



1150033871



IMECC

T/UNICAMP R638a

ALGUNS RESULTADOS SOBRE UMA GENERALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE FLUXO BIOCONVECTIVO

María Drina Rojas Medar

Orientador

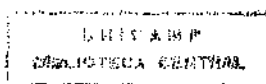
Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (UNICAMP), como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

UNICAMP - Campinas

Janeiro - 1998

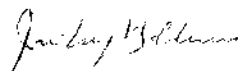
I. M. E. C. C.
B I B L I O T E C A



ALGUNS RESULTADOS SOBRE UMA GENERALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE FLUXO BIOCONVECTIVO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por María Drina Rojas Medar e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de março de 1998



Prof. Dr.: José Luiz Boldrini
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTOR em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Rojas Medar, María Drina

R638a Alguns resultados sobre uma generalização das equações de
fluxo bioconvectivo / María Drina Rojas Medar -- Campinas, [S.P.
:s.n.], 1998.

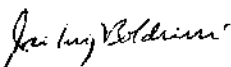
Orientador : José Luiz Boldrini

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

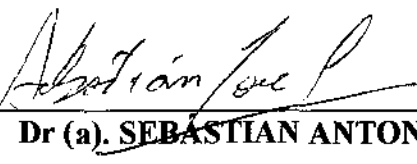
1. Galerkin, Métodos de. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3.
Equações diferenciais parciais. 4. Fluidos. I. Boldrini, José Luiz. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 17 de março de 1998

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



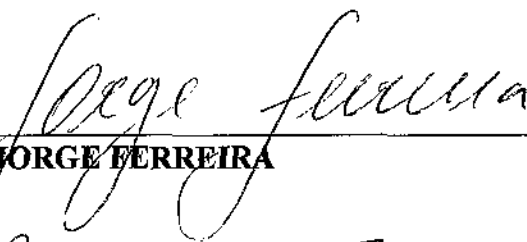
Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof (a). Dr (a). SEBASTIAN ANTONIO LORCA PIZARRO



Prof (a). Dr (a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA



Prof (a). Dr (a). JORGE FERREIRA



Prof (a). Dr (a). LUCIANO BARBANTI

Agradecimentos

Ao professor Dr. José Luiz Boldrini, pela competente orientação e incentivo.

A Capes e à Universidade Estadual de Campinas, por terem possibilitado este curso de pós - graduação.

A Cidinha e Fátima, pelo constante auxílio em problemas burocráticos.

A Flávio pela sua paciência e dedicação na digitação.

Aos colegas e amigos que contribuíram de alguma forma neste doutoramento, entre eles especialmente o Professor Sebastián Lorca e Pedro Danizete Damázio.

Aos meus pais e irmãos, pelo constante apoio.

A José Luis, Marko Petar e Juninho pelo amor incondicional e incentivo.

Dedicatória

Este trabalho é dedicado a meu esposo José Luis e meus filhos Marko e Juninho, pelos momentos de renúncia, compreensão e incentivo.

Conteúdo

Introdução	1
Capítulo 1: Preliminares	06
Capítulo 2: O Problema Estacionário	15
2.1 Introdução	15
2.2 Existência de Soluções Fracas	16
2.3 Existência de Soluções Fortes	25
2.4 Unicidade de Soluções	29
Capítulo 3: O Problema de Evolução	32
3.1 Introdução	32
3.2 Existência de Soluções Fracas	33
3.3 Existência Local de Soluções Fortes	42
3.4 Unicidade de Soluções	57

Capítulo 4: Existência Global de Soluções Fortes	59
4.1 Introdução	59
4.2 Existência Global	59
Bibliografia	68

Introdução

Neste trabalho, mostraremos resultados de existência e unicidade da solução para um sistema de equações diferenciais parciais utilizadas para descrever o movimento de um fluido viscoso e incompressível no qual há cultura de microorganismos que têm a tendência de nadar na direção vertical (estamos considerando o caso de um domínio onde o fluxo está submetido à ação de forças gravitacionais). Neste caso, podem ser gerados gradientes de concentração de microorganismos na cultura que podem ocasionar convecção no fluido (este processo é chamado de bioconvecção).

Levandowsky e outros [7] e Moribe [14] discutem a fundamentação biológica e física para tais equações e também apresentam algumas descrições qualitativas baseadas em argumentos intuitivos.

Em termos mais precisos, as equações a serem estudadas neste trabalho, e que chamaremos de *Equações do Fluxo Bioconvectivo Generalizadas*, são as seguintes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2 \operatorname{div}(\mu(c)D(u)) + u \cdot \nabla u + \nabla p = -g(1 + \rho c)\chi + f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \theta \Delta c + u \cdot \nabla c + U \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \quad \text{em } (0, T) \times \Omega. \quad (0.1)$$

Aqui, são utilizadas as seguintes notações:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado e representa a região de escoamento do fluido. Denota-se $\partial\Omega$ a fronteira de Ω .

- $u(x, t) \in \mathbb{R}^3$ denota a velocidade do fluido em um ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, e instante $t \in [0, T]$, onde $0 < T \leq +\infty$.
- $p(x, t)$ é a pressão hidrostática no ponto x e instante t .
- $c(x, t)$ representa a concentração dos microorganismos no ponto $x \in \Omega$ e instante t .
- $\mu(\cdot) > 0$ é a viscosidade do fluido.
- θ é a constante que indica a taxa de difusão dos microorganismos.
- g é a intensidade da aceleração da gravidade (suposta constante).
- f representa uma força externa dada.
- χ é um vetor unitário na direção vertical, isto é, $\chi = (0, 0, 1)^t$. (Ou seja, o sistema de coordenadas é colocado de tal forma que as forças gravitacionais agem na vertical).
- U denota a velocidade média de natação dos microorganismos, na direção vertical.
- ρ é uma constante positiva, dada por $\rho = \frac{\rho_0}{\rho_m} - 1$, onde ρ_0 e ρ_m são a densidade de um organismo e a densidade do fluido de cultura, respectivamente.

Nas equações acima, ∇ , Δ e div representam os operadores gradiente, Laplaciano e divergente, respectivamente; $u \cdot \nabla u$ indica o operador de convecção, cuja componente i -ésima em coordenadas cartesianas é dada por $(u \cdot \nabla u)_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

A expressão

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$$

representa o tensor taxa de deformação.

Fazendo $c = (g\rho)^{-1}m$ e $p = q - gx_3$, $\mu(c) = \nu(m)$, (0.1) se reescreve como

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2 \operatorname{div}(\nu(m)D(u)) + u \cdot \nabla u + \nabla q = -m\chi + f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \theta \Delta m + u \cdot \nabla m + U \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \quad \text{em } (0, T) \times \Omega. \quad (0.2)$$

Neste trabalho queremos considerar o fluxo bioconvectivo em uma região limitada, porém com o bordo não completamente rígido. Melhor dizendo, queremos que uma parte da fronteira seja aberta (como um vaso sem tampa, por exemplo). Esta situação pode ser modelada matematicamente como se segue:

O sistema de equações (0.2) será considerado juntamente com as condições seguintes. Seja $\partial\Omega = S \cup \Gamma$, onde S é a parte rígida da fronteira e Γ é a parte livre da fronteira (neste trabalho estaremos supondo de S e Γ são independentes do tempo). Denotemos por $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ o vetor normal unitário exterior no ponto $x \in \partial\Omega$ e $\frac{\partial}{\partial n}$ a derivada normal sobre $\partial\Omega$. Exigimos então as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sobre } (0, T) \times S, \\ u \cdot n = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ \nu(m)[D(u)n - n \cdot (D(u)n)n] = b_1 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ \theta \frac{\partial m}{\partial n} - U m n_3 = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega. \\ u(0) = u_0, \quad m(0) = m_0. & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (0.3)$$

As condições (0.3b) e (0.3c) são as chamadas condições de escorregamento (*skip conditions*) para a velocidade do fluido e são frequentemente utilizadas para modelar condições de fronteira livre em fluidos (veja Joseph [4]). Em particular, (0.3c) corresponde a atribuir à componente tangencial do vetor de tensão um valor determinado $b_1(x)$ satisfazendo $b_1(x) \cdot n(x) = 0$. Um caso especial, porém muito frequente e importante, é aquele em que $b_1(x)$ é identicamente nulo.

Observamos também que (0.1c) correspondente à equação de conservação $\frac{d}{dt}c + \operatorname{div} J = 0$, $x \in \Omega$, $t > 0$, com $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$ e o fluxo dos microorganismos dado por $J = -\theta \nabla c + U c \chi$. Assim, (0.3d) estabelece a condição de fluxo nulo em cada ponto $x \in \partial\Omega$.

As equações clássicas de Fluxo Bioconvectivo correspondem ao caso particular de (0.1) em que a viscosidade μ é constante (no decorrer de este trabalho chamaremos este caso especial de *Equações Clássicas de Bioconvecção*). Kan-On, Narukawa e Teramoto [5] fazem uma análise matemática do caso clássico, porém com condições de fronteira do tipo Dirichlet para a velocidade, o que exclui o caso de vasos abertos. Eles obtêm resultados de existência de soluções, tanto para o problema estacionário quanto para o problema de evolução.

Neste trabalho estaremos interessados no caso generalizado, e bastante mais não linear, no qual a concentração de microorganismos afeta a viscosidade do fluido. Neste caso, o sistema de equações (0.1)(ou (0.2)), assim como no caso das chamadas Equações de Boussinesq Generalizadas, Lorca e Boldrini [9], [11], apresenta um grau maior de dificuldade, quando comparado ao caso clássico (μ constante). Isto é devido, em parte, aos termos não lineares que aparecem no operador $\operatorname{div}(\nu(m)D(u))$.

Quanto às condições de fronteira que aparecem em (0.3), elas se apresentam nos artigos de Solonnikov e Scadilov [20], e também em Mulone e Salemi [16], em um contexto de equações clássicas de Navier-Stokes (isto é viscosidade constante).

Dessa forma, a obtenção dos nossos resultados dependerá da adaptação e combinação das técnicas usadas em Kan-On, Narukawa e Teramoto [5], Lorca e Boldrini [9],[11], Solonnikov e Scadilov [20], e Mulone e Salemi [16].

Enfim, a organização do trabalho se dará na seguinte forma:

No Capítulo 1 (Preliminares) fixaremos a notação a ser empregada e recordaremos resultados conhecidos que serão posteriormente utilizados.

No Capítulo 2 estudaremos a situação estacionária, isto é, o caso em que as

variáveis envolvidas independem do tempo.

No Capítulo 3 estudaremos o problema de evolução. Obteremos resultados de existência de soluções fracas e também mostraremos um resultado de existência de soluções em um sentido forte, locais no tempo, bem como a unicidade para tais soluções.

No Capítulo 4 a partir dos resultados obtidos no Capítulo 3, deduziremos um teorema de existência global no tempo.

Os nossos resultados serão obtidos através da utilização de técnicas de Galerkin. Ressaltamos também que cada capítulo a partir do segundo contará com uma pequena introdução na qual faremos comparações com resultados anteriormente conhecidos. Finalmente, queremos indicar que, como é usual em trabalhos envolvendo estimativas em equações diferenciais parciais, também neste trabalho C denotará uma constante positiva genérica dependendo somente de Ω e dos dados do problema. Somente nos casos em que for necessário distinguir certas constantes é que utilizaremos outras letras para denotá-las.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fixaremos a notação a ser utilizada e recordaremos alguns resultados que serão empregados na análise das equações (0.2) - (0.3) nos próximos capítulos.

Por simplicidade de exposição, ao longo deste trabalho vamos sempre supor que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado, pelo menos de classe C^3 . Esta hipótese poderia ser eventualmente relaxada.

Denotaremos por $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach de funções Lebesgue integráveis com as normas usuais:

$$|u|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{e} \quad |u|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i(x)v_i(x)dx.$$

Por simplicidade de notação, denotaremos $|\cdot|_2 = |\cdot|$.

Quando B é um espaço de Banach, $L^q(0, T; B)$ denotará o espaço das funções com valores em B , definidas em $(0, T)$ e que são L^q -integrável no sentido de Bochner,

com as normas usuais:

$$\|u\|_{L^q(0,T;B)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_B^q dt \right]^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess } \|u(t)\|_B.$$

Quando B é reflexivo, o dual topológico de $L^q(0,T;B)$ se identifica com o espaço de Banach $L^p(0,T;B')$, onde B' é o dual topológico de B e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Para $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$ consideraremos os espaços de Sobolev:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

com a norma $\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p}$.

Quando $p = 2$, usaremos a notação padrão $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Denotamos por $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ o espaço de traços sobre $\partial\Omega$, correspondente a $W^{1,p}(\Omega)$. Tal espaço será equipado com a norma:

$$\|\gamma\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = \inf \{ \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}; v \in W^{1,p}(\Omega), v = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega \}$$

No caso $p = 2$, denotaremos $W^{1/2,2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ (Adams [1]).

Y denotará o subespaço fechado de $L^2(\Omega)$ que consiste das funções ortogonais às constantes, isto é,

$$Y = \{f \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} f(x) dx = 0\}$$

e também

$$B = H^1(\Omega) \cap Y.$$

A seguir recordaremos alguns resultados envolvendo espaços de Sobolev que serão usados no decorrer do trabalho.

Lema 1.1 (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs). Seja $\Sigma \subseteq \partial\Omega$ uma parte da fronteira, tal que a medida superficial de Σ é estritamente positiva; então existe uma constante positiva C_Ω (que depende somente de Ω) tal que:

$$|u| \leq C_\Omega |\nabla u|, \quad \text{para todo } u \in H^1(\Omega), \quad \text{com } u|_\Sigma = 0.$$

Lema 1.2. Existe uma constante C_Ω , tal que:

$$|\phi| \leq C_\Omega |\nabla \phi|, \quad \forall \phi \in B = H^1(\Omega) \cap Y.$$

(Veja Morrey[15]).

Lema 1.3 (Imersão de Sobolev). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com contorno $\partial\Omega$ localmente Lipschitz. Sejam m, n números inteiros e p um número real com $0 \leq n \leq m$ e $p \geq 1$. Então são contínuas e densas as inclusões seguintes:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{n,q}(\Omega)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - \frac{m-n}{N} \quad \text{se } p(m-n) < N, \\ q &\in [1, \infty) \quad \text{se } p(m-n) = N, \\ q &= \infty \quad \text{se } p(m-n) > N. \end{aligned}$$

Além disso, a inclusão de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{n,s}(\Omega)$ é compacta para cada $1 \leq s < q$, com q definido acima.

Também, se $mp > N$ e k é o maior inteiro tal que $0 \leq k < \frac{m-N}{p}$, têm-se as inclusões compactas

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}).$$

(veja Adams [1], p.97).

Seja agora $\partial\Omega = S \cup \Gamma$ com S e Γ disjuntos. Supondo que S e Γ sejam suficientemente suaves, definimos:

$$\dot{H}(\Omega) = \{u \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3; u|_S = 0, u.n|_\Gamma = 0\},$$

$H(\Omega)$ o fecho de $\dot{H}(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{H(\Omega)}$.

Aqui $\|\cdot\|_{H(\Omega)}$ denota a norma dada por:

$$\|u\|_{H(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx \right]^{1/2} = [(\nabla u, \nabla u)]^{1/2} = |\nabla u|. \quad (1.1)$$

Dada $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ com a regularidade adequada, definimos o tensor taxa de deformação por

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t).$$

Também definimos

$$(D(u), D(v)) = \int_{\Omega} D(u) : D(v) dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx.$$

$$\text{Assim, } (D(u), D(u)) = \int_{\Omega} D(u) : D(u) dx \equiv |D(u)|^2.$$

A seguir, enunciaremos alguns teoremas e lemas que serão utilizados nos capítulos seguintes:

Lema 1.4. (Desigualdade de Korn). Existe $\bar{c}$, tal que:

$$\|u\|_{H(\Omega)} = |\nabla u| \leq \bar{c}|D(u)|, \quad \forall u \in H(\Omega).$$

(Veja Solonnikov[20], p.191).

Como uma consequência do Lema 1.4, temos o seguinte resultado:

Lema 1.5. Existe γ tal que:

$$|u|^2 \leq \gamma |D(u)|^2, \quad \forall u \in H(\Omega).$$

Notemos então, que em $H(\Omega)$ as normas $|\nabla u|$ e $|D(u)|$ são equivalentes.

Denotamos por

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{f \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \operatorname{div} f = 0\}$$

e então tomamos

$$X(\Omega) = \text{ o fecho de } C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) \text{ em } (L^2(\Omega))^3.$$

Sabe-se que:

$$(L^2(\Omega))^3 = X(\Omega) \oplus G(\Omega),$$

onde

$$G(\Omega) = \{\varphi \in (L^2(\Omega))^3, \varphi = \nabla q, q \in H^1(\Omega)\}.$$

(Veja Temam [21]).

