FLUIDOS DO TIPO OLDROYD: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE ESCOAMENTO

Gabriela del Valle Planas

Gabriela del Valle Planas

FLUIDOS DO TIPO OLDROYD: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE ESCOAMENTO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Campinas
IMECC - UNICAMP
1998

FLUIDOS DO TIPO OLDROYD: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE ESCOAMENTO

Este exemplar corresponde a redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Gabriela del Valle Planas e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 19 de Março de 1998

José Luiz Boldrini

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 19 de março de 1998

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof (a). Dr (a). SEBÁSTIAN ANTONIO LORCA PIZARRO

Agradecimentos

Ao Professor **José Luiz Boldrini**, pela orientação e dedicação.

Aos professores e colegas do IMECC, pelo apoio e incentivo.

Ao CNPq pelo apoio financiero.

Aos meus pais

Resumo

Provamos detalhadamente resultados relativos à existência de soluções para equações que descrevem o comportamento de fluidos visco-elásticos incompressíveis que obedecem uma lei constitutiva diferencial do tipo Oldroyd. Provamos a existência e unicidade da solução local do problema para dados arbitrários, assim como também a existência da solução global no tempo para dados suficientemente pequenos. Provamos um resultado de estabilidade para soluções pequenas, o qual dará a existência de soluções estáveis e periódicas quando a força externa é pequena e periódica, bem como a existência de soluções estacionárias quando a força externa é independente do tempo.

Abstract

We prove existence results concerned with incompressible viscoelastic fluids which obey a constitutive differential law, of Oldroyd type. We show local existence and uniqueness of solutions of this problem for arbitrary data, and global existence of solutions for sufficiently small data. Finally, we prove a stability result for small solutions which leads to the existence of stable time-periodic (resp. steady) solutions when external force is small time-periodic (resp. steady).

Índice

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação vamos estudar resultados relativos à existência de soluções para equações que descrevem o comportamento de fluidos visco-elásticos incompressíveis que obedecem uma lei constitutiva diferencial do tipo Oldroyd [4]. Tais resultados encontram-se no artigo de C. Guillopé e J. C. Saut [2]. Nosso objetivo será fazer com detalhamento, bem como completar, as demonstrações dos resultados deste artigo.

Em termos de variáveis adimensionais, as equações a serem estudadas são as seguintes:

$$\begin{cases} Re\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) + \nabla p = (1-\omega)\Delta u + \nabla \cdot \tau + \mathbf{f}, \\ \\ \text{div } u = 0, \\ \\ \tau + We\dfrac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = 2\omega D[u], \end{cases}$$

Aqui, u é uma variável associada à velocidade; p é uma variável associada à pressão; a variável τ é o chamado tensor extra-stress (o qual é uma matriz simétrica). As variáveis u, p e τ são as incógnitas do problema e podem depender da posição e do tempo.

$D[u]$ é o tensor taxa de variação da deformação e é dado por

$$D[u] = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

O símbolo $\frac{\mathcal{D}_a}{\mathcal{D}t}$ denota uma derivada objetiva de τ (a qual é invariante por mudança de referencial) e é dada por:

$$\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\right)\tau + \tau W[u] - W[u]\tau - a(D[u]\tau + \tau D[u]),$$

onde $-1 \leq a \leq 1$ e $W[u]$ é o tensor vorticidade dado por:

$$W[u] = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T).$$

Nas equações acima temos ainda o número de Reynolds dado por $Re = \rho UL/\eta$, onde U e L são respectivamente valores positivos constantes típicos da velocidade e a longitude do domínio no qual se dá o fluxo; $\rho > 0$ é a densidade, enquanto que η é a viscosidade do fluido (ambas supostas constantes). Também aparece o número de Weissenberg $We = \lambda_1 U/L$ e o parâmetro $\omega = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, nos quais λ_1 é o chamado tempo de relaxação e λ_2 é o chamado tempo de retardação do material do fluido (estas constantes estão associadas ao comportamento visco-elástico do fluido e satisfazem $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Portanto, $0 < \omega < 1$).

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 (Preliminares e Colocação Matemática do Problema), após descrever brevemente a origem física das equações anteriores, fixaremos a notação e recordaremos alguns resultados importantes que serão utilizados no decorrer do trabalho.

No Capítulo 3 provaremos a existência e unicidade da solução local do problema. A existência será obtida por um argumento de ponto fixo e a unicidade via uma estimativa de energia.

O Capítulo 4 será dedicado à prova da existência da solução global no tempo para dados suficientemente pequenos. Isto será obtido a partir de estimativas uniformes no tempo da solução local. Também estudamos o problema linearizado em torno da origem. Neste caso linear, como é de se esperar, é possível provar a existência da solução global para dados arbitrários.

No Capítulo 5, provaremos um resultado de estabilidade para soluções pequenas, o qual dará a existência de soluções estáveis e periódicas quando a força externa é pequena e periódica, bem como a existência de soluções estacionárias quando a força externa é independente do tempo.

Finalmente, no Capítulo 6 faremos alguns comentários sobre como estender os resultados para modelos com varios tempos de relaxação.

Capítulo 2

Preliminares e Colocação Matemática do Problema

Neste capítulo, após descrever brevemente a origem física das equações anteriores, fixaremos a notação e recordaremos alguns resultados importantes que serão utilizados no decorrer do trabalho.

2.1 Descrição do problema

Vamos estudar fluidos visco-elásticos incompressíveis os quais obedecem uma lei constitutiva diferencial, do tipo Oldroyd [4],

$$\tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = 2\eta \left(D + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}_a D}{\mathcal{D}t} \right), \tag{2.1}$$

onde

τ é o tensor extra-stress (matriz simétrica);

$D[u]$ é a taxa de variação do tensor de deformação, a qual é dada por

$$D[u] = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T),$$

sendo u a velocidade do fluido;

λ_1 é o tempo de relaxação, λ_2 é o tempo de retardação, e satisfazem

$$0 \leq \lambda_2 < \lambda_1;$$

η é a viscosidade do fluido.

O símbolo $\frac{\mathcal{D}_a}{\mathcal{D}t}$ denota uma derivada objetiva (independente do referencial),

$$\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\right)\tau + \tau W[u] - W[u]\tau - a(D[u]\tau + \tau D[u]), \qquad (2.2)$$

onde $-1 \leq a \leq 1$ e

$$W[u] = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T)$$

é o tensor vorticidade.

Observemos que o caso limite $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ corresponde ao fluido puramente elástico e o caso limite $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ corresponde ao fluido puramente viscoso (Newtoniano). Só vamos considerar o caso $\lambda_2 > 0$.

Junto à lei constitutiva (2.1) temos as equações de conservação de momento e de massa,

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) + \nabla p = \nabla \cdot \tau + \mathbf{f}, \qquad (2.3)$$

$$\text{div } u = 0 \qquad (2.4)$$

em Ω, um aberto limitado e regular de $I\!R^n$, com $n = 2, 3$; a condição de fronteira,

$$u = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial\Omega = \Gamma \qquad (2.5)$$

e as condições iniciais,

$$u_{|t=0} = u_0 \qquad \tau_{|t=0} = \tau_0. \qquad (2.6)$$

Os dados são u_0, τ_0, a densidade $\rho > 0$ (constante) e a força externa $\mathbf{f}$. As incógnitas são a velocidade u, o tensor simétrico extra-stress τ e a pressão p.

Vamos estudar o problema de valores iniciais e de fronteira (2.1)-(2.6) e a associação com outras leis constitutivas de tipo diferencial.

2.2 Outras leis constitutivas diferenciais

Para descrever o comportamento de fluidos visco-elásticos podemos introduzir outras leis constitutivas diferenciais. A maior parte delas tem a seguinte forma:

$$\tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} + \beta(\tau, D) = 2\eta \left(D + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}_a D}{\mathcal{D}t} \right), \tag{2.7}$$

onde $\frac{\mathcal{D}_a}{\mathcal{D}t}$ denota uma derivada objetiva de tipo (2.2) e $\beta(\tau, D)$ é uma função não linear de τ e D, sujeita a certas restrições devido à objetividade. De fato, em todos os exemplos a seguir, β é regular e pelo menos quadrática.

Assim como no modelo Oldroyd (2.1), λ_1 é o tempo de relaxação e λ_2 é o tempo de retardação, com $0 \leq \lambda_2 < \lambda_1$. Alguns exemplos clássicos são:

1. O modelo generalizado de Larson, com $a = 1$ em (2.2) e

$$\beta(\tau, D) = 2\mathrm{Tr}(\tau D)\alpha(\mathrm{Tr}\tau)(\tau + I),$$

onde $\alpha(\mathrm{Tr}\tau)$ é uma função escalar do trazo de τ.

2. O modelo de Phan-Thien e Tanner, com $a = 1$ em (2.2) e

$$\beta(\tau, D) = \alpha\tau\mathrm{Tr}(\tau),$$

onde α é constante; pode ser generalizado, tomando

$$\beta(\tau, D) = a\tau^2 + b\tau,$$

onde a e b são funções escalares de Tr (τ) e det (τ).

3. O modelo de Giesekus, que é um caso particular do anterior, onde

$$\beta(\tau, D) = \alpha\tau^2, \quad \text{com} \quad \alpha = \text{ constante}.$$

4. O modelo de Oldroyd 8 constantes, onde

$$\beta(\tau, D) = \mu_0 \mathrm{Tr}(\tau) D + \nu_1 \mathrm{Tr}(\tau D) I + \mu_2 D^2 + \nu_2 \mathrm{Tr}(D^2) I,$$

com $\mu_0, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ constantes.

Neste trabalho vamos provar os resultados para o caso $\beta = 0$. Mas, podem ser estendidos para os modelos acima. De fato, todos têm a mesma parte linear e diferençam-se nos termos não lineares de ordem superior os quais são pequenos quando ∇u e τ são pequenos.

2.3 Formulação matemática do problema

Vamos considerar o sistema (2.1), (2.3), (2.4) e escrever-lo numa forma mais adequada. Decompomos *a priori* o tensor extra-stress como

$$\tau = \tau^v + \tau^e$$

onde τ^v corresponde à parte viscosa (Newtoniana) e τ^e à parte puramente elástica:

$$\tau^v = 2\eta\frac{\lambda_2}{\lambda_1}D \stackrel{\text{def}}{=} 2\eta_v D$$

$$\tau^e + \lambda_1\frac{\mathcal{D}_a\tau^e}{\mathcal{D}t} = 2\eta(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})D \stackrel{\text{def}}{=} 2\eta_e D\,.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\tau^v &= \eta_v\Delta u\,,\\ \lambda_1\frac{\mathcal{D}_a\tau^v}{\mathcal{D}t} &= 2\eta\lambda_2\frac{\mathcal{D}_a D}{\mathcal{D}t}\,,\end{aligned}$$

assim, denotando $\tau^e = \tau$ e substituindo nas equações, reescrevemos o sistema (2.1),(2.3),(2.4) na forma

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u\right) + \nabla p = \eta_v\Delta u + \nabla\cdot\tau + \mathbf{f},\\[2ex] \text{div } u = 0,\\[2ex] \tau + \lambda_1\dfrac{\mathcal{D}_a\tau}{\mathcal{D}t} = 2\eta_e D,\end{cases}\tag{2.8}$$

onde η_v e η_e são as "viscosidades" das partes viscosa e elástica, respectivamente. Finalmente, levamos o sistema a uma forma adimensional. Para isso, definimos o número de Weissenberg $We = \lambda_1 U/L$ e o número de Reynolds $Re = \rho UL/\eta$ onde U e L representam a velocidade típica e a longitude típica do fluxo. Sejam

$$x = \frac{x^*}{L}, \qquad u = \frac{u^*}{U}, \qquad t = t^*\frac{U}{L},$$

$$p = \frac{p^* L}{\eta U}, \qquad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{f}^* L^2}{\eta U}, \qquad \tau = \frac{\tau^* L}{\eta U},$$

onde as estrelas atingem às variáveis dimensionais. Fazemos a mudança de variáveis e obtemos o sistema adimensional

$$\begin{cases} Re\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) + \nabla p = (1-\omega)\Delta u + \nabla \cdot \tau + \mathbf{f}, \\ \\ \text{div } u = 0, \\ \\ \tau + We\dfrac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = 2\omega D, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde ω é um parâmetro de retardação, definido por

$$\omega = \frac{\eta_e}{\eta} = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

e satisfaz $0 < \omega < 1$.

Notação:

Vamos introduzir alguns espaços clássicos que usaremos neste trabalho. Seja Ω um dominío limitado em $I\!R^n, n = 2, 3$ com fronteira regular Γ.

Os espaços de Lebesgue:

$$L^p(\Omega) = L^p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

e os espaços vetoriais

$$I\!L^p = (L^p(\Omega))^m, \; m > 1,$$

com normas $\|\cdot\|_{L^p}$ e $\|\cdot\|_{I\!L^p}$. Se $p = 2$, denotaremos a norma por $|\cdot|$ e o produto interno por $(\cdot,\cdot)$.

Os espaços de Sobolev:

$$W^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \; k \in I\!N,$$

com normas $\|\cdot\|_{k,p}$. Se $p = 2$,

$$W^{k,2} = H^k, \; k \in I\!N \quad \text{e} \quad I\!H^k = (H^k)^m, \; m > 1,$$

com normas $\|\cdot\|_k$ e produto interno $((\cdot,\cdot))_k$.

Os espaços de Sobolev $H_0^k(\Omega) = H_0^k$, $k \in I\!N$, seu dual topologi̇co H^{-k} e os correspondientes espaços vetoriais,

$$I\!H_0^k = (H_0^k)^m \quad I\!H^{-k} = (H^{-k})^m.$$

Para simplificar notação indicamos a norma-L^2 do gradiente por $\|\cdot\|$ e por $((\cdot,\cdot)) = (\nabla\cdot,\nabla\cdot)$. O espaço H_0^1(ou $I\!H_0^1$) é um espaço de Hilbert com a norma $\|\cdot\|$ e produto interno $((\cdot,\cdot))$.

Seja I um intervalo de $I\!R_+$, denotaremos por

$\mathcal{C}(\bar{I}; I\!H^k)$ o espaço das funções a valores vetoriais $u(t,x)$ tal que $u(t,\cdot)$ pertence a $I\!H^k$ para todo $t \in \bar{I}$ e a função $t \to u(t,\cdot)$ com valores em $I\!H^k$ é contínua,

$\mathcal{C}_b(\bar{I}; I\!H^k)$ o espaço das funções contínuas e limitadas de $\bar{I}$ em $I\!H^k$,

$L^p(I; I\!H^k)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções p-integráveis com valores em $I\!H^k$,

$L^\infty(I, I\!H^k)$ o espaço das funções essencialmente limitadas de I em $I\!H^k$.

Agora vamos introduzir os espaços de vetores com divergente nulo. Seja ν a normal exterior unitaria a Γ.

$$H = \{v \in I\!L^2, \text{div } v = 0, v \cdot \nu_{|\Gamma} = 0\}, \quad \text{com norma } |\cdot|,$$

$$V = \{v \in I\!H_0^1, \text{div } v = 0\}, \quad \text{com norma } \|\cdot\|.$$

As propriedades dos espaços anteriores podem ser encontradas nas referências [1] [3] [8].

Denotaremos por

P à projeção ortogonal de $I\!L^2$ sobre H,

A o operador de Stokes, definido por $A = -P\Delta$ com dominio $D(A) = V \cap I\!H^2$ equipado com a norma $|A\cdot|$, a qual é equivalente a norma $\|\cdot\|_2$ em $D(A)$.

B uma aplicação bilinear definida por

$$B(u,v) = P(u\cdot\nabla)v,$$

para u e v suficientemente regulares, onde

$$(u \cdot \nabla) = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$\mathbf{B}$ uma aplicação bilinear a valores tensoriais definida por

$$\mathbf{B}(u, \tau) = (u \cdot \nabla)\tau,$$

para u e τ suficientemente regulares,

g uma aplicação bilinear a valores tensoriais definida por

$$g(\tau, \nabla u) = \tau W - W\tau - a(D\tau + \tau D),$$

com $-1 \leq a \leq 1$.

Agora vamos a dar uma formulação mais precisa do problema (2.9):

achar u e τ tal que satisfaçam:

$$u(\cdot, t) \in V, \qquad \tau(\cdot, t) \in I\!H^2, \qquad \text{a.e. } t, \tag{2.10}$$

$$Re\,(u' + B(u, u)) + (1 - \omega)Au = P(\nabla \cdot \tau + \mathbf{f}), \tag{2.11}$$

$$We\,(\tau' + \mathbf{B}(u, \tau) + g(\tau, \nabla u)) + \tau = 2\omega D[u], \tag{2.12}$$

$$u(0) = u_0\,, \qquad \tau(0) = \tau_0 \tag{2.13}$$

onde as linhas denotam a derivada parcial com relação a t.

Capítulo 3

Soluções locais

Neste capítulo vamos provar a existência de soluções regulares do problema (2.10)-(2.13) num intervalo de tempo pequeno para dados arbitrários em espaços de Sobolev apropriados, usando um argumento de ponto fixo. A seguir, provaremos que a solução satisfaz uma certa desigualdade de energia, a qual implicará a unicidade na classe de soluções regulares.

3.1 Existência da solução

Primeiro estudaremos dois problemas linearizados, um para a velocidade u e outro para o tensor simétrico τ. Lembremos que o parâmetro ω satisfaz $0 < \omega < 1$.

Seja $T > 0$ e $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Consideremos o problema de Stokes de evolução:

$$\begin{cases} u(\cdot) \in V \ \text{ a.e. em } (0,T) \\ \\ Re\, u' + (1-\omega)Au = \mathbf{F} \text{ a.e. em } (0,T) \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{F}$ é uma força externa dada.

Lema 3.1 *Suponha* $\Gamma \in C^2, \mathbf{F} \in \mathbb{L}^2(Q_T), u_0 \in V$. *Então o problema de Stokes (3.1) admite uma única solução*

$$u \in L^2(0,T;D(A)) \cap C([0,T];V)$$

tal que $u' \in \mathbb{L}^2(Q_T)$ *e* $p \in L^2(0,T;H^1)$ *(p é a pressão associada). Além disso, existe uma constante* $C_1 = C_1(Re, \omega, \Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L^2(0,T;D(A))\cap L^\infty(0,T;V)} + \|u'\|^2_{\mathbf{L}^2(Q_T)} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \\ &\leq C_1 \left(\|u_0\|^2 + \|\mathbf{F}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q_T)}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demonstração: Se $\mathbf{F} \in L^2(0,T;V')$ e $u_0 \in H$ existe uma única solução do problema de Stokes (3.1) satisfazendo $u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ e $u' \in L^2(0,T;V')$ (Ver Teorema III.1.1 [8]). Como nossos dados são mais regulares, vamos mostrar que a solução é mais regular. Para isso, consideremos a aproximação de Galerkin usada na prova da existência da solução:

Para cada m definimos a solução aproximada u_m do Problema (3.1) por

$$\begin{gathered} u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, \\ Re\,(u'_m, w_j) + (1-\omega)((u_m, w_j)) = (\mathbf{F}, w_j), \text{para } j = 1, ..., m \\ u_m(0) = u_{0m}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

onde $\{w_i\}_{i\in N}$ é uma sequência de elementos linearmente independente que é total em $V, w_j \in V$ para cada j e u_{0m} pode ser escolhido como a projeção em V de u_0 sobre o espaço gerado por $\{w_1, ..., w_m\}$.

