Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

Propriedades Homológicas de Grupos Pro-p†

María Eugenia Martin

Tese de Mestrado

Orientadora: **Profª. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova**

08 de abril de 2009
Campinas - SP

† Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq e da CAPES

Propriedades Homológicas de Grupos Pro-p

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **María Eugenia Martin** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 08 de abril de 2009.

Profª. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova

ORIENTADORA

Banca Examinadora:

1. **Profª. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova** IMECC - UNICAMP
2. **Prof. Dr. Pavel Zalesski** IE/MAT - UnB
3. **Prof. Dr. Antônio José Engler** IMECC - UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA

BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller - CRB8 / 6162

Martin, María Eugenia

M363p Propriedades homológicas de grupos pro-p/María Eugenia Martin – Campinas, [S.P.:s.n.], 2009.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebra homológica. 2. Dualidade (Matemática). 3. Grupos profinitos. 4. Teoria dos grupos. 5. Grupos topológicos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mfbm/imecc)

Título em inglês: Homological properties of pro-p groups

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Homological algebra. 2. Duality theory (Mathematics). 3. Profinite groups. 4. Group theory. 5. Topological groups.

Área de concentração: Matemática/Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: 1. Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (IMECC-UNICAMP)
2. Prof. Dr. Antônio José Engler (IMECC-UNICAMP)
3. Prof. Dr. Pavel Zalesski (IE/MAT-UnB)

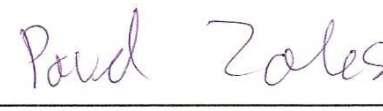
Data da defesa: 08/04/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de abril de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA



Prof. (a). Dr (a). PAVEL ZALESSKI

Prof. (a). Dr (a). ANTÔNIO JOSÉ ENGLER

Dedico este trabalho à minha filha Paloma pela compreensão dos momentos ausentes.

Agradecimentos

À professora Dessislava pela orientação e dedicação,
Aos professores da banca pelas correções,
Aos meus pais, María del Carmen e Ricardo, que sempre me incentivaram, e estiveram comigo a pesar da distância,
E, em especial, ao Daniel pela companhia, conselhos e contribuição para a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta dissertação discutimos propriedades homológicas de grupos discretos e grupos pro-p. Em particular trabalhamos com grupos abstratos de dualidade de Poincaré orientáveis de dimensão três e seu completamento pro-p.

Os primeiros capítulos da dissertação incluem uma exposição sobre as propriedades homológicas básicas de grupos abstratos e grupos pro-p.

Finalmente, descrevemos um resultado recente de [KZ], publicado em Transactions AMS (2008), que classifica quando o completamento pro-p de um grupo de dualidade de Poincaré orientável de dimensão três é um grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável de dimensão três.

Palavras-chave: Álgebra homológica, Dualidade (Matemática), Grupos profinitos, Teoria dos grupos, Grupos topológicos.

Abstract

In this dissertation we discuss homological properties of discrete groups and pro-p groups. In particular we work with groups of abstract of Poincaré duality of dimension three steerable and its pro-p completion.

The first chapters of the dissertation include a presentation on the basic homological properties of abstract groups and pro-p groups.

Finally, we describe a recent result of [KZ], published in Transactions AMS (2008), which ranks as the pro-p completion of a group of Poincaré-steerable dual dimension of three is a group of pro-p duality of Poincaré -steerable in three dimensions.

Key-words: Homological Algebra, Duality theory (Mathematics), Profinite groups, Group theory, Topological groups.

Sumário

Introdução

O objetivo principal desta dissertação foi o estudo das propriedades homológicas dos grupos pro-p. Para isso começamos discutindo as propriedades homológicas de grupos abstratos, uma área da álgebra já consolidada. As principais idéias da álgebra homológica descendem de duas outras áreas da matemática, estudadas no final do século passado, que posteriormente tornaram-se topologia combinatória e álgebra moderna.

As origens da álgebra homológica podem ser remontadas ao século XIX, nos trabalhos de Riemann (1857) e Betti (1871) sobre *"números homológicos"*, e no posterior desenvolvimento rigoroso da noção de números homológicos devido a Poincaré em 1895. Em 1925, uma observação de Emmy Noether deslocou a atenção para "*grupos de homologia"* de um espaço, e na década 1930-1940 foram desenvolvidas diversas técnicas algébricas com propósitos de computar os grupos de homologia de um espaço. Até esse momento, a álgebra homológica permaneceu como uma parte da topologia algébrica, o que começou a mudar nos meados de 1945.

Durante o período 1940-1955 as técnicas, de motivações topológicas para computar homologia, foram aplicadas para definir e explorar a homologia e a cohomologia de vários sistemas algébricos: Tor e Ext para grupos abelianos, homologia e cohomologia de grupos e álgebras de Lie e a cohomologia de álgebras associativas. Além disso, Leray introduziu feixes, cohomologia de feixes e sequências espectrais.

Neste contexto o famoso livro *"Homological Algebra"* de H. Cartan e S. Eilenberg [CE], escrito entre 1950 e 1953 e publicado em 1956, resumiu as realizações deste primeiro período, e introduziu algumas novas idéias que determinaram o desenvolvimento deste ramo da álgebra pelos próximos anos. Até 1970, [CE] foi a principal referência da álgebra homológica, apesar do livro de Mac Lane [ML] ser também popular. No início dos anos setenta a área ganhou duas importantes referências: em 1970, Rotman publicou *"Notes on Homological Algebra"* [R3], e em 1971 apareceu o livro de Hilton e Stammbach [HS].

Por outro lado, o principal impulso para o estudo de grupos pro-p veio da teoria de corpos, especificamente no contexto de cohomologia de Galois, e da teoria de números. Apesar dos inteiros p-ádicos, que são um exemplo de grupo pro-p, aparecerem no século anterior foi recentemente que a teoria de grupos profinitos, em particular pro-p, foi estudada separadamente do contexto de extensões de corpos e vários livros interessantes sobre grupos profinitos surgiram, tais como [RZ] e [W], vale ressaltar porém que a primeira discussão em livro de

grupos pro-p foi em "Cohomologie Galoisienne" de Serre [S].

Um grupo pro-p é o limite inverso de um sistema de p-grupos finitos, i.e. de grupos de ordem potência de primo, onde o primo, convencionalmente denotado por p, é fixo. Isto nos impulsa a querer deduzir propriedades de um grupo abstrato G das correspondentes propriedades de suas imagens homomorfas finitas e finalmente por outro implica que grupos pro-p são grupos topológicos Hausdorff compactos e totalmente desconexos.

Nesta dissertação também estudamos grupos de dualidade de Poincaré abstratos orientáveis de dimensão 3 e seu completamento pro-p. O interesse em grupos de dualidade de Poincaré surgiu na geometria, assim por exemplo grupos fundamentais de algumas variedades sem bordo são grupos de dualidade de Poincaré. Os grupos pro-p de dualidade de Poincaré foram primeiro estudados em teoria de números,veja [NSW] e recentemente outro tratamento foi dado em [SW]. No caso geral de grupos profinitos não é claro se as definições de grupos de dualidade de Poincaré de [NSW] e [SW] são equivalentes, mas no caso de grupos pro-p essas definições coincidem. Neste texto nos adotamos a definição de [SW] e tratamos somente o caso pro-p.

O proposito principal desta dissertação é apresentar/explicar os resultados do artigo [KZ] sobre quando o completamento pro-p de um grupo abstrato G de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3 é também um grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3. O trabalho [KZ] surgiu como uma tentativa de entender um resultado recente de Reznikov [Re] que mostra que se G é um contra exemplo da conjectura de Thurston (i.e. se G é um reticulado hiperbólico cocompacto de dimensão 3, onde cada subgrupo de índice finito em G tem abelianização finita) então o completamento pro-p de G é um grupo pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão 3. Infelizmente Reznikov utilizou em [Re] notações que não foram definidas o que dificulta sua leitura. Em [KZ] e [Wg] foi mostrado, através de técnicas homológicas, que de fato o resultado é verdadeiro.

Os principais resultados do artigo de [KZ] para o completamento pro-p de um grupo abstrato de dualidade de Poincaré de dimensão 3, são os seguintes teoremas:

Teorema 4.15 *Seja G um grupo abstrato de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3. Assuma que $G_{\widehat{p}}$, o seu completamento pro-p, é infinito. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *O homomorfismo $\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$ induzido pelo homomorfismo canônico $N \to N_{\widehat{p}}$ é um isomorfismo para todos os subgrupos normais N de índice potência de p em G, onde $N_{\widehat{p}}$ é o completamento pro-p de N.*

2. *$G_{\widehat{p}}$ é um grupo de dualidade de Poincaré pro-p orientável de dimensão 3.*

3. *Todo subgrupo aberto de $G_{\widehat{p}}$ tem deficiência 0.*

4. *G é um grupo p-bom.*

Teorema 4.17 *Seja G um grupo abstrato de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3 e seja $G_{\widehat{p}}$ o completamento pro-p de G. Então se satisfaz exatamente uma das seguintes condições:*

1. *$G_{\widehat{p}}$ é finito;*
2. *$G_{\widehat{p}}$ é um grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3;*
3. *não existe cota superior na deficiência dos subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$;*
4. *$G_{\widehat{p}}$ é infinito e o supremo da deficiência dos subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$ é 1. Neste caso $G_{\widehat{p}}$ é virtualmente $\mathbb{Z}_p$.*

A dissertação for estruturada do seguinte modo: um primeiro capítulo introdutório onde apresentamos uma pequena descrição de módulos, categorias e funtores, introduzimos os conceitos de homomorfismos de módulos, produto tensorial, limites diretos e inversos de uma família de módulos assim como também suas propriedades elementares. O principal objeto da álgebra homológica é o par de bifuntores, ou seja funtores nas duas variáveis, Hom e $\otimes$ por isso neste capítulo estudamos seus comportamentos em módulos, em especial nos módulos projetivos, injetivos e planos.

A álgebra homológica pode ser aplicada ao estudo de funtores derivados de funtores aditivos, em particular chamamos de Ext os funtores derivados de Hom que ganharam esse nome pela sua relação com extensões, e os funtores Tor derivados do funtor $\otimes$ que ganharam esse nome pela sua relação com torção. Para definí-los é necessária a existência de resoluções projetivas e injetivas de cada módulo. Funtores derivados foram definidos no capítulo 2, assim como também foram enunciadas algumas propriedades especiais dos funtores Tor e Ext e foram aplicados a grupos para definir assim homologia e cohomologia de grupos. Neste capítulo apresentamos alguns teoremas de grande importância para a álgebra homológica, dentre eles o Lema de Shapiro (2.3.13), o Teorema de Comparação (2.2.1), o Lema da Serpente (2.1.10) e o Lema 3x3 (2.1.11). Também discutimos várias condições de finitude que podem ser impostas num grupo infinito para garantir que suas homologias tenham certas propriedades. No final deste capítulo apresentamos teoria de grupos de dualidade e definimos a Característica de Euler de um grupo G, para o qual adotamos as hipóteses de finitude: $\mathrm{cd}(G) < \infty$ e ser de tipo FP_∞. A teoria de característica de Euler de grupos foi motivada pela topologia mas tem aplicações na teoria de grupos e na teoria de números.

As principais referências para esta primeira parte, ou seja a teoria de grupos abstratos, foram os livros [R] e [B].

O terceiro capítulo fornece ferramentas básicas e as propriedades principais de grupos pro-$\mathcal{C}$ que são limites inversos de grupos em $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma classe conveniente de grupos finitos que inclui a classe de todos os grupos finitos e os p-grupos finitos. Analogamente ao caso abstrato, tratamos aspectos homológicos de grupos profinitos e consideramos módulos sobre anéis profinitos, particularmente sobre os anéis de grupos completos $[[\mathbb{F}_pG]]$ e $[[\mathbb{Z}_pG]]$ onde $\mathbb{F}_p$ é o corpo com p elementos, $\mathbb{Z}_p$ é o completamento pro-p do anel dos inteiros (os inteiros p-ádicos) e G é um grupo pro-p. Por último estabelecemos os resultados fundamentais de homologia e cohomologia de grupo profinitos, seguindo o livro [RZ].

No quarto e último capítulo, provamos que um grupo abstrato de dualidade de Poincaré orientável G de dimensão 3 cujo completamento pro-p $G_{\widehat{p}}$ é infinito e todos os subgrupos abertos de $G_{\widehat{p}}$ tem deficiência 0 é sempre p-bom. Também discutimos algumas condições suficientes para que vários invariantes homológicos de G sejam preservados no completamento pro-p, estes invariantes são, por exemplo, tipo homológico, característica de Euler, dimensão cohomológica. Finalmente descrevemos as demonstrações dos teoremas 4.3.1 e 4.3.3 que foram citados acima.

Capítulo 1

Módulos, Categorias e Funtores

Neste texto consideramos apenas anéis associativos e com unidade, 1. E reservamos o símbolo R para denotar tais anéis.

Neste capítulo preliminar apresentamos alguns resultados sobre módulos. Introduzimos os conceitos de limite direto e limite inverso e descrevemos algumas propriedades destes. Definimos os grupos abelianos $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ e $A \otimes_R B$ e algumas classes de módulos com propriedades especiais que serão úteis no decorrer do texto: os módulos livres, projetivos, injetivos e planos. Assim como também introduzimos os conceitos de categorias e funtores e discutimos propriedades funtoriais de Hom, $\otimes$, $\varinjlim$, e $\varprojlim$, tais como preservação de somas diretas, produtos diretos e exatidão.

1.1 Módulos e submódulos

A noção de R-módulo é uma generalização das noções de espaço vetorial e de grupo abeliano.

Definição 1.1.1 *Um* **R-*módulo à esquerda*** *é um grupo abeliano aditivo M equipado com uma ação de R, i.e. existe uma função $R \times M \to M$, que leva $(r,m) \mapsto rm$, satisfazendo:*

a) $r(m+m') = rm + rm'$;

b) $(r+r')m = rm + r'm$;

c) $(rr')m = r(r'm)$;

d) $1m = m$;

onde m, $m' \in M$ e 1, r, $r' \in R$.

Definição 1.1.2 *Uma função $f : M \to N$ entre dois R-módulos à esquerda M e N é um* ***R-homomorfismo*** *se*

$$f(m+m') = f(m) + f(m') \ \text{ e } \ f(rm) = rf(m).$$

Neste texto R-homomorfismos também serão chamados de homomorfismos de R-módulos ou simplesmente homomorfismos quando for redundante fazer referência ao anel R.

As definições de R-módulo à direita e R-homomorfismos entre dois R-módulos à direita são análogas às definições anteriores.

Observe que quando R é corpo, a definição de R-módulo à esquerda se reduz simplesmente a definição de um espaço vetorial sobre R e um R-homomorfismo é uma transformação linear. Já se R for o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$, então um $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda é um grupo abeliano e um $\mathbb{Z}$-homomorfismo é um homomorfismo de grupos abelianos.

Agora se consideramos a multiplicação à esquerda em R, esta define uma operação de R no seu grupo abeliano subjacente satisfazendo as condições da definição acima, logo R é um R-módulo à esquerda.

Seja G um grupo multiplicativo, então $[RG]$ denotará o conjunto de todas as somas formais finitas $\Sigma_{g\in G} r_g g$, com $r_g \in R$ e $r_g = 0$ exceto para um número finito de elementos $g \in G$. Para $\Sigma_{g\in G} r_g g$ e $\Sigma_{g\in G} s_g g \in [RG]$ dizemos que $\Sigma_{g\in G} r_g g = \Sigma_{g\in G} s_g g$ se e somente se $r_g = s_g$ para todo $g \in G$. Finalmente, definimos

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g = \sum_{g\in G} (r_g + s_g) g,$$

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} s_g g\right) = \left(\sum_{g\in G} r_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in G} s_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (r_g s_h) gh.$$

Com essas operações $[RG]$ é um anel, chamado de **anel de grupo** do grupo G sobre o anel R. No caso em que R é um corpo, $[RG]$ é uma álgebra e é chamada de **álgebra de grupo**. O anel $[RG]$ é um R-módulo à esquerda.

A teoria dos anéis de grupo é um local de encontro de múltiplas teorias algébricas e desempenha papel central no desenvolvimento da teoria de representações de grupos e na teoria homológica de grupos, nosso principal interesse. Para esse fim consideramos essencialmente módulos sobre o anel de grupo $[\mathbb{Z}G]$ do grupo G sobre o anel $\mathbb{Z}$.

Definição 1.1.3 *Seja $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Dizemos que f é um **monomorfismo** se f é injetor; dizemos que f é um **epimorfismo** se f é sobrejetor. Dizemos que f é um **isomorfismo** se f é ambos monomorfismo e epimorfismo.*

Dado um anel R construímos a partir deste um novo anel R^{op}, chamado de **anel oposto** de R. O conjunto subjacente e a estrutura aditiva de R^{op} são os mesmos de R. Mas a multiplicação em R^{op} é na ordem oposta e será denotada por $(r, s) \longmapsto r * s$, i.e. $r * s = s \cdot r$ onde $\cdot$ é a multiplicação em R.

Todo R-módulo à direita M é um R^{op}-módulo à esquerda. Logo, daqui em diante diremos "*R-módulo*" ou simplesmente "*módulo*" ao invés de "*R-módulo à esquerda*". É imediato que todos os resultados sobre R-módulos à esquerda se generalizam para resultados análogos para R-módulos à direita.

Definição 1.1.4 *Se M é um módulo, então um* ***submódulo*** M' *de M é um subgrupo que é fechado pelo produto por um escalar, i.e.,*

$$m' \in M' \text{ implica } rm' \in M', \text{ para todo } r \in R.$$

Definição 1.1.5 *Seja X um subconjunto de um módulo M. O* ***submódulo*** $\langle \boldsymbol{X} \rangle$ ***de*** **M** ***gerado por*** **X** *é definido como:*

$$\langle X \rangle := \bigcap_{j \in J} M'_j,$$

onde $\left\{ M'_j : j \in J \right\}$ *é a família de todos os submódulos de M que contém X.*

É fácil ver que a definição anterior equivale à $\langle X \rangle = \{\Sigma r_i x_i : r_i \in R, x_i \in X\}$.

Definição 1.1.6 *Um módulo M é* ***finitamente gerado (f.g.)*** *se existe um subconjunto finito $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de M tal que $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle = M$.*

Definição 1.1.7 *Se M' é um submódulo de M, o* ***módulo quociente*** M/M' *é o grupo quociente M/M', dotado da estrutura de R-módulo definida por $r\,(m + M') := rm + M'$.*

Dado dois R-módulos, M e N, definimos $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{(M, N)}$ como sendo o conjunto de todos os R-homomorfismos de M em N.

Sejam f, g um par de homomorfismos em $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, vamos definir as seguintes funções:

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x), \text{ onde } x \in M$$
$$(-f) : x \longmapsto -f(x), \text{ onde } x \in M.$$

Cada uma delas é um R-homomorfismo de M para N. Pode-se provar ([AF, proposição 4.1, pág. 55]) que $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ é um grupo abeliano com respeito à operação de adição $(f, g) \mapsto f + g$.

1.2 Categorias e Funtores

Definição 1.2.1 *Uma* ***categoria*** $\mathfrak{C}$ *consiste de uma classe de* ***objetos,*** $\mathrm{obj}\,\mathfrak{C}$*, um conjunto de* ***morfismos*** $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(A, B)$ *disjuntos dois a dois, para cada par ordenado de objetos (A, B), e* ***composições*** $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(B, C) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(A, C)$*, denotadas $(f, g) \mapsto g \circ f$, satisfazendo os seguintes axiomas:*

a) para cada objeto A, existe um ***morfismo identidade*** $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(A, A)$ *tal que $f \circ \mathrm{id}_A = f$ para toda $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(A, B)$ e $\mathrm{id}_A \circ g = g$ para toda $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(C, A)$;*

b) a composição é associativa: se $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(B,C)$ *e* $h \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}(C,D)$, *então* $h(gf) = (hg)f$.

Exemplos 1.2.2

1. *A* ***categoria*** $\mathcal{S}$ ***de conjuntos*** *na qual objetos são conjuntos, morfismos são funções, e a composição é a composição usual de funções.*

2. *A* ***categoria*** $\mathcal{A}b$ ***de grupos abelianos****, na qual objetos são grupos abelianos, morfismos são homomorfismos de grupos, e a composição é a composição usual de funções.*

3. *A* ***categoria*** ${}_R\mathfrak{M}$ ***de*** R***-módulos à esquerda****, na qual os objetos são* R*-módulos à esquerda, os morfismos são* R*-homomorfismos, ou seja,* $\mathrm{Mor}(A,B) = \mathrm{Hom}_R(A,B)$*, e a composição usual de funções. Analogamente podemos considerar a* ***categoria de todos os*** R***-módulos à direita*** *que denotamos por* $\mathfrak{M}_R$.

4. *A* ***categoria*** Top ***de todos os espaços topológicos****, na qual objetos são espaços topológicos, morfismos são funções continuas, e a composição de morfismos é a composição usual de funções.*

∎

Se $\mathfrak{C}$ é uma categoria, dizemos que S é uma afirmação sobre $\mathfrak{C}$ se as variáveis acontecendo em S são interpretadas como objetos e morfismos em $\mathfrak{C}$. A afirmação **dual** de S, S^*, é a afirmação sobre $\mathfrak{C}$, obtida invertendo a direção de cada morfismo (i.e. intercambiar "domínio" e "imagem") e substituindo cada composição $\alpha\beta$ de morfismos por $\beta\alpha$.

É natural considerar as categorias formando una categoria elas mesas. Neste caso os morfismos seriam os funtores.

Definição 1.2.3 *Sejam* $\mathfrak{C}$ *e* $\mathfrak{D}$ *duas categorias. Um* ***funtor*** *ou* ***funtor covariante*** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *é uma função satisfazendo:*

i. Se $A \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{C}$*, então* $FA \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{D}$*;*

ii. Se $f : A \to B$ *é um morfismo em* $\mathfrak{C}$*, então* $Ff : FA \to FB$ *é um morfismo em* $\mathfrak{D}$*;*

iii. Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *são morfismos em* $\mathfrak{C}$*, então* $F(gf) = FgFf$*;*

iv. para cada $A \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{C}$*, temos* $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$.

Dado um funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e um morfismo $f : A \to B$ em $\mathfrak{C}$, denotamos $Ff : FA \to FB$ por f_*.

Exemplos 1.2.4

1. *Seja A um objeto em $\mathfrak{C}$ fixo, defina $F : \mathfrak{C} \to \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é a categoria dos conjuntos definida no exemplo 1.2.2 (1), por $FC = \mathrm{Mor}\,(A, C)$. Se $f : C \to C'$ é um morfismo em $\mathfrak{C}$, defina então $Ff : \mathrm{Mor}\,(A, C) \to \mathrm{Mor}\,(A, C')$ por $g \mapsto fg$. Logo F, assim definida, é um funtor covariante.*

2. *Seja M um R-módulo fixo. Vamos definir $\mathrm{Hom}_R(M, \,) : {}_R\mathfrak{M} \to \mathcal{A}b$, por*

$$\mathrm{Hom}_R(M, \;) : N \longmapsto \mathrm{Hom}_R(M, N);$$

se $f : N' \to N$ é um R-homomorfismo, então definimos

$$\mathrm{Hom}_R(M, f) : \mathrm{Hom}_R(M, N') \to \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

por $g \longmapsto fg$, logo

$$\mathrm{Hom}_R(M, \;) : f \longmapsto \mathrm{Hom}_R(M, f).$$

Logo a função $\mathrm{Hom}_R(M, \,)$ é um funtor covariante.

∎

Um funtor contravariante é uma função que pode ser interpretada como um homomorfismo de categorias que inverte as setas dos morfismos.

Definição 1.2.5 *Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ duas categorias. Um **funtor contravariante** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é uma função satisfazendo:*

i. Se $A \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{C}$, então $FA \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{D}$;

ii. Se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathfrak{C}$, então $Ff : FB \to FA$ é um morfismo em $\mathfrak{D}$ (logo F inverte setas);

iii. Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ são morfismos em $\mathfrak{C}$, então $F(gf) = FfFg$;

iv. para cada $A \in \mathrm{obj}\,\mathfrak{C}$, temos $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$.

Dado um funtor contravariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e um morfismo $f : A \to B$ em $\mathfrak{C}$, denotamos $Ff : FB \to FA$ por f^*.

Exemplos 1.2.6

1. *Seja B um objeto fixo em $\mathfrak{C}$, defina $F : \mathfrak{C} \to \mathcal{S}$ por $FA = \mathrm{Mor}\,(A, B)$. Se $f : A \to A'$ é um morfismo em $\mathfrak{C}$, defina então $Ff : \mathrm{Mor}\,(A', B) \to \mathrm{Mor}\,(A, B)$ por $g \mapsto gf$. Logo F assim definida é um funtor contravariante.*

2. *Seja N um R-módulo fixo, vamos definir $\mathrm{Hom}_R(\ , N) : {}_R\mathfrak{M} \to \mathcal{A}b$, por*

$$\mathrm{Hom}_R(\ , N) : M \longmapsto \mathrm{Hom}_R(M, N);$$

se $f : M' \to M$ é um R-homomorfismo, então definimos $\mathrm{Hom}_R(f, N) : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N)$ por $g \longmapsto gf$, logo

$$\mathrm{Hom}_R(\ , N) : f \longmapsto \mathrm{Hom}_R(f, N).$$

Logo a função $\mathrm{Hom}_R(\ , N)$ é um funtor contravariante.

∎

Definição 1.2.7 *Uma categoria $\mathfrak{C}$ é dita **pré-aditiva** se*

*a) $\mathfrak{C}$ tem um **objeto zero**; i.e. um objeto O tal que para todo objeto A de $\mathcal{C}$, os conjuntos $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(O, A)$ e $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(A, O)$ contém exatamente um elemento cada.*

b) para cada par de objetos A e B de $\mathfrak{C}$ o conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(A, B)$ é um grupo abeliano em relação à adição;

c) para quaisquer objetos A, B, C de $\mathfrak{C}$ existe uma aplicação bilinear

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(B, C) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(A, C)\,,$$

i.e. para f, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(B, C)$ e h, $k \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(A, B)$

$$(f + g)h = fh + gh \ \text{ e } \ f(h + k) = fh + fk.$$

Por exemplo, as categorias $\mathcal{A}b$, ${}_R\mathfrak{M}, \mathcal{M}_R$ são pré-aditivas, mas $\mathcal{S}$ e Top não são pré-aditivas.

Definição 1.2.8 *Se $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ são duas categorias pré-aditivas, então dizemos que o funtor (covariante ou contravariante) $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é **aditivo** se $F(f + g) = Ff + Fg$ para cada f, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{c}}\,(A, B)$.*

Como neste texto trabalharemos com a categoria pré-aditiva de de módulos sobre o anel fixo R, o funtor Hom assim como também o funtor $\otimes$, que será definido na seção 1.3, serão sempre aditivos.

Dizemos que um diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle\beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B' \end{array}$$

comuta se $\beta\alpha = \alpha'\beta'$; dizemos que um diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\gamma} & \\ C & & \end{array}$$

comuta se $\alpha = \gamma\beta$; um diagrama maior composto de quadrados e triângulos **comuta** se cada quadrado e triângulo comuta.

Nota A noção de "dual" se estende de maneira obvia a diagramas, invertendo cada seta e retendo a comutatividade de qualquer quadrado ou triângulo.

Uma transformação natural é um modo de comparar dois funtores entre as mesmas categorias através da comutatividade de certos diagramas.

Definição 1.2.9 *Sejam E e F funtores, $E : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ e $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$. Uma* ***transformação natural*** *$t : E \to F$ é uma classe de morfismos $t_A : EA \to FA$, um para cada $A \in \operatorname{obj}\mathfrak{U}$, dando a comutatividade de*

$$\begin{array}{ccc} EA & \xrightarrow{Ef} & EA' \\ {\scriptstyle t_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_{A'}} \\ FA & \xrightarrow[Ff]{} & FA' \end{array}$$

para cada $f \in \operatorname{Mor}_{\mathfrak{U}}(A, A')$.

Existe uma definição similar se E e F são funtores contravariantes, neste caso as setas de $E(f)$ e $F(f)$ se invertem.

No caso em que os morfismos t_A sejam isomorfismos para cada $A \in \operatorname{obj}\mathfrak{U}$, chamamos a transformação t de **isomorfismo natural**.

1.3 Produto Tensorial

Existe outra classe importante de funtores aditivos, além dos funtores Hom: a classe dos funtores "tensor" que surgiram do estudo da álgebra multilinear, ante a necessidade de linearizar funções multilineares.

Definição 1.3.1 *Se A é um R-módulo à direita, B um R-módulo à esquerda, e G um grupo abeliano aditivo, então uma* ***função* R-*biaditiva*** *é uma função $f : A \times B \to G$ tal que para cada a, $a' \in A$, b, $b' \in B$, e $r \in R$,*

i. $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;

ii. $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;

iii. $f(ar, b) = f(a, rb)$.

O exemplo mais familiar de tais funções são os produtos internos da álgebra linear elementar.

Existe um modo natural de trocar cada função R-biaditiva por uma aplicação linear usando o conceito de produto tensorial.

Definição 1.3.2 *Um* ***produto tensorial*** *de $A \in \mathfrak{M}_R$ e $B \in {}_R\mathfrak{M}$ é um grupo abeliano $A \otimes_R B$ e uma função R-biaditiva h que resolve o seguinte problema universal:*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{h} & A \otimes_R B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{f'} & \\ G & & \end{array}$$

para cada grupo abeliano G e cada função R-biaditiva f, existe um único homomorfismo f' que faz o diagrama comutar.

O produto tensorial de R-módulos existe e é único, uma prova destes fatos pode ser encontrada em [AF, Proposições 19.1-19.2, págs. 219-220].

O grupo abeliano $A \otimes_R B$ é o $\mathbb{Z}$-módulo gerado por $\{h(a, b) := a \otimes b : a \in A, b \in B\}$, ou seja, cada elemento $m \in A \otimes_R B$ pode ser expressado como uma soma finita da forma $m = \Sigma_i(a_i \otimes b_i)$. Observe, porém, que esta representação não precisa ser única.

Teorema 1.3.3 ([R, Teorema 1.5, pág. 11]) *Seja $f : A \to A'$ um homomorfismo de R-módulos à direita e seja $g : B \to B'$ um homomorfismo de R-módulos à esquerda. Então existe um único homomorfismo $A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$, com $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$.*

Vamos denotar esta aplicação por $f \otimes g$.

Teorema 1.3.4 ([R, Teorema 1.12, pág. 14]) *Seja B um R-módulo, então existe um R-isomorfismo $R \otimes_R B \simeq B$, com $r \otimes b \mapsto rb$.*

Também é verdade que $A \otimes_R R \simeq A$ como R-módulos à direita.

Existe um resultado análogo para Hom: Se B é um R-módulo qualquer, então

$$\mathrm{Hom}_R(R, B) \simeq B, \text{ com isomorfismo } f \longmapsto f(1). \tag{1.1}$$

Ambos os isomorfismos são naturais, a demonstração desses fatos pode ser encontrada em [AF, proposição 20.1, pág. 235].

Exemplos 1.3.5

1. *Se R é um corpo e A, B espaços vetoriais sobre R (ou seja R-módulos), então $A \otimes_R B$ é o produto tensorial usual de espaços vetoriais.*

2. *Se R é o anel dois inteiros $\mathbb{Z}$, A é o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e B é o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, então $A \otimes_R B = 0$. Pois, sejam $a = \bar{1} \in A$ e $b = \bar{1} \in B$, então $2a = \bar{0} \in A$ e $3b = \bar{0} \in B$. Logo*

$$2(a \otimes b) = (2a) \otimes b = \bar{0} \otimes b = 0$$
$$3(a \otimes b) = a \otimes (3b) = a \otimes \bar{0} = 0.$$

   Como 2 e 3 são coprimos, existem números inteiros m e n tais que $2m + 3n = 1$, então $(a \otimes b) = 2(a \otimes b)m + 3(a \otimes b)n$, logo $a \otimes b = 0$.

3. *$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ para todo p primo, pois: seja $\frac{q_1}{q_2} \otimes m \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, então*

$$\frac{q_1}{q_2} \otimes m = \frac{p}{p}\frac{q_1}{q_2} \otimes m = \frac{q_1}{pq_2} \otimes pm = 0.$$

∎

Seja $A \in \mathfrak{M}_R$ definimos o funtor covariante aditivo $A\otimes_R : {}_R\mathfrak{M} \to \mathcal{A}b$ por

$$A\otimes_R : B \longmapsto A \otimes_R B$$
$$A\otimes_R : f \longmapsto \mathrm{id}_A \otimes f$$

para cada $f : B \to B'$, homomorfismo de R-módulos à esquerda.

Analogamente definimos o funtor covariante aditivo $\otimes_R B : \mathfrak{M}_R \to \mathcal{A}b$, onde $B \in {}_R\mathfrak{M}$ por

$$\otimes_R B : A \longmapsto A \otimes_R B$$
$$\otimes_R B : g \longmapsto g \otimes \mathrm{id}_B$$

para cada $g : A \to A'$, homomorfismo de R-módulos à direita.