Também necessitaremos dos seguintes espaços:

$$J(\Omega) = \{u \in \dot{H}(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$$

e

$$J_0(\Omega) = \text{ o fecho de } J(\Omega) \text{ na norma dada em (1.1).}$$

Consideremos agora as aplicações

$$B_0 : J_0(\Omega) \times J_0(\Omega) \times J_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$B_1 : J_0(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

dadas por:

$$B_0(u, v, w) = (u, \nabla v, w) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N u_j(x) ((\partial v_i)/(\partial x_j))(x) w_i(x) dx \quad e$$

$$B_1(u, \phi, \psi) = (u, \nabla \phi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N u_j(x) ((\partial \phi)/(\partial x_j))(x) \psi(x) dx. \quad (1.2)$$

São formas trilineares bem definidas com as seguintes propriedades:

$$B_0(u, v, w) = -B_0(u, w, v), \quad B_1(u, \phi, \psi) = -B_1(u, \psi, \phi),$$

$$B_0(u, v, v) = 0 \quad e \quad B_1(u, \phi, \phi) = 0. \quad (1.3)$$

Denotaremos por P a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $X(\Omega)$.

Consideremos agora o operador A definido como a extensão de Friedrichs do operador simétrico $P\Delta$, com domínio $D(A) = \{u \in J_0(\Omega) \cap H^2(\Omega); D(u)n - n.(D(u)n)n|_{\Gamma} = 0\}$. Resultados importantes sobre este operador A , cujas demonstrações podem ser encontrados por exemplo em Rionero [17], páginas 478-481, são apresentados no seguinte lema:

Lema 1.6. O operador de Stokes $A = -P\Delta$ (extensão de Friedrichs) com domínio $D(A) = \{u \in J_0(\Omega) \cap H^2(\Omega); D(u)n - n.(D(u)n)n|_{\Gamma} = 0\}$ é um operador autoadjunto, definido positivo, com inversa compacta $A^{-1} : X \rightarrow X$.

Assim, por um resultado de análise funcional, A tem uma sequência $\{\alpha_i\}$ de autovalores positivos $\alpha_i > 0, \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots, \alpha_i \rightarrow \infty$, e as correspondentes autofunções $\{w^i\}$ formam um conjunto ortonormal completo em X e também formam um sistema ortogonal completo em $J_0(\Omega)$ e $J_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e satisfazem $D(w^i).n - n.(D(w^i)n)n|_{\Gamma} = 0$.

Seja agora $\bar{P}$ a projeção ortogonal de $L^2(\Omega) \rightarrow Y$.

Analogamente ao anterior, consideremos o operador A_1 definido como a extensão de Friedrichs do operador simétrico $\bar{P}\Delta$, com domínio $D(A_1) = \{\varphi \in Y \cap H^2(\Omega); \theta \frac{\partial \varphi}{\partial n} - U n_3 \varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$. O lema seguinte contém resultados sobre A_1 , análogos aos obtidos sobre A e apresentados no lema anterior. Estes resultados foram provados por Kan-On, Narukawa e Teramoto [5], páginas 150-152.

Lema 1.7. O operador $A_1 = -\bar{P}\Delta$ (extensão de Friedrichs) com domínio $D(A_1) = \{\varphi \in Y \cap H^2(\Omega); \theta \frac{\partial \varphi}{\partial n} - U n_3 \varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$, é um operador autoadjunto, definido positivo com inversa compacta.

Portanto, A_1 tem uma sequência $\{\beta_i\}$ de autovalores positivos, $\beta_i \rightarrow \infty$, e as correspondentes autofunções $\{\phi^i\}$ formam um sistema ortonormal completo em Y .

O lema seguinte será usado no Capítulo 3. Sua demonstração pode ser efetuada em forma análoga a Lorca, Boldrini [11].

Lema 1.8. Seja $v \in J_0(\Omega) \cap (H^2(\Omega))^3$ e consideremos a decomposição de Helmholtz de $-\Delta v$, isto é,

$$-\Delta v = Av + \nabla \bar{q},$$

onde $\bar{q} \in H^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} \bar{q} dx = 0$. Então, existe $C > 0$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe C_ε positiva, tais que:

$$|\bar{q}| \leq C_\varepsilon |\nabla v| + \varepsilon |Av| \quad \text{e} \quad \|\bar{q}\|_1 \leq C |Av|.$$

Também necessitaremos das projeções ortogonais seguintes:

$$P_n : (L^2(\Omega))^3 \rightarrow W_n = \langle w^1, w^2, \dots, w^n \rangle$$

e

$$\overline{P}_n : L^2(\Omega) \rightarrow M_n = \langle \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n \rangle.$$

Outros resultados que frequentemente usaremos nos próximos capítulos, são os seguintes:

Necessitaremos da *Desigualdade de Young*: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \geq 0, b \geq 0$ e sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q, \quad \text{onde } C_\varepsilon = \left(\frac{p-1}{p^2} \right) \varepsilon^{1-q}.$$

Também precisaremos do

Lema 1.9. (Gronwall). Seja $f(t)$ uma função absolutamente contínua, não negativa em $[0, T]$, que satisfaz, para quase todo t , a seguinte desigualdade diferencial $f'(t) \leq \phi(t)f(t) + \psi(t)$, onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções integráveis, não negativas em $[0, T]$. Então, $f(t) \leq \exp \left(\int_0^t \phi(s)ds \right) [f(0) + \int_0^t \psi(s)ds]$ para todo $0 \leq t \leq T$.

Uma demonstração deste último resultado pode ser encontrada, por exemplo em Hale [3], p. 36.

A seguir, enunciaremos mais um lema que será usado no Capítulo 3. Sua demonstração pode ser encontrada em Lorca e Boldrini [11], e é uma consequência do Lema de Gronwall.

Lema 1.10. Sejam φ e ψ funções positivas tais que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + \psi(t) &\leq C\varphi^3(t) + h(t)\varphi(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \\ \varphi(0) &= \varphi_0 \geq 0, \end{aligned}$$

onde $h(\cdot)$ e $f(\cdot)$ são funções positivas e contínuas. Considere T_1 , $0 < T_1 \leq T$, tal que:

$$C \int_0^{T_1} [2\varphi_0 + 2 \int_0^s f(\tau) d\tau]^2 ds + \int_0^{T_1} h(s) ds \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right). \quad (1.4)$$

Então, para todo $t \in [0, T_1]$,

$$\varphi(t) + \int_0^t \psi(s) ds < 2(\varphi_0 + \int_0^t f(s) ds). \quad (1.5)$$

Finalmente, como é usual neste contexto de equações associadas às equações de Navier-Stokes, para simplificar a notação não distinguiremos notacionalmente funções escalares de funções a valores vetoriais.

Capítulo 2

O Problema Estacionário

2.1 Introdução

Neste capítulo analisaremos o caso estacionário correspondente ao problema (0.2), (0.3). A concentração total de microorganismos na cultura será fixada como $\alpha > 0$.

Apresentaremos um resultado de existência de soluções (generalizadas) do problema, via a técnica de aproximação de Galerkin com a ajuda de argumentos sobre pontos fixos. Estudaremos também a unicidade das soluções obtidas.

A seguir faremos alguns comentários sobre problemas relacionados ao nosso.

O trabalho de Kan-on, Narukawa e Teramoto [5] nos mostra a análise de um modelo de fluxo bioconvectivo clássico, (isto é, com viscosidade constante) e condições de contorno de Dirichlet para a velocidade do fluido. Eles obtêm soluções generalizadas, usando um teorema de ponto fixo (Princípio de Leray-Schauder [6]). Utilizando resultados de regularidade Ladyzhenskaya [6], Mizohata [13], eles também conseguem mostrar a existência de soluções fortes. Para obter tais resultados, Kan-on, Narukawa e Teramoto [5] supõem U suficientemente pequena.

O presente trabalho generaliza os resultados de Kan-on, Narukawa e Teramoto [5], no sentido de permitir viscosidades dependentes da concentração de microorganismos. Como nos resultados de [5], também precisaremos supor U pequena.

Por outro lado, Lorca e Boldrini [9] obtêm resultados de existência e unicidade de soluções fracas para o problema de Boussinesq Generalizado (isto é, com viscosidade e coeficiente de conductividade térmica dependentes da temperatura) e condições de contorno de Dirichlet para a velocidade do fluido, usando aproximações de Galerkin e argumentos de pontos fixos. Adaptaremos técnicas matemáticas utilizadas em [9] ao nosso problema.

Queremos chamar a atenção para o fato de que uma das dificuldades para se obter soluções mais regulares em nosso modelo, assim como nas equações de Boussinesq Generalizadas, é a de estimar os termos não lineares de maior ordem. Faremos isto, com a ajuda das estimativas para a pressão associada à uma decomposição de Helmholtz adequada.

2.2 Existência de Soluções Fracas

O problema a ser considerado nesta seção é o seguinte:

Dado $\alpha > 0$, achar (u, m) tais que:

$$\begin{cases} -2\operatorname{div}(\nu(m)D(u)) + u \cdot \nabla u + \nabla q = -m \cdot \chi + f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ -\theta \Delta m + u \cdot \nabla m + U \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{sobre } S, \\ u \cdot n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \nu(m)[D(u)n - n \cdot (D(u)n)n] = b_1 \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \theta \frac{\partial m}{\partial n} - U n_3 m = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} m dx = \alpha. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Para facilitar a análise do problema, vamos introduzir a variável:

$$\bar{m} = m_{\alpha} - E,$$

onde m_{α} denota uma possível solução para a concentração no Problema (2.1) - (2.2) (o subíndice indica apenas que a exigência de que a massa total de microorganismos é α). Assim.

$$\int_{\Omega} \bar{m} dx = 0.$$

Consideremos também a função

$$E(x) = C_{\alpha} \exp \left(\frac{U}{\theta} x_3 \right),$$

onde a constante C_{α} é escolhida de modo que $\int_{\Omega} E(x) dx = \alpha$.

Notemos que

$$-\theta \Delta E + U \frac{\partial E}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad \frac{\partial E}{\partial n} - U n_3 E = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Portanto, o problema (2.1) - (2.2), escrito em termos das variáveis u e $\bar{m}$ torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \operatorname{div}(\nu(\bar{m} + E) D(u)) + u \cdot \nabla u + \nabla \left(q + \frac{\theta}{\ell} E \right) = \bar{m} \cdot \chi + f, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} u = 0, \\ -\theta \Delta \bar{m} + u \cdot \nabla(\bar{m} + E) + U \frac{\partial \bar{m}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = 0 & \text{sobre } S, \\ u.n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \\ \nu(\bar{m} + E)[D(u)n - n.(D(u)n)n] = b_1 & \text{sobre } \Gamma, \\ \theta \frac{\partial \bar{m}}{\partial n} - U n_3 \bar{m} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \bar{m} dx = 0. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

A seguir precisamos esclarecer o que entenderemos por soluções fracas do problema acima:

Definição. Dada $f \in X(\Omega)$, um par de funções $(u, \bar{m}) \in J_0(\Omega) \times B$ é chamado uma *solução fraca* de (2.3) - (2.5), se são válidas as seguintes identidades:

$$2(\nu(\bar{m} + E)D(u), D(v)) + B_0(u, u, v) + (\bar{m}, \chi, v) - 2 \int_{\Gamma} b_1 v d\sigma = (f, v), \quad (2.6)$$

$$\theta(\nabla \bar{m}, \nabla \phi) + B_1(u, \bar{m} + E, \phi) - U(\bar{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}) = 0, \quad (2.7)$$

para todo $(v, \phi) \in J_0(\Omega) \times B$.

Recordemos que B_0 e B_1 são as formas trilineares dadas em (1.2).

Observemos que para $u, v \in J_0(\Omega)$ e $q \in C^1$,

$$\int_{\Omega} [-2 \operatorname{div}(\nu(m)D(u)) + \nabla q] \varphi dx = 2(\nu(m)D(u), D(\varphi)) - 2 \int_{\Gamma} b_1 \varphi dS.$$

De fato,

$$\int_{\Omega} [-2 \operatorname{div}(\nu(m)D(u)) + \nabla q] \varphi dx = 2 \int_{\Omega} \nu(m)D(u) : \nabla \varphi dx - 2 \int_{\partial\Omega} (\nu(m)nD(u)) \cdot \varphi dS + \int_{\partial\Omega} q n \cdot \varphi dS.$$

Sabemos que:

$$\nabla \varphi = \frac{1}{2}(\nabla \varphi + (\nabla \varphi)^t) + \frac{1}{2}(\nabla \varphi - (\nabla \varphi)^t),$$

onde a primeira parcela corresponde à parte simétrica de $\nabla\varphi$ (isto é, $D(\varphi)$). Logo, como $D(u)$ é uma matriz simétrica temos que:

$$\int_{\Omega} D(u) : \nabla\varphi dx = \int_{\Omega} D(u) : D(\varphi) dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} (-2\nu(m)n D(u) + qn) \cdot \varphi dS \\ &= \int_{\partial\Omega} [(n \cdot [qI - 2\nu(m)D(u)]n)n] \cdot (\varphi \cdot n)n dS \\ &+ \int_{\partial\Omega} \{[qI - 2\nu(m)D(u)]n - (n \cdot [qI - 2\nu(m)D(u)]n)n\} \cdot (\varphi - (\varphi \cdot n)n) dS. \end{aligned}$$

Assim, pelas condições de contorno para u , e considerando $u, \varphi \in J_0, q \in C^1$, temos que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-2\operatorname{div}(\nu(m)D(u)) + \nabla q] \varphi dx \\ &= 2(\nu(m)D(u), D(\varphi)) + 2 \int_{\Gamma} -\nu(m)[D(u)n - n \cdot (D(u)n)n] \cdot \varphi dS \\ &= 2(\nu(m)D(u), D(\varphi)) - 2 \int_{\Gamma} b_1 \cdot \varphi dS. \end{aligned}$$

Também aplicando integração por partes obtemos que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} -\theta \Delta \bar{m} \phi dx + \int_{\Omega} U \frac{\partial \bar{m}}{\partial x_3} \phi dx \\ &= \theta \int_{\Omega} \nabla \bar{m} \nabla \phi dx - \int_{\partial\Omega} \theta \frac{\partial \bar{m}}{\partial n} \phi dS - U \int_{\Omega} \bar{m} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx + \int_{\partial\Omega} U n_3 \bar{m} \phi dS \\ &= \theta \int_{\Omega} \nabla \bar{m} \nabla \phi dx - U \int_{\Omega} \bar{m} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx \end{aligned}$$

Com respeito a tais soluções, nesta seção provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. Seja ν contínua e assumamos:

$$\nu_0 = \inf\{\nu(m), m \in \mathbb{R}\} > 0, \quad \nu_1 = \sup\{\nu(m), m \in \mathbb{R}\} < +\infty. \quad (2.8)$$

Sejam $f \in X(\Omega)$ e $\frac{U}{\theta} < (C_\Omega)^{-1}$, com C_Ω a constante de imersão de Sobolev que aparece na desigualdade de Poincarè-Friedrichs. Então existe uma solução fraca do problema (2.3) - (2.5).

Prova: Fixemos bases de Schauder $(\bar{w}^j)_1^\infty$, de $J_0(\Omega)$, e $(\bar{\phi}^j)_1^\infty$, de B .

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos as aproximações de Galerkin:

$$u^n(x) = \sum_{j=1}^n c_{n,j} \bar{w}^j(x) \quad \text{e} \quad \bar{m}^n(x) = \sum_{\ell=1}^n d_{n,\ell} \bar{\phi}^\ell(x),$$

satisfazendo o problema aproximado:

$$\begin{aligned} 2(\nu(\bar{m}^n + E)D(u^n), D(\bar{w}^j)) + B_0(u^n, u^n, \bar{w}^j) + (\bar{m}^n, \chi, \bar{w}^j) \\ - 2 \int_{\Gamma} b_1 \bar{w}^j d\sigma = (f, \bar{w}^j), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\theta(\nabla \bar{m}^n, \nabla \bar{\phi}^\ell) + B_1(u^n, \bar{m}^n + E, \bar{\phi}^\ell) - U(\bar{m}^n, \frac{\partial \bar{\phi}^\ell}{\partial x_3}) = 0, \quad (2.10)$$

para $1 \leq j, \ell \leq n$.

Assumamos primeiro a existência de $(u^n, \bar{m}^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (tal existência será provada posteriormente) e demonstremos que, ao longo de subsequências, elas convergem para uma solução do problema. Para isto, será necessário obter estimativas para os gradientes das incógnitas.