Vamos obter estimativas *a priori* para as soluções aproximadas u_m, independentes de m. Multiplicando (3.3) por g'_{jm} e adicionando estas equações para $j = 1, ..., m$ obtemos

$$\begin{gathered} Re\,|u'_m(t)|^2 + (1-\omega)((u_m(t), u'_m(t))) = (\mathbf{F}(t), u'_m(t)) \\ \text{ou equivalentemente,} \\ 2Re\,|u'_m(t)|^2 + (1-\omega)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 = 2(\mathbf{F}(t), u'_m(t)). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Integrando de 0 a T, usando a desigualdade de Schwarz e a desigualdade $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon}b^2$, $a, b > 0$, obtemos para todo $\epsilon > 0$ que

$$\begin{aligned}
2Re\int_0^T |u'_m(t)|^2 dt \quad &+ \quad (1-\omega)\|u_m(T)\|^2 \\
&= \quad (1-\omega)\|u_{0m}\|^2 + 2\int_0^T (\mathbf{F}(t), u'_m(t))dt \\
&\leq \quad (1-\omega)\|u_{0m}\|^2 + 2\int_0^T |\mathbf{F}(t)|\,|u'_m(t)|dt \\
&\leq \quad (1-\omega)\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T |\mathbf{F}(t)|^2 dt + \epsilon\int_0^T |u'_m(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Tomando agora $\epsilon = Re$ temos, em particular,

$$Re\int_0^T |u'_m(t)|^2 dt \leq (1-\omega)\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{Re}\int_0^T |\mathbf{F}(t)|^2 dt\,.$$

Pela escolha de u_{0m}, $\|u_{0m}\| \leq \|u_0\|$; assim $\{u'_m\}$ é limitada em $L^2(0,T;H)$ e, portanto, $u' \in L^2(0,T;H)$. Além disso, podemos deduzir que

$$\|u'\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C\left(\|u_0\|^2 + \|\mathbf{F}\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{3.5}$$

onde C é uma constante que depende de ω e Re.

Apliquemos o teorema de regularidade ao problema de Stokes estacionário: para quase todo (com respeito à medida de Lebesgue) $t \in [0,T]$ temos:

$$\begin{cases} -(1-\omega)\Delta u(t) + \nabla p(t) = \mathbf{F}(t) - Re\, u'(t) \\ \\ \text{div } u = 0 \qquad \text{em } \Omega \\ \\ u(t) = 0 \qquad \text{em } \Gamma\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

Como $\mathbf{F}(t) - Re\,u'(t) \in I\!\!L^2$ e $\Gamma \in C^2$, a solução $\{u(t), p(t)\} \in I\!\!H^1 \times L^2$. Agora, pelo Teorema de regularidade (Prop. I.2.3 [8]), $u(t) \in I\!\!H^2$, $p(t) \in H^1$ e existe uma constante $C_0 = C_0(\omega, Re, \Omega)$ tal que

$$\|u(t)\|_2 + \|p(t)\|_1 \leq C_0\,|\mathbf{F}(t) - Re\,u'(t)|\,. \tag{3.7}$$

Portanto, a aplicação:

$$\mathbf{F}(t) - Re\,u'(t) \to \{u(t), p(t)\}$$

é linear e contínua de $\mathbb{L}^2$ em $\mathbb{H}^2 \times H^1$, e como $\mathbf{F} - Re\, u' \in L^2(0,T;\mathbb{L}^2)$ temos que $u \in L^2(0,T;\mathbb{H}^2)$ e $p \in L^2(0,T;H^1)$. Ainda mais, de (3.7) podemos deduzir a estimativa:

$$\|u(t)\|_2^2 + \|p(t)\|_1^2 \leq C\left(|\mathbf{F}(t)|^2 + |u'(t)|^2\right)$$

e, integrando de 0 a T, obtemos que

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^2)} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \leq C\left(\|\mathbf{F}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)} + \|u'\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)}\right),$$

a qual, junto com (3.5), dá a estimativa seguinte:

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^2)} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^1)} + \|u'\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)} \leq C\left(\|u_0\|^2 + \|\mathbf{F}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)}\right). \quad (3.8)$$

Agora vamos mostrar que $u \in L^\infty(0,T;V)$. Integremos (3.4) entre 0 e s, com $0 \leq s \leq T$, para obter

$$\begin{aligned} & 2Re\int_0^s |u'_m(t)|^2 dt + (1-\omega)\|u_m(s)\|^2 \\ = \;& (1-\omega)\|u_{0m}\|^2 + 2\int_0^s (\mathbf{F}(t), u'_m(t))dt \\ \leq \;& (1-\omega)\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^s |\mathbf{F}(t)|^2 dt + \epsilon\int_0^s |u'_m(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Tomamos $\epsilon = Re$, obtemos

$$Re\int_0^s |u'_m(t)|^2 dt + (1-\omega)\|u_m(s)\|^2 \leq (1-\omega)\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{Re}\int_0^s |\mathbf{F}(t)|^2 dt.$$

Mas $\|u_{0m}\| \leq \|u_0\|$ e então a desigualdade anterior implica, em particular, que

$$\|u_m(s)\|^2 \leq C\left(\|u_0\|^2 + \|\mathbf{F}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)}\right) \quad \forall s \in [0,T],$$

onde C é uma constante que depende de ω e Re.

Assim $\{u_m\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;V)$ e, portanto, $u \in L^\infty(0,T;V)$. Ainda mais, temos a estimativa:

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T;V)} \leq C\left(\|u_0\|^2 + \|\mathbf{F}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)}\right),$$

a qual junto com (3.8) nos dá a estimativa do lema.

Resta apenas mostrar que $u \in \mathcal{C}([0,T];V)$. Mas, isso é consequência do fato de que $u \in L^2(0,T;D(A))$ e $u' \in L^2(0,T;H)$ (Ver pag. 23 [3]). ∎

Num caminho análogo vamos provar que se os dados são mais regulares, a solução obtida é mais regular. Mais precisamente temos o seguinte lema.

Lema 3.2 *Suponha* $\Gamma \in \mathcal{C}^3$, $\mathbf{F} \in L^2(0,T;\mathbb{H}^1)$, $\mathbf{F}' \in L^2(0,T;\mathbb{H}^{-1})$, $u_0 \in D(A)$. *Então a única solução do problema de Stokes (3.1) satisfaz:*

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0,T;\mathbb{H}^3) \cap \mathcal{C}([0,T];D(A)),\\ u' &\in L^2(0,T;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H),\\ p &\in L^2(0,T;H^2), \end{aligned}$$

e existe uma constante $C_2 = C_2(Re,\omega,\Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{H}^3)\cap L^\infty(0,T;D(A))} + \|u'\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^2)} \\ &\le C_2\left(|Au_0|^2 + \|\mathbf{F}\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{H}^1)} + \|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{H}^{-1})} + |\mathbf{F}(0)|^2\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Demonstração: Assim como na demonstração do lema anterior vamos obter estimativas para a solução aproximada u_m e também para a sua derivada com relação a t, u'_m. Escolhemos a sequência $\{w_i\}_{i\in N}$ tal que $w_i \in D(A)$ para cada i, tomando, por exemplo, a base espectral. Como $u_0 \in D(A)$, podemos escolher u_{0m} como a projeção ortogonal em $D(A)$ de u_0 sobre o espaço gerado por $\{w_1, ..., w_m\}$. Primeiro vamos provar que $\{u'_m\}$ é limitada em $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. Observemos que avaliando (3.4) em $t = 0$, temos que

$$Re\,|u'_m(0)|^2 + (1-\omega)((u_m(0), u'_m(0))) = (\mathbf{F}(0), u'_m(0)).$$

Integrando por partes, obtemos

$$Re\,|u'_m(0)|^2 = (1-\omega)(\Delta u_{0m}, u'_m(0)) + (\mathbf{F}(0), u'_m(0))$$

e, pela desigualdade de Schwarz,

$$Re\,|u'_m(0)| \le (1-\omega)|\Delta u_{0m}| + |\mathbf{F}(0)|. \tag{3.10}$$

Como

$$|\Delta u_{0m}| \leq C_0 \|u_{0m}\|_2 \leq C_0 \|u_0\|_2, \tag{3.11}$$

resulta $\{u'_m(0)\}$ limitada em H.

Agora derivamos a equação (3.4) em relação a t:

$$Re(u''_m(t), w_j) + (1-\omega)((u'_m(t), w_j)) = \langle \mathbf{F}'(t), w_j \rangle \quad j = 1, ..., m.$$

Multiplicamos por $g'_{jm}(t)$ e adicionamos as equações resultantes para $j = 1, ..., m$, para obter

$$Re\,(u''_m(t), u'_m(t)) + (1-\omega)\|u'_m(t)\|^2 = \langle \mathbf{F}'(t), u'_m(t) \rangle.$$

Então

$$\begin{aligned} Re\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + 2(1-\omega)\|u'_m(t)\|^2 &= 2\langle \mathbf{F}'(t), u'_m(t) \rangle \\ &\leq 2\|\mathbf{F}'(t)\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \|u'_m(t)\| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}\|\mathbf{F}'(t)\|^2_{\boldsymbol{H}^{-1}} + \epsilon\|u'_m(t)\|^2. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = 1-\omega$, obtemos que

$$Re\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + (1-\omega)\|u'_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{1-\omega}\|\mathbf{F}'(t)\|^2_{\boldsymbol{H}^{-1}}.$$

Agora, integramos de 0 a s, com $0 \leq s \leq T$, e usamos (3.10),(3.11) para obter

$$\begin{aligned} & Re|u'_m(s)|^2 + (1-\omega)\int_0^s \|u'_m(t)\|^2 dt \\ \leq\ & \frac{1}{1-\omega}\int_0^s \|\mathbf{F}(t)'\|^2_{\boldsymbol{H}^{-1}} dt + Re\,|u'_m(0)|^2 \\ \leq\ & C\left(\|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})} + \|u_0\|_2^2 + |\mathbf{F}(0)|^2\right), \end{aligned}$$

onde C é uma constante que depende de ω, Re e Ω, portanto $\{u'_m\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H)$ o que implica que $u' \in L^\infty(0,T;H)$ e a estimativa

$$\|u'\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \leq C\left(\|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})} + \|u_0\|_2^2 + |\mathbf{F}(0)|^2\right). \tag{3.12}$$

Ainda mais, se tomamos $s = T$ temos, em particular,

$$\|u'_m\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq C\left(\|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1})} + \|u_0\|^2_2 + |\mathbf{F}(0)|^2\right).$$

Assim, $\{u'_m\}$ é limitada em $L^2(0,T;V)$, e, portanto, $u' \in L^2(0,T;V)$ e satisfaz

$$\|u'\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq C\left(\|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1})} + \|u_0\|^2_2 + |\mathbf{F}(0)|^2\right). \tag{3.13}$$

Para ver que $u' \in \mathcal{C}([0,T];H)$, notemos que u' satisfaz a equação

$$Re\,(u')' + (1-\omega)Au' = \mathbf{F}',$$

a qual pode ser reescrita como

$$Re\,u'' = \mathbf{F}' - (1-\omega)Au'.$$

Então, como o lado direito pertence a $L^2(0,T;V')$, u'' também pertence a $L^2(0,T;V')$. Agora, como $u' \in L^2(0,T;V)$ temos que $u' \in \mathcal{C}([0,T];H)$ (Ver [3] [8]).

Aplicamos o teorema de regularidade ao problema de Stokes estacionário (3.6). Como $\mathbf{F}(t) - Re\,u'(t) \in I\!H^1$, a solução $\{u(t), p(t)\} \in I\!H^3 \times H^2$ e existe uma constante $C_0 = C_0(\omega, Re, \Omega)$ tal que

$$\|u(t)\|_3 + \|p(t)\|_2 \leq C_0\left(\|\mathbf{F}(t) - Re\,u'(t)\|_1\right), \tag{3.14}$$

assim, a aplicação

$$\mathbf{F}(t) - Re\,u'(t) \to \{u(t), p(t)\}$$

é linear e contínua de $I\!H^1$ em $I\!H^3 \times H^2$ e como $\mathbf{F} - Re\,u' \in L^2(0,T;I\!H^1)$, concluimos que $u \in L^2(0,T;I\!H^3)$ e $p \in L^2(0,T;H^2)$.

Ainda mais, de (3.14) deduzimos a estimativa

$$\|u(t)\|^2_3 + \|p(t)\|^2_2 \leq C\left(\|\mathbf{F}(t)\|^2_1 + \|u'(t)\|^2_1\right).$$

Integrando este último resultado no tempo, de 0 a T, obtemos

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^3)} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^2)} \leq C\left(\|\mathbf{F}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1)} + \|u'\|^2_{L^2(0,T;V)}\right).$$

Considerando agora (3.12) e (3.13), podemos deduzir que

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^3)} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^2)} + \|u'\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \\ \leq\ & C\left(\|\mathbf{F}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1)} + \|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1})} + \|u_0\|^2_2 + |\mathbf{F}(0)|^2\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Agora, como $u \in L^2(0,T;\mathbb{H}^3)$ e $u' \in L^2(0,T;V) \subseteq L^2(0,T;\mathbb{H}^{-3})$ temos que $u \in \mathcal{C}([0,T];D(A))$. Além disso, como u satisfaz a equação

$$Re\, u'(t) + (1-\omega)Au(t) = \mathbf{F}(t)$$

então

$$(1-\omega)Au(t) = \mathbf{F}(t) - Re\, u'(t)$$

e, tomando a norma-$\mathbb{L}^2$ ao quadrado, temos que

$$\begin{aligned} |Au(t)|^2 &\leq C\left(|\mathbf{F}(t)|^2 + |u'(t)|^2\right) \\ &\leq C\left(\|\mathbf{F}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)} + \|u'\|^2_{L^\infty(0,T;H)}\right). \end{aligned}$$

Mas, como $H_0^1 \subseteq L^2 \subseteq H^{-1}$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)|^2 = 2\langle \mathbf{F}'(t), \mathbf{F}(t)\rangle \leq C\left(\|\mathbf{F}'(t)\|^2_{\mathbf{H}^{-1}} + \|\mathbf{F}(t)\|_1^2\right),$$

e, então, integrando de 0 a t, obtemos

$$|\mathbf{F}(t)|^2 \leq C\left(|\mathbf{F}(0)|^2 + \|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1})} + \|\mathbf{F}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1)}\right).$$

Usando esta desigualdade e (3.12), concluimos que

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T;D(A))} \leq C\left(|\mathbf{F}(0)|^2 + \|u_0\|_2^2 + \|\mathbf{F}'\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1})} + \|\mathbf{F}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1)}\right),$$

onde C é uma constante que depende de ω, Re e Ω. Esta desigualdade junto a (3.16) dá a estimativa (3.9). ∎

Agora vamos estudar o problema linearizado associado à equação constitutiva (2.12) para τ. Vamos mostrar a existência e a unicidade de uma solução regular τ do seguinte problema:

$$\begin{cases} We\,\{\tau' + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tau + g(\tau,\nabla\tilde{u})\} + \tau = 2\,\omega\, D[\tilde{u}] \\ \tau(0) = \tau_0, \end{cases} \tag{3.16}$$

onde $\tilde{u}$ é uma velocidade dada.

Lema 3.3 *Suponha* $\Gamma \in \mathcal{C}^1$, $\tau_0 \in I\!H^2$, $\tilde{u} \in L^1(0,T; I\!H^3 \cap D(A))$. *Então o problema (3.16) admite uma única solução* $\tau \in \mathcal{C}([0,T]; I\!H^2)$ *e existe uma constante* $C_0 = C_0(\Omega, g)$ *tal que*

$$\|\tau\|_{L^\infty(0,T;I\!H^2)} \leq \left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0\,We}\right) \exp\left(C_0\|\tilde{u}\|_{L^1(0,T;I\!H^3)}\right). \tag{3.17}$$

Além disso, se $\tilde{u} \in \mathcal{C}([0,T]; D(A))$, *então* $\tau' \in \mathcal{C}([0,T]; I\!H^1)$ *e satisfaz*

$$\begin{aligned} \|\tau'\|_{L^\infty(0,T;I\!H^1)} \quad &\leq \quad C_0\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;D(A))} + \frac{1}{C_0 We}\right) \\ &\left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0 We}\right) \exp\left(C_0\|\tilde{u}\|_{L^1(0,T;I\!H^3)}\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Demonstração: A existência da única solução do problema (3.16) segue da aplicação do método das características reescrevendo a equação em (3.16) como

$$We\,\{\tau' + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tau\} = 2\,\omega\,D[\tilde{u}] - We\,g(\tau,\nabla\tilde{u}) - \tau.$$

Para obter a estimativa (3.17) vamos escrever uma desigualdade diferencial satisfeita por $\|\tau\|_2$. Tomamos produto interno em $I\!L^2$ da equação em (3.16) com τ,

$$We\,\{(\tau',\tau) + ((\tilde{u}\cdot\nabla)\tau,\tau) + (g(\tau,\nabla\tilde{u}),\tau)\} + (\tau,\tau) = 2\,\omega\,(D[\tilde{u}],\tau); \tag{3.19}$$

aplicamos o operador $\nabla = (\partial_1,\partial_2)$ se $n=2$ ou $\nabla = (\partial_1,\partial_2,\partial_3)$ se $n=3$, onde ∂_i denota a derivada parcial com relação a x_i, à equação em (3.16),

$$We\,\{\nabla\tau' + \nabla(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau + \nabla g(\tau,\nabla\tilde{u})\} + \nabla\tau = 2\,\omega\,\nabla D[\tilde{u}].$$

Tomamos agora o produto interno em $I\!L^2$ desta equação com $\nabla\tau$ para obter

$$\begin{aligned} &We\{(\nabla\tau',\nabla\tau) + (\nabla(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau,\nabla\tau) + (\nabla g(\tau,\nabla\tilde{u}),\nabla\tau)\} \\ &\qquad +(\nabla\tau,\nabla\tau) = 2\,\omega\,(\nabla D[\tilde{u}],\nabla\tau). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Finalmente, aplicamos o operador $D^2 = \partial^2_{ij}$, o qual denota a derivada segunda com relação a x_i e x_j, à equação em (3.16), obtendo

$$We\left\{D^2\tau' + D^2(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau + D^2 g(\tau,\nabla\tilde{u})\right\} + D^2\tau = 2\,\omega\,D^2 D[\tilde{u}],$$

e tomamos o seu produto interno em $I\!\!L^2$ com $D^2\tau$. Temos, então,

$$
\begin{aligned}
We\{(D^2\tau', D^2\tau) + (D^2(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau, D^2\tau) \quad &+ \quad (D^2 g(\tau,\nabla\tilde{u}), D^2\tau)\} \\
+(D^2\tau, D^2\tau) \quad &= \quad 2\,\omega\,(D^2 D[\tilde{u}], D^2\tau).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Adicionando as equações (3.19),(3.20) e (3.21) obtemos

$$
\begin{aligned}
We\,((\tau',\tau))_2 + \|\tau\|_2^2 \quad &= \quad 2\,\omega\,((D[\tilde{u}],\tau))_2 \\
&- \quad We\,\{((g(\tau,\nabla\tilde{u}),\tau))_2 + ((\tilde{u}\cdot\nabla)\tau,\tau))_2\}\,.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Observemos que, se $u \in V$, então

$$
(\mathbf{B}(u,\tau),\tau) = ((u\cdot\nabla)\tau,\tau) = 0, \tag{3.23}
$$

pois,

$$
\begin{aligned}
((u\cdot\nabla)\tau,\tau) \quad &= \quad \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j} \tau_{ik}\, dx \\
&= \quad \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau_{ik}^2}{2}\right) dx \\
&= \quad -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tau_{ik}^2\, dx \\
&= \quad -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \operatorname{div}\, u\, \tau_{ik}^2\, dx = 0.
\end{aligned}
$$

Notemos também que

$$
\begin{aligned}
(\nabla(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau, \nabla\tau) \quad &= \quad (\mathbf{B}(\nabla\tilde{u},\tau),\nabla\tau) + (\mathbf{B}(\tilde{u},\nabla\tau),\nabla\tau) \\
&= \quad (\mathbf{B}(\nabla\tilde{u},\tau),\nabla\tau) \quad (\text{por } (3.23))
\end{aligned}
$$

e que

$$
\begin{aligned}
(D^2(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau, D^2\tau) \quad &= \quad (\mathbf{B}(D^2\tilde{u},\tau), D^2\tau) + (\mathbf{B}(\partial_j\tilde{u},\partial_i\tau), D^2\tau) \\
&\quad +(\mathbf{B}(\partial_i\tilde{u},\partial_j\tau), D^2\tau) + (\mathbf{B}(\tilde{u}, D^2\tau), D^2\tau) \\
&= \quad (\mathbf{B}(D^2\tilde{u},\tau), D^2\tau) + 2(\mathbf{B}(\partial_i\tilde{u},\partial_j\tau), \partial_{ij}^2\tau)
\end{aligned}
$$

onde índices repetidos se somam. Com estas observações, a equação (3.22) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(We\,\|\tau\|_2^2\right) + \|\tau\|_2^2 = 2\,\omega\,((D[\tilde{u}],\tau))_2 \\
&- \quad We\{(\mathbf{B}(\nabla\tilde{u},\tau),\nabla\tau) + (\mathbf{B}(D^2\tilde{u},\tau),D^2\tau) \qquad (3.24)\\
&+ \quad 2(\mathbf{B}(\partial_i\tilde{u},\partial_j\tau),\partial_{ij}^2\tau) + ((g(\tau,\nabla\tilde{u}),\tau))_2\}.
\end{aligned}$$

Vamos estimar agora os termos do lado direito de (3.24).

