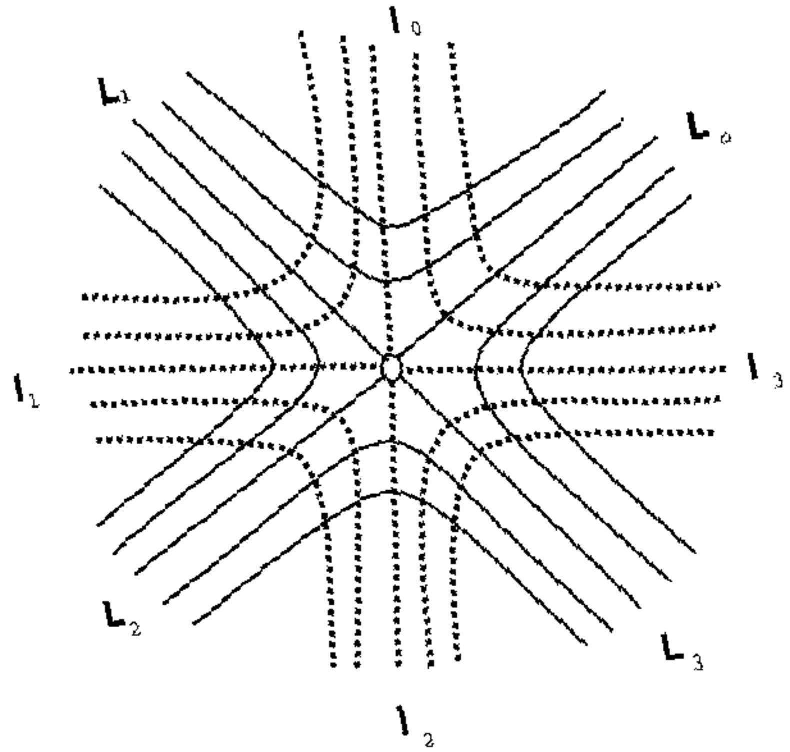

figura 3.4:

e $n = 1$

$\theta_o = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow L_o$,

$\theta_1 = \frac{5\pi}{6} \leftrightarrow L_1$,

$\theta_2 = \frac{9\pi}{6} \leftrightarrow L_2$,

$\theta_3 = \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \leftrightarrow L_3 = L_o$.

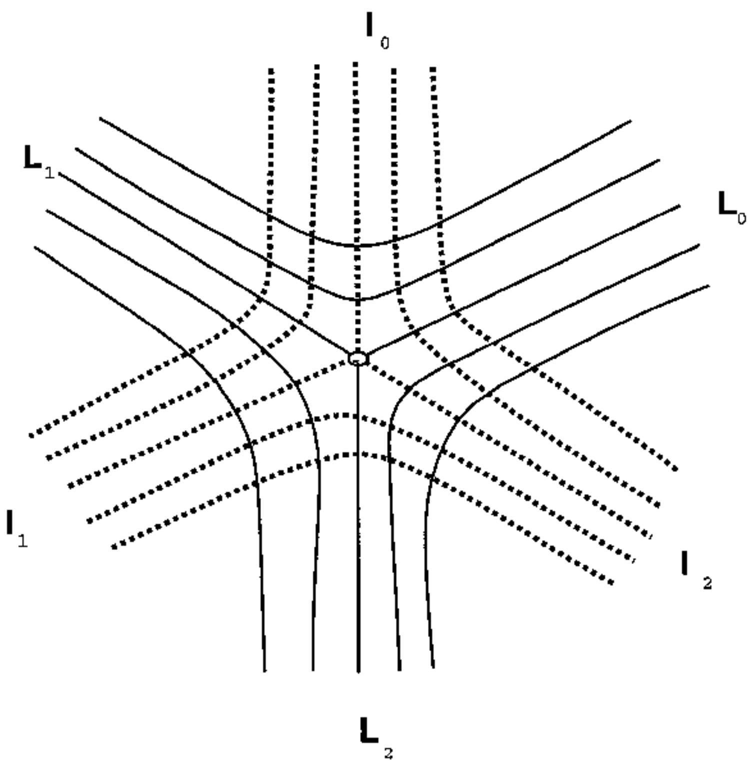

figura 3.5:

3.4 Lema

Seja $R(x, y)$ uma função holomorfa em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}$. Com $R(0,0) = R_x(0,0) = R_y(0,0) = 0$. Se $\alpha \in (0, \infty) - \boldsymbol{Z}$, a equação diferencial :

$$x\frac{dy}{dx} = ax + \alpha y + R(x, y),$$

$y(0) = 0$ tem uma única solução holomorfa $y = y(x)$ em uma vizinhança de 0.

Este lema é realmente um corolário do teorema de Poincaré-Dulac[1,Cap.5], o qual implica que o campo vetorial χ

$$x' = x, \qquad y' = ax + \alpha y + R(x,y)$$

é linearizável. O gráfico da solução holomorfa desejada $y = y(x)$ é precisamente uma variedade invariante de χ tangente ao eixo-x na origem.

3.5 Proposição

Sejam $(u,v) : S \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ coordenadas isotérmicas para uma imersão $X : S \to \mathbb{R}^3$ de uma superfície mínima. Se a função complexa associada $\phi(w)$, $w = u + iv$, tem em zero um polo de ordem $n \in \{m \in \mathbb{N}; m$ é impar ou $m = 2\}$; Então existe um difeomorfismo holomórfico $\widetilde{w} = \widetilde{w}(w)$ com $\widetilde{w}(0) = 0$, que define coordenadas isotérmicas $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ por $\widetilde{w} = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$, para o qual a função complexa associada $\widetilde{\phi}(\widetilde{w})$ se reduz a $a\widetilde{w}^{-n}$, onde $a = 1$ se $n \neq 2$ e $a = \lim_{z\to 0} w^2\phi(w)$ se $n = 2$.

Prova: A função $\phi(w)$ pode ser escrita por $\phi(w) = bw^{-n}(1 + r(w))$, com $r(0) = 0$. Para achar o difeomorfismo holomorfico $\widetilde{w} = \lambda w(1 + W(w))$, com $\lambda \neq 0$ e $W(0) = 0$, que verifique a conclusão da proposição, ele é equivalente a resolver a equação diferencial,

$$(1)\ \lambda^2(1 + W(w) + w\tfrac{dW}{dw}(w))^2 a\lambda^{-n}w^{-n}(1 + W(w))^{-n} = bw^{-n}(1 + r(w))$$

Tome λ com $\lambda^{n-2}(\frac{b}{a}) = 1$. Isto é possível porque, quando $n = 2$, $b = a$, satisfaz. Portanto (1) é equivalente para

$$(2)\ w\tfrac{dW}{dw}(w) = \sigma(1 + r(w))\sigma((1 + W(w))^n) - (1 + W(w)),$$

onde σ é o ramo holomorfo da raiz quadrada com $\sigma(1) = 1$.
Se $n = 2$, $S(\xi) = \frac{[\sigma(1+r(\xi))-1]}{\xi}$ é holomorfa e a equação (2) com $W(0) = 0$ tem uma única solução holomorfa.

$$W(w) = \exp(\int_0^w S(\xi)d\xi) - 1$$

De fato $n = 2$ a equação (2) fica

$$w\frac{dW}{dw}(w) = \sigma(1 + r(w))(1 + W(w)) - (1 + W(W))$$
$$w\frac{dW}{dw}(w) = (1 + W(w))(\sigma(1 + r(w)) - 1)$$
$$\frac{dW}{(1+W(w))} = \frac{\sigma(1+r(w))-1}{w}dw$$

Tome $S(\xi) = \frac{[\sigma(1+R(\xi))-1]}{\xi}$
então
$$\frac{dW(w)}{1+W(w)} = S(w)dw$$
$$\log(1 + W(w)) = \int_0^w S(\xi)d\xi$$
$$(1 + W(w)) = \exp(\int_0^w S(\xi)d\xi)$$
$$W(w) = \exp(\int_0^w S(\xi)d\xi) - 1$$

Se $n \neq 2$, a equação (2) pode ser escrita como

$$(3) \qquad w\frac{dW}{dw} = pw + \frac{n-2}{2}W(w) + R(w, W(w))$$

De fato usando a equação (2)

$$w\frac{dW}{dw}(w) = \sigma(1 + r(w))\sigma((1 + W(w))^n) - (1 + W(w)),$$
$$= pw + \frac{n-2}{2}W(w) - pw - \frac{n}{2}W(w) - 1 + \sigma(1 + r(w))\sigma((1 + W(w))^n)$$

com $p = \frac{\dot{r}(0)}{2}$ **e** $R(w, W(w)) = -pw - \frac{n}{2}W(w) - 1 + \sigma(1 + r(w))\sigma((1 + W(w))^n)$. **onde** $p \in \mathbb{C}$ **e** $R(w, W(w))$ **é uma funcão holomorfa em uma vizinhança de** $(0,0) \in \mathbb{C}$ **satisfazendo** $R(0,0) = R_w(0,0) = R_{W(w)}(0,0) = 0$. **Se** $n > 2$**(resp.** $n = 1$**) pelo lema 3.4(resp. lema 3.1), há um difeomorfismo holomorfo** $W = W(w)$ **definido em uma vizinhança de** $0 \in \mathbb{C}$**, com** $W(0) = 0$ **e satisfazendo a equação (3).**

Como uma consequência do teorema Poincaré Dulac[1,cap.5], a proposição 3.5 não pode ser estendida para o caso em que a ordem do polo é par ou maior que 2. No entanto o seguinte resultado pode ser afirmado.

3.6 Proposição[8]

Seja $(u, v) : S \to R^2 - \{0\}$ coordenadas isotérmicas para uma imersão $X : S \to R^3$ de uma superfície mínima S. Se a função complexa associada $\phi(w)$, $w = u + iv$, tem em zero um polo de ordem $n \neq 2$, então existe uma pequena vizinhança V de 0 em R^2 tal que as linhas assintóticas de X, restrita para $(u, v)^{-1}(V - \{0\})$, distribue ela mesma (modulo topologicamente equivalente) como se a função complexa associada fosse w^{-n}.