1.4 Exatidão

Definição 1.4.1 *Dois* ***homomorfismos*** $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *são* ***exatos em M*** *se* $\operatorname{im} f = \ker g$. *Uma* ***sequência*** *(finita ou infinita) de* ***homomorfismos***

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

é ***exata*** *se cada par adjacente de homomorfismos é exato.*

Seguem imediatamente da definição as seguintes observações:

1. Se $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ é exata, então f é monomorfismo; se $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é exata, então g é epimorfismo; se $0 \to M \xrightarrow{f} M' \to 0$ é exata, então f é um isomorfismo.

2. Se $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ é exata com f epimorfismo e g monomorfismo, então $M = 0$. Se $0 \to M \to 0$ é exata, então $M = 0$.

3. Se $0 \to M' \xrightarrow{i} M \to M'' \to 0$ é exata, então $M' \simeq iM'$ e $M/iM' \simeq M''$. Tais sequências são chamadas **sequências exatas curtas.**

4. Se $f : M \to N$ é um homomorfismo, então existe uma sequência exata:

$$0 \to \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker} f \to 0,$$

onde i é a inclusão e π é a projeção canônica.

Exemplos 1.4.2 *Considere a sequência* $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\boldsymbol{m}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ *onde* $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *é a projeção canônica, portanto é um epimorfismo e* $\boldsymbol{m} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *é a multiplicação por* m, $\boldsymbol{m}(z) = mz$; *temos que* $\ker \boldsymbol{m} = \{z \in \mathbb{Z} : mz = 0\} = 0$, *portanto* $\boldsymbol{m}$ *é monomorfismo. Logo a sequência* $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\boldsymbol{m}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ *é exata.* ∎

Definição 1.4.3 *Uma* ***sequência exata curta*** $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *de* R*-módulos* ***cinde*** *se existe um homomorfismo* $h : M'' \to M$ *tal que* $gh = \mathrm{id}_{M''}$.

A seguir definimos funtores exatos que são funtores que transforman sequências exatas em sequências exatas.

Definição 1.4.4 *Um funtor* F *é* ***exato à esquerda*** *se a exatidão de* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *implica na exatidão de* $0 \to FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC$; *um funtor* F *é* ***exato à direita*** *se a exatidão de* $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *implica na exatidão de* $FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \to 0$.

Se F é exato à esquerda, então $F\alpha : FA \to FB$ é um monomorfismo e $\operatorname{im} F\alpha = \ker F\beta$; logo F preserva monomorfismos e F "preserva kernels" no sentido que $F\alpha : F(\ker\beta) \to \ker F\beta$ é um isomorfismo. Similarmente, se F é exato à direita, então F preserva epimorfismos e F "preserva cokernels".

Definição 1.4.5 *Um funtor contravariante F é **exato à esquerda** se a exatidão de $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ implica na exatidão de $0 \to FC \xrightarrow{F\beta} FB \xrightarrow{F\alpha} FA$; um funtor contravariante F é **exato à direita** se a exatidão de $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ implica na exatidão de $FC \xrightarrow{F\beta} FB \xrightarrow{F\alpha} FA \to 0$.*

Logo um funtor contravariante F é exato à esquerda se e só se $F(\operatorname{coker}\alpha) \simeq \ker F\alpha$ via $F\beta$, e é exato à direita se e somente se $F(\ker\beta) \simeq \operatorname{coker} F\beta$ via $F\alpha$.

Definição 1.4.6 *Um funtor é **exato** se é ambos, exato à esquerda e exato à direita.*

É claro que um funtor exato à esquerda que preserva epimorfismos é exato, da mesma forma que um funtor exato à direita que preserva monomorfismos é exato.

Teorema 1.4.7 ([R, Teorema 2.9, pág. 35]) $\operatorname{Hom}(M, \ )$ *é um funtor exato à esquerda e* $\operatorname{Hom}(\ , M)$ *é um funtor contravariante exato à esquerda, para cada módulo M.*

Nenhum dos dois funtores $\operatorname{Hom}(M, \ )$ e $\operatorname{Hom}(\ , M)$ são exatos, pois considere a sequência exata do exemplo 1.4.2 com $m = 2$. Aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \ )$ a esta sequência, temos a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathbf{2}_*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Note que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, pois seja $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um $\mathbb{Z}$-homomorfismo,

$$0 = f(\bar{0}) = f(\bar{1} + \bar{1}) = f(\bar{1}) + f(\bar{1}) = 2f(\bar{1}) \Longrightarrow f(\bar{1}) = 0,$$

logo $f = 0$. Mas, $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$. Logo π_* não é um epimorfismo e o funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \ )$ não é exato.

Aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ , \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à mesma sequência, temos a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{2^*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Para qualquer $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ e $a \in \mathbb{Z}$,

$$2^*(f)(a) = (f2)(a) = f(2a) = 2f(a) = \bar{0},$$

logo 2^* é a aplicação zero, e como $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$ por (1.1), 2^* não é um epimorfismo e então $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ , \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ não é um funtor exato.

Teorema 1.4.8 ([R, Teorema 2.10, pág. 35-36]) *Os funtores $M\otimes_R$ e $\otimes_R N$ são funtores exatos à direita.*

Os funtores $M\otimes_R$ e $\otimes_R M$ não precisam ser exatos à esquerda. Considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e a sequência exata

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0, \tag{1.2}$$

onde i é a aplicação inclusão e π é a projeção canônica. Suponha que a sequência

$$0 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0 \tag{1.3}$$

seja exata. Pelo exemplo 1.3.5 (3), $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, logo a sequência exata 1.3 fica

$$0 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to 0,$$

o que implica que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = 0$, mas pelo teorema 1.3.4 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$, o que é uma contradição. Logo $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}}$ não é exato à esquerda.

Aplique agora, o funtor $\otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à sequência (1.2), logo

$$i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$$

não é um monomorfismo, logo $\otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ não é funtor exato.

Exemplos 1.4.9 *Seja M um $\mathbb{Z}$-módulo qualquer, então $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq M/mM$. Considere a uma sequência exata curta do exemplo 1.4.2, então pelo teorema 1.4.8*

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\boldsymbol{m}\otimes \mathrm{id}_M} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\pi\otimes \mathrm{id}_M} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \to 0$$

é exata, e pelo teorema 1.3.4, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq M$, com isomorfismo $\theta : z \otimes m \mapsto zm$, e assim

$$0 \to M \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \to 0$$

é exata e $\gamma = \theta\,(\boldsymbol{m} \otimes \mathrm{id}_M)\,\theta^{-1}$, levando

$$\widetilde{m} \mapsto \theta\,(\boldsymbol{m} \otimes \mathrm{id}_M)\,\theta^{-1}\,(\widetilde{m}) = \theta\,(\boldsymbol{m} \otimes \mathrm{id}_M)\,(1 \otimes \widetilde{m}) = \theta\,(m1 \otimes \widetilde{m}) = m\widetilde{m},$$

logo $\operatorname{im}\gamma = mM$. Por outro lado

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq \operatorname{im}\beta \simeq M/\ker\beta \simeq M/\operatorname{im}\gamma \simeq M/mM.$$

∎

1.5 Módulos Projetivos, Injetivos e Planos

Nesta seção estudaremos algumas propriedades básicas dos módulos projetivos e injetivos, estas serão necessárias para o estudo de funtores derivados. Uma classe de módulos importante é a classe dos módulos livres, que são um caso particular de módulos projetivos, para definí-los precisamos dos conceitos de soma direta e produto direto e algumas de suas propriedades básicas.

Definição 1.5.1 *Seja $\{A_j : j \in J\}$ uma família de módulos. Seu* ***produto direto****, denotado $\Pi_{j\in J}A_j$, é o módulo cujo conjunto subjacente é o produto cartesiano dos A_j, i.e., se $a \in \Pi_{j\in J}A_j$, $a = (a_j)$, onde $a_j \in A_j$, e as operações de módulo são definidas por:*

$$(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)\,,$$
$$r\,(a_j) = (ra_j)\,.$$

Definição 1.5.2 *A* ***soma direta*** *dos A_j, denotada $\oplus_{j\in J}A_j$, é o submódulo de $\Pi_{j\in J}A_j$, que consiste de todos os (a_j), para os quais, "quase todos" os a_j são zero (i.e. todos os a_j são 0 exceto um número finito).*

Observação 1.5.3 *Se o conjunto de índices J é finito com n elementos, então $\Pi_{j\in J}A_j = \oplus_{j\in J}A_j$; neste caso escrevemos simplesmente $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$.*

Note que se M_1 e M_2 são submódulos de M com $M_1 \cap M_2 = 0$ e $M_1 + M_2 = M$, então $M = M_1 \oplus M_2$.

Definição 1.5.4 *Se $A = \Pi A_j$, definimos* ***projeções*** *$p_j : A \to A_j$ e* ***injeções*** *$\lambda_j : A_j \to A$ por $p_j : (a_i) \longmapsto a_j$ e $\lambda_j\,(a_j)$ o elemento de A que tem a_j na j-ésima coordenada e 0 nas outras.*

Note que $p_j\lambda_j = \mathrm{id}_{A_j}$ e $p_j\lambda_k = 0$ se $j \neq k$. Essas aplicações são também definidas quando A é soma direta, nesse caso $\Sigma\lambda_j p_j = \mathrm{id}_A$.

Propriedade 1.5.5 ([R, Teoremas 2.4 e 2.6, págs. 30-31]) *Sejam A, $\{A_j : j \in J\}$, B e $\{B_i : i \in I\}$, R-módulos , então:*

(a) $\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{j\in J} A_j, B\right) \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R\,(A_j, B)$, *com isomorfismo $\varphi \longmapsto (\varphi\lambda_j)$ onde λ_j é a j-ésima injeção;*

(b) $\mathrm{Hom}_R\left(A, \prod_{i\in I} B_i\right) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R\,(A, B_i)$, *com isomorfismo $\varphi \longmapsto (p_j\varphi)$ onde p_j é a j-ésima projeção.*

Esses isomorfismos são naturais nas duas coordenadas, veja [AF, Corolário 16.5, pág. 182].

Observe que $\mathrm{Hom}\,(A,\ )$ preserva produto direto, em particular preserva somas finitas. Agora vamos ver que o produto tensorial preserva somas diretas.

Propriedade 1.5.6 ([R, Teorema 2.8, pág. 33]) *Sejam A e $\{A_j : j \in J\}$, R-módulos à direita, B e $\{B_i : i \in I\}$, R-módulos à esquerda, então:*

(a) $A \otimes_R \left(\bigoplus_{i\in I} B_i\right) \simeq \bigoplus_{i\in I} (A \otimes_R B_i)$, *com isomorfismo* $a \otimes (b_j) \longmapsto (a \otimes b_j)$;

(b) $\left(\bigoplus_{j\in J} A_j\right) \otimes_R B \simeq \bigoplus_{j\in J} (A_j \otimes_R B)$, *com isomorfismo* $(a_j) \otimes b \longmapsto (a_j \otimes b)$.

Esses isomorfismos são naturais.

O próximo exemplo mostra que produto tensorial não comuta com produto direto.

Exemplos 1.5.7 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\prod_{p\ primo} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \ncong \prod_{p\ primo} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Pelo exemplo 1.3.5 temos que

$$\prod_{p\ primo} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0.$$

É claro que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$ se e somente se para cada $m \in M$, existe $z \in \mathbb{Z} \setminus 0$ tal que $zm = 0$. Logo, considere o elemento $x = \prod_{p\ primo} (1 + p\mathbb{Z}) \in \prod_{p\ primo} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, suponha que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $zx = 0$, então $z\,(1 + p\mathbb{Z}) = 0$ para todo p primo, logo $z = 0$ e então

$$0 \neq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\prod_{p\ primo} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \ncong \prod_{p\ primo} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0.$$

∎

Teorema 1.5.8 ([R, Teorema 2.7, pág. 33]) *Dados dois módulos A e B com $i : A \to B$ monomorfismo, então A é somando de B (i.e. $B = iA \oplus C$ para algum submódulo C de B) se e somente se existe um homomorfismo $p : B \to A$ tal que $pi = \mathrm{id}_A$.*

1.5.1 Módulos Livres

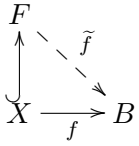
A continuação seguem duas definições de módulo livre, a equivalência delas é demonstrada em [H, Teorema 2.1, págs. 181-182]

Definição 1.5.9 *Um **R-módulo** à esquerda F é **livre** se é soma direta de copias de R, ou seja $F \simeq \oplus R$.*

Se $Ra_i \simeq R$ e $F \simeq \oplus_{i\in I} Ra_i$, então o conjunto $\{a_i : i \in I\}$ é chamado de uma **base** de F.

Observe que R é sempre um R-módulo livre com uma base consistindo de um elemento só.

Definição 1.5.10 *Um **módulo F é livre com base $X = \{a_i : i \in I\}$**, se dado qualquer módulo B e qualquer função $f : X \to B$, existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : F \to B$ que estende f, i.e. $\widetilde{f}$ faz o seguinte diagrama comutar*



Teorema 1.5.11 ([R, Teorema 3.2, pág. 58]) *Seja X um conjunto qualquer, então existe um módulo livre F que tem X como base.*

Teorema 1.5.12 ([R, Teorema 3.3, pág. 58]) *Todo módulo M é um quociente de um módulo livre, i.e. existe um módulo livre F e um epimorfismo $f : F \to M$.*

O último teorema diz que M pode ser descrito por **geradores e relações**, i.e. se F é livre com base X e $f : F \to M$ é um epimorfismo, então X é chamado de um conjunto de **geradores** de M e $\ker f$ é chamado de seu submódulo de **relações**. Neste caso dizemos que M é gerado por $f(X)$.

Definição 1.5.13 *Uma **resolução livre** de um R-módulo M é uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

de R-módulos livres.

A definição nos diz que:

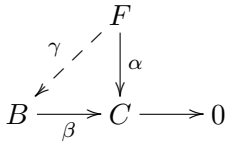
(i) cada F_i é R-módulo, e cada d_i é homomorfismo de R-módulos;

(ii) $\operatorname{im} d_{i+1} = \ker d_i$ para todo i;

(iii) cada F_i é R-módulo livre.

Teorema 1.5.14 ([R, Teorema 3.8, pág. 60]) *Todo módulo M, tem uma resolução livre. Ressaltamos, porém, que resoluções livres não são únicas.*

Teorema 1.5.15 ([R, Teorema 3.9, pág. 61]) *Considere o diagrama com β epimorfismo:*

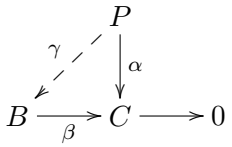


Se F é livre e $\alpha : F \to C$ é qualquer homomorfismo, então existe um homomorfismo (mas não necessariamente único) $\gamma : F \to B$ com $\alpha = \beta\gamma$.

Corolário 1.5.16 ([R, Corolário 3.10, págs. 61-62]) *Se o módulo F é livre, então o funtor* $\mathrm{Hom}\,(F, \ )$ *é exato.*

1.5.2 Módulos Projetivos

Definição 1.5.17 *Um **R-módulo** P é **projetivo** se o diagrama*



comuta, ou seja $\exists\gamma : P \to B$ homomorfismo de R-módulos, tal que $\beta\gamma = \alpha$, onde P, B, C são R-módulos, α, β homomorfismos de R-módulos e β é epimorfismo.

Note que o teorema anterior nos diz que R-módulos projetivos existem pois todo R-módulo livre é projetivo. A recíproca é falsa, mas antes de ver um contra-exemplo, precisamos de alguns teoremas.

O teorema a seguir nos fornece uma série de caracterizações dos módulos projetivos.

Teorema 1.5.18 ([R, pág. 62,63]) *As seguintes afirmações sobre um módulo P são equivalentes:*

1. *P é projetivo.*
2. *O funtor* $\mathrm{Hom}\,(P, \ )$ *é exato.*
3. *P é somando de um módulo livre.*

4. Toda sequência exata curta $0 \to A \to B \to P \to 0$ *cinde.*

Em particular, a condição 3 implica que todo somando de um módulo projetivo é projetivo.

Teorema 1.5.19 ([R, Teorema 3.12, págs. 62-63]) *Se* P *é projetivo e* $\beta : B \to P$ *é epimorfismo, então* $B = \ker \beta \oplus P'$*, onde* $P' \simeq P$*.*

Teorema 1.5.20 ([HS, proposição 4.5, pág. 24]) *Seja* $\{P_j : j \in J\}$ *uma família de módulos, e seja* $P = \oplus P_j$*. O módulo* P *é projetivo se e somente se* P_j *é projetivo para cada* $j \in J$*.*

Não é verdade que o produto direto de módulos projetivos seja projetivo. Por exemplo o produto direto infinito $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots$ de $\mathbb{Z}$-módulos projetivos não é projetivo, uma prova disto pode ser encontrada em [L, Exemplo 2.8, pág. 22].

Como todo R-módulo é imagem homomorfa de um R-módulo livre e todo R-módulo livre é projetivo, temos:

Teorema 1.5.21 ([V, teorema 3.1.9]) *Todo* R*-módulo é uma imagem homomorfa de um* R*-módulo projetivo.*

Tendo esses resultados podemos exibir um exemplo da existência de módulos projetivos que não são livres.

Exemplos 1.5.22 *Se* $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*, então, pelo teorema chinês do resto,* $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*. Logo* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *é projetivo pois é somando do módulo livre* R*. Se* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *for livre então*

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \oplus_{j \in J} R a_j = \oplus_{j \in J} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})\, a_j, \text{ mas } 3 = |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}| \cdot \#J \geq 6,$$

que é absurdo. Logo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *é um* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*-módulo projetivo, mas não é* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*-módulo livre.* ∎

A continuação alguns exemplos de anéis nos quais todo módulo projetivo é livre.

Exemplos 1.5.23

1. *Se* R *é um corpo, cada* R*-módulo* M *(espaço vetorial sobre* R*) é livre e logo projetivo. Neste caso módulo⇔livre⇔projetivo.*

2. *Seja* $R = \mathbb{Z}$*,* M *é um* R*-módulo se e somente se* M *é um grupo abeliano. Suponha que* M *é f.g. como* R*-módulo, então* M *é f.g. como grupo abeliano, isto implica que* ^{M} *admite a seguinte decomposição:*

$$M = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$$

*Se M é um módulo projetivo, então existe $\tilde{M}$ um $\mathbb{Z}$-módulo livre tal que $\tilde{M} = M \oplus M'$. Suponha que a parte $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ na decomposição de M seja não trivial, então existe $m \in M \subseteq \tilde{M} = \oplus\mathbb{Z}$ tal que $n_1 m = 0$, $m \neq 0$ mas $\tilde{M}$ é livre de torção (um módulo $\tilde{M}$ sobre um domínio R é **livre de torção** se $rm = 0$ implica $r = 0$ ou $m = 0$, onde $r \in R$ e $m \in \tilde{M}$, veja definição 2.2.28) que é um absurdo. Logo $M = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, é um $\mathbb{Z}$-módulo livre. Isto é cada $\mathbb{Z}$-módulo f.g. projetivo é livre.*

∎

Definição 1.5.24 *Uma **resolução projetiva** de um R-módulo M, é uma sequencia exata longa*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

onde todos os P_i são R-módulos projetivos.

É claro que existem resoluções projetivas pois já vimos que existem resoluções livres. Vamos ver alguns exemplos:

Exemplos 1.5.25

1. *Considere o grupo cíclico finito de ordem m, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Existe uma sequência exata $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\boldsymbol{m}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ onde π é a projeção canônica e $\boldsymbol{m} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é a multiplicação por m, veja o exemplo 1.4.2. Logo temos uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$:*

   $$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$$

   onde $P_0 = P_1 = \mathbb{Z}$, $P_n = 0$ para $n \geq 2$, $\varepsilon = \pi$, e d_1 é a multiplicação por m.

2. *Considere o grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$, então*

   $$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

   onde $P_0 = \mathbb{Z}$, $P_n = 0$ para $n \geq 1$, e ε é a aplicação identidade, é uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$.

3. *Seja G um grupo cíclico infinito gerado por x. Então*

   $$\cdots \to 0 \to \cdots \to 0 \to [\mathbb{Z}G] \xrightarrow{T} [\mathbb{Z}G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

   onde T é a multiplicação por $x - 1$ e ε é o homomorfismo aumento (veja definição 2.3.2), é uma sequência exata e logo uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$, isto significa que G age trivialmente sobre $\mathbb{Z}$: $gz = z$ para todo $g \in G$ e $z \in \mathbb{Z}$.

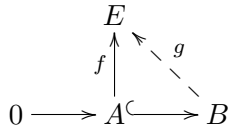
∎

Em geral, um R-módulo pode ter mais de uma resolução projetiva, mas quaisquer duas delas estão relacionadas, isso vemos na seção 2.2 onde enunciamos o teorema de comparação de resoluções.

1.5.3 Módulos Injetivos

A noção de módulo injetivo é dual à noção de módulo projetivo.

Definição 1.5.26 *Um* ***módulo*** E *é* ***injetivo*** *se, para todo módulo B e todo submódulo A de B, cada homomorfismo $f : A \to E$ pode ser estendido a um homomorfismo $g : B \to E$. O diagrama é*



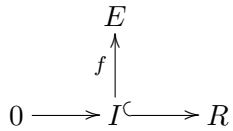
Os módulos projetivos e injetivos tem efeito dual no funtor Hom, em particular, existe um teorema dual ao teorema 1.5.18, caraterizando módulos injetivos.

Teorema 1.5.27 ([R, pág. 65-67]) *As seguintes afirmações sobre um módulo E são equivalentes:*

1. *E é injetivo.*
2. *O funtor* $\mathrm{Hom}(\ , E)$ *é exato.*
3. *Toda sequência exata curta $0 \to E \xrightarrow{i} B \to C \to 0$ cinde.*
4. *Todo homomorfismo $f : I \to E$, onde I é ideal à esquerda de R, pode ser estendido a R.*

A condição 3 do teorema implica que, em particular, E é somando de B.

A condição 4 é conhecida como *Critério de Baer* e é um teste de injetividade muito útil. Ele nos diz que a injetividade de um módulo E pode ser determinada por seu comportamento no conjunto de diagramas



onde a linha é restrita a aplicações inclusão de ideais à esquerda.

O matemático R. Bear introduziu e estudou os R-módulos injetivos no ano 1940, ele os designou pela expressão "grupos abelianos completos sobre o anel R". O nome injetivo apareceu por primeira vez, dez anos depois nos trabalhos de S. Eilenberg.

Vejamos agora como se comportam somas e produtos diretos em relação a módulos injetivos:

Teorema 1.5.28 ([R, Teorema 3.17, pág. 65]) *Se $\{E_j : j \in J\}$ é uma família de módulos e $E = \Pi E_j$. Então E é injetivo se e somente se cada E_j é injetivo.*

Não é verdade que soma direta de R-módulos injetivos é R-módulo injetivo, isto somente acontece se R for **noetheriano à esquerda (ou direita),** i.e. se cada R-submódulo M_1 de um R-módulo à esquerda (ou direita) f.g. M, é f.g. Uma prova disto pode ser encontrada em [AF, Propriedade 18.10 pág. 209].

Como produto direto de uma família finita de R-módulos é o mesmo que a soma direta de essa família de módulos, temos:

Corolário 1.5.29 ([R, Teorema 3.18, pág. 66]) *Todo somando direto D de um módulo injetivo E é injetivo.*

Vimos que todo módulo é um quociente de um módulo projetivo (livre), o seguinte teorema afirma o resultado dual.

Teorema 1.5.30 ([R, Teorema 3.27, pág. 71]) *Todo R-módulo à esquerda pode ser mergulhado num módulo injetivo.*

Alguns exemplos de módulos injetivos:

Exemplos 1.5.31

1. *$\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo: como $\mathbb{Z}$ é domínio de ideais principais, todo ideal é da forma $\langle z\rangle$, para algum $z \in \mathbb{Z}$. Seja $f : \langle z\rangle \to \mathbb{Q}$ um homomorfismo que leva $z \mapsto \frac{p}{q}$, definimos $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, como $\tilde{f}(1) = \frac{p}{zq}$, claramente $\tilde{f}$ estende f, logo pelo Critério de Baer $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.*

2. *Se R é um corpo, então todo espaço vetorial V sobre R, é um R-módulo injetivo. Pois, como R não tem ideais próprios o problema de extensão de aplicações obviamente possui solução.*

3. *Seja R o anel $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, onde m é um inteiro ≥ 2. Qualquer ideal de R é da forma $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ onde k é divisor de m. Seja $m = ks$. Seja $f : k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to R$ um homomorfismo e suponha que $f(k + m\mathbb{Z}) = a + m\mathbb{Z}$. Então*

$$0 = f(ks + m\mathbb{Z}) = sf(k + m\mathbb{Z}) = sa + m\mathbb{Z}$$

que implica que m divide sa e portanto k divide a. Seja $a = kb$. Defina $g : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ por $g(n + m\mathbb{Z}) = nb + m\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. A aplicação g é um homomorfismo que estende f a R. Logo R é R-módulo injetivo pelo critério de Baer.

∎

O seguinte é um exemplo de um módulo que é projetivo mas não é injetivo. Este exemplo também mostra que não todo anel R é um R-módulo injetivo.

Exemplos 1.5.32 *O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$, é claramente projetivo pois é livre. Considere agora o homomorfismo $f : \langle 2\rangle \to \mathbb{Z}$, que leva $2 \to 1$. Suponha que existe um homomorfismo $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que estende f, então*

$$1 = \tilde{f}(2) = 2\tilde{f}(1) \quad \Rightarrow \tilde{f}(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z},$$

que é absurdo, logo f não pode ser estendida e pelo Critério de Baer, $\mathbb{Z}$ não é $\mathbb{Z}$-módulo injetivo. ∎

Se R for um **anel de divisão**, i.e. se R for um anel com identidade tal que $1 \neq 0$ e para todo $0 \neq a \in R$, existe $b \in R$ com $ab = ba = 1$, todo R-módulo à esquerda é projetivo e injetivo.

Definição 1.5.33 *Uma **resolução injetiva** de um R-módulo M, é uma sequencia exata longa*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d_0} E^1 \xrightarrow{d_1} E^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

na qual cada E^n é injetivo.

Usando repetidas vezes o fato que todo R-módulo pode ser mergulhado num R-módulo injetivo podemos provar que:

Teorema 1.5.34 ([R, Teorema 3.28, pág. 71]) *Todo módulo M tem uma resolução injetiva.*

1.5.4 Módulos Planos

Usando as propriedades de exatidão do funtor $B\otimes_R$ or $\otimes_R C$ podemos definir

Definição 1.5.35 *Um **R-módulo à direita** B, é **plano** se o funtor $B\otimes_R$ é exato. Similarmente um **R-módulo à esquerda** C é chamado de **plano** se o funtor $\otimes_R C$ é exato.*

Como $B\otimes_R$ é sempre exato à direita, um R-módulo à direita B é plano se e somente se $\mathrm{id}_B \otimes$ preserva monomorfismo, analogamente como $\otimes_R C$ é sempre exato à direita, um R-módulo à esquerda C é plano se e somente se $\otimes\, \mathrm{id}_C$ preserva monomorfismos.

A seguir enunciamos alguns resultados de módulos planos:

Teorema 1.5.36 ([R, Teorema 3.45, pág. 85]) *Seja $\{B_k : k \in K\}$ uma família de R-módulos à direita. Então $\oplus B_k$ é plano se e somente se cada B_k é plano.*

Teorema 1.5.37 ([R, Corolário 3.46, pág. 85]) *Todo módulo projetivo é plano.*

Exemplos 1.5.38

1. *A observação que segue do teorema 1.4.8 mostra que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ não é $\mathbb{Z}$-módulo plano.*

2. *R é um R-módulo plano. Seja $f : A \to A'$ um monomorfismo, então $\mathrm{id}_R \otimes f : R \otimes_R A \to R \otimes_R A'$, mas pelo teorema 1.3.4, temos que $R \otimes_R A \simeq A$, com isomorfismo t_A, logo*

$$t_{A'}^{-1} \circ f \circ t_A : R \otimes_R A \to R \otimes_R A' \text{ leva}$$
$$r \otimes a \mapsto t_{A'}^{-1} \circ f \circ t_A(r \otimes a) = t_{A'}^{-1} \circ f(ra) = t_{A'}^{-1}(rf(a)) = r \otimes f(a),$$

   logo $\mathrm{id}_R \otimes f = t_{A'}^{-1} \circ f \circ t_A$, portanto $\mathrm{id}_R \otimes f$ é monomorfismo.

3. *O grupo aditivo $\mathbb{Q}$ dos número racionais é um $\mathbb{Z}$-módulo plano mas não é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo. Isto segue dos resultados do próximo capítulo pois $\mathbb{Q}$ é limite direto de copias de $\mathbb{Z}$ e limite direto de módulos planos é plano.*

∎

1.6 Limite Direto e Limite Inverso

Definição 1.6.1 *Seja I um **conjunto quase-ordenado** (i.e. I tem una relação binaria $\leq$ reflexiva e transitiva) e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um **sistema direto** em $\mathfrak{C}$ com **conjunto de índices** I é um funtor $F : I \to \mathfrak{C}$, tal que para cada $i \in I$, existe um objeto F_i e, sempre que $i, j \in I$ satisfaçam $i \leq j$, existe um morfismo $\varphi_j^i : F_i \to F_j$ tal que:*

1. *$\varphi_i^i : F_i \to F_i$ é a identidade para cada $i \in I$;*

2. *se $i \leq j \leq k$, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\varphi_k^i} & F_k \\ {\scriptstyle \varphi_j^i}\downarrow & \nearrow_{\varphi_k^j} & \\ F_j & & \end{array}$$

Observação 1.6.2 *Para que a definição de F faça sentido, construímos I como uma categoria $\mathfrak{U}$, com $\mathrm{obj}\,\mathfrak{U} = I$,*

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{U}}(x, y) = \begin{cases} \{i_y^x\} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{outro caso,} \end{cases}$$

e composição $i_z^y i_y^x = i_z^x$ quando $x \leq y \leq z$.

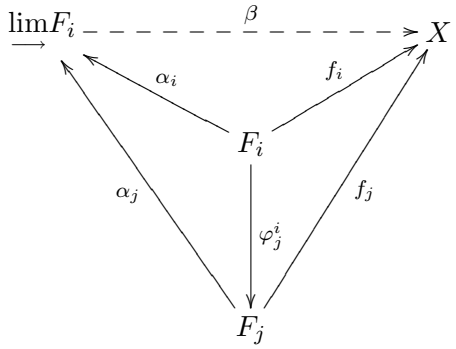
Nos seguintes exemplos, a categoria $\mathfrak{C}$, é uma categoria de módulos.

Exemplos 1.6.3

1. *Seja M um R-módulo, e seja I o conjunto de todos os subconjuntos finitos de M. Para $\alpha \in I$, seja M_α o submódulo de M gerado pelo subconjunto α de M. Para α, $\beta \in I$ dizemos que $\alpha \leq \beta$ se M_α é um submódulo de M_β e definimos $i_\beta^\alpha : M_\alpha \to M_\beta$ como sendo a aplicação inclusão. A relação $\leq$ definida em I é claramente reflexiva e transitiva, logo I com a relação $\leq$ é um conjunto quase ordenado. Mais ainda para cada α, $\beta \in I$, existe $\gamma \in I$, que, neste caso, pode ser escolhida como $\gamma = \alpha \cup \beta$, tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$, i.e. I com a relação $\leq$ é um conjunto quase ordenado dirigido. Logo $\left\{M_\alpha, i_\beta^\alpha\right\}_I$ é então um sistema direto de R-módulos.*
2. *Seja R um domínio com corpo quociente Q. A família de todos os R-submódulos cíclicos de Q da forma $\langle 1/r\rangle$ é quase ordenado pela relação: $\langle 1/r\rangle \leq \langle 1/s\rangle$ se e só se $r \mid s$, i.e. $rr' = s$ para algum $r' \in R$. Esta família com as inclusões é um sistema direto.*

∎

Definição 1.6.4 *Seja $F = \left\{F_i, \varphi_j^i\right\}$ um sistema direto em $\mathfrak{C}$. O **limite direto** desse sistema, denotado $\varinjlim F_i$, é um objeto e uma família de morfismos $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$ com $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$ sempre que $i \leq j$, satisfazendo o seguinte problema universal:*



para todo objeto X e toda família de morfismos $f_i : F_i \to X$ com $f_i = f_j \varphi_j^i$ sempre que $i \leq j$, existe um único morfismo $\beta : \varinjlim F_i \to X$ fazendo o diagrama anterior comutativo.

O $\varinjlim F_i$, se existir, é único a menos de isomorfismo. Pode ser encontrada em [R, Teorema 2.16, pág. 41] uma demostração de que o limite direto de um sistema de módulos $\left\{F_i, \varphi_j^i\right\}$ existe e é $\varinjlim F_i = (\oplus F_i)/S$, onde S é o submódulo gerado por todos os elementos $\left\{\lambda_j \varphi_j^i (a_i) - \lambda_i (a_i)\right\}$, onde $\lambda_i : F_i \to \oplus F_i$ é a i-ésima injeção, a_i é um elemento de F_i e $i \leq j$, e $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$, levando $a_i \mapsto \lambda_i (a_i) + S$.