O primeiro deles fornece

$$((D[\tilde{u}],\tau))_2 \leq \|D[\tilde{u}]\|_2\,\|\tau\|_2 \leq \|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2. \tag{3.25}$$

Agora estimamos o termo seguinte usando a imersão de Sobolev $H^2 \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega})$,

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{B}(\nabla\tilde{u},\tau),\nabla\tau)| &\leq |(\nabla\tilde{u}\cdot\nabla)\tau|\,|\nabla\tau| \\
&\leq C_0\,\|\nabla\tilde{u}\|_{L^\infty}\,\|\tau\|\,|\nabla\tau| \\
&\leq C_0\,\|\nabla\tilde{u}\|_2\|\tau\|_2^2 \\
&\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Analogamente estimamos o termo

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{B}(\partial_i\tilde{u},\partial_j\tau),\partial_{ij}^2\tau)| &\leq |(\partial_i\tilde{u}\cdot\nabla)\partial_j\tau|\,|\partial_{ij}^2\tau| \\
&\leq C_0\,\|\partial_i\tilde{u}\|_{L^\infty}\,\|\partial_j\tau\|\,|\partial_{ij}^2\tau| \\
&\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Usando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev $W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,4}$ e $W^{3,2} \hookrightarrow W^{2,4}$, estimamos agora

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \sum_{j=1}^n D^2\tilde{u}_j\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_j}D^2\tau_{ik}dx\right| &\leq C_0\|D^2\tilde{u}\|_{L^4}\|\nabla\tau_{ik}\|_{L^4}|D^2\tau_{ik}| \\
&\leq C_0\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|(\mathbf{B}(D^2\tilde{u},\tau),D^2\tau)| \leq C_0\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2^2\,; \tag{3.28}$$

e, finalmente, com os mesmos argumentos anteriores, limitamos a forma bilinear g por

$$\|g(\tau,\nabla\tilde{u})\|_2 \leq C_0\,\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2.$$

O termo restante fornece

$$((g(\tau,\nabla\tilde{u}),\tau))_2 \leq \|g(\tau,\nabla\tilde{u})\|_2\,\|\tau\|_2 \leq C_0\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2^2. \tag{3.29}$$

Com as estimativas (3.25)-(3.29), deduzimos de (3.24) a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(We\,\|\tau\|_2^2\right)+\|\tau\|_2^2 &\leq 2\,\omega\,\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2+C_0\,We\,\|\tilde{u}\|_3\,\|\tau\|_2^2\\ &= C_0\|\tilde{u}\|_3\left(\frac{2\,\omega}{C_0}\|\tau\|_2+We\,\|\tau\|_2^2\right),\end{aligned} \tag{3.30}$$

onde C_0 depende de Ω e de g. Por um lado, de (3.30) temos, em particular,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tau\|_2^2 \leq C_0\,\|\tilde{u}\|_3\left(\frac{2\,\omega}{C_0We}\|\tau\|_2+\|\tau\|_2^2\right). \tag{3.31}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\tau\|_2+\frac{2\,\omega}{C_0We}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tau\|_2^2+\frac{2\,\omega}{C_0We}\frac{1}{2\,\|\tau\|_2}\frac{d}{dt}\|\tau\|_2^2$$

e, então, usando (3.31), temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\tau\|_2+\frac{2\,\omega}{C_0We}\right)^2\\ &\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_3\left(\frac{2\,\omega}{C_0We}\|\tau\|_2+\|\tau\|_2^2+\left(\frac{2\,\omega}{C_0We}\right)^2+\frac{2\,\omega}{C_0We}\|\tau\|_2\right).\end{aligned}$$

Assim, vem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\tau\|_2+\frac{2\omega}{C_0We}\right)^2 \leq C_0\,\|\tilde{u}\|_3\left(\|\tau\|_2+\frac{2\omega}{C_0We}\right)^2, \tag{3.32}$$

a qual é uma desigualdade diferencial satisfeita por

$$z(t) = \left(\|\tau(t)\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0 We}\right)^2,$$

com condição inicial

$$z(0) = \left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0 We}\right)^2.$$

Dividimos por z em (3.32), integramos de 0 a t, com $t \leq T$, e obtemos

$$\ln z(t)^{1/2} - \ln z(0)^{1/2} \leq \int_0^t C_0 \|\tilde{u}(s)\|_3 ds$$

então

$$z(t)^{1/2} z(0)^{-1/2} \leq \exp\left(\int_0^t C_0 \|\tilde{u}(s)\|_3 ds\right)$$

de onde deduzimos que

$$\|\tau(t)\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0 We} \leq \left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0 We}\right) \exp\left(\int_0^T C_0 \|\tilde{u}(s)\|_3 ds\right), \tag{3.33}$$

o que implica que $\tau \in L^\infty(0,T;\mathbb{H}^2)$ e a estimativa (3.17).

Para provar que τ é contínua com valores em $\mathbb{H}^2$, vamos usar a fórmula de representação dada pelo método das características. Notemos que a solução U da seguinte equação diferencial ordinária,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} U(t,s;x) = \tilde{u}(t, U(t,s;x)) \text{ em } Q_T \\[2ex] U(s,s;x) = x \quad \text{em } \Omega \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{C}([0,T] \times [0,T]; \mathbb{H}^3)$. Consequentemente, a fórmula de representação

$$\tau(t,x) = \tau_0(U(0,t;x)) + \int_0^t \frac{1}{We} \left(2\,\omega\, D[\tilde{u}] - \tau - We g(\tau, \nabla\tilde{u})\right)(s, U(s,t;x)) ds$$

mostra que $\tau \in \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{H}^2)$, usando a Regra de Leibnitz e o fato de que a composição de uma função de L^2 com uma função contínua é contínua.

Suponhamos agora que $\tilde{u} \in \mathcal{C}([0,T];D(A))$. Da equação (3.16), pomos em evidência τ',

$$\tau' = \frac{1}{We}\,(2\,\omega\, D[\tilde{u}] - \tau) - (\tilde{u}\cdot\nabla)\tau - g(\tau, \nabla\tilde{u})\,,$$

o que nos diz que $\tau' \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{H}^1)$ pois, tomando norma-$\mathbb{H}^1$ na equação,

$$\|\tau'\|_1 \leq \frac{1}{We}\,(2\,\omega\,\|D[\tilde{u}]\|_1 + \|\tau\|_1) + \|(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau\|_1 + \|g(\tau,\nabla\tilde{u})\|_1. \qquad (3.34)$$

Mas,

$$\begin{aligned} |(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau| &\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_{L^\infty}\|\tau\| \\ &\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_2\,\|\tau\|_2 \end{aligned}$$

e, usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev $W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,4}$, estimamos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{n} \nabla\tilde{u}_j \frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_j}\right|^2 &\leq C_0 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |\nabla\tilde{u}_j|^2 \left|\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_j}\right|^2 dx \\ &\leq C_0 \sum_{j=1}^{n} \|\nabla\tilde{u}_j\|_{L^4}^2 \left\|\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_j}\right\|_{L^4}^2 \\ &\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_2^2\,\|\tau\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\nabla(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau| &\leq |(\nabla\tilde{u}\cdot\nabla)\tau| + |(\tilde{u}\cdot\nabla)\nabla\tau| \\ &\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_2\,\|\tau\|_2 + \|\tilde{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\tau\| \\ &\leq C_0\,\|\tilde{u}\|_2\,\|\tau\|_2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|(\tilde{u}\cdot\nabla)\tau\|_1 \leq C_0\,\|\tilde{u}\|_2\,\|\tau\|_2. \qquad (3.35)$$

Analogamente estimamos

$$\|g(\tau, \nabla\tilde{u})\|_1 \leq C_0 \, \|\tilde{u}\|_2 \|\tau\|_2.$$

Com estas estimativas, limitamos o lado direito de (3.34),

$$\begin{aligned}
\|\tau'\|_1 &\leq \frac{2\,\omega}{We}\|\tilde{u}\|_2 + \frac{1}{We}\|\tau\|_2 + C_0\|\tilde{u}\|_2 \, \|\tau\|_2 \\
&\leq \frac{2\,\omega}{We}\|\tilde{u}\|_2 + \frac{1}{We}\|\tau\|_2 + C_0\|\tilde{u}\|_2 \, \|\tau\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0 We^2} \\
&= C_0\left(\|\tilde{u}\|_2 + \frac{1}{We}\right)\left(\frac{2\,\omega}{C_0 We} + \|\tau\|_2\right) \\
&\leq C_0\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;D(A))} + \frac{1}{We}\right)\left(\frac{2\,\omega}{C_0 We} + \|\tau\|_2\right).
\end{aligned}$$

Agora, usamos (3.33) e obtemos

$$\|\tau'\|_1 \leq C_0\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;D(A))} + \frac{1}{We}\right)\left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0 We}\right)\exp\left(\int_0^T C_0\|\tilde{u}(s)\|_3 ds\right),$$

a qual, junto com a expressão para τ', implica que $\tau' \in \mathcal{C}([0,T]; I\!H^1)$ e a estimativa (3.18). ∎

Agora estamos em condições de provar que o problema (2.10)-(2.13) admite pelo menos uma solução definida num intervalo de tempo pequeno.

Teorema 3.4 (Existência local de uma solução regular) *Suponha* $\Gamma \in \mathcal{C}^3$, $\mathbf{f} \in L^2_{loc}(I\!R_+; I\!H^1)$, $\mathbf{f}' \in L^2_{loc}(I\!R_+; I\!H^{-1})$, $u_0 \in D(A)$, $\tau_0 \in I\!H^2$. *Então existe um* $T^* > 0$,

$$\begin{aligned}
u &\in L^2(0,T^*; I\!H^3) \cap \mathcal{C}([0,T^*]; D(A)), \ \textit{com} \\
u' &\in L^2(0,T^*; V) \cap \mathcal{C}([0,T^*]; H), \\
p &\in L^2(0,T^*; H^2), \ \ \textit{(p é a pressão associada), e} \\
\tau &\in \mathcal{C}([0,T^*]; I\!H^2), \ \textit{com} \\
\tau' &\in \mathcal{C}([0,T^*]; I\!H^1),
\end{aligned}$$

tal que (u, p, τ) *é uma solução do Problema (2.10)-(2.13) em* Q_{T^*}.

Demonstração: Para $T > 0$, $B_1 > 0$ e $B_2 > 0$, definimos o seguinte conjunto:

$$
\begin{aligned}
R_T = \{(\tilde{u},\tilde{\tau}) : \;& \tilde{u} \in L^2(0,T;I\!H^3) \cap \mathcal{C}([0,T];D(A)),\\
& \tilde{u}' \in L^2(0,T;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H),\\
& \tilde{\tau} \in L^\infty(0,T;I\!H^2),\ \tilde{\tau}' \in L^\infty(0,T;I\!H^1),\ \tilde{u}(0)=u_0,\ \tilde{\tau}(0)=\tau_0,\\
& \|\tilde{u}\|^2_{L^2(0,T;H^3)\cap L^\infty(0,T;D(A))} + \|\tilde{u}'\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \le B_1\\
& \|\tilde{\tau}\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \le B_1, \quad \|\tilde{\tau}'\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \le B_2\}.
\end{aligned}
$$

Observemos que se B_1 for suficientemente grande, então $R_T \neq \emptyset, \forall T > 0$. De fato, seja u^* a solução do seguinte problema de Stokes:

$$
\begin{cases}
u^*(\cdot) \in V, \quad \text{a.e.} \in I\!R_+,\\
Re\, u^{*\prime} + (1-\omega)Au^* = 0 \quad \text{a.e.} \in I\!R_+,\\
u^*(0) = u_0.
\end{cases}
$$

Pelo Lema 3.2, existe uma constante $C_3 = C_3(\omega, Re, \Omega)$ tal que

$$\|u^*\|^2_{L^2(0,T;H^3)\cap L^\infty(0,T;D(A))} + \|u^{*\prime}\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \le C_3\,|Au_0|^2.$$

Então, se escolhermos

$$B_1 > \max\{C_3\,|Au_0|^2, \|\tau_0\|_2\}, \tag{3.36}$$

temos que $(u^*, \tau_0) \in R_T$, para todo $T > 0$. Portanto, devemos considerar B_1 satisfazendo (3.36).

Consideremos agora a seguinte aplicação:

$$
\begin{aligned}
\phi: \quad R_T \quad &\to \quad X_T = \mathcal{C}([0,T];V) \times \mathcal{C}([0,T];I\!H^1)\\
(\tilde{u},\tilde{\tau}) \quad &\to \quad (u,\tau),
\end{aligned}
$$

onde u é a única solução do problema (3.1) com

$$\mathbf{F} = -Re\, B(\tilde{u},\tilde{u}) + P\nabla\cdot\tilde{\tau} + P\mathbf{f}$$

e τ é a única solução do problema (3.16). Notemos que pelos Lemas 3.2 e 3.3 a aplicação ϕ está bem definida já que $\mathbf{F} \in L^2(0,T;I\!H^1)$ e $\mathbf{F}' \in L^2(0,T;I\!H^{-1})$.

Claramente um ponto fixo de ϕ é solução do problema (2.10)-(2.13). Para provar a existência de um ponto fixo usaremos o Teorema de Ponto Fixo de Schauder.

O primeiro fato que provaremos é que existe um T^* suficientemente pequeno tal que $\phi(R_{T^*}) \subseteq R_{T^*}$. A seguir, que R_{T^*} é um conjunto convexo, fechado e compacto e, finalmente, que a aplicação ϕ é contínua para a topologia de X_{T^*}.

Usaremos as estimativas dadas pelos Lemas 3.2 e 3.3 para u, u', τ e τ', portanto estimaremos as normas $||\mathbf{F}||_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1)}$, $||\mathbf{F}'||_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})}$ e $|\mathbf{F}(0)|$. Notemos que se $(\tilde{u}, \tilde{\tau}) \in R_{T^*}$, então

$$\begin{aligned} ||\mathbf{F}(t)||_1^2 &\leq \left(||Re\, B(\tilde{u}(t), \tilde{u}(t))||_1 + ||P\nabla \cdot \tilde{\tau}(t)||_1 + ||P\mathbf{f}(t)||_1\right)^2 \\ &\leq 3Re^2 \, ||B(\tilde{u}(t), \tilde{u}(t))||_1^2 + 3||\nabla \cdot \tilde{\tau}(t)||_1^2 + 3||\mathbf{f}(t)||_1^2. \end{aligned}$$

Do mesmo modo que estimamos (3.35), podemos estimar

$$||B(\tilde{u}(t), \tilde{u}(t))||_1^2 \leq ||(\tilde{u}(t) \cdot \nabla)\tilde{u}(t)||_1^2 \leq C_0 \, ||\tilde{u}(t)||_2^4. \tag{3.37}$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{F}(t)||_1^2 &\leq C_4 \left(||\tilde{u}(t)||_2^4 + ||\tilde{\tau}||_2^2\right) + 3||\mathbf{f}(t)||_1^2 \\ &\leq C_4 \, B_1^2 + 3||\mathbf{f}(t)||_1^2, \end{aligned}$$

e, integrando de 0 a T, obtemos que

$$||\mathbf{F}||_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1)}^2 \leq C_4 \, B_1^2 T + 3||\mathbf{f}||_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1)}^2. \tag{3.38}$$

Agora vamos estimar $||\mathbf{F}'(t)||_{\boldsymbol{H}^{-1}}$. Para isso, tomemos $v \in I\!H_0^1$ com $||v|| = 1$, e estimemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}'(t), v\rangle = &- Re\left\{\langle B(\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t)), v\rangle + \langle B(\tilde{u}(t), \tilde{u}'(t)), v\rangle\right\} \\ &+ \langle P\nabla \cdot \tilde{\tau}'(t), v\rangle + \langle P\mathbf{f}'(t), v\rangle. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev $H_0^1 \hookrightarrow L^4$, o primeiro termo pode ser estimado como

$$
\begin{aligned}
|\langle B(\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t)), v\rangle| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \tilde{u}_j'(t) \frac{\partial \tilde{u}_i(t)}{\partial x_j} v_i \right| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} |\tilde{u}_j'(t)| \left\| \frac{\partial \tilde{u}_i(t)}{\partial x_j} \right\|_{L^4} \|v_i\|_{L^4} \\
&\leq C_4 \|\tilde{u}'\|_{L^\infty(0,T;H)} \|\tilde{u}(t)\|_2 \|v\| \\
&\leq C_4 B_1^{1/2} \|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;D(A))} \\
&\leq C_4 B_1 .
\end{aligned}
$$