Multiplicando (2.9) por $c_{n,j}$ e somando em j de 1 até n , obtemos:

$$\begin{aligned} 2(\nu(\bar{m}^n + E)D(u^n), D(u^n)) + B_0(u^n, u^n, u^n) + (\bar{m}^n, \chi, u^n) - \\ 2 \int_{\Omega} b_1 u^n d\sigma = (f, u^n). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Similarmente, multiplicando (2.10) por $d_{n,\ell}$, somando em ℓ de 1 até n e adicionando E ao resultado, temos

$$\begin{aligned} & \theta |\nabla \overline{m}^n|^2 + \theta (\nabla \overline{m}^n, \nabla E) + B_1(u^n, \overline{m}^n + E, \overline{m}^n + E) \\ & - \ell(\overline{m}^n, \frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{m}^n + E)) = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Notando que $B_0(u^n, u^n, u^n) = 0$ (1.3) e fazendo uso da desigualdade de Hölder juntamente com (2.8), segue-se que:

$$\begin{aligned} 2\nu_0 |D(u^n)|^2 & \leq |(\overline{m}^n \cdot \chi, u^n) + (f, u^n) + 2 \int_{\Omega} b_1 u^n d\sigma| \\ & \leq |\overline{m}^n| |u^n| + |f| |u^n| + 2c(\Gamma) \left(\int_{\Gamma} b_1^2 d\sigma \right)^{1/2} |D(u^n)|. \end{aligned}$$

Das imersões de Sobolev e das desigualdades de Korn (Lema 1.4) e de Young se deduz que

$$\nu_0 |D(u^n)|^2 \leq \frac{3}{4\nu_0} (C_{\Omega}^2 \gamma |\nabla \overline{m}^n|^2 + \gamma |f|^2 + 4c^2(\Gamma) \|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2). \quad (2.13)$$

Similarmente, temos

$$\begin{aligned} \theta |\nabla \overline{m}^n|^2 & \leq \theta |\nabla \overline{m}^n| |\nabla E| + UC_{\Omega} |\nabla \overline{m}^n|^2 + UC_{\Omega} |\nabla \overline{m}^n| |\nabla E|, \quad \text{isto é} \\ (\theta - UC_{\Omega}) |\nabla \overline{m}^n|^2 & \leq \frac{(\theta + UC_{\Omega})^2}{\theta - UC_{\Omega}} |\nabla E|^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Multiplicando (2.13) por $\delta = \frac{2(\theta - UC_{\Omega})\nu_0}{C_{\Omega}^2 \gamma}$ e somando com (2.14), obtemos

$$\frac{4(\theta - UC_{\Omega})\nu_0}{3 C_{\Omega}^2 \gamma} |D(u^n)|^2 + (\theta - UC_{\Omega}) |\nabla \overline{m}^n|^2 \leq C_1 (|f|^2 + \|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + |\nabla E|^2). \quad (2.15)$$

Notando que $\frac{U}{\theta} < (C_\Omega)^{-1}$ e considerando $\ell > 0$, tal que $\ell = \min\{1, \frac{4(\theta - UC_\Omega)\nu_0^2}{3C_\Omega^2\gamma}, \theta - UC_\Omega\}$, temos que:

$$\begin{aligned} \ell(|D(u^n)|^2 + |\nabla \bar{m}^n|^2) &\leq C_1(|f|^2 + \|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + |\nabla E|^2), \quad \text{isto é} \\ |D(u^n)|^2 + |\nabla \bar{m}^n|^2 &\leq C'(|f|^2 + \|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + |\nabla E|^2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Portanto, a seqüência $\{(u^n, \bar{m}^n)\}$ é limitada em $J_0(\Omega) \times B$.

Agora, do fato que $J_0(\Omega)$ é compactamente imerso em X e B é compactamente imerso em Y , podemos escolher uma subsequência de $\{(u^n, \bar{m}^n)\}$ (ainda denotada por $\{(u^n, \bar{m}^n)\}$) e elementos $u \in J_0(\Omega)$, $\bar{m} \in B$, tais que:

$$\begin{aligned} u^n &\rightarrow u, \text{ fracamente em } J_0(\Omega) \text{ e fortemente em } X, \\ \bar{m}^n &\rightarrow \bar{m}, \text{ fracamente em } B \text{ e fortemente em } Y. \end{aligned}$$

Ainda mais, podemos supor que

$$\begin{aligned} D(u^n) &\rightarrow D(u) \text{ fracamente em } L^2(\Omega), \\ \nabla(\bar{m}^n) &\rightarrow \nabla(\bar{m}) \text{ fracamente em } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Isto é suficiente para passar ao limite quando n converge para $+\infty$ em (2.9) e (2.10) e então obter:

$$\left\{ \begin{aligned} &2(\nu(\bar{m} + E)D(u), D(\bar{w}^j)) + B_0(u, u, \bar{w}^j) + (\bar{m}, \chi, \bar{w}^j) \\ &- 2 \int_{\Gamma} b_1 \bar{w}^j d\sigma = (f, \bar{w}^j), \\ &\theta(\nabla \bar{m}, \nabla \bar{\phi}^\ell) + B_1(u, \bar{m} + E, \bar{\phi}^\ell) - U \left(\bar{m}, \frac{\partial \bar{\phi}^\ell}{\partial x_3} \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.17)$$

para todo $j, \ell \in \mathbb{N}$.

De fato, é conhecido que nas condições acima tem-se

$$\begin{aligned} B_0(u^n, u^n, w) &\rightarrow B_0(u, u, w), \quad \forall w \in J_0(\Omega), \\ B_1(u^n, \bar{m}^n, \phi) &\rightarrow B_1(u, \bar{m}, \phi), \quad \forall \phi \in B. \end{aligned}$$

(Veja Temam [21]).

Também observamos que:

$$\begin{aligned} (\nu(\overline{m}^n + E)D(u^n), D(w^j)) &= (D(u^n), \nu(\overline{m}^n + E)D(w^j)) \rightarrow (D(u), \nu(\overline{m} + E)D(w^j)) \\ &= (\nu(\overline{m} + E)D(u), D(w^j)) \end{aligned}$$

já que $\nu(\overline{m}^n + E)D(w^j) \rightarrow \nu(\overline{m} + E)D(w^j)$ forte em $L^2(\Omega)$ em virtude do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Como as seqüências $\{\overline{w}^j\}$ e $\{\overline{\phi}^\ell\}$ são completas em $J_0(\Omega)$ e B , respectivamente, usando (2.17), concluímos que $(u, \overline{m})$ satisfaz (2.6), (2.7). Portanto, $(u, \overline{m})$ é a solução fraca requerida.

Falta ainda provar que o sistema não linear (2.9), (2.10) tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$. Faremos isto, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, de maneira similar a Lorca, Boldrini [9].

Seja W_n o subespaço gerado por $\{\overline{w}^1, \dots, \overline{w}^n\}$ e seja M_n o subespaço gerado por $\{\overline{\phi}^1, \dots, \overline{\phi}^n\}$. Para cada $(z, \xi) \in W_n \times M_n$, consideramos a única solução $T(z, \xi) = (u, \overline{m}) \in W_n \times M_n$ das equações linearizadas:

$$\begin{aligned} 2(\nu(\xi + E)D(u), D(\overline{w}^j)) + B_0(z, u, \overline{w}^j) + (\overline{m}, \chi, \overline{w}^j) - \\ 2 \int_{\Gamma} b_1 \overline{w}^j d\sigma - (f, \overline{w}^j) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\theta(\nabla \overline{m}, \nabla \overline{\phi}^\ell) + B_1(z, \overline{m} + E, \overline{\phi}^\ell) - U \left(\overline{m}, \frac{\partial \overline{\phi}^\ell}{\partial x_3} \right) = 0, \quad (2.19)$$

para $1 \leq j, \ell \leq n$.

Este é um sistema de $2n$ equações lineares para os coeficientes das expansões

$$u = \sum_{j=1}^n c_j \overline{w}^j, \quad \overline{m} = \sum_{\ell=1}^n d_\ell \overline{\phi}^\ell.$$

O sistema (2.18), (2.19), tem uma única solução porque o sistema homogêneo associado, tem uma única solução. De fato, se $(u, \bar{m})$ é solução do sistema homogêneo, multiplicando (2.18) por c_j e (2.19) por d_ℓ , e somando j e ℓ de 1 até n , obtemos

$$2(\nu(\xi + E)D(u), D(u)) + B_0(z, u, u) + (\bar{m}, \lambda, u) = 0, \quad (2.20)$$

$$\theta |\nabla \bar{m}|^2 + B_1(z, \bar{m}, \bar{m}) - U \left(\bar{m}, \frac{\partial \bar{m}}{\partial x_3} \right) = 0. \quad (2.21)$$

Como $B_1(z, \bar{m}, \bar{m}) = 0$, (2.21) torna-se

$$(\theta - UC_\Omega) |\nabla \bar{m}|^2 \leq 0.$$

Assim, $(\theta - UC_\Omega) > 0$ implica que $|\nabla \bar{m}|^2 = 0$, isto é, $\bar{m}$ é constante.

Mas, como $\int_\Omega \bar{m} dx = 0$, então $\bar{m} = 0$.

Logo, na equação (2.20), como $B_0(z, u, u) = 0$ e $\bar{m} = 0$, temos que:

$$2\nu_0 |D(u)|^2 \leq 0, \quad \text{ou seja, } u = 0.$$

Por outro lado, para o sistema (2.18), (2.19), obtemos o mesmo tipo de estimativa que aquela em (2.16), isto é,

$$|D(u)|^2 + |\nabla \bar{m}|^2 \leq C(|f|^2 + \|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + |\nabla E|^2) \leq F_1$$

Assim, (2.18) e (2.19) definem uma aplicação contínua T atuando de um conjunto convexo e fechado $F = \{(z, \xi) \in W_n \times M_n; (|D(z)|^2 + |\nabla \xi|^2) \leq F_1\}$ nele mesmo. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, concluímos que a aplicação T possui pelo menos um ponto fixo, que é a solução de (2.9), (2.10). Isto completa a prova do Teorema 2.1. $\square$

2.3 Existência de Soluções Fortes

Nesta seção apresentaremos um resultado que fornece soluções mais regulares que as obtidas anteriormente. Aqui a principal dificuldade é a de estimar os termos não lineares de maior ordem presentes nas equações. Para fazer isto, precisaremos de estimativas para a pressão associada à decomposição de Helmholtz.

Teorema 2.2. Seja $b_1 = 0$, $f \in X(\Omega)$ e suponhamos que ν seja de classe C^1 e satisfaz (2.3). Então, para U suficientemente pequeno, existe uma solução forte do problema (2.3) - (2.5), isto é, existe $(u, \bar{m}) \in (J_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times (Y \cap H^2(\Omega))$, tal que:

$$P[-2\operatorname{div}(\nu(\bar{m} + E)D(u)) + u \cdot \nabla u + \bar{m} \cdot \chi - f] = 0 \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

$$\bar{P} \left[-\theta \Delta \bar{m} + u \cdot \nabla (\bar{m} + E) + U \frac{\partial \bar{m}}{\partial x_3} \right] = 0 \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Prova: Provaremos este resultado utilizando a equivalência da norma dada pelo operador de Stokes A (respectivamente o operador A_1) e a norma $(J_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ (respectivamente a norma $(Y \cap H^2(\Omega))$).

Consideremos as aproximações u^n e $\bar{m}^n$, construídas como na prova do Teorema 2.1, mas utilizando bases espectrais, isto é, utilizando $(\bar{w}^j)_1^\infty = (w^j)_1^\infty$, onde $(w^j)_1^\infty$ são as autofunções de A , e $(\bar{\phi}^j)_1^\infty = (\phi^j)_1^\infty$, onde $(\phi^j)_1^\infty$ são as autofunções de A_1 .

Observamos que para esta aproximações valem todas as estimativas obtidas na seção anterior e que para elas valem automaticamente as condições de contorno requeridas, com $b_1 = 0$.

Em seguida mostraremos que a sequência $(u^n, \bar{m}^n)$ construída desta forma é limitada em $H^2(\Omega)$.

Multiplicando (2.18) por $\alpha_j c_j$, (2.19) por $\beta_\ell d_\ell$ e somando em j e ℓ de 1 até n , obtemos

$$-2(\operatorname{div}(\nu(\xi + E)D(u)), Au) + B_0(z, u, Au) + (\overline{m}, \chi, Au) - (f, Au) = 0, \quad (2.22)$$

$$\theta(A_1 \overline{m}, A_1 \overline{m}) + B_1(z, \overline{m} + E, A_1 \overline{m}) + U \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \overline{m}, A_1 \overline{m} \right) = 0. \quad (2.23)$$

(Para B_0 e B_1 dados por (1.2)).

Usando a identidade $2\operatorname{div}(\nu(\theta)D(v)) = \nu(\theta)\Delta v + 2\nu'(\theta)\nabla\theta D(v)$ em (2.22), temos que:

$$\begin{aligned} -(\nu(\xi + E)\Delta u, Au) &= -B_0(z, u, Au) - (\overline{m}, \chi, Au) + (f, Au) \\ &\quad + (2\nu'(\xi + E)\nabla(\xi + E)D(u), Au). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Agora, da decomposição de Helmholtz, sabemos que existe $\overline{q} \in H^1(\Omega)$ tal que $-\Delta u = Au + \nabla \overline{q}$, e temos a estimativa

$$\|\overline{q}\|_1 \leq c|\Delta u|. \quad (2.25)$$

Portanto, (2.24) torna-se

$$\begin{aligned} (\nu(\xi + E)Au, Au) &= -B_0(z, u, Au) - (\overline{m}, \chi, Au) + (f, Au) \\ &\quad + 2(\nu'(\xi + E)\nabla(\xi + E)D(u), Au) - (\nu(\xi + E)\nabla \overline{q}, Au). \end{aligned}$$

Em virtude das desigualdades de Korn e Hölder, das imersões de Sobolev e de (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \nu_0 |Au|^2 &\leq C_0 |D(z)| |Au|^2 + \overline{C}_\Omega |A_1 \overline{m}| |Au| + |f| |Au| \\ &\quad + 2\nu'_1 (|A_1 \xi| + |\nabla E|_4) |Au|^2 + |(\nu(\xi + E)\nabla \overline{q}, Au)| \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$\nu'_1 = \sup\{|\nu'(r)|, r \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que

$$(\nu(\xi + E)\nabla\bar{q}, Au) = -(\bar{q}, \operatorname{div}(\nu(\xi + E)Au)) = -(\bar{q}, (\nu'(\xi + E)\nabla(\xi + E)Au)).$$

já que $Au \in W_n$.

Assim,

$$\begin{aligned} |(\nu(\xi + E)\nabla\bar{q}, Au)| &\leq \nu'_1 |\bar{q}|_4 |\nabla(\xi + E)|_4 |Au| \\ &\leq c\nu'_1 (|A_1\xi| + |\nabla E|_4) \|\bar{q}\|_1 |Au|. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Combinando (2.25) - (2.27), segue da desigualdade de Young que

$$\frac{\nu_0}{2} |Au|^2 \leq C_1 (|Az|^2 + |A_1\xi|^2 + |\nabla E|_4^2) |Au|^2 + \frac{2\overline{C}_\Omega^2}{\nu_0} |A_1\bar{m}|^2 + \frac{2}{\nu_0} |f|^2. \quad (2.28)$$

Similarmente, pelas desigualdades de Hölder e Korn, das imersões de Sobolev em (2.23), obtemos

$$\theta |A_1\bar{m}|^2 \leq C_2 |Az|^2 (|A_1\bar{m}|^2 + |\nabla E|_4^2) + U\overline{C}_\Omega |A_1\bar{m}|^2. \quad (2.29)$$

Multiplicando (2.28) por $\delta = \frac{\nu_0}{2\overline{C}_\Omega^2}(\theta - U\overline{C}_\Omega)$ e somando o resultado com (2.29), obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\nu_0^2}{4\overline{C}_\Omega^2} (\theta - U\overline{C}_\Omega) |Au|^2 + \frac{1}{2} (\theta - U\overline{C}_\Omega) |A_1\bar{m}|^2 \leq \\ &\delta (C_1 (|Az|^2 + |A_1\xi|^2 + |\nabla E|_4^2) |Au|^2 + \frac{2}{\nu_0} |f|^2) + C_2 |Aw|^2 (|A_1\bar{m}|^2 + |\nabla E|_4^2). \end{aligned}$$

Tomando U tal que $\frac{U}{\theta} < (\overline{C}_\Omega)^{-1}$ e considerando $\ell > 0, \ell = \min\{1,$

$\frac{\nu_0^2}{4\overline{C}_\Omega^2} (\theta - U\overline{C}_\Omega); \frac{1}{2} (\theta - U\overline{C}_\Omega)\}$, temos que:

$$\ell (|Au|^2 + |A_1\bar{m}|^2) \leq C_3 (|Az|^2 + |A_1\xi|^2 + |\nabla E|_4^2) |Au|^2 + |f|^2 + |Az|^2 (|A_1\bar{m}|^2 + |\nabla E|_4^2).$$

ou seja

$$|Au|^2 + |A_1 \bar{m}|^2 \leq C(|Az|^2 + |A_1 \xi|^2 + |\nabla E|_4^2)(|Au|^2 + |f|^2 + |Az|^2(|A_1 \bar{m}|^2 + |\nabla E|_4^2)).$$

Logo,

$$|Au|^2 + |A_1 \bar{m}|^2 \leq C(|Az|^2 + |A_1 \xi|^2 + |\nabla E|_4^2)(|Au|^2 + |A_1 \bar{m}|^2 + |\nabla E|_4^2) + C|f|^2. \quad (2.30)$$

Assim, em (2.30) queremos determinar R de modo que se

$$|Az|^2 + |A_1 \xi|^2 \leq R, \quad \text{então} \quad |Au|^2 + |A_1 \bar{m}|^2 \leq R.$$

$$\text{Isto é, } R^2 + (2|\nabla E|_4^2 - \frac{1}{C})R + |\nabla E|_4^4 + |f|^2 \leq 0.$$

Logo,

$$R \leq \frac{1}{2}[(1/C - 2|\nabla E|_4^2) - [2|\nabla E|_4^2 - 1/C]^2 - 4(|\nabla E|_4^4 + |f|^2)]^{1/2}.$$

Observemos que $\nabla E = \frac{U}{\theta} E \cdot \chi$. Assim, para U e $|f|$ suficientemente pequenos, vale

$$|\nabla E|_4^2 < \min \left\{ \frac{1}{2C}, \frac{1}{4C} - C|f|^2 \right\} \quad \text{e} \quad |f|^2 < \frac{1}{4C^2},$$

e obtemos assim um valor conveniente para R .