Exemplos 1.6.5

1. *Seja* $\left\{M_\alpha, i_\beta^\alpha\right\}_I$ *o sistema direto do exemplo 1.6.3 (*1*), logo* $\varinjlim M_\alpha = (\oplus M_\alpha)/S$*, onde* S *é o submódulo gerado por todos os elementos* $\lambda_\beta i_\beta^\alpha(x_\alpha) - \lambda_\alpha(x_\alpha)$*, onde* $\alpha,\ \beta \in I$ *com* $\alpha \leq \beta$ *e* $x_\alpha \in M_\alpha$*,* $\lambda_\alpha : M_\alpha \to \oplus M_\alpha$ *é a* α*-ésima injeção, e* $\bar{\alpha}_\alpha : M_\alpha \to \varinjlim M_\alpha$*, levando* $x_\alpha \mapsto \lambda_\alpha(x_\alpha) + S$*.*

   Agora vamos definir a aplicação $\theta : M \to \varinjlim M_\alpha$*. Para tanto, seja* $x \in M$ *então existe* $\alpha \in I$ *tal que* $x \in M_\alpha$*. Seja ainda* $\beta \in I$ *outro elemento tal que* $x \in M_\beta$*. Escolha* $\gamma \in I$ *com* $\alpha \leq \gamma$ *e* $\beta \leq \gamma$*. Então* $x \in M_\gamma$ *e*

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_\alpha(x) = \bar{\alpha}_\gamma i_\gamma^\alpha(x) &= \bar{\alpha}_\gamma\left(i_\gamma^\alpha(x) - x\right) + \bar{\alpha}_\gamma(x)\\ &= \bar{\alpha}_\gamma(x) = \bar{\alpha}_\gamma i_\gamma^\beta(x) = \bar{\alpha}_\beta(x),\end{aligned}$$

   mostrando que $\bar{\alpha}_\alpha(x)$ *é independente da escolha de* $\alpha \in I$ *para a qual* $x \in M_\alpha$*. Então seja* $\theta(x) = \bar{\alpha}_\alpha(x)$*.*

   É fácil ver que θ *é um epimorfismo. Se* $x \in M$ *tal que* $\theta(x) = 0$*, então* $\bar{\alpha}_\alpha(x) = 0$ *para alguma* $\alpha \in I$ *tal que* $x \in M_\alpha$*, logo existe um* $\beta \geq \alpha$ *tal que* $i_\beta^\alpha(x) = 0$*, veja [V, Lema 1.6.6]. Mas as inclusões* i_β^α *são monomorfismos, logo* $x = 0$*. Portanto* θ *é monomorfismo, logo* θ *é isomorfismo. Isto implica que* $\varinjlim M_\alpha = M$*, todo módulo é limite direto de seus submódulos finitamente gerados.*

2. *Se* R *é um domínio com corpo quociente* Q*, então* $Q \simeq \varinjlim \langle 1/r\rangle$*,* $r \neq 0$*, i.e.* Q *é o limite direto da família de submódulos cíclicos isomorfos a* R*.*

∎

É claro que o conjunto quase ordenado I é uma **categoria pequena**, i.e. a classe de todos os morfismos em I é um conjunto, logo todos os funtores $I \to \mathfrak{C}$ formam uma categoria se definimos $\mathrm{Mor}(F,G)$ =todas as transformações naturais $F \to G$. Deste jeito todos os sistemas diretos de I em $\mathfrak{C}$ formam uma categoria que chamaremos $\mathbf{Dir}(I)$. Assim t é um morfismo em $\mathbf{Dir}(I)$, se t é uma transformação natural: $t : F \to G$, onde F é o sistema direto $\left\{F_i, \varphi_j^i\right\} \in \mathrm{obj}\ \mathbf{Dir}(I)$ e G é o sistema direto $\left\{G_i, \psi_j^i\right\} \in \mathrm{obj}\ \mathbf{Dir}(I)$, e $F,\ G : I \to \mathfrak{C}$; t é a família de aplicações $t_i : F_i \to G_i$ fazendo os seguintes diagramas comutativos, quando $i \leq j$

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\varphi_j^i} & F_j \\ {\scriptstyle t_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_j} \\ G_i & \xrightarrow[\psi_j^i]{} & G_j \end{array}$$

Suponha agora que $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$. Sabemos que $\varinjlim\left(\left\{F_i, \varphi_j^i\right\}\right) = (\oplus F_i)/S \in {}_R\mathfrak{M}$, onde S é definido como antes, analogamente $\varinjlim\left(\left\{G_i, \psi_j^i\right\}\right) = (\oplus G_i)/S'$, então se definimos $\bar{t} = \varinjlim t : \varinjlim F_i \to \varinjlim G_i$ por $\Sigma\lambda_i a_i + S \mapsto \Sigma\lambda_i' t_i a_i + S'$, onde $a_i \in F_i$, e λ_i, λ_i' são injeções em $\oplus F_i$, $\oplus G_i$ respetivamente, podemos afirmar que $\varinjlim : \mathbf{Dir}(I) \to {}_R\mathfrak{M}$ é um funtor. Mais ainda se I é um conjunto quase-ordenado dirigido, isto é para cada α, $\beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$, $\varinjlim$ é um funtor exato [R, pág. 46, teorema 2.18].

Teorema 1.6.6 ([R, Corolário 2.20, pág. 48]) *Para qualquer R-módulo à direita A, o funtor $A \otimes_R$ preserva limites diretos.*

Demonstração: Análoga à prova da propriedade 1.5.6 (a). ∎

Teorema 1.6.7 ([R, Teorema 2.21, pág. 49]) *Quaisquer dois limites diretos comutam, i.e.*

$$\varinjlim_{i \in I} \varinjlim_{j \in J} F_{ij} = \varinjlim_{j \in J} \varinjlim_{i \in I} F_{ij}.$$

Vamos considerar, agora, limites inversos, os quais vão aparecer como os duais de limites diretos, portanto as provas de todos os teoremas são duais às dos teoremas apresentados no inicio desta seção.

Definição 1.6.8 *Seja I um conjunto quase-ordenado e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um **sistema inverso** em $\mathfrak{C}$ com **conjunto de índices** I é um funtor contravariante $F : I \to \mathfrak{C}$, tal que para cada $i \in I$, existe um objeto F_i e, sempre que $i, j \in I$ satisfaçam $i \leq j$, existe um morfismo $\psi_i^j : F_j \to F_i$ tal que:*

1. *$\psi_i^i : F_i \to F_i$ é a identidade para cada $i \in I$;*
2. *se $i \leq j \leq k$, o seguinte diagrama é comutativo*

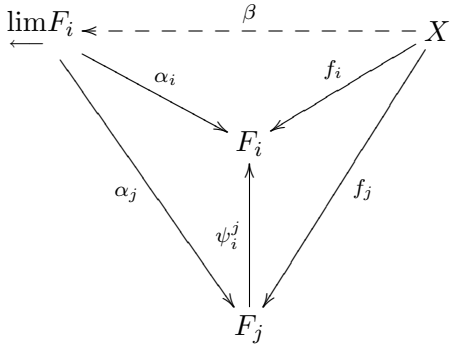
$$\begin{array}{ccc} F_k & \xrightarrow{\psi_i^k} & F_i \\ {\scriptstyle \psi_j^k}\downarrow & \nearrow_{\psi_i^j} & \\ F_j & & \end{array}$$

Definição 1.6.9 *Um sistema inverso é chamado de **torre** se é indexado por um conjunto enumerável totalmente ordenado, i.e. a relação binária de ordem em I, $\leq$, além de ser reflexiva e transitiva, é antisimétrica e para cada i, $j \in I$ ou $i \leq j$ ou $j \leq i$.*

Definição 1.6.10 *Uma torre de grupos abelianos $\left\{A_i, \psi_i^j\right\}$ satisfaz a **condição de Mittag-Leffler** se para cada $k \in I$, existe $j \in I$, $j \geq k$ tal que a imagem de $\psi_k^i : A_i \to A_k$ é igual à imagem de $\psi_k^j : A_j \to A_k$ para todo $i \geq j$, com $i \in I$.*

A condição de Mittag-Leffler é satisfeita se todas as aplicações $\psi_i^{i+1} : A_{i+1} \to A_i$ na torre $\left\{A_i, \psi_i^j\right\}$ são sobrejetoras.

Definição 1.6.11 *Seja* $F = \left\{F_i, \psi_i^j\right\}$ *um sistema inverso em* $\mathfrak{C}$. *O* ***limite inverso*** *desse sistema, denotado* $\varprojlim F_i$, *é um objeto e uma família de morfismos* $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ *com* $\alpha_i = \psi_i^j \ \alpha_j$ *sempre que* $i \leq j$, *satisfazendo o seguinte problema universal:*



para todo objeto X *e morfismos* $f_i : X \to F_i$ *com* $f_i = \psi_i^j f_j$, *sempre que* $i \leq j$, *existe um único morfismo* $\beta : X \to \varprojlim F_i$ *fazendo o diagrama comutativo.*

Como é usual $\varprojlim F_i$, se existir, é único a menos de isomorfismo, . Pode ser encontrada em [R, Teorema 2.22, pág. 51] uma demostração de que o limite inverso de um sistema de módulos $\left\{F_i, \psi_i^j\right\}$ existe. Como o limite direto é um quociente de uma soma, pela noção dual, o limite inverso deve ser um submódulo de um produto. Para cada $i \in I$, seja p_i a i-ésima projeção $p_i : \Pi F_i \to F_i$, então $\varprojlim F_i = \left\{(a_i) \in \Pi F_i : a_i = \psi_i^j a_j, \text{ sempre que } i \leq j\right\}$, e $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ é a restrição $p_i \mid_{\varprojlim F_i}$.

Exemplos 1.6.12 *Se* $I \neq \emptyset$ *é um ideal num anel comutativo* R, *então* $I^n = \{\Sigma a_1 a_2 \cdots a_n : a_i \in I\}$ *é um ideal e* $I = I^1 \supset I^2 \supset \cdots$. *Se* M *é um* R*-módulo, então* $M \supset IM \supset I^2M \supset \cdots$. *A família de módulos quocientes* M/I^iM, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *e os homomorfismos* $\psi_i^j : M/I^jM \to M/I^iM$, *para* $j \geq i$, *dados por* $x + I^jM \mapsto x + I^iM$, *formam um sistema inverso indexado pelos inteiros positivos. Seu limite inverso,* $\varprojlim M/I^iM$, *denotado* $\widehat{M}$, *é chamado* ***completamento*** I***-ádico*** *de* M. ∎

De maneira análoga a que fizemos antes, podemos definir o funtor $\varprojlim$, que é exato à esquerda mas, neste caso, não precisamos assumir que o conjunto de índices é dirigido.

Definição 1.6.13 *Se* I *é um conjunto quase ordenado, um* ***morfismo entre sistemas inversos sobre*** $\mathbf{I}$, $t : \left\{F_i, \psi_i^j\right\} \to \left\{G_i, \varphi_i^j\right\}$ *é uma família de aplicações* $t_i : F_i \to G_i$

fazendo os seguintes diagramas comutar, quando $i \leq j$:

$$\begin{array}{ccc} F_j & \xrightarrow{\psi_i^j} & F_i \\ {\scriptstyle t_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_i} \\ G_j & \xrightarrow[\varphi_i^j]{} & G_i \end{array}$$

Todo sistema inverso com conjunto de índices I e seus morfismos formam uma categoria, $\mathbf{Inv}(I)$. Dualmente, se definimos $\bar{t} = \varprojlim t : \varprojlim F_i \to \varprojlim G_i$ para um morfismo $t : \left\{F_i, \psi_i^j\right\} \to \left\{G_i, \varphi_i^j\right\}$ por $\bar{t} : (a_i) \mapsto (t_i a_i)$, então podemos afirmar que $\varprojlim : \mathbf{Inv}(I) \to {}_R\mathfrak{M}$ é um funtor.

Teorema 1.6.14 ([R, Corolário 2.25, pág. 55]) *Se A é um R-módulo à esquerda, então* $\mathrm{Hom}_R(A, \ )$ *preserva limites inversos.*

Teorema 1.6.15 ([R, Teorema 2.26, pág. 56]) *Quaisquer dois limites inversos comutam, i.e.*

$$\varprojlim_{i \in I} \varprojlim_{j \in J} F_{ij} = \varprojlim_{j \in J} \varprojlim_{i \in I} F_{ij}.$$

Teorema 1.6.16 ([R, Teorema 2.27, pág. 56]) *Para qualquer módulo B*

$$\mathrm{Hom}\left(\varinjlim A_j, B\right) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}\left(A_j, B\right).$$

.

Capítulo 2

Álgebra Homológica de Módulos Abstratos

2.1 Homologia de Complexo

Nesta seção são introduzidos os conceitos de complexos e de aplicações de cadeias, assim como também os de homotopia e homomorfismo de conexão. Estes últimos são usados para obter uma sequência exata longa correspondente a uma sequência exata de complexos dada.

Definição 2.1.1 *Um **complexo** (ou **cadeia de complexo**) $\mathcal{A}$ é uma sequência de módulos e homomorfismos*

$$\mathcal{A} = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots,$$

*com $d_n d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. As aplicações d_n, são chamadas **diferenciais**.*

Considere a sequência de módulos e homomorfismos

$$\mathcal{A}' = \cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^n} A^n \xrightarrow{d^{n+1}} A^{n+1} \longrightarrow \cdots,$$

tal que $d^{n+1}d^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, esta sequência é um complexo conforme à definição original se invertemos os sinais dos índices da seguinte forma:

$$\mathcal{A}' = \cdots \longrightarrow A_{-(n-1)} \xrightarrow{d-n+1} A_{-n} \xrightarrow{d_{-n}} A_{-(n+1)} \longrightarrow \cdots.$$

Exemplos 2.1.2

1. *Toda sequência exata é um complexo, onde as inclusões* $\operatorname{im} d_{n+1} \subseteq \ker d_n$*, são igualdades* $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$*, para todo n.*

2. *Se A é um módulo, toda resolução projetiva, $\mathcal{P}$ de A,*

$$\mathcal{P} = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

e toda resolução injetiva $\mathcal{E}$ de A,

$$\mathcal{E} = 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

são complexos. Rescrevendo $\mathcal{E}$ conforme nossa definição original, temos $\mathcal{E} = 0 \longrightarrow A \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_{-1} \longrightarrow E_{-2} \longrightarrow \cdots$.

3. *Seja A um módulo e $k \in \mathbb{Z}$ um inteiro fixo, se construímos uma sequência onde todos os termos são 0, exceto o k-ésimo que escolhemos como sendo o módulo A, então essa sequência é um complexo, chamado de* ***complexo concentrado no grau*** *k.*

4. *Se $\mathcal{A}$ é um complexo e F um funtor entre módulos aditivo, então*

$$F(\mathcal{A}) = \cdots \longrightarrow F(A_{n+1}) \overset{Fd_{n+1}}{\longrightarrow} F(A_n) \overset{Fd_n}{\longrightarrow} F(A_{n-1}) \longrightarrow \cdots,$$

é também um complexo. Se F for funtor contravariante, então

$$\begin{aligned} F(\mathcal{A}) &= \cdots \longrightarrow F(A_{n-1}) \overset{Fd_n}{\longrightarrow} F(A_n) \overset{Fd_{n+1}}{\longrightarrow} F(A_{n+1}) \longrightarrow \cdots \\ &= \cdots \longrightarrow B_{-n+1} \overset{\Delta_{-n+1}}{\longrightarrow} B_{-n} \overset{\Delta_{-n}}{\longrightarrow} -B_{-n-1} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

onde $B_{-n} = F(A_n)$ e $\Delta_{-n+1} = Fd_n$, com estas convenções, $F(\mathcal{A})$ é um complexo.

∎

Definição 2.1.3 *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são complexos, uma* ***aplicação de cadeias*** *$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ é uma sequência de aplicações $f_n : A_n \to A'_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, tal que os seguintes diagramas comutem:*

$$\begin{array}{lccccccc} \mathcal{A}: & \cdots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & \\ \mathcal{A}': & \cdots \longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Na definição 2.1.1, a condição $d_n d_{n+1} = 0$ para todo n significa que a imagem do $n+1$-ésimo homomorfismo está contida no kernel do n-ésimo e logo podemos definir a n-ésima homologia do complexo $\mathcal{A}$ como sendo o módulo quociente:

Definição 2.1.4 *Se $\mathcal{A}$ é um complexo com diferenciais d_n, sua* ***n-ésima homologia*** *é o grupo abeliano*

$$H_n(\mathcal{A}) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}.$$

Emmy Noether, em 1925, foi a primeira a ter notado que homologia era um grupo abeliano e não somente números de Betti e coeficientes de torção, mudando assim a percepção da época.

Observe também que H_n é um funtor entre a categoria de complexos e a categoria de grupos abelianos, vamos definir agora, sua ação em morfismos.

Definição 2.1.5 *Se $f : (\mathcal{A}, d) \to (\mathcal{A}', d')$ é uma aplicação de cadeias, defina*

$$H_n(f) : H_n(\mathcal{A}) \to H_n\left(\mathcal{A}'\right)$$

*por $z_n + \operatorname{im} d_{n+1} \mapsto f_n(z_n) + \operatorname{im} d'_{n+1}$. O homomorfismo $H_n(f)$ é chamado de **homomorfismo induzido por f**, e será denotado por f_*.*

Observe que f_* é bem definida, pois não depende da escolha do representante da classe em $H_n(\mathcal{A})$ e $f_n(z_n) \in \ker d'_n$. Para demonstrar o primeiro fato suponha que $z_n + \operatorname{im} d_{n+1} = \widetilde{z_n} + \operatorname{im} d_{n+1}$, então $z_n - \widetilde{z_n} \in \operatorname{im} d_{n+1}$, logo existe $m \in A_{n+1}$ tal que $z_n - \widetilde{z_n} = d_{n+1}(m)$. E portanto

$$f_n(z_n) - f_n(\widetilde{z_n}) = f_n(z_n - \widetilde{z_n}) = f_n d_{n+1}(m) = d'_{n+1} f_{n+1}(m) \in \operatorname{im} d'_{n+1}$$

Para demonstrar que $f_n(z_n) \in \ker d'_n$, seja $z_n \in \ker d_n$, logo $d_n z_n = 0$, e consequentemente $d'_n f_n z_n = f_{n-1} d_n z_n = f_{n-1}(0) = 0$.

Um complexo $\mathcal{A}$ é uma sequência exata se e só se $H_n(\mathcal{A}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se $\mathcal{A}$ é um complexo com diferenciais zero, i.e. $d_n = 0$ para todo n, então $H_n(\mathcal{A}) \simeq A_n$ para todo n.

Se $\left\{\mathcal{A}^k : k \in K\right\}$ é uma família de complexos, ou seja para cada k

$$\mathcal{A}^k = \cdots \longrightarrow A_n^k \xrightarrow{d_n^k} A_{n-1}^k \longrightarrow,$$

então $H_n\left(\oplus_k \mathcal{A}^k\right) \simeq \oplus_k H_n\left(\mathcal{A}^k\right)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, onde a **soma direta de complexos** $\oplus_k \mathcal{A}^k$ é definida como o complexo

$$\oplus \mathcal{A}^k = \cdots \longrightarrow \oplus_k A_n^k \xrightarrow{\oplus d_n^k} \oplus_k A_{n-1}^k \longrightarrow \cdots.$$

Se K é um conjunto quase-ordenado, se define o **limite direto de complexos**, $\varinjlim_{k \in K} \mathcal{A}^k$, de maneira análoga:

$$\varinjlim_{k \in K} \mathcal{A}^k = \cdots \longrightarrow \varinjlim_{k \in K} A_n^k \xrightarrow{\varinjlim d_n^k} \varinjlim_{k \in K} A_{n-1}^k \longrightarrow \cdots.$$

Se K for dirigido, então $H_n\left(\varinjlim \mathcal{A}^k\right) \simeq \varinjlim H_n\left(\mathcal{A}^k\right)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, pois, nesse caso, $\varinjlim$ é funtor exato e portanto comuta com homologia.

Definição 2.1.6 *Seja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ uma aplicação de cadeias, defina os complexos*

$$\ker f = \cdots \longrightarrow \ker f_n \xrightarrow{d_n} \ker f_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\operatorname{im} f = \cdots \longrightarrow \operatorname{im} f_n \xrightarrow{d'_n} \operatorname{im} f_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

onde d_n e d'_n são as restrições dos diferenciais $A_n \to A_{n-1}$ e $A'_n \to A'_{n-1}$ respectivamente.

Dizemos que a ***sequência de complexos*** $\mathcal{A}' \xrightarrow{f} \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{A}''$ *é* ***exata*** *se* $\operatorname{im} f = \ker g$. *Isto é equivalente a dizer que a sequência de módulos* $0 \to A'_n \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{g_n} A''_n \to 0$ *é exata para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.1.7 ([R, Homomorfismo de Conexão, pág.171]) *Se* $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}'' \to 0$ *é uma sequência exata de complexos, então, para cada* n, *existe um homomorfismo* $\partial_n : H_n(\mathcal{A}'') \to H_{n-1}(\mathcal{A}')$ *definido por*

$$z'' + \operatorname{im} d''_{n+1} \longmapsto i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} z'' + \operatorname{im} d'_n.$$

As aplicações $\partial_n : H_n(\mathcal{A}'') \to H_{n-1}(\mathcal{A}')$ são chamadas de **homomorfismos de conexão**. Estes homomorfismos apareceram pela primeira vez nos trabalhos de J. L. Kelley e E. Pitcher, de 1947, bem como a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 2.1.8 ([R, Sequência Exata Longa, pág. 172]) *Se* $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}'' \to 0$ *é uma sequência exata de complexos, então existe uma sequência exata de módulos*

$$\cdots \to H_n(\mathcal{A}') \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{p_*} H_n(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathcal{A}') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \to \cdots,$$

onde ∂_n são os homomorfismos de conexão.

O seguinte teorema enuncia que os homomorfismos de conexão são naturais.

Teorema 2.1.9 ([R, Naturalidade de ∂, pág. 173]) *Considere o diagrama comutativo de complexos com linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{A} & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \xrightarrow[j]{} & \mathcal{C} & \xrightarrow[q]{} & \mathcal{C}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Então existe um diagrama comutativo de módulos com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(\mathcal{A}') & \xrightarrow{i_*} & H_n(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p_*} & Hn(\mathcal{A}'') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\mathcal{A}') & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle h_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(\mathcal{C}') & \xrightarrow[j_*]{} & H_n(\mathcal{C}) & \xrightarrow[q_*]{} & H_n(\mathcal{C}'') & \xrightarrow[\partial']{} & H_{n-1}(\mathcal{C}') & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

O seguinte lema, chamado de "*lema da serpente*", apareceu pela primeira vez no livro [CE] e é um caso particular do teorema 2.1.8.

Lema 2.1.10 ([R, Lema da Serpente, pág. 174]) *Considere o diagrama comutativo de módulos com linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{p} & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow[i]{} & C & \longrightarrow & C'' \end{array}$$

Então, existe uma sequência exata

$$\ker \alpha \to \ker \beta \to \ker \gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} \alpha \to \operatorname{coker} \beta \to \operatorname{coker} \gamma,$$

onde $\partial : a'' \mapsto i^{-1}\beta p^{-1}a'' + \operatorname{im} \alpha$. *Mais ainda, se* $A' \to A$ *é monomorfismo, então* $\ker \alpha \to \ker \beta$ *é monomorfismo, e se* $C \to C''$ *é epimorfismo, então* $\operatorname{coker} \beta \to \operatorname{coker} \gamma$ *é epimorfismo.*

Teorema 2.1.11 ([R, Lema 3×3, pág. 175]) *Considere o diagrama comutativo de módulos:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & A & \xrightarrow{\alpha} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Se as colunas são exatas e se as duas últimas linhas (ou duas primeiras) são exatas, então a primeira linha (ou a última) é exata.

Lema 2.1.12 ([R, Lema de Mayer-Vietoris, pág. 176]) *Considere o diagrama comutativo de módulos com linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{p_n} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{n-1}} \\ \cdots & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow[j_n]{} & B'_n & \xrightarrow[q_n]{} & C'_n & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & B'_{n-1} & \longrightarrow & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Se todo γ_n *é um isomorfismo, então existe uma sequência exata*

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{(\alpha_n, i_n)} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{j_n - \beta_n} B'_n \xrightarrow{\partial_n \gamma_n^{-1} q_n} A_{n-1} \longrightarrow A'_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow B'_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Definição 2.1.13 *Seja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ uma aplicação de cadeias, dizemos que f é* ***homotópica a zero*** *se existem homomorfismos $s_n : A_n \to A'_{n+1}$ tal que $f_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$, para todo n.*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots . \\ & & & \overset{s_n}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle f_n} & \overset{s_{n-1}}{\swarrow} & & & \\ \cdots & \longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow[d'_{n+1}]{} & A'_n & \xrightarrow[d'_n]{} & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Se f e g são aplicações de cadeias $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, então f é ***homotópica*** *a g se $f - g$ é homotópica a zero, i.e. existem homomorfismos $s_n : A_n \to A'_{n+1}$ tal que $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$, para todo n. Os homomorfimos $\{s_n : n \in \mathbb{Z}\}$ formam uma* ***homotopia****.*

A homotopia é uma relação de equivalência em $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$, o grupo de todas as aplicações de cadeias $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$:

1. $f \sim f$ se escolhermos os $s_n = 0$, para todo n.

2. Se $f \sim g$, então existe $\{s_n : n \in \mathbb{Z}\}$ uma homotopia tal que $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$, mas isto implica que $g_n - f_n = d'_{n+1}(-s_n) + (-s_{n-1})d_n$, logo existe $\{-s_n : n \in \mathbb{Z}\}$ uma homotopia, o que implica que $g \sim f$.

3. Se $f \sim g$ e $g \sim h$, então existem homotopias $\{s_n : n \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\tilde{s}_n : n \in \mathbb{Z}\}$, tal que $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$ e $g_n - h_n = d'_{n+1}\tilde{s}_n + \tilde{s}_{n-1}d_n$, somando temos $f_n - h_n = d'_{n+1}(s_n + \tilde{s}_n) + (s_{n-1} + \tilde{s}_{n-1})d_n$, logo existe $\{s_n + \tilde{s}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ homotopia, o que implica que $f \sim h$.

Teorema 2.1.14 ([R, Teorema 6.8, pág. 178]) *Se f e g são aplicações de cadeias homotópicas $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, então:*

$$f_* = g_* : H_n(\mathcal{A}) \to H_n\left(\mathcal{A}'\right) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

2.2 Funtores Derivados

Dado um funtor T entre duas categorias de módulos, construiremos uma sequência de novos funtores, chamados funtores derivados. Vamos calcular esses novos funtores em um módulo M, escolhendo primeiramente uma resolução projetiva ou injetiva de M, logo aplicando o funtor T e depois tomando homologia do complexo resultante.

Nosso principal interesse é estudar funtores derivados de funtores aditivos, em particular os funtores derivados dos funtores Hom e $\otimes$, que serão denotados por Ext e Tor respetivamente. Esta notação apareceu por primeira vez em [CE], assim como também os conceitos de módulos projetivos e funtor derivado.

Os resultados mais importantes desta seção são o teorema de comparação e o lema da ferradura, considerados fundamentais para o estudo da álgebra homológica.

Vamos fixar a notação:

Seja $\mathcal{X}$ um complexo da forma $\mathcal{X} = \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$. O complexo obtido apagando M é $\mathcal{X}_M = \cdots \to X_1 \to X_0 \to 0$ e é chamado de **complexo apagado** de $\mathcal{X}$. Similarmente definimos o complexo apagado $\mathcal{Y}_N$ obtido do complexo $\mathcal{Y} = 0 \to N \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$, apagando N.

O seguinte resultado para complexos nos permite comparar duas resoluções projetivas do mesmo módulo.

Teorema 2.2.1 ([R, Teorema de Comparação, pág. 179]) *Considere o diagrama onde as linhas são complexos*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\cdots & \longrightarrow & X_2' & \xrightarrow[d_2']{} & X_1' & \xrightarrow[d_1']{} & X_0' & \xrightarrow[\epsilon']{} & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Se cada X_n na primeira linha é projetivo e se a última linha é exata, então existe uma aplicação de cadeias $\overline{f} : \mathcal{X}_A \to \mathcal{X}'_{A'}$, fazendo o diagrama completo comutativo. Mais ainda, quaisquer duas de tais aplicações de cadeias são homotópicas.

O resultado correspondente para resoluções injetivas também é verdadeiro, as sequências crescem à direita, a linha superior é assumida exata, e cada termo na última linha, exceto o primeiro, é assumido injetivo. A prova é similar e pode ser encontrada em [V, Teorema 5.2.6].

Nas definições seguintes só consideraremos funtores T que sejam aditivos.

Dado um funtor aditivo T, vamos descrever seus **funtores derivados à esquerda** L_nT. Para cada módulo A, escolhemos uma resolução projetiva $\mathcal{P}$ de A. Seja $\mathcal{P}_A$ o correspondente complexo apagado, aplicamos o funtor T a $\mathcal{P}_A$ e tomamos homologia. Então, para cada módulo A,

$$(L_nT)\,A = H_n\left(T\mathcal{P}_A\right) = \frac{\ker Td_n}{\operatorname{im} Td_{n+1}}.$$

O funtor L_nT vai da categoria de R-módulos na categoria de $\mathbb{Z}$-módulos, para completar sua definição devemos descrever sua ação em R-homomorfismos $f : A \to B$. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ resoluções projetivas de A e B, respetivamente, pelo Teorema de Comparação (teorema

2.2.1), existe $\overline{f} : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}'_B$ aplicação de cadeias, que faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathcal{P}: & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_0} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} & & \\
\mathcal{P}': & \cdots & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow[d'_1]{} & P'_0 & \xrightarrow[\epsilon']{} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Defina $(L_nT) f : (L_nT) A \to (L_nT) B$ por $(L_nT) f = H_n (Tf) = \left(T\overline{f}\right)_*$, i.e. se $z_n \in \ker Td_n$, então

$$(L_nT) f : z_n + \operatorname{im} Td_{n+1} \longmapsto \left(T\overline{f}_n\right) z_n + \operatorname{im} Td'_{n+1}.$$

Note que dado um funtor T, L_nT é um funtor aditivo para cada n.

Teorema 2.2.2 ([R, Teorema 6.11, pág. 182]) *Para cada módulo A, $(L_nT) A$ não depende da escolha da resolução projetiva $\mathcal{P}$ de A.*

Definição 2.2.3 *Se $T = \otimes_R B$, para algum R-módulo à esquerda B, então definimos $L_nT = \operatorname{Tor}_n^R(\ , B)$. Em particular,*

$$\operatorname{Tor}_n^R (A, B) = H_n (\mathcal{P}_A \otimes_R B) = \ker (d_n \otimes 1) / \operatorname{im} (d_{n+1} \otimes 1),$$

onde $\mathcal{P} : \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to A \to 0$ é uma resolução projetiva do R-módulo à direita A.

Suponha agora que T seja o funtor $A \otimes_R$ para algum R-módulo à direita A, definimos seu funtor derivado à esquerda como $L_nT = \operatorname{tor}_n^R (A, \ )$. Em particular $\operatorname{tor}_n^R (A, B) = H_n (A \otimes_R \mathcal{P}'_B)$, onde $\mathcal{P}'$ é uma resolução projetiva do R-módulo à esquerda B.

O teorema 7.9 de [R, pág. 198], mostra que o valor de $\operatorname{tor}_n^R (A,)$ em B é o mesmo que o valor de $\operatorname{Tor}_n^R (, B)$ em A, ou seja $H_n (\mathcal{P}_A \otimes_R B) \simeq H_n (A \otimes_R \mathcal{P}'_B)$ para $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ resoluções projetivas de A e B respectivamente. Por isso, de agora em diante, abusaremos da notação e denotaremos por Tor a ambos os funtores.

Dado um funtor *covariante* T, vamos descrever seus **funtores derivados à direita** R^nT. Para cada módulo A, escolhemos uma resolução injetiva

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= 0 \to A \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots \\
&= 0 \to A \to E_0 \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-2} \to \cdots,
\end{aligned}$$

seja $\mathcal{E}_A$ o correspondente complexo apagado, aplicamos o funtor T a $\mathcal{E}_A$ e tomamos homologia. Então, para cada módulo A,

$$(R^nT) A = H_{-n} (T\mathcal{E}_A) = \frac{\ker (Td_{-n})}{\operatorname{im} (Td_{-n+1})},$$

ou analogamente

$$(R^nT)\,A = H^n\left(T\mathcal{E}_A\right) = \frac{\ker\left(Td^n\right)}{\operatorname{im}\left(Td^{n-1}\right)}.$$

Vamos descrever a ação de R^nT em cada R-homomorfismo $f : A \to B$. O dual do Teorema de Comparação (teorema 2.2.1) assegura a existência de uma aplicação de cadeias $\overline{f} : \mathcal{E}_A \to \mathcal{E}'_B$, única a menos de homotopia, e logo uma única aplicação é induzida em homologia $H^n\left(T\mathcal{E}_A\right) \to H^n\left(T\mathcal{E}_B\right)$.