Para estimar o termo seguinte, notemos que a forma bilinear B satisfaz, para $u \in V$

$$
\begin{aligned}
(B(u,v), w) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i dx - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \operatorname{div} u \, w_i \, v_i dx \\
&= -(B(u,w), v) .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|(B(\tilde{u}(t), \tilde{u}'(t)), v)| &= |(B(\tilde{u}(t), v), \tilde{u}'(t))| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \tilde{u}_j(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tilde{u}_i'(t) \right| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|\tilde{u}_j(t)\|_{L^\infty} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |\tilde{u}_i'(t)| \\
&\leq C_4 \|\tilde{u}(t)\|_2 \|v\| \, |\tilde{u}'(t)| \\
&\leq C_4 \|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;D(A))} \|\tilde{u}'\|_{L^\infty(0,T;H)} \\
&\leq C_4 B_1
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{F}'(t), v\rangle|^2 &\leq 3Re^2|\langle B(\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t)), v\rangle + \langle B(\tilde{u}(t), \tilde{u}'(t)), v\rangle|^2 \\
&+ 3|\langle P\nabla \cdot \tilde{\tau}'(t), v\rangle|^2 + 3|\langle P\mathbf{f}'(t), v\rangle|^2 \\
&\leq C_4 B_1^2 + 3|\nabla \cdot \tilde{\tau}'(t)|^2 |v|^2 + 3\|\mathbf{f}'(t)\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}^2 \|v\|^2 \\
&\leq C_4 B_1^2 + 3\|\tilde{\tau}'\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^1)}^2 + 3\|\mathbf{f}'(t)\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}^2 \\
&\leq C_4 B_1^2 + 3B_2^2 + 3\|\mathbf{f}'(t)\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}^2,
\end{aligned}$$

e, integrando de 0 a T, obtemos que

$$\|\mathbf{F}'\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})}^2 \leq C_4\, B_1^2\, T + 3B_2^2\, T + 3\|\mathbf{f}'\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})}. \tag{3.39}$$

Como $\mathbf{F} \in \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{L}^2)$, podemos avaliar $\mathbf{F}$ em $t = 0$,

$$\mathbf{F}(0) = -ReB(u_0, u_0) + P\nabla \cdot \tau_0 + P\mathbf{f}(0)$$

e estimar a norma-$\mathbb{L}^2$,

$$|\mathbf{F}(0)|^2 \leq C_4\, \|u_0\|_2^4 + 3|\nabla \cdot \tau_0|^2 + 3|\mathbf{f}(0)|^2.$$

Portanto, temos

$$|\mathbf{F}(0)|^2 \leq C_4\, |Au_0|^4 + 3\|\tau_0\|_1^2 + 3|\mathbf{f}(0)|^2. \tag{3.40}$$

Pelo Lema 3.2, obtemos a seguinte estimativa para u e u',

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^3)\cap L^\infty(0,T;D(A))}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)}^2 \\
&\leq C_2\, \left(|Au_0|^2 + \|\mathbf{F}\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1)}^2 + \|\mathbf{F}'\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})}^2 + |\mathbf{F}(0)|^2\right),
\end{aligned}$$

e, usando (3.38)-(3.40), deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^3)\cap L^\infty(0,T;D(A))}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)}^2 \\
&\leq C_2\{|Au_0|^2 + C_4|Au_0|^4 + 3|\mathbf{f}(0)|^2 + 3\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1)}^2 \qquad (3.41) \\
&+ 3\|\mathbf{f}'\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})}^2 + 3\|\tau_0\|_1^2 + (2\, C_4\, B_1^2 + 3\, B_2^2)T\}.
\end{aligned}$$

Se escolhermos B_1 tal que

$$\begin{aligned} B_1 \geq \; & 2\,C_2\{|Au_0|^2 + C_4|Au_0|^4 + 3|\mathbf{f}(0)|^2 + 3\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1)} \\ & + 3\|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})} + 3\|\tau_0\|_1^2\} \end{aligned} \tag{3.42}$$

e tomarmos

$$T \leq \frac{B_1}{2\,C_2\,(2\,C_4\,B_1^2 + 3\,B_2^2)}, \tag{3.43}$$

teremos que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^3)\cap L^\infty(0,T;D(A))} \;\; & + \;\; \|u'\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \\ & \leq \; \frac{B_1}{2} + C_2(2\,C_4\,B_1^2 + 3\,B_2^2)T \\ & \leq \; B_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.3, temos que

$$\|\tau\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^2)} \leq \left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0\,We}\right)\,\exp\left(C_0\|\tilde{u}\|_{L^1(0,T;\boldsymbol{H}^3)}\right),$$

e, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\tilde{u}(t)\|_3 dt \; & \leq \; T^{1/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^3)} \\ & \leq \; T^{1/2}B_1^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $0 < \omega < 1$, concluimos que

$$\|\tau\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^2)} \leq \left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2}{C_0\,We}\right)\,\exp\left(C_0\,T^{1/2}\,B_1^{1/2}\right). \tag{3.44}$$

agora escolhemos

$$B_1 \geq e^{\sqrt{2}}\left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2}{C_0\,We}\right) \tag{3.45}$$

e também

$$T \leq \frac{2}{C_0^2\,B_1}. \tag{3.46}$$

Então, de (3.44), obtemos

$$\begin{aligned}\|\tau\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^2)} &\leq \frac{B_1}{e^{\sqrt{2}}}\exp\left(C_0\,T^{1/2}\,B_1^{1/2}\right)\\ &\leq B_1.\end{aligned}$$

Como $\tilde{u} \in \mathcal{C}(0,T;D(A))$, temos uma estimativa para τ':

$$\begin{aligned}&\|\tau'\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^1)}\\ &\leq C_0\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;D(A))} + \frac{1}{C_0We}\right)\left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\,\omega}{C_0We}\right)\exp\left(C_0\|\tilde{u}\|_{L^1(0,T;\boldsymbol{H}^3)}\right)\\ &\leq C_0\left(B_1^{1/2} + \frac{1}{C_0We}\right)\left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2}{C_0We}\right)\exp\left(C_0\|\tilde{u}\|_{L^1(0,T;\boldsymbol{H}^3)}\right).\end{aligned}$$

Portanto, se escolhermos

$$B_2 \geq C_0\,e^{\sqrt{2}}\left(B_1^{1/2} + \frac{1}{C_0We}\right)\left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2}{C_0We}\right), \tag{3.47}$$

considerando (3.46), temos que

$$\|\tau'\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^1)} \leq \frac{B_2}{e^{\sqrt{2}}}\exp\left(C_0\|\tilde{u}\|_{L^1(0,T;\boldsymbol{H}^3)}\right) \leq B_2.$$

Por (3.36),(3.42) e (3.45) é suficiente, portanto, escolher

$$\begin{aligned}B_1 \geq \ \max\ &\left\{C_3|Au_0|\,, e^{\sqrt{2}}\left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2}{C_0\,We}\right),\right.\\ &2\,C_2\{|Au_0|^2 + C_4|Au_0|^4 + 3|\mathbf{f}(0)|^2 + 3\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1)}\\ &\left.+3\|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1})} + 3\|\tau_0\|_1^2\}\right\},\end{aligned}$$

e, por (3.43),(3.46), tomar

$$T \leq \min\left(\frac{B_1}{2\,C_2\,(2\,C_4\,B_1^2 + 3\,B_2^2)}, \frac{2}{C_0^2\,B_1}\right).$$

Assim, definimos constantes B_1 e B_2, dependendo dos dados, e definimos um tempo $T^* > 0$, dependendo de B_1, B_2 e dos dados, tal que $\phi(R_{T^*}) \subseteq R_{T^*}$.

Claramente o conjunto R_{T^*} é convexo, portanto para provar que é fechado basta provar que é fracamente fechado. Seja $(\tilde{u}_n, \tilde{\tau}_n), \in R_{T^*}, n \in I\!N$, uma sequência que converge fraco a $(\tilde{u}, \tilde{\tau})$ em X_{T^*}. Queremos ver que $(\tilde{u}, \tilde{\tau}) \in R_{T^*}$. Como

$$
\begin{array}{ll}
(\tilde{u}_n, \tilde{\tau}_n) & \text{é limitada em } L^2(0,T; I\!H^3) \cap \mathcal{C}([0,T]; D(A)) \times L^\infty(0,T; I\!H^2) \text{ e} \\
(\tilde{u}'_n, \tilde{\tau}'_n) & \text{é limitada em } L^2(0,T; V) \cap \mathcal{C}([0,T]; H) \times L^\infty(0,T; I\!H^1),
\end{array}
$$

podemos extrair uma subsequência $(\tilde{u}_{n_k}, \tilde{\tau}_{n_k})$ tal que

$$
\begin{array}{lll}
\tilde{u}_{n_k} & \rightarrow & \bar{u} \quad \text{fraco em } L^2(0,T; I\!H^3) \\
\tilde{u}_{n_k} & \rightarrow & \bar{u} \quad \text{fraco* em } \mathcal{C}([0,T]; D(A)) \\
\tilde{u}'_{n_k} & \rightarrow & \bar{u}' \quad \text{fraco em } L^2(0,T; V) \\
\tilde{u}'_{n_k} & \rightarrow & \bar{u}' \quad \text{fraco* em } \mathcal{C}([0,T]; H) \\
\tilde{\tau}_{n_k} & \rightarrow & \bar{\tau} \quad \text{fraco* em } L^\infty(0,T; I\!H^2) \\
\tilde{\tau}'_{n_k} & \rightarrow & \bar{\tau}' \quad \text{fraco* em } L^\infty(0,T; I\!H^1)
\end{array}
$$

assim, $(\bar{u}, \bar{\tau}) \in R_{T^*}$. Mas, $(\tilde{u}_{n_k}, \tilde{\tau}_{n_k})$ converge fraco a $(\tilde{u}, \tilde{\tau})$ em X_{T^*} então podemos concluir que $(\bar{u}, \bar{\tau}) = (\tilde{u}, \tilde{\tau})$, logo $(\tilde{u}, \tilde{\tau}) \in R_{T^*}$. A prova de que o conjunto R_{T^*} é compacto segue da aplicação do Teorema de Ascoli (Ver [5]) ou de uma generalização do Teorema de Aubin-Lions (Ver [7]). Só falta mostrar que a aplicação ϕ é contínua em X_{T^*}. Suponha que $(\tilde{u}_n, \tilde{\tau}_n) \in R_{T^*}$, $(\tilde{u}_n, \tilde{\tau}_n) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{\tau})$ e seja $\phi(\tilde{u}_n, \tilde{\tau}_n) = (u_n, \tau_n)$. Como $\phi(R_{T^*}) \subseteq R_{T^*}$ e R_{T^*} é compacto, existe uma subsequência tal que

$$(u_{n_k}, \tau_{n_k}) \rightarrow (u, \tau) \text{ em } X_{T^*}$$

e, pelo Teorema de Aubin-Lions,

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{forte em } L^2(0,T; I\!H^2)\,.$$

Além disso, temos que

$$
\begin{array}{lll}
u'_{n_k} & \rightarrow & u' \quad \text{fraco em } L^2(0,T; V) \\
\tau'_{n_k} & \rightarrow & \tau' \quad \text{fraco* em } L^\infty(0,T; I\!H^1)\,.
\end{array}
$$

Logo, podemos passar ao limite nas equações

$$\begin{cases} Re\, u'_{n_k} + (1-\omega)Au_{n_k} = -Re\, B(\tilde{u}_{n_k}, \tilde{u}_{n_k}) + P(\nabla \cdot \tilde{\tau}_{n_k} + \mathbf{f}) \\ We \left\{ \tau'_{n_k} + (\tilde{u}_{n_k} \cdot \nabla)\tau_{n_k} + g(\tau_{n_k}, \nabla \tilde{u}_{n_k}) \right\} + \tau_{n_k} = 2\,\omega\, D[\tilde{u}_{n_k}] \end{cases}$$

e obter no limite,

$$\begin{cases} Re\, u' + (1-\omega)Au = -Re\, B(\tilde{u}, \tilde{u}) + P(\nabla \cdot \tilde{\tau} + \mathbf{f}) \\ We \left\{ \tau' + (\tilde{u} \cdot \nabla)\tau + g(\tau, \nabla \tilde{u}) \right\} + \tau = 2\,\omega\, D[\tilde{u}], \end{cases}$$

o que implica que $\phi(\tilde{u}, \tilde{\tau}) = (u, \tau)$. Como a sequência é arbitrária, concluimos que (u_n, τ_n) converge a (u, τ). Portanto, a aplicação ϕ é contínua em X_{T^*} e tem um ponto fixo, o que é uma solução do problema (2.10)-(2.13) em Q_{T^*}.

É importante observar que, como u é solução do problema (3.1) satisfaz

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T^*; I\!H^3) \cap \mathcal{C}([0, T^*]; D(A)), \\ u' &\in L^2(0, T^*; V) \cap \mathcal{C}([0, T^*]; H), \\ p &\in L^2(0, T^*; H^2) \text{ (a pressão associada)} \end{aligned}$$

e que, como τ é solução do problema (3.16), temos

$$\begin{aligned} \tau &\in \mathcal{C}([0, T^*]; I\!H^2) \\ \tau' &\in \mathcal{C}([0, T^*]; I\!H^1). \end{aligned}$$

∎

3.2 Unicidade da solução

Nesta seção mostraremos que a solução obtida no Teorema 3.4 é única na classe de soluções regulares. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5 *Seja $T > 0$, o Problema (2.10)-(2.13) admite uma única solução (u, τ) na classe*

$$L^2(0, T; I\!H^3) \cap \mathcal{C}([0, T]; D(A)) \times \mathcal{C}([0, T]; I\!H^2).$$

A pressão p é única, a menos de uma constante aditiva, no espaço $L^2(0, T; H^2)$.

Demonstração: Suponhamos que (u_1, p_1, τ_1) e (u_2, p_2, τ_2) sejam duas soluções do problema (2.10)-(2.13) que pertencem à classe especificada no enunciado do Teorema. Consideremos a diferença $u = u_1 - u_2$ e $\tau = \tau_1 - \tau_2$. Vamos obter uma desigualdade de energia satisfeita por u e τ. Para isso, subtraimos as equações (2.11) que satisfazem (u_1, τ_1) e (u_2, τ_2) e analogamente as equações (2.12), então temos que u e τ satisfazem

$$\begin{cases} Re\,\{u' + B(u_1, u) + B(u, u_2)\} + (1-\omega)Au = P\nabla\cdot\tau\,, \\ We\,\{\tau' + \mathbf{B}(u_1, \tau) + \mathbf{B}(u, \tau_2) + g(\tau_1, \nabla u) + g(\tau, \nabla u_2)\} + \tau \\ = 2\,\omega\, D[u], \end{cases} \tag{3.48}$$

junto com as condições iniciais nulas,

$$u(0) = 0, \qquad \tau(0) = 0.$$

Tomamos produto escalar de (3.48) em $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^2$ com $(u, \tau/2\omega)$ para obter

$$\begin{aligned} &Re\,\{(u', u) + (B(u_1, u), u) + B(u, u_2), u)\} + (1-\omega)(Au, u) \\ &\quad + \frac{We}{2\,\omega}\,\{(\tau', \tau) + (\mathbf{B}(u_1, \tau), \tau) + (\mathbf{B}(u, \tau_2), \tau) \\ &\quad + (g(\tau_1, \nabla u), \tau) + (g(\tau, \nabla u_2), \tau)\} + \frac{1}{2\,\omega}(\tau, \tau) \\ &\quad = (P\nabla\cdot\tau, u) + (D[u], \tau). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Observemos agora que, assim como a forma bilinear $\mathbf{B}$ satisfaz (3.23), a forma bilinear B satisfaz, para $u \in V$,

$$(B(u, v), v) = 0 \tag{3.50}$$

pois,

$$((u\cdot\nabla)v, v) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i^2}{2}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} v_i^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \operatorname{div} u \, v_i^2 dx = 0.
\end{aligned}
$$

Notemos também que

$$
\begin{aligned}
(P\nabla \cdot \tau, u) + (D[u], \tau) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} u_i dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ij} dx \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

o que é consequência da integração por partes. Além disso, usando a propriedade de ortogonalidade (3.23),

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{B}(u, \tau_2), \tau) &= (\mathbf{B}(u, \tau_2 - \tau_1 + \tau_1), \tau) \\
&= -(\mathbf{B}(u, \tau), \tau) + (\mathbf{B}(u, \tau_1), \tau) \\
&= (\mathbf{B}(u, \tau_1), \tau).
\end{aligned}
$$

Com estas observações, podemos escrever (3.49) como

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Re\,|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) + (1-\omega)\|u\|^2 + \frac{1}{2\,\omega}|\tau|^2 \\
&= -Re\,(B(u, u_2), u) - \frac{We}{2\,\omega}\left(\mathbf{B}(u, \tau_1) + g(\tau_1, \nabla u) + g(\tau, \nabla u_2), \tau\right).
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Agora, vamos estimar o lado direito de (3.51). Usando a imersão de Sobolev $H^2 \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, temos que

$$
\begin{aligned}
|(B(u, u_2), u)| &\leq |B(u, u_2)|\,|u| \\
&\leq |(u \cdot \nabla) u_2|\,|u| \\
&\leq C_0 \|\nabla u_2\|_{L^\infty} |u|^2 \\
&\leq C_0 \|u_2\|_3 |u|^2.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Analogamente ao anterior, temos

$$|g(\tau, \nabla u_2)| \leq C_0 \, \|u_2\|_3 \, |\tau|. \tag{3.53}$$

Usando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev $H_0^1 \hookrightarrow L^4$ e $W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,4}$, estimamos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j}\right|^2 &\leq C_0 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |u_j|^2 \left|\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j}\right|^2 dx \\
&\leq C_0 \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|_{L^4}^2 \left\|\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j}\right\|_{L^4}^2 \\
&\leq C_0 \, \|u\|^2 \, \|\tau_{ik}\|_2^2 \\
&\leq C_0 \, \|u\|^2 \, \|\tau\|_2^2,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$|\mathbf{B}(u, \tau_1)| \leq C_0 \, \|u\| \, \|\tau_1\|_2. \tag{3.54}$$

Similarmente,

$$|g(\tau_1, \nabla u)| \leq C_0 \, \|u\| \, \|\tau_1\|_2. \tag{3.55}$$

Assim, usando (3.52)-(3.55) em (3.51), temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Re\,|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) + (1-\omega)\|u\|^2 + \frac{1}{2\,\omega}|\tau|^2 \\
&\leq Re\, C_0 \, \|u_2\|_3 \, |u|^2 + C_0 \frac{We}{2\,\omega} \|\tau_1\|_2 \, \|u\| \, |\tau| + C_0 \frac{We}{2\,\omega} \|u_2\|_3 \, |\tau|^2 \\
&\leq C_0 \, \|u_2\|_3 \left(Re\,|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) + \frac{\epsilon We}{8\,\omega}\|u\|^2 + \frac{We C_0^2}{2\,\omega\,\epsilon}\|\tau_1\|_2^2 \, |\tau|^2 \\
&\leq \left(C_0 \|u_2\|_3 + \frac{C_0^2}{\epsilon}\|\tau_1\|_2^2\right)\left(Re|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) + \frac{\epsilon We}{8\,\omega}\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Chamamos

$$\phi_\epsilon = \left(C_0 \|u_2\|_3 + \frac{C_0^2}{\epsilon}\|\tau_1\|_2^2\right)$$

então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Re\,|u|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right)+(1-\omega)\left(1-\frac{\epsilon\,We}{8\,\omega(1-\omega)}\right)\|u\|^2+\frac{1}{2\,\omega}|\tau|^2$$

$$\leq \phi_\epsilon\left(Re|u|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right). \tag{3.56}$$

Notemos que ϕ_ϵ é uma função positiva e também que $\phi_\epsilon \in L^1(0,T)$, $\forall\, \epsilon > 0$, pois $u_2 \in L^2(0,T;I\!H^3)$ e $\tau_1 \in \mathcal{C}([0,T];I\!H^2)$. Agora, escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$1-\frac{\epsilon\,We}{8\,\omega(1-\omega)}>0$$

ou seja,

$$\epsilon<\frac{8\,\omega(1-\omega)}{We},$$

então de (3.56) temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Re\,|u|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right)\leq \phi_\epsilon\left(Re|u|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right),$$

e pelo Lema de Gronwall deduzimos que $u=0$ e $\tau=0$ em Q_T, e consequentemente a pressão associada à primeira equação em (3.48) é constante em Q_T. ∎

Observação: A solução obtida no Teorema 3.4 pertence a esta classe de soluções para $T = T^*$, consequentemente o ponto fixo construido na seção anterior é único.