Um fim da superfície S definido pelo sistema de conjuntos abertos,

$$U_j = \{0 < u^2 + v^2 < \tfrac{1}{j}; j \in N\}$$

onde (u, v) são coordenadas isotérmicas para X, na qual a função complexa associada tem um polo de ordem n em $(u, v) = (0, 0)$, é chamado um fim elementar de X de ordem n. Analogamente a Prop. 2.5 pode-se ver que o índice de tal fim elementar é $\frac{n}{2}$. O fim elementar é dito ser completo se a distância de $(0, 0)$ para qualquer outro ponto do disco furado U_1 for infinita. Exemplos de fins elementares completos e não completos são dados em 4.2.

3.7 Corolário

As linhas assintóticas de uma imersão mínima X próximo de um fim elementar E de ordem n são descritos como segue:
(a) Para $n = 1$, há exatamente uma linha α_i(resp. β_i) de F_x que tende para E, todas as outras linhas ocupam um setor hiperbólico limitado por E e α_i(resp. β_i).
(b)Para $n = 2$ suponha que $\phi(w)$ é a função complexa associada e $a = lim_{w \to 0} w^2 \phi(w)$.

Hà dois casos:

(b1) $a \notin i\mathbb{R}$. Então as linhas de F_x e f_x tendem para E.

(b2) $a \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Então as linhas de F_x(resp. f_x) são círculos ou raios tendendo para E.
(c) Para $n \geq 3$, todas as linhas de F_x e f_x tendem para E. As linhas assintóticas distribuem elas mesmas em $n-2$ setores elípticos, dois setores elípticos consecutivos estão separados por um setor parabólico.

Prova:
(a) Para $n = 1$, há exatamente uma linha α_i (resp. β_i) de F_x(resp. f_x) que tende para E, todas as outras linhas ocupam um setor hiperbólico limitado por E e α_i (resp. β_i).
Pela proposição 3.6, $\phi(w) = w^{-n}$

$n = 1 \Rightarrow \phi(w) = w^{-1}$.

A equação das linhas assintóticas é $Re[\phi(w)(dw)^2] = 0$.

isto, é

$Re[w^{-1}(dw)^2] = 0$

$w = r\exp(i\theta)$

$dw = r_o \exp(i\theta_o)$

$Re[r^{-1}\exp(-i\theta) r_o^2 \exp(i2\theta_o)] = Re[r^{-1} r_o^2 \exp(i(2\theta_o - \theta))] = 0$

então $2\theta_o - \theta = \frac{(2k+1)}{2}\pi$

Se $\theta = \theta_o$ temos $\theta = \frac{(2k+1)}{2}\pi, k \in N$

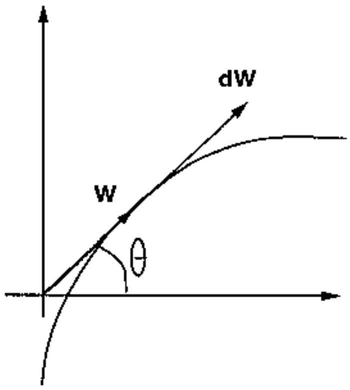

figura 3.6:

$\theta_k = \frac{(2k+1)}{2}\pi$

$\theta_o = \frac{1}{2}\pi \leftrightarrow L_o$

$\theta_1 = \frac{3}{2}\pi \leftrightarrow l_o$

$\theta_2 = \frac{5}{2}\pi = \theta_o \leftrightarrow L_1 = L_o$

Se $\theta \neq \theta_o$ temos a seguinte figura

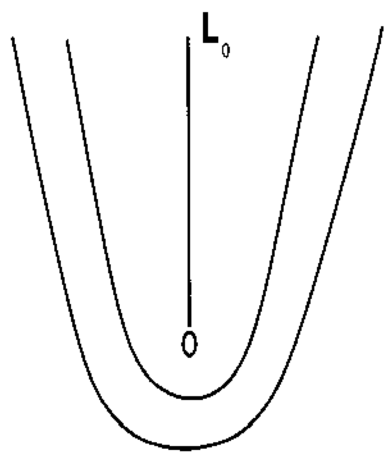

figura 3.7:

(b) Para n=2 suponha que $\phi(w)$ é a função complexa associada e $a = \lim_{w \to 0} w^2\phi(w)$. Há dois casos:

(b1) a$\notin i\mathbb{R}$. Então as linhas de F_x e f_x tendem par E, como na fig. 3.10.

$Re[\phi(w)dw^2] = 0$

$Re[aw^{-2}dw^2] = 0$

Seja $w = re^{i\theta}$,$dw = r_o e^{i\theta_o}$ **e** $a = r_1 e^{i\theta_1}$

então;

$Re[r_1 e^{i\theta_1} r^{-2} e^{-i2\theta} r_o^2 e^{i2\theta_o}] = 0$

$Re[r_1 r^{-2} r_o^2 e^{i(\theta_1 - 2\theta + 2\theta_o)}] = 0$

$\Rightarrow \theta_1 - 2\theta + 2\theta_o = \frac{2k+1}{2}\pi$

Se $\theta = \theta_o$,

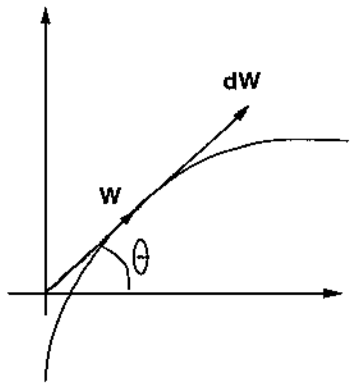

figura 3.8:

$\Rightarrow \theta_1 = \frac{2k+1}{2}\pi$, **mas** $a \notin i\mathbb{R} \Rightarrow$ **que** $Re[\phi(w)dw^2] \neq 0$

Se $\theta \neq \theta_o$,

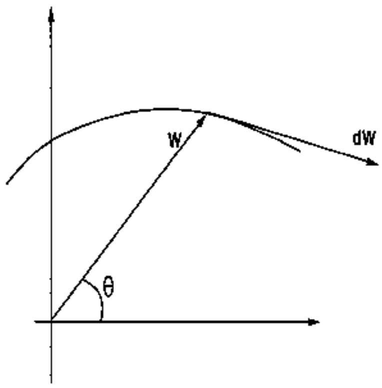

figura 3.9:

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \theta_1 - 2\theta + 2\theta_o &= \tfrac{2k+1}{2}\pi \\ 2\theta_o &= \tfrac{2k+1}{2}\pi - \theta_1 + 2\theta \\ \theta_o &= \tfrac{2k+1}{4}\pi - \tfrac{\theta_1}{2} + \theta \end{aligned}$$

vamos supor que argumento de a é $\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta_o = \frac{2k+1}{4}\pi - \frac{\pi}{6} + \theta$

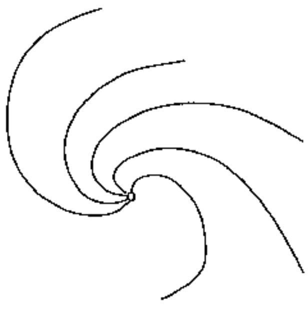

figura 3.10:

(b.2) $a \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. **Então as linhas de** F_x**(resp.** f_x**) são círculos ou raios tendendo para** E**, como na fig. 3.12 e fig. 3.13, respectivamente. Seja a equação das linhas assintóticas** $Re[\phi(w)dw^2] = 0$**, como** $n = 2$ **e** $\phi(w) = aw^{-2} \Rightarrow Re[aw^{-2}dw^2] = 0$ **temos que** $\theta_o = \frac{2k+1}{4}\pi - \frac{\theta_1}{2} + \theta$ **com** θ_o **arg de** dw**,** θ **arg de** w **e** θ_1 **arg de** a**.**

Se $\theta = \theta_o$,

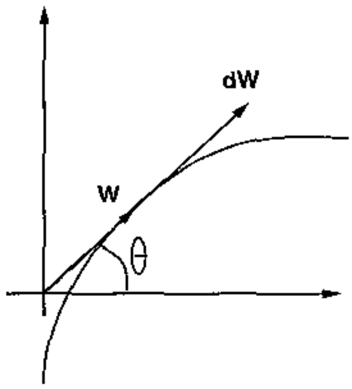

figura 3.11:

então $\theta_1 = \frac{2k+1}{2}\pi$**. Como** $a \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$**, temos que existem raios em todas as direções. Como os raios das linhas assintóticas minimais são ortogonais com as linhas assintóticas maximais, então as linhas assintóticas são circulos, pois existem raios em todas as direções.**

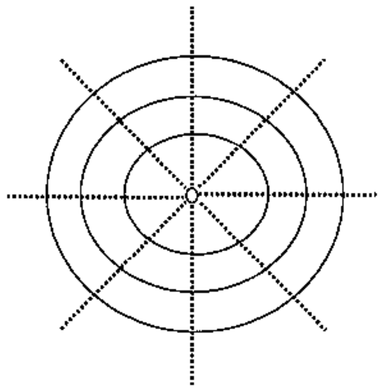

figura 3.12:

(c) Para $n \geq 3$, todas as linhas de F_x e f_x tendem para E. As linhas assintóticas distribuem elas mesmas em $n-2$ setores elípticos, dois setores elípticos consecutivos estão separados por um setor parabólico.

Para $n \neq 2$ temos $a = 1$ então a equação das linhas assintóticas fica $Re[w^{-n}(dw)^2] = 0$.

Logo $-n\theta + 2\theta_o = \frac{2k+1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad \theta_o = \frac{2k+1}{4}\pi + \frac{n\theta}{2}$

Quando $\theta_o = \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{(2k+1)}{2(2-n)}\pi$

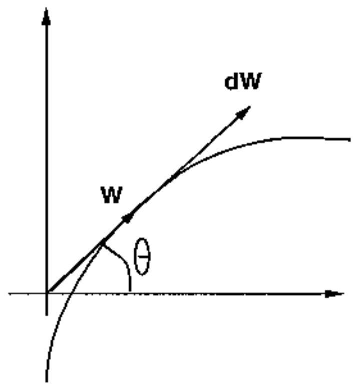

figura 3.13:

que podemos denotar por $\theta_k = \frac{(2k+1)}{2(2-n)}\pi$.