Cada funtor derivado R^nT de um funtor aditivo covariante T, é um funtor aditivo cuja definição é independente da escolha da resolução injetiva.

Definição 2.2.4 *Se $T = \operatorname{Hom}_R(C,\ )$, para algum R-módulo C, então definimos $R^nT = \operatorname{Ext}^n_R(C,\ )$. Em particular,*

$$\operatorname{Ext}^n_R(C, A) = H^n\left(\operatorname{Hom}_R(C, \mathcal{E}_A)\right) = \ker d^n_* / \operatorname{im} d^{n-1}_*,$$

onde $\mathcal{E} : 0 \to A \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots$ é uma resolução injetiva do R-módulo A.

Se T é *contravariante*, então seus **funtores derivados à direita** são

$$(R^nT)\,C = H^n\left(T\mathcal{P}_C\right) = \ker Td_{n+1} / \operatorname{im} Td_n,$$

onde $\mathcal{P} : \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to C \to 0$ é uma resolução projetiva do R-módulo C, e a ação de R^nT em cada R-homomorfismo $f : C \to C'$ é dada por:

Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são resoluções projetivas de C e C', respetivamente, pelo Teorema de Comparação (teorema 2.2.1), existe $\overline{f} : \mathcal{P}_C \to \mathcal{P}'_{C'}$ aplicação de cadeias, que faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathcal{P}: & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_0} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} & & \\
\mathcal{P}': & \cdots & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow[d'_1]{} & P'_0 & \xrightarrow[\epsilon']{} & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Como T é contravariante, $T\overline{f}_n : TP'_n \to TP_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Defina então $(R^nT)\,f : (R^nT)\,C' \to (R^nT)\,C$, i.e. $(R^nT)\,f : \ker Td'_{n+1} / \operatorname{im} Td'_n \to \ker Td_{n+1} / \operatorname{im} Td_n$ por $(R^nT)\,f = \left(T\overline{f}\right)_*$, i.e. se $z'_n \in \ker Td'_{n+1} \subseteq TP'_n$, então

$$(R^nT)\,f : z'_n + \operatorname{im} Td'_n \longmapsto \left(T\overline{f}_n\right) z'_n + \operatorname{im} Td_n.$$

Se T é um funtor contravariante aditivo, cada R^nT é um funtor contravariante aditivo e sua definição é independente da escolha da resolução projetiva.

Funtores derivados de um funtor contravariante são chamados de funtores cohomológicos.

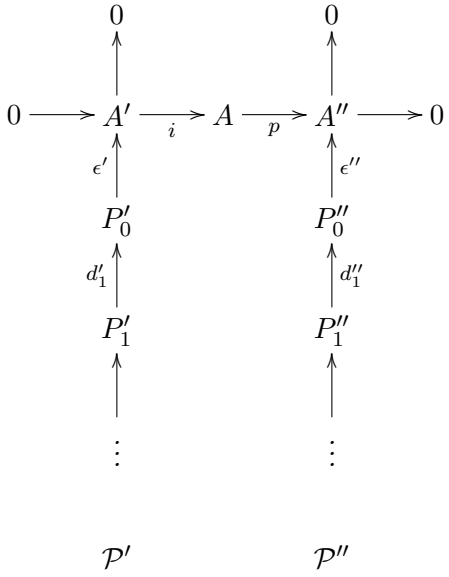
Definição 2.2.5 *Se* $T = \mathrm{Hom}_R(\ , A)$*, para algum* R*-módulo* A*, então definimos* $R^nT = \mathrm{ext}^n_R(\ , A)$*. Em particular,*

$$\mathrm{ext}^n_R(C, A) = H^n\left(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}_C, A)\right) = \ker d_{n+1*}/\operatorname{im} d_{n*},$$

onde $\mathcal{P} : \cdots \to P_2 \overset{d_2}{\to} P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \to C \to 0$ *é a resolução projetiva de* C *escolhida.*

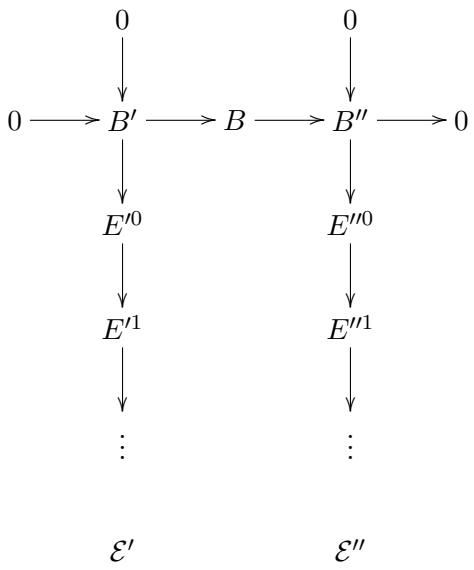
O teorema 7.8 de [R, pág. 196], mostra que o valor de $\mathrm{Ext}^n_R(C,\ )$ em A é o mesmo valor de $\mathrm{ext}^n_R(\ , A)$ em $\dot{C}$, ou seja $H^n\left(\mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{P}_C, A\right)\right) \simeq H^n\left(\mathrm{Hom}_R\left(C, \mathcal{E}_A\right)\right)$ para $\mathcal{P}$ uma resolução projetiva de C e $\mathcal{E}$ uma resolução injetiva de A. Por isso, de agora em diante, abusaremos da notação e denotaremos por Ext a ambos os funtores.

Lema 2.2.6 ([R, Lema da Ferradura, pág. 187]) *Considere o diagrama*



onde as colunas são resoluções projetivas e a linha é exata. Então existe uma resolução projetiva de A *e aplicações de cadeias, tal que as colunas formam uma sequência exata de complexos, i.e. existe* $\mathcal{P}$ *resolução projetiva de* A *e aplicações de cadeias tal que* $0 \to \mathcal{P}' \to \mathcal{P} \to \mathcal{P}'' \to 0$ *é sequência exata curta de complexos.*

O teorema dual também é verdadeiro: considere o diagrama



onde as colunas são resoluções injetivas e a linha é exata. Então existe $\mathcal{E}$ resolução injetiva de B tal que $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ é sequência exata curta de complexos. A prova é similar e pode ser encontrada em [V, Proposição 5.3.12].

Teorema 2.2.7 ([R, Teorema 6.21, pág. 188]) *Seja* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *sequência exata curta de R-módulos. Se* T *é um funtor covariante aditivo, então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \to L_{n+1}T\left(A''\right) \to L_nT\left(A'\right) \to L_nT\left(A\right) \to L_nT\left(A''\right) \xrightarrow{\partial} L_{n-1}T\left(A'\right) \to$$

$$\cdots \to L_0T\left(A'\right) \to L_0T\left(A\right) \to L_0T\left(A''\right) \to 0.$$

Aqui ∂ *é homomorfismo de conexão.*

Do teorema se conclui que para qualquer funtor covariante aditivo T, o funtor derivado L_0T é exato a direita.

Teorema 2.2.8 ([R, Teorema 6.26, pág. 192-193]) *Se* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *é uma sequência exata curta de R-módulos e* T *é um funtor covariante aditivo, então existe uma sequência exata longa*

$$0 \to R^0TA' \to R^0TA \to R^0TA'' \to \cdots$$

$$\cdots \to R^nTA' \to R^nTA \to R^nTA'' \xrightarrow{\partial} R^{n+1}TA' \to \cdots$$

com homomorfismo de conexão natural ∂.

Do teorema se conclui que para qualquer funtor covariante aditivo T, o funtor derivado R^0T é exato à esquerda.

Teorema 2.2.9 ([R, Teorema 6.27, pág. 193]) *Se* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *é uma sequência exata curta de* R*-módulos e* T *é um funtor contravariante aditivo, então existe uma sequência exata longa*

$$0 \to R^0TA'' \to R^0TA \to R^0TA' \to \cdots$$

$$\cdots \to R^nTA'' \to R^nTA \to R^nTA' \xrightarrow{\partial} R^{n+1}TA'' \to \cdots$$

com homomorfismo de conexão natural ∂*.*

Um corolário do teorema anterior é que para qualquer funtor contravariante aditivo T, o funtor derivado R^0T é exato à esquerda.

2.2.1 Ext

Apresentaremos nesta seção algumas propriedades básicas do funtor Ext.

Propriedade 2.2.10 ([R, Teorema 7.1, pág. 194]) *Se* n *é negativo, então* $\operatorname{Ext}^n_R(A, B) = 0$ *para quaisquer módulos* A *e* B*.*

Propriedade 2.2.11 ([R, Teoremas 7.2 e 7.4, págs. 194-195]) *O funtor* $\operatorname{Ext}^0_R(A, \ )$ *é naturalmente equivalente a* $\operatorname{Hom}_R(A, \ )$ *e o funtor* $\operatorname{Ext}^0_R(\ , B)$ *é naturalmente equivalente a* $\operatorname{Hom}_R(\ , B)$*.*

De modo geral temos que para qualquer funtor exato à esquerda T, R^0T é naturalmente equivalente a T.

Teorema 2.2.12 ([R, Teorema 7.3, pág. 195]) *Se* $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ *é uma sequência exata curta, então existe uma sequência exata longa com homomorfismos de conexão naturais*

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(A, B') \to \operatorname{Hom}_R(A, B) \to \operatorname{Hom}_R(A, B'') \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}^1_R(A, B') \to \cdots.$$

Demonstração: É um caso particular do teorema 2.2.8. ∎

Teorema 2.2.13 ([R, Teorema 7.5, pág. 195]) *Se* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *é uma sequência exata curta, então existe uma sequência exata longa com homomorfismos de conexão naturais*

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(A'', B) \to \operatorname{Hom}_R(A, B) \to \operatorname{Hom}_R(A', B) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}^1_R(A'', B) \to \cdots.$$

Demonstração: É um caso particular do teorema 2.2.9. ∎

Propriedade 2.2.14 ([R, Teoremas 7.6 e 7.7, págs. 195-196]) *Se A for R-módulo projetivo ou B for R-módulo injetivo então $\operatorname{Ext}_R^n(A,B)=0$ para cada $n\geq 1$.*

Demonstração: Segue direto da definição de Ext e ext e do fato que Ext = ext. ∎

Propriedade 2.2.15 ([R, Corolário 7.12, pág. 199]) *Se $\operatorname{Ext}_R^1(A,B)=0$ para todo B, então A é projetivo; se $\operatorname{Ext}_R^1(A,B)=0$ para todo A, então B é injetivo.*

A próxima propriedade mostra que Ext se comporta como Hom respeito de somas e produtos diretos.

Propriedade 2.2.16 ([R, Teoremas 7.13 e 7.14, pags. 199-200])

1. *Para todo n, $\operatorname{Ext}_R^n(\oplus A_k,B)\simeq \Pi \operatorname{Ext}_R^n(A_k,B)$.*
2. *Para todo n, $\operatorname{Ext}_R^n(A,\Pi B_k)\simeq \Pi \operatorname{Ext}_R^n(A,B_k)$.*

Exemplos 2.2.17

1. *Seja B um grupo abeliano, vamos calcular $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},B)$. Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}$-módulos do exemplo 1.4.2: $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\boldsymbol{m}}\mathbb{Z}\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\to 0$.*

   Pelo teorema 2.2.13 existe sequência exata longa em Ext*:*

$$\begin{aligned}0\to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},B)\xrightarrow{\pi^*}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)\xrightarrow{\boldsymbol{m}^*}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)\xrightarrow{\partial^*}\\ \to \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},B)\to \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z},B)\to\cdots.\end{aligned}$$

   Como $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre, então é projetivo e pela propriedade 2.2.14 $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z},B)=0$, logo ∂^* é epimorfismo. Pelo resultado (1.1) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)\simeq B$. Vejamos que $\boldsymbol{m}^*$ continua sendo multiplicação por m: $\boldsymbol{m}^*(f)=f\boldsymbol{m}$, seja $f(1)=b$ então

$$\boldsymbol{m}^*(b)=\boldsymbol{m}^*(f(1))=f\boldsymbol{m}(1)=f(m)=mf(1)=mb.$$

   Com isto a sequência exata fica

$$0\to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},B)\xrightarrow{\pi^*}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)\xrightarrow{\boldsymbol{m}^*}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)\xrightarrow{\partial^*}\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},B)\to 0.$$

   Logo $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},B)=\operatorname{Im}\partial^*=\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)/\ker\partial^*=B/\operatorname{im}\boldsymbol{m}^*=B/mB$.

2. *Se A e B são grupos abelianos arbitrários, então* $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ *para todo* $n \geq 2$. *Como todo grupo abeliano é quociente de um grupo abeliano livre, (veja [R2, Corolário 9.19, pág. 188]), existem F um grupo abeliano livre e $g : F \twoheadrightarrow A$, um epimorfismo. A definição de grupo livre será dada na seção 2.3.3.*

   Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}$-módulos $0 \to K = \ker(g) \hookrightarrow F \overset{g}{\twoheadrightarrow} A \to 0$, *então existe sequência exata longa em* Ext *(teorema 2.2.13):*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K,B) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,B) \to$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(F,B) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(K,B) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(A,B) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(F,B) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(K,B) \to \cdots.$$

   Como F é livre, pela propriedade 2.2.14, $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(F,B) = 0$, *para* $n \geq 1$, *e como K é subgrupo de um grupo abeliano livre, então K é grupo abeliano livre, logo* $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(K,B) = 0$ *para* $n \geq 1$. *Assim temos* $\cdots \to 0 \to \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) \to 0 \to \cdots$, *logo* $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ *para todo* $n \geq 2$.

∎

2.2.2 Tor

Apresentaremos nesta seção algumas propriedades básicas do funtor Tor.

Propriedade 2.2.18 ([R, Teorema 8.1, pág. 220]) *Se n é um inteiro negativo, então* $\mathrm{Tor}^R_n(A,B) = 0$ *para quaisquer módulos A e B.*

Propriedade 2.2.19 ([R, Teorema 8.2, pág.220]) *O $\mathbb{Z}$-módulo* $\mathrm{Tor}^R_0(A,B)$ *é naturalmente equivalente a* $A \otimes_R B$.

De modo geral temos que: se T é qualquer funtor aditivo exato à direita, então $L_0T \simeq T$.

Teorema 2.2.20 ([R, Teorema 8.3, pág. 221]) *Se* $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ *é uma sequência exata curta de R-módulos, então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_1\left(A, B''\right) \to A \otimes_R B' \to A \otimes_R B \to A \otimes_R B'' \to 0$$

com homomorfismos de conexão naturais. De modo análogo existe sequência longa exata na outra variável.

Demonstração: É um caso particular do teorema 2.2.7. ∎

Propriedade 2.2.21 ([R, Teorema 8.4, pág. 221]) *Se P é um R-módulo projetivo, então* $\mathrm{Tor}^R_n(P,B) = 0$ *para todo B e todo* $n \geq 1$*; similarmente na outra variável.*

Demonstração: Segue direto da definição de Tor e tor e do fato que Tor = tor. ∎

Propriedade 2.2.22 ([R, Teorema 8.7, pág. 222]) *Se F é plano, então $\mathrm{Tor}_n^R(F,B)=0$ para todo B e todo $n\geq 1$; similarmente na outra variável.*

Demonstração: Segue direto do fato que $F\otimes_R$ é funtor exato se F for plano. ∎

Propriedade 2.2.23 ([R, Teorema 8.9, pág. 222-223]) *Se $\mathrm{Tor}_1^R(F,B)=0$ para todo B, então F é um R-módulo plano; similarmente na outra variável.*

Seja R^{op} o anel oposto de R, então para todo $n\geq 0$ e quaisquer R-módulos A e B, $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\simeq \mathrm{Tor}_n^{R^{\mathrm{op}}}(B,A)$ (veja [R, Teorema 8.5, pág. 221]), por isso, de agora em diante vamos supor todos os resultados válidos na outra variável.

A próxima propriedade mostra que Tor se comporta como $\otimes$ respeito de somas diretas.

Propriedade 2.2.24 ([R, Teorema 8.10, pág. 223]) *Para todo $n\geq 0$ temos que:*

$$\mathrm{Tor}_n^R(\oplus_k A_k,B)\simeq \oplus_k \mathrm{Tor}_n^R(A_k,B)\,.$$

Propriedade 2.2.25 ([R, Teorema 8.11, pág. 223]) *Se o conjunto de índices for dirigido, então*

$$\mathrm{Tor}_n^R\left(\varinjlim A_k,B\right)\simeq \varinjlim \mathrm{Tor}_n^R(A_k,B)\,,$$

para todo $n\geq 0$.

Exemplos 2.2.26

1. *Vamos calcular $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},B)$, para qualquer $\mathbb{Z}$-módulo B. Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}$-módulos: $0\to n\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{Z}\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to 0$, onde α é a aplicação inclusão e π é a projeção canônica. Então, pelo teorema 2.2.20, existe sequência exata longa em* Tor*:*

$$\cdots\to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)\to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},B)\to (n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} B\xrightarrow{\alpha\otimes \mathrm{id}_B}\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} B\to(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} B\to 0. \tag{2.1}$$

   Como $\mathbb{Z}$ é projetivo, pela propriedade 2.2.21, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B)=0$, por outro lado $n\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}$ com isomorfismo $nz\longmapsto z$ e pelo teorema 1.3.4 $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} B\simeq B$, com isomorfismo $\gamma: z\otimes b\longmapsto zb$. Logo $(n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} B\simeq\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} B\simeq B$, com isomorfismo $\beta: b\mapsto n\otimes b$. Assim temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}(n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} B & \xrightarrow{\alpha\otimes \mathrm{id}_B} & \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} B\\ \uparrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma}\\ B & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & B\end{array}$$

onde $\mu : B \to B$ *é dada pela composição* $\mu = \gamma \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_B) \circ \beta$, *levando*

$$b \longmapsto \gamma \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_B) \circ \beta(b) = \gamma \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_B)(n \otimes b) = \gamma(n \otimes b) = nb.$$

Logo a sequência (2.1) fica:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \overset{\theta}{\hookrightarrow} (n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} B \overset{\alpha\otimes\mathrm{id}_B}{\to} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} B \to 0,$$

o que implica

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \simeq \mathrm{im}\,\theta \simeq \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}_B) \simeq \ker \mu = \{b \in B : nb = 0\}.$$

Podemos generalizar este fato para qualquer domínio de integridade D*:*

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(D/nD, B) = \{b \in B : nb = 0\},$$

veja [V, proposição 6.3.11].

2. *Se* A *e* B *são grupos abelianos arbitrários, então* $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$, *para todo* $n \geq 2$. *Analogamente ao exemplo 2.2.17 (*2*), existem* F *um grupo abeliano livre e* $g : F \twoheadrightarrow A$, *um epimorfismo.*

   Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}$*-módulos* $0 \to K = \ker g \hookrightarrow F \overset{g}{\twoheadrightarrow} A \to 0$, *então existe sequência exata longa em* Tor *(teorema 2.2.20):*

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}}(F, B) \to \mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}}(A, B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K, B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F, B) \\ \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \to K \otimes_{\mathbb{Z}} B \to F \otimes_{\mathbb{Z}} B \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to 0. \end{aligned}$$

   Como F *é livre, pela propriedade 2.2.21* $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(F, B) = 0$, *para* $n \geq 1$, *e como* K *é um subgrupo de um grupo abeliano livre então* K *é grupo abeliano livre, logo* $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(K, B) = 0$, *para* $n \geq 1$. *Assim temos a sequencia exata longa*

$$\cdots \to 0 \to \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) \to 0 \to \cdots, \text{ para } n \geq 2.$$

   Logo $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ *para todo* $n \geq 2$.

∎

No que segue nesta seção D denotará um domínio, Q seu corpo quociente e K denotará o módulo $K = Q/D$.

Definição 2.2.27 *O* ***submódulo de torção*** $\mathrm{t}\,A$ *de um* D*-módulo* A *é definido por*

$$\mathrm{t}\,A = \{a \in A : da = 0 \text{ para algum } d \in D \text{ não nulo}\}.$$

Observe que t A é realmente um submódulo de A: sejam a_1, $a_2 \in tA$, então existem $d_1 \neq 0$ e $d_2 \neq 0$ tal que $d_1 a_1 = 0$ e $d_2 a_2 = 0$, logo

$$d_1 d_2 (a_1 + a_2) = d_1 d_2 a_1 + d_1 d_2 a_2 = d_2 d_1 a_1 + d_1 d_2 a_2 = d_2 0 + d_1 0 = 0$$

e $d_1 d_2 \neq 0$ pois D é domínio, então $a_1 + a_2 \in \mathrm{t}\, A$. É claro que $-a_1 \in \mathrm{t}\, A$ e $da_1 \in \mathrm{t}\, A$ para todo $d \in D$, pois D é comutativo.

Desta demonstração vemos que t A poderia não ser um módulo se D não for um domínio.

Definição 2.2.28 *Dizemos que um* ***D-módulo*** A *é* ***de torção*** *se* $\mathrm{t}\, A = A$ *e, pelo contrário, dizemos que um* D*-módulo* A *é* ***livre de torção*** *se* $\mathrm{t}\, A = 0$.

Observação 2.2.29 *O módulo* $A/\mathrm{t}\, A$ *é sempre um módulo livre de torção, pois seja* $\bar{a} \in \mathrm{t}\,(A/\mathrm{t}\, A)$*, então existe* $d \in D\backslash 0$ *tal que* $d\bar{a} = \bar{0}$*. Então* $da \in \mathrm{t}\, A$*, logo existe* $d_1 \in D\backslash 0$ *tal que* $d_1 da = 0$*, ou seja existe* $d_1 d \in D\backslash 0$*, tal que* $d_1 da = 0$*, logo* $a \in \mathrm{t}\, A$*, portanto* $\bar{a} = \bar{0}$.

Lema 2.2.30 ([R, Teorema 8.14, pág. 224]) *Para cada* D*-módulo de torção* A*, existe um isomorfismo natural* $\mathrm{Tor}_1^D(K, A) \simeq A$.

Lema 2.2.31 ([R, Teorema 8.15, pág. 224-225]) *Para todo* D*-módulo* A *e todo* $n \geq 2$*,* $\mathrm{Tor}_n^D(K, A) = 0$.

Lema 2.2.32 ([R, Teorema 8.16, pág. 225]) *Se* A *é um* D*-módulo livre de torção, então* $\mathrm{Tor}_1^D(K, A) = 0$.

O submódulo de torção define um funtor: seja f um homomorfismo de D-módulos $f : A \to B$, então definimos o funtor $\mathrm{t}\, f = f\,|_{\mathrm{t}\, A}$. Isto é uma razão para explicar o nome Tor que vem de torção, pois o funtor t é naturalmente isomorfo a $\mathrm{Tor}_1^D(K,)$, veja ([R, teorema 8.17, pág. 225]). Outra razão que explica o nome Tor é que $\mathrm{Tor}_n^D(A, B)$ é sempre um $\mathbb{Z}$-módulo de torção para todo A, B e $n \geq 1$, ([R, Teorema 8.21, pág. 226]).

Teorema 2.2.33 ([R, Corolário 8.18, pág. 225]) *Para todo* D*-módulo* A*, existe uma sequência exata*

$$0 \to \mathrm{t}\, A \to A \to Q \otimes_D A \to K \otimes_D A \to 0.$$

Demonstração: Segue direto da existência de sequência exata longa em Tor para a sequência exata curta $0 \to D \to Q \to K \to 0$. ∎

Teorema 2.2.34 ([R, Corolário 8.19, pág. 225]) *Um* D*-módulo* A *é de torção se e somente se* $Q \otimes_D A = 0$.

2.3 Homologia e Cohomologia de Grupos

Nesta seção estudamos homologia e cohomologia de grupos e consideramos G como sendo um grupo abstrato, A um $[\mathbb{Z}G]$-módulo à esquerda, onde $[\mathbb{Z}G]$ é o anel de grupo do grupo G sobre $\mathbb{Z}$; e consideraremos $\mathbb{Z}$, os inteiros, como um $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial, i.e. G age trivialmente sobre $\mathbb{Z}$, $gz = z$ para todo $g \in G$ e $z \in \mathbb{Z}$. Para um grupo G descrevemos $H^i(G, A)$ e $H_i(G, A)$, para $i = 0$, 1 e apresentamos a fórmula de Hopf para $H_2(G, \mathbb{Z})$.

Definição 2.3.1 *Seja G um grupo abstrato, A um $[\mathbb{Z}G]$-módulo à esquerda e considere $\mathbb{Z}$ como um $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial, definimos para cada $n \geq 0$*

$$H^n(G, A) = \mathrm{Ext}^n_{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, A)$$
$$H_n(G, A) = \mathrm{Tor}^{[\mathbb{Z}G]}_n(\mathbb{Z}, A).$$

*Os grupos H^n são os **grupos de cohomologia** de G com coeficientes em A e os grupos H_n são os **grupos de homologia** de G com coeficientes em A.*

É claro da definição que $H^n(G, \ )$ e $H_n(G, \ )$ são ambos funtores covariantes aditivos indo de ${}_{[\mathbb{Z}G]}\mathfrak{M}$ a $\mathcal{A}b$.

Observe que se G_1 e G_2 são grupos distintos, então $H^n(G_i, \ )$ e $H_n(G_i, \ )$ $i = 1, 2$ se aplicam a módulos sobre anéis distintos $[\mathbb{Z}G_1]$ e $[\mathbb{Z}G_2]$.

Se A for $[\mathbb{Z}G]$-módulo à direita, então $H_n(G, A) = \mathrm{Tor}^{[\mathbb{Z}G]}_n(A, \mathbb{Z})$, com $\mathbb{Z}$ considerado como um $[\mathbb{Z}G]$-módulo à esquerda trivial, e $H^n(G, A) = \mathrm{Ext}^n_{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, A)$ com $\mathbb{Z}$ considerado como um $[\mathbb{Z}G]$-módulo à direita trivial.

Definição 2.3.2 *Definimos o **homomorfismo aumento** $\varepsilon : [\mathbb{Z}G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ como a aplicação que leva $\Sigma z_g g \longmapsto \Sigma z_g$. Seu kernel $I = \{\Sigma z_g g \in [\mathbb{Z}G] : \Sigma z_g = 0\}$ é chamado de **ideal aumentado** de $[\mathbb{Z}G]$.*

Lema 2.3.3 *Seja I o ideal aumentado de $[\mathbb{Z}G]$, então*

$$H_0(G, A) = \mathrm{Tor}^{[\mathbb{Z}G]}_0(\mathbb{Z}, A) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A \simeq A/IA.$$

Demonstração: Considere a sequência exata curta de $[\mathbb{Z}G]$-módulos

$$0 \to I \overset{i}{\hookrightarrow} [\mathbb{Z}G] \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z} \to 0.$$

Como $\otimes_{[\mathbb{Z}G]}A$ é funtor exato à direita temos a seguinte sequência exata

$$I \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A \overset{\alpha}{\to} [\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A \to 0. \tag{2.2}$$

Como β é epimorfismo, pelo teorema de isomorfismos temos

$$\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A \simeq \frac{[\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A}{\ker \beta} \simeq \frac{A}{\operatorname{im} \alpha},$$

onde o último isomorfismo se justifica pela exatidão da sequência (2.2) e pelo teorema 1.3.4. Mas $\operatorname{im} \alpha = IA$, pois se $\lambda \in I$ e $a \in A$

$$\alpha(\lambda \otimes a) = i(\lambda) \otimes a \in [\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A \simeq A,$$

logo $\alpha(\lambda \otimes a) = \lambda a$, logo $\operatorname{im} \alpha$ é o $\mathbb{Z}$-módulo gerado por λa com $\lambda \in I$ e $a \in A$.

Portanto $\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} A \simeq A/\operatorname{im} \alpha \simeq A/IA$. ∎

Em particular se A é um $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial, então $IA = 0$ e $H_0(G, A) = A$.

Teorema 2.3.4 ([R, Teorema 10.1, pág. 266]) *Se I é o ideal aumentado de $[\mathbb{Z}G]$, então $H_1(G, \mathbb{Z}) = I/I^2$, onde $\mathbb{Z}$ é o $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial.*

Teorema 2.3.5 ([R, Teorema 10.2, pág. 266]) *Para qualquer grupo G, o grupo aditivo I/I^2 é isomorfo ao grupo multiplicativo $G/[G, G]$, onde $[G, G]$ denota o subgrupo comutador de G, $[G, G] = \langle ghg^{-1}h^{-1}$, para todos g, $h \in G\rangle$. Logo $H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq G/[G, G]$.*

Se G é um grupo, veremos na seção 2.3.3 que existem F um grupo livre, e um epimorfismo $\pi : F \to \dot{G}$, tal que para $R = \ker \pi$, $F/R \simeq G$.

Definimos $[F, R]$ como o subgrupo de F gerado por todos os comutadores $[f, r] = frf^{-1}r^{-1}$, onde $f \in F$ e $r \in R$. Com esta notação podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.3.6 ([R, Fórmula de Hopf, pág. 274]) *Para qualquer grupo G,*

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \simeq \frac{(R \cap F')}{[F, R]}.$$

Observe que $(R \cap F') / [F, R]$ depende só do grupo G e não da escolha de F e R.

Propriedade 2.3.7 *Homologia comuta com soma direta, $H_n(G, \oplus_i A_i) \simeq \oplus_i H_n(G, A_i)$.*

Demonstração: Pela proriedade 2.2.24, Tor comuta com soma direta. ∎

Lema 2.3.8 *O grupo de cohomologia para $n = 0$ é*

$$H^0(G, A) = \operatorname{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, A) = A^G = \{a \in A : ga = a \ \forall \ g \in G\}.$$

Demonstração: O homomorfismo $\theta : \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, A) \to A^G$ definido por $f \longmapsto f(1)$ é claramente um isomorfismo. Observe que se $g \in G$ então

$$f((g-1)1) = (g-1)f(1) = gf(1) - f(1),$$

e por outro lado

$$f((g-1)1) = f(0) = 0, \text{ pois } G \text{ age trivialmente em } \mathbb{Z}.$$

Logo $gf(1) = f(1) \forall g \in G$ e portanto $f(1) \in A^G$. ∎

No caso em que A seja um $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial, $H^0(G, A) = A = H_0(G, A)$.

Definição 2.3.9 *A **derivação** é uma função $\varphi : G \to A$ que satisfaz $\varphi(g_1 g_2) = g_1 \varphi(g_2) + \varphi(g_1)$.*

O conjunto de todas as derivações $\mathrm{Der}(G, A) = \{\varphi : G \to A \text{ tal que } \varphi \text{ é derivação}\}$ é um grupo abeliano com elemento neutro a aplicação 0 e inversa de φ é $-\varphi$.

Definição 2.3.10 *Uma **derivação principal** é uma função $f : G \to A$ que satisfaz $f(g) = (g-1)a_0$ onde $a_0 \in A$ é fixo.*

O conjunto de todas as derivações principais

$$\mathrm{PDer}(G, A) = \{f : G \to A \text{ tal que existe } a_0 \in A : f(g) = (g-1)a_0\}$$

é um subgrupo abeliano de $\mathrm{Der}(G, A)$:

1. $\mathrm{PDer}(G, A) \subseteq \mathrm{Der}(G, A)$, pois seja $\varphi \in \mathrm{PDer}(G, A)$, então $\varphi(g_1 g_2) = (g_1 g_2 - 1)a_0$, por outro lado

$$\begin{aligned} g_1 \varphi(g_2) + \varphi(g_1) &= g_1(g_2 - 1)a_0 + (g_1 - 1)a_0 \\ &= (g_1 g_2 - g_1 + g_1 - 1)a_0 = (g_1 g_2 - 1)a_0, \end{aligned}$$

   logo $\varphi(g_1 g_2) = g_1 \varphi(g_2) + \varphi(g_1)$, portanto $\varphi \in \mathrm{Der}(G, A)$.

2. Sejam φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{PDer}(G, A)$, então $\varphi_1(g) = (g-1)a_1$ e $\varphi_2(g) = (g-1)a_2$, logo

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(g) = (g-1)(a_1 + a_2),$$

   para todo $g \in G$, e $a_1 + a_2 \in A$, portanto $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathrm{PDer}(G, A)$.

3. Se $\varphi \in \mathrm{PDer}(G, A)$, então sua inversa $-\varphi(g) = (g-1)(-a_0) \in \mathrm{PDer}(G, A)$.

Teorema 2.3.11 ([R, pág. 280]) *O grupo de cohomologia para $n = 1$ é*

$$H^1(G, A) \simeq \frac{\mathrm{Der}(G, A)}{\mathrm{PDer}(G, A)}.$$

No caso em que A seja um $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial, $\mathrm{PDer}(G, A) = 0$ e toda derivação é um homomorfismo. Logo teríamos $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A)$.

Propriedade 2.3.12 *Cohomologia comuta com produto direto, $H^n(G, \Pi_i A_i) \simeq \Pi_i H^n(G, A_i)$.*

Demonstração: Pela propriedade 2.2.16 (2), Ext comuta com produto direto na segunda variável. ∎

Teorema 2.3.13 (Lema de Shapiro) *Seja G um grupo, S um subgrupo de G e B um $[\mathbb{Z}S]$-módulo, então para todo $n \geq 0$*

1. $H_n(S, B) \simeq H_n\left(G, [\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}S]} B\right)$;
2. $H^n(S, B) \simeq H^n\left(G, \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}S]}([\mathbb{Z}G], B)\right)$.