Consequentemente, T é uma aplicação contínua atuando de um conjunto convexo e fechado $F = \{(z, \xi) \in W_n \times M_n; |Az|^2 + |A_1 \xi|^2 \leq R\}$ nele mesmo.

Portanto, podemos escolher uma seqüência $(u^n, \bar{m}^n)$ limitada em $H^2(\Omega)$ satisfazendo (2.9), (2.10). Isto prova o Teorema 2.2. $\square$

Observemos que o Problema (2.3) - (2.5) é equivalente ao Problema (2.1) - (2.2). Portanto, os resultados obtidos para $(u, \bar{m})$, também valem para (u, m) .

Além disso, existe uma única função q (pressão) em $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, onde $L_0^2(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega); (h, 1) = 0\}$, a qual satisfaz

$$-2\operatorname{div}(\nu(m)D(u)) + u \cdot \nabla u + m \cdot \chi - f = -\nabla q.$$

(veja Temam [21]).

Finalmente, observemos que o resultado sobre a positividade da concentração estabelecido por Kan-On [5], exatamente com a mesma demonstração, também vale no nosso problema. Isto é, vale o seguinte:

Lema 2.1. (Positividade da concentração) Seja $(u_\alpha, q_\alpha, m_\alpha)$ a solução do problema (2.1), (2.2) dada no Teorema 2.2, então $m_\alpha(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

2.4 Unicidade de Soluções

Nesta seção apresentaremos um resultado de unicidade para soluções pequenas.

Teorema 2.3. Suponha que ν é Lipschitz contínua. Então, se $(u, \bar{m})$ é uma solução fraca do problema (2.3) - (2.5), de modo que $(|D(u)| + |A_1 \bar{m}| + |\nabla E|_4)$ é suficientemente pequena, então tal solução é única.

Lembremos que $\nabla E = \frac{U}{\theta} E \cdot \chi$, logo se queremos $|\nabla E|_4$ suficientemente pequeno, precisamos ter U suficientemente pequeno.

Prova: Sejam $(u_1, \bar{m}_1), (u_2, \bar{m}_2)$ duas soluções fracas de (2.3) - (2.5), tais que $\bar{m}_1, \bar{m}_2$ são funções de $(H^2(\Omega) \cap Y)$ e satisfazendo a condição de pequenez enunciada acima.

Sejam

$$z = u_1 - u_2 \quad \text{e} \quad \varphi = \bar{m}_1 - \bar{m}_2,$$

então $z \in J_0$, $\varphi \in (H^2(\Omega) \cap Y)$ e (z, φ) satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} & 2(\nu(\overline{m}_1)D(z), D(w)) + 2((\nu(\overline{m}_1) - \nu(\overline{m}_2))D(u_2), D(w)) + B_0(z, u_1, w) \\ & + B_0(u_2, z, w) + (\varphi, \chi, w) = 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\theta(\nabla \varphi, \nabla \phi) + B_1(z, \overline{m}_1 + E, \phi) + B_1(u_2, \varphi, \phi) - U\left(\varphi, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) = 0.$$

$$\forall w \in J_0(\Omega), \quad \forall \phi \in L^2(\Omega).$$

Fazendo $w = z$ e $\phi = -A_1\varphi$ em (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} 2\nu_0|D(z)|^2 & \leq |2((\nu(\overline{m}_1) - \nu(\overline{m}_2))D(u_2), D(z)) + B_0(z, u_1, z) + (\varphi, \chi, z)| \\ & \leq 2C_1|\varphi|_\infty|D(u_2)| |D(z)| + C_0|D(z)| |D(u_1)| |D(z)| + \\ & \quad + \overline{C}_\Omega C_\Omega |A_1\varphi| |D(z)|, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \theta|A_1\varphi|^2 & \leq |B_1(z, \overline{m}_1 + E, A_1\varphi) + B_1(u_2, \varphi, A_1\varphi) + U\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, A_1\varphi\right)| \\ & \leq C_0|D(z)|(|A_1\overline{m}_1| + |\nabla E|_4)|A_1\varphi| + C_0|D(u_2)| |A_1\varphi|^2 \\ & \quad + U\overline{C}_\Omega |A_1\varphi|^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

para C_1 constante, tal que:

$$|\nu(r) - \nu(s)| \leq C_1|r - s|, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}.$$

Assim, tomando U tão pequeno que $\theta - U\overline{C}_\Omega > 0$, temos

$$|A_1\varphi| \leq \frac{C_0}{(\theta - U\overline{C}_\Omega)}(|D(z)|(|A_1\overline{m}_1| + |\nabla E|_4) + |D(u_2)| |A_1\varphi|).$$

Agora, assumamos que $\frac{C_0}{(\theta - U\overline{C}_\Omega)}|D(u_2)| < \frac{1}{2}$. Então

$$|A_1\varphi| \leq \frac{C_0}{(\theta - U\overline{C}_\Omega)}(|A_1\overline{m}_1| + |\nabla E|_4)|D(z)|. \quad (2.34)$$

Já que $|\varphi|_\infty \leq C|A_1\varphi|$ e combinando (2.32), (2.34), temos que:

$$\begin{aligned} |D(z)| \leq \frac{C_0}{\nu_0} \left[\frac{1}{(\theta - U\overline{C}_\Omega)} \left(C_1C(|A_1\overline{m}_1| + |\nabla E|_4)|D(u_2)| + \frac{\overline{C}_\Omega C_\Omega}{2}(|A_1\overline{m}_1| + |\nabla E|_4) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}|D(u_1)| \right] |D(z)|. \end{aligned}$$

Assim, se

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{\nu_0(\theta - U\overline{C}_\Omega)} \left(C_1C(|A_1\overline{m}_1| + |\nabla E|_4)|D(u_2)| + \frac{\overline{C}_\Omega C_\Omega}{2}(|A_1\overline{m}_1| + |\nabla E|_4) \right) \\ + \frac{C_0}{2\nu_0}|D(u_1)| < 1, \end{aligned}$$

temos que

$$|D(z)| = |A_1\varphi| = 0.$$

Portanto, como $z \in J_0(\Omega)$ e $\varphi \in (H^2(\Omega) \cap Y)$ (isto é, $\int_\Omega \varphi dx = 0$), segue-se que $z = 0$, $\varphi = 0$ em Ω .

Consequentemente, $u_1 = u_2$ e $\overline{m}_1 = \overline{m}_2$. $\square$

Capítulo 3

O Problema de Evolução

3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar o problema de evolução para as equações generalizadas de bioconvecção.

Como o nosso interesse é o de estabelecer relações entre soluções não estacionárias e estacionárias, nos restringiremos a estudar casos de evolução nos quais a força externa atuante é independente do tempo.

Iremos estabelecer basicamente dois resultados: um deles envolve a existência de soluções fracas, o outro, a existência local e a unicidade de soluções fortes em vizinhanças pequenas de soluções estacionárias suficientemente regulares (como aquelas obtidas no capítulo anterior). Em particular, se tomarmos a solução estacionária trivial $u_\alpha = 0$, $m_\alpha = \text{constante positiva}$, teremos resultados de existência de soluções suficientemente pequenas. Isto será feito via aproximações de Galerkin utilizando argumentos de perturbação em torno da solução estacionária fixa.

Observemos que em [5], Kan-On, Narukawa e Teramoto obtêm uma solução fraca para o caso clássico com condições de Dirichlet na fronteira para a velocidade do fluido e condições mistas na fronteira para a concentração. Aqui, analisaremos o caso generalizado, com condições mistas na fronteira tanto para a velocidade do

fluido como para a concentração.

Neste capítulo adotaremos as notações do Capítulo 1 e também consideraremos Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^3$, de classe C^3 .

3.2 Existência de Soluções Fracas

Consideremos o Problema (0.2), (0.3) com uma concentração inicial m_0 , satisfazendo $\int_{\Omega} m_0 dx = \alpha > 0$.

Seja $(u_{\alpha}, q_{\alpha}, m_{\alpha})$ a solução do problema estacionário (2.1), (2.2) correspondente ao valor de α e obtida no Teorema 2.1.

Argumentos análogos ao do Lema 2.1, mostram que uma solução (0.2) - (0.3) tem concentração m correspondente satisfazendo $\int_{\Omega} m(x, t) dx = \alpha$, para todo $t \geq 0$.

Como dissemos na seção anterior, estamos interessados na relação entre soluções estacionárias e as de evolução. Assim, formularemos as equações em termos de perturbações em torno da solução estacionária $(u_{\alpha}, q_{\alpha}, m_{\alpha})$ fixada acima.

Consideremos as mudanças de variáveis:

$$v = u - u_{\alpha},$$

e

$$\eta = m - m_{\alpha}.$$

Em termos destas variáveis, as equações se reescrevem como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - 2\operatorname{div}(\nu(\eta + m_{\alpha})D(v)) - 2\operatorname{div}(\nu(\eta + m_{\alpha})D(u_{\alpha})) \\ + 2\operatorname{div}(\nu(m_{\alpha})D(u_{\alpha})) + v \cdot \nabla v + v \cdot \nabla u_{\alpha} + u_{\alpha} \cdot \nabla v + \nabla(q - q_{\alpha}) = -\eta \cdot \chi, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \theta \Delta \eta + v \cdot \nabla \eta + v \cdot \nabla m_{\alpha} + u_{\alpha} \cdot \nabla \eta + U \frac{\partial \eta}{\partial x_3} = 0, \quad \text{em } (0, T) \times \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \text{ sobre } (0, T) \times S, \\ v.n = 0 \text{ sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ \nu(\eta + m_\alpha)[D(v + u_\alpha)n - n.(D(v + u_\alpha)n)n] = b_1 \text{ sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ \theta \frac{\partial \eta}{\partial n} - U\eta n_3 = 0 \text{ sobre } (0, T) \times \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$v(0) = v_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \text{em } \Omega. \quad \text{para } (v_0, \eta_0) \in X \times Y. \quad (3.3)$$

Agora, para buscar uma formulação fraca devemos proceder como é usual. Observamos então que, assim como no Capítulo 2, considerando as condições de contorno dadas em (3.2) e (2.2), temos que:

$$\begin{aligned} & -2(\operatorname{div}(\nu(\eta + m_\alpha)), w) + (\nabla q, w) \\ & = 2(\nu(\eta + m_\alpha)D(v + u_\alpha), D(w)) \\ & - 2 \int_{\Gamma} \nu(\eta + m_\alpha)[D(v + u_\alpha)n - (n.D(v + u_\alpha)n)n].w \, dS \\ & = 2(\nu(\eta + m_\alpha)D(v + u_\alpha), D(w)) - 2 \int_{\Gamma} b_1 \, w \, dS. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} & 2(\operatorname{div}(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha)), w) - (\nabla q_\alpha, w) \\ & = -2(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha), D(w)) + 2 \int_{\Gamma} b_1 \, w \, dS. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & -2(\operatorname{div}(\nu(\eta + m_\alpha)), w) + (\nabla q, w) \\ & + 2(\operatorname{div}(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha)), w) - (\nabla q_\alpha, w) \\ & = 2(\nu(\eta + m_\alpha)D(v + u_\alpha), D(w)) - 2 \int_{\Gamma} b_1 \, w \, dS \\ & - 2(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha), D(w)) + 2 \int_{\Gamma} b_1 \, w \, dS \\ & = 2(\nu(\eta + m_\alpha)D(v + u_\alpha), D(w)) - 2(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha), D(w)) \end{aligned}$$

Portanto, mesmo tratando-se de um problema não linear, a dependência explícita de b_1 não aparecerá na formulação fraca.

Assim, adotaremos a seguinte definição:

Definição: Um par de funções (v, η) é chamado uma *solução fraca* de (3.1) - (3.3) se $v \in L^2(0, T; J_0(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; X)$; $\eta \in L^2(0, T; B) \cap L^\infty(0, T; Y)$ e (v, η) satisfaz as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v}{\partial t}, w \right) + 2(\nu(\eta + m_\alpha)D(v); D(w)) + 2(\nu(\eta + m_\alpha)D(u_\alpha), D(w)) - \\ & 2(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha), D(w)) + B_0(v, v, w) + B_0(v, u_\alpha, w) + B_0(u_\alpha, v, w) = \\ & -(\eta \cdot \chi, w) \end{aligned} \quad (3.4)$$

em $D'(0, T)$, para todo $w \in J_0(\Omega)$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \phi \right) + \theta(\nabla \eta, \nabla \phi) + B_1(v, \eta, \phi) + B_1(v, m_\alpha, \phi) + \\ & B_1(u_\alpha, \eta, \phi) - U \left(\eta, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em $D'(0, T)$, para todo $\phi \in B$. Recordemos que B_0 e B_1 são as formas trilineares dadas em (1.2).

Como no capítulo anterior, assumiremos que

$$0 < \nu_0 < \nu(r) < \nu_1 < +\infty, \quad \text{para todo } r \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Nesta seção provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. Sejam $f \in X(\Omega)$ e ν contínua satisfazendo (3.6). Seja $(u_\alpha, q_\alpha, m_\alpha)$ a solução do problema estacionário, obtida a partir do Teorema 2.1 e correspondente a $\alpha = \int_\Omega m_0 dx$. Então, se U é suficientemente pequeno e se $|D(u_\alpha)|$ e $|\nabla m_\alpha|$ são suficientemente pequenas, de modo que

$$(|D(u_\alpha)|^2 + |\nabla m_\alpha|^2) < \frac{\nu_0}{C}, \quad (3.7)$$

onde C depende apenas de Ω , para todo par $(v_0, \eta_0) \in X \times Y$, existe uma solução fraca (v, η) de (3.1) - (3.3). Além disso,

$$|v(t) - v_0| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad |\eta(t) - \eta_0| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow 0^+. \quad (3.8)$$

Prova: Como no capítulo anterior, fixaremos bases de Schauder $(\bar{w}^j)_1^\infty$, de $J_0(\Omega)$, e $(\bar{\phi}^\ell)_1^\infty$, de B .

Construiremos uma solução fraca de (3.1) - (3.3), usando as aproximações de Galerkin

$$v^n(t, x) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_{n,j}(t) \bar{w}^j(x); \quad \eta^n(t, x) = \sum_{\ell=1}^n \bar{d}_{n,\ell}(t) \bar{\phi}^\ell(x)$$

satisfazendo o problema aproximado:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v^n}{\partial t}, \bar{w}^j \right) + 2(\nu(\eta^n + m_\alpha) D(v^n), D(\bar{w}^j)) + 2(\nu(\eta^n + m_\alpha) D(u_\alpha), D(\bar{w}^j)) \\ & - 2(\nu(m_\alpha) D(u_\alpha), D(\bar{w}^j)) + B_0(v^n, v^n, \bar{w}^j) + B_0(v^n, u_\alpha, \bar{w}^j) + B_0(u_\alpha, v^n, \bar{w}^j) \\ & = -(\eta^n, \chi, \bar{w}^j) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \eta^n}{\partial t}, \bar{\phi}^\ell \right) + \theta(\nabla \eta^n, \nabla \bar{\phi}^\ell) + B_1(v^n, \eta^n, \bar{\phi}^\ell) + B_1(v^n, m_\alpha, \bar{\phi}^\ell) + B_1(u_\alpha, \eta^n, \bar{\phi}^\ell) \\ & - U \left(\eta^n, \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{\phi}^\ell \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$v^n(0) = P_n v_0, \quad \eta^n(0) = \bar{P}_n \eta_0, \quad (3.11)$$

para todo $1 \leq j, \ell \leq n$. Aqui, P_n e $\bar{P}$ são projeções ortogonais sobre W_n , o subespaço gerado por $\{\bar{w}^1, \dots, \bar{w}^n\}$, e M_n , o subespaço gerado por $\{\bar{\phi}^1, \dots, \bar{\phi}^n\}$, respectivamente.

Para cada n , (3.9) - (3.11) é um sistema de $2n$ equações não lineares para os coeficientes $\bar{c}_{n,j}, \bar{d}_{n,\ell}$; com condições iniciais $\bar{c}_{n,j}(0) = (v_0, \bar{w}^j), \bar{d}_{n,\ell}(0) = (\eta_0, \bar{\phi}^\ell)$, $j, \ell = 1, \dots, n$.

Este problema de valor inicial tem uma solução maximal definida num intervalo $[0, t_n)$. As estimativas seguintes, mostram na verdade que podemos tomar $t_n = T$.