Capítulo 4

Soluções globais

Neste capítulo mostraremos que a única solução obtida nos Teoremas 3.4 e 3.5 está definida para todo $t \geq 0$, se os dados são suficientemente pequenos. O ponto crucial é a obtenção de estimativas *a priori* da solução local, as quais darão uma desigualdade diferencial para normas adequadas de u, u', τ e τ'. Uma consequência será a estabilidade assintoticamente exponencial da solução nula quando $\mathbf{f} = 0$.

Também veremos que o problema linearizado em torno da solução nula admite uma única solução global, a qual é uniformemente limitada no tempo, para dados arbitrários.

4.1 Estimativas *A Priori*

Denotaremos por C_0 diferentes constantes dependendo só de Ω e por C_i, $i = 1, 2, ...$ constantes dependendo de Ω e das formas bilineares B, $\mathbf{B}$ e g. Lembremos que a solução local obtida no Teorema 3.4 satisfaz

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0,T^*;I\!H^3) \cap \mathcal{C}([0,T^*];D(A)) \\ \tau &\in \mathcal{C}([0,T^*];I\!H^2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

juntamente com as equações (2.11)-(2.13).

Lembramos que no Capítulo 3, mostramos que $||\tau||_2$ satisfaz a desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt}\left(We\,\|\tau\|_2^2\right) + 2\,\|\tau\|_2^2 \leq 4\,\omega\,\|u\|_3\,\|\tau\|_2 + 2\,C_1\,We\,\|u\|_3\,\|\tau\|_2^2. \qquad (3.30)$$

Usando a desigualdade $2ab \leq \frac{1}{\epsilon}a^2 + \epsilon b^2$ em cada termo do lado direito e escolhendo $\epsilon = \frac{3}{2}$ para o primeiro termo e $\epsilon = \frac{1}{3}\omega^2$ para o segundo, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(We\,\|\tau\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\|\tau\|_2^2 \leq 3\,\omega^2\,\|u\|_3^2 + C_1\,\frac{We^2}{\omega^2}\|\tau\|_2^4. \qquad (4.2)$$

Agora vamos estimar a $\|u\|_3$ via a equação (2.11). Da equação, temos que

$$(1-\omega)Au = -Re\,(u' + B(u,u)) + P(\nabla\cdot\tau + \mathbf{f}),$$

e, tomando a norma-$\mathbb{L}^2$ ao quadrado, vem

$$(1-\omega)^2|Au|^2 \leq 4(Re^2|u'|^2 + Re^2|B(u,u)|^2 + |\nabla\cdot\tau|^2 + |\mathbf{f}|^2)\,. \qquad (4.3)$$

Aplicamos o operador ∇ a equação (2.11), obtendo

$$(1-\omega)A\nabla u = -Re\,(\nabla u' + \nabla B(u,u)) + P(\nabla(\nabla\cdot\tau) + \nabla\mathbf{f}),$$

e, então, tomamos a sua norma-$\mathbb{L}^2$ ao quadrado. Obtemos:

$$(1-\omega)^2|A\nabla u|^2 \leq 4(Re^2|\nabla u'|^2 + Re^2|\nabla B(u,u)|^2 + |\nabla(\nabla\cdot\tau)|^2 + |\nabla\mathbf{f}|^2)\,. \qquad (4.4)$$

A partir de (4.3) e (4.4), usando a estimativa (3.37), podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
(1-\omega)^2\|u\|_3^2 &\leq (1-\omega)^2\left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right) \\
&\leq (1-\omega)^2 C_0\left(|Au|^2 + |A\nabla u|^2\right) \\
&\leq C_0(Re^2\|u'\|^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + Re^2\|B(u,u)\|_1^2) \\
&\leq C_0(Re^2\|u'\|^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + C_2 Re^2|Au|^4).
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\|u\|_3^2 \leq \frac{C_0}{(1-\omega)^2}\left(Re^2\|u'\|^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + C_2\,Re^2|Au|^4\right). \qquad (4.5)$$

Da equação (2.11) também vamos deduzir uma estimativa para $|Au|$, que será usada posteriormente. Observemos que,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j dx\right| &\leq \int_\Omega |u_i| \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^{1/2} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^{1/2} |v_j| dx \\
&\leq \|u_i\|_{L^6} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^{1/2} \left\|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\|_{L^6}^{1/2} |v_j| \\
&\leq C_2 \|u_i\|^{3/2} \left\|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\|_1^{1/2} |v_j|
\end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Hölder com exponentes 6, 4, 12 e 2 e então a imersão de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^6$. Portanto,

$$|B(u,u)|^2 \leq C_2 \|u\|^3 |Au|. \tag{4.6}$$

Agora, temos

$$\begin{aligned}
(1-\omega)^2|Au|^2 &\leq 4\left(Re^2|u'|^2 + Re^2|B(u,u)|^2 + |\nabla\cdot\tau|^2 + |\mathbf{f}|^2\right) \\
&\leq 4\left(Re^2|u'|^2 + C_2Re^2\|u\|^3|Au| + \|\tau\|_1^2 + |\mathbf{f}|^2\right) \\
&\leq 4\left(Re^2|u'|^2 + \|\tau\|_1^2 + |\mathbf{f}|^2 + \frac{C_2Re^4}{(1-\omega)^2}\|u\|^6 + \frac{(1-\omega)^2}{8}|Au|^2\right),
\end{aligned}$$

e, então,

$$|Au|^2 \leq \frac{8}{(1-\omega)^2}\left(Re^2|u'|^2 + \|\tau\|_1^2 + |\mathbf{f}|^2 + \frac{C_2\,Re^4}{(1-\omega)^2}\|u\|^6\right). \tag{4.7}$$

Usando (4.5) em (4.2), deduzimos que $\|\tau\|_2$ satisfaz a seguinte desigualdade diferencial:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(We\,\|\tau\|_2^2) + \left(\frac{1}{2} - 3C_0\left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^2\right)\|\tau\|_2^2 \\
&\leq 3C_0\left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^2\left(Re^2\|u'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + C_2\,Re^2|Au|^4\right) + C_1\frac{We^2}{\omega^2}\|\tau\|_2^4.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Somente vamos considerar os valores de ω tais que o coeficiente de $\|\tau\|_2^2$ seja positivo; por exemplo, podemos escolher $\omega \leq \omega_0$, onde $\omega_0 = (1 + \sqrt{8\,C_0})^{-1}$ e, dessa maneira, vale

$$C_0\left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} - 3C_0\left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^2\right).$$

Agora, vamos obter desigualdades diferenciais para u, u' e τ'. Tomemos produto escalar em H da equação (2.11) com Au,

$$Re\,(u', Au) + (1-\omega)|Au|^2 = -Re((u\cdot\nabla)u, Au) + (P(\nabla\cdot\tau + \mathbf{f}), Au),$$

integramos por partes o primeiro termo e usamos a desigualdade de Schwarz no lado direito, para obter

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Re\,\|u\|^2) + 2(1-\omega)|Au|^2 \\
&\leq\; 2\,Re\,|(u\cdot\nabla)u|\,|Au| + 2\,|\nabla\cdot\tau|\,|Au| + 2\,|\mathbf{f}|\,|Au| \\
&\leq\; \frac{4Re^2}{(1-\omega)}|(u\cdot\nabla)u|^2 + \frac{4}{(1-\omega)}\left(|\nabla\cdot\tau|^2 + |\mathbf{f}|^2\right) + \frac{3}{4}(1-\omega)|Au|^2.
\end{aligned}$$

Usamos em (4.6) a desigualdade $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon}b^2$ com $\epsilon = \dfrac{(1-\omega)}{4}$, obtendo a estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{4Re^2}{(1-\omega)}|(u\cdot\nabla)u|^2 &\leq C_2\frac{4Re^2}{(1-\omega)}\|u\|^3\,|Au| \\
&\leq \frac{(1-\omega)}{4}|Au|^2 + \frac{4C_3\,Re^4}{(1-\omega)^3}\|u\|^6.
\end{aligned}$$

Portanto, u satisfaz a desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt}(Re\,\|u\|^2) + (1-\omega)|Au|^2 \leq \frac{4}{(1-\omega)}\left(\|\tau\|_1^2 + |\mathbf{f}|^2 + \frac{C_3\,Re^4}{(1-\omega)^2}\|u\|^6\right). \quad (4.9)$$

Derivamos a equação (2.11) em relação a t, e obtemos

$$Re\,\{u'' + B(u', u) + B(u, u')\} + (1-\omega)Au' = P(\nabla\cdot\tau' + \mathbf{f}').$$

Tomamos agora o produto escalar em H com u' e usamos a propriedade de ortogonalidade (3.50). Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Re\,|u'|^2) + (1-\omega)\|u'\|^2 \\ = -Re\,(B(u',u),u') + (P\nabla\cdot\tau',u') + (P\mathbf{f}',u').\end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, derivamos a equação (2.12) em relação a t,

$$We\,\{\tau'' + B(u',\tau) + B(u,\tau') + g(\tau',\nabla u) + g(\tau,\nabla u')\} + \tau' = 2\,\omega D[u'],$$

e tomamos produto escalar em $\mathbb{L}^2$ com $\frac{\tau'}{2\,\omega}$. Usando a propriedade de ortogonalidade (3.23), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2\right) + \frac{1}{2\,\omega}|\tau'|^2 \\ = -\frac{We}{2\,\omega}\left(B(u',\tau) + g(\tau,\nabla u') + g(\tau',\nabla u),\tau'\right) + (D[u'],\tau')\end{aligned} \tag{4.11}$$

Como $(P\nabla\cdot\tau',u') + (D[u'],\tau') = 0$, adicionando (4.10) e (4.11), obtemos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Re\,|u'|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2) + (1-\omega)\|u'\|^2 + \frac{1}{2\,\omega}|\tau'|^2 \\ &= \quad -Re(B(u',u),u') + (P\mathbf{f}',u') \\ &\quad -\frac{We}{2\omega}(B(u',\tau) + g(\tau,\nabla u') + g(\tau',\nabla u),\tau').\end{aligned}$$

Agora estimamos os termos quadráticos usando (3.52)-(3.55):

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(Re\,|u'|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2) + 2(1-\omega)\|u'\|^2 + \frac{1}{\omega}|\tau'|^2 \\ &\leq \quad 2\,Re\,|B(u',u)|\,|u'| + 2\|\mathbf{f}'\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}\|u'\| \\ &\quad + \frac{We}{\omega}|\tau'|\,\{|B(u',\tau)| + |g(\tau,\nabla u')| + |g(\tau',\nabla u)|\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le\ 2ReC_4|u'|^2\,\|u\|_3 + \frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|^2_{H^{-1}} + \frac{(1-\omega)}{2}\|u'\|^2 \\
&\quad + C_4\frac{2\,We}{\omega}\|u'\|\,\|\tau\|_2\,|\tau'| + C_4\frac{We}{\omega}|\tau'|^2\,\|u\|_3 \\
&\le\ \epsilon\,\|u\|_3^2 + C_4\frac{Re^2}{\epsilon}|u'|^4 + \frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|^2_{H^{-1}} + (1-\omega)\|u'\|^2 \\
&\quad + C_4\frac{We^2}{(1-\omega)\omega^2}\|\tau\|_2^2\,|\tau'|^2 + C_4\frac{We^2}{\epsilon\,\omega^2}|\tau'|^4 \\
&\le\ \epsilon\,\|u\|_3^2 + \frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|^2_{H^{-1}} + (1-\omega)\|u'\|^2 \\
&\quad + C_4\left\{\frac{1}{\epsilon}\left(Re^2|u'|^4 + \frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right) + \frac{\epsilon\,We^2}{(1-\omega)^2\omega^2}\|\tau\|_2^4 + \frac{We^2}{\epsilon\,\omega^2}|\tau'|^4\right\}.
\end{aligned}
$$

Assim, para $\forall\ \epsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(Re\,|u'|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2\right) + (1-\omega)\|u'\|^2 + \frac{1}{\omega}|\tau'|^2 \\
&\quad\le\ \epsilon\,\|u\|_3^2 + \frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|^2_{H^{-1}} \\
&\qquad + C_4\left\{\frac{1}{\epsilon}\left(Re^2\,|u'|^4 + \frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right) + \frac{\epsilon\,We^2}{(1-\omega)^2\omega^2}\|\tau\|_2^4\right\},
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

a qual é uma desigualdade diferencial para u' e τ'. Agora vamos juntar adequadamente as desigualdades diferenciais que temos para u, u', τ e τ'. Multipliquemos a desigualdade (4.8) por $\dfrac{(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}$, considerando $\omega \le \omega_0$. Então, vem

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\left\{\frac{d}{dt}(We\,\|\tau\|_2^2) + \frac{C_0\,\omega^2}{(1-\omega)^2}\|\tau\|_2^2\right\} \\
&\le\ \frac{(1-\omega)}{2\,Re^2}\left(Re^2\,\|u'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + C_2\,Re^2|Au|^4\right) + \frac{C_1(1-\omega)^3 We^2}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^4}\|\tau\|_2^4.
\end{aligned}
$$

Adicionemos este resultado à desigualdade (4.12), para obter

$$\frac{d}{dt}\left(Re\,|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2+\frac{We(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\|\tau\|_2^2\right)$$

$$+(1-\omega)\|u'\|^2+\frac{1}{\omega}|\tau'|^2+\frac{(1-\omega)}{6\,Re^2}\|\tau\|_2^2$$

$$\leq \epsilon\,\|u\|_3^2+\frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|_{H^{-1}}^2+\frac{(1-\omega)}{2}\|u'\|^2+\frac{(1-\omega)}{2\,Re^2}\|\mathbf{f}\|_1^2+\frac{C_2(1-\omega)}{2}|Au|^4$$

$$+C_4\left\{\frac{1}{\epsilon}\left(Re^2|u'|^4+\frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right)+\frac{\epsilon\,We^2}{(1-\omega)^2\omega^2}\|\tau\|_2^4\right\}+\frac{C_1(1-\omega)^3We^2}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^4}\|\tau\|_2^4$$

$$\leq \epsilon\,\|u\|_3^2+\frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|_{H^{-1}}^2+\frac{(1-\omega)}{2}\|u'\|^2+\frac{(1-\omega)}{2\,Re^2}\|\mathbf{f}\|_1^2+\frac{C_2(1-\omega)}{2}|Au|^4$$

$$+C_5\left\{\frac{1}{\epsilon}\left(Re^2|u'|^4+\frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right)+\frac{We^2}{\omega^2}\left(\frac{\epsilon}{(1-\omega)^2}+\frac{(1-\omega)^3}{\omega^2\,Re^2}\right)\|\tau\|_2^4\right\},$$

onde a constante $C_5\leq \max\left\{C_4,\frac{C_1}{6\,C_0}\right\}$.

Escolhemos agora $\epsilon=\dfrac{(1-\omega)^3}{8\,C_0\,Re^2}$ na desigualdade e usamos a estimativa (4.5) da $\|u\|_3^2$, para concluir que

$$\frac{d}{dt}\left(Re\,|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2+\frac{We(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\|\tau\|_2^2\right)$$

$$+(1-\omega)\|u'\|^2+\frac{1}{\omega}|\tau'|^2+\frac{(1-\omega)}{6\,Re^2}\|\tau\|_2^2$$

$$\leq \frac{(1-\omega)}{8\,Re^2}\left(Re^2\|u'\|^2+\|\tau\|_2^2+\|\mathbf{f}\|_1^2+C_2\,Re^2|Au|^4\right)$$

$$+\frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|_{H^{-1}}^2+\frac{(1-\omega)}{2}\|u'\|^2+\frac{(1-\omega)}{2\,Re^2}\|\mathbf{f}\|_1^2+\frac{C_2(1-\omega)}{2}|Au|^4$$

$$+C_5\left\{\frac{8\,C_0\,Re^2}{(1-\omega)^3}\left(Re^2|u'|^4+\frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right)+\frac{We^2}{\omega^2}\left(\frac{(1-\omega)}{8\,C_0\,Re^2}+\frac{(1-\omega)^3}{\omega^2\,Re^2}\right)\|\tau\|_2^4\right\}.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(Re\,|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2+\frac{We(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\|\tau\|_2^2\right)\\
&\qquad+\frac{3}{8}(1-\omega)\|u'\|^2+\frac{1}{\omega}|\tau'|^2+\frac{(1-\omega)}{24\,Re^2}\|\tau\|_2^2\\
&\le\frac{5(1-\omega)}{8\,Re^2}\|\mathbf{f}\|_1^2+\frac{5}{8}C_2(1-\omega)|Au|^4+\frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|_{H^{-1}}^2\\
&\qquad+C_6\left\{\frac{Re^2}{(1-\omega)^3}\left(Re^2|u'|^4+\frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right)+\frac{We^2(1-\omega)^3}{\omega^4\,Re^2}\|\tau\|_2^4\right\},
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

onde $C_6=\max\left\{8\,C_0\,C_5,1+\dfrac{\omega^2}{8\,C_0\,(1-\omega)^2}\right\}$.