A prova do teorema pode ser encontrada em [V, Proposição 12.1.3].

Note que se B é um $[\mathbb{Z}S]$-módulo, e se definimos, para cada $x, y \in G$, $b \in B$, $x \otimes b \in [\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}S]} B$ e $f \in \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}S]}([\mathbb{Z}G], B)$:

$$y(x \otimes b) = (yx) \otimes b,$$
$$(yf)(x) = f(xy).$$

Então com essa ação $[\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}S]} B$ e $\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}S]}([\mathbb{Z}G], B)$ são $[\mathbb{Z}G]$-módulos chamados de $[\mathbb{Z}G]$-módulo S-induzido e $[\mathbb{Z}G]$-módulo S-coinduzido respetivamente.

Definição 2.3.14 *Um $[\mathbb{Z}G]$-módulo A é chamado de um **módulo S-induzido** se existe um $[\mathbb{Z}S]$-módulo X tal que $A = [\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}S]} X$ e é chamado de um **módulo S-coinduzido** se existe um $[\mathbb{Z}S]$-módulo Y tal que $A = \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}S]}([\mathbb{Z}G], Y)$.*

Proposição 2.3.15 ([V, Proposição 12.1.6]) *Seja G um grupo, S um subgrupo de G e B um $[\mathbb{Z}S]$-módulo, se $[G : S] < \infty$ então $[\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}S]} B \simeq \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}S]}([\mathbb{Z}G], B)$.*

2.3.1 Dimensão Cohomológica

Definição 2.3.16 *Seja M um R-módulo e n um inteiro não negativo, então dizemos que a* ***dimensão projetiva*** *de M é menor ou igual a n e o denotamos* $(\operatorname{proj\,dim}_R M) \leq n$, *se M admite uma resolução projetiva:*

$$\mathcal{P} : 0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Lema 2.3.17 ([B, Lema 2.1, pág. 184]) *Seja M um R-módulo e n um inteiro não negativo, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\operatorname{proj\,dim}_R M \leq n$.
2. $\operatorname{Ext}^i_R(M, \ ) = 0$ *para todo* $i \geq n+1$.
3. $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(M, \ ) = 0$
4. *Se* $0 \to K \to P_{n-1} \xrightarrow{\alpha} \cdots \to P_0 \to M \to 0$ *é qualquer sequência exata de R-módulos, com cada P_i projetivo, então K é projetivo.*

Definição 2.3.18 *Seja G um grupo, a definimos a* ***dimensão cohomológica*** *de G como sendo* $\operatorname{proj\,dim}_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}$, *onde $\mathbb{Z}$ é considerado como $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial e a denotaremos* $\operatorname{cd}(G)$.

Corolário 2.3.19 ([B, pág. 185]) *Seja G um grupo então:*

$$\operatorname{cd}(G) = \sup\{n : \exists A \ \ [\mathbb{Z}G]\text{-módulo tal que } H^n(G, A) \neq 0\}.$$

Demonstração: Segue direto do lema 2.3.17. ∎

Proposição 2.3.20 ([B, Proposição 2.3, pág. 186]) *Seja G um grupo, se* $\operatorname{cd}(G) < \infty$, *então* $\operatorname{cd}(G) = \sup\{n : H^n(G, F) \neq 0$ *para algum* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo livre* $F\}$.

Proposição 2.3.21 ([B, Proposição 2.4, pág. 187]) *Seja S um subgrupo de G, então:*

1. $\operatorname{cd}(S) \leq \operatorname{cd}(G)$;
2. *Se* $[G : S] < \infty$ *e* $\operatorname{cd}(G) < \infty$, *então* $\operatorname{cd}(S) = \operatorname{cd}(G)$.

Exemplos 2.3.22

1. *Seja* $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle t \rangle$, $t \neq 1$. *Seja*

$$\mathcal{P} : \cdots \xrightarrow{g} P_3 \xrightarrow{f} P_2 \xrightarrow{g} P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

onde $P_i = [\mathbb{Z}G]$ *para cada* $i \geq 0$, ε *é o homomorfismo aumento,* $f : [\mathbb{Z}G] \to [\mathbb{Z}G]$ *dada por* $a \mapsto (t-1)\,a$ *e* $g : [\mathbb{Z}G] \to [\mathbb{Z}G]$ *dada por* $a \mapsto \left(1 + t + \cdots + t^{n-1}\right) a$, *então* $\mathcal{P}$ *é uma resolução livre do* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo trivial* $\mathbb{Z}$.

Aplicando $\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\ ,\mathbb{Z})$ *obtemos o complexo:*

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{f^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{g^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{f^*} \cdots.$$

Queremos conhecer a ação de f^* *e* g^**:*

(a) *Se* $h \in \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}([\mathbb{Z}G], \mathbb{Z})$ *então* $f^*(h) = h \circ f$. *Aplicando* $f^*(h)$ *em* 1 *temos:*

$$f^*(h)(1) = (h \circ f)(1) = h((t-1)1) = (t-1)\,h(1).$$

Como $t \in G$ *e* $h(1) \in \mathbb{Z}$ *e* G *age como* 1 *em* $\mathbb{Z}$ *temos:*

$$(t-1)\,h(1) = th(1) - h(1) = h(1) - h(1) = 0.$$

Logo $f^* = 0$.

(b) *Se* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}([\mathbb{Z}G], \mathbb{Z})$ *então* $g^*(\alpha) = \alpha \circ g$. *Aplicando* $g^*(\alpha)$ *em* 1 *temos:*

$$g^*(\alpha)(1) = (\alpha \circ g)(1) = \alpha\left(\left(1 + t + \cdots + t^{n-1}\right)1\right) = \left(1 + t + \cdots + t^{n-1}\right)\alpha(1) =$$

$$= \alpha(1) + t\alpha(1) + \cdots + t^{n-1}\alpha(1) = n\alpha(1)$$

pois t *age como* 1. *Logo* g^* *é multiplicação por* n.

Agora

$$H^j(G,\mathbb{Z}) = H^j\left(\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})\right) = \begin{cases} \ker g^*/\operatorname{im} f^* = 0/0 = 0 \text{ se } j \text{ é impar,} \\ \ker f^*/\operatorname{im} g^* = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = G \text{ se } j \text{ é par.} \end{cases}$$

Logo $H^j(G,\mathbb{Z}) \neq 0$ *quando* j *é par, o que implica* $\mathrm{cd}(G) = \infty$.

2. *Seja* G *um grupo finito não trivial então existe* $e \neq g \in G$, *considere o subgrupo cíclico gerado por* g *que também é finito, ou seja* $\langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *para algum* $n \geq 2$. *Então, pelo exemplo anterior,* $\mathrm{cd}(\langle g \rangle) = \infty$ *o que implica pela proposição 2.3.21 (*1*) que* $\mathrm{cd}(G) = \infty$.

3. *O grupo trivial é o único grupo de dimensão cohomológica zero: Seja G um grupo tal que* $\mathrm{cd}(G) = 0$, *então o* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo trivial* $\mathbb{Z}$, *admite resolução projetiva*

$$0 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0,$$

logo $P_0 \simeq \mathbb{Z}$, *ou seja* $\mathbb{Z}$ *é* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo projetivo. Pelo teorema 1.5.18 (4), toda sequência exata curta de* $[\mathbb{Z}G]$*-módulos*

$$0 \to A \to B \to \mathbb{Z} \to 0$$

cinde, em particular a sequência exata curta

$$0 \to \ker \varepsilon \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

onde ε *é o homomorfismo aumento, cinde. Logo existe* $f : \mathbb{Z} \to [\mathbb{Z}G]$ *tal que* $\varepsilon f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. *Considere* $1 \in \mathbb{Z}$ *e seja* $\sum_{g \in G} \lambda_g g = f(1)$, *então para todo* $h \in G$ *tem-se* $h \sum_{g \in G} \lambda_g g = \sum_{g \in G} \lambda_g g$. *Seja* $Y = \{g \in G \mid \lambda_g \neq 0\}$, *então* Y *é finito. Logo existe um monomorfismo*

$$\varphi : G \to \mathrm{Sym}(Y),$$

onde $\mathrm{Sym}(Y) = \{g : Y \to Y \mid g \text{ é bijetiva}\}$ *e* φ *é dada por* $\varphi(h)(y) = hy$. *Observe que se* $y \in Y$ *então* $hy \in Y$ *para todo* $h \in G$ *pois* $\lambda_{hy} = \lambda_y \neq 0$. *Portanto* G *é grupo finito, mas se* G *fosse um grupo finito não trivial, pelo exemplo anterior, teria dimensão cohomológica infinita, logo* G *é o grupo trivial.*

4. *Seja* G *um grupo livre (veja definição na seção 2.3.3) e não trivial, então existe*

$$\mathcal{P} : 0 \to \ker \varepsilon \to [\mathbb{Z}G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

uma resolução livre do $[\mathbb{Z}G]$*-módulo trivial* $\mathbb{Z}$, *logo* $\left(\mathrm{proj\,dim}_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right) \leq 1$, *i.e.* $\mathrm{cd}(G) \leq 1$, *mas como* G *é não trivial,* $\mathrm{cd}\,(G) = 1$. *Aqui o ideal aumentado* $\ker(\varepsilon) = \oplus\,[\mathbb{Z}G]\,(x-1)$ *onde* $x \in X$ *e* X *é uma base de* G *(veja [R, Teorema 10.4, pág. 268]).*

∎

Proposição 2.3.23 *Seja* G *um grupo não trivial tal que* $\mathrm{cd}(G) < \infty$ *então* G *é um grupo livre de torção.*

Demonstração: Seja $e \neq g \in G$, considere $S = \langle g \rangle$ o subgrupo cíclico de G gerado pelo elemento g. Pela proposição 2.3.21 (1) $\mathrm{cd}(S) \leq \mathrm{cd}(G) < \infty$. Logo S não pode ser um grupo cíclico finito, pois pelo exemplo 2.3.22 (1), $\mathrm{cd}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \infty$ para todo $n \geq 2$, portanto S é o grupo cíclico infinito. Isto implica que g tem ordem infinita, portanto G é um grupo livre de torção. ∎

2.3.2 Resoluções de Tipo Finito

Definição 2.3.24 *Uma resolução ou resolução parcial $\mathcal{P}$ é de **tipo finito** se cada P_i é f.g. Um R-módulo M é de **tipo** FP_n $(n \geq 0)$ se existe uma resolução parcial projetiva*

$$P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

*de tipo finito. Dizemos que um R-módulo M é de **tipo** FP_∞ se M é de tipo FP_n para todos os inteiros $n \geq 0$.*

Observação 2.3.25 *Se P é um R-módulo projetivo f.g. então pode ser expressado como somando direto de um R-módulo livre de posto finito. Pois: seja X o conjunto finito que gera P e seja $P \oplus M = \oplus_{j\in J} Re_j$, então para cada $x_i \in X$ existe $J_i \subseteq J$, J_i finito tal que $x_i \in \oplus_{j\in J_i} Re_j$ logo $X \subseteq \oplus_{j\in \overline{J}} Re_j$ com $\overline{J}$ finito, e portanto $P \subseteq \oplus_{j\in\overline{J}} Re_j$. Logo existe um R-módulo projetivo Q tal que $P \oplus Q = \oplus_{j\in\overline{J}} Re_j$.*

Proposição 2.3.26 ([B, Proposição 4.3, pág. 193]) *Seja M um R-módulo e $n \geq 0$ um inteiro. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma resolução parcial livre de R-módulos: $F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ com cada F_i f.g. para todo $i \leq n$.*
2. *M tem tipo FP_n.*
3. *M é f.g. e, para cada resolução projetiva parcial $P_k \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ de tipo finito com $k < n$, $\ker\{P_k \to P_{k-1}\}$ é f.g.*

Teorema 2.3.27 ([B, Teorema 4.8, pág. 196]) *As seguintes condições são equivalentes:*

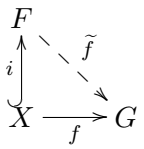
1. *M é de tipo FP_∞.*
2. *$\mathrm{Ext}^i_R(M,)$ comuta com limite direto, se o conjunto de índices for dirigido.*
3. *$\mathrm{Tor}^R_i(M,)$ comuta com produto direto.*

Proposição 2.3.28 ([Bi, Proposição 1.4, pág. 12]) *Seja $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Então*

1. *Se M' é de tipo FP_{n-1} e M é de tipo FP_n, então M'' é de tipo FP_n,*
2. *Se M é de tipo FP_{n-1} e M'' é de tipo FP_n, então M' é de tipo FP_{n-1},*
3. *Se M' e M'' são de tipo FP_n, para algum $n \geq 0$, então M é de tipo FP_n,*
4. *Se M é de tipo FP_∞ e $n \geq 1$, então M'' é de tipo FP_n se e somente se M'é de tipo FP_{n-1}.*

2.3.3 Grupos Livres, Geradores e Relações

Seja X um conjunto e F um grupo contendo X, dizemos que F é **livre** em X se para cada grupo G, cada aplicação de conjuntos $f : X \to G$ tem uma única extensão a um homomorfismo de grupos $\widetilde{f} : F \to G$, i.e. o seguinte diagrama comuta:



Chamamos X de **base** de F.

Uma pergunta natural que surge nesse contexto é se existem grupos livres, a resposta é dada no seguinte teorema:

Teorema 2.3.29 ([R2, Teorema 11.1, pág. 238]) *Se X é um conjunto então existe um grupo F que é livre em X.*

Corolário 2.3.30 ([R2, Corolário 11.2, pág. 240]) *Todo grupo G é um quociente de um grupo livre.*

Definição 2.3.31 *Um grupo G é definido por **geradores** $X = \{x_k : k \in K\}$ e **relações** $\Delta = \{r_j = e : j \in J\}$ no caso em que F é livre em X, R é o subgrupo normal de F gerado por $\{r_j : j \in J\}$, e $G \simeq F/R$. Dizemos que $\langle X \mid \Delta \rangle$ é uma **apresentação** de G.*

Definição 2.3.32 *Um grupo G é **finitamente apresentável** se existe uma apresentação $\langle X \mid \Delta \rangle$ com X e Δ finitos.*

Agora que sabemos sobre a existência de grupos livres, a segunda pergunta que nos fazemos é se dado um conjunto X, o grupo F livre em X é único, a resposta é dada no seguinte teorema,

Teorema 2.3.33 ([R2, Teorema 11.4, pág. 242]) *Sejam X e Y conjuntos não vazios, F livre em X, e G livre em Y. Então $F \simeq G$ se e somente se X e Y tem a mesma cardinalidade.*

Como corolário do teorema temos a resposta da nossa segunda pergunta, dois grupos livres em X são isomorfos.

Corolário 2.3.34 *Se F é livre em X, então F é gerado por X, $F = \langle X \rangle$.*

Demonstração: Segue da definição de grupo livre, pela unicidade de $\widetilde{f}$. ∎

Exemplos 2.3.35

1. *O grupo cíclico de ordem* 6, C_6 *tem geradores* $X = \{x, y\}$ *e relações*

$$\Delta = \left\{x^2 = e,\ y^3 = e,\ x^{-1}y^{-1}xy = e\right\},$$

logo C_6 *é um grupo finitamente apresentável:*

$$C_6 = \left\langle x, y : x^2 = e,\ y^3 = e,\ x^{-1}y^{-1}xy = e\right\rangle.$$

Uma outra apresentação é $C_6 = \left\langle x : x^6 = e\right\rangle$.

2. *O grupo diedral* D_n *admite os seguintes geradores* $X = \{s, t\}$ *e as seguintes relações* $\Delta = \left\{s^n = e,\ t^2 = e,\ tst = s^{-1}\right\}$.

3. *Os quatérnios admitem os seguintes geradores* $X = \{a, b\}$ *e as seguintes relações* $\Delta = \left\{a^4 = e,\ b^2 = a^2,\ b^{-1}ab = a^{-1}\right\}$.

4. *Um grupo livre com base* $X = \{x_k : k \in K\}$ *tem geradores* $X = \{x_k : k \in K\}$ *e não tem relações.*

5. *Um grupo livre em* $X = \emptyset$*, tem um único elemento, o elemento trivial. Um grupo livre em* $X = \{x\}$ *é cíclico infinito.*

∎

2.3.4 Grupos de Tipo FP_n.

Definição 2.3.36 *Um* ***grupo G*** *é* ***de tipo*** $\mathrm{FP}_\mathbf{n}$, $(0 \leq n \leq \infty)$ *se* $\mathbb{Z}$ *é de tipo* $\mathrm{FP}_\mathbf{n}$ *como um* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo, i.e. existe resolução projetiva parcial de* $[\mathbb{Z}G]$*-módulos*

$$P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

com cada P_i *f.g. para* $i \leq n$.

Observe que todo grupo G é de tipo FP_0. Um grupo G é de tipo FP_1 se e somente se G é f.g. como grupo. Todo grupo G finitamente apresentável é de tipo FP_2. A demostração destes fatos pode ser encontrada em [Bi, Proposições 2.1 e 2.2 págs. 19-20].

Proposição 2.3.37 ([B, Proposição 5.1, pág.197]) *Seja* G *um grupo e* S *um subgrupo de* G *de índice finito. Então* G *é de tipo* FP_n *se e somente se* S *é de tipo* FP_n.

Proposição 2.3.38 ([B, Proposição 5.2, pág. 197]) *Seja* G *um grupo de tipo* FP_∞ *e seja* n *um inteiro tal que* $H^n(G, [\mathbb{Z}G]) = 0$. *Então* $H^n(G, F) = 0$ *para todo* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo livre* F.

Exemplos 2.3.39

1. *O grupo trivial tem tipo* FP_∞*, pois existe* $0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to [\mathbb{Z}G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ *resolução livre do* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo trivial* $\mathbb{Z}$*.*

2. *Seja* G *um grupo finito, então* G *tem tipo* FP_∞*. Para vermos isso, seja* $S = \{e\} \leq G$*, então* $[G : S] < \infty$*, e pelo exemplo anterior* S *tem tipo* FP_∞*, então pela proposição 2.3.37,* G *tem tipo* FP_∞*.*

3. *Seja* G *um grupo tal que* $[\mathbb{Z}G]$ *é anel noetheriano à direita e à esquerda, então* G *é* FP_∞*. Para vermos isso, seja* $P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ *uma resolução projetiva parcial de* $\mathbb{Z}$*, com* P_i *f.g. para todo* $i \leq k < n$*, logo* P_k *é* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo f.g. e* $\ker \partial_k \subseteq P_k$*, como* $[\mathbb{Z}G]$ *é anel noetheriano então* $\ker \partial_k$ *é f.g. como* $[\mathbb{Z}G]$*-módulo, logo pela proposição 2.3.26* G *tem tipo* FP_n*. Mas isto vale para cada* $n \geq 0$*, logo* G *tem tipo* FP_∞*.*

∎

Definição 2.3.40 *Uma resolução é dita* ***finita*** *se é de tipo finito e tem comprimento finito. Um grupo* G *é de* ***tipo*** FP *se* $\mathbb{Z}$ *admite uma resolução projetiva finita sobre* $[\mathbb{Z}G]$*.*

Proposição 2.3.41 ([B, Proposição 6.1, pág. 199]) *Um grupo* G *é de tipo* FP *se e somente se*

1. $\mathrm{cd}(G) < \infty$ *e*

2. G *é de tipo* FP_∞*.*

Analogamente à definição de dimensão cohomológica de um grupo G, temos a definição de **dimensão homológica**, que denotaremos por $\mathrm{hd}(G)$ e é dada por

$$\mathrm{hd}(G) = \sup \{n : H_n(G, M) \neq 0 \text{ para algum } [\mathbb{Z}G]\text{-módulo } M\}.$$

Teorema 2.3.42 ([Bi, Teorema 4.6, pág. 60])

1. *Para qualquer grupo* G*,* $\mathrm{hd}(G) \leq \mathrm{cd}(G)$*.*

2. *Se* G *é um grupo de tipo* FP_∞ *então* $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{hd}(G)$*.*

2.4 Grupos Abstratos de Dualidade de Poincaré

Nesta seção estudaremos grupos G que satisfazem $H^i(G, A) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} A)$, onde D é o $[\mathbb{Z}G]$-módulo à direita $H^n(G, [\mathbb{Z}G])$. Estes grupos foram considerados por primeira vez por Bieri e Eckman (1973), que provaram a seguinte caracterização:

Teorema 2.4.1 ([B, Teorema 10.1, pág. 220]) *Seja G um grupo de tipo* FP*, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe um inteiro n e um $[\mathbb{Z}G]$-módulo à direita D tal que $H^i(G, A) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} A)$, para qualquer $[\mathbb{Z}G]$-módulo à esquerda A e para todo i inteiro.*
2. *Existe um inteiro n tal que $H^i(G, [\mathbb{Z}G] \otimes_{\mathbb{Z}} B) = 0$, para todo $i \neq n$ e todo grupo abeliano B.*
3. *Existe um inteiro n tal que $H^i(G, [\mathbb{Z}G]) = 0$ para todo $i \neq n$ e $H^n(G, [\mathbb{Z}G])$ é livre de torção como grupo abeliano.*
4. *Existem isomorfismos naturais $H^i(G, \ ) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} \ )$, onde $D = H^n(G, [\mathbb{Z}G])$ e $n = \mathrm{cd}(G)$. Estes isomorfismos são compatíveis com os homomorfismos de conexão da sequência exata longa em homologia e cohomologia associadas a uma sequência exata pequena de módulos.*

Observação 2.4.2 *$D \otimes_{\mathbb{Z}} A$ é um $[\mathbb{Z}G]$-módulo à esquerda via ação diagonal $g(d \otimes m) = (dg) \otimes (gm)$.*

Definição 2.4.3 *Um grupo G é dito* ***grupo de dualidade*** *se satisfaz o teorema 2.4.1, e o $[\mathbb{Z}G]$-módulo $D = H^n(G, [\mathbb{Z}G])$ é chamado de* ***módulo dualizante*** *de G.*

Originalmente Bieri e Eckman definiram um grupo de dualidade como um grupo G, não necessariamente de tipo FP, tal que existam produtos cap

$$\cap_z : H^i(G, A) \xrightarrow{\simeq} H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} A)$$

para todo i e A, onde n é um inteiro fixo, D um $[\mathbb{Z}G]$-módulo fixo, e z um elemento de $H_n(G, D)$. Mas pode-se provar que as duas definições são equivalentes ([B, pág.222]).

Definição 2.4.4 *Um grupo G é dito* ***grupo de dualidade de Poincaré*** *se seu módulo dualizante D é cíclico infinito como grupo abeliano, $D \simeq \mathbb{Z}$. Neste caso, G é dito* ***orientável*** *se G age trivialmente em D. Em outro caso G é dito* ***não orientável*** *e age em D via multiplicação por ± 1. O inteiro n que oferece o teorema 2.4.1 é chamado de* ***dimensão de Poincaré****.*

Note que se G é um grupo de dualidade de Poincaré orientável então o item (4) do teorema 2.4.1 tem a forma: $H^i(G, A) \simeq H_{n-i}(G, A)$.

Propriedade 2.4.5 ([B, Proposição 10.2, pág. 224]) *Sejam G um grupo livre de torção e S um subgrupo de índice finito. Então G é um grupo de dualidade se e somente se S é um grupo de dualidade. Mais ainda, se G e S são grupos de dualidade então tem o mesmo módulo dualizante, mais precisamente se D é o módulo dualizante para G, então o módulo dualizante para S é isomorfo ao módulo D com ação de S igual à restrição da ação de G a S.*

Proposição 2.4.6 *Seja G um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n finita, então existe um subgrupo $S \leq G$ de índice $[G : S] \leq 2$ tal que S é um grupo de dualidade de Poincaré orientável.*

Demonstração: Como G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n, temos que $H^n(G, [\mathbb{Z}G]) \simeq \mathbb{Z}$ e pela proposição 2.3.23, G é um grupo livre de torção. Se G não for orientável, G age em $\mathbb{Z}$ via multiplicação por ± 1. Logo existe $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$, ação de G em $\mathbb{Z}$ não trivial. Seja $S = \ker \rho \lhd G$, então pelo teorema de isomorfismos $G/S \simeq \{1, -1\}$ logo $[G : S] = 2$. Pela propriedade 2.4.5 S é grupo de dualidade com o mesmo módulo dualizante de G, i.e. $H^n(S, [\mathbb{Z}S]) \simeq H^n(G, [\mathbb{Z}G]) \simeq \mathbb{Z}$, logo S é grupo de dualidade de Poincaré. Mais ainda S age em $H^n(S, [\mathbb{Z}S])$ com a restrição da ação de G, mas G age como 1 no $\ker \rho = S$, logo S age trivialmente em $H^n(S, [\mathbb{Z}S])$. Portanto S é um subgrupo de G de índice 2, de dualidade de Poincaré orientável. ∎

Exemplos 2.4.7

1. *$\mathbb{Z}^n$ é um grupo de dualidade de Poincaré orientável de dimensão n.*
2. *Qualquer grupo f.g. nilpotente e livre de torção é grupo de dualidade de Poincaré orientável.*
3. *O grupo fundamental de uma variedade compacta fechada, n-dimensional é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n.*

∎

2.5 Característica de Euler de Grupos Abstratos

Para qualquer grupo abeliano f.g. B, definimos o **posto** de B por

$$\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(B) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

Se B for livre esta definição coincide com a definição de posto no sentido de cardinalidade de uma base. Em geral, $\text{posto}_{\mathbb{Z}}(B)$ é igual ao posto, no sentido clássico, da "parte livre" de B, i.e. do quociente de B por seu subgrupo de torção. Em particular, $\text{posto}_{\mathbb{Z}}(B) = 0$ se e somente se B é finito.

Na literatura podem ser encontradas diversas definições da característica de Euler de grupos, sob um grande número de diferentes condições de finitude. Para nosso propósito as seguintes condições são as mais convenientes a se impor: G será um grupo abstrato de tipo FP_∞ e $\text{cd}(G) < \infty$.

Definição 2.5.1 ([B, pág. 247]) *Seja G um grupo abstrato de tipo FP_∞ e $\text{cd}(G) < \infty$, definimos então a **característica de Euler** de G, $\chi(G)$, por*

$$\chi(G) = \sum_{0 \leq i \leq \text{cd}(G)} (-1)^i \, \text{posto}_{\mathbb{Z}} \left(H_i \left(G, \mathbb{Z} \right) \right).$$

Observe que $\text{posto}_{\mathbb{Z}} \left(H_i \left(G, \mathbb{Z} \right) \right)$ está bem definido pois $H_i \left(G, \mathbb{Z} \right)$ é grupo abeliano aditivo e f.g:

Seja $\mathcal{P} : 0 \to P_n \to \cdots \to P_i \xrightarrow{d_i} \cdots \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$, com cada P_i f.g. (existe pela proposição 2.3.26), então

$$H_i \left(G, \mathbb{Z} \right) = H_i \left(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) = \frac{\ker(d_i \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}})}{\text{Im}(d_{i+1} \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}})},$$

onde $P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_i \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}}} P_{i-1} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}$. Cada P_i é f.g. como $[\mathbb{Z}G]$-módulo, logo existe um epimorfismo $[\mathbb{Z}G]^k \twoheadrightarrow P_i$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^k &= \oplus_{k \text{ vezes}} \mathbb{Z} = \oplus_{k \text{ vezes}} \left([\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) = \left(\left(\oplus_{k \text{ vezes}} [\mathbb{Z}G] \right) \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) \\ &= \left([\mathbb{Z}G]^k \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) \twoheadrightarrow P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \text{ pois } \otimes \text{ é funtor exato à direita.} \end{aligned}$$

Logo $P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}$ é f.g. como $\mathbb{Z}$-módulo, e cada subgrupo de $P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}$ também é f.g. como $\mathbb{Z}$-módulo, portanto $\ker \left(d_i \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}} \right)$ e $\text{im} \left(d_{i+1} \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}} \right)$ são f.g. como $\mathbb{Z}$-módulos, logo $H_i \left(G, \mathbb{Z} \right)$ é quociente de $\mathbb{Z}$-módulos f.g. então é f.g. como $\mathbb{Z}$-módulo (grupo abeliano).

Segue que $H_i \left(G, \mathbb{Z} \right) = \oplus(\mathbb{Z}\text{-módulos cíclicos}) = \mathbb{Z}^\alpha \oplus T$, onde T é um grupo abeliano finito e $\mathbb{Z}^\alpha$ é a parte livre de torção. Logo temos que $\text{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i \left(G, \mathbb{Z} \right)) = \alpha = \dim_{\mathbb{Q}}(H_i \left(G, \mathbb{Z} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$, onde α é a quantidade de copias de $\mathbb{Z}$.

Exemplos 2.5.2 *Vamos calcular $\chi(\mathbb{Z})$. Seja $G = \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ com $t \neq 1$. Então o kernel do homomorfismo aumento ε, $\ker \varepsilon = [\mathbb{Z}G] \left(t - 1 \right) \simeq [\mathbb{Z}G]$, assim temos que*

$$\mathcal{P} : 0 \to \ker \varepsilon \to [\mathbb{Z}G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

é uma resolução livre do $[\mathbb{Z}G]$*-módulo trivial* $\mathbb{Z}$*, logo* $\mathrm{cd}(\mathbb{Z}) \leq 1$*, mas como* $\mathbb{Z}$ *é não trivial, pelo exemplo 2.3.22 (3)* $\mathrm{cd}(\mathbb{Z}) = 1$*. Por outro lado, pelo teorema 2.3.5* $H_1(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/[\mathbb{Z},\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}$*, logo* $\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(H_1(G,\mathbb{Z})) = 1$ *e pelo lema 2.3.3* $H_0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$*, logo* $\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(H_0(G,\mathbb{Z})) = 1$*. Isto implica que* $\chi(\mathbb{Z}) = 1 - 1 = 0$*.* ∎

Proposição 2.5.3 *Seja* $\mathcal{C} : 0 \to C_n \to \cdots \to C_i \xrightarrow{d_i} \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$ *um complexo finito de* $\mathbb{Z}$*-módulos, então*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_i(\mathcal{C})\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}\left(C_i\right).$$

Demonstração: Considere as sequências exatas curtas, para cada $0 \leq i \leq n$,

$$0 \to \mathrm{im}\, d_{i+1} \to \ker d_i \to H_i(\mathcal{C}) \to 0,$$
$$0 \to \ker d_i \to C_i \to \mathrm{im}\, d_i \to 0.$$

Como $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{Z}$-módulo plano, as seguintes sequências curtas também são exatas:

$$0 \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{im}\, d_{i+1} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \ker d_i \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_i(\mathcal{C}) \to 0$$
$$0 \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \ker d_i \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_i \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{im}\, d_i \to 0.$$

Logo temos que

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \ker d_i \simeq (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{im}\, d_{i+1}) \oplus (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_i(\mathcal{C})) \text{ e}$$
$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_i \simeq (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \ker d_i) \oplus (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{im}\, d_i),$$

o que implica que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \ker d_i) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{im}\, d_{i+1}) + \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_i(\mathcal{C})) \text{ e}$$
$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_i) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \ker d_i) + \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{im}\, d_i),$$

que, por definição, é

$$\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) = \mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{im}\, d_{i+1}) + \mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(\mathcal{C})) \text{ e}$$
$$\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(C_i) = \mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) + \mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{im}\, d_i).$$

Multiplicando cada igualdade por $(-1)^{i+1}$ temos:

$$-(-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) = (-1)^{i+1} \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{im}\, d_{i+1}) - (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(\mathcal{C}))$$
$$-(-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(C_i) = -(-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) - (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{im}\, d_i).$$

Somando em i

$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1} \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{im} d_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(\mathcal{C}))$$
$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(C_i) = -\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{im} d_i).$$

Somando cada lado das igualdades anteriores

$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(C_i) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1} \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{im} d_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(\mathcal{C}))$$
$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\ker d_i) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{im} d_i),$$

o que implica

$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(C_i) = -\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(\mathcal{C})) - \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{im} d_0) + (-1)^{n+1} \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{im} d_{n+1}),$$

mas $\operatorname{im} d_0 = \operatorname{im} d_{n+1} = 0$, portanto

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(C_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(\mathcal{C})).$$

∎

Observação 2.5.4 *A proposição análoga para cohomologia também é verdadeira.*

Como, pela definição de $\chi(G)$

$$\chi(G) = \sum_{0\le i\le \operatorname{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(G,\mathbb{Z}))$$
$$= \sum_{0\le i\le \operatorname{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_i\left(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right)\right)$$

onde $\mathcal{P} : 0 \to P_n \to \cdots \to P_i \xrightarrow{d_i} \cdots \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$, com cada P_i f.g; a proposição anterior nos diz que

$$\chi(G) = \sum_{0\le i\le \operatorname{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}\left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right).$$

Proposição 2.5.5 *Seja G um grupo abstrato de tipo* FP_∞ *e* $\operatorname{cd}(G) < \infty$*, então*

$$\chi(G) = \sum_{0\le i\le \operatorname{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}(H_i(G,\mathbb{Z})) = \sum_{0\le i\le \operatorname{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H^i(G,\mathbb{Z})\right).$$

Demonstração: Seja $\mathcal{P}$ uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{P} : 0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0,$$

onde cada P_i é f.g, e seja $\mathcal{C}$ o complexo de $[\mathbb{Z}G]$-módulos f.g:

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} : 0 \to P_n \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \to \cdots \to P_0 \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \to 0,$$

onde $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ é a resolução apagada de $\mathcal{P}$.