Exemplos:

(a) Para $\quad n = 3$

$\theta_k = \frac{(2k+1)}{-2}\pi = -\frac{(2k+1)}{2}\pi$

$\theta_o = -\frac{1}{2}\pi,$
$\theta_1 = -\frac{3}{2}\pi,$
$\theta_2 = -\frac{5}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi,$
$\theta_3 = -\frac{7}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi$
$\theta_o \leftrightarrow L_o,$
$\theta_1 \leftrightarrow l_o,$
$\theta_2 \leftrightarrow L_1 = L_o,$
$\theta_3 \leftrightarrow l_1 = l_o.$

(b) Para $\quad n = 5$

$\theta_k = \frac{(2k+1)}{-6}\pi = -\frac{(2k+1)}{6}\pi$

$\theta_o = -\frac{1}{6}\pi,$
$\theta_1 = -\frac{3}{6}\pi = -\frac{1}{2}\pi,$
$\theta_2 = -\frac{5}{6}\pi,$
$\theta_3 = -\frac{7}{6}\pi,$
$\theta_4 = -\frac{9}{6}\pi = -\frac{3}{2}\pi,$
$\theta_5 = -\frac{11}{6}\pi$
$\theta_6 = -\frac{13}{6}\pi = -2\pi - \frac{1}{6}\pi$
e $\quad \theta_7 = -\frac{15}{6}\pi = -2\pi - \frac{1}{2}\pi.$

$\theta_o \leftrightarrow L_o,$
$\theta_1 \leftrightarrow l_o,$

$\theta_2 \leftrightarrow L_1,$
$\theta_3 \leftrightarrow l_1,$
$\theta_4 \leftrightarrow L_2,$
$\theta_5 \leftrightarrow l_2,$
$\theta_6 \leftrightarrow L_3 = L_o$
e $\quad \theta_7 \leftrightarrow l_3 = l_o.$

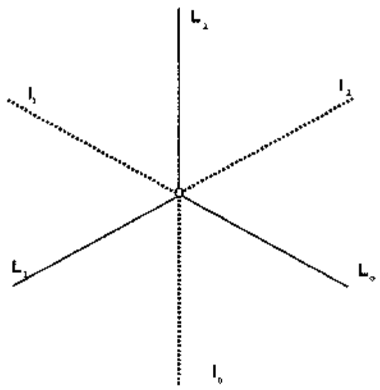

figura 3.14:

Voltando para o exemplo (a) quando $\theta_o \neq \theta$, isto é,

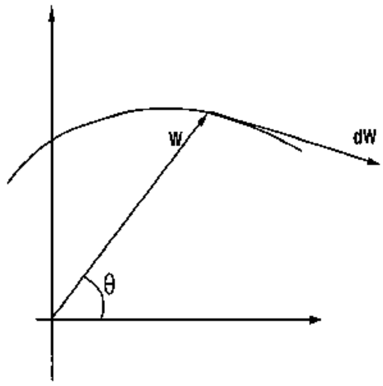

figura 3.15:

$\theta_o = \frac{2k+1}{4}\pi + \frac{n\theta}{2}$ **para** $k = 0$

e $n = 3$ **temos** $\theta_o = \frac{1}{4}\pi + \frac{3\theta}{2}$ **variando o** θ **obtemos**

$n = 3$

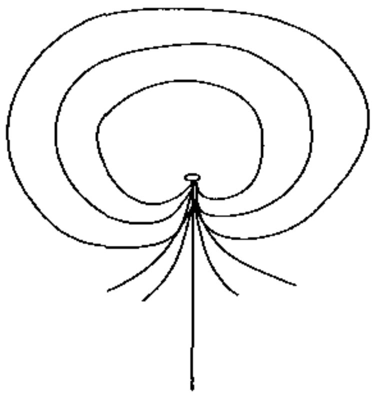

figura 3.16:

Voltando para o exemplo (b) quando $\theta_o \neq \theta$, isto é,

$\theta_o = \frac{2k+1}{4}\pi + \frac{n\theta}{2}$ **para** $k = 0$

e $n = 5$ **temos** $\theta_o = \frac{1}{4}\pi + \frac{5\theta}{2}$ **variando o** θ **obtemos**

$n = 5$

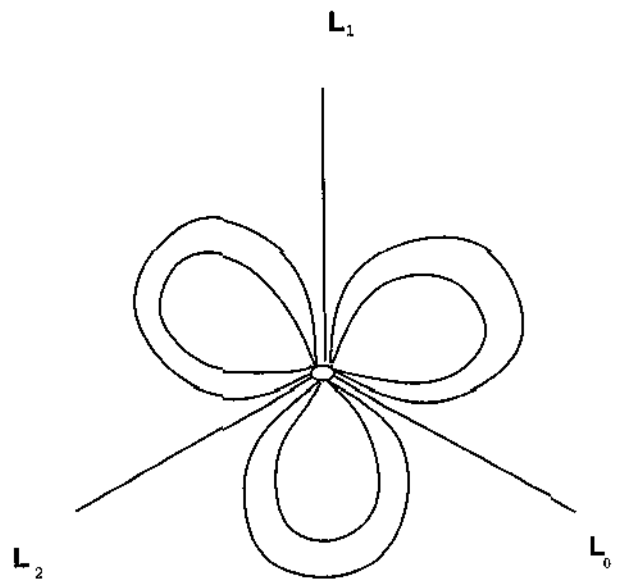

figura 3.17:

Capítulo 4

Alguns exemplos

4.1 Exemplos de pontos planares isolados para superfícies mínimas.

A seguinte versão do teorema fundamental da teoria de superfícies será usado na construção dos exemplos.

4.1.1 Teorema[11,V.3]

Sejam E, e, f, g funções analíticas em um conjunto aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Existe uma imersão analítica $X : S \to \mathbb{R}^3$ cuja formas fundamentais são

$I = E\left(du^2 + dv^2\right), II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ para cada (u, v) coordenadas isotérmicas se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $E > 0$ em S.

(2)

$$e_v - f_u = E_v(\frac{e+g}{2E})$$

$$f_v - g_u = -E_u(\frac{e+g}{2E}),$$

(equações de Codazzi)

(3)

$$eg - f^2 = \frac{1}{2E}\left[E_u^2 + E_v^2 - EE_{uu} - EE_{vv}\right]$$

(A equação de Gauss)

A curvatura gaussiana e a curvatura média de X são dadas respectivamente por

$$K = \frac{eg - f^2}{E^2};$$

e

$$H = \frac{e+g}{2E}.$$

4.1.2 Corolário

Existe uma imersão mínima $X : S \leftarrow I\!R$, cuja primeira e segunda formas fundamentais são

$I = E\left(du^2 + dv^2\right), II = e\left(du^2 - dv^2\right) + 2fdudv$, **se, e somente se,**

(1) $E > 0, emS$

(2) $\phi\left(u + iv\right) = e(u+iv) - if(u+iv)$

é holomorfa, e $e = -g = Re\phi$.

(3) $E_u^2 + E_v^2 - EE_{uu} - EE_{vv} = -2E\left|\phi\right|^2$.

Prova: Pelo teorema 4.1.1 temos que as equações de Codazzi são,

$\mathbf{e}_v - \mathbf{f}_u = \mathbf{0}$

$f_v + e_u = 0$
logo,
$e_v = f_u$

$f_v = -e_u$

então ϕ é holomorfa, portanto o item (2) é satisfeito.
Pelo teorema 4.1.1 temos que a equação de Gauss
$-e^2 - f^2 = \frac{1}{2E}\left[E_u^2 + E_v^2 - EE_{uu} - EE_{vv}\right]$ é satisfeita.
Temos pelo item (2) que,
$-e^2 - f^2 = -|\phi|^2$

então $E_u^2 + E_v^2 - EE_{uu} - EE_{vv} = -2E|\phi|^2$.

A prova da sequinte proposição pode ser também encontrada em [5, corolário 5.2].

4.1.3 Proposição

Dado $n \in Z^+$, existe uma imersão mínima X, com coordenadas isotérmicas (u, v) e pontos planares isolados de índice $-\frac{n}{2}$.
Prova: Seja $\phi(u + iv) = (u + iv)^n$. Provaremos que existe uma função analítica $E = E(u, v)$, definida em um disco com centro $0 \in R^2$, tal que:
(1) $E > 0$,
(2) $E_u^2 + E_v^2 - EE_{uu} - EE_{vv} + 2E|\phi|^2 = 0$.

Pelo teorema de Cauchy-Kowaleswsky[11,V.5] segue que existe funções analíticas U_1, U_2 e U_3 que satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais parcias

$$\frac{\partial U_1}{\partial v} = U_2,$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial v} = \frac{U_3^2}{U_1} + \frac{U_2^2}{U_1} - \frac{\partial U_3}{\partial u} + 2\left(u^2+v^2\right)^n,$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial v} = \frac{\partial U_2}{\partial u}.$$

com as condições iniciais $U_1(u,0) = U_2(u,0) = 1$ **e** $U_3(u,0) = 0$.
tome $E = U_1$**. Segue que** $E_v = U_2$**, vamos mostrar que**
$E_u = U_3 = \frac{\partial U_1}{\partial u}$.
De fato, usando as equações diferenciais parciais, segue que;

$U_3(u,v) - \frac{\partial U_1}{\partial u}(u,v) = U_3(u,v) - U_3(u,0) - \left(\frac{\partial U_1}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial U_1}{\partial u}(u,0)\right)$
Agora temos que $U_3(u,0) = 0$ **e** $\frac{\partial U_1}{\partial u}(u,0) = 0$ **pois** $U_1(u,0) = 1$.
então,

$$U_3(u,v) - \frac{\partial U_1}{\partial u}(u,v) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(U_3(u,tv)\right)dt - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial u}U_1(u,tv)\right)dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial U_3}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt$$

$$= \int_0^1 v\left(\frac{\partial U_3}{\partial v}(u,tv) - \frac{\partial^2 U_1}{\partial v\partial u}(u,tv)\right)dt$$

$$= v\int_0^1 \left(\frac{\partial U_3}{\partial v}(u,tv) - \frac{\partial^2 U_1}{\partial v\partial u}(u,tv)\right)dt$$

como
$$\frac{\partial U_3}{\partial v} = \frac{\partial U_2}{\partial u},$$
e
$$\frac{\partial U_1}{\partial v} = U_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 U_1}{\partial v \partial u} = \frac{\partial U_2}{\partial u},$$

temos,

$$U_3(u,v) - \frac{\partial U_1}{\partial u}(u,v) = v \int_0^1 \left(\frac{\partial U_2}{\partial u}(u,tv) - \frac{\partial U_2}{\partial u}(u,tv) \right) dt = 0$$

logo,
$$U_3 = \frac{\partial U_1}{\partial u},$$

Portanto,

(a)
$$E_v = U_2,$$

$$U_3 = E_u,$$

(b)
$$E_{vv} = \frac{E_u^2}{E} + \frac{E_v^2}{E} - E_{uu} + 2\left|\phi\right|^2,$$

(c)
$$E_{uv} = E_{vu}$$

Segue que (b) fica

$$E_u^2 + E_v^2 - EE_{uu} - EE_{vv} + 2E\left|\phi\right|^2 = 0$$

satisfazendo (2).