Assim, multiplicando (3.9) por $\bar{c}_{n,j}$, somando com respeito a j e notando que $B_0(v^n, v^n, v^n) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v^n|^2 + 2(\nu(\eta^n + m_\alpha) D(v^n) \cdot D(v^n)) + (\nu(\eta^n + m_\alpha) D(u_\alpha), D(v^n)) \\ & - 2(\nu(m_\alpha) D(u_\alpha) \cdot D(v^n)) + B_0(v^n, u_\alpha, v^n) = -(\eta^n, \chi, v^n) \end{aligned}$$

Analogamente, em (3.10), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\eta^n|^2 + \theta |\nabla \eta^n|^2 + B_1(v^n, m_\alpha, \eta^n) - \mathcal{U} \left(\eta^n, \frac{\partial \eta^n}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Devido a (3.6) e pela desigualdade de Hölder, segue-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v^n|^2 + 2\nu_0 |D(v^n)|^2 \leq 4\nu_1 |D(u_\alpha)| |D(v^n)| + |D(u_\alpha)| |v^n|_4^2 + |\eta^n| |v^n|$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\eta^n|^2 + \theta |\nabla \eta^n|^2 \leq |v^n|_4 |\nabla m_\alpha| |\eta^n|_4 + \mathcal{U} |\eta^n| |\nabla \eta^n|.$$

Das imersões de Sobolev e desigualdade de Young, aplicando às desigualdades acima, temos que

$$\frac{d}{dt}|v^n| + 2\nu_0|D(v^n)|^2 \leq C_1(|D(u_\alpha)|^2 + |\eta^n|^2 + C_0|D(u_\alpha)|^2|D(v^n)|^2), \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt}|\eta^n|^2 + \theta|\nabla\eta^n|^2 \leq C_2(|\nabla m_\alpha|^2|D(v^n)|^2 + |\eta^n|^2). \quad (3.13)$$

Somando as equações (3.12), (3.13), segue-se que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(|v^n|^2 + |\eta^n|^2) + 2\nu_0|D(v^n)|^2 + \theta|\nabla\eta^n|^2 \\ & \leq C(|D(u_\alpha)|^2 + |\eta^n|^2 + (|D(u_\alpha)|^2 + |\nabla m_\alpha|^2)|D(v^n)|^2). \end{aligned}$$

Fazendo $|D(u_\alpha)|$, $|\nabla m_\alpha|$ suficientemente pequenos, de modo que $(|D(u_\alpha)|^2 + |\nabla m_\alpha|^2) < \frac{\nu_0}{C}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(|v^n|^2 + |\eta^n|^2) + \nu_0|D(v^n)|^2 + \theta|\nabla\eta^n|^2 \leq C(|D(u_\alpha)|^2 + |\eta^n|^2).$$

Integrando de 0 até t , aplicando a desigualdade de Gronwall e notando que $\|P_n\| \leq 1$, $\|\bar{P}_n\| \leq 1$, segue-se que

$$|v^n|^2 + |\eta^n|^2 + \nu_0 \int_0^t |D(v^n)|^2 + \theta \int_0^t |\nabla\eta^n|^2 ds \leq G(t),$$

onde $G(\cdot)$ é uma função contínua e limitada independente de n para todo t . Logo, podemos tomar $t_n = T$.

Assim, a sequência (v^n, η^n) é limitada em $L^2(0, T; J_0(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; X) \times L^2(0, T; B) \cap L^\infty(0, T; Y)$.

A seguir, provaremos estimativas para $\{\frac{\partial v^n}{\partial t}\}$ e $\{\frac{\partial \eta^n}{\partial t}\}$. Consideremos os seguinte operadores:

$$\langle A_\nu(u, m), w \rangle = 2(\nu(m)D(u), D(w)) - 2 \int_\Gamma b_1 u dS,$$

$$\langle F(u, v), w \rangle = B_0(u, v, w),$$

$$\langle H(m), w \rangle = (m \cdot \chi, w),$$

$$\langle \bar{A}(m), \phi \rangle = \theta(\nabla m, \nabla \phi) - \theta \int_{\partial\Omega} \frac{\partial m}{\partial n} \phi dS - U \left(m, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) + U \int_{\partial\Omega} m n_3 dS,$$

$$\langle \bar{F}(u, m), \phi \rangle = B_1(u, m, \phi).$$

Utilizando os argumentos de Lions [8], consideremos as projeções ortogonais anteriores, P_n , e $\bar{P}_n$, como operadores em $L(J_0(\Omega), J_0(\Omega))$ e $L(B, B)$, respectivamente, com normas menores ou iguais a um. Consequentemente, $\frac{\partial v^n}{\partial t}$ e $\frac{\partial \eta^n}{\partial t}$ satisfazem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^n}{\partial t} = & -P_n^*(A_\nu(v^n + u_\alpha, \eta^n + m_\alpha) - A_\nu(u_\alpha, m_\alpha) + F(v^n, v^n) \\ & + F(v^n, u_\alpha) + F(u_\alpha, v^n) + H(\eta^n)) \quad \text{em } J_0(\Omega)', \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde P_n^* é o operador adjunto de P_n .

$$\frac{\partial \eta^n}{\partial t} = -\bar{P}_n^*(\bar{A}(\eta^n) + \bar{F}(v^n, \eta^n) + \bar{F}(v^n, m_\alpha) + \bar{F}(u_\alpha, \eta^n)) \text{ em } B', \quad (3.15)$$

onde $\bar{P}_n^*$ é o operador adjunto de $\bar{P}_n$.

Também, temos as seguintes estimativas dos operadores definidos acima:

$$\begin{cases} \|A_\nu(u, m)\|_{J_0(\Omega)'} \leq C(|D(u)| + \|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}), \\ \|F(u, v)\|_{J_0(\Omega)'} \leq C|D(u)| |D(v)|, \\ \|H(m)\|_{J_0(\Omega)'} \leq C|m|, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \|\bar{A}(m)\|_{B'} \leq C(|\nabla m| + U|m|), \\ \|\bar{F}(u, m)\|_{B'} \leq C|D(u)| |\nabla m|. \end{cases} \quad (3.17)$$

Assim, a equação (3.14) e as estimativas (3.16), implicam que $\{\frac{\partial v^n}{\partial t}\}$ é uma sequência limitada em $L^1(0, T; J_0(\Omega)')$. Usando o Corolário 6 em Simon [19], concluímos que $\{v^n\}$ é relativamente compacta em $L^q(0, T; X)$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Por outro lado, por (3.15) e (3.17), $\{\frac{\partial \eta^n}{\partial t}\}$ é uma sequência limitada em $L^1(0, T; B')$. Logo, concluímos que $\{\eta^n\}$ é relativamente compacta em $L^q(0, T; Y)$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Portanto, concluímos que existe uma subsequência de $\{(v^n, \eta^n)\}$ (que denotaremos da mesma forma), tal que:

$$\begin{aligned}(v^n, \eta^n) &\rightharpoonup (v, \eta) \text{ fracamente em } L^2(0, T; J_0(\Omega) \times B), \\(v^n, \eta^n) &\rightharpoonup (v, \eta) \text{ fracamente } * \text{ em } L^\infty(0, T; X \times Y) \text{ e} \\(v^n, \eta^n) &\rightarrow (v, \eta) \text{ fortemente em } L^2(0, T; X \times Y).\end{aligned}$$

Ainda mais, podemos escolher a sequência $\{(v^n, \eta^n)\}$ de modo que:

$$\begin{aligned}(D(v^n), \nabla \eta^n) &\rightharpoonup (D(v), \nabla \eta) \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)) \text{ e} \\ \eta^n &\rightarrow \eta \quad \text{q.t.p. em } [0, T] \times \Omega.\end{aligned}$$

Agora, consideremos a função ψ em $C^1[0, T]$, tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicando (3.9) por $\psi(t)$, e integrando de 0 até T , temos que:

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\partial_t v^n, \bar{w}^j) \psi(t) dt + 2 \int_0^T (\nu(\eta^n + m_\alpha) D(v^n), D(\bar{w}^j)) \psi(t) dt \\&+ 2 \int_0^T \nu(\eta^n + m_\alpha) D(u_\alpha), D(\bar{w}^j) \psi(t) dt - 2 \int_0^T (\nu(m_\alpha) D(u_\alpha), D(\bar{w}^j)) \psi(t) dt \\&+ \int_0^T B_0(v^n, v^n, \bar{w}^j) \psi(t) dt + \int_0^T B_0(v^n, u_\alpha, \bar{w}^j) \psi(t) dt \\&+ \int_0^T B_0(u_\alpha, v^n, \bar{w}^j) \psi(t) dt = - \int_0^T (\eta^n \cdot \chi, \bar{w}^j) \psi(t) dt \\&+ (P_\alpha v_0, \bar{w}^j \psi(0)).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Notemos que a convergência do termo não linear $B_0(v^n, v^n, \bar{w}^j)$ pode ser obtida da maneira usual (veja Temam [21]). Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\nu(\eta^n + m_\alpha) D(v^n), \psi(t) D(\bar{w}^j)) dt &= \int_0^T (D(v^n), \nu(\eta^n + m_\alpha) \psi(t) D(\bar{w}^j)) dt \\ &\rightarrow \int_0^T (D(v), \nu(\eta + m_\alpha) \psi(t) D(\bar{w}^j)) dt, \end{aligned}$$

pois $D(v^n) \rightarrow D(v)$ fracamente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e

$$\nu(\eta^n + m_\alpha) \psi(t) D(\bar{w}^j) \rightarrow \nu(\eta + m_\alpha) \psi(t) D(\bar{w}^j) \quad \text{fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Assim, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, (3.18) torna-se:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (v, \bar{w}^j) \psi'(t) dt + 2 \int_0^T (\nu(\eta + m_\alpha) D(v^n), D(\bar{w}^j)) \psi(t) dt \\ & + 2 \int_0^T \nu(\eta + m_\alpha) D(u_\alpha), D(\bar{w}^j)) \psi(t) dt - 2 \int_0^T (\nu(m_\alpha) D(u_\alpha), D(\bar{w}^j)) \psi(t) dt \\ & + \int_0^T B_0(v, v, \bar{w}^j) \psi(t) dt + \int_0^T B_0(v, u_\alpha, \bar{w}^j) \psi(t) dt + \int_0^T B_0(u_\alpha, v, \bar{w}^j) \psi(t) dt \\ & = - \int_0^T (\eta \cdot \chi, \bar{w}^j) \psi(t) dt + (v_0, \bar{w}^j) \psi(0). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Aplicando argumentos de densidade e continuidade, temos que (3.19) é válida para todo $w \in J_0(\Omega)$. Logo, v satisfaz (3.4). De maneira similar obtemos que η satisfaz (3.5).

A seguir, mostraremos que (3.8) é válida.

Notemos que para dimensão espacial 3, $v \in C([0, T]; J_0(\Omega)')$. Assim,

$$v(t) \rightarrow v_0 \quad \text{fracamente em } X, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+. \tag{3.20}$$

Também, sabemos que v satisfaz q.t.p em $[0, T]$ a desigualdade:

$$|v(t)|^2 \leq |v_0|^2 + C \int_0^t (|D(u_\alpha)|^2 + |\eta|^2) ds.$$

Portanto, $\limsup |v(t)|^2 \leq |v_0|^2$ quando $t \rightarrow 0^+$. Por outro lado, sabemos que X é um espaço uniformemente convexo, e já que o quadrado da norma $|\cdot|^2$ é um funcional semi-contínuo inferior na topologia fraca, concluímos que $|v_0|^2 \leq \liminf |v(t)|^2$ quando $t \rightarrow 0^+$. Assim, $|v(t)| \rightarrow |v_0|$ quando $t \rightarrow 0^+$ (Brezis [2]). Combinando este último resultado com (3.20), temos que:

$$v(t) \rightarrow v_0 \text{ fortemente em } X, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Similarmente, podemos mostrar que $\eta(t) \rightarrow \eta_0$ fortemente em Y , quando $t \rightarrow 0^+$. Logo, o Teorema 3.1 é válido. $\square$

3.3 Existência Local de Soluções Fortes

Nesta seção apresentaremos um resultado local para soluções fortes. Novamente utilizaremos as estimativas conhecidas para a pressão associada à decomposição de Helmholtz, como no caso estacionário.

Teorema 3.2. Sejam $b_1 = 0$, $f \in X(\Omega)$, $v_0 \in J_0(\Omega)$ e $\eta_0 \in (H^2(\Omega) \cap Y)$. Suponhamos que ν seja de classe C^1 satisfazendo (3.6) e $\sup_{\mathbf{R}} |\nu'(m)| < \nu'_1 < \infty$. Consideremos (u_ν, q_ν, m_ν) uma solução do problema estacionário obtida a partir do Teorema 2.2. Então, para U suficientemente pequeno, existe $T^* = T^*(\Omega, v_0, \eta_0, \nu) \leq T$, tal que o problema (3.1) - (3.3) tem uma solução (v, η) satisfazendo:

$$v \in L^\infty(0, T^*; J_0(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; J_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T^*; L^2(\Omega)), \quad (3.21)$$

$$\eta \in L^\infty(0, T^*; H^2(\Omega) \cap Y), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \in L^\infty(0, T^*; L^2(\Omega)), \quad (3.22)$$

$$v(t) \rightarrow v_0 \text{ fortemente em } J_0(\Omega) \text{ e } \eta(t) \rightarrow \eta_0 \text{ fracamente em } H^2(\Omega) \\ \text{quando } t \rightarrow 0^+. \quad (3.23)$$

Além disso,

$$P\left(\frac{\partial v}{\partial t} - 2\operatorname{div}(\nu(\eta + m_\alpha)D(v)) - 2\operatorname{div}(\nu(\eta + m_\alpha)D(u_\alpha)) \right. \\ \left. + 2\operatorname{div}(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha)) + v \cdot \nabla v + v \cdot \nabla u_\alpha + u_\alpha \cdot \nabla v + \eta \cdot \chi\right) = 0 \text{ em } L^2(0, T^*; X). \quad (3.24)$$

$$\overline{P}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \theta \Delta \eta + v \cdot \nabla \eta + v \cdot \nabla m_\alpha + u_\alpha \cdot \nabla \eta + U \frac{\partial \eta}{\partial x_3}\right) = 0 \\ \text{em } L^\infty(0, T^*; L^2(\Omega)). \quad (3.25)$$

Antes de provar este resultado, façamos alguns comentários.

Primeiramente, como na construção de soluções fortes no caso estacionário, trabalharemos com bases espectrais. Isto é, consideramos aproximações de Galerkin da forma

$$v^n(t, x) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_{n,j}(t) w^j(x), \quad \eta^n(t, x) = \sum_{\ell=1}^n \bar{d}_{n,\ell}(t) \phi^\ell(x).$$

onde $(w^j)_1^\infty$ são as autofunções de A , e $(\phi^\ell)_1^\infty$ são as autofunções de A_1 .

Observamos que para estas aproximações valem todas as estimativas obtidas na seção anterior e que para elas valem automaticamente as condições de contorno requeridas, com $b_1 = 0$.

Além disso, como na prova deste teorema teremos que utilizar um argumento de pequenez, será conveniente introduzir uma nova variável. Para isto, denotamos

$$\eta_0^n = \overline{P}_\alpha \eta_0$$

, e definimos a nova variável

$$\xi^n = \eta^n - \eta_0^n.$$

Agora, como $\xi^n(0) = 0$, por continuidade, $\xi^n(t)$ será pequena para t pequeno; isto nos permitirá obter uma contradição e então provar o teorema.

Assim, reescrevendo (3.9) - (3.11) em termos de (v^n, ξ^n) , obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v^n}{\partial t}, w^j \right) + 2(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(v^n), D(w^j) + 2(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(u_\alpha), D(w^j)) \\ & - 2(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha), D(w^j)) + B_0(v^n, v^n, w^j) + B_0(v^n, u_\alpha, w^j) \\ & + B_0(u_\alpha, v^n, w^j) + ((\xi^n + \eta_0^n)\chi, w^j) = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$(\partial_t \xi^n, \phi^j) + \theta(\nabla \xi^n, \nabla \phi^j) + B_1(v^n, \xi^n, \phi^j) + B_1(v^n, m_\alpha, \phi^j) + B_1(u_\alpha, \xi^n, \phi^j)$$

$$- U \left(\xi^n, \frac{\partial}{\partial x_3} \phi^j \right) = -\theta(\nabla \eta_0^n, \nabla \phi^j) - B_1(v^n, \eta_0^n, \phi^j) - B_1(u_\alpha, \eta_0^n, \phi^j) \quad (3.27)$$

$$+ U \left(\eta_0^n, \frac{\partial}{\partial x_3} \phi^j \right).$$

$$v^n(0) = P_n v_0, \quad \xi^n(0) = 0. \quad (3.28)$$

Em seguida, daremos uma idéia geral da demonstração. Como usualmente se faz, tentaremos obter estimativas de ordem maior para as aproximações de Galerkin em (3.26), como por exemplo, estimativas para $|D(v^n)|$ e $|\nabla \xi^n|$. No entanto teremos dificuldades ao aplicar o procedimento padrão.

Devido a forte não linearidade do operador principal, precisaremos da pressão associada proveniente da decomposição de Helmholtz e de uma estimativa para ela (veja Lema 1.8).

Além disso, as estimativas para $|D(v^n)|$ e $|\nabla \xi^n|$ não serão obtidas diretamente; elas dependem da estimativa de $|\nabla \xi^n|_4$. Assim, usando uma desigualdade de interpolação, estimaremos $|\nabla \xi^n|_4$ em termos de $|\nabla \xi^n|$ e $|\Delta \xi^n|$. Isto, junto com o lema 1.10, nos permitirá escolher $T^* > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $|\nabla \xi^n|_{L^\infty(0,T^*,L^4(\Omega))}$ seja limitada independente de n . Após obtido este resultado, aplicando os argumentos usuais, o teorema é válido.