Pela proposição 2.5.3,

$$\chi(G) = \sum_{0 \le i \le \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} (C_i) = \sum_{0 \le i \le \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right).$$

Seja, agora, $\mathcal{S}$ o complexo de $[\mathbb{Z}G]$-módulos f.g:

$$\mathcal{S} = \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) : 0 \to \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_0, \mathbb{Z}) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_n, \mathbb{Z}) \to 0,$$

então

$$\begin{aligned}\sum_{0 \le i \le \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(H^i (G, \mathbb{Z})\right) &= \sum_{0 \le i \le \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(H^i \left(\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})\right)\right) \\ &= \sum_{0 \le i \le \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z})\right),\end{aligned}$$

onde a última igualdade vem da observação 2.5.4.

Vamos provar que

$$\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z})\right) = \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right), \tag{2.3}$$

assim temos que

$$\chi(G) = \sum_{0 \le i \le \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(H^i (G, \mathbb{Z})\right).$$

Suponha que P_i é $[\mathbb{Z}G]$-módulo livre f.g. para cada i, então $P_i = [\mathbb{Z}G]^{m_i}$, para algum $m_i \ge 0$. Logo temos, por um lado

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}([\mathbb{Z}G]^{m_i}, \mathbb{Z}) &= \Pi_{m_i} \left(\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}([\mathbb{Z}G], \mathbb{Z})\right) \text{ pela propriedade 1.5.5 (1),} \\ &= \oplus_{m_i} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{m_i},\end{aligned}$$

pois o produto direto é finito e pelo teorema 1.1. E pelo outro,

$$\begin{aligned}[\mathbb{Z}G]^{m_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} &= \oplus_{m_i} \left([\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right), \text{ pela propriedade 1.5.6 (2)} \\ &= \oplus_{m_i} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{m_i}, \text{ pelo teorema 1.3.4.}\end{aligned}$$

Logo $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z})\right) = m_i = \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right)$.

Suponha agora que P_i é é $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo f.g. para cada i, então pela observação 2.3.25, P_i é somando direto de um $[\mathbb{Z}G]$-módulo livre de posto finito: $P_i \oplus Q_i = [\mathbb{Z}G]^{m_i}$, logo a igualdade 2.3 vale para $P_i \oplus Q_i$:

$$\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i \oplus Q_i, \mathbb{Z})\right) = \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left((P_i \oplus Q_i) \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right), \tag{2.4}$$

mas

$$\begin{aligned}\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i \oplus Q_i, \mathbb{Z})\right) &= \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(Q_i, \mathbb{Z})\right) \\ &= \text{posto}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z})) + \text{posto}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(Q_i, \mathbb{Z})),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left((P_i \oplus Q_i) \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right) &= \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(\left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right) \oplus \left(Q_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right)\right) \\ &= \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right) + \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(Q_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

Sabemos que $P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} = P_i/P_iI$ onde I é o ideal aumentado de $[\mathbb{Z}G]$, pelo lema 2.3.3. Como P_i é f.g. como $[\mathbb{Z}G]$-módulo então P_i/P_iI é f.g. como $\mathbb{Z}$-módulo, logo $P_i/P_iI = \mathbb{Z}^{k_i} \oplus \Gamma$, com Γ finito. Asim,

$$\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right) = \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(P_i/P_iI\right) = k_i. \tag{2.5}$$

Por outro lado

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_i/P_iI, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{k_i}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k_i}, \tag{2.6}$$

pois um elemento de ordem finita vai, por um homomorfismo, para um elemento de ordem finita, mas $\mathbb{Z}$ é livre de torção, logo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$.

Considere agora, $\varphi \in \text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z})$, este homomorfismo induz um outro homomorfismo

$$\widetilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_i/P_iI, \mathbb{Z}) \text{ dado por } \widetilde{\varphi}\left(p + P_iI\right) = \varphi(p).$$

Observe que $\widetilde{\varphi}$ está bem definido pois $\varphi(P_iI) = 0$, já que $\varphi(P_iI) = \varphi(P_i)I$, mas $\varphi(P_i) \subseteq \mathbb{Z}$ e $I = \oplus\,(g-1)\,[\mathbb{Z}G]$ e G age trivialmente em $\mathbb{Z}$, logo $\mathbb{Z}\,(g-1) = 0$ em $\mathbb{Z}$.

Isto define um monomorfismo de grupos abelianos:

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z}) &\to \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_i/P_iI, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k_i}, \text{ por (2.6).} \\ \varphi &\longmapsto \widetilde{\varphi},\end{aligned}$$

o que implica que $\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}^{k_i}$, portanto

$$\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i, \mathbb{Z})\right) \leq k_i = \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right) \text{ por (2.5).} \tag{2.7}$$

O mesmo acontece com o $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo f.g. Q_i:

$$\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(Q_i, \mathbb{Z})\right) \leq \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(Q_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right). \tag{2.8}$$

E, como somando termo a termo (2.7) e (2.8) temos a igualdade (2.4), tem-se:

$$\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(\text{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(P_i,\mathbb{Z})\right) = \text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(P_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}\right).$$

∎

Proposição 2.5.6 *Se G for um grupo orientável de dualidade de Poincaré de dimensão n impar, então $\chi(G) = 0$.*

Demonstração: Como G é grupo de dualidade de Poincaré, então pelo teorema 2.4.1 $H^i(G,\mathbb{Z}) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \simeq H_{n-i}(G,D) \simeq H_{n-i}(G,\mathbb{Z})$.

Pela proposição anterior $\chi(G) = \sum_{0\leq i\leq \text{cd}(G)} (-1)^i \,\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H^i(G,\mathbb{Z})\right)$, logo

$$\begin{aligned}
2\chi(G) &= \sum_{0\leq i\leq \text{cd}(G)} (-1)^i \,\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_i(G,\mathbb{Z})\right) + \sum_{0\leq i\leq \text{cd}(G)} (-1)^i \,\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_{n-i}(G,\mathbb{Z})\right) \\
&= \sum_{0\leq i\leq \text{cd}(G)} (-1)^i \,\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_i(G,\mathbb{Z})\right) + \sum_{0\leq i\leq \text{cd}(G)} (-1)^{n-j} \,\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_j(G,\mathbb{Z})\right) \\
&= \sum_{0\leq i\leq \text{cd}(G)} (-1)^i \,\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_i(G,\mathbb{Z})\right) + \sum_{0\leq i\leq \text{cd}(G)} -(-1)^j \,\text{posto}_{\mathbb{Z}}\left(H_j(G,\mathbb{Z})\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(pois n é ímpar)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\chi(G) \in \mathbb{Z}$, então $\chi(G) = 0$. ∎

Teorema 2.5.7 ([B, Teorema 6.3, pág.248]) *Seja G um grupo abstrato de tipo FP_∞ e $\text{cd}(G) < \infty$ e seja S um subgrupo de G de índice finito, então $\chi(S) = [G:S]\,\chi(G)$.*

Corolário 2.5.8 *Nas condições do teorema anterior, $\chi(S) = 0$ se e somente se $\chi(G) = 0$.*

O seguinte corolário prova que a proposição 2.5.6 continua sendo válida se tiramos a condição de orientabilidade.

Corolário 2.5.9 *Seja G um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n impar, então*

$$\chi(G) = 0.$$

Demonstração: Pela proposição 2.4.6, existe S um subgrupo de G de índice ≤ 2 tal que S é um grupo de dualidade de Poincaré orientável, pela proposição 2.3.21 (2), $\text{cd}(S) = \text{cd}(G) = n$ impar, ou seja S tem dimensão de Poincaré impar, então pela proposição 2.5.6, $\chi(S) = 0$ e pelo corolário anterior $\chi(G) = 0$. ∎

Teorema 2.5.10 ([B, Proposição 7.3, pág. 250]) *Seja G um grupo abstrato de tipo* FP_∞ *e* $\mathrm{cd}(G) < \infty$*, então*

$$\chi(G) = \sum_{0 \leq i \leq \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \, \mathrm{posto}_{\mathbb{F}_p} \left(H_i \left(G, \mathbb{F}_p \right) \right),$$

para qualquer primo p, onde $\mathbb{F}_p$ é o corpo com p elementos.

Capítulo 3

Álgebra Homológica de Módulos Profinitos

Neste capítulo estudamos propriedades homológicas de grupos profinitos, centrando nossa atenção especificamente nos grupos pro-p.

Primeiramente, apresentaremos uma série de definições com o intuito de fixar termos e notações referentes a espaços topológicos, em seguida definiremos um grupo topológico que é basicamente um grupo dotado de uma topologia compatível com as operações de grupo.

Posteriormente, apresentaremos os grupos pro-p que são exemplos de grupos topológicos Hausdorff compactos e totalmente desconexos. Eles são definidos como o limite inverso de algum sistema de p-grupos finitos, i.e. de grupos de ordem potência de p, onde p é um número primo fixo.

A teoria dos grupos pro-p é profundamente marcada pela confluência de duas estruturas, i.e., a estrutura de espaço topológico totalmente desconexo e, em certo modo, a estrutura de grupo finito, uma característica que torna o estudo dos grupos pro-p interessante e rico.

O termo '*grupo profinito*' foi introduzido pelo matemático francês Jean Pierre Serre no final dos anos 50, para abreviar '*limite projetivo de grupos finitos*'. Um limite projetivo é um limite inverso para o qual todos os homomorfismos associados são sobrejetores.

3.1 Preliminares Topológicas

Damos a seguir uma serie de definições relacionadas a espaços topológicas que serão úteis no resto do texto.

Definição 3.1.1 *Um* ***espaço topológico*** *é um conjunto X munido de uma família de subconjuntos, chamados abertos, satisfazendo as seguintes condições:*

i. o conjunto vazio $\emptyset$ e X são conjuntos abertos;

ii. a interseção de quaisquer dois conjuntos abertos é um conjunto aberto;

iii. a união de qualquer coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

A família de conjuntos abertos é chamada de **topologia** em X.

Um subconjunto de X é chamado **fechado** se seu complemento é aberto. Se Y é um subconjunto de X o **fecho** $\overline{Y}$ de Y é a interseção de todos os conjuntos fechados que contém Y. Um subconjunto Y de X é chamado **denso** em X se $\overline{Y} = X$.

Uma **base para uma topologia** τ em X é uma coleção $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \tau$ tal que cada conjunto aberto é uma união de alguns dos conjuntos U_λ.

Uma **vizinhança de um elemento x** de X é qualquer conjunto que contém um conjunto aberto contendo x. Chamamos de **sistema fundamental de vizinhanças** de um ponto x ao conjunto $\mathcal{V}$ de vizinhanças de x tal que para qualquer vizinhança V de x existe uma vizinhança $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subset V$.

Qualquer conjunto X pode ser interpretado como um espaço topológico dotado da topologia na qual cada subconjunto é aberto; essa topologia é chamada de **topologia discreta** em X, e X é chamado de **espaço discreto**.

Se Y é um subconjunto de um espaço X, então a coleção de todos os subconjuntos da forma $Y \cap U$ com U aberto em X é uma topologia em Y chamada de **topologia induzida**; Y é chamado de **subespaço topológico** de X.

Definição 3.1.2 *Um espaço topológico X é chamado de **compacto** se para qualquer família $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abertos cuja união seja X, existe $\{U_{\alpha_1}, \cdots U_{\alpha_n}\}$ uma subfamília finita cuja união é X.*

Definição 3.1.3 *Um espaço X é chamado **Hausdorff** se dados quaisquer dois elementos distintos x, y de X existem vizinhanças abertas U,V de x e de y respectivamente, tal que $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 3.1.4 *O espaço X é chamado **conexo** se não pode ser decomposto como união disjunta de dois subconjuntos abertos não vazios. O espaço X é **totalmente desconexo** se todo subespaço conexo tem no máximo um elemento.*

Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita **contínua** se para cada conjunto aberto U de Y o conjunto $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ é aberto em X. Uma aplicação f é dita **homeomorfismo** se é bijetiva e ambas, f e f^{-1} são contínuas.

Seja ρ uma relação de equivalência num espaço topológico X, e escrevemos X/ρ para o conjunto quociente e q para a aplicação quociente de X em X/ρ que leva cada elemento de X na sua classe de equivalência. A **topologia quociente** em X/ρ é a topologia cujos conjuntos abertos são os subconjuntos V de X/ρ tal que $q^{-1}(V)$ é aberto em X. Logo se X/ρ tem a topologia quociente então a aplicação quociente q é contínua.

O **produto cartesiano** de uma família $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos é o conjunto $C = \Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ cujos elementos são aplicações x indo de Λ em $\cup_\lambda X_\lambda$ com a propriedade que $x(\lambda) \in$

X_λ para cada λ. A **aplicação projeção** π_λ é a aplicação que leva um elemento de C a seu valor em X_λ. Se cada X_λ é um espaço topológico, então a **topologia produto** em C é a topologia cujos conjuntos abertos são todas as uniões de conjuntos da forma $\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_n)$ com n finito, cada λ_i em Λ e U_i aberto em X_{λ_i}. Cada aplicação projeção é contínua e a topologia produto é a menor topologia para a qual cada aplicação projeção é contínua.

3.2 Grupos pro-$\mathcal{C}$

Um grupo topológico é nada mais que a união de duas estruturas matemáticas básicas: um grupo e um espaço topológico.

No estudo de grupos nós estudamos a operação algébrica da multiplicação, do mesmo jeito no estudo de espaços topológicos estudamos a operação de passagem ao limite. Desde que ambas as operações estão entre as mais básicas de toda a matemática, elas são encontradas frequentemente juntas, e o grupo topológico é precisamente a estrutura matemática na qual elas são unificadas e inter-relacionadas.

Além de apresentar a definição formal descrevemos algumas propriedades básicas dos grupos topológicos assim como também exemplos simples.

Nesta seção definimos grupos pro-$\mathcal{C}$, para $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos. Por classe de grupos finitos vamos a entender uma classe no sentido usual à qual adicionamos a propriedade de ser fechado ao respeito de imagens isomorfas, i.e. se $\mathcal{C}$ é uma classe e se $F_1 \in \mathcal{C}$ e $F_2 \simeq F_1$, então $F_2 \in \mathcal{C}$.

A definição de grupos pro-$\mathcal{C}$ envolve limites inversos, até agora só trabalhamos com limites inversos na categoria de R-módulos à esquerda, mas nesta seção consideramos limites inversos na categoria de grupos topológicos, $\boldsymbol{G}$Top, onde objetos são grupos topológicos, morfismo são homomorfismos de grupos contínuos e a composição usual de funções. Estes limites serão sempre calculados sobre conjuntos de índices parcialmente ordenados dirigidos, ou seja o conjunto de índices será quase-ordenado dirigido e a relação binária $\leq$ será anti-simétrica.

Definição 3.2.1 *Um **grupo topológico** G é um grupo cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia compatível com o produto no grupo, no sentido em que*

i. o produto $p : G \times G \to G$, $p(g, h) = gh$, é uma aplicação contínua, quando se considera $G \times G$ como um espaço topológico com a topologia produto e

ii. a aplicação $i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$, é contínua (e, portanto, um homeomorfismo, já que $i^{-1} = i$).

Todo grupo pode ser trivialmente interpretado como um grupo topológico se consideramos nele a topologia discreta, tais grupos são chamados de **grupos discretos**.

Seja G um grupo e suponha que $\mathcal{V}$ é uma família de conjuntos satisfazendo

(a) O elemento neutro pertence a todos os conjuntos $U \in \mathcal{V}$.

(b) Dados dois conjuntos U, V em $\mathcal{V}$, $U \cap V$ está em $\mathcal{V}$.

(c) Para todo $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$.

(d) Dado $U \in \mathcal{V}$, $U^{-1} \in \mathcal{V}$.

(e) Para todo $g \in G$ e $U \in \mathcal{V}$, $gUg^{-1} \in \mathcal{V}$.

Se definimos $\mathcal{T}$ como sendo a família dos subconjuntos $A \subset G$ tais que para todo $g \in A$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $gU \subset A$, então $\mathcal{T}$ é a única topologia que torna G um grupo topológico de tal forma que $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento neutro em relação a $\mathcal{T}$.

Os número reais $\mathbb{R}$ junto com a soma como operação e sua topologia usual formam um grupo topológico. De modo mais geral, o n-espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$ com a soma e a topologia padrão é um grupo topológico, assim como $\mathbb{C}^n$ com a soma e a topologia usual. Também o grupo das matrizes invertíveis com coeficientes em $\mathbb{R}$, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, com o produto matricial e a topologia padrão.

No final desta seção apresentaremos uma família de exemplos de grupos topológicos, os grupos pro-$\mathcal{C}$ dos quais os inteiros p-ádicos são um exemplo de destacada importância.

Teorema 3.2.2 *Seja G um grupo topológico.*

1. *Se H é um subgrupo de G, então H é um grupo topológico se consideramos a topologia induzida.*

2. *Se H é um subgrupo normal de G, então o grupo quociente, G/H é um grupo topológico se considerarmos nele a topologia quociente.*

3. *Se H é um subgrupo de G então o fecho de H é também um subgrupo, do mesmo modo se H é um subgrupo normal de G, o fecho de H é um subgrupo normal de G.*

A prova destes fatos básicos de grupos topológicos pode ser encontrada em [SM, seções 2.4 e 2.5.3].

Lema 3.2.3 ([W, Lema 0.3.1, pág. 6]) *Seja G um grupo topológico.*

1. *Se H é um subgrupo aberto (ou fechado) de G então toda classe Hg ou gH de H em G é aberta (ou fechada).*

2. *Todo subgrupo aberto de G é fechado e todo subgrupo fechado de índice finito é aberto. Se G é compacto então todo subgrupo aberto de G tem índice finito.*

3. *Se H é um subgrupo contendo um subconjunto aberto não vazio U de G então H é aberto em G.*

4. *G é Hausdorff se e somente se $\{1\}$ é um subconjunto fechado de G; e se H é um subgrupo normal de G então G/H é Hausdorff se e somente se H é fechado em G. Se G é totalmente desconexo , então G é Hausdorff.*

Proposição 3.2.4 ([P, Teorema H, pág. 109]) *Seja G um grupo topológico compacto e seja H um subgrupo fechado, então H é compacto com a topologia induzida.*

Para tornar as ideias mais claras, vamos redefinir limite inverso, mas agora o faremos na categoria dos grupos topológicos: definimos um *sistema inverso de grupos topológicos* com conjunto de índices I como o funtor contravariante $G : I \to \boldsymbol{G}\,\mathrm{Top}$, tal que para cada $i \in I$, existe um grupo topológico G_i e, sempre que $i,\ j \in I$ satisfaçam $i \leq j$, existe um homomorfismo de grupos contínuo $\psi_i^j : G_j \to G_i$ tal que:

1. $\psi_i^i : G_i \to G_i$ é a identidade para cada $i \in I$;

2. se $i \leq j \leq k$, existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} G_k & \xrightarrow{\psi_i^k} & G_i \\ {\scriptstyle \psi_j^k}\downarrow & \nearrow_{\psi_i^j} & \\ G_j & & \end{array}$$

Definição 3.2.5 *Um sistema inverso $\left\{G_i, \psi_i^j\right\}$ é chamado de **sistema inverso sobrejetor** se cada homomorfismo de grupos ψ_i^j, com $i \leq j$, é sobrejetor.*

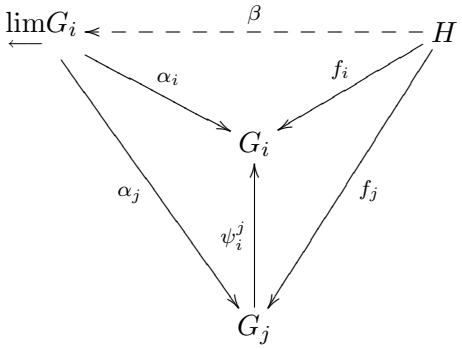
Exemplos 3.2.6 *Seja $I = N$, seja p um primo, e sejam $G_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para cada i, e para cada $j \geq i$ seja $\psi_i^j : G_j \to G_i$ o homomorfismo de grupos contínuo definido por*

$$\psi_i^j(z + p^j\mathbb{Z}) = z + p^i\mathbb{Z}$$

para cada $z \in \mathbb{Z}$. Então $\left\{G_i, \psi_i^j\right\}$ é um sistema inverso de grupos finitos. Este exemplo é também um sistema inverso de anéis finitos. ∎

Seja $\left\{G_i, \psi_i^j\right\}$ um sistema inverso de grupos topológicos sobre o conjunto parcialmente ordenado dirigido I. Um *limite inverso* desse sistema, $\varprojlim G_i$, é um grupo topológico e uma

família de homomorfismos de grupos contínuos $\alpha_i : \varprojlim G_i \to G_i$ com $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$ sempre que $i \leq j$, satisfazendo o seguinte problema universal:



para todo grupo topológico H e homomorfismos de grupos contínuos $f_i : H \to G_i$ com $f_i = \psi_i^j f_j$, sempre que $i \leq j$, existe um único $\beta : H \to \varprojlim G_i$ homomorfismo de grupos contínuo fazendo o diagrama comutativo.

Analogamente ao caso de R-módulos, limites inversos de grupos topológicos existem e são únicos a menos de isomorfismos topológicos. A demostração destes fatos pode ser encontrada em [RZ, proposição 1.1.1, pág. 2]. Por isso vamos-nos referir *ao* limite inverso do sistema inverso.

Define-se analogamente sistema e limite inverso para espaços topológicos e para anéis topológicos, nestes casos homomorfismos de grupos contínuos são substituídos por aplicações contínuas e por homomorfismos de anéis contínuos, respectivamente.

Vejamos agora quais características do sistema inverso são herdadas pelo limite.

Proposição 3.2.7 ([W, Proposição 1.1.5, pág. 14]) *Seja $\left\{G_i, \psi_i^j\right\}$ um sistema inverso de grupos topológicos indexado por I, e seja G o limite inverso desse sistema, $G = \varprojlim G_i$.*

1. *Se cada G_i é Hausdorff, então G é Hausdorff.*
2. *Se cada G_i é totalmente desconexo, então G é totalmente desconexo.*
3. *Se cada G_i é compacto e Hausdorff, então G é compacto e Hausdorff.*

Observe que dado um sistema inverso $\left\{G_i, \psi_i^j\right\}$ existe um correspondente sistema inverso sobrejetor $\left\{\alpha_i(\varprojlim G_i), \left(\psi_i^j\right)'\right\}$ onde $\left(\psi_i^j\right)'$ é a restrição de ψ_i^j a $\alpha_i(\varprojlim G_i)$, com o mesmo limite inverso.

Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos, chamamos um grupo F de um $\mathcal{C}$-grupo se $F \in \mathcal{C}$, e chamamos G de um grupo pro-$\mathcal{C}$ se é um limite inverso de $\mathcal{C}$-grupos. Note que com esta definição $\mathcal{C}$-grupos são grupos pro-$\mathcal{C}$.

Definição 3.2.8 *Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos. Dizemos que G é um* ***grupo pro-$\mathcal{C}$*** *se G é o limite inverso $G = \varprojlim G_i$ de um sistema inverso sobrejetor $\left\{G_i, \psi_i^j\right\}$ de grupos G_i em $\mathcal{C}$, onde cada grupo G_i tem a topologia discreta.*

Interpretamos um tal grupo pro-$\mathcal{C}$ G como um grupo topológico, cuja topologia é herdada da topologia produto de $\Pi_{i\in I}G_i$.

Definição 3.2.9 *A classe $\mathcal{C}$ é dita* ***fechada por subgrupos*** *se sempre que $G \in \mathcal{C}$ e $H \leq G$, então $H \in C$.*

Logo, se a classe $\mathcal{C}$ é fechada por subgrupos, então o limite inverso de qualquer sistema inverso (não necessariamente sobrejetor) de grupos em $\mathcal{C}$ é um grupo pro-$\mathcal{C}$.

As propriedades dos grupos pro-$\mathcal{C}$ dependem do tipo de classe $\mathcal{C}$ que estejamos considerando. Neste texto consideraremos classes de grupos finitos $\mathcal{C}$ que satisfazem uma ou mas das seguintes propriedades:

$\mathcal{C}1$. $\mathcal{C}$ é fechada por subgrupos.

$\mathcal{C}2$. $\mathcal{C}$ é fechada sob quocientes, i.e. se $G \in \mathcal{C}$ e $K \lhd G$, então $G/K \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}3$. $\mathcal{C}$ é fechada sob produtos diretos finitos, i.e. se $G_i \in \mathcal{C}$ para $i = 1,\cdots, n$, então $\Pi_{i=1}^n G_i \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}4$. Se G é um grupo finito com subgrupos normais N_1 e N_2 tal que G/N_1, $G/N_2 \in \mathcal{C}$, então $G/\left(N_1 \cap N_2\right) \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}5$. $\mathcal{C}$ é fechada sob extensões, i.e. se $1 \to K \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \to 1$ é uma sequência exata curta de grupos e H, $K \in \mathcal{C}$, então $G \in \mathcal{C}$.

Definição 3.2.10 *Seja $\mathcal{C}$ a classe de*

a) todos os grupos finitos, então chamamos um grupo pro-$\mathcal{C}$ de ***grupo profinito****,*

b) todos os grupos cíclicos finitos, então chamamos um grupo pro-$\mathcal{C}$ de ***grupo procíclico****,*

c) todos os grupos solúveis finitos, então chamamos um grupo pro-$\mathcal{C}$ de ***grupo prosolúvel****,*

d) todos os grupos abelianos finitos, então chamamos um grupo pro-$\mathcal{C}$ de ***grupo proabeliano****,*

e) todos os grupos nilpotentes finitos, então chamamos um grupo pro-$\mathcal{C}$ de ***grupo pronilpotente****,*

f) todos os p-grupos finitos, para p um número primo fixo, então chamamos um grupo pro-$\mathcal{C}$ de ***grupo pro-p****,*

A classe de todos os p-grupos finitos é uma classe particularmente importante neste texto e é relevante destacar que satisfaz as propriedades $\mathcal{C}1$ a $\mathcal{C}5$.

O seguinte teorema nos fornece uma caracterização dos grupos pro-$\mathcal{C}$.

Teorema 3.2.11 ([RZ, Teorema 2.1.3, pág. 22]) *Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz as propriedades $\mathcal{C}2$ e $\mathcal{C}4$ anteriores. Então as seguintes condições num grupo topológico G são equivalentes.*

1. *G é um grupo pro-$\mathcal{C}$;*
2. *G é totalmente desconexo, Hausdorff, compacto e para cada subgrupo normal aberto U de G, $G/U \in \mathcal{C}$;*
3. *G é compacto e o elemento identidade 1 de G admite uma base $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas U tal que $\cap_{U\in\mathcal{U}} U = 1$ e cada U é um subgrupo normal aberto de G com $G/U \in \mathcal{C}$;*
4. *o elemento identidade 1 de G admite uma base $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas U tais que cada U é um subgrupo normal de G com $G/U \in \mathcal{C}$, e*

$$G = \varprojlim_{U\in\mathcal{U}} G/U.$$

Observação 3.2.12 *Note que a única classe $\mathcal{C}$ da definição 3.2.10 que não se enquadra nas hipóteses do teorema é a classe de todos os grupos cíclicos finitos pois não satisfaz a propriedade $\mathcal{C}4$.*

Vamos ver agora algumas propriedades dos grupos pro-$\mathcal{C}$ herdadas das correspondentes propriedades de $\mathcal{C}$.

Proposição 3.2.13 ([RZ, Proposição 2.2.1, pág. 28]) *Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz as propriedades $\mathcal{C}2$ e $\mathcal{C}4$. Então*

1. *Todo grupo quociente G/K de um grupo pro-$\mathcal{C}$ G, onde $K \lhd G$ fechado, é um grupo pro-$\mathcal{C}$. Se, além disso, $\mathcal{C}$ é fechado sob subgrupos (ou subgrupos normais), então todo subgrupo fechado (ou subgrupo normal fechado) de G é um grupo pro-$\mathcal{C}$.*
2. *O produto direto $\Pi_{i\in I} G_i$ de qualquer coleção $\{G_i \mid i \in I\}$ de grupos pro-$\mathcal{C}$ com a topologia produto, é um grupo pro-$\mathcal{C}$.*
3. *O limite inverso $\varprojlim_{i\in I} G_i$, de um sistema inverso sobrejetor $\left\{G_i, \psi_i^j\right\}$ de grupos pro-$\mathcal{C}$, é um grupo pro-$\mathcal{C}$.*

Definimos o **subgrupo de Frattini** $\Phi(G)$ do grupo profinito G como sendo a interseção de todos seus subgrupos abertos maximais. Chamaremos um subgrupo M de **maximal** se não existe um subgrupo M' de G tal que $M < M' < G$.

O nome destes subgrupos é devido ao matemático italiano Giovanni Frattini quem os definiu num trabalho publicado em 1885.

Observe que se G é um grupo profinito não trivial, então G sempre tem subgrupos abertos maximais e assim $\Phi(G) \lneqq G$.

O subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ é um **subgrupo característico** de G, i.e. para qualquer automorfismo contínuo ψ de G, tem-se $\psi(\Phi(G)) = \Phi(G)$, em particular sempre é um subgrupo normal de G. O grupo quociente $G/\Phi(G)$ é chamado **quociente de Frattini** de G.

Lema 3.2.14 ([RZ, Lema 2.8.7, pág. 56]) *Seja p um número primo e seja G um grupo pro-p, então:*

1. *Todo subgrupo fechado maximal M de G tem índice p.*
2. *O quociente de Frattini $G/\Phi(G)$ é um grupo profinito abeliano p-elementar (i.e. soma direta de grupos cíclicos de ordem p), e logo um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}_p$ com p elementos.*
3. *O subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ é $\overline{G^p[G,G]}$, onde $G^p = \{x^p \mid x \in G\}$ e $[G,G]$ denota o subgrupo comutador de G.*

Proposição 3.2.15 ([RZ, Proposição 2.8.10, pág. 57]) *Seja p um número primo. Um grupo pro-p G é f.g. se e somente se $\Phi(G)$ é um subgrupo aberto de G.*

3.2.1 Completamento Pro-$\mathcal{C}$

Seja $\mathcal{N}$ uma coleção não vazia de subgrupos normais de um grupo G, tais que cada quociente G/N, com $N \in \mathcal{N}$, pertence a uma certa classe $\mathcal{C}$ de grupos finitos. Assuma que $\mathcal{N}$ satisfaz a seguinte condição

$$\text{sempre que } N_1,\, N_2 \in \mathcal{N}, \text{ existe } N \in \mathcal{N} \text{ tal que } N \leq N_1 \cap N_2. \tag{3.1}$$

Então podemos interpretar G como um grupo topológico se consideramos $\mathcal{N}$ como um sistema fundamental de vizinhanças da identidade de G, (veja pág. 73). Vamos nos referir à correspondente topologia como uma **topologia pro-$\mathcal{C}$**.

Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz as propriedades, $\mathcal{C}2$ e $\mathcal{C}4$ anteriores, e seja G um grupo. Considere a coleção

$$\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G) = \{N \lhd G \mid [G:N] < \infty,\, G/N \in \mathcal{C}\}.$$

Note que $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G)$ é não vazio, pois $G \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G)$, e $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G)$ satisfaz a condição 3.1. A correspondente topologia em G é chamada de **topologia pro-$\mathcal{C}$ completa (***full pro-$\mathcal{C}$ topology***)**.

Definição 3.2.16 *Um grupo G é chamado **residualmente** $\mathcal{C}$ se satisfaz*

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = 1.$$

Se $\mathcal{C}$ é a classe de todos os grupos finitos ou a classe de todos os p-grupos finitos, diremos que G é residualmente um grupo finito ou residualmente um p-grupo finito, respetivamente.

Proposição 3.2.17 ([RZ, Proposição 3.3.15, pág. 99]) *Se $\mathcal{C}$ é uma classe não vazia e não trivial de grupos finitos que satisfaz as propriedades $\mathcal{C}2$, $\mathcal{C}4$, $\mathcal{C}5$ e que é fechada sob subgrupos normais, então todo grupo livre abstrato é residualmente $\mathcal{C}$.*

Se H é um subgrupo de G, então a topologia pro-$\mathcal{C}$ completa de G induz em H uma topologia pro-$\mathcal{C}$, mas não necessariamente a topologia pro-$\mathcal{C}$ completa de H. O próximo lema indica alguns casos onde isto acontece.