Usando o corolário 4.1.2 segue que, definindo

$e = Re\phi,$

e

$f = -Im\phi,$

$$\phi(w) = Re\phi(w) + iIm\phi(w) = e(w) - if(w)$$

existe uma imersão mínima X, com um ponto planar de índice $-\frac{n}{2}$.

Observação

O corolário 4.1.2 e a proposição 4.1.3 podem ser provadas para imersões X com curvatura média constante $H \neq 0$.[4]

4.2 Teorema de representação de Weierstrass.

A seguinte versão parcial do teorema de representação de Weierstrass para imersão mínimas será usado na discussão dos exemplos abaixo.

4.2.1 Proposição[9, pag. 64]

Seja D um conjunto aberto conexo de R^2. Sejam g uma função meromorfa e f uma função holomorfa em D. Assuma que em cada polo de ordem n de g a função f tem um zero de ordem $2n$. Também que para cada curva fechada $\gamma \subset D$, $Re[\int_\gamma \phi_k(w)dw] = 0, k = 1, 2, 3,$ onde $\phi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2), \phi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2), \phi_3 = fg.$

Para um ponto $w_o \in D$, defina $\alpha_k(w) = Re[\int_{w_o}^{w} \phi_k(w)dw], k = 1, 2, 3.$ Então $X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é uma imersão mínima e (u, v), dadas por $w = u + iv$, são coordenadas isotérmicas para X.

Antes de provar a proposição acima vamos ver algumas proposições necessárias.

4.2.2 Proposição

Seja $X : D \subset R^2 \to S \subset R^3$**isotérmica. Então vale** $X_{uu} + X_{vv} = 0$.
Prova: Temos que $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$, **derivando em relação a variável u obtemos**
(1) $\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle$,
como $F = 0$, **isto é,** $\langle X_u, X_v \rangle = 0$, **podemos derivar em relação a variável v, daí obtemos**
(2) $\langle X_u, X_{vv} \rangle = -\langle X_{vu}, X_v \rangle$
somando (1) e (2) temos,
$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0$,
analogamente obtemos
$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0$,
logo,
(3) $X_{uu} + X_{vv} = kN, (k = cons\tan te)$,
sabemos que $\frac{g+e}{2\lambda^2} = H \equiv 0 \Rightarrow g + e = \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle = 0$
portanto, $\langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle = \langle kN, N \rangle = k = 0$,
logo por (3) temos;
$X_{uu} + X_{vv} = 0$.

Observação
Se $f : U \subset R^2 \to R^3$, f **diferenciável. Então o Laplaciano de** f **é**
$\triangle f = f_{uu} + f_{vv}$,
diremos que f **é harmônica** $\Leftrightarrow \triangle f = 0$.

4.2.3 Corolário

Seja $X(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ uma superfície parametrizada regular. Então X é uma superfície mínima $\Leftrightarrow$ cada uma das funções coordenadas x_1, x_2 e x_3 são harmônicas.

Sabemos da teoria das funções de variável complexa que se o domínio D é simplesmente conexo, uma função harmônica real corresponde a parte real da integral de uma função analítica, logo $x_k = Re \int_{z_o}^{z} \phi_k(w)\, dw, k = 1, 2$ e 3.

Seja $X(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ uma parametrização regular de uma superfície mínima S, e seja $w = u + iv$. Definamos as funções de variável complexa,

$(*)\ \phi_k(w) = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}.$

Relativamente a estas funções $\phi_k(z)$, $k = 1, 2$ e 3, temos as seguintes propriedades:

4.2.4 Teorema

Seja $X(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ uma parametrização regular, $w = u + iv$ e $\phi_k(w)$ definidas por $(*)$, $k = 1, 2$ e 3 . Então

(1) $\sum\limits_{k=1}^{3} \phi_k^2(w) = E - G + 2iF,$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{3} |\phi_k(w)|^2 = E + G,$

(3) $\phi_k(w)$ **é analítica** $\Leftrightarrow x_k, k = 1, 2$ **e 3 é harmônica.**

(4) (u,v) **são parâmetros isotérmicos** $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{3} \phi_k^2(w) = 0.$

(5) Suponha que(u, v) são parâmetros isotérmicos. Então S é uma superfície regular $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{3} |\phi_k(w)|^2 > 0$.

Prova:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{3} \phi_k^2(w) = \sum\limits_{k=1}^{3} [\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2 - 2i\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}]$
$= \langle X_u, X_u \rangle - \langle X_v, X_v \rangle - 2i \langle X_u, X_v \rangle = E - G + 2iF$,

(2) $\sum\limits_{k=1}^{3} |\phi_k(w)|^2 = \sum\limits_{k=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2\right] = \langle X_u, X_u \rangle + \langle X_v, X_v \rangle = E + G$,

(3) $\phi_k(w)$ é analítica $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial_u}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial}{\partial_v}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 x_k}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial v^2} = 0 \Leftrightarrow x_k, k = 1, 2$ e 3 é harmônica.

(4) imediato.

(5) (u, v) são parâmetros isotérmicos, S regular $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{3} |\phi_k(w)|^2 = 2E > 0$.

Definição
Diremos que ϕ_k não tem períodos reais se $Re \int_\gamma \phi_k(z)\, dz = 0$ ao longo de qualquer caminho fechado $\gamma(I) \subset D$.

4.2.5 Corolário

Se $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ é mínima e (u, v) são parâmetros isotérmicos, então temos:

(1) $\phi_k(w)$ é analítica,para cada $k = 1, 2$ e 3.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{3} \phi_k^2(w) = 0$,

(3) $\sum\limits_{k=1}^{3} |\phi_k(w)|^2 > 0$.

Prova: Segue do teorema anterior.

Reciprocamente, se $\phi_k(w)$, $k = 1, 2$ e 3 são analíticas e as condições (2) e (3) são satisfeitas e $Re \int_\gamma \phi_k(w)\, dw = 0$ então existe uma su-

perfície mínima definida sobre D, tal que as equações (2) são válidas.
Demostração: Definimos as funções x_k, $k = 1, 2$ e 3 por:

(4) $x_k = Re \int_{w_o}^{w} \phi_k(w)\, dw$, estão bem definidas, pois a integral independe do caminho, so depende de $w = u + iv$. Seja $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$ e $\phi_k(w) = a_k(w) + ib_k(w)$,

$x_k = Re \int_{w_o}^{w} \phi_k(z)\, dz = Re \int_{w_o}^{w} (a_k + ib_k)\left(\frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt}\right) dt = \int_{w_o}^{w} (a_k\dot{u} - b_k\dot{v})\, dt \Rightarrow$

$\frac{\partial x_k}{\partial u} = \int_{w_o}^{w} \frac{\partial}{\partial u}(a_k\dot{u} - b_k\dot{v})\, dt = \int_{w_o}^{w}\left(\frac{\partial a_k}{\partial u}\dot{u} - \frac{\partial b_k}{\partial u}\dot{v}\right) dt = \int_{w_o}^{w} \frac{\partial}{dt}(a_k)\, dt = a_k$,

analogamente $\frac{\partial x_k}{\partial v} = -b_k$.

Observações

Vemos que localmente o estudo das superfícies mínimas regulares em $I\!R^3$ é equivalente ao estudo local das funções analíticas $\phi_k(z)$, $k = 1, 2$ e 3 verificando (2).

Então vamos descrever as soluções $\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(w) = 0$.

4.2.6 Lema

Sejam D um domínio simplesmente conexo em C, g uma função meromorfa em D e f uma função analítica em D com a propriedade que em cada ponto onde g tem um polo de ordem n, f tem um zero de ordem $2n$. Então as funções:

(4) $\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2)$, $\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 - g^2)$ e $\phi_3 = fg$

são analíticas em D e verificam a condição (2). Reciprocamente, cada terna de funções analíticas (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) em D, verificando a condição (2) pode ser representada na forma (4) exceto no caso $\phi_1 - i\phi_2 = 0$ e $\phi_3 = 0$.

Prova:($\Rightarrow$) é só substituir ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 em (2).

($\Leftarrow$) Sabemos que ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 analíticas verificam

(2) $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \Rightarrow$

(5) $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\phi_3^2 \Rightarrow (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = -\phi_3^2$.

Se $\phi_1 - i\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_3 = 0$ (neste caso a superfície é um plano)
Supondo $\phi_3 \neq 0 \Rightarrow \phi_1 - i\phi_2 \neq 0$,
podemos escrever,

(6) $f = \phi_1 - i\phi_2$ e $g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$,

levando (6) em (5), obtemos

$$(7)\ \phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = -(\phi_1 - i\phi_2)\frac{\phi_3}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = -fg^2,$$

desta equação obtemos a informação de que se g tem um polo de ordem n então f tem um zero de ordem $2n$.
Se f tem em w_o um zero de ordem $2n \Rightarrow f(w) = (w - w_o)^{2n} h(w)$, onde $h(w) \neq 0$, levando f para a equação (7) obtemos,

$g^2(w) = -\frac{\phi_1(w) + i\phi_2(w)}{(w-w_o)^{2n} h(w)} = \frac{1}{(w-w_o)^{2n}} i^2 \frac{H(w)}{h(w)} = \left(\frac{F(w)}{(w-w_o)^n}\right)^2$, com $F(w) = i^2 \frac{H(w)}{h(w)}$

$\Rightarrow g = \frac{F(z)}{(z-z_o)^n}$,

resolvendo (6) e (7) obtemos

(4) $\phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2)$, $\phi_2 = \frac{i}{2} f(1 - g^2)$ e $\phi_3 = fg$.