Prova do Teorema 3.2: Notemos que, devido à escolha de η_0 , então $\|\eta_0^n\| \leq \|\eta_0\|$, para qualquer norma $\|\cdot\|$ utilizada na prova. Agora, procedemos a obter novas estimativas para (v^n, η^n) . Multiplicando (3.26) por $\alpha_j \bar{c}_{n,j}(t)$ e somando j , de 1 até n , temos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v^n}{\partial t}, Av^n \right) - 2(\operatorname{div}(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\sigma)D(v^n)), Av^n) \\ & - 2(\operatorname{div}(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\sigma)D(u_\sigma)), Av^n) + 2(\operatorname{div}(\nu(m_\sigma)D(u_\sigma)), Av^n) \\ & + B_0(v^n, v^n, Av^n) + B_0(v^n, u_\sigma, Av^n) + B_0(u_\sigma, v^n, Av^n) + ((\xi^n + \eta_0^n)\chi, Av^n) = 0. \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\left(\frac{\partial v^n}{\partial t}, Av^n \right) = \frac{d}{dt} |D(v^n)|^2 - 2 \int_\Gamma \frac{\partial v^n}{\partial t} \cdot D(v^n) n \, dS,$$

então

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma \frac{\partial v^n}{\partial t} \cdot D(v^n) n \, dS = \\ & \int_\Gamma \left(\frac{\partial v^n}{\partial t} \cdot n \right) (D(v^n) n) n \, dS + \int_\Gamma \left(\frac{\partial v^n}{\partial t} - \left(\frac{\partial v^n}{\partial t} \cdot n \right) n \right) (D(v^n) n - n \cdot (D(v^n) n) n) dS. \end{aligned}$$

Assim, como $\frac{\partial v^n}{\partial t} \in W_n$, temos que:

$$\left(\frac{\partial v^n}{\partial t}, Av^n \right) = \frac{d}{dt} |D(v^n)|^2 - 2 \int_\Gamma \frac{\partial v^n}{\partial t} \cdot \bar{b}_1 \, dS = \frac{d}{dt} |D(v^n)|^2,$$

onde $\bar{b}_1 = b_1/\nu(\eta^n + m_\alpha) - b_1/\nu(m_\alpha)$. Usando como no Capítulo 2, a identidade: $2\operatorname{div}(\nu(m)D(u)) = \nu(m)\Delta u + 2\nu'(m)\nabla m D(u)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}|D(v^n)|^2 - (\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\Delta v^n, Av^n) \\
&= 2(\nu'(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(v^n), Av^n) + (\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\Delta u_\alpha, Av^n) \\
&+ 2(\nu'(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(u_\alpha), Av^n) \\
&- (\nu(m_\alpha)\Delta u_\alpha, Av^n) - 2(\nu'(m_\alpha)\nabla m_\alpha, Av^n) - B_0(v^n, v^n, Av^n) \\
&- B_0(v^n, u_\alpha, Av^n) - B_0(u_\alpha, v^n, Av^n) - ((\xi^n + \eta_0^n), \chi, Av^n).
\end{aligned}$$

Agora, usando a decomposição de Helmholtz $-\Delta v^n = Av^n + \nabla \bar{q}^n$, para algum $\bar{q}^n$, com $\int_{\Omega} \bar{q}^n = 0$, e as estimativas do Lema 1.8, temos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|D(v^n)|^2 - (\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)Av^n, Av^n) = -(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\nabla \bar{q}^n, Av^n) \\
&+ 2(\nu'(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(v^n), Av^n) - (\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)Au_\alpha, Av^n) \\
&- (\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\nabla \bar{q}_\alpha, Av^n) + 2(\nu'(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(u_\alpha), Av^n) \\
&+ (\nu(m_\alpha)Au_\alpha, Av^n) + (\nu(m_\alpha)\nabla \bar{q}_\alpha, Av^n) - 2(\nu'(m_\alpha)\nabla m_\alpha, Av^n) \tag{3.29} \\
&- B_0(v^n, v^n, Av^n) - B_0(v^n, u_\alpha, Av^n) - B_0(u_\alpha, v^n, Av^n) - ((\xi^n + \eta_0^n), \chi, Av^n).
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder e Korn, imersões de Sobolev e desigual-

dade de Young, os termos do lado direito podem ser estimados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& |\nu'(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) \nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) D(v^n), Av^n| \\
& \leq \nu'_1 |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |D(v^n)|_4 |Av^n| \\
& \leq C_\delta (|\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |D(v^n)|^{1/4} |Av^n|^{7/4}) \\
& \leq C_\delta (|\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4^8 |D(v^n)|^2 + \delta |Av^n|^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) Au_\alpha, Av^n)| \\
& \leq \nu_1 |Au_\alpha| |Av^n| \\
& \leq C_\delta |Au_\alpha|^2 + \delta |Av^n|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |(\nu'(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) \nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) D(u_\alpha), Av^n)| \\
& \leq \nu'_1 |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |D(u_\alpha)|_4 |Av^n| \\
& \leq \nu'_1 |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |D(u_\alpha)|^{1/4} |Au_\alpha|^{3/4} |Av^n| \\
& \leq C_\delta |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4^2 |D(u_\alpha)|^{1/2} |Au_\alpha|^{3/2} + \delta |Av^n|^2 \\
& \leq C_{\delta, \delta_1} |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4^8 |D(u_\alpha)|^2 + \delta_1 |Au_\alpha|^2 + \delta |Av^n|^2.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{div} Av^n = 0$, temos

$$\begin{aligned}
-(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) \nabla \bar{q}^n, Av^n) &= (\bar{q}^n, \operatorname{div}(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) Av^n)) \\
&= (\bar{q}^n, \nu'(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) \nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) Av^n).
\end{aligned}$$

Assim, usando as estimativas do Lema 1.8, temos que:

$$\begin{aligned}
& |-(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) \nabla \bar{q}^n, Av^n)| \\
& \leq \nu'_1 |\bar{q}^n|_4 |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |Av^n| \\
& \leq C |\bar{q}^n|^{1/4} \|\bar{q}^n\|_1^{3/4} |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |Av^n|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{\delta_1} |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |Av^n|^{3/4} |Av^n| |D(v^n)|^{1/4} \\
&\quad + \delta_1 |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |Av^n| |Av^n|^{1/4} \|\bar{q}^n\|_1^{3/4} \\
&\leq C_{\delta, \delta_1} |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4^8 |D(v^n)|^2 + \delta |Av^n|^2 + \delta_1 |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |Av^n|^2.
\end{aligned}$$

Similarmente, obtemos

$$\begin{aligned}
|(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha) \nabla \bar{q}_\alpha, Av^n)| &\leq C_{\delta, \delta_1, \delta_2} |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4^8 |D(u_\alpha)|^2 + \delta_2 |Au_\alpha|^2 \\
&\quad + \delta |Av^n|^2 + \delta_3 |Av^n|^2 + C_{\delta_3} |\nabla(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4^2 |Au_\alpha|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\nu(m_\alpha) Au_\alpha, Av^n)| &\leq \nu_1 |Au_\alpha| |Av^n| \\
&\leq C_\delta |Au_\alpha|^2 + \delta |Av^n|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\nu(m_\alpha) \nabla \bar{q}_\alpha, Av^n)| &\leq \nu_1 \|\bar{q}_\alpha\|_1 |Av^n| \\
&\leq C_\delta |Au_\alpha|^2 + \delta |Av^n|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\nu'(m_\alpha) \nabla m_\alpha D(u_\alpha), Av^n)| &\leq \nu'_1 |\nabla m_\alpha|_4 |D(u_\alpha)|_4 |Av^n| \\
&\leq \nu'_1 |\nabla m_\alpha|_4 |D(u_\alpha)|^{1/4} |Au_\alpha|^{3/4} |Av^n| \\
&\leq C_{\delta, \delta_1} |\nabla m_\alpha|_4^8 |D(u_\alpha)|^2 + \delta_1 |Au_\alpha|^2 + \delta |Av^n|^2.
\end{aligned}$$

Também, temos que:

$$\begin{aligned}
|B_0(v^n, v^n, Av^n)| &\leq |v^n|_6 |\nabla v^n|_3 |Av^n| \\
&\leq |\nabla v^n| |\nabla v^n|^{1/2} |Av^n|^{3/2} \\
&\leq C_\delta |D(v^n)|^6 + \delta |Av^n|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|B_0(v^n, u_\alpha, Av^n)| &\leq |v^n|_6 |\nabla u_\alpha|_3 |Av^n| \\
&\leq |\nabla v^n| |\nabla u_\alpha|^{1/2} |Au_\alpha|^{1/2} |Av^n|
\end{aligned}$$

$$\leq C_{\delta, \delta_1} |D(v^n)|^4 |D(u_\alpha)|^2 + \delta_1 |Au_\alpha|^2 + \delta |Av^n|^2,$$

$$\begin{aligned} |B_0(u_\alpha, v^n, Av^n)| &\leq |u_\alpha|_6 |\nabla v^n|_3 |Av^n| \\ &\leq C_\delta |D(u_\alpha)|^4 |D(v^n)|^2 + \delta |Av^n|^2, \end{aligned}$$

$$|(\xi^n + \eta_0^n) \cdot \chi, Av^n| \leq C_\delta |\xi^n + \eta_0^n|^2 + \delta |Av^n|^2.$$

Escolhendo $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ adequados e usando (3.6) em (3.29), temos que:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} |D(v^n)|^2 + \frac{\nu_0}{2} |Av^n|^2 \\ &\leq C_{\delta_1} [(|\nabla \xi^n|_4^8 + |\nabla \eta_0^n|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8) (|D(v^n)|^2 + |D(u_\alpha)|^2) \\ &\quad + |D(v^n)|^6 + |D(v^n)|^4 |D(u_\alpha)|^2 + |D(v^n)|^2 |D(u_\alpha)|^4 + (|\nabla \xi^n|_4^2 + |\nabla \eta_0^n|_4^2 \\ &\quad + |\nabla m_\alpha|_4^2 + 1) |Au_\alpha|^2 + |\xi^n|^2 + |\eta_0^n|^2 + \delta_1 (|\nabla \xi^n|_4 + |\nabla \eta_0^n|_4 + |\nabla m_\alpha|_4) |Av^n|^2]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Agora, multiplicando (3.10) por $-\beta_\ell \bar{d}_{n,\ell}(t)$ e somando ℓ , de 1 até n , temos que:

$$\begin{aligned} &-(\partial_t \xi^n, A_1 \xi^n) + \theta(A_1 \xi^n, A_1 \xi^n) = B_1(v^n, \xi^n, A_1 \xi^n) + B_1(v^n, m_\alpha, A_1 \xi^n) \\ &+ B_1(u_\alpha, \xi^n, A_1 \xi^n) - \theta(A_1 \eta_0^n, A_1 \xi^n) + B_1(v^n, \eta_0^n, A_1 \xi^n) \\ &+ B_1(u_\alpha, \eta_0^n, A_1 \xi^n) + U \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (\xi^n + \eta_0^n), A_1 \xi^n \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Integrando por partes o primeiro termo acima e notando que a condição de fronteira (3.2d) vale para $\eta_0^n = \bar{P}_n \eta_0$, temos que:

$$-(\partial_t \xi^n, A_1 \xi^n) = (\nabla \partial_t \xi^n, \nabla \xi^n) - \int_{\partial\Omega} \partial_t \xi^n \frac{\partial \xi^n}{\partial n} dS$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \xi^n|^2 - \frac{U}{\theta} \int_{\partial\Omega} \partial_t \xi^n \xi^n n_3 dS \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \xi^n|^2 - \frac{1}{2} \frac{U}{\theta} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} |\xi^n|^2 n_3 dS. \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla \xi^n|^2 - \frac{U}{\theta} \int_{\partial\Omega} |\xi^n|^2 n_3 dS \right).
\end{aligned}$$

Agora, seja $y_n^2(t) = |\nabla \xi^n|^2 - \frac{U}{\theta} \int_{\partial\Omega} |\xi^n|^2 n_3 dS$.

Logo, se U for suficientemente pequena, existem $C, \bar{C}$, tais que

$$\bar{C} |\nabla \xi^n|^2 \leq y_n^2(t) \leq C |\nabla \xi^n|^2.$$

Isto é, as normas acima são equivalentes.

A seguir, estimamos os termos do lado direito de (3.31), usando as desigualdades de Hölder e Korn, imersões de Sobolev e desigualdade de Young:

$$\begin{aligned}
|B_1(v^n, \xi^n + \eta_0^n, A_1 \xi^n)| &\leq \|v^n\|_6 \|\nabla(\xi^n + \eta_0^n)\|_3 \|A_1 \xi^n\| \\
&\leq C_\delta |D(v^n)|^2 \|\nabla(\xi^n + \eta_0^n)\| \|A_1(\xi^n + \eta_0^n)\| + \delta \|A_1 \xi^n\|^2 \\
&\leq C_{\delta, A_1} |D(v^n)|^4 \|\nabla(\xi^n + \eta_0^n)\|^2 + \delta_1 (\|A_1 \xi^n\|^2 + \|A_1 \eta_0^n\|^2) \\
&\quad + \delta \|A_1 \xi^n\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|B_1(v^n, m_\alpha, A_1 \xi^n)| &\leq \|v^n\|_4 \|\nabla m_\alpha\|_4 \|A_1 \xi^n\| \\
&\leq C_\delta |D(v^n)|^2 \|\nabla m_\alpha\|_4^2 + \delta \|A_1 \xi^n\|^2,
\end{aligned}$$

$$|\theta(A_1 \eta_0^n, A_1 \xi^n)| \leq C_\delta |A_1 \eta_0^n|^2 + \delta \|A_1 \xi^n\|^2.$$

$$|B_1(u_\alpha, \xi^n + \eta_0^n, A_1 \xi^n)| \leq \|u_\alpha\|_6 \|\nabla(\xi^n + \eta_0^n)\|_3 \|A_1 \xi^n\|$$

$$\begin{aligned}
& \leq C_{\delta, \delta_1} |D(u_\alpha)|^4 |\nabla(\xi^n + \eta_0^n)|^2 + \\
& \quad \delta_1 (|A_1 \xi^n|^2 + |A_1 \eta_0^n|^2) + \delta |A_1 \xi^n|^2, \\
|U \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (\xi^n + \eta_0^n), A_1 \xi^n \right)| & \leq C_\delta |\nabla(\xi^n + \eta_0^n)|^2 + \delta |A_1 \xi^n|^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo δ adequado em (3.31) segue-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \overline{C} |\nabla \xi^n|^2 + \theta |A_1 \xi^n|^2 & \leq C [|D(v^n)|^4 (|\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2) + |D(v^n)|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 \\
& + |A_1 \eta_0^n|^2 + |D(u_\alpha)|^4 (|\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2) + |\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2].
\end{aligned} \quad (3.32)$$

Integrando de 0 até t e considerando $l = \min\{1, \overline{C}, \theta\}$ em (3.32), temos que

$$\begin{aligned}
|\nabla \xi^n|^2 + \int_0^t |A_1 \xi^n|^2 ds & \leq C_1 \int_0^t |\nabla \xi^n|^2 (|D(v^n)|^4 + |D(u_\alpha)|^4 + 1) ds \\
& + C_1 \int_0^t |\nabla \eta_0^n|^2 (|D(v^n)|^4 + |D(u_\alpha)|^4 + 1) ds \\
& + C_1 \int_0^t (|\nabla m_\alpha|_4^2 |D(v^n)|^2 + |A_1 \eta_0^n|^2) ds.
\end{aligned} \quad (3.33)$$

Assim, pela desigualdade de Gronwall,

$$|\nabla \xi^n(t)|^2 \leq H_1(t; \|D(v^n)\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}), \quad (3.34)$$

onde

$$H_1(t; y) \equiv M_2(t; y) \exp M_1(t; y)t.$$

$$\text{com } M_1(t; y) = C_1(y^4 + |D(u_\alpha)|^4 + 1).$$

$$M_2(t; y) = M_1(t; y) \int_0^t |\nabla \eta_0^n|^2 ds + C_1 y^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 t + C_1 \int_0^t |A_1 \eta_0^n|^2 ds.$$

Notemos que a função H_1 é estritamente crescente em cada uma de suas variáveis e independe de n .