Finalmente, multiplicamos a desigualdade (4.9) por $\dfrac{(1-\omega)^2}{192\,Re^2}$:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{(1-\omega)^2}{192\,Re}\|u\|^2\right)+\frac{(1-\omega)^3}{192\,Re^2}|Au|^2\le\frac{(1-\omega)}{48\,Re^2}\left(\|\tau\|_1^2+|\mathbf{f}|^2\right)+\frac{C_3Re^2}{48(1-\omega)}\|u\|^6,
$$

e adicionamos a (4.13), para obter

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(Re\,|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2+\frac{We(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\|\tau\|_2^2+\frac{(1-\omega)^2}{192\,Re}\|u\|^2\right)\\
&\qquad+\frac{3}{8}(1-\omega)\|u'\|^2+\frac{1}{\omega}|\tau'|^2+\frac{(1-\omega)}{24\,Re^2}\|\tau\|_2^2+\frac{(1-\omega)^3}{192\,Re^2}|Au|^2\\
&\le\frac{5(1-\omega)}{8\,Re^2}\|\mathbf{f}\|_1^2+\frac{5}{8}C_2(1-\omega)|Au|^4+\frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|_{H^{-1}}^2+\frac{(1-\omega)}{48\,Re^2}\left(\|\tau\|_1^2+|\mathbf{f}|^2\right)\\
&\qquad+C_6\left\{\frac{Re^2}{(1-\omega)^3}\left(Re^2|u'|^4+\frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right)+\frac{We^2(1-\omega)^3}{\omega^4Re^2}\|\tau\|_2^4\right\}+\frac{C_3Re^2}{48(1-\omega)}\|u\|^6.
\end{aligned}
$$

De (4.7) estimamos $|Au|^4$ como

$$
\frac{5}{8}C_2(1-\omega)|Au|^4\le\frac{160\,C_2}{(1-\omega)^3}\left(Re^4|u'|^4+\|\tau\|_1^4+|\mathbf{f}|^4+\frac{Re^8}{(1-\omega)^4}\|u\|^{12}\right).
$$

Então, existe uma constante C_7 tal que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(Re\,|u'|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2 + \frac{We(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\|\tau\|_2^2 + \frac{(1-\omega)^2}{192\,Re}\|u\|^2\right) \\
&\quad + \frac{3}{8}(1-\omega)\|u'\|^2 + \frac{1}{\omega}|\tau'|^2 + \frac{(1-\omega)}{48\,Re^2}\|\tau\|_2^2 + \frac{(1-\omega)^3}{192\,Re^2}|Au|^2 \\
&\leq \frac{31}{48}\frac{(1-\omega)}{Re^2}\|\mathbf{f}\|_1^2 + \frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|_{H^{-1}}^2 + \frac{160\,C_2}{(1-\omega)^3}|\mathbf{f}|^4 \qquad (4.14) \\
&\quad + C_7\left\{\frac{Re^2}{(1-\omega)^3}\left(Re^2|u'|^4 + \frac{We^2}{\omega^2}|\tau'|^4\right) + \frac{We^2(1-\omega)^3}{\omega^4\,Re^2}\|\tau\|_2^4\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(1-\omega)^3}\|\tau\|_1^4 + \frac{Re^2}{(1-\omega)}\|u\|^6 + \frac{Re^8}{(1-\omega)^7}\|u\|^{12}\right\},
\end{aligned}
$$

para todo ω, com $0 < \omega \leq \omega_0 < 1$ onde ω_0 é uma constante que depende só do domínio Ω.

Agora estamos preparados para provar que, se os dados são suficientemente pequenos, a solução local achada no Teorema 3.4 está definida para todo tempo.

4.2 Existência global

Observemos que se definimos

$$
Y(t) = Re\,|u'(t)|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau'(t)|^2 + \frac{We(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\|\tau(t)\|_2^2 + \frac{(1-\omega)^2}{192\,Re}\|u(t)\|^2
$$

então, a desigualdade (4.14) pode ser escrita como:

$$
Y' + \lambda Y \leq \alpha\,(Y^2 + Y^3 + Y^6) + \beta, \qquad (4.15)
$$

onde $\lambda > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes dependendo do domínio Ω e dos parâmetros ω, Re e We, e β é uma constante dependendo da $\mathbf{f}$. Com adequadas hipóteses sob $Y(0)$ e sob a constante β, a função $Y(t)$ é limitada para todo $t > 0$, mais precisamente:

Lema 4.1 *Seja Y uma função não negativa, absolutamente contínua, satisfazendo a desigualdade (4.15). Existe um $M_0 > 0$ tal que, se $Y(0) \le M \le M_0$ e $\beta \le \frac{\lambda M}{2}$, então $Y(t) \le M$ para todo $t \in I\!R_+$.*

Demonstração: Suponhamos que existe algum t tal que $Y(t) > M$ e definamos

$$t^* = \inf\{t \in I\!R_+ : Y(t) > M\}.$$

Então $Y(t^*) = M$ e $Y'(t^*) > 0$, pois Y é contínua e $Y(0) \le M$. Da desigualdade (4.15) para t^*, temos que

$$\begin{aligned} Y'(t^*) &\le -\lambda Y(t^*) + \alpha\Big(Y^2(t^*) + Y^3(t^*) + Y^6(t^*)\Big) + \beta \\ &\le M\left(-\frac{\lambda}{2} + \alpha(M + M^2 + M^5)\right) \qquad (4.16) \\ &= M\,p(M)\,, \end{aligned}$$

onde $p(t) = \alpha(t + t^2 + t^5) - \frac{\lambda}{2}$. Notemos que existe um único $M_0 > 0$ tal que $p(M_0) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} p(0) &= -\frac{\lambda}{2} < 0 \\ p\left(\frac{\lambda}{2\,\alpha}\right) &= \alpha\left(\left(\frac{\lambda}{2\,\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\,\alpha}\right)^5\right) > 0\,. \end{aligned}$$

Portanto, existe $M_0 \in \left(0, \frac{\lambda}{2\alpha}\right)$ tal que $p(M_0) = 0$; ainda mais, M_0 é único, pois

$$p'(t) = \alpha(1 + 2\,t + 5\,t^4) > 0 \text{ para } t \ge 0,$$

ou seja, $p(t)$ é estritamente crescente. Então, se $M \le M_0$, $p(M) \le 0$ e da desigualdade (4.16), concluimos que $Y'(t^*) \le 0$, o que é uma contradição, assim $Y(t) \le M\ \forall t \in I\!R_+$. ∎

Temos o seguinte Teorema de existência da solução global:

Teorema 4.2 *Seja* $\Gamma \in C^3$. *Existe uma constante* ω_0, *dependendo de* Ω, *tal que, se* $0 < \omega \leq \omega_0$, *e se* $u_0 \in D(A)$, $\tau_0 \in \mathbb{H}^2$, $\mathbf{f} \in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^1)$ *e* $\mathbf{f}' \in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^{-1})$ *são suficientemente pequenos, então o problema (2.10)-(2.13) admite uma única solução* (u,τ) *definida para todo* t, *satisfazendo:*

$$
\begin{aligned}
u &\in C_b(\mathbb{R}_+;D(A)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^3)\,,\\
u' &\in C_b(\mathbb{R}_+;H) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V)\,,\\
\tau &\in C_b(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^2)\,,\\
\tau' &\in C_b(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^1)\,.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Na seção anterior vimos que normas específicas da solução local obtida no Teorema 3.4 satisfazem uma desigualdade da forma (4.15), onde as constantes λ e α dependem do domínio Ω e dos parâmetros ω, Re e We, e onde

$$\beta = \frac{31}{48}\frac{(1-\omega)}{Re^2}\|\mathbf{f}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^1)} + \frac{2}{(1-\omega)}\|\mathbf{f}'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^{-1})} + \frac{160\,C_2}{(1-\omega)^3}\|\mathbf{f}\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2)}.$$

O Lema 4.1 mostra que existe uma constante M_0, dependendo de Ω, ω, We e Re tal que, se $Y(0) \leq M \leq M_0$ e $\beta \leq \frac{\lambda M}{2}$, então $Y(t)$ está limitada para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Notemos que $Y(0) \leq M$ se u_0, τ_0 e $\mathbf{f}$ são suficientemente pequenos nos seus espaços. Com efeito, temos

$$Y(0) = Re\,|u'(0)|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau'(0)|^2 + \frac{We(1-\omega)^3}{6\,C_0\,Re^2\,\omega^2}\|\tau_0\|_2^2 + \frac{(1-\omega)^2}{192\,Re}\|u_0\|^2,$$

e, das equações (2.11) e (2.12) para $t = 0$, temos expressos $u'(0)$ e $\tau'(0)$ em função de u_0, τ_0 e $\mathbf{f}(0)$:

$$
\begin{aligned}
Re\,u'(0) &= -Re\,B(u_0,u_0) - (1-\omega)Au_0 + P(\nabla\cdot\tau_0 + \mathbf{f}(0)),\\[1em]
We\,\tau'(0) &= -We\{\mathbf{B}(u_0,\tau_0) + g(\tau_0,\nabla u_0)\} - \tau_0 + 2\,\omega D[u_0],
\end{aligned}
$$

o que nos diz que $|u'(0)|$ e $|\tau'(0)|$ são suficientemente pequenos se assim o são $\|u_0\|_2$, $\|\tau_0\|_2$ e $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^1)}$. Portanto, das hipóteses do Teorema, concluimos que

$$
\begin{aligned}
u &\in L^\infty(\mathbb{R}_+;V)\\
u' &\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\\
\tau &\in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{H}^2)\\
\tau' &\in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2)\,.
\end{aligned}
$$

Ainda mais, integrando (4.14) de 0 a $T > 0$ arbitrário, deduzimos que

$$\begin{aligned} u &\in L^2_{loc}(I\!R_+; D(A)) \\ u' &\in L^2_{loc}(I\!R_+; V)\,. \end{aligned}$$

Agora, da desigualdade (4.7) temos que $u \in L^\infty(I\!R_+; D(A))$ e de (4.5) que $u \in L^2_{loc}(I\!R_+; I\!H^3)$; como $u' \in L^2_{loc}(I\!R_+; V)$ e $V \subseteq D(A) \subseteq I\!H^3$, a função $u \in \mathcal{C}_b(I\!R_+; D(A))$. Da equação (2.11),

$$Re\, u' = -Re\, B(u,u) - (1-\omega)Au + P(\nabla \cdot \tau + \mathbf{f}),$$

deduzimos que $u' \in \mathcal{C}_b(I\!R_+; H)$. Observemos que $u \in L^2_{loc}(I\!R_+; I\!H^3 \cap D(A))$, então $u \in L^1(0,T; I\!H^3 \cap D(A))$, $\forall\, T > 0$ e como τ satisfaz a equação (2.12), o Lema 3.3 junto com $\tau \in L^\infty(I\!R_+; I\!H^2)$ implica que $\tau \in \mathcal{C}_b(I\!R_+; I\!H^2)$. Também podemos aplicar a segunda parte do Lema 3.3, assim $\tau' \in \mathcal{C}(I\!R_+; I\!H^1)$. Além disso, a equação (2.12) escrita como

$$We\, \tau' = -Re\{\mathbf{B}(u,\tau) + g(\tau, \nabla u)\} - \tau + 2\,\omega D[u]\,,$$

implica que $\tau' \in L^\infty(I\!R_+; I\!H^1)$ e portanto $\tau' \in \mathcal{C}_b(I\!R_+; I\!H^1)$; e o Teorema fica demonstrado. ∎

Corolário 4.3 *Suponha as hipóteses do Teorema 4.2 e assuma também que* $\mathbf{f} = 0$. *Então a solução nula* $(u, \tau) = (0, 0)$ *é estável assintoticamente exponencial na norma de* $V \times I\!H^2$.

Demonstração: Como $\mathbf{f} = 0$, $Y(t)$ satisfaz a equação (4.15) com $\beta = 0$ e como estamos nas hipóteses do Teorema 4.2, a função $Y(t) \leq M$ para todo $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned} Y' + \lambda Y &\leq \alpha(Y^2 + Y^3 + Y^6) \\ &= Y^2(\alpha + Y + Y^4) \\ &\leq Y^2(\alpha + M + M^4) \\ &= Y^2\gamma\,, \end{aligned}$$

onde $\gamma = \gamma(M) > 0$. Definamos $v = 1/Y$ e substituamos na desigualdade

$$Y' + \lambda Y \leq \gamma Y^2,$$

então, v satisfaz

$$v' - \lambda v \geq -\gamma,$$

multiplicando por $e^{-\lambda t}$ e logo integrando de 0 a t, obtemos

$$v(t) \geq e^{\lambda t}\left(v(0) - \frac{\gamma}{\lambda}\right) + \frac{\gamma}{\lambda} \geq e^{\lambda t}\left(v(0) - \frac{\gamma}{\lambda}\right),$$

portanto se $v(0) > \frac{\gamma}{\lambda}$, ou equivalentemente $Y(0) < \frac{\lambda}{\gamma}$,

$$Y(t) \leq \frac{e^{-\lambda t} Y(0)}{1 - (\gamma/\lambda) Y(0)}$$

para todo $t > 0$, com o que fica provado o resultado. ∎

4.3 Problema Linearizado

Consideremos o problema linearizado em torno do $(0,0)$:

$$Re\, u' - (1-\omega)\Delta u = \nabla \cdot \tau + \mathbf{F} \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+\,, \tag{4.17}$$

$$We\, \tau' + \tau = 2\,\omega D[u] + \mathbf{G} \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+\,, \tag{4.18}$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+\,, \tag{4.19}$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma \times \mathbb{R}_+\,, \tag{4.20}$$

$$u(0) = u_0, \quad \tau(0) = \tau_0 \quad \text{em } \Omega\,, \tag{4.21}$$

onde $\mathbf{F}$ é um vetor dado e $\mathbf{G}$ é um tensor simétrico dado.

Vamos mostrar que o problema (4.17)-(4.21) tem uma única solução.

Lema 4.4 *Suponha* $\Gamma \in C^1$, $\mathbf{F} \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{H}^{-1})$, $\mathbf{G} \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{L}^2)$, $u_0 \in H$, $\tau_0 \in \mathbb{L}^2$. *Então o problema (4.17) -(4.21) admite uma única solução* (u, τ) *tal que*

$$\begin{aligned} u &\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; V) \cap C_b(\mathbb{R}_+; H)\,, \\ \tau &\in C_b(\mathbb{R}_+; \mathbb{L}^2)\,. \end{aligned}$$

A pressão associada p *é única a menos de uma constante aditiva no espaço* $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2)$.

Demonstração: Para provar a existência da solução usaremos o método de Galerkin. Definimos a solução aproximada como:

$$
\begin{aligned}
u_m &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \,, \\
\tau_m &= \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) \xi_i \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
Re\,(u'_m, w_j) + (1-\omega)((u_m, w_j)) = (\nabla\cdot\tau_m + \mathbf{F}, w_j) \;\; j = 1, ..., m \\[2mm]
We\,(\tau'_m, \xi_j) + (\tau_m, \xi_j) = (2\,\omega D[u_m] + \mathbf{G}, \xi_j) \quad j = 1, ..., m \\[2mm]
u_m(0) = u_{0m} \qquad \tau_m(0) = \tau_{0m}\,.
\end{cases}
\tag{4.22}
$$

Aqui $\{w_i\}_{i\in N} \subset V$ é uma sequência de elementos linearmente independente que é total em V. O dado inicial u_{0m} pode ser escolhido como a projeção em H de u_0 sobre o subespaço gerado por $\{w_1, ..., w_m\}$. Analogamente, $\{\xi_i\}_{i\in N} \subset \mathbb{L}^2$ é uma sequência de elementos linearmente independente que é total em $\mathbb{L}^2$ e τ_{0m} pode ser escolhido como a projeção em $\mathbb{L}^2$ de τ_0 sobre o subespaço gerado por $\{\xi_1, ..., \xi_m\}$. As funções g_{im} e h_{im} são funções escalares a serem determinadas em $\mathbb{R}_+$ e (4.22) é um sistema linear para essas funções. De fato, de (4.22) temos que

$$
\begin{aligned}
Re\sum_{i=1}^{m}(w_i, w_j) g'_{im}(t) &+ (1-\omega)\sum_{i=1}^{m}((w_i, w_j)) g_{im}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\nabla\cdot\xi_i, w_j) h_{im}(t) + \langle \mathbf{F}(t), w_j\rangle \quad j = 1, ...m \\
We\sum_{i=1}^{m}(\xi_i, \xi_j) h'_{im}(t) &+ \sum_{i=1}^{m}(\xi_i, \xi_j) h_{im}(t) \\
&= 2\omega\sum_{i=1}^{m}(D[w_i], \xi_j) g_{im}(t) + \langle \mathbf{G}(t), \xi_j\rangle \quad j = 1, ...m\,,
\end{aligned}
$$

como $\{w_1, ..., w_m\}$ são linearmente independentes e $\{\xi_1, ..., \xi_m\}$ também, as matrizes com elementos (w_i, w_j) e (ξ_i, ξ_j) são não singulares, então podemos reduzir o sistema a um sistema linear com coeficientes constantes:

$$
\begin{aligned}
g'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} g_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} h_{jm}(t) &= \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \langle \mathbf{F}(t), w_j \rangle \\
h'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} h_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} g_{jm}(t) &= \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \langle \mathbf{G}(t), \xi_j \rangle
\end{aligned}
$$

para $i = 1, ..., m$ e onde α_{ij}, β_{ij}, c_{ij}, a_{ij}, b_{ij} e d_{ij} estão em $I\!R$ e as condições iniciais são equivalentes a:

$$
\begin{aligned}
g_{im}(0) &= i\text{-ésima componente de } u_{0m} \\
h_{im}(0) &= i\text{-ésima componente de } \tau_{0m} \,.
\end{aligned}
$$

O sistema admite uma única solução g_{im} e h_{im} definida em todo $I\!R_+$. Agora vamos obter uma estimativa para $\{u_m\}$ e $\{\tau_m\}$, independente de m. Multiplicamos a primeira equação em (4.22) por g_{jm} e a segunda equação por $h_{jm}/2\,\omega$ e somamos para $j = 1, ..., m$. Adicionando as duas equações resultantes e estimando o lado direito, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(Re|u_m|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau_m|^2\right) + 2(1-\omega)\|u_m\|^2 + \frac{1}{\omega}|\tau_m|^2 \\
&= 2(\mathbf{F}, u_m) + \frac{2}{2\,\omega}(\mathbf{G}, \tau_m) \\
&\leq 2\|\mathbf{F}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}\, \|u_m\| + \frac{2}{2\,\omega}|\mathbf{G}|\, |\tau_m| \\
&\leq (1-\omega)\|u_m\|^2 + \frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}\|^2_{\boldsymbol{H}^{-1}} + \frac{1}{2\,\omega}|\tau_m|^2 + \frac{1}{2\,\omega}|\mathbf{G}|^2 \,,
\end{aligned}
$$

assim, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(Re|u_m|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau_m|^2\right) + (1-\omega)\|u_m\|^2 + \frac{1}{2\,\omega}|\tau_m|^2 \\
&\leq \frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})} + \frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{L}^2)} \,.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Integrando de 0 a $T > 0$, podemos concluir que $\{u_m\}$ é limitada em $L^2_{loc}(I\!R_+; V)$ e $\{\tau_m\}$ é limitada em $L^2_{loc}(I\!R_+; I\!L^2)$. Usando a desigualdade de Poincaré em

(4.23), obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left(Re|u_m|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau_m|^2\right) + C_0\left(Re|u_m|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau_m|^2\right)$$

$$\leq \frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})} + \frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\boldsymbol{L}^2)},$$

onde C_0 é uma constante. Multiplicamos por $e^{C_0\,t}$ e integramos de 0 a t, para obter

$$\begin{aligned} & Re|u_m(t)|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau_m(t)|^2 \\ & \leq e^{-C_0\,t}\left(Re|u_{0m}|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau_{0m}|^2\right) \\ & \quad + \frac{1-e^{-C_0\,t}}{C_0}\left(\frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})} + \frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\boldsymbol{L}^2)}\right). \end{aligned}$$

Como $|u_{0m}| \leq |u_0|$ e $|\tau_{0m}| \leq |\tau_0|$, resulta que $\{u_m\}$ é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$ e $\{\tau_m\}$ em $L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2)$. Portanto, existem

$$\begin{aligned} u &\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+;H), \\ \tau &\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2) \end{aligned}$$

e uma subsequência (u_{m_k}, τ_{m_k}) tal que

$$\begin{aligned} (u_{m_k}, \tau_{m_k}) &\rightarrow (u,\tau) \text{ fraco em } L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2), \\ (u_{m_k}, \tau_{m_k}) &\rightarrow (u,\tau) \text{ fraco* em } L^\infty(\mathbb{R}_+;H) \times L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{L}^2). \end{aligned}$$

Passando ao limite em (4.22), obtemos

$$\begin{aligned} Re\frac{d}{dt}(u,v) + (1-\omega)((u,v)) &= (\nabla\cdot\tau + \mathbf{F}, v) \\ We\frac{d}{dt}(\tau,\xi) + (\tau,\xi) &= (2\,\omega D[u] + \mathbf{G}, \xi) \end{aligned}$$

no sentido das distribuções, para todo v combinação linear finita dos w_j e para todo ξ combinação linear finita dos ξ_j e portanto para todo $v \in V$ e para todo $\xi \in I\!L^2$. Facilmente se prova que $u(0) = u_0$ e $\tau(0) = \tau_0$. Ainda mais, a desigualdade (4.23) é satisfeita pela solução (u, τ)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(Re|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) + (1-\omega)\|u\|^2 + \frac{1}{2\,\omega}|\tau|^2 \\ &\leq \frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})} + \frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{L}^2)}\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Agora escrevemos a equação (4.17) como

$$Re\,u' = (1-\omega)\Delta u + \nabla\cdot\tau + \mathbf{F},$$

e tomamos produto escalar con $v \in V$, obtendo

$$Re\langle u', v\rangle = (1-\omega)\langle Au, v\rangle + \langle\nabla\cdot\tau, v\rangle + \langle\mathbf{F}, v\rangle.$$

Ou seja,

$$Re\frac{d}{dt}\langle u, v\rangle = \langle(1-\omega)Au + \nabla\cdot\tau + \mathbf{F}, v\rangle\,,$$

e, portanto, $u' \in L^2_{loc}(I\!R_+; V')$. Como $u \in L^2_{loc}(I\!R_+; V) \cap L^\infty(I\!R_+; H)$, temos que $u \in \mathcal{C}_b(I\!R_+; H)$. Integrando (4.18) de 0 a $t > 0$, obtemos

$$We\,\tau(t) = We\,\tau_0 + \int_0^t (2\,\omega D[u(s)] + \mathbf{G}(s) - \tau(s))\,ds,$$

o que nos diz que τ é contínua com valores em $I\!L^2$, mas τ é limitada com valores em $I\!L^2$ então $\tau \in \mathcal{C}_b(I\!R_+; I\!L^2)$.