4.2.7 Corolário

Seja X dada por 4.2.1. Então a função complexa associada à coordenada isotérmica (u, v) é dada por ;

$$\phi(\mathrm{w}) = \mathrm{c}\mathrm{f}(\mathrm{w})\dot{\mathrm{g}}(\mathrm{w})$$

onde $c \in \{-1, 1\}$ é determinado pela orientação da superfície imergida $X(D)$.
Prova: Temos que os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por $e =< N, X_{uu} >, f =< N, X_{uv} >$ e $g =< N, X_{vv} >$, seja a função complexa associada

$\phi(w) = e(w) - if(w)$
(1) $\phi = \langle N, X_{uu} - iX_{uv} \rangle$

Pela definição

(2) $\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v} = x_{ku} - ix_{kv}, k = 1, 2, 3.$

$\phi_{ku} = \frac{\partial \phi_k}{\partial u} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial u \partial u} - i\frac{\partial^2 x_k}{\partial v \partial u} = x_{kuu} - ix_{kvu}$

$\lambda^2 = |X_u \wedge X_v| = \left[\frac{|f|\left(1+|g|^2\right)}{2}\right]^2 = |X_u|^2 = |X_v|^2$
$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$

Logo temos,
$\phi = \langle N, (\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}) \rangle = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\lambda^2}, (\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}) \right\rangle,$

(3) $\lambda^2 \phi = \langle X_u \wedge X_v, (\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}) \rangle$

(4) $X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right) = (Re\phi_1, Re\phi_2, Re\phi_3)$
$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right) = (-Im\phi_1, -Im\phi_2, -Im\phi_3)$

levando (4) a (3)

$$\lambda^2 \phi = \langle (Re\phi_1, Re\phi_2, Re\phi_3) \wedge (-Im\phi_1, -Im\phi_2, -Im\phi_3), (\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}) \rangle$$
$$= \det \begin{bmatrix} \phi_{1u} & \phi_{2u} & \phi_{3u} \\ Re\phi_1 & Re\phi_2 & Re\phi_3 \\ -Im\phi_1 & -Im\phi_2 & -Im\phi_3 \end{bmatrix}$$

(5) $\lambda^2 \phi = \det \begin{bmatrix} \phi_{1u} & \phi_{2u} & \phi_{3u} \\ Re\phi_1 & Re\phi_2 & Re\phi_3 \\ -Im\phi_1 & -Im\phi_2 & -Im\phi_3 \end{bmatrix}$

De (1) utilizando $X_{uu} = -X_{vv}$ temos

(6) $\phi = \langle N, -X_{vv} - iX_{uv}\rangle$
$= \langle N, -i(X_{uv} - iX_{vv})\rangle$

utilizando (2)

$$\phi = \langle N, -i\,(\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v})\rangle$$
$$= \left\langle \tfrac{X_u \wedge X_v}{\lambda^2}, -i\,(\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v})\right\rangle$$

(7) $\lambda^2\phi = \langle X_u \wedge X_v, -i\,(\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v})\rangle$

somando (3) + (7) obtemos

$$2\lambda^2\phi = \langle X_u \wedge X_v, \phi_{1u} - i\phi_{1v}, \phi_{2u} - i\phi_{2v}, \phi_{3u} - i\phi_{3v}\rangle$$
$$= \left\langle X_u \wedge X_v, (2\dot{\phi}_1, 2\dot{\phi}_2, 2\dot{\phi}_3)\right\rangle$$
$$\lambda^2\phi = \left\langle X_u \wedge X_v, (\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3)\right\rangle$$

ou

$$\lambda^2\phi = \left\langle (Re\phi_1, Re\phi_2, Re\phi_3) \wedge (-Im\phi_1, -Im\phi_2, -Im\phi_3), (\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3)\right\rangle$$

ou

$$\textbf{(8)}\ \lambda^2\phi = -\det\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ Re\phi_1 & Re\phi_2 & Re\phi_3 \\ Im\phi_1 & Im\phi_2 & Im\phi_3 \end{bmatrix}$$

dai segue

$$\lambda^2\phi = -\det\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ Re\phi_1 + iIm\phi_1 & Re\phi_2 + iIm\phi_2 & Re\phi_3 + iIm\phi_3 \\ Im\phi_1 & Im\phi_2 & Im\phi_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\textbf{(9)}\ \lambda^2\phi = -\det\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ Im\phi_1 & Im\phi_2 & Im\phi_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\det\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ Im\phi_1 & Im\phi_2 & Im\phi_3 \end{bmatrix} = c\lambda^2\phi$$

onde $c \in \{-1, 1\}$ depende da orientação da superfície.

$$\det\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ Im\phi_1 & Im\phi_2 & Im\phi_3 \end{bmatrix} = Im\phi_1\begin{bmatrix} \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} - Im\phi_2\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_3 \end{bmatrix} + Im\phi_3\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= Im\phi_1 Re\dot\phi_2 Re\phi_3 - Im\phi_1 Im\dot\phi_2 Im\phi_3 - Im\phi_1 Re\phi_2 Re\dot\phi_3 + Im\phi_1 Im\phi_2 Im\dot\phi_3 + \\
&i\left[Im\phi_1 Re\dot\phi_2 Im\phi_3 + Im\phi_1 Im\dot\phi_2 Re\phi_3 - Im\phi_1 Re\phi_2 Im\dot\phi_3 - Im\phi_1 Im\phi_2 Re\dot\phi_3\right] - \\
&Re\dot\phi_1 Im\phi_2 Re\phi_3 + Im\dot\phi_1 Im\phi_2 Im\phi_3 + Re\phi_1 Im\phi_2 Re\dot\phi_3 - Im\phi_1 Im\phi_2 Im\dot\phi_3 - \\
&i\left[Re\dot\phi_1 Im\phi_2 Im\phi_3 + Im\dot\phi_1 Im\phi_2 Re\phi_3 - Re\phi_1 Im\phi_2 Im\dot\phi_3 - Im\phi_1 Im\phi_2 Re\dot\phi_3\right] + \\
&Re\dot\phi_1 Re\phi_2 Im\phi_3 - Im\dot\phi_1 Im\phi_2 Im\phi_3 - Re\phi_1 Re\dot\phi_2 Im\phi_3 + Im\phi_1 Im\dot\phi_2 Im\phi_3 + \\
&i\left[Re\dot\phi_1 Im\phi_2 Im\phi_3 + Im\dot\phi_1 Re\phi_2 Im\phi_3 - Re\phi_1 Im\dot\phi_2 Im\phi_3 - Im\phi_1 Re\dot\phi_2 Im\phi_3\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Im\phi_1 Re\dot\phi_2 Re\phi_3 - Im\phi_1 Re\phi_2 Re\dot\phi_3 + i\left[Im\phi_1 Im\dot\phi_2 Re\phi_3 - Im\phi_1 Re\phi_2 Im\dot\phi_3\right] - \\
&Re\dot\phi_1 Im\phi_2 Re\phi_3 + Re\phi_1 Im\phi_2 Re\dot\phi_3 + i\left[-Im\dot\phi_1 Im\phi_2 Re\phi_3 + Re\phi_1 Im\phi_2 Im\dot\phi_3\right] + \\
&Re\dot\phi_1 Re\phi_2 Im\phi_3 - Re\phi_1 Re\dot\phi_2 Im\phi_3 + i\left[Im\dot\phi_1 Re\phi_2 Im\phi_3 - Re\phi_1 Im\dot\phi_2 Im\phi_3\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Im\phi_1 Re\dot\phi_2 Re\phi_3 - Im\phi_1 Re\phi_2 Re\dot\phi_3 - Re\dot\phi_1 Im\phi_2 Re\phi_3 + Re\phi_1 Im\phi_2 Re\dot\phi_3 + \\
&Re\dot\phi_1 Re\phi_2 Im\phi_3 - Re\phi_1 Re\dot\phi_2 Im\phi_3 + i[Im\phi_1 Im\dot\phi_2 Re\phi_3 - Im\phi_1 Re\phi_2 Im\dot\phi_3 - \\
&- Im\dot\phi_1 Im\phi_2 Re\phi_3 + Re\phi_1 Im\phi_2 Im\dot\phi_3 + Im\dot\phi_1 Re\phi_2 Im\phi_3 - Re\phi_1 Im\dot\phi_2 Im\phi_3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle - i \langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle \\
&= \langle X_u \wedge X_v, X_{uu} - iX_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \tfrac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}, X_{uu} - iX_{uv} \right\rangle |X_u \wedge X_v| \\
&= \langle N, X_{uu} - iX_{uv} \rangle \lambda^2 \\
&= \phi\lambda^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcc}
\phi_1 = \frac{1}{2} f\left(1 - g^2\right) & & \dot\phi_1 = \frac{\dot f}{2} - \frac{\dot f g^2}{2} - fg\dot g \\
\phi_2 = \frac{i}{2} f\left(1 + g^2\right) & \Rightarrow & \dot\phi_2 = i\frac{\dot f}{2} + i\frac{\dot f g^2}{2} + ifg\dot g \\
\phi_3 = fg & & \dot\phi_3 = \dot f g + f\dot g
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot\phi_1 & \dot\phi_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot f}{2} - \frac{\dot f g^2}{2} - fg\dot g & i\frac{\dot f}{2} + i\frac{\dot f g^2}{2} + ifg\dot g \\ \frac{1}{2} f\left(1 - g^2\right) & \frac{i}{2} f\left(1 + g^2\right) \end{bmatrix} = -if\dot g\phi_3
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot\phi_2 & \dot\phi_3 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\frac{\dot f}{2} + i\frac{\dot f g^2}{2} + ifg\dot g & \dot f g + f\dot g \\ \frac{i}{2} f\left(1 + g^2\right) & fg \end{bmatrix} = -if\dot g\phi_1
$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{f}}{2} - \frac{\dot{f}g^2}{2} - fg\dot{g} & \dot{f}g + f\dot{g} \\ \frac{1}{2}f\left(1 - g^2\right) & fg \end{bmatrix} = +if\dot{g}\phi_2$$

$$\det \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ Im\phi_1 & Im\phi_2 & Im\phi_3 \end{bmatrix} = Im\phi_1 \begin{bmatrix} \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} - Im\phi_2 \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_3 \end{bmatrix} + Im\phi_3 \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$= -if\dot{g}\phi_1 Im\phi_1 - if\dot{g}\phi_2 Im\phi_2 - if\dot{g}\phi_3 Im\phi_3$$

$$= -f\dot{g}\left(i\phi_1 Im\phi_1 + i\phi_2 Im\phi_2 + i\phi_3 Im\phi_3\right)$$

$$= -f\dot{g}\left(iRe\phi_1 Im\phi_1 - Im\phi_1^2 + iRe\phi_2 Im\phi_2 - Im\phi_2^2 + iRe\phi_3 Im\phi_3 - Im\phi_3^2\right)$$

$$= -f\dot{g}\left(i[Re\phi_1 Im\phi_1 + Re\phi_2 Im\phi_2 + Re\phi_3 Im\phi_3] - \left(Im\phi_1^2 + Im\phi_2^2 + Im\phi_3^2\right)\right)$$

temos que $\langle X_u, X_v \rangle = F = 0$**, isto é,**

$$\langle X_u, X_v \rangle = Re\phi_1 Im\phi_1 + Re\phi_2 Im\phi_2 + Re\phi_3 Im\phi_3 = 0$$

e também o parametro isotermico $\lambda^2 = |X_u|^2 = |X_v|^2 = \langle X_v, X_v \rangle = Im\phi_1^2 + Im\phi_2^2 + Im\phi_3^2$

Portanto,

$$\det \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dot{\phi}_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ Im\phi_1 & Im\phi_2 & Im\phi_3 \end{bmatrix} = -f\dot{g}(-|X_v|^2) = f\dot{g}\lambda^2$$

como,

$$\det \begin{bmatrix} \phi_{1u} & \phi_{2u} & \phi_{3u} \\ Re\phi_1 & Re\phi_2 & Re\phi_3 \\ -Im\phi_1 & -Im\phi_2 & -Im\phi_3 \end{bmatrix} = \phi\lambda^2$$

então,

$$\phi = f\dot{g}$$

4.2.8 Exemplos

(1.a) Para cada inteiro positivo n, existem imersões mínimas com um fim elementar completo de índice $\frac{n}{2}$.