Agora, procuraremos estimativas para $\{\partial_t \xi^n\}$ e $\{A_1 \xi^n\}$. Diferenciando (3.27) com respeito a t e tomando $\partial_t \xi^n$ como função teste na equação resultante, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_t \xi^n|^2 + \theta |\nabla \partial_t \xi^n|^2 &= -B_1 \left(\frac{\partial v^n}{\partial t}, \xi^n + \eta_0^n + m_\alpha, \partial_t \xi^n \right) + U \left(\partial_t \xi^n, \frac{\partial}{\partial x_3} \partial_t \xi^n \right) \\ &\leq \left| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right| |\nabla (\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4 |\partial_t \xi^n|_4 + U |\partial_t \xi^n| |\nabla \partial_t \xi^n| \\ &\leq C_\delta \left| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right|^2 |\nabla (\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)|_4^2 + \delta |\nabla \partial_t \xi^n|^2 + C_\delta |\partial_t \xi^n|^2 + \delta |\nabla \partial_t \xi^n|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo δ adequado,

$$\frac{d}{dt} |\partial_t \xi^n|^2 + \theta |\nabla \partial_t \xi^n|^2 \leq C_2 \left[\left| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right|^2 (|\nabla \xi^n|_4^2 + |\nabla \eta_0^n|_4^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) + |\partial_t \xi^n|^2 \right]. \quad (3.35)$$

Por outro lado, considerando $\frac{\partial v^n}{\partial t}$ como função teste em (3.26), obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right|^2 - 2(\operatorname{div}(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(v^n)), \frac{\partial v^n}{\partial t}) - 2\operatorname{div}(\nu(\xi^n + \eta_0^n + m_\alpha)D(u_\alpha)), \frac{\partial v^n}{\partial t}) \\ + 2(\operatorname{div}(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha)), \frac{\partial v^n}{\partial t}) + B_0(v^n, v^n + u_\alpha, \frac{\partial v^n}{\partial t}) + B_0(u_\alpha, v^n, \frac{\partial v^n}{\partial t}) \\ + ((\xi^n + \eta_0^n) \cdot \chi, \frac{\partial v^n}{\partial t}) = 0 \end{aligned}$$

Pelas estimativas anteriores, concluímos que:

$$\left| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right|^2 \leq C_3 [|Av^n|^2 + |Au_\alpha|^2 + (|\nabla \xi^n|_4^8 + |\nabla \eta_0^n|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8)(|D(v^n)|^2 + |D(u_\alpha)|^2)] \quad (3.36)$$

$$+ [|D(v^n)|^6 + |D(v^n)|^4 |D(u_\alpha)|^2 + |D(u_\alpha)|^4 |D(v^n)|^2 + |\xi^n|^2 + |\eta_0^n|^2].$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} |\partial_t \xi^n|^2 &\leq C_4 [|A_1 \xi^n|^2 + |D(v^n)|^4 (|\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2) + |D(v^n)|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 + |A_1 \eta_0^n|^2 \\ &\quad + |D(u_\alpha)|^4 (|\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2) + |\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Logo, como $|D(v_0^n)| \leq |D(v_0)|$, temos que:

$$\begin{aligned} |\partial_t \xi^n(0)|^2 \leq & C_4[|D(v_0)|^4 |\nabla \eta_0|^2 + |D(v_0)|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 + |A_1 \eta_0|^2 \\ & + |D(u_\alpha)|^4 |\nabla \eta_0|^2 + |\nabla \eta_0|^2]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall na inequação (3.35), junto com as estimativas (3.36), (3.38): concluímos que existe uma função não-negativa H_2 a qual independe de n e estritamente crescente em cada uma de suas variáveis, de modo que:

$$|\partial_t \xi^n(t)|^2 \leq H_2(t; \|D(v^n)\|_{L^\infty(0,t;L^2)}; \|\nabla \xi^n\|_{L^\infty(0,t;L^4)}; \|Av^n\|_{L^2(0,t;L^2)}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |A_1 \xi^n|^2 \leq & C_5[|D(v^n)|^4 (|\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2) + |D(v^n)|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 + |A_1 \eta_0^n|^2 \\ & + |D(u_\alpha)|^4 (|\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2) + |\nabla \xi^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2 + |\nabla \eta_0^n|^2 + |\partial_t \xi^n|^2] \end{aligned}$$

Logo,

$$|A_1 \xi^n|^2 \leq H_3(t; \|D(v^n)\|_{L^\infty(0,t;L^2)}; \|\nabla \xi^n\|_{L^\infty(0,t;L^4)}; \|Av^n\|_{L^2(0,t;L^2)}), \quad (3.39)$$

onde H_3 é uma função contínua, estritamente crescente e independente de n em cada uma de suas variáveis.

Em virtude da desigualdade de interpolação e as estimativas (3.34), (3.39), temos que:

$$\begin{aligned} |\nabla \xi^n(t)|_4 & \leq C_6 |\nabla \xi^n(t)|^{1/4} |A_1 \xi^n(t)|^{3/4} \\ & \leq C_6 H_1^{1/8}(t) H_3^{3/8}(t). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Agora, escolhemos $\delta_1 > 0$, tal que:

$$\delta_1 (1 + \|\nabla \eta_0\|_{L^\infty(0,T;L^4)} + |\nabla m_\alpha|_4) \leq \frac{\nu_0}{4}.$$

Usaremos esta condição junto com (3.30). Uma vez escolhido δ_1 , a constante C_{δ_1} que aparece em (3.30) fica determinada. Por outro lado, definamos as seguintes funções:

$$\begin{aligned}\gamma(t) \equiv & 2(|D(u_0)|^2 + C_{\delta_1} \int_0^t ((1 + |\nabla \eta_0|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8) |D(u_\alpha)|^2 \\ & + (2 + |\nabla \eta_0|_4^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) |Au_\alpha|^2 + G(t) + |\eta_0|^2) ds].\end{aligned}$$

$$F(t) \equiv C_{\delta_1} \int_0^t \gamma^2(s) ds + C_{\delta_1}^2 \int_0^t (1 + |\nabla \eta_0|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8 + |D(u_\alpha)|^4) ds \quad e$$

$$H_4(t) \equiv C_6 H_1^{1/8}(t, \gamma(t), 1) H_3^{3/8}(t, \gamma(t), 1, \gamma(t)/(\frac{\nu_0}{4})).$$

Agora, seja $0 < T^* \leq T$, satisfazendo a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}F(T^*) &= C_{\delta_1} \int_0^{T^*} \gamma^2(s) ds + C_{\delta_1}^2 \int_0^{T^*} (1 + |\nabla \eta_0|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8 + |D(u_\alpha)|^4) ds \\ &\leq [\ln 3/2]^{1/2}\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$e H_4(T^*) = C_6 H_1^{1/8}(T^*, \gamma(T^*), 1) H_3^{3/8}(T^*, \gamma(T^*), 1, \gamma(T^*)/(\nu_0/4)) < 1. \tag{3.42}$$

Notemos que T^* existe porque $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_1(t, \gamma(t), 1) = 0$, e

$$H_3(t, \gamma(t), 1, \gamma(t)/(\nu_0/4)) \leq H_3(T, \gamma(T), 1, \gamma(T)/(\nu_0/4)),$$

para $0 \leq t \leq T$.

Devido a que $F(t)$ e $H_1(t)$ são funções não-decrescentes, (3.41), (3.42) implicam

$$F(t) < \ln(3/2)^{1/2} \quad e \quad H_4(t) < 1, \quad \text{para } t \in [0, T^*]. \tag{3.43}$$

Com estes resultados, mostraremos que

$$|\nabla \xi^n(t)|_4 < 1, \quad \text{para todo } t \in [0, T^*]. \tag{3.44}$$

De fato, dado que $|\nabla \xi^n(0)| = 0$, por continuidade temos que (3.44) é válida para tempos pequenos. Suponha agora por contradição que existe $0 < T_1^n < T^*$ tal que vale (3.44) para $0 \leq t < T_1^n$, mas $|\nabla \xi^n(T_1^n)|_4 = 1$. Assim, de (3.30) e da escolha de δ_1 , concluímos que v^n satisfaz para todo $t \in [0, T_1^n]$ a seguinte desigualdade diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |D(v^n)|^2 + \frac{\nu_0}{2} |Av^n|^2 &\leq C_{\delta_1} |D(v^n)|^6 + C_{\delta_1} |D(u_\alpha)|^2 |D(v^n)|^4 + C_{\delta_1} (1 + |\nabla \eta_0|_4^8 \\ &+ |\nabla m_\alpha|_4^8 + |D(u_\alpha)|^4) |D(v^n)|^2 + C_{\delta_1} (1 + |\nabla \eta_0|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8) |D(u_\alpha)|^2 \\ &+ C_{\delta_1} (2 + |\nabla \eta_0|_4^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) |Au_\alpha|^2 + C_{\delta_1} (G(t) + |\eta_0|^2). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por outro lado, observemos que se $\varphi > 0$, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\varphi^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \varphi^3 + \varepsilon \varphi.$$

Assim, devido a nossa escolha de T^* , (3.41) e a desigualdade acima, podemos aplicar o lema (1.10) em (3.45), com $\varphi(t) = |D(v^n(t))|^2$, $\psi(t) = \frac{\nu_0}{4} |Av^n(t)|^2$,

$$\begin{aligned} h(t) &= (1 + |\nabla \eta_0|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8 + |D(u_\alpha)|^4) \text{ e } f(t) = C_{\delta_1} (1 + |\nabla \eta_0|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8) |D(u_\alpha)|^2 \\ &+ C_{\delta_1} (2 + |\nabla \eta_0|_4^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) |Au_\alpha|^2 + C_{\delta_1} (G(t) + |\eta_0|^2). \end{aligned}$$

Observando que (3.41) corresponde à condição (1.4) no Lema 1.10, concluímos que:

$$|D(v^n(t))|^2 + \frac{\nu_0}{4} \int_0^t |Av^n|^2 ds \leq \gamma(t) \leq \gamma(T^*), \quad \text{para } t \in [0, T_1^n].$$

Logo, podemos aplicar as estimativas (3.34) e (3.39), e obter em $[0, T_1^n]$,

$$|\nabla \xi^n(t)|^2 \leq H_1(t, \gamma(T^*), 1) \quad \text{e} \quad |A_1 \xi^n(t)|^2 \leq H_2(t, \gamma(T^*), 1, \gamma(T^*)/(\nu_0/4)).$$

Deste modo, (3.40) e (3.43) implicam que $|\nabla \xi^n(t)|_4 \leq H_4(t) < 1$ para $t \in [0, T_1^n]$. Em particular $|\nabla \xi^n(T_1^n)|_4 < 1$. Esta contradição demonstra (3.44).

Usando a estimativa (3.44) em (3.30), junto com (3.33), obtemos estimativas de ordem maior para (v^n, ξ^n) e portanto para (v^n, η^n) . Isto é suficiente em termos de subsequências, para tomar o limite, quando $n \rightarrow \infty$ e obter no limite a solução forte local satisfazendo (3.21), (3.22).

Por outro lado, para provar que a velocidade inicial é assumida fortemente em $J_0(\Omega)$, é suficiente mostrar que $\limsup_{t \rightarrow 0^+} |D(v(t))| \leq |D(v_0)|$, já que sabemos que $v(t) \rightarrow v_0$ forte em $L^2(\Omega)$.

Para isto, observemos que:

$$\begin{aligned} |D(v(t))|^2 &\leq |D(v_0)|^2 + C \int_0^t ((1 + |\nabla \eta_0|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8) |D(u_\alpha)|^2 \\ &\quad + (2 + |\nabla \eta_0|_4^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) |A u_\alpha|^2 + G(t) + |\eta_0|^2) ds] e^{F(t)}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Como $F(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, então obtemos o resultado desejado. A estimativa (3.39) implica que $|A_1 \eta(t)|$ permanece limitada quando $t \rightarrow 0^+$. Já que sabemos que $\eta(t) \rightarrow \eta_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow 0^+$, isto implica $\eta(t) \rightarrow \eta_0$ fracamente em $H^2(\Omega)$. Além disso, é claro que (v, η) satisfaz as condições (3.24), (3.25). Isto completa a prova do Teorema 3.2. $\square$

3.4 Unicidade de Soluções

Nesta seção apresentaremos resultados de unicidade para as soluções fortes locais obtidas anteriormente.

Teorema 3.3. A solução forte obtida no Teorema 3.2, é única.

Prova Sejam $(v_1, \eta_1), (v_2, \eta_2)$ duas soluções do problema (3.1) - (3.3) com as propriedades (3.21) - (3.25). Subtraindo as correspondentes equações e denotando $z = v_1 - v_2, \xi = \eta_1 - \eta_2$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z, w) + 2(\nu(\eta_1 + m_\sigma)D(z), D(w)) + B_0(z, v_1, w) + B_0(v_2, z, w) \\ + B_0(z, u_\sigma, w) + B_0(u_\sigma, z, w) = -(\xi \chi, w) - 2([\nu(\eta_1 + m_\sigma) - \nu(\eta_2 + m_\sigma)]D(v_2), D(w)) \\ - 2([\nu(\eta_1 + m_\sigma) - \nu(\eta_2 + m_\sigma)]D(u_\sigma), D(w)). \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\xi, \phi) - \theta(A_1 \xi, \phi) + B_1(z, \eta_1, \phi) + B_1(v_2, \xi, \phi) + B_1(z, m_\sigma, \phi) \\ + B_1(u_\sigma, \xi, \phi) + U\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_3}, \phi\right) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $w = z$ e $\phi = -A_1 \xi$ em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|z|^2 + 2\nu_0|D(z)|^2 \leq C|z|^2(|v_1|_4^8 + |u_\sigma|_4^8) + C|\nabla \xi|^2 + \\ C|\xi|_\infty^2(|D(v_2)|^2 + |D(u_\sigma)|^2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\nabla \xi|^2 + \theta|A_1 \xi|^2 \leq C|z|_4^2(|\nabla \eta_1|_4^2 + |\nabla m_\sigma|_4^2) + \\ C(|v_2|_4^8 + |u_\sigma|_4^8)|\nabla \xi|^2 + C|\nabla \xi|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Logo, as estimativas (3.48), (3.49), e as imersões de Sobolev implicam

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(|z|^2 + |\nabla \xi|^2) + 2\nu_0 |D(z)|^2 + \theta |A_1 \xi|^2 \\ & \leq C|z|^2(|v_1|_4^8 + |u_\alpha|_4^8) + C|z|_4^2(|\nabla \eta_1|_4^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) \\ & + C|\nabla \xi|^{1/2} |A_1 \xi|^{3/2} (|D(v_2)|^2 + |D(u_\alpha)|^2) + C(|v_2|_4^8 + |u_\alpha|_4^8 + 2)|\nabla \xi|^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young acima, temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(|z|^2 + |\nabla \xi|^2) + \nu_0 |D(z)|^2 + \frac{\theta}{2} |A_1 \xi|^2 \\ & \leq C(|v_1|_4^8 + |u_\alpha|_4^8 + |\nabla \eta_1|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8) |z(t)|^2 + \\ & + C(|D(v_2)|^8 + |D(u_\alpha)|^8 + |v_2|_4^8 + |u_\alpha|_4^8 + 2) |\nabla \xi|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(|z|^2 + |\nabla \xi|^2) \leq (N_1(t) + N_2(t))(|z|^2 + |\nabla \xi|^2), \\ \text{com } & N_1(t) = C(|v_1|_4^8 + |u_\alpha|_4^8 + |\nabla \eta_1|_4^8 + |\nabla m_\alpha|_4^8) \quad \text{e} \\ & N_2(t) = C(|D(v_2)|^8 + |D(u_\alpha)|^8 + |v_2|_4^8 + |u_\alpha|_4^8 + 2). \end{aligned}$$

Como $N_1(\cdot) + N_2(\cdot)$ é uma função integrável e $z(0) = 0$, $\xi(0) = 0$, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos o resultado desejado. $\square$

Capítulo 4

Existência Global de Soluções Fortes.

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos um Teorema de Existência Global para Soluções Fortes. Como no capítulo anterior, estaremos interessados na relação entre soluções estacionárias e soluções evoluindo no tempo. Portanto, consideraremos apenas forças externas independentes do tempo, analisando perturbações que evoluem em torno de uma determinada solução estacionária $(u_\alpha, q_\alpha, m_\alpha)$.

É importante ressaltar que para obter o resultado precisaremos impor certas condições de pequenez tanto sobre os dados iniciais quanto sobre a solução estacionária associada, através da adaptação de um raciocínio semelhante ao feito em Lorca e Boldrini [10].

4.2 Existência Global

Apresentaremos uma sequência de estimativas válidas a solução e suas aproximações espectrais. Basear-nos-emos nestas estimativas para obter uma solução global.

Conforme dito acima, vamos trabalhar com as variáveis perturbadas:

$$v = u - u_\alpha,$$

$$\eta = m - m_\alpha.$$

Lembramos que as equações a serem consideradas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v - 2\operatorname{div}(\nu(\eta + m_\alpha)D(v)) - 2\operatorname{div}(\nu(\eta + m_\alpha)D(u_\alpha)) \\ \quad + 2\operatorname{div}(\nu(m_\alpha)D(u_\alpha)) + v \cdot \nabla v + v \cdot \nabla u_\alpha + u_\alpha \cdot \nabla v + \nabla(q - q_\alpha) = -\eta \cdot \chi, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t \eta - \theta \nabla \eta + v \cdot \nabla \eta + v \cdot \nabla m_\alpha + u_\alpha \cdot \nabla \eta + U \frac{\partial \eta}{\partial x_3} = 0, \quad \text{em } (0, T) \times \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times S, \\ v \cdot n = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ \nu(\eta + m_\alpha)[D(v + u_\alpha)n - n \cdot (D(v + u_\alpha)n)n] = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ \theta \frac{\partial \eta}{\partial n} - U \eta n_3 = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega, \\ v(0) = v_0, \eta(0) = \eta_0, \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Como no caso do Teorema 3.2, trabalharemos com aproximações espectrais. Obteremos uma sequência de estimativas válidas a solução e suas aproximações. Usando, então, argumentos de desigualdades diferenciais, obteremos uma solução global.