Somente falta provar a unicidade da solução. Suponha que (u_1, τ_1) e (u_2, τ_2) são duas soluções do problema (4.17)-(4.21). Então $u = u_1 - u_2$ e $\tau = \tau_1 - \tau_2$ satisfazem o seguinte problema:

$$\left\{\begin{array}{l} Re\,u' - (1-\omega)\Delta u = \nabla\cdot\tau\,, \\ \\ We\,\tau' + \tau = 2\,\omega D[u]\,, \end{array}\right. \tag{4.25}$$

com condições iniciais

$$u(0) = 0 \qquad\qquad \tau(0) = 0.$$

Portanto, u e τ satisfazem a desigualdade (4.24) com $\mathbf{F} = \mathbf{G} = 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(Re|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) + (1-\omega)\|u\|^2 + \frac{1}{2\,\omega}|\tau|^2 \leq 0.$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré temos que

$$\frac{d}{dt}\left(Re|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) + C_0\left(Re|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) \leq 0,$$

onde C_0 é uma constante; multiplicamos por $e^{C_0\,t}$ e integramos de 0 a t, obtendo

$$e^{C_0\,t}\left(Re|u|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau|^2\right) \leq 0.$$

Assim, $|u| = 0$ e $|\tau| = 0$ e, portanto, $u_1 = u_2$, $\tau_1 = \tau_2$ e a pressão associada à primeira equação em (4.25) é constante. ∎

Agora vamos provar regularidade da solução do problema (4.17)-(4.21).

Proposição 4.5 *Seja* $\Gamma \in C^3$, $\mathbf{F} \in L^\infty(I\!\!R_+; I\!\!H^1)$, $\mathbf{F}' \in L^\infty(I\!\!R_+; I\!\!H^{-1})$, $\mathbf{G} \in L^\infty(I\!\!R_+; I\!\!H^2)$, $\mathbf{G}' \in L^\infty(I\!\!R_+; I\!\!L^2)$, $u_0 \in D(A)$, $\tau_0 \in I\!\!H^2$. *Então a única solução do problema (4.17)-(4.21) satisfaz:*

$$\begin{aligned} u &\in C_b(I\!\!R_+; D(A)) \cap L^2_{loc}(I\!\!R_+; I\!\!H^3)\,, \\ u' &\in C_b(I\!\!R_+; H) \cap L^2_{loc}(I\!\!R_+; V)\,, \\ \tau &\in C_b(I\!\!R_+; I\!\!H^2)\,, \\ \tau' &\in C_b(I\!\!R_+; I\!\!L^2)\,. \end{aligned}$$

Demonstração: Primeiro provaremos que $u' \in C_b(I\!\!R_+; H) \cap L^2_{loc}(I\!\!R_+; V)$ e que $\tau' \in C_b(I\!\!R_+; I\!\!L^2)$, logo que $P\nabla \cdot \tau \in C_b(I\!\!R_+; V)$ para usar o Teorema de regularidade para problemas elípticos na equação (4.17) e obter mais regularidade para u. Finalmente da equação (4.18) deduziremos que $\tau \in C_b(I\!\!R_+; I\!\!H^2)$.

Como $u'(0) \in H$, $\tau'(0) \in I\!\!L^2$ e u' e τ' satisfazem as equações (4.17)-(4.18) com $\mathbf{F}'$ e $\mathbf{G}'$ como dados, podemos aplicar o Lema 4.4 a u' e τ'. Então $u' \in C_b(I\!\!R_+; H) \cap L^2_{loc}(I\!\!R_+; V)$ e $\tau' \in C_b(I\!\!R_+; I\!\!L^2)$. Ainda mais, temos a seguinte desigualdade de energia para u' e τ' :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(Re|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2\right)+(1-\omega)\|u'\|^2+\frac{1}{2\,\omega}|\tau'|^2\\&\leq\ \frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})}+\frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{L}^2)}\,.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Se escrevemos a desigualdade (4.26) como,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(Re|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2\right)\ &+\ (1-\omega-\frac{\epsilon}{\lambda_1})\|u'\|^2+\frac{\epsilon}{\lambda_1}\|u'\|^2+\frac{1}{2\,\omega}|\tau'|^2\\&\leq\ \frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})}+\frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{L}^2)}\,,\end{aligned}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Stokes, usando a desigualdade de Poincaré para estimar o lado esquerdo, deduzimos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(Re|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2\right)\ &+\ (1-\omega-\frac{\epsilon}{\lambda_1})\|u'\|^2+\alpha\left(Re\,|u'|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'|^2\right)\\&\leq\ \frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})}+\frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{L}^2)}\,,\end{aligned}\tag{4.27}$$

onde $\alpha=\min\left\{\frac{\epsilon}{Re},\frac{1}{We}\right\}$. Considerando ϵ tal que $0<\epsilon<\lambda_1\,(1-\omega)$, multiplicamos (4.27) por $e^{\alpha\,t}$ e integramos de 0 a t,

$$\begin{aligned}&e^{\alpha\,t}\left(Re|u'(t)|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'(t)|^2\right)+\left(1-\omega-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\int_0^t e^{\alpha\,s}\|u'(s)\|^2ds\\&\leq\ \left(Re|u'(0)|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'(0)|^2\right)\\&\quad+\frac{e^{\alpha\,t}-1}{\alpha}\left(\frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{H}^{-1})}+\frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}'\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}_+;\boldsymbol{L}^2)}\right)\,.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(Re|u'(t)|^2+\frac{We}{2\,\omega}|\tau'(t)|^2\right)+\left(1-\omega-\frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\int_0^t e^{\alpha(s-t)}\|u'(s)\|^2ds$$

$$\leq \; e^{-\alpha t}\left(Re|u'(0)|^2 + \frac{We}{2\,\omega}|\tau'(0)|^2\right) \tag{4.28}$$

$$+\,\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left(\frac{1}{(1-\omega)}\|\mathbf{F}'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^{-1})} + \frac{1}{2\,\omega}\|\mathbf{G}'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2)}\right).$$

Apliquemos o operador $\nabla\cdot$ à equação (4.18):

$$We\,\nabla\cdot\tau' + \nabla\cdot\tau = 2\,\omega\nabla\cdot D[u] + \nabla\cdot\mathbf{G}\,.$$

Notando que $\nabla\cdot D[u] = \frac{1}{2}\Delta u$, temos então que

$$\omega\Delta u = We\,\nabla\cdot\tau' + \nabla\cdot\tau - \nabla\cdot\mathbf{G}.$$

Substituimos este resultado na equação (4.17), obtemos

$$Re\,u' - \frac{(1-\omega)}{\omega}\left(We\,\nabla\cdot\tau' + \nabla\cdot\tau - \nabla\cdot\mathbf{G}\right) = \nabla\cdot\tau + \mathbf{F},$$

a qual, após projetamos sobre H, fornece

$$\omega\,Re\,u' - (1-\omega)P(We\,\nabla\cdot\tau' + \nabla\cdot\tau - \nabla\cdot\mathbf{G}) = \omega P(\nabla\cdot\tau + \mathbf{F}).$$

Reescrevemos agora esta equação como,

$$(1-\omega)We\,P\nabla\cdot\tau' + P\nabla\cdot\tau = \omega\,Re\,u' + P(-\omega\mathbf{F} + (1-\omega)\nabla\cdot\mathbf{G}), \tag{4.29}$$

e a multipliquemos por $\frac{1}{(1-\omega)We}e^{\frac{t}{(1-\omega)We}}$ e integremos de 0 a t. Obtemos assim,

$$P\nabla\cdot\tau(t) = P\nabla\cdot\tau_0 e^{-\frac{t}{(1-\omega)We}} + \frac{\omega\,Re}{(1-\omega)We}\int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}}u'(s)ds$$

$$+\;\frac{1}{(1-\omega)We}\int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}}P(-\omega\mathbf{F}(s) + (1-\omega)\nabla\cdot\mathbf{G}(s))ds\,, \tag{4.30}$$

o que implica que $P\nabla\cdot\tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+;V)$. Para ver que $P\nabla\cdot\tau$ é limitada com valores em V, notemos que

$$\int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}}\|u'(s)\|ds \;=\; \int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}-\frac{\alpha(s-t)}{2}}e^{\frac{\alpha(s-t)}{2}}\|u'(s)\|ds$$

$$\leq\; \left(\int_0^t e^{\alpha(s-t)}\|u'(s)\|^2ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t e^{(s-t)\left(\frac{2}{(1-\omega)We}-\alpha\right)}ds\right)^{1/2},$$

pela desigualdade de Schwarz, e onde α é o mesmo que em (4.28). Portanto, escolhendo $\epsilon < \frac{2\,Re}{(1-\omega)We}$, temos que $\alpha < \frac{2}{(1-\omega)We}$ e, assim,

$$\int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}} \|u'(s)\| ds \leq C \qquad \forall\, t > 0, \tag{4.31}$$

onde C é uma constante positiva adequada. Agora, tomando a norma-$I\!H_0^1$ em (4.30), vem

$$\begin{aligned} \|P\nabla \cdot \tau(t)\| &\leq \|P\nabla \cdot \tau_0\| e^{-\frac{t}{(1-\omega)We}} + \frac{\omega\, Re}{(1-\omega)We} \int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}} \|u'(s)\| ds \\ &\quad + \frac{1}{(1-\omega)We} \int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}} \|\omega P\mathbf{F}(s) + (1-\omega)\nabla \cdot \mathbf{G}(s)\| ds \\ &\leq \|\tau_0\|_2 + \frac{\omega\, Re}{(1-\omega)We} C + \frac{1}{(1-\omega)We} \Big\{ \omega \|\mathbf{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^1)} \\ &\quad + (1-\omega)\|\mathbf{G}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^2)} \Big\} \int_0^t e^{\frac{s-t}{(1-\omega)We}} ds\,. \end{aligned}$$

Assim, $P\nabla \cdot \tau \in \mathcal{C}_b(I\!R_+; V)$.

Escrevemos agora a equação (4.17) como

$$(1-\omega)Au = P(\nabla \cdot \tau + \mathbf{F}) - Re\, u',$$

e observemos que, pelo provado anteriormente, o lado direito pertence a $L^2_{loc}(I\!R_+; V) \cap \mathcal{C}_b(I\!R_+; H)$. Aplicamos então o Teorema de Regularidade para Problemas Elípticos, para concluir que

$$u \in L^2_{loc}(I\!R_+; I\!H^3) \cap \mathcal{C}_b(I\!R_+; D(A)).$$

Além disso, tomando norma-$I\!H^1$ ao quadrado na equação, obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_3^2 &\leq C_1 \|Au\|_1^2 \\ &\leq C_1 \left(\|P\nabla \cdot \tau\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;V)} + \|\mathbf{F}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^1)} + \|u'\|^2 \right), \end{aligned}$$

a qual, multiplicada por $e^{\alpha(s-t)}$, com α o mesmo de (4.28), e integrada de 0 a t, fornece

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\alpha(s-t)}\|u(s)\|_3^2 ds &\leq C_1\left(\|P\nabla\cdot\tau\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}_+;V)} + \|\mathbf{F}\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}_+;\mathbf{H}^1)}\right)\int_0^t e^{\alpha(s-t)}ds \\ &\quad + \int_0^t e^{\alpha(s-t)}\|u'(s)\|^2 ds \qquad (4.32) \\ &\leq C_2 \quad \forall t>0\,.\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicamos a equação (4.18) por $\frac{1}{We}e^{\frac{s}{We}}$ e integramos de 0 a t, obtendo

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-\frac{t}{We}} + \frac{2\omega}{We}\int_0^t e^{\frac{s-t}{We}} D[u(s)]ds + \frac{1}{We}\int_0^t e^{\frac{s-t}{We}}\mathbf{G}(s)ds,$$

o que implica que $\tau \in C(I\!R_+; I\!H^2)$. Tomando a norma-$I\!H^2$ ao quadrado desta expressão obtem-se

$$\begin{aligned}\|\tau(t)\|_2^2 &\leq C_1\left(\|\tau_0\|_2^2 + \int_0^t e^{\frac{2(s-t)}{We}}\|u(s)\|_3^2 ds\right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{G}\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}_+;\mathbf{H}^2)}\int_0^t e^{\frac{2(s-t)}{We}}ds\right) \\ &\leq C_2 \quad \forall t>0,\end{aligned}$$

onde usamos (4.32). Portanto $\tau \in L^\infty(I\!R_+; I\!H^2)$, com o que fica provada a proposição. ∎

Capítulo 5

Soluções Periódicas

O objetivo principal neste capítulo é provar a estabilidade de soluções pequenas do problema (2.10)-(2.13). Isto, juntamente com o Teorema de existência de soluções globais, fornecerá a existência de soluções T-periódicas quando a força externa for T-periódica. Seguiremos a abordagem que Valli utilizou para a análise das equações de Navier-Stokes compressíveis ([9] [10]).

Teorema 5.1 *Seja ω como no Teorema 4.2 e sejam $u_0^i \in D(A)$, $\tau_0^i \in I\!H^2$, $i = 1, 2$, $\mathbf{f} \in L^\infty(I\!R_+; I\!H^1)$, $\mathbf{f}' \in L^\infty(I\!R_+; I\!H^{-1})$ suficientemente pequenos. Então as correspondientes soluções (u^i, τ^i), $i = 1, 2$ do problema (2.10)-(2.13) satisfazem*

$$|u^1(t) - u^2(t)|^2 + |\tau^1(t) - \tau^2(t)|^2 \leq C\left(|u_0^1 - u_0^2|^2 + |\tau_0^1 - \tau_0^2|^2\right) e^{-\epsilon t} \quad (5.1)$$

para todo $t \geq 0$ e para algum $\epsilon > 0$.

Demonstração: Definamos

$$\delta = \max_{i=1,2}\{\|u_0^i\|_2, \|\tau_0^i\|_2, \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(I\!R_+;I\!H^1)}, \|\mathbf{f}'\|_{L^\infty(I\!R_+;I\!H^{-1})}\}\,.$$

Podemos escolher δ satisfazendo a condição do Teorema 4.2. É importante observar que no Teorema 4.2 vimos que certas normas solução estão limitadas por este δ, mais precisamente as normas $\|u^i\|$, $|u^{i'}|$, $\|\tau^i\|_2$ e $|\tau^{i'}|$.

Sejam $u = u^1 - u^2$, $\tau = \tau^1 - \tau^2$ e $p = p^1 - p^2$, então (u, τ, p) satifazem

$$Re\, u' - (1-\omega)\Delta u + \nabla p \;=\; \nabla \cdot \tau + \mathbf{F}, \tag{5.2}$$

$$We\, \tau' + \tau \;=\; 2\,\omega D[u] + \mathbf{G}, \tag{5.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -Re\, B(u^1, u^1) + Re\, B(u^2, u^2)\,, \\ \mathbf{G} &= We\,\{-\mathbf{B}(u^1, \tau^1) + \mathbf{B}(u^2, \tau^2) - g(\tau^1, \nabla u^1) + g(\tau^2, \nabla u^2)\}\,. \end{aligned}$$

Tomamos produto escalar em $I\!L^2$ de (5.2) com $2\,\omega\, u$ e de (5.3) com τ,

$$\begin{aligned} 2\,\omega Re\,(u', u) + 2\,\omega(1-\omega)\|u\|^2 &= 2\,\omega(\nabla \cdot \tau + \mathbf{F}, u) \\ We\,(\tau', \tau) + |\tau|^2 &= 2\,\omega(D[u], \tau) + (\mathbf{G}, \tau). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Notemos que usando a propriedade de ortogonalidade (3.50) temos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}, u) &= Re\,\{-(B(u^1, u^1), u) + (B(u^2, u^2), u)\} \\ &= Re\,\{-(B(u, u^1), u) - (B(u^2, u), u)\} \\ &= -Re(B(u, u^1), u)\,. \end{aligned}$$

Usando a outra propriedade de ortogonalidade (3.23), vem

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}, \tau) &= -We\,\{(\mathbf{B}(u^1, \tau^1) - \mathbf{B}(u^2, \tau^2) + g(\tau^1, \nabla u^1) - g(\tau^2, \nabla u^2), \tau)\} \\ &= -We\,\{(\mathbf{B}(u^1, \tau) + \mathbf{B}(u, \tau^2) + g(\tau, \nabla u^1) + g(\tau^2, \nabla u), \tau)\} \\ &= -We\,\{(\mathbf{B}(u, \tau^2), \tau) + (g(\tau, \nabla u^1) + g(\tau^2, \nabla u), \tau)\}\,. \end{aligned}$$

Portanto, de (5.4) temos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\omega\, Re\,|u|^2 + \frac{We}{2}|\tau|^2\right) + 2\,\omega(1-\omega)\|u\|^2 + |\tau|^2 \\ &= -2\,\omega\, Re(B(u, u^1), u) - We\,\{(\mathbf{B}(u, \tau^2), \tau) + (g(\tau, \nabla u^1) + g(\tau^2, \nabla u), \tau)\}\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Agora vamos estimar o lado direito. Temos que

$$\begin{aligned}
|((u\cdot\nabla)u^1,u)| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_j\frac{\partial u_i^1}{\partial x_j}u_i dx\right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|u_j\|_{L^4}\left|\frac{\partial u_i^1}{\partial x_j}\right|\|u_i\|_{L^4} \\
&\leq C\,\|u\|_{\mathbf{L}^4}^2\,|\nabla u^1| \\
&\leq C\,\|u\|^2\,\|u^1\| \\
&\leq C\,\|u\|^2\,\delta\,.
\end{aligned}$$