Seja $f(w) = 1$ e $g(w) = \frac{1}{w}$ definidas em $\mathbb{C} - \{0\}$, temos que f e g so analíticas em $\mathbb{C} - \{0\}$ e $Re \int_\gamma \phi_k(w)dw = 0$ $k = 1, 2e3$ para qualquer $\gamma \subset \mathbb{C} - \{0\}$.

De fato, seja;

$$\phi_1(w) = \frac{1}{2} f(w)\left(1 - g^2(w)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2w^2}$$
$$\phi_2(w) = \frac{i}{2} f(w)\left(1 + g^2(w)\right) = \frac{i}{2} - \frac{i}{2w^2}$$
$$\phi_3(w) = f(w)\, g(w) = \frac{1}{w}$$

$$\int_\gamma \phi_1(w)dw = \int_{\gamma(t)} \frac{1}{2} dw - \int_{\gamma(t)} \frac{1}{2w^2} dw = 0,$$
$$\int_\gamma \phi_2(w)dw = \int_{\gamma(t)} \frac{i}{2} dw - \int_{\gamma(t)} \frac{i}{2w^2} dw = 0,$$
$$\int_\gamma \phi_3(w)dw = \int_{\gamma(t)} \frac{1}{w} dw = 2\pi i,$$

então $Re \int_\gamma \phi_k(w)dw = 0, k = 1, 2, 3.$

O catenoide tem um fim de ordem 2, visto que podemos escrever ele usando a representação de Weierstrass com $f(w) = 1$ e $g(w) = \frac{1}{w}$ em $\mathbb{C} - \{0\}$, pois f e g satisfazem as condições da proposição 4.2.1 e podemos usar o corolário 4.2.7, então $\phi(w) = cw^{-2}$.

Falta provar que o fim é completo.

Para provar que o fim elementar é completo, precisamos mostrar que a distância de qualquer ponto em $U_j = \{0 < u^2 + v^2 < \frac{1}{j}, j \in N\}$ até o $(0,0)$ na superfície é infinito, ou seja é equivalente a calcular a integral abaixo.

$$S(t_o) = \int_o^{t_o} \sqrt{E}\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

Então vamos mostrar que a função complexa associada as coordenadas isotérmicas $\phi(w) = cw^{-2}$ tem um fim elementar completo.

$E = \frac{|f|\left(1+|g|^2\right)^2}{4}$, $f(w) = 1$ e $g(w) = \frac{1}{w}$,

então $E = \frac{\left(1+\frac{1}{|w|^2}\right)^2}{4}$

$\gamma(t) = (u(t), v(t)) = (u, mu)$, seja $u(t) = t$ e $v(t) = mt, m \in \mathbb{R}$

então;

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2} = \sqrt{1+m^2}$$

logo;

$$S(t_o) = \int_o^{t_o} \sqrt{E}\, |\dot{\alpha}(t)|\, dt = S(t_o) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \left(1 + \frac{1}{|w|^2}\right) \sqrt{1+m^2} dt$$
$$= \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \left(1 + \frac{1}{t^2(1+m^2)}\right) dt = \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} 1 dt + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2(1+m^2)} \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t^2} dt$$
$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{2} \lim_{\varepsilon \to o} (t)_\varepsilon^{t_o} + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2(1+m^2)} \lim_{\varepsilon \to o} \left(-\frac{1}{t}\right)_\varepsilon^{t_o} = +\infty$$

Então $\phi(w) = cw^{-2}$ tem um fim completo em $(0,0)$.

(1.b) Mais geralmente , para $n \geq 2$ e $n \neq 3$, tome $f(w) = w^{-n}$, $g(w) = w$ em $\mathbb{C} - \{0\}$ e $w_o = 1$.
Vamos verificar as hipóteses do teorema de representação de Weierstrass estão satisfeitas.
$f(w) e g(w)$ são analíticas em $\mathbb{C} - \{0\}$.
Vamos verificar se $Re \int_\gamma \phi_k(w) dw = 0, k = 1, 2, 3.$

$$\phi_1(w) = \frac{1}{2} f(w)\left(1 - g^2(w)\right) = \frac{1}{2w^n}(1 - w^2) = \frac{1}{2w^n} - \frac{1}{2w^{n-2}}$$

$\phi_2(w) = \frac{i}{2} f(w)\left(1 + g^2(w)\right) = \frac{i}{2w^n} - \frac{i}{2w^{n-2}}$

$\phi_3(w) = f(w)\, g(w) = \frac{1}{w^{n-1}}$

$Re \int_\gamma \phi_1(w)\, dw = Re \int_\gamma \left(\frac{1}{2w^n} - \frac{1}{2w^{n-2}}\right) dw = Re\left\{2\pi i \left[res\left(\frac{1}{2w^n}, 0\right) - res\left(\frac{1}{2w^{n-2}}, 0\right)\right]\right\}$
$= 0$ **para qualquer** $n \geq 2$.

$Re \int_\gamma \phi_2(w)\, dw = Re \int_\gamma \left(\frac{i}{2w^n} - \frac{i}{2w^{n-2}}\right) dw = Re\left\{2\pi i \left[res\left(\frac{i}{2w^n}, 0\right) - res\left(\frac{i}{2w^{n-2}}, 0\right)\right]\right\} =$
0, **para** $n \geq 2$ **e** $n \neq 3$.

Para $n = 3$ **definindo** $f(w) = w^{-4}$**e** $g(w) = w^2$, **temos que** $g(w)$ **não tem polo em** $\mathbb{C}$. **Agora vamos provar que** $Re \int_\gamma \phi_k(w)\, dw = 0, k = 1, 2, 3.$

$\phi_1(w) = \frac{1}{2} f(w)\left(1 - g^2(w)\right) = \frac{1}{2w^4}(1 - w^4) = \frac{1}{2w^4} - \frac{1}{2} \Rightarrow Re \int_\gamma \phi_1(w)\, dw =$
$0,$

$\phi_2(w) = \frac{i}{2} f(w)\left(1 + g^2(w)\right) = \frac{i}{2w^4} - \frac{i}{2} \Rightarrow Re \int_\gamma \phi_2(w)\, dw = 0,$

$\phi_3(w) = f(w)\, g(w) = \frac{1}{w^2} \Rightarrow Re \int_\alpha \phi_3(w)\, dw = 0.$

temos por 4.2.7 que $\phi(w) = cf(w)\, \dot{g}(w)$, **então** $\phi(w) = 2cw^{-3}$ **para** $n = 3$.

Voltando para $f(w) = w^{-n}$ **e** $g(w) = w$, **pois precisamos verificar se** $Re \int_\gamma \phi_3(w)\, dw = 0$

$Re \int_\gamma \phi_3(w)\, dw = Re \int_\gamma \frac{1}{w^{n-1}} dw = Re\left[2\pi i Res\left(\frac{1}{w^{n-1}}, 0\right)\right] = 0$,**para qualquer** $n \geq 2$.

Por 4.2.7 $\phi(w) = cw^{-n}$ **e por 3.6 a origem 0 é um fim elementar de índice** $\frac{n}{2}$.

Agora vamos mostrar que $\phi(w) = cw^{-n}$ **com** $n \geq 2$ **tem um fim elementar completo em** $(0, 0)$.

Seja $f(w) = w^{-n}, g(w) = w, E = \frac{|f|^2(1+|g|^2)^2}{4}, \gamma(t) = (u(t), v(t)) = (t, mt), m \in$ $I\!R$ **então**

$$\begin{aligned} S(t_o) &= \lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\sqrt{E}\,|\dot{\gamma}(t)|\,dt = \lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\sqrt{1+m^2}dt \\ &= \frac{\sqrt{1+m^2}}{2}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\left(\frac{1}{t^n(\sqrt{1+m^2})^n}+\frac{1}{t^n(\sqrt{1+m^2})^n}t^2\sqrt{1+m^2}\right)dt \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})^{n-1}}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t^n}dt+\frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})^{n-3}}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t^{n-2}}dt \end{aligned}$$

Se $n = 2$ **temos;**

$$\begin{aligned} S(t_o) &= \frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t^2}dt+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+m^2}\right)\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}1dt \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})}\lim_{\varepsilon\to o}\left(-\frac{1}{t}\right)_\varepsilon^{t_o}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+m^2}\right)\lim_{\varepsilon\to o}(t)_\varepsilon^{t_o} = \\ &= -\frac{1}{2t_o(\sqrt{1+m^2})}+\infty+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+m^2}\right)t_o = +\infty. \end{aligned}$$

Se $n = 3$ **temos,**

$$\begin{aligned} S(t_o) &= \frac{1}{2(1+m^2)}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t^3}dt+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t}dt \\ &= \frac{1}{2(1+m^2)}\lim_{\varepsilon\to o}\left(-\frac{1}{2t^2}\right)_\varepsilon^{t_o}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to o}\ln(t)_\varepsilon^{t_o} = +\infty. \end{aligned}$$