Temos então:

Teorema 4.1. Suponhamos tenhamos satisfeitas todas as condições do Teorema 3.2 e que, além disso, as normas $\|D(v_0)\|$, $\|\nabla \eta_0\|$, $\|\nabla m_\alpha\|_4$, $\|Au_\alpha\|$ sejam suficientemente

pequenas. Então, a solução (v, η) construída no Teorema 3.2 existe globalmente. Neste caso, existem constantes positivas β e M , tais que:

$$\sup_{t \geq 0} |\Delta \eta(t)|^2 \leq \beta/2, \quad \sup_{t \geq 0} \{|D(v(t))| + |\partial_t \eta(t)|\} \leq M. \quad (4.3)$$

Os mesmos tipos de estimativas valem uniformemente em n para as aproximações de Galerkin.

Prova: As estimativas seguintes são obtidas primeiramente para as aproximações (v^n, η^n) , e logo aplicando um procedimento padrão, deduzidas para (v, η) no limite.

Para obter as estimativas necessárias, trabalharemos de maneira análoga àquelas nas provas do Teorema de Existência de Solução Fraca (Teorema 3.1) e Teorema de Existência Forte Local (Teorema 3.2). Obtemos então:

$$\frac{d}{dt} |v^n|^2 + \nu_0 |D(v^n)|^2 \leq C(|D(u_\alpha)|^2 + |\nabla \eta^n|^2), \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} |\eta^n|^2 + \theta |\nabla \eta^n|^2 \leq C|\nabla m_\alpha|^2 |D(v^n)|^2, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |D(v^n)|^2 + \nu_0 |Av^n|^2 &\leq C[|\nabla m_\alpha|_4^2 |\nabla \eta^n|^2 |Av^n|^2 + |Au_\alpha|^2 \\ &+ |Au_\alpha|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 |A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |Au_\alpha|^2 + |D(v^n)|^6 + |D(u_\alpha)|^2 |D(v^n)|^4] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$+ |D(u_\alpha)|^4 |D(v^n)|^2 + \frac{7}{\nu_0} C_\Omega^2 |\nabla \eta^n|^2.$$

$$\begin{aligned} |\partial_t v^n|^2 &\leq C[|Av^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |Av^n|^2 |A_1 \eta^n|^2 + |Au_\alpha|^2 + |Au_\alpha|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 |A_1 \eta^n|^2 \\ &+ |\nabla m_\alpha|_4^2 |Au_\alpha|^2 + |D(v^n)|^6 + |D(u_\alpha)|^2 |D(v^n)|^4 + |D(u_\alpha)|^4 |D(v^n)|^2]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt}|\partial_t \eta^n|^2 + \theta |\nabla \partial_t \eta^n|^2 \leq C |\partial_t v^n|^2 (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} |\partial_t \eta^n|^2 &\leq C[|A_1 \eta^n|^2 + |D(v^n)|^2 |A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |D(v^n)|^2 \\ &+ |D(u_\alpha)|^2 |A_1 \eta^n|^2], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} |A_1 \eta^n|^2 &\leq C[|\partial_t \eta^n|^2 + |D(v^n)|^2 |A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |D(v^n)|^2 + \\ &+ |D(u_\alpha)|^2 |A_1 \eta^n|^2 + |\nabla \eta^n|^2]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notemos que para obter (4.4), fizemos $|D(u_\alpha)|$ suficientemente pequena, de modo que $C_0 |D(u_\alpha)| \leq \nu_0/2$.

No caso das estimativas (4.5) e (4.8), consideramos $UC_\Omega \leq \theta/4$. Observemos também, que a constante C não depende de n .

Combinando (4.5), (4.6) e considerando $|\nabla m_\alpha|$ suficientemente pequeno, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} |D(v^n)|^2 + \frac{\nu_0}{2} |Av^n|^2 \\ &\leq C[|D(v^n)|^6 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |A_1 \eta^n|^2 |Av^n|^2 + |Au_\alpha|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 |A_1 \eta^n|^2 \\ &+ |D(u_\alpha)|^2 |D(v^n)|^4 + |D(u_\alpha)|^4 |D(v^n)|^2 + |Au_\alpha|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |Au_\alpha|^2]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim, combinando (4.11), (4.7) e (4.8), temos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (|D(v^n)|^2 + |\partial_t \eta^n|^2) + \frac{\nu_0}{2} |Av^n|^2 + \theta |\nabla \partial_t \eta^n|^2 \\ &\leq C[1 + C(|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2)] (|D(v^n)|^6 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |A_1 \eta^n|^2 |Av^n|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |Au_\alpha|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2 |A_1 \eta^n|^2 + |D(u_\alpha)|^2 |D(v^n)|^4 + |D(u_\alpha)|^4 |D(v^n)|^2 \\
& + |Au_\alpha|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |Au_\alpha|^2) + C |Av^n|^2 (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2).
\end{aligned}$$

Somando termos positivos convenientes no lado direito da última desigualdade, concluímos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (|D(v^n)|^2 + |\partial_t \eta^n|^2) + \frac{\nu_0}{2} |Av^n|^2 + \theta |\nabla \partial_t \eta^n|^2 \\
\leq & C (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) [2 + C (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2)] [|Av^n|^2 + |\nabla \partial_t \eta^n|^2] \\
& + C [1 + (C (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2))] [|D(v^n)|^2 + |\partial_t \eta^n|^2]^3 \quad (4.12) \\
& + C (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) [1 + C (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2)] (|Au_\alpha|^2 |\nabla m_\alpha|_4^2) \\
& + C (1 + C (|A_1 \eta^n|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2)) (|Au_\alpha|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |Au_\alpha|^2).
\end{aligned}$$

onde a constante positiva C é independente de n e das condições iniciais.

Agora, vamos escolher a constante $\beta > 0$, de modo que o resultado estabelecido seja válido. Fixamos β , de modo que

$$C\beta < \overline{K}, \quad \text{onde} \quad \overline{K} = \frac{-2 + (4 + 2 \min\{\nu_0/2, \theta\})^{1/2}}{2} \quad (4.13)$$

A seguir, mostraremos que, quando os dados iniciais e $|Au_\alpha|$ são suficientemente pequenos e $|\nabla m_\alpha|_4^2 \leq \beta/2$, então

$$\sup_{t \geq 0} \{|A_1 \eta^n(t)|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2\} < \beta \quad \text{e} \quad (4.14)$$

$\{|D(u^n(t))| + |\partial_t \eta^n(t)|\} \leq M$, para todo $t \geq 0$ e $M > 0$.

De fato, consideremos a condição inicial $\eta(0)$, satisfazendo $|A_1 \eta(0)|^2 < \beta/2$. Logo, pela escolha da base de funções, é válido que $|A_1 \eta^n(0)|^2 < \beta/2$, para qualquer n .

Lembremos que $\eta^n = \sum_{\ell=1}^n \bar{d}_{n,\ell}(t) \phi^\ell(x)$ são obtidos ao resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias e portanto são contínuos em t no intervalo de existência $[0, t_2^n)$, para $0 < t_2^n \leq \infty$.

Assim, $A_1 \eta^n(t) = \sum_{\ell=1}^n \bar{d}_{n,\ell}(t) \mathcal{J}_\ell \phi^\ell(x)$ também é contínuo em $[0, t_2^n)$ com valores em $L^2(\Omega)$.

Como $|A_1 \eta^n(0)|^2 < \beta/2$, já seja $\sup\{|A_1 \eta^n(t)|^2\} < \beta/2$, para $t \in [0, t_2^n)$, o que significa que não temos "blow-up", portanto $t_2^n = \infty$ e (4.14) é verdadeira: ou existe t_1^n , com $0 < t_1^n < t_2^n$, $|A_1 \eta^n(t)|^2 < \beta/2$ para $t \in [0, t_1^n)$ e $|A_1 \eta^n(t_1^n)|^2 = \beta/2$.

Assumamos que $\eta^n(t)$ satisfaz a segunda possibilidade e definamos a variável auxiliar

$$\varphi_n(t) = |D(v^n(t))|^2 + |\partial_t \eta^n(t)|^2.$$

Observemos que, como $|A_1 \eta^n(t)|^2 \leq \beta/2$, para $t \in [0, t_1^n]$: neste intervalo temos $C(|A_1 \eta^n(t)|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2) \leq C\beta < \bar{K}$. Assim, podemos estimar o lado direito de (4.12) e obter a seguinte inequação diferencial:

$$\frac{d}{dt} \varphi_n + \frac{K}{2} (|Av^n|^2 + |\nabla \partial_t \eta^n|^2) \leq \bar{C} \varphi_n^3 + \bar{C}(\beta + 1)^2 |Au_\alpha|^2, \quad (4.15)$$

com $\bar{C} = C(1 + \bar{K})$.

Notemos que existe $C_1 > 0$, que independe de n , tal que:

$$C_1(|D(v^n)|^2 + |\partial_t \eta^n|^2) \leq \frac{K}{2} (|Av^n|^2 + |\nabla \partial_t \eta^n|^2).$$

Logo, (4.15) implica que:

$$\frac{d}{dt} \varphi \leq \bar{C} \varphi^3 - C_1 \varphi + C_2.$$

$$\begin{aligned}\varphi_n(0) &= |D(v_0^n)|^2 + |\partial_t \eta^n(0)|^2, \quad \text{onde} \\ C_2 &= \overline{C}(\beta + 1)^2 |Au_\alpha|^2.\end{aligned}$$

O Teorema de Comparação para Desigualdades Diferenciais (Hale [3]), garante que existe $\phi(t)$, de modo que para todo $t \in [0, t_1^n]$:

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &\leq \phi(t), \\ \frac{d}{dt}\phi &= \overline{C}\phi^3 - C_1\phi + C_2 = R(\phi, C_2), \\ \phi(0) &= |D(v_0)|^2 + |\partial_t \eta(0)|^2.\end{aligned}$$

Observemos que devido à escolha da base de funções, $|D(v_0^n)|^2 + |\partial_t \eta^n(0)|^2 \leq |D(u_0)|^2 + |\partial_t \eta(0)|^2$, e observemos também que $\overline{C}$ e C_1 não dependem dos dados iniciais e da solução do problema estacionário.

Agora, notemos que $R(\phi, 0) = \overline{C}\phi^3 - C_1\phi$ tem três raízes simples: $r_1(0) = -\left(\frac{C_1}{\overline{C}}\right)^{1/2}$, a qual é instável; $r_2(0) = 0$, que é estável; e $r_3(0) = \left(\frac{C_1}{\overline{C}}\right)^{1/2}$, a qual também é instável. Consequentemente, para $C_2 > 0$ pequeno, $R(\phi, C_2)$ tem três raízes simples, satisfazendo $r_1(C_2) < 0 < r_2(C_2) < r_3(C_2)$, onde $r_1(C_2)$ e $r_3(C_2)$ são instáveis e $r_2(C_2)$ é estável. Ainda mais, $r_2(C_2) \rightarrow 0^+$ quando $C_2 \rightarrow 0^+$ (decrecendo monotonicamente). Além disso, para pequenos valores de $C_2 > 0$, $R(\phi, C_2) > 0$, para $\phi \in (0, r_2(C_2))$.

Assim, existe $\delta > 0$, tal que se:

$$C_2 < \delta \quad \text{e} \quad \varphi_n(0) \leq \phi(0) < r_2(C_2), \quad (4.16)$$

então temos

$$0 \leq \varphi(t) = |D(v^n(t))|^2 + |\partial_t \eta^n(t)|^2 \leq \phi(t) \leq \phi(0) < r_2(C_2), \quad (4.17)$$

IM/T 1291

para todo $t \in [0, t_1^n]$.

Notemos que a estimativa (4.9) implica:

$$|\partial_t \eta(0)|^2 \leq C[|A_1 \eta_0|^2 + |D(v_0)|^2 |A_1 \eta_0|^2 + |\nabla m_\alpha|_4^2 |D(v_0)|^2 + |D(u_\alpha)|^2 |A_1 \eta_0|^2]. \quad (4.18)$$

Logo, combinando as estimativas (4.18) e (4.17), segue-se que

$$|D(v^n(t))|^2 + |\partial_t \eta^n(t)|^2 \leq |D(u_0)|^2 + |\partial_t \eta(0)|^2 \text{ para } 0 \leq t \leq t_1^n \text{ e}$$

3. $|Dv_0|, |A_1 \eta_0|, |Au_\alpha|, |\nabla m_\alpha|_4^2$ suficientemente pequenas.

Agora, observemos que as desigualdades (4.10), (4.5) e (4.13) implicam

$$\begin{aligned} |A_1 \eta^n(t)|^2 &\leq C|\partial_t \eta^n|^2 + C|D(v^n)|^2 |A_1 \eta^n|^2 + C|\nabla m_\alpha|_4^2 |D(v^n)|^2 \\ &\quad + C|D(u_\alpha)|^2 |A_1 \eta^n|^2 + C|\nabla m_\alpha|^2 |D(v^n)|^2 \\ &\leq C|\partial_t \eta^n|^2 + \overline{K}|D(v^n)|^2 + \frac{\overline{K}}{2}|D(u_\alpha)|^2 + C|\nabla m_\alpha|^2 |D(v^n)|^2 \end{aligned}$$

Portanto, para $t \in [0, t_1^n]$ temos

$$\begin{aligned} |A_1 \eta^n(t)|^2 &\leq \max\{\overline{K}, C, C|\nabla m_\alpha|^2\} \varphi_n(t) + \frac{\overline{K}}{2} |D(u_\alpha)|^2 \\ &\leq \max\{\overline{K}, C, C|\nabla m_\alpha|^2\} r_2(C_2) + \frac{\overline{K}}{2} |D(u_\alpha)|^2 \\ &\leq \beta/4. \end{aligned} \quad (4.19)$$

se considerarmos $|Au_\alpha|, |\nabla m_\alpha|$ suficientemente pequenas, de modo que:

$$C_2 = \overline{C}(\beta + 1)^2 |Au_\alpha|^2 < \delta.$$

Em particular, (4.19) implica que $|A_1 \eta^n(t_1^n)|^2 \leq \beta/4$, o que contradiz a nossa escolha de t_1^n . Conseqüentemente, obtemos as estimativas para as soluções aproximadas. Assim, passando ao limite em (4.14), concluímos que (v, η) é uma solução global forte do problema (4.1), (4.2). $\square$

Finalmente, gostaríamos de indicar alguns temas para futuras pesquisas.

Por exemplo, o estudo de soluções periódicas das equações generalizadas de bioconvecção, assim como seu estudo em domínios exteriores e o comportamento assintótico da solução.

Também, poderia ser feita uma implementação computacional do método de elementos finitos para as equações generalizadas de bioconvecção.

Bibliografia

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York. 1975.
- [2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle-Théorie et Applications. 2 tirage, Masson. 1987.
- [3] J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience. 1969.
- [4] D. Joseph, Stability of Fluid Motion II. Springer, Berlin. 1976.
- [5] Y. Kan-On, K. Narukawa and Y. Teramoto, On the equations of bioconvective flow. J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), Vol.32, N^o 1. 1992.
- [6] O. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow. Gordon Breach, New York. 1969.
- [7] M. Levandowsky, W. S. Childress, S. H. Hunter e E. A. Spiegel, A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms. J. Protozoology. Vol.22. 1975.
- [8] J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limits non Linéaires, Dunod, Paris. 1969.
- [9] S. Lorca, J. L. Boldrini, Stationary Solutions for Generalized Boussinesq Models. J. Differential Equations. Vol.124, N 2, 1996.
- [10] S. Lorca, J. L. Boldrini, The Initial Value Problem for a Generalized Boussinesq Model: Regularity and Global Existence of Strong Solutions. Matemática Contemporânea. Vol.11. 1996.
- [11] S. Lorca, J. L. Boldrini, The Initial Value Problem for a Generalized Boussinesq Model. A aparecer no Nonlinear Analysis. TMA.

- [12] S. Mikhlin, The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional, Holden Day, San Francisco, 1965.
- [13] S. Mizohata, The theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
- [14] Y. Moribe, On the bioconvection of *Tetrahymena pyriformis*, Master's Thesis, Osaka University, 1973.
- [15] C. Morrey, Multiple integrals in the calculus of variations, Springer, Berlin, 1966.
- [16] G. Mulone, F. Salemi, On the existence of hydrodynamic motion in a domain with free boundary type conditions. *Meccanica*, Vol.18, 1983.
- [17] S. Rionero, G. Mulone, Existence and Uniqueness Theorems for a Steady Thermo-Diffusive Mixture in a Mixed Problem. *Nonlinear Analysis, TMA*, col.12, n 5, 1988.
- [18] M. H. Protter, H. F. Weinberger, Maximum principles in differential equation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.
- [19] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, *Annali di Matematica Pura ed Applicata, serie quarta*, tomo CXLVI, 1987.
- [20] V. Solonnikov, V. Scadilov, On a boundary value problem for a stationary system of Navier-Stokes equations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, Vol.125, 1973.
- [21] R. Temam, Navier-Stokes equations-Theory and numerical analysis (revised edition), North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1979.