Lema 3.2.18 ([RZ, Lema 3.1.4, pág. 81])

1. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz $\mathcal{C}1$, $\mathcal{C}2$, $\mathcal{C}3$ e $\mathcal{C}5$ e G um grupo residualmente $\mathcal{C}$. Seja H um subgrupo de G, aberto na topologia pro-$\mathcal{C}$ completa de G. Então a topologia pro-$\mathcal{C}$ completa de G induz em H sua topologia pro-$\mathcal{C}$ completa.*

2. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz $\mathcal{C}2$, $\mathcal{C}4$ e $\mathcal{C}5$ e é fechada sob subgrupos normais. Seja G um grupo residualmente $\mathcal{C}$ e H um subgrupo normal de G, aberto na topologia pro-$\mathcal{C}$ completa de G. Então a topologia pro-$\mathcal{C}$ completa de G induz em H sua topologia pro-$\mathcal{C}$ completa.*

Definimos a relação $M \preceq N$ se $N \leq M$, para M e N em $\mathcal{N}$, logo $\mathcal{N}$ com $\preceq$ é um conjunto parcialmente ordenado dirigido. Se M, $N \in \mathcal{N}$ e $M \preceq N$, seja $\psi_M^N : G/N \to G/M$ o epimorfismo natural. Então $\{G/N, \psi_M^N\}$ é um sistema inverso de grupos em $\mathcal{C}$, e dizemos que o grupo pro-$\mathcal{C}$

$$\mathcal{K}_{\mathcal{N}}(G) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$$

é o **completamento pro-$\mathcal{C}$** de G em relação à topologia pro-$\mathcal{C}$ dada por $\mathcal{N}$.

Existe um homomorfismo natural contínuo

$$j = j_{\mathcal{N}} : G \to \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(G), \tag{3.2}$$

induzido pelo epimorfismo $G \to G/N$ $(N \in \mathcal{N})$, levando $g \longmapsto (gN)_{N \in \mathcal{N}}$, para cada $g \in G$.

O completamento pro-$\mathcal{C}$ de G, $\mathcal{K}_{\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G)}(G)$, será denotado por $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$. Neste caso usaremos os termos completamento profinito ou completamento pro-p se $\mathcal{C}$ consiste na classe de todos os grupos finitos ou todos os p-grupos finitos respectivamente. Estes serão os mais utilizados neste texto, e os denotaremos por $\widehat{G}$ e $G_{\widehat{p}}$ respectivamente.

Proposição 3.2.19 ([W, Proposição 1.4.4, pág. 26]) *Seja $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ o completamento pro-$\mathcal{C}$ de um grupo G e seja $j : G \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ o homomorfismo de grupos contínuo definido em (3.2). Então*

1. *$j(G)$ é denso em $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$;*
2. *$\ker j = \cap_{N\in\mathcal{N}} N$.*

A afirmação 1 justifica o uso do termo "completamento" neste contexto. Quando o homomorfismo $j : G \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é injetor podemos interpretar G como um subgrupo de $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$, neste caso G é residualmente $\mathcal{C}$.

Os completamentos de $\mathbb{Z}$ são particularmente importantes:

Exemplos 3.2.20 *Considere o grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$. Seu completamento profinito é*

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Ao invés de denotar o completamento pro-p de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_{\widehat{p}}$ seguiremos a tradição de Teoria de Números e o denotaremos por $\mathbb{Z}_p$. Então,

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

∎

Observe que ambos $\widehat{\mathbb{Z}}$ e $\mathbb{Z}_p$ não só são grupos abelianos, se não que também herdam dos anéis finitos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ a estrutura natural de anéis. O grupo (anel) $\mathbb{Z}_p$ é chamado de **grupo (anel) dos inteiros p-ádicos** e pode ser identificado com o conjunto de series de potências

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n \mid b_n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_n < p \right\}.$$

Estes últimos foram descobertos pelo matemático alemão Kurt Hensel em 1899.

Proposição 3.2.21 ([RZ, Proposição 3.2.2, pág. 84]) *Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz as propriedades $\mathcal{C}2$ e $\mathcal{C}4$ e assuma que G é um grupo residualmente $\mathcal{C}$. Identifique G com a sua imagem em $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$, seu completamento pro-p. Seja $\overline{X}$ o fecho em $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ de um subconjunto X de G.*

1. *Seja* $\Phi : \{N \mid N \leq G \text{ aberto}\} \to \left\{U \mid U \leq G_{\widehat{\mathcal{C}}} \text{ aberto}\right\}$ *a aplicação que assina a cada subgrupo aberto* H *de* G *seu fecho* $\overline{H}$ *em* $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$*. Então* Φ *é uma correspondência um-a-um entre o conjunto de todos os subgrupos abertos* H *na topologia pro-*$\mathcal{C}$ *de* G *e o conjunto de todos os subgrupos abertos de* $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$*. A inversa desta aplicação é* $U \longmapsto U \cap G$*; em particular,* $\overline{U \cap G} = U$ *se* $U \leq G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ *aberto.*

2. *A aplicação* Φ *leva subgrupos normais em subgrupos normais.*

3. *A topologia de* $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ *induz em* G *sua topologia pro-*$\mathcal{C}$ *completa.*

4. *Se* H*,* $K \in \{N \mid N \leq G \text{ aberto}\}$ *e* $H \leq K$*, então* $[K : H] = [\overline{K} : \overline{H}]$*; mais ainda, se* $H \lhd K$*, então* $K/H \simeq \overline{K}/\overline{H}$*.*

Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos e seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz as condições $\mathcal{C}1$, $\mathcal{C}2$ e $\mathcal{C}3$. Então é possível definir canonicamente um homomorfismo contínuo $\varphi_{\widehat{\mathcal{C}}} : G_{\widehat{\mathcal{C}}} \to H_{\widehat{\mathcal{C}}}$. (veja [RZ, págs. 85-86])

Lema 3.2.22 ([RZ, Lema 3.2.3, pág. 86]) *Seja* $\mathcal{C}$ *uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz as condições* $\mathcal{C}1$*,* $\mathcal{C}2$ *e* $\mathcal{C}3$*. Então o completamento pro-*$\mathcal{C}$*,* $(-)_{\widehat{\mathcal{C}}}$*, é um funtor da categoria dos grupos abstratos na categoria dos grupos pro-*$\mathcal{C}$ *e homomorfismos contínuos.*

Mas especificamente, o lema anterior nos diz que:
Se $\mathrm{id} : G \to G$ é o homomorfismo identidade, então $\mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{C}}} : G_{\widehat{\mathcal{C}}} \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é também o homomorfismo identidade. Se $\varphi : G \to H$ e $\psi : H \to K$ são homomorfismos de grupos, então $(\psi\varphi)_{\widehat{\mathcal{C}}} = \psi_{\widehat{\mathcal{C}}}\varphi_{\widehat{\mathcal{C}}}$.

Lema 3.2.23 ([RZ, Lema 3.2.4, pág. 87]) *Seja* $\mathcal{C}$ *uma classe não vazia de grupos finitos que satisfaz as condições* $\mathcal{C}1$*,* $\mathcal{C}2$*,* $\mathcal{C}3$ *e* $\mathcal{C}4$*. Seja* $\varphi : G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Então*

$$\varphi_{\widehat{\mathcal{C}}}\left(G_{\widehat{\mathcal{C}}}\right) = \overline{(j\varphi)\,(G)},$$

onde j *denota o homomorfismo (3.2) e* $\overline{(j\varphi)\,(G)}$ *denota o fecho de* $(j\varphi)\,(G)$ *em* $H_{\widehat{\mathcal{C}}}$*.*

Uma condição necessária e suficiente para o funtor completamento $(-)_{\widehat{\mathcal{C}}}$ preservar um homomorfismo injetor $i : K \to G$ é dada no seguinte lema:

Lema 3.2.24 ([RZ, Lema 3.2.6, pág. 88]) *Seja* $\mathcal{C}$ *uma classe não vazia de grupos finitos satisfazendo as condições* $\mathcal{C}1$*,* $\mathcal{C}2$*, e* $\mathcal{C}3$ *(respetivamente, satisfazendo as condições* $\mathcal{C}2$ *e* $\mathcal{C}4$ *e fechada sobre subgrupos normais). Assuma que* $K \leq G$ *(respetivamente* $K \lhd G$*), e seja* $i : K \to G$ *a aplicação inclusão. Então* $i_{\widehat{\mathcal{C}}} : K_{\widehat{\mathcal{C}}} \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ *é injetora se e somente se a topologia pro-*$\mathcal{C}$ *completa de* G *induz em* K *sua topologia pro-*$\mathcal{C}$ *completa.*

É importante destacar que se $\mathcal{C}$ é a classe de todos os p-grupos finitos, $\mathcal{C}$ satisfaz as condições $\mathcal{C}1$ a $\mathcal{C}5$, e é fechada sobre subgrupos normais, logo são válidos os lemas anteriores. Mais ainda:

Considere G um grupo que seja residualmente um p-grupo e seja $G_{\widehat{p}}$ seu completamento pro-p. Seja H um subgrupo de G aberto na topologia pro-p completa de G e seja $i : H \to G$ a aplicação inclusão. Pelo lema 3.2.18 item (1), a topologia pro-p completa de G induz em H sua topologia pro-p completa, logo pelo lema 3.2.24 a aplicação $i_{\widehat{p}} : H_{\widehat{p}} \to G_{\widehat{p}}$ é injetora. Seja $j_H : H \to H_{\widehat{p}}$ o homomorfismo definido em (3.2) para o grupo H e seja $j_G : G \to G_{\widehat{p}}$, o correspondente homomorfismo para G. Assim temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H & \xhookrightarrow{\ i\ } & G \\ {\scriptstyle j_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_G} \\ H_{\widehat{p}} & \xhookrightarrow{\ i_{\widehat{p}}\ } & G_{\widehat{p}} \end{array}$$

Pelo lema 3.2.23 $i_{\widehat{p}}\left(H_{\widehat{p}}\right) = \overline{(j_G i)(H)}^{G_{\widehat{p}}}$, logo

$$H_{\widehat{p}} \simeq i_{\widehat{p}}\left(H_{\widehat{p}}\right) = \overline{(j_G i)(H)}^{G_{\widehat{p}}} = \overline{j_G(H)}^{G_{\widehat{p}}}.$$

Em conclusão provamos o seguinte fato:

Seja G um grupo residualmente um p-grupo, seja H um subgrupo aberto na topologia pro-p completa de G e seja $j : G \to G_{\widehat{p}}$ o homomorfismo definido em (3.2). Então $\overline{j(H)} \simeq \overline{H} \simeq H_{\widehat{p}}$, i.e. $H_{\widehat{p}}$ é o fecho em $G_{\widehat{p}}$ de H.

3.3 Anéis e Módulos Profinitos

Analogamente à definição de grupos topológicos, um anel R é um anel topológico se tiver uma topologia e as operações de soma e produto foram contínuas.

Definição 3.3.1 *Um **anel topológico** R é um anel cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia compatível com a soma e o produto do anel, no sentido em que*

i. a soma $s : R \times R \to R$, definida por $s(g,h) = g + h$, é uma aplicação contínua e

ii. o produto $p : R \times R \to G$, definido por $p(g,h) = gh$, é uma aplicação contínua,

quando se considera $R \times R$ como um espaço topológico com a topologia produto.

Um subconjunto I de um anel topológico R é um ideal de R se é um ideal do anel abstrato R e é fechado como subconjunto do espaço topológico R. Formando o grupo quociente R/I do grupo topológico aditivo R do anel topológico R pelo ideal I obtemos um grupo topológico aditivo R/I no qual é definido uma operação de multiplicação que é contínua ao respeito da topologia do espaço R/I, e assim R/I é um anel topológico.

Definição 3.3.2 *Dizemos que o anel R é um* ***anel profinito*** *se R é o limite inverso de um sistema inverso $\left\{R_i, \psi_i^j\right\}$ onde cada R_i é um anel finito: $R = \varprojlim R_i$.*

Associada a R temos uma família de homomorfismos de anéis contínuos $\alpha_i : R \to R_i$ com $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$ sempre que $i \leq j$. Considere os ideais abertos $\{S_i \mid S_i = \ker \alpha_i\}$, estes formam uma sistema fundamental de vizinhanças abertas do elemento 0 em R, veja proposição 3.3.8.

A definição de um R-módulo à esquerda M, quando R é anel profinito é análoga à definição quando R é um anel abstrato, exceto pela exigência de que o grupo abeliano M seja grupo topológico Hausdorff e a ação de R em M seja contínua.

Definição 3.3.3 *Seja R um anel profinito. Um grupo abeliano topológico Hausdorff M é um* ***R-módulo à esquerda*** *se existe uma função contínua $R \times M \to M$, denotada por $(r, m) \mapsto rm$, satisfazendo as seguintes condições:*

a) $r(m + m') = rm + rm'$;

b) $(r + r')\, m = rm + r'm$;

c) $(rr')\, m = r\,(r'm)$;

d) $1m = m$;

onde m, $m' \in M$ e 1, r, $r' \in R$ e 1 é o elemento identidade de R.

Se M e N são dois R-módulos, usamos a notação $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ para o grupo abeliano de todos os homomorfismos de R-módulos *contínuos* de M em N.

Definição 3.3.4 *Seja R um anel profinito e M um grupo abeliano topológico Hausdorff tal que M é R-módulo. Dizemos que M é* ***R-módulo profinito*** *se M é um grupo abeliano profinito.*

As noções de submódulo de um módulo, módulo quociente de um módulo por um submódulo, núcleo e imagem de um homomorfismo de R-módulos, etc. são análogas à noções quando R é um anel abstrato.

Definição 3.3.5 *Seja X um subconjunto de um R-módulo M, o* ***submódulo fechado gerado por X*** *é a interseção de todos os submódulos fechados de M contendo X e será denotado por $\overline{\langle X \rangle}$. Dizemos que M é* ***f.g.*** *se $M = \overline{\langle X \rangle}$ para algum subconjunto finito X de M.*

Definição 3.3.6 *Dizemos que um subconjunto Y de um R-módulo profinito M* ***converge a 1*** *se todo submódulo aberto de M contém quase todos os elementos de Y.*

Lema 3.3.7 ([RZ, Lema 5.1.1, pág. 166]) *Seja R um anel profinito e seja M um R-módulo.*

1. *Se M é discreto, então M é a união de seus submódulos finitos; em particular, M é de torção como grupo abeliano.*
2. *Se M é profinito, então é limite inverso dos seus R-módulos quocientes finitos.*
3. *Todo R-módulo profinito contém um subconjunto de geradores que converge a 1.*

A seguinte proposição fornece uma série de caraterizações de anéis profinitos.

Proposição 3.3.8 ([RZ, Proposição 5.1.2, pág. 167]) *Seja R um anel topológico. Então as seguintes condições são equivalentes.*

1. *R é um anel profinito;*
2. *R é compacto e Hausdorff;*
3. *R é compacto, Hausdorff e totalmente desconexo;*
4. *R é compacto e o elemento zero de R tem uma sistema fundamental de vizinhanças consistindo de ideais abertos de R;*
5. *O elemento zero de R tem uma sistema fundamental de vizinhanças $\{T_i \mid i \in I\}$ consistindo de ideais abertos de R, e $R = \varprojlim R/T_i$;*
6. *Existe um sistema inverso $\left\{R_i, \psi_i^j\right\}$ de anéis finitos, onde cada morfismo ψ_i^j é um epimorfismo e $R = \varprojlim R_i$.*

O seguinte teorema nos diz que todo homomorfismo de módulos profinitos sobre um anel profinito, indo de um módulo f.g. é contínuo.

Teorema 3.3.9 ([W, Lema 7.2.2, pág. 118]) *Seja R um anel profinito, e seja um subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de um R-módulo profinito M.*

1. *O conjunto $M_1 = \{\Sigma_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in R \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ é um submódulo fechado.*
2. *Suponha que M é f.g; e seja N um R-módulo profinito. Então todo homomorfismo de R-módulos $\theta : M \to N$ é contínuo.*

3.4 Módulos Profinitos e Discretos

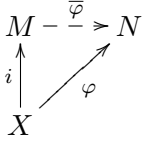
Estamos particularmente interessados em dois tipos de R-módulos: os que são compactos, Hausdorff e totalmente desconexos e os que são discretos. Nos referimos ao primeiro tipo como *módulos profinitos* e ao segundo como *módulos discretos*. Os R-módulos profinitos junto com seus morfismos formam uma categoria que denotaremos por $\mathrm{PMod}(R)$. A categoria dos R-módulos discretos e seus morfismos será denotada por $\mathrm{DMod}(R)$.

Existe uma dualidade entre os módulos profinitos e os módulos discretos, esta dualidade é explicada em [RZ, pág. 171].

Dizemos que X é um **espaço profinito** se X é o limite inverso de espaços topológicos finitos.

3.4.1 Módulos Profinitos Livres.

Definição 3.4.1 *Seja X um espaço profinito, R um anel profinito, M um R-módulo profinito e $i : X \to M$ uma aplicação contínua. Dizemos que o par (M, i) é um **R-módulo profinito livre no espaço X** ou, simplesmente, M é um **R-módulo profinito livre em X**, se para cada R-módulo profinito N e cada $\varphi : X \to N$ aplicação contínua, existe um único homomorfismo de R-módulos contínuo $\overline{\varphi} : M \to N$ tal que $\overline{\varphi} \circ i = \varphi$, ou seja tal que o seguinte diagrama comuta:*



Lema 3.4.2 ([RZ, Lema 5.2.1, pág. 173]) *Seja R um anel profinito e seja (M, i) um R-módulo livre profinito no espaço profinito X, então*

1. *$i(X)$ gera M como um R-módulo profinito;*
2. *a aplicação i é injetora.*

Denotaremos um R-módulo profinito livre em X por $[[RX]]$. Vamos-nos referir ao espaço profinito X como uma base topológica de $[[RX]]$. Note que se X é finito e R é um anel profinito, então $[[RX]] = \oplus_X R$ como no caso abstrato.

O seguinte lema afirma que R-módulos profinitos livres existem e são únicos a menos de isomorfismos.

Lema 3.4.3 ([RZ, Proposição 5.2.2, pág. 173]) *Seja R um anel profinito, para qualquer espaço profinito X existe um único, a menos de isomorfismo, R-módulo profinito livre.*

Exemplos 3.4.4 *Sejam* $\left\{R_i, \varphi_i^j\right\}$ *e* $\left\{X_i, \psi_i^j\right\}$ *sistemas inversos de anéis profinitos e espaços profinitos, respetivamente, sobre um conjunto parcialmente ordenado dirigido* I*. Chamamos de* R *e* X *os limites inversos*

$$R = \varprojlim R_i \text{ e } X = \varprojlim X_i.$$

Então $[[RX]] = \varprojlim [[R_i X_i]]$*, pois dois limites inversos comutam.* ∎

3.4.2 G-módulos e Álgebras de Grupos Completas

Definimos um G-módulo à esquerda ou simplesmente um G-módulo para um grupo profinito G, como um grupo abeliano topológico M no qual G age continuamente.

Definição 3.4.5 *Seja* G *um grupo profinito. Um grupo abeliano topológico* M *é um* ***G-módulo à esquerda*** *se existe uma função contínua* $G \times M \to M$*, denotada por* $(g, m) \mapsto gm$*, satisfazendo as seguintes condições:*

a) $g(m + m') = gm + gm'$*;*

b) $(gh)\, m = g\,(hm)$*;*

c) $1m = m$*;*

para m*,* $m' \in M$ *e* 1*,* g*,* $h \in G$ *e* 1 *é o elemento identidade de* G*.*

Se M tem a topologia discreta, então M é chamado de G-módulo discreto, e se a topologia de M é profinita, então dizemos que M é um G-módulo profinito.

Definem-se analogamente G-módulos à direita.

Exemplos 3.4.6 *Seja* G *um grupo profinito e* M *qualquer grupo abeliano discreto. Definimos a ação de* G *em* M *por* $gm = m$ *para todo* $m \in M$ *e* $g \in G$*. Então* M *é um* G*-módulo discreto. Estão ação é chamada ação trivial em* M*, e vamos-nos referir a* M *com esta ação como um* G*-módulo trivial.* ∎

O exemplo mostra que a diferença dos módulos discretos sobre anéis profinitos, os G-módulos discretos não necessariamente são de torção.

Definição 3.4.7 *Sejam* M *e* N*,* G*-módulos. Um* ***G-morfismo*** $\varphi : M \to N$ *é um homomorfismo de grupos abelianos contínuo, i.e.* $\varphi(gm) = g\varphi(m)$*, para todo* $g \in G$*,* $m \in M$*.*

A classe de G-módulos e G-morfismos constitui uma categoria que será denotada por $\mathrm{Mod}(G)$. A categoria dos G-módulos profinitos será denotada por $\mathrm{PMod}(G)$ em quanto a categoria dos G-módulos discretos será denotada por $\mathrm{DMod}(G)$.

No estudo dos módulos de um grupo G, geralmente é necessário considerá-los como módulos sobre um anel apropriado associado a G. Quando G é um grupo profinito e os módulos são profinitos, o anel apropriado é a álgebra de grupo completa $[[\mathfrak{R}G]]$ onde $\mathfrak{R}$ é $\widehat{\mathbb{Z}}$ ou algum outro anel profinito comutativo.

Definição 3.4.8 *Considere um anel profinito comutativo $\mathfrak{R}$ e seja G um grupo profinito. Definimos a* ***álgebra de grupo completa*** *ou* ***anel de grupo completo*** *$[[\mathfrak{R}G]]$ do grupo G com coeficientes em $\mathfrak{R}$, como sendo o limite inverso da álgebra de grupo ordinária $[\mathfrak{R}(G/U)]$*

$$[[\mathfrak{R}G]] = \varprojlim_{U\in\mathcal{U}} [\mathfrak{R}(G/U)]\,,$$

onde $\mathcal{U}$ é a coleção de todos os subgrupos normais abertos de G.

Segue imediatamente da definição que $[[\mathfrak{R}G]]$ é um anel profinito e pode ser expressado como um limite inverso de anéis finitos da seguinte forma

$$[[\mathfrak{R}G]] = \varprojlim_{U\in\mathcal{U}} [(\mathfrak{R}/I)\,(G/U)]\,,$$

onde I e U percorrem os ideais abertos de $\mathfrak{R}$ e os subgrupos normais abertos de G respectivamente.

Exemplos 3.4.9

1. *Seja $\mathfrak{R} = \mathbb{F}_p$ o corpo com p elementos e $G = \mathbb{Z}_p$ o completamento pro-p de $\mathbb{Z}$, então $\mathfrak{R} = \varprojlim \mathbb{F}_p$ e $G = \varprojlim \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}$, queremos encontrar*

$$[[\mathfrak{R}G]] = \varprojlim [\mathbb{F}_p(\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})].$$

Seja S o anel comutativo

$$S = \mathbb{F}_p[[t]] = \left\{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots \mid a_i \in \mathbb{F}_p\right\}$$

das series de potências formais com coeficientes em $\mathbb{F}_p$. Seja $I_j = t^{p^j}\mathbb{F}_p\,[t]$ onde $\mathbb{F}_p\,[t]$ a álgebra polinomial. Então $\frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$ com base

$$X_j = \left\{1, t, t^2, \cdots, t^{p^j-1}\right\},$$

logo é anel finito de ordem $p^{|X_j|}$, logo é p-anel finito. Como

$$S = \varprojlim_{j\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j},$$

S é anel pro-p. Seja $\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} = \langle g_j\rangle$ onde $|g_j| = p^j$. Observe que

$$(1-t)^{p^j} = \sum_{\alpha=0}^{p^j} 1^\alpha (-t)^{p^j-\alpha}\binom{p^j}{\alpha},$$

excepto o primeiro ou o último termo, o resto é divisível por p e $\mathrm{char}(\mathbb{F}_p) = p$, logo $(1-t)^{p^j} = 1 + (-t)^{p^j} = 1 \in \frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j}$, pois $(-t)^{p^j} \in I_j$. É facil ver que p^j é o menor β tal que $(1-t)^\beta = 1$, portanto $|1-t| = p^j$ em $\frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j}$. Logo $\left\{1, g_j, g_j^2, \ldots, g_j^{p^j-1}\right\}$ é base de $[\mathbb{F}_p(\langle g_j\rangle)]$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$ e $\left\{1, 1-t, (1-t)^2, \ldots, (1-t)^{p^j-1}\right\}$ é base de $\frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$. Seja

$$\theta_j : [\mathbb{F}_p(\langle g_j\rangle)] \to \frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j},$$

levando $\Sigma_\beta \lambda_\beta g_j^\beta \mapsto \Sigma_\beta \lambda_\beta (1-t)^\beta$, θ_j leva base em base logo é um isomorfismo, ou seja

$$[\mathbb{F}_p(\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})] \simeq \frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j},$$

o que implica que $\varprojlim [\mathbb{F}_p(\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})] \simeq \varprojlim \frac{\mathbb{F}_p[t]}{I_j}$, portanto $[[\mathbb{F}_p\mathbb{Z}_p]] = \mathbb{F}_p[[t]]$.

2. *Suponha de maneira mais geral que $G = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, k-vezes. Então*

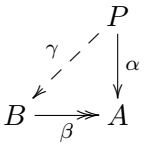
$$[[\mathbb{F}_p G]] \simeq \mathbb{F}_p[[t_1, \cdots, t_k]] = \left\{\sum a_{\alpha_1\cdots\alpha_k} t_1^{\alpha_1}\cdots t_k^{\alpha_k} \mid a_{\alpha_1\cdots\alpha_k} \in \mathbb{F}_p\right\}.$$

∎

O conjunto de series de potências formais munido da adição e multiplicação de series de potências formais e da multiplicação de series de potências formais por elementos de $\mathfrak{R}$, definidos de forma obvia, torna-se uma $\mathfrak{R}$-álgebra (veja definição na seção 3.4.4) e é chamado de álgebra das séries de potências formais, $\mathfrak{R}[[t_1, \cdots, t_k]]$, também conhecidas como álgebras de Magnus, já que em 1935 o matemático alemão Wilhelm Magnus reconheceu, pela primeira vez, sua importância. Este as utilizou para obter propriedades de grupos livres abstratos.

3.4.3 Módulos Projetivos e Injetivos.

Definição 3.4.10 *Seja R um anel profinito. Um **R-módulo profinito** P é **projetivo** se o diagrama*



comuta, ou seja $\exists \gamma : P \to B$ homomorfismo de R-módulos contínuo, tal que $\beta\gamma = \alpha$, onde B, C são R-módulos profinitos, α, β homomorfismos de R-módulos contínuos e β é epimorfismo.

Se $0 \to C \to B \to A$ é sequência exata de R-módulos profinitos e P é qualquer R-módulo profinito então $0 \to \mathrm{Hom}_R(P, C) \to \mathrm{Hom}_R(P, B) \to \mathrm{Hom}_R(P, A)$ é sequência exata de grupos abstratos. Lembre que aqui $\mathrm{Hom}_R(\ ,\ )$ denota os homomorfismos de R-módulos profinitos contínuos.

O seguinte teorema nos diz que o funtor $\mathrm{Hom}_R(P, \ )$ é exato se e somente se P é R-módulo profinito projetivo.

Teorema 3.4.11 ([RZ, pág. 179]) *Seja R um anel profinito, seja $0 \to C \to B \to A \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos profinitos e seja P qualquer R-módulo profinito então P é projetivo se e somente se $0 \to \mathrm{Hom}_R(P, C) \to \mathrm{Hom}_R(P, B) \to \mathrm{Hom}_R(P, A) \to 0$ é sequência exata de grupos abstratos.*

A prova de teorema anterior é análoga à prova no caso que R seja anel abstrato e os módulos A, B, C e P sejam R-módulos abstratos.

No caso de módulos profinitos sobre um anel profinto é suficiente exigir B no teorema anterior como um R-módulo finito para obter a projetividade do módulo P, como mostra o seguinte lema.

Lema 3.4.12 ([RZ, pág. 179]) *Seja R um anel profinito, seja $0 \to C \to B \to A \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos profinitos onde B é R-módulo finito e seja P qualquer R-módulo profinito então P é projetivo se e somente se $0 \to \mathrm{Hom}_R(P, C) \to \mathrm{Hom}_R(P, B) \to \mathrm{Hom}_R(P, A) \to 0$ é sequência exata de grupos abstratos.*

Observe que se B é finito então C também é finito pois é um submódulo de um módulo finito e A é finito pois é quociente de módulos finitos.

Enunciamos sem demonstração a seguinte proposição pois é análoga ao caso abstrato, porém a prova pode ser encontrada em [RZ, Proposição 5.4.2, pág 180-181].

Proposição 3.4.13 *Seja R um anel profinito.*

1. *Todo R-módulo profinito livre é um R-módulo profinito projetivo.*

2. *Dado um R-módulo profinito M, existe um R-módulo profinito livre F, junto com um epimorfismo de R-módulos profinitos contínuo $\varphi : F \twoheadrightarrow M$, ou seja todo módulo profinito é um quociente de um módulo profinito livre.*

3. *Um R-módulo profinito P é projetivo se e somente se é somando direto de um R-módulo profinito livre.*

Existe uma classe importante de anéis profinitos para os quais todo módulo projetivo é livre, estos são os chamados anéis locais.

Definição 3.4.14 *Um anel profinito R é chamado de **anel local** se tem um único ideal à direita aberto maximal.*

Num anel local seu ideal à direita maximal é ideal a ambos os lados.

Proposição 3.4.15 ([W, Proposição 7.5.1, pág. 126]) *Suponha que R seja um anel local profinito, então todo R-módulo projetivo é livre.*

Proposição 3.4.16 ([W, Proposição 7.5.3, pág. 126]) *Seja $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e G um grupo profinito. Então $[[\mathfrak{R}G]]$ é um anel local profinito se e somente se existe um número primo p tal que $\mathfrak{R}$ é um anel local pro-p e G é um grupo pro-p.*

Exemplos 3.4.17 *Seja G um grupo pro-p, as álgebras de grupos completas $[[\mathbb{Z}_pG]]$ e $[[\mathbb{F}_pG]]$ são anéis locais onde os únicos ideais maximais são*

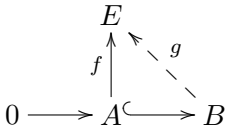
1. *$I = \ker(\pi \circ \varepsilon)$ para $[[\mathbb{Z}_pG]]$, onde $\varepsilon : [[\mathbb{Z}_pG]] \to \mathbb{Z}_p$ é o homomorfismo aumento (ver definição 3.5.9) e $\pi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ é a projeção canônica.*

2. *$I = \ker \varepsilon$ para $[[\mathbb{F}_pG]]$, onde $\varepsilon : [[\mathbb{F}_pG]] \to \mathbb{F}_p$ é o homomorfismo aumento.*

Estes anéis locais serão fundamentalmente importantes para a teoria que será desenvolvida no Capítulo 4 deste texto. ∎

O conceito dual de módulo projetivo é o de módulo injetivo e, como já temos observado, as categorias de R-módulos profinitos e a de R-módulos discretos são duais também. Logo R-módulos discretos injetivos são os duais de R-módulos profinitos projetivos.

Definição 3.4.18 *Seja R um anel profinito. Um* ***R-módulo discreto*** *E é* ***injetivo*** *se, para todo R-módulo profinito B e todo R-submódulo profinito A de B, cada $f : A \to E$ homomorfismo contínuo de R-módulos pode ser estendido a um homomorfismo de R-módulos contínuo $g : B \to E$. O diagrama é*



Como no caso abstrato R-módulos projetivos profinitos e R-módulos injetivos discretos tem efeito dual no funtor Hom.

Teorema 3.4.19 ([RZ, pág. 181]) *Seja R um anel profinito, seja $0 \to C \to B \to A \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos profinitos e seja E qualquer R-módulo discreto então E é injetivo se e somente se $0 \to \mathrm{Hom}_R(C, E) \to \mathrm{Hom}_R(B, E) \to \mathrm{Hom}_R(A, E) \to 0$ é sequência exata de grupos abstratos.*

O teorema anterior contínua sendo válido se na sequência exata curta de R-módulos profinitos $0 \to C \to B \to A \to 0$ exigimos que B seja finito, veja [RZ, lema 5.4.3, pág. 182].

A seguinte proposição mostra que todo R-módulo discreto pode ser mergulhado num R-módulo discreto injetivo.

Proposição 3.4.20 ([RZ, Proposição 5.4.4, pág. 182]) *Seja R um anel profinito, para cada R-módulo discreto M existe um R-módulo injetivo discreto E e um monomorfismo de R-módulos discretos contínuo $\alpha : M \hookrightarrow E$.*

3.4.4 Produto Tensorial Completo

Nesta seção $\mathfrak{R}$ denotará um anel profinito comutativo e R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita, i.e. um anel profinito que contém uma imagem homomorfa contínua de $\mathfrak{R}$ no seu centro. Um exemplo de $\mathfrak{R}$-álgebras profinitas são os anéis de grupo completos $[[\mathfrak{R}G]]$.

Definição 3.4.21 *Se A é um R-módulo à direita profinito, B um R-módulo à esquerda profinito, e M um R-módulo, então uma* ***função R-biaditiva*** *é uma função contínua $f : A \times B \to M$ tal que para cada a, $a' \in A$, b, $b' \in B$ e $r \in R$,*

(i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;

(ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;

(iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Definição 3.4.22 *Um* ***produto tensorial completo de A e B sobre R*** *é um R-módulo profinito T e uma função R-biaditiva $h : A \times B \to T$, denotada por $(a, b) \mapsto a\widehat{\otimes}b$, que resolve o seguinte problema universal:*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{h} & T \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{f'} & \\ M & & \end{array}$$

para cada R-módulo profinito M e cada função R-biaditiva $f : A \times B \to M$, existe um único homomorfismo de R-módulos contínuo $f' : T \to M$ que faz o diagrama comutar.