Se $n > 3$, **nós temos**

$$\begin{aligned} S(t_o) &= \frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})^{n-1}}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t^n}dt+\frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})^{n-3}}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t^{n-2}}dt \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})^{n-1}}\lim_{\varepsilon\to o}\left(-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\right)_\varepsilon^{t_o}+\frac{1}{2(\sqrt{1+m^2})^{n-3}}\lim_{\varepsilon\to o}\left(-\frac{1}{(n-3)t^{n-3}}\right)_\varepsilon^{1} \\ &= -\frac{1}{2t_o^{n-1}(n-1)(\sqrt{1+m^2})^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)(\sqrt{1+m^2})^{n-1}}\lim_{\varepsilon\to o}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right)-\frac{1}{2t_o^{n-3}(n-3)(\sqrt{1+m^2})^{n-3}}+ \\ &\quad \frac{1}{2(n-3)(\sqrt{1+m^2})^{n-3}}\lim_{\varepsilon\to o}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-3}}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

também precisamos verificar se $\phi(w) = 2cw^{-3}$ **para** $n = 3$ **tem um fim elementar completo.**

Seja $f(w) = w^{-4}, g(w) = \frac{w^2}{2}, E = \frac{|f|^2(1+|g|^2)^2}{4}, \alpha(t) = (u(t), v(t)) =$

$(t, mt)\,, m \in I\!R$

então

$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1+m^2}$, $\sqrt{E} = \frac{1}{2t^4(1+m^2)^2} + \frac{1}{2}$, e

$S(t_o) = \lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o} \sqrt{E}\,|\dot{\alpha}(t)|\,dt = \lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o} \frac{|f|^2(1+|g|^2)}{2}\sqrt{1+m^2}dt$

$= \lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{2t^4(1+m^2)^2}dt + \lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2(1+m^2)^2}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o}\frac{1}{t^4}dt + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to o}\int_\varepsilon^{t_o} dt$

$= \frac{1}{2(1+m^2)^2}\lim_{\varepsilon\to o}\left(-\frac{1}{3t^3}\right)_\varepsilon^{t_o} + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to o}(t)_\varepsilon^{t_o} = +\infty.$

(1.c) Para $n \geq 1$ e $n \neq 4$ tome $f(w) = w^{-(n+1)}$ e $g(w) = \lambda w^2$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\lambda \in I\!R - \{0\}$ para $n = 2$.
Vamos verificar se as condições do teorema de representação de Weierstrass estão satisfeitas.
$f(w)$ e $g(w)$ são analíticas em $\mathbb{C} - \{0\}$.

Vamos verificar se $Re\int_\gamma \phi_k(w)dw = 0, k = 1,2,3.$

$\phi_1(w) = \frac{1}{2}f(w)\left(1 - g^2(w)\right) = \frac{1}{2w^{n+1}} - \frac{\lambda^2}{2w^{n-3}},$

$\phi_2(w) = \frac{i}{2}f(w)\left(1 + g^2(w)\right) = \frac{i}{2w^{n+1}} + \frac{i\lambda^2}{2w^{n-3}},$

$\phi_3(w) = f(w)\,g(w) = \frac{\lambda}{w^{n-1}}.$

$\int_\gamma \phi_1(w)dw = \int_{\gamma(t)} \frac{1}{2w^{n+1}}dw - \int_{\gamma(t)} \frac{\lambda^2}{2w^{n-3}}dw = \begin{cases} 0, & n \neq 4 \\ \lambda^2\pi i, & n = 4 \end{cases},$

$\int_\gamma \phi_2(w)dw = \int_{\gamma(t)} \frac{i}{2w^{k+1}}dw - \int_{\gamma(t)} \frac{i\lambda^2}{2w^{k-3}}dw = \begin{cases} 0, & n \neq 4 \\ -\lambda^2\pi, & n = 4 \end{cases},$

$\int_\gamma \phi_3(w)dw = \int_{\gamma(t)} \frac{\lambda}{w^{k-1}}dw = \begin{cases} 0, & n \neq 2 \\ 2\lambda\pi i, & n = 2 \end{cases},$

então $Re \int_\gamma \phi_k(w)\,dw = 0$,para $k = 1, 2$, e 3.

Por 4.2.7 $\phi(w) = 2\lambda c w^{-n}$ **e por 3.6 a origem** 0 **é um fim elementar de índice** $\frac{n}{2}$.

Agora vamos mostrar que $\phi(w) = 2\lambda c w^{-n}$ **com** $n \geq 1$ **e** $n \neq 4$ **tem um fim elementar completo em** $(0,0)$.

Seja $f(w) = w^{-(k+1)}, g(w) = \lambda w^2, E = \frac{|f|^2\left(1+|g|^2\right)^2}{4}, \gamma(t) = (u(t), v(t)) = (t, mt)$ **então**

$$S(t_o) = \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \sqrt{E}\, |\dot{\alpha}(t)|\, dt = \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{|f|\left(1+|g|^2\right)}{2} \sqrt{1+m^2}dt$$
$$= \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \left(\frac{1}{t^{k+1}\left(\sqrt{1+m^2}\right)^{k+1}} + \frac{|\lambda|^2}{t^{k+1}\left(\sqrt{1+m^2}\right)^{k+1}} t^2\left(1+m^2\right)\right) dt$$
$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)^k} \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t^{k+1}}dt + \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)^{k-1}} \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t^{k-1}}dt$$

Se $n = 1$ temos;

$$S(t_o) = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)} \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t^2}dt + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} 1dt$$
$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)} \lim_{\varepsilon\to o} \left(-\frac{1}{t}\right)_\varepsilon^{t_o} + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to o} (t)_\varepsilon^{t_o} =$$
$$= -\frac{1}{2t_o\left(\sqrt{1+m^2}\right)} + \infty + \frac{1}{2}t_o = +\infty.$$

Se $n = 2$ temos;

$$S(t_o) = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)^2} \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t^3}dt + \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)} \lim_{\varepsilon\to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t}dt$$
$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)^2} \lim_{\varepsilon\to o} \left(-\frac{1}{2t^2}\right)_\varepsilon^{t_o} + \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)} \lim_{\varepsilon\to o} (\ln(t))_\varepsilon^{t_o} =$$
$$= -\frac{1}{2t_o\left(\sqrt{1+m^2}\right)^2} + \infty + \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)} \ln(t_o) + \infty = +\infty.$$

de maneira análoga para $n = 3$ **e** $n \geq 5$ **temos** $S(t_o) = +\infty$.

Para $n = 4$, **escolha** $f(w) = w^{-6}$ **e** $g(w) = \lambda w^3$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Vamos verificar se as condições do teorema de representação de Weierstrass estão satisfeitas.
$f(w)$ e $g(w)$ são analíticas em $\mathbb{C} - \{0\}$.
Vamos verificar se $Re \int_\gamma \phi_k(w)dw = 0, k = 1, 2, 3.$

$$\begin{aligned}
\phi_1(w) &= \tfrac{1}{2} f(w)\left(1 - g^2(w)\right) = \tfrac{1}{2w^6} - \lambda^2, \\
\phi_2(w) &= \tfrac{i}{2} f(w)\left(1 + g^2(w)\right) = \tfrac{i}{2w^6} + i\lambda^2, \\
\phi_3(w) &= f(w)\, g(w) = \tfrac{\lambda}{w^3}.
\end{aligned}$$

então $Re \int_\gamma \phi_k(w)\, dw = 0$,para $k = 1, 2,$ e 3.
Por 4.2.7 $\phi(w) = 3\lambda c w^{-4}$ e por 3.6 a origem 0 é um fim elementar de índice 2.

Agora vamos mostrar que $\phi(w) = 3\lambda c w^{-4}$ com $n = 4$ tem um fim elementar completo em $(0, 0)$.
Seja $f(w) = w^{-6}, g(w) = \lambda w^3, E = \frac{|f|^2\left(1+|g|^2\right)^2}{4}, \gamma(t) = (u(t), v(t)) = (t, mt)$ então

$$\begin{aligned}
S(t_o) &= \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \sqrt{E}\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{|f|\left(1+|g|^2\right)}{2} \sqrt{1+m^2}dt, \\
&= \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \left(\frac{1}{t^6(1+m^2)^3} + \frac{|\lambda|^2}{t^6(1+m^2)^3} t^3 \left(1+m^2\right)^{\frac{3}{2}} \right) dt, \\
&= \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)^5} \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t^6} dt + \frac{|\lambda|^2}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)} \lim_{\varepsilon \to o} \int_\varepsilon^{t_o} \frac{1}{t^3} dt, \\
&= \frac{1}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)^5} \lim_{\varepsilon \to o} \left(-\frac{1}{5t^5}\right)_\varepsilon^{t_o} + \frac{|\lambda|^2}{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)} \lim_{\varepsilon \to o} \left(-\frac{1}{2t^2}\right)_\varepsilon^{t_o}, \\
&= -\frac{1}{10 t_o^5 \left(\sqrt{1+m^2}\right)^5} + \infty - \frac{|\lambda|^2}{4\left(\sqrt{1+m^2}\right) t_o^2} + \infty = +\infty.
\end{aligned}$$

(2) Imersões mínimas com fins elementares não completos de índice $\frac{n}{2}$.
Tome para $n \neq 2$, $f(w) = \frac{w e^{\lambda w^{-n}}}{n}$, $g(w) = e^{-\lambda w^{-n}}$ e $w_o = 1$, onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. para $n = 1$, $f(w) = w e^{\lambda w^{-1}}$, $g(w) = e^{-\lambda w^{-1}}$ e $\lambda = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Temos que g e f são analíticas em $\mathbb{C}-\{0\}$, e se $Re\int_{\gamma}\phi_k(w)\,dw=0, k=1,2$ e 3

$$\phi_1(w)=\tfrac{1}{2}f(w)\left(1-g^2(w)\right)=\tfrac{we^{\lambda w^{-n}}}{2n}(1-e^{-2\lambda w^{-n}})=\tfrac{we^{\lambda w^{-n}}}{2n}-\tfrac{we^{-\lambda w^{-n}}}{2n},$$
$$\phi_2(w)=\tfrac{i}{2}f(w)\left(1+g^2(w)\right)=\tfrac{iwe^{\lambda w^{-n}}}{2n}+\tfrac{iwe^{-\lambda w^{-n}}}{2n},$$
$$\phi_3(w)=f(w)\,g(w)=\tfrac{w}{n}.$$

claramente $Re\int_{\gamma}\phi_3(w)\,dw=0,$

(I) $\int_{|w|=1}we^{\lambda w^{-n}}dw=i\int_o^{2\pi}e^{2i\theta}e^{\lambda e^{-in\theta}}d\theta=-i\int_o^{-2\pi}e^{-2i\theta}e^{\lambda e^{in\theta}}d\theta=\int_{|w|=1}w^{-3}e^{\lambda w^n}dw$
$=-\frac{2\pi i}{2!}I\left(|w|=1,0\right)h^{(2)}(0)$, com $h(z)=e^{\lambda w^n}$, logo

$$h^{(2)}(0)=\begin{cases}\lambda^2, n=1\\ 2\lambda, n=2\\ 0, n\geq 3\end{cases},$$

portanto

$$\int_{|w|=1}\frac{we^{\lambda w^{-n}}}{2n}dw=\begin{cases}-\frac{i\pi\lambda^2}{2}, n=1\\ -\frac{i\pi\lambda}{2}, n=2\\ 0, n\geq 3\end{cases}$$