Assim, tomando δ suficientemente pequeno, obtemos

$$|2\,\omega\,Re(B(u,u^1),u)| \leq \frac{\omega(1-\omega)}{2}\|u\|^2\,. \tag{5.6}$$

O segundo termo pode ser estimado analogamente a (5.6):

$$\begin{aligned}
|((u\cdot\nabla)\tau^2,\tau)| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega u_j\frac{\partial \tau_{ik}^2}{\partial x_j}\tau_{ik} dx\right| \\
&\leq C\,\|u\|_{\mathbf{L}^4}\left\|\nabla\tau^2\right\|_{\mathbf{L}^4}|\tau| \\
&\leq C\,\|u\|\,\|\tau^2\|_2\,|\tau| \\
&\leq C\,\delta\,\|u\|\,|\tau| \\
&\leq C\,\delta^2\|u\|^2+\frac{1}{4\,We}|\tau|^2\,,
\end{aligned}$$

o qual, tomando δ suficientemente pequeno, fornece

$$|We\,((\mathbf{B}(u,\tau^2),\tau)| \leq \frac{\omega(1-\omega)}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}|\tau|^2\,. \tag{5.7}$$

Estimemos os dois últimos termos:

$$\begin{aligned} |(g(\tau,\nabla u^1),\tau)| &\leq |g(\tau,\nabla u^1)|\,|\tau| \\ &\leq C\,|\tau|^2\,\|u^1\|_3 . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Agora,

$$\begin{aligned} |(g(\tau^2,\nabla u),\tau)| &\leq |g(\tau^2,\nabla u)|\,|\tau| \\ &\leq C\,\|\tau^2\|_2\,\|u\|\,|\tau| \\ &\leq C\,\delta\,\|u\|\,|\tau| \\ &\leq C\,\delta^2\,\|u\|^2 + \frac{1}{We\,4}|\tau|^2 , \end{aligned}$$

o qual, tomando δ suficientemente pequeno, fornece que

$$|We\,(g(\tau^2,\nabla u),\tau)| \leq \frac{\omega(1-\omega)}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}|\tau|^2 . \tag{5.9}$$

Usamos (5.6)-(5.9) em (5.5) para obter

$$\frac{d}{dt}\left(\omega\,Re|u|^2 + \frac{We}{2}|\tau|^2\right) + \frac{\omega(1-\omega)}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}|\tau|^2 \leq C\,|\tau|^2\,\|u^1\|_3 . \tag{5.10}$$

Integramos esta expressão de 0 a $t > 0$, terminamos com

$$\begin{aligned} &\omega\,Re\,|u(t)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(t)|^2 + \int_0^t \left(\frac{\omega(1-\omega)}{2}\|u(s)\|^2 + \frac{1}{2}|\tau(s)|^2\right) ds \\ &\leq \omega\,Re\,|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2 + C\int_0^t |\tau(s)|^2\,\|u^1(s)\|_3 ds , \end{aligned}$$

de onde deduzimos que

$$\begin{aligned} \omega\,Re\,|u(t)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(t)|^2 &\leq \omega\,Re\,|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2 \\ &+ C\int_0^t \|u^1(s)\|_3 \left(\omega\,Re\,|u(s)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(s)|^2\right) ds . \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall, concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\omega Re|u(t)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(t)|^2 \\
\leq\ & \left(\omega Re|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2\right) \exp\left(C\int_0^t \|u^1(s)\|_3 ds\right).
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Observemos agora que de (4.5) podemos deduzir a seguinte estimativa para $\|u^1\|_3^2$:

$$C^2\|u^1\|_3^2 \leq C_1\,\delta + C_2\left(|Au^1|^2 + \|u^{1'}\|^2\right),$$

a qual, integrada de 0 a $t > 0$, fornece

$$C^2\int_0^t \|u^1(s)\|_3^2 ds \leq C_1\,\delta\, t + C_2\int_0^t \left(|Au^1(s)|^2 + \|u^{1'}(s)\|^2\right) ds\,. \tag{5.12}$$

Mas, da integração de (4.14) temos que

$$\int_0^t \left(|Au^1(s)|^2 + \|u^{1'}(s)\|^2\right) ds \leq C_3\,\delta + C_4(\delta^2 + \delta^4 + \delta^6 + \delta^{12})t$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
C^2\int_0^t \|u^1(s)\|_3^2 ds &\leq C_1\,\delta + C_2(\delta^2 + \delta^4 + \delta^6 + \delta^{12})\,t \\
&= \eta + \eta\, t\,,
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

onde η é pequeno quando δ é pequeno. Usando a desigualdade de Schwarz,

$$
\begin{aligned}
C\int_0^t \|u^1(s)\|_3 ds &\leq t^{1/2}\left(C^2\int_0^t \|u^1(s)\|_3^2 ds\right)^{1/2} \\
&\leq t^{1/2}\,(\eta^{1/2}(1+t)^{1/2}) \\
&\leq \eta^{1/2}\,(t+1)\,.
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Assim, de (5.11) obtemos que

$$\omega Re|u(t)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(t)|^2 \leq C\left(\omega Re|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2\right) \exp(\eta^{1/2}\, t). \tag{5.15}$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré em (5.10), podemos deduzir

$$\frac{d}{dt}\left(\omega Re|u|^2 + \frac{We}{2}|\tau|^2\right) + C_0\left(\omega Re|u|^2 + \frac{We}{2}|\tau|^2\right) \le C\,\|u^1\|_3\left(\omega Re|u|^2 + \frac{We}{2}|\tau|^2\right),$$

a qual, multiplicada por $e^{\gamma t}$, onde γ é um parâmetro pequeno ($\gamma \le C_0$), se torna

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}\left(\omega Re|u|^2 + \frac{We}{2}|\tau|^2\right)\right) \le C\,\|u^1\|_3\left(\omega Re|u|^2 + \frac{We}{2}|\tau|^2\right)e^{\gamma t}.$$

Integrando de 0 a $t > 0$ esta última desigualdade, obtemos

$$e^{\gamma t}\left(\omega Re|u(t)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(t)|^2\right) \le \left(\omega Re|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2\right) + C\int_0^t \|u^1(s)\|_3\left(\omega Re|u(s)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(s)|^2\right)e^{\gamma s}ds.$$

Aplicamos então o Lema de Gronwall e logo usamos (5.14), para concluir que

$$\begin{aligned} e^{\gamma t}&\left(\omega Re|u(t)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(t)|^2\right) \\ &\le \left(\omega Re|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2\right)\exp\left(C\int_0^t \|u^1(s)\|_3 ds\right) \\ &\le C\left(\omega Re|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2\right)\exp(\eta^{1/2}\,t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega Re|u(t)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(t)|^2 \le C\left(\omega Re|u(0)|^2 + \frac{We}{2}|\tau(0)|^2\right)\exp\left((\eta^{1/2} - \gamma)\,t\right)$$

de onde deduzimos,

$$|u(t)|^2 + |\tau(t)|^2 \le C\left(|u(0)|^2 + |\tau(0)|^2\right)\exp(-\epsilon\,t),$$

com $\epsilon = (\gamma - \eta^{1/2})$. Então, dado γ escolhemos η suficientemente pequeno e portanto δ, tal que ϵ seja maior que 0, e assim obtemos a estimativa (5.1). ∎

Agora vamos provar a existência de soluções periódicas.

Teorema 5.2 *Seja ω como no Teorema 4.2. Seja $\mathbf{f} \in L^\infty(I\!R_+; I\!H^1)$, $\mathbf{f}' \in L^\infty(I\!R_+; I\!H^{-1})$. Assuma que $\mathbf{f}$ é T-periódica e que $\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}'$ são suficientemente pequenas. Então existe uma solução T-periódica (u, τ) do problema (2.10)-(2.12) que satisfaz as propiedades de regularidade establecidas no Teorema 4.2. Além disso, (u, τ) é estável assintoticamente e única entre as pequenas soluções T-periódicas.*

Demonstração: A prova está baseada na abordagem que Valli ([9] [10]) utilizou para estudar as equações de Navier-Stokes compressíveis ou, então, na abordagem que Serrin ([6]) utilizou para estudar as equações de Navier-Stokes incompressíveis.

A ideia da técnica é que se avaliarmos uma certa solução em uma sequencia de instantes $t = n\,T$, pelo resultado de estabilidade teremos uma sequência de Cauchy. Tomando o limite desta sequência como o dado inicial, pelo Teorema de existência global teremos uma solução especial a qual, usando mais uma vez o resultado de estabilidade, provaremos ser T-periódica.

Sejam (u^*, τ^*) a solução do problema (2.10)-(2.13) com dados iniciais nulos. Definamos

$$\phi_n(x) = u^*(n\,T, x) \qquad\qquad \psi_n(x) = \tau^*(n\,T, x)\,.$$

Provaremos que (ϕ_n, ψ_n) é uma sequência de Cauchy em $I\!L^2$. Para $m, n \in I\!N$, $m > n$, sejam

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t,x) &= u^*(t + (m-n)\,T, x) \\ \tilde{\tau}(t,x) &= \tau^*(t + (m-n)\,T, x)\,. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{f}$ é T-periódica, $(\tilde{u}, \tilde{\tau})$ são soluções do problema (2.10)-(2.13) com dados iniciais

$$u^*((m-n)\,T, x) \quad \text{e} \quad \tau^*((m-n)\,T, x)\,,$$

os quais satisfazem as condições do Teorema 4.2, pois por (4.7), a $\|u^*\|_2$ também é suficientemente pequena. Aplicamos o Teorema 5.1, para concluir que

$$\begin{aligned} |u^*(t) - \tilde{u}(t)|^2 \;&+\; |\tau^*(t) - \tilde{\tau}(t)|^2 \\ &\leq\; C\,\left(|u^*((m-n)\,T)|^2 + |\tau^*((m-n)\,T)|^2\right) \exp(-\epsilon\, t) \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e para algum $\epsilon > 0$. Para $t = n\,T$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&|\phi_n - \phi_m|^2 + |\psi_n - \psi_m|^2 \\
&= |u^*(n\,T) - \tilde{u}(n\,T)|^2 + |\tau^*(n\,T) - \tilde{\tau}(n\,T)|^2 \\
&\leq C\,\left(|u^*((m-n)\,T)|^2 + |\tau^*((m-n)\,T)|^2\right)\exp(-\epsilon\,n\,T) \\
&\leq C_1\,\exp(-\epsilon\,n\,T)
\end{aligned}
$$

onde C_1 é uma constante independente de n, pois (u^*, τ^*) estão limitadas em $I\!R_+$. Logo, (ϕ_n, ψ_n) é uma sequência de Cauchy em $I\!L^2$, portanto existe $(\phi, \psi) \in I\!L^2$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}(\phi_n, \psi_n) = (\phi, \psi) \quad \text{em } I\!L^2\,.$$

Como

$$\|\phi_n\|_2^2 + \|\psi_n\|_2^2 \leq \delta \qquad \forall\, n \in I\!N\,,$$

existe uma subsequência (ϕ_{n_k}, ψ_{n_k}) e $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in I\!H^2 \times I\!H^2$ tal que

$$(\phi_{n_k}, \psi_{n_k}) \to (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \,\text{fraco em } I\!H^2 \times I\!H^2,$$

então $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi)$ e

$$\|\phi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 \leq \delta.$$

Agora consideramos o Problema (2.10)-(2.13) com (ϕ, ψ) como dados iniciais, então pelo Teorema 4.2 existe uma única solução (u, τ), ainda mais, a solução é T-periódica. De fato, sejam

$$
\begin{aligned}
\bar{u} &= u^*(t + n\,T, x) \\
\bar{\tau} &= \tau^*(t + n\,T, x)\,,
\end{aligned}
$$

como $\mathbf{f}$ é T-periódica, $(\bar{u}, \bar{\tau})$ são soluções do problema (2.10)-(2.13) com dados iniciais (ϕ_n, ψ_n). Aplicamos o Teorema 5.1, então

$$|u(t) - \bar{u}(t)|^2 + |\tau(t) - \bar{\tau}(t)|^2 \leq C\,\left(|\phi - \phi_n|^2 + |\psi - \psi_n|^2\right)\exp(-\epsilon\,t)\,,$$

para todo $t \geq 0$ e para algum $\epsilon > 0$. Em particular, para $t = T$, temos que

$$\begin{aligned} |u(T) - \phi_{n+1}|^2 + |\tau(T) - \psi_{n+1}|^2 &= |u(T) - \bar{u}(T)|^2 + |\tau(T) - \bar{\tau}(T)|^2 \\ &\leq C\left(|\phi - \phi_n|^2 + |\psi - \psi_n|^2\right)\exp(-\epsilon T)\,, \end{aligned}$$

tomando limite para $n \to \infty$ obtemos que

$$u(T) = \phi = u(0) \quad \text{e} \quad \tau(T) = \psi = \tau(0).$$

Portanto, (u, τ) é T-periódica e satisfaz as condições de regularidade do Teorema 4.2. Além disso, (5.1) implica que (u, τ) é assintoticamente estável. A unicidade também é deduzida do resultado de estabilidade. Com efeito, suponhamos que (u^1, τ^1) e (u^2, τ^2) sejam duas soluções T-periódicas. Então pelo Teorema 5.1, temos

$$\begin{aligned} &|u^1(t) - u^2(t)|^2 + |\tau^1(t) - \tau^2(t)|^2 \\ &= |u^1(t + nT) - u^2(t + nT)|^2 + |\tau^1(t + nT) - \tau^2(t + nT)|^2 \\ &\leq C\left(|u_0^1 - u_0^2|^2 + |\tau_0^1 - \tau_0^2|^2\right)e^{-\epsilon(t+nT)}\,. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ obtemos que

$$u^1(t) = u^2(t) \qquad \tau^1(t) = \tau^2(t).$$

∎

Corolário 5.3 *Seja ω como no Teorema 4.2. Suponha $\mathbf{f} \in I\!H^1$ suficientemente pequena. Então existe uma solução estacionária (u, τ) do problema (2.10)-(2.12), a qual pertence a $V \times I\!H^2$. Além disso, (u, τ) é assintoticamente estável em $I\!L^2$ e única entre todas as soluções estacionárias.*

Demonstração: Como $\mathbf{f}$ é independente de t, $\mathbf{f}$ é T-periódica para todo $T > 0$. Notemos que tomando $0 < t_0 < t$, com o mesmo argumento da prova do Teorema 5.1, podemos deduzir a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} &|u^1(t) - u^2(t)|^2 + |\tau^1(t) - \tau^2(t)|^2 \\ &\leq C\left(|u^1(t_0) - u^2(t_0)|^2 + |\tau^1(t_0) - \tau^2(t_0)|^2\right)e^{-\epsilon(t-t_0)}\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Agora, se uma solução é periódica e está definida para $t \geq 0$, pode ser estendida para todo $t \in I\!R$. Portanto a desigualdade (5.16) é válida para todo $-\infty < t_0 < t$. Seja (u, τ) uma solução do problema (2.10)-(2.12), definamos

$$\tilde{u}(t) = u(t+T) \quad \text{e} \quad \tilde{\tau}(t) = \tau(t+T)$$

então $(\tilde{u}, \tilde{\tau})$ é outra solução do problema (2.10)-(2.12). Aplicando a desigualdade (5.16), temos que

$$|u(t) - \tilde{u}(t)|^2 + |\tau(t) - \tilde{\tau}(t)|^2 \leq C\, e^{-\epsilon(t-t_0)}$$

para todo $t_0 \in I\!R$ e $t_0 < t$. Tomando limite para $t_0 \to -\infty$, obtemos que

$$\begin{aligned} u(t) &= \tilde{u}(t) = u(t+T) \\ \tau(t) &= \tilde{\tau}(t) = \tau(t+T) \end{aligned}$$

para todo $t \in I\!R$ e para todo $T > 0$. Portanto, (u, τ) é independente de t, ou seja, é estacionária. A desigualdade (5.1) implica que (u, τ) é assintoticamente estável em $I\!L^2$. A unicidade também é deduzida da desigualdade (5.1). ∎

Capítulo 6

Comentários finais

O modelo estudado neste trabalho envolve apenas um tempo de relaxação (λ_1). Entretanto, existem outros modelos, tal como o chamado *rubber-like model*, que admite vários tempos de relaxação. Neste caso, o tensor extra-stress τ é decomposto como

$$\tau = \tau^v + \tau^e ,$$

onde

$$\tau^e = \sum_{i=1}^{N} \tau_i ,$$

e

$$\begin{aligned} \tau_i + \lambda_i \frac{\mathcal{D}_a \tau_i}{\mathcal{D}t} &= 2\eta_i D, \quad \eta_i, \lambda_i > 0,\ i = 1, ..., N, \\ \tau_v &= 2\,\eta_v D, \quad \eta_v \geq 0. \end{aligned}$$

Consideremos apenas o caso $\eta_v > 0$. Então, o sistema das equações de movimento toma a forma

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u\right) + \nabla p = \eta_v \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \nabla \cdot \tau_i + \mathbf{f}, \\ \text{div } u = 0, \\ \tau_i + \lambda_i \dfrac{\mathcal{D}_a \tau_i}{\mathcal{D}t} = 2\eta_i D, \quad i = 1, ..., N, \end{cases}$$

ou, na forma adimensional

$$\begin{cases} Re\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) + \nabla p = (1-\omega)\Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \nabla \cdot \tau_i + \mathbf{f}, \\ \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \\ \tau_i + W_i \dfrac{\mathcal{D}_a \tau_i}{\mathcal{D}t} = 2\omega_i D, \quad i = 1, ..., N, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde

$$\omega = \frac{\eta_e}{\eta}, \qquad \omega_i = \frac{\eta_i}{\eta}, \qquad \eta = \eta_v + \eta_e, \qquad \eta_e = \sum_{i=1}^{N} \eta_i,$$

$$W_i = \lambda_i \frac{U}{L}, \quad \text{e} \quad Re = \rho \frac{UL}{\eta}.$$

Uma observação importante é a de que todos os resultados expostos nos capítulos 3, 4 e 5 são válidos para o sistema (6.1) e, de fato, eles podem ser provados exatamente com os mesmos métodos anteriores.

Bibliografia

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

[2] C. Guillopé and J.C. Saut. Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law. *Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and Appl.*, 15(9), 849–869, October 1990.

[3] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1. Dunod, Paris, 1968.

[4] J.G. Oldroyd. On the formation of rheological equations of state. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 200, 523–541, 1950.

[5] H. L. Royden. *Real Analysis.* The Macmillan Company, London, 2nd edition, 1968.

[6] J. Serrin. A note on the existence of periodic solutions of the Navier-Stokes equations. *Archs ration. Mech. Analysis*, 3, 120–122, 1959.

[7] J. Simon. Compacts sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Mat. Pura ed Applicata*, Serie quarta, CXLVI, 65–96, 1987.

[8] R. Temam. *The Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* North-Holland, Amsterdam, revised edition, 1979.

[9] A. Valli. Periodic and stationary solutions for compressible Navier-Stokes equations via stability method. *Annali Scu. norm. Sup. Pisa*, 10, 607–647, 1983.

[10] A. Valli. Navier-Stokes equations for compressible fluids: global estimates and periodic solutions. *Proc. Symp. Pure Math*, 45(2), 467–478, 1986.