(II) $\int_{|w|=1}we^{-\lambda w^{-n}}dw=i\int_o^{2\pi}e^{2i\theta}e^{-\lambda e^{-in\theta}}d\theta=-i\int_o^{-2\pi}e^{-2i\theta}e^{-\lambda e^{in\theta}}d\theta=\int_{|w|=1}w^{-3}e^{-\lambda w^n}dw$
$=-\frac{2\pi i}{2!}I\left(|w|=1,0\right)F^{(2)}(0)$, com $F(z)=e^{\lambda w^n}$, logo

$$F^{(2)}(0)=\begin{cases}\lambda^2, n=1\\ -2\lambda, n=2\\ 0, n\geq 3\end{cases},$$

portanto

$$\int_{|w|=1}\frac{we^{-\lambda w^{-n}}}{2n}dw=\begin{cases}-\frac{i\pi\lambda^2}{2}, n=1\\ \frac{i\pi\lambda}{2}, n=2\\ 0, n\geq 3\end{cases}$$

$$\int_{\alpha}\phi_1(w)\,dw==\begin{cases}0, n=1\\ -i\lambda\pi, n=2\\ 0, n\geq 3\end{cases},$$

$Re\int_{\gamma}\phi_1(w)\,dw=0$, para qualquer $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Vamos provar que $Re\int_{\gamma}\phi_2(w)\,dw = 0$

(III) $\int_{|w|=1} iwe^{\lambda w^{-n}}dw = -\int_o^{2\pi} e^{2i\theta}e^{\lambda e^{-in\theta}}d\theta = \int_o^{-2\pi} e^{-2i\theta}e^{\lambda e^{in\theta}}d\theta = -i\int_{|w|=1} w^{-3}e^{\lambda w^n}dw$
$= -\frac{2\pi i}{2!}iI(|w|=1,0)\,h^{(2)}(0) = -\pi I(|w|=1,0)\,h^{(2)}(0)$, com $h(z) = e^{\lambda w^n}$, logo

$$h^{(2)}(0) = \begin{cases} \lambda^2, n=1 \\ 2\lambda, n=2 \\ 0, n\geq 3 \end{cases},$$

portanto

$$\int_{|w|=1}\frac{iwe^{\lambda w^{-n}}}{2n}dw = \begin{cases} \frac{\pi\lambda^2}{2}, n=1 \\ \frac{\pi\lambda}{2}, n=2 \\ 0, n\geq 3 \end{cases}$$

(IV) $\int_{|w|=1} iwe^{-\lambda w^{-n}}dw = -\int_o^{2\pi} e^{2i\theta}e^{-\lambda e^{-in\theta}}d\theta = \int_o^{-2\pi} e^{-2i\theta}e^{-\lambda e^{in\theta}}d\theta = -i\int_{|w|=1} w^{-3}e^{-\lambda w^n}dw$
$= -\frac{2\pi i}{2!}iI(|w|=1,0)\,F^{(2)}(0) = \pi I(|w|=1,0)\,F^{(2)}(0)$, com $F(z) = e^{\lambda w^n}$, logo

$$F^{(2)}(0) = \begin{cases} \lambda^2, n=1 \\ -2\lambda, n=2 \\ 0, n\geq 3 \end{cases},$$

portanto

$$\int_{|w|=1}\frac{we^{-\lambda w^{-n}}}{2n}dw = \begin{cases} \frac{\pi\lambda^2}{2}, n=1 \\ -\frac{\pi\lambda}{2}, n=2 \\ 0, n\geq 3 \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}\phi_2(w)\,dw = \begin{cases} \lambda^2\pi, n=1 \\ 0, n=2 \\ 0, n\geq 3 \end{cases},$$

$$Re\int_{\gamma}\phi_2(w)\,dw = \begin{cases} 0, \lambda = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, n=1, \\ 0, n\geq 2 \end{cases}$$

$Re\int_{\gamma}\phi_3(w)\,dw = Re\left[2\pi i Res(\phi_3(w),0)\right] = 0$ para qualquer n.

Como temos que $f(w)$ e $g(w)$ é analítica em $\mathbb{C}-\{0\}$ e $Re\int_{\gamma}\phi_k(w)\,dw = 0, k = 1,2$ e 3, então podemos usar o corolário 4.2.7 e temos que a função complexa associada ao parâmentro isotérmico é $\phi(w) =$

$cf(w)\,\dot{g}(w) = cw^{-n}$. **Agora vamos provar que este fim não é completo ao longo da curva** $\alpha(t) = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^{\frac{1}{n}} t,\ t \in (0, \varepsilon)$.

Seja $\gamma(t) = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^{\frac{1}{n}} t,\ t \in (0,\varepsilon) = I$.

$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \left|\left(\frac{\lambda}{i}\right)^{\frac{1}{n}}\right| = \left|\frac{\lambda}{i}\right|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|^{\frac{1}{n}}$.

Seja $f(w) = \frac{we^{\lambda w^{-n}}}{n}$,

logo $|f(\gamma(t))| = \frac{|\alpha(t)|\left|e^{\lambda\alpha(t)^{-n}}\right|}{n} = \frac{|\lambda|^{\frac{1}{n}}t}{n}$.

Seja $g(w) = e^{-\lambda w^{-n}}$,

logo $|g(\gamma(t))|^2 = \left|e^{-\lambda\gamma(t)^{-n}}\right|^2 = \left|e^{-\lambda\left(\frac{\lambda}{i}\right)^{-1}t^{-n}}\right|^2 = \left|e^{-it^{-n}}\right|^2 = 1$,

então;

$S(t_o) = \int_{\gamma(t)} \sqrt{E}\,|\dot{\gamma}(t)|\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\gamma(t_o)} \frac{|\lambda|^{\frac{1}{n}}t}{n}dt = \frac{|\lambda|^{\frac{1}{n}}}{n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\gamma(t_o)} t\,dt = \frac{|\lambda|^{\frac{1}{n}}}{n}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{t^2}{2}\right)_{\varepsilon}^{\gamma(t_o)} =$

$= \frac{|\lambda|^{\frac{1}{n}}\gamma(t_o)^2}{2n}$.

(3) Para cada inteiro positivo n **existe imersões mínimas com um ponto planar de índice** $-\frac{n}{2}$.

De fato, tome $f(w) = 1$ **e** $g(w) = \frac{w^{n+1}}{n+1}$, $w_o = 0$. **Temos que** $f(w)$ **e** $g(w)$ **são analíticas em** $\mathbb{C}$ **e** $Re\int_\gamma \phi_k(w)\,dw = 0$ **para cada caminho fechado** $\gamma(t)$ **em** $\mathbb{C}$. **Vamos mostrar que** $Re\int_\gamma \phi_k(w)\,dw = 0$, $k = 1, 2$ **e** 3.

$\phi_1(w) = \frac{1}{2}f(w)\left(1 - g^2(w)\right) = \frac{1}{2} - \frac{w^{2n+2}}{(n+1)^2}$,

$\phi_2(w) = \frac{i}{2}f(w)\left(1 + g^2(w)\right) = \frac{i}{2} - \frac{iw^{2n+2}}{(n+1)^2}$,

$\phi_3(w) = f(w)\,g(w) = \frac{w^{n+1}}{n+1}$.

como $\phi_k(w), k = 1, 2$ **e** 3 **são analíticas em** $\mathbb{C}$ **temos que** $Re\int_\gamma \phi_k(w)\,dw = 0$, **então podemos usar 4.2.7, logo** $\phi(w) = cw^n$ **e por 4.2 o zero é um ponto planar de** X **de ínidice** $-\frac{n}{2}$.

4.2.9 Observação

Segue uma outra prova para a proposição 4.1.3.

Prova: Tome $f(w) = \frac{we^{\lambda w^n}}{n}$ e $g(w) = e^{-\lambda w^n}$, como f e g analíticas em $\mathbb{C} - \{0\}$ e também temos $Re \int_\gamma \phi_k(w)\, dw = 0$, podemos aplicar o corolário 4.2.7 e

$\phi(w) = cf(w)\,\dot{g}(w) = -c\lambda w^n$, o índice do ponto planar é igual a $-\frac{n}{2}$.

Bibliografia

[1] V. ARNOLD, Chapitres supplementaires dela théorie des équations diffentielles ordinaires, "Mir",Moscow(1980).

[2] M. P. do CARMO, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc.(1976).

[3] U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, A. KŰSTER and O. WOHLRAB: Minimal Surfaces I, Springer-Verlag(1992).

[4] C. GUTIÉRREZ and J. SOTOMAYOR, Principal lines on surfaces immersed with constant mean curvature,Trans. Amer. Math. Soc. vol.293 751-766(1986).

[5] D. A. HOFFMAN, Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature, J. Differential Geom. 8(1973), 161-176.

[6] K. HOFFMAN and R. KUNZE, Álgebra Linear, Polígono-São Paulo(1970).

[7] H. HOPF, Lectures on differential geometry in the large, Notes by J. M. Gray, Stanford Univ. 1954. Reprinted, in Lecture Notes in Math, vol.1000, Springer-verlag.

[8] J. A.JENKINS, On the local structure of the trajectories of a quadratic differential,Proc. Amer. Math. Soc. vol.5, 357-362(1954).

[9] R.OSSERMAN, a Survey of minimal sufaces, Van Nostrand Reinhold, New York,(1969).

[10] E. PICARD, Traité d analyse, Vol.3, Gauthier-Villars, Paris(1908).

[11] M. SPIVAK, A comprehensive intoduction to differencial geometry, V.3 e V.5, Publish or Perish, Berkeley, Calif.,(1979).

[12] K. TENENBLAT, Introdução à Geometria Diferencial. Editora Universidade de Brasília-Brasília(1990).