Vamos denotar o produto tensorial completo de A e B sobre R por $A\widehat{\otimes}_R B$, analogamente ao caso abstrato o conjunto $\left\{h(a, b) := a\widehat{\otimes}b \mid a \in A,\, b \in B\right\}$ é um conjunto de geradores topológicos para o R-módulo profinito $A\widehat{\otimes}_R B$.

O produto tensorial completo de R-módulos profinitos $A\widehat{\otimes}_R B$ existe e é único a menos de isomorfismos, mais ainda se $A = \varprojlim_{i\in I} A_i$ e $B = \varprojlim_{j\in J} B_j$ onde cada A_i e cada B_j é um R-módulo finito à direita ou à esquerda, respetivamente, então $A\widehat{\otimes}_R B = \varprojlim_{i\in I,\, j\in J} (A_i \otimes_R B_j)$, onde $A_i \otimes_R B_j$ é o produto tensorial usual de R-módulos abstratos. A prova deste fato pode ser encontrada em [RZ, Lema 5.5.1, pág. 184].

O seguinte lema mostra que produto tensorial completo comuta com limite inverso.

Lema 3.4.23 ([RZ, Lema 5.5.2, pág. 185]) *Sejam $A = \varprojlim_{i\in I} A_i$ e $B = \varprojlim_{j\in J} B_j$ os limites inversos dos R-módulos à direita profinitos A_i e dos R-módulos à esquerda profinitos B_j, respetivamente. Então*

$$(\varprojlim_{i\in I} A_i)\widehat{\otimes}_R(\varprojlim_{j\in J} B_j) = \varprojlim_{i\in I, j\in J} (A_i\widehat{\otimes}_R B_j).$$

O produto tensorial completo tem propriedades análogas as já vistas para o produto tensorial usual de módulos sobre anéis abstratos, elas são enunciadas na seguinte proposição.

Proposição 3.4.24 ([RZ, Proposição 5.5.3, pág. 185-186]) *Sejam $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo, R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita, A um R-módulo à direita profinito e sejam B, B_1, B_2 R-módulos à esquerda profinitos. Então*

1. *$A\widehat{\otimes}_R$ é um funtor covariante exato à direita.*

2. *Existe um isomorfismo natural de R-módulos profinitos:*

$$A\widehat{\otimes}_R (B_1 \oplus B_2) \simeq (A\widehat{\otimes}_R B_1) \oplus (A\widehat{\otimes}_R B_2).$$

3. *Existe um isomorfismo natural de R-módulos profinitos: $A\widehat{\otimes}_R R \simeq A$.*

4. *Se B é um R-módulo à esquerda profinito f.g. então existe um isomorfismo de grupos abelianos: $A\widehat{\otimes}_R B \simeq A \otimes_R B$.*

5. *Se A é um R-módulo à direita profinito projetivo, então o funtor $A\widehat{\otimes}_R$ é exato.*

Propriedades similares às da proposição 3.4.24 são válidas para $\widehat{\otimes}_R B$.

Exemplos 3.4.25 *Se G e H são grupos profinitos, então $[[\mathfrak{R}(G\times H)]] \simeq [[\mathfrak{R}G]]\widehat{\otimes}_{\mathfrak{R}}[[\mathfrak{R}H]]$ como $\mathfrak{R}$-álgebras. Para provar este fato considere $G = \varprojlim G_i$ e $H = \varprojlim H_j$ onde G_i e H_j são grupos finitos. então $G\times H = \varprojlim (G_i \times H_j)$, é grupo profinito. Por definição*

$$[[\mathfrak{R}(G\times H)]] = \varprojlim_{i,j}[\mathfrak{R}(G_i\times H_j)],$$
$$[[\mathfrak{R}G]] = \varprojlim_{i}[\mathfrak{R}G_i],$$
$$[[\mathfrak{R}H]] = \varprojlim_{j}[\mathfrak{R}H_j].$$

Logo

$$[[\mathfrak{R}G]]\widehat{\otimes}_{\mathfrak{R}}[[\mathfrak{R}H]] = (\varprojlim_{i}[\mathfrak{R}G_i])\widehat{\otimes}_{\mathfrak{R}}(\varprojlim_{j}[\mathfrak{R}H_j]) = \varprojlim_{i,\,j}([\mathfrak{R}G_i]\widehat{\otimes}_{\mathfrak{R}}[\mathfrak{R}H_j]),$$

pois pelo lema 3.4.23 produto tensorial completo comuta com limite inverso. Como $[\mathfrak{R}H_j]$ é f.g. como $\mathfrak{R}$-módulo, pela proposição 3.4.24 temos

$$\varprojlim_{i,\,j}\left([\mathfrak{R}G_i]\widehat{\otimes}_{\mathfrak{R}}[\mathfrak{R}H_j]\right) \simeq \varprojlim_{i,\,j}\left([\mathfrak{R}G_i]\otimes_{\mathfrak{R}}[\mathfrak{R}H_j]\right).$$

Considere agora o homomorfismo de anéis $\theta : [\mathfrak{R}(G_i\times H_j)] \to [\mathfrak{R}G_i]\otimes_{\mathfrak{R}}[\mathfrak{R}H_j]$ que leva

$$\sum_{g\in G_i,\ h\in H_j} r_{g,h}(g,h) \mapsto \sum_{g\in G_i,\ h\in H_j} r_{g,h}(g\otimes h).$$

Assim definido θ é um isomorfismo de anéis, logo

$$[[\mathfrak{R}(G\times H)]] = \varprojlim_{i,j}[\mathfrak{R}(G_i\times H_j)] \simeq \varprojlim_{i,\,j}\left([\mathfrak{R}G_i]\otimes_{\mathfrak{R}}[\mathfrak{R}H_j]\right) = [[\mathfrak{R}G]]\widehat{\otimes}_{\mathfrak{R}}[[\mathfrak{R}H]].$$

∎

Lema 3.4.26 (Nakayama) *Sejam R um anel profinito local, M um R-módulo profinito, I o único ideal maximal. Então M é f.g. como R-módulo profinito se e somente se $M\widehat{\otimes}_R R/I$ é f.g. sobre R/I.*

Se M é um R-módulo profinito f.g. com R anel profinito local tal que $R/I \simeq \mathbb{F}_p$, então o número de geradores de M como R-módulo é $\dim_{\mathbb{F}_p}(M\widehat{\otimes}_R R/I)$.

3.5 Homologia e Cohomologia de Grupos Profinitos

Nesta seção aplicaremos os resultados da seção 2.2 à categoria de módulos sobre anéis profinitos.

Seja R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita, onde $\mathfrak{R}$ é um anel profinito comutativo. Considere o funtor $\mathrm{Hom}_R(\ ,\ )$ indo da categoria $\mathrm{PMod}(R) \times \mathrm{DMod}(R)$ na categoria $\mathrm{DMod}(\mathfrak{R})$; este é um funtor covariante na segunda variável e contravariante na primeira. Lembre que agora $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ denota os homomorfismos de R-módulos contínuos.

Fixamos $A \in \mathrm{PMod}(R)$. Denotamos por $\mathrm{Ext}^n_R(A,\ )$ ao n-ésimo funtor derivado à direita do funtor $\mathrm{Hom}_R(A,\ ) : \mathrm{DMod}(R) \to \mathrm{DMod}(\mathfrak{R})$.

Como no caso abstrato se $B \in \mathrm{DMod}(R)$, então $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ pode ser calculado obtendo o n-ésimo funtor derivado à direita de $\mathrm{Hom}_R(\ , B) : \mathrm{PMod}(R) \to \mathrm{DMod}(\mathfrak{R})$ e logo aplicar-lo a A.

A seguinte proposição caracteriza o funtor $\mathrm{Ext}^n_R(\ ,\ )$, estas propriedades são análogas ao caso abstrato.

Proposição 3.5.1 ([RZ, Proposição 6.1.7, pág. 208]) *Seja $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita. Fixe $A \in \mathrm{PMod}(R)$ e $B \in \mathrm{DMod}(R)$. Então:*

1. *Para qualquer R-módulo discreto injetivo Q e para $n \geq 1$, $\mathrm{Ext}^n_R(A, Q) = 0$. Alem disso, $\mathrm{Ext}^0_R(A,\ ) = \mathrm{Hom}_R(A,\ )$.*

2. *Para qualquer R-módulo profinito projetivo P e para $n \geq 1$, $\mathrm{Ext}^n_R(P, B) = 0$. Alem disso, $\mathrm{Ext}^0_R(\ , B) = \mathrm{Hom}_R(\ , B)$.*

3. *Os funtores $\mathrm{Ext}^n_R(A,\ )$ e $\mathrm{Ext}^n_R(\ , B)$ comutam com somas diretas finitas.*

Como consequência desta proposição temos que os funtores $\mathrm{Ext}^n_R(A,\ )$ e $\mathrm{Ext}^n_R(\ , B)$ comutam com limites, mais especificamente temos:

Corolário 3.5.2 ([RZ, Corolário 6.1.8, pág. 208]) *Sob as hipóteses da proposição anterior, temos*

1. $\mathrm{Ext}^n_R(A, \varinjlim_{i \in I} B_i) = \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Ext}^n_R(A, B_i)$, *onde* $\left\{B_i, \varphi^i_j\right\}$ *é um sistema direto de R-módulos discretos.*

2. $\mathrm{Ext}^n_R(\varprojlim_{i \in I} A_i, B) = \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Ext}^n_R(A_i, B)$, *onde* $\left\{A_i, \psi^j_i\right\}$ *é um sistema inverso sobrejetor de R-módulos profinitos.*

Agora considere o funtor $\widehat{\otimes}_R : \mathrm{PMod}(R^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{PMod}(R) \to \mathrm{PMod}(\mathfrak{R})$, onde $\mathfrak{R}$ é um anel profinito comutativo e R é uma $\mathfrak{R}$-álgebra. Seja A um R-módulo à direita profinito. Então $A\widehat{\otimes}_R : \mathrm{PMod}(R) \to \mathrm{PMod}(\mathfrak{R})$ é um funtor covariante exato à direita. Definimos o funtor $\mathrm{Tor}_n^R(A, \ )$ como o n-ésimo funtor derivado de $A\widehat{\otimes}_R$. Seja B um R-módulo à esquerda, $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ pode também ser calculado tomando o n-ésimo funtor derivado de $\widehat{\otimes}_R B$ e aplicando este em A.

Usando esta notação, temos a seguinte caracterização dos funtores $\mathrm{Tor}_n^R(\ , \ )$, análogas ao caso abstrato.

Proposição 3.5.3 ([RZ, Proposição 6.1.9, pág. 209]) *Seja $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e R uma $\mathfrak{R}$-álgebra profinita. Fixe $A \in \mathrm{PMod}(R^{\mathrm{op}})$ e $B \in \mathrm{PMod}(R)$. Então*

1. *Para qualquer R-módulo à direita profinito projetivo P e para $n \geq 1$, $\mathrm{Tor}_n^R(P, B) = 0$. Alem disso, $\mathrm{Tor}_0^R(\ , B) = \widehat{\otimes}_R B$.*

2. *Para qualquer R-módulo à esquerda profinito projetivo P e para $n \geq 1$, $\mathrm{Tor}_n^R(A, P) = 0$. Alem disso, $\mathrm{Tor}_0^R(A, \ ) = A\widehat{\otimes}_R$.*

3. *Os funtores $\mathrm{Tor}_n^R(A, \ )$ e $\mathrm{Tor}_n^R(\ , B)$ comutam com somas diretas finitas.*

Segue da proposição que os funtores $\mathrm{Tor}_n^R(A, \ )$ e $\mathrm{Tor}_n^R(\ , B)$ comutam com limites inversos, diferentemente do caso abstrato onde os funtores $\mathrm{Tor}_n^R(A, \ )$ e $\mathrm{Tor}_n^R(\ , B)$ comutam com limite direto, veja propriedade 2.2.25.

Corolário 3.5.4 ([RZ, Corolário 6.1.10, pág. 209]) *Sob as hipóteses da proposição anterior, temos*

1. $\mathrm{Tor}_n^R(A, \varprojlim_{i \in I} B_i) = \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Tor}_n^R(A, B_i)$, *onde* $\left\{B_i, \varphi_i^j\right\}$ *é um sistema inverso de R-módulos à esquerda profinitos.*

2. $\mathrm{Tor}_n^R(\varprojlim_{i \in I} A_i, B) = \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Tor}_n^R(A_i, B)$, *onde* $\left\{A_i, \psi_i^j\right\}$ *é um sistema inverso de R-módulos à direita profinitos.*

3.5.1 Cohomologia de Grupos Profinitos com Coeficientes em $\mathrm{DMod}([[\mathfrak{R}G]])$

A cohomologia de grupos profinitos com coeficientes em módulos discretos foi introduzida pelo matemático americano John Torrence Tate Jr. como uma ferramenta no estudo dos grupos de Galois.

Seja G um grupo profinito e $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo.

Considere G agindo trivialmente em $\mathfrak{R}$, $gr = r$ para todo $g \in G$ e $r \in \mathfrak{R}$, então $\mathfrak{R}$ torna-se um $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo. Dado um $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo discreto A, definimos o **n-ésimo grupo de cohomologia** $H^n(G, A)$ de G com coeficientes em A por

$$H^n(G, A) = \mathrm{Ext}^n_{[[\mathfrak{R}G]]}(\mathfrak{R}, A),\ n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente ao caso abstrato temos

Lema 3.5.5 ([RZ, Lema 6.2.1, pág. 210]) *Seja G um grupo profinito. Existe um isomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos*

$$H^0(G, A) = \mathrm{Hom}_{[[\mathfrak{R}G]]}(\mathfrak{R}, A) \simeq A^G$$

onde $A^G = \{a \mid a \in A,\ ga = a,\ \forall g \in G\}$ é o submódulos dos pontos fixos de A via ação de G, para qualquer $A \in \mathrm{DMod}([[\mathfrak{R}G]])$.

Proposição 3.5.6 ([RZ, Proposição 6.2.2 (b), pág. 210]) *Seja G um grupo profinito então $H^n(G, Q) = 0$ para todo $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo injetivo discreto Q e $n \geq 1$.*

Proposição 3.5.7 ([RZ, Proposição 6.2.2 (c), pág. 211]) *Seja G um grupo profinito então para cada sequência exata curta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ em $\mathrm{DMod}([[\mathfrak{R}G]])$, existe sequência exata longa*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(G, A') \to H^0(G, A) \to H^0(G, A'') \xrightarrow{\partial} \\ \to H^1(G, A') \to H^1(G, A) \to \cdots \end{aligned}$$

com homomorfismo de conexão $\partial : H^n(G, A'') \to H^{n+1}(G, A')$.

O seguinte lema nos diz que no cálculo de grupos cohomológicos podemos trocar $\mathfrak{R}$ por $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Lema 3.5.8 ([RZ, Observação 6.2.5, pág. 214]) *Seja G um grupo profinito, $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e A um $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo discreto. Então existe um isomorfismo natural de grupos abelianos*

$$\mathrm{Ext}^n_{[[\mathfrak{R}G]]}(\mathfrak{R}, A) \simeq \mathrm{Ext}^n_{[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]}(\widehat{\mathbb{Z}}, A).$$

3.5.2 Homologia de Grupos Profinitos com Coeficientes em $\mathrm{PMod}([[\mathfrak{R}G]])$

Seja G um grupo profinito, $\mathfrak{R}$ um anel profinito comutativo e seja A um $[[\mathfrak{R}G]]$-módulo à direita profinito. Definimos o **n-ésimo grupo de homologia** $H_n(G, A)$ de G com coeficientes em A por

$$H_n(G, A) = \mathrm{Tor}_n^{[[\mathfrak{R}G]]}(A, \mathfrak{R}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathrm{Tor}_n^{[[\mathfrak{R}G]]}(A, \mathfrak{R})$ é o n-ésimo funtor derivado à esquerda de $\widehat{\otimes}_{[[\mathfrak{R}G]]}\mathfrak{R}$, então

$$H_0(G, A) = \mathrm{Tor}_0^{[[\mathfrak{R}G]]}(A, \mathfrak{R}) = A\widehat{\otimes}_{[[\mathfrak{R}G]]}\mathfrak{R}.$$

Definição 3.5.9 *Definimos o* ***ideal aumentado*** **$((I))$** *do anel de grupo completo* $[[\mathfrak{R}G]]$ *como sendo o kernel do homomorfismo de anéis contínuo* $\varepsilon : [[\mathfrak{R}G]] \twoheadrightarrow \mathfrak{R}$*, o homomorfismo aumento, dado por* $\varepsilon(g) = 1$ *para todo* $g \in G$*.*

Proposição 3.5.10 ([RZ, Proposição 6.3.4, pág. 216])

1. *Existe um isomorfismo natural* $H_0(G, A) \simeq A/A((I)) = A/\overline{\langle ag - a \mid a \in A,\, g \in G\rangle}$.
2. *Para cada* $[[\mathfrak{R}G]]$*-módulo à direita projetivo profinito* P *e* $n \geq 1$, $H_n(G, P) = 0$.

Como acontece com os grupos cohomológicos, também podemos trocar $\mathfrak{R}$ por $\widehat{\mathbb{Z}}$ no cálculo de grupos homológicos.

Lema 3.5.11 ([RZ, Lema 6.3.5, pág. 217]) *Seja* G *um grupo profinito,* $\mathfrak{R}$ *um anel profinito comutativo e seja* A *um* $[[\mathfrak{R}G]]$*-módulo à direita profinito. Então existe um isomorfismo natural de grupos abelianos*

$$\mathrm{Tor}_n^{[[\mathfrak{R}G]]}(A, \mathfrak{R}) \simeq \mathrm{Tor}_n^{[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]}(A, \widehat{\mathbb{Z}}).$$

Por causa do lema 3.5.8 e seu análogo 3.5.11 enunciaremos alguns dos nossos resultados para grupos cohomológicos $H^n(G, A)$, onde A é um $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$-módulo discreto, e para grupos homológicos $H_n(G, A)$, onde A é um $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$-módulo à direita profinito.

Proposição 3.5.12 ([RZ, Proposição 6.5.7, pág. 226]) *Seja* G *um grupo profinito,* $G = \varprojlim G_i$*, onde cada* G_i *é um grupo profinito. Se* B *é um* $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$*-módulo à direita profinito,* $B = \varprojlim B_i$ *onde cada* B_i *é um* $[[\widehat{\mathbb{Z}}G_i]]$*-módulo à direita profinito. Então para cada* $n \geq 0$ *temos*

$$H_n(G, B) \simeq \varprojlim H_n(G_i, B_i).$$

3.5.3 p-Dimensão Cohomológica

Seja G um grupo profinito e seja p um número primo. Seja A um grupo abeliano, denotamos por A_p sua **componente p-primária**, i.e. o subgrupo consistindo dos elementos de A de ordem p^n para algum n, $A_p = \{a \in A \mid \exists n \geq 0, |a| = p^n\}$. Se $A = A_p$ dizemos que A é **p-primário**.

Definição 3.5.13 *A* ***p-dimensão cohomológica*** $\mathrm{cd}_p(G)$ *de um grupo profinito* G *se define como o menor inteiro não negativo* n *tal que* $H^k(G, A)_p = 0$ *para toda* $k > n$ *e para todo* $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$*-módulo discreto* A*, se tal* n *existe, ou seja*

$$\mathrm{cd}_p(G) = \min\left\{n \mid H^k(G, A)_p = 0,\ \forall k > n,\ \forall A \in \mathrm{DMod}([[\widehat{\mathbb{Z}}G]])\right\}.$$

Se tal n *não existe dizemos que* $\mathrm{cd}_p(G) = \infty$*.*

Proposição 3.5.14 ([W, Proposição 11.1.4, pág. 212]) *Seja G um grupo pro-p então*

1. $\mathrm{cd}_q(G) = 0$ *para cada primo* $q \neq p$;
2. $\mathrm{cd}_p(G) = 0$ *se e somente se G é trivial.*

A seguinte proposição simplifica o problema de encontrar a p-dimensão cohomológica de um grupo profinito e é análoga ao lema 2.3.17 do caso abstrato.

Proposição 3.5.15 ([RZ, Proposição 7.1.4, pág. 260]) *Seja G um grupo profinito e seja n um número natural fixo. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\mathrm{cd}_p(G) \leq n$;
2. $H^k(G, A) = 0$, *para todo* $k > n$, *e todo* $A \in \mathrm{DMod}([[\widehat{\mathbb{Z}}G]])$ *p-primário.*
3. $\mathrm{Ext}^{n+1}_{[[\mathbb{F}_pG]]}(\mathbb{F}_p, A) = 0$ *para todo* $A \in \mathrm{DMod}([[\mathbb{F}_pG]])$;
4. *Existe uma resolução projetiva, de comprimento n, do $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo profinito trivial* $\mathbb{F}_p$
$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{F}_p \to 0$$
onde cada $P_i \in \mathrm{PMod}([[\mathbb{F}_pG]])$;
5. *Se* $0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \to \mathbb{F}_p \to 0$ *é uma sequência exata de $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulos profinitos e cada L_i é projetivo para* $0 \leq i \leq n-1$, *então L_n é projetivo.*

De fato a prova da proposição anterior feita em [RZ] contínua sendo válida se substituimos $\mathbb{F}_p$ por $\mathbb{Z}_p$.

O seguinte lema caracteriza dimensão cohomológica para grupos pro-p.

Lema 3.5.16 ([RZ, Corolário 7.1.6, pág. 263]) *Seja G um grupo pro-p e seja n um número natural fixo. Então* $\mathrm{cd}_p(G) \leq n$ *se e somente se* $H^{n+1}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$.

Definição 3.5.17 *Um **número super natural** é um produto formal $n = \prod_p p^{n(p)}$, onde p percorre o conjunto de todos os número primos e $n(p)$ é um inteiro não negativo ou ∞.*

Sejam m, n dois números super naturais, $m = \prod_p p^{m(p)}$. Dizemos que m *divide* n, e escrevemos $m \mid n$, se para cada p, $m(p) \leq n(p)$. Se
$$\left\{ n_i = \prod_p p^{n(p,i)} \mid i \in I \right\}$$
é uma coleção de números super naturais, então definimos seu **produto**, **máximo divisor comum** e **mínimo múltiplo comum**:

1. $\prod_{i\in I} n_i = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \sum_i n(p,i)$;
2. $\mathrm{mdc}(\{n_i\}_{i\in\in I}) = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \min_i \{n(p,i)\}$;
3. $\mathrm{mmc}(\{n_i\}_{i\in\in I}) = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \max_i \{n(p,i)\}$;

Definição 3.5.18 *Seja G um grupo profinito e S um subgrupo fechado de G. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os subgrupos normais abertos de G. Definimos o* ***índice*** *$[G:S]$ de S em G como sendo o número supernatural*

$$[G:S] = \mathrm{mmc}\left\{[G/U : SU/U] \mid U \in \mathcal{U}\right\}.$$

A ***ordem*** *de G, $|G|$, é o número supernatural $|G| = [G:1] = \mathrm{mmc}\{|G/U| \mid U \in \mathcal{U}\}$; e a* ***ordem de um elemento*** *$g \in G$ é a ordem do subgrupo topologicamente gerado por g, i.e. o fecho do grupo abstrato gerado por g.*

Definição 3.5.19 *Seja G um grupo profinito, e seja S um subgrupo fechado de G, dizemos que S é um* ***p-subgrupo de Sylow*** *de G se:*

1. *$|S| = p^{n(p)}$ onde $0 \leq n(p) \leq \infty$*
2. *$p \nmid [G:S]$.*

Exemplos 3.5.20 *Seja G um grupo profinito tal que $|G| = p^{n(p)}$, $0 \leq n(p) \leq \infty$ então G é grupo pro-p, pois*

$$G = \varprojlim_{U\in\mathcal{U}} G/U,$$

onde $\mathcal{U}$ é o conjunto de todos os subgrupos normais abertos de G e

$$p^{n(p)} = |G| = \mathrm{mmc}\{|G/U| \mid U \in \mathcal{U}\}$$

logo a ordem de G/U é potencia de p para todo $U \in \mathcal{U}$, portanto G/U é p-grupo finito.

A recíproca também é verdadeira, se G é grupo pro-p então

$$G = \varprojlim_{U\in\mathcal{U}} G/U,$$

onde $\mathcal{U}$ é o conjunto de todos os subgrupos normais abertos de G e a ordem de G/U é potencia de p para todo $U \in \mathcal{U}$, logo

$$|G| = \mathrm{mmc}\{|G/U| \mid U \in \mathcal{U}\} = p^{n(p)}.$$

∎

Pelo exemplo e a definição anterior podemos dizer que um p-subgrupo de Sylow de um grupo profinito G é um subgrupo pro-p maximal.

O seguinte resultado estende os teoremas de Sylow para grupos finitos a grupos profinitos.

Teorema 3.5.21 ([W, Proposição 2.2.2, pág. 36]) *Seja G qualquer grupo profinito e seja p um número primo fixo. Então*

1. *Existe um p-subgrupo de Sylow de G.*
2. *Qualquer p-subgrupo fechado de G está contido num p-subgrupo de Sylow de G.*
3. *Quaisquer dois p-subgrupos de Sylow de G são conjugados em G.*
4. *Se P é um p-subgrupo de Sylow de G e T é um subgrupo pro-p de G então $g^{-1}Tg$ é um subgrupo fechado de P para algum $g \in G$.*

Exemplos 3.5.22 *Se G é grupo pro-p e $q \neq p$ é um primo, então o único q-subgrupo de Sylow de G é o grupo trivial. Seja S um q-subgrupo de Sylow de G, logo pelo análogo do teorema de Lagrange para grupos profinitos $|S|\,[G:S] = |G| = p^{n(p)}$, veja [W, Proposição 2.1.2, pág. 35], logo $q^{\alpha(q)} = |S| = p^{m(p)}$, $0 \leq m(p) \leq \infty$ e $0 \leq \alpha(q) \leq \infty$. Portanto é verdade que $q^{\alpha(q)} \mid p^{m(p)}$, o que implica $0 \leq \alpha(q) \leq m(q) = 0$ logo $|S| = q^{\alpha(q)} = q^0 = 1$.* ∎

Os seguintes resultados relacionam a p-dimensão cohomológica de um grupo profinito e a de seus subgrupos fechados.

Teorema 3.5.23 ([RZ, Teorema 7.3.1, pág. 269]) *Seja G um grupo profinito, S um subgrupo fechado de G e p um número primo. Então*

1. $\mathrm{cd}_p(S) \leq \mathrm{cd}_p(G)$.
2. *Se $p \nmid [G:S]$ então* $\mathrm{cd}_p(S) = \mathrm{cd}_p(G)$.
3. *Se $\mathrm{cd}_p(G) < \infty$ e S é aberto em G então* $\mathrm{cd}_p(S) = \mathrm{cd}_p(G)$.

Note que a exigência de que S seja subgrupo fechado garante que S também é um grupo profinito.

Teorema 3.5.24 ([RZ, Corolário 7.3.3, pág. 271]) *Seja G um grupo profinito e seja G_p um p-subgrupo de Sylow de G, então* $\mathrm{cd}_p(G) = \mathrm{cd}_p(G_p)$.

Teorema 3.5.25 ([RZ, Teorema 7.3.7, pág. 274])

1. *Seja G um grupo profinito que não tem subgrupos de ordem p (i.e. $p \nmid |G|$), e seja S um subgrupo aberto de G. Então* $\mathrm{cd}_p(G) = \mathrm{cd}_p(S)$.

2. *Seja G um grupo pro-p livre de torção. Se G contém um subgrupo aberto que é um grupo pro-p livre, (neste caso dizemos que G é virtualmente um grupo pro-p livre), então G é livre como grupo pro-p.*

Observação 3.5.26 *Grupo pro-p livre será definido na seção 3.5.4.*

Teorema 3.5.27 ([W, Proposição 11.1.5, pág. 212]) *Seja G um grupo profinito.*

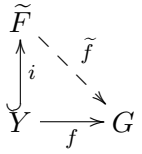
1. *Se* $\mathrm{cd}_p(G)$ *é finita então G não tem elementos de ordem p.*

2. *Se* $\mathrm{cd}_p(G) = 0$ *então os p-subgrupos de Sylow de G são triviais.*

3.5.4 Geradores e Relações para Grupos pro-p

Grupos livres desempenham um papel importante tanto na teoria de grupos abstratos como na teoria de grupos pro-p. De modo análogo ao caso abstrato, grupos pro-p livres são definidos pela propriedade universal e no nosso caso grupos pro-p livres serão considerados em bases finitas.

Definição 3.5.28 *Seja Y um conjunto finito e $\widetilde{F}$ um grupo pro-p contendo Y, dizemos que $\widetilde{F}$ é* ***livre em Y*** *se para cada grupo pro-p G, cada aplicação de conjuntos $f : Y \to G$ tem uma única extensão a um homomorfismo contínuo de grupos pro-p $\widetilde{f} : \widetilde{F} \to G$, i.e. o seguinte diagrama comuta:*



Exemplos 3.5.29 *Seja $Y = \{y\}$ um conjunto consistindo de um elemento só, então $\mathbb{Z}_p$ o completamento por-p de $\mathbb{Z}$, é um grupo pro-p livre em Y. Pois podemos identificar $y \leftrightarrow 1 \in \mathbb{Z}_p$ e assim temos que para cada grupo pro-p G e cada aplicação de conjuntos $f : Y \to G$, levando $y \to g$ para algum $g \in G$, existe um homomorfismo de grupos pro-p, $\widetilde{f} : \mathbb{Z}_p \to G$ dado por $z \to g^z$ que é contínuo e o único que leva $1 \to g$, isto é provado na proposição 1.5.3 de [W, pág. 29], logo é o único que estende f:*

$$\widetilde{f} \circ i(y) = \widetilde{f}(1) = g^1 = g = f(y)$$

onde i é a aplicação inclusão. ∎

Seja X um conjunto finito, pelo teorema 2.3.29 existe um grupo abstrato F que é livre com base X, vamos denotar este grupo como $F(X)$ para enfatizar o fato que F foi construído a partir de X. Seja $F(X)_{\widehat{p}}$ o completamento pro-p de $F(X)$, para algum primo p fixo,

$$F(X)_{\widehat{p}} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} F(X)/N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \lhd F(X) \mid [F(X) : N] < \infty,\ F(X)/N \in \mathcal{C}\}$ e $\mathcal{C}$ é a classe de todos os p-grupos finitos.

Como a classe de todos os p-grupos finitos satisfaz as propriedades $\mathcal{C}1$, $\mathcal{C}2$, $\mathcal{C}3$, $\mathcal{C}4$ e $\mathcal{C}5$, a proposição 3.2.17 nos diz que $F(X)$ é residualmente um p-grupo, ou seja $\cap_{N \in \mathcal{N}} N = 1$, portanto $j : F(X) \to F(X)_{\widehat{p}}$, o homomorfismo de grupos definido em (3.2), é injetor e X mergulha em $F(X)_{\widehat{p}}$, pois $X \hookrightarrow F(X) \xrightarrow{j} F(X)_{\widehat{p}}$.

O seguinte teorema mostra que existem grupos pro-p livres e relaciona grupos abstratos livres com grupos pro-p livres.

Teorema 3.5.30 ([W, Proposição 5.1.3′, pág. 72]) *Seja X um conjunto finito, então o grupo pro-p $F(X)_{\widehat{p}}$ é livre com base X.*

Teorema 3.5.31 ([RZ, pág. 290]) *Todo grupo pro-p G f.g. é um quociente de um grupo pro-p livre.*

Observe que em [RZ, pág. 290] é exigido que todo subgrupo aberto U de G contenha todos, a menos de uma quantidade finita, os elementos do conjunto X de geradores de G, neste caso X é dito um **conjunto de geradores de G convergindo a** 1. Mas no nosso caso esta hipótese é automaticamente satisfeita já que exigimos que o conjunto de geradores de G seja finito.

Teorema 3.5.32 ([RZ, Teorema 7.7.4, pág. 286]) *Seja G um grupo pro-p. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. $\mathrm{cd}_p(G) \leq 1$;
2. $H^2(G, \mathbb{F}_p) = 0$;
3. *G é um grupo pro-p livre.*

Observe que o teorema anterior junto com a proposição 3.5.14, justificam que um grupo pro-p G não trivial é livre se e somente se $\mathrm{cd}_p(G) = 1$.

Teorema 3.5.33 *Todo subgrupo fechado de um grupo pro-p livre é um grupo pro-p livre.*

Demonstração: Seja G um grupo pro-p livre e seja H um subgrupo fechado de G. Então

$$\mathrm{cd}_p(H) \leq \mathrm{cd}_p(G) \leq 1, \text{ pelo teorema 3.5.23 (1).}$$

Logo, pelo teorema 3.5.32, H é grupo pro-p livre. ∎

Definição 3.5.34 *Dizemos que um grupo pro-p G é **finitamente apresentável** se existe um conjunto finito $X = \{x_k : k \in K\}$, chamado de **geradores** de G e um conjunto finito $\Delta = \{r_j = 1 : j \in J\}$, chamado de **relações** correspondentes ao conjunto de geradores X, tal que*

$$G \simeq \frac{F(X)_{\widehat{p}}}{\overline{\langle R_1 \rangle}^{F(X)_{\widehat{p}}}},$$

*onde $\overline{\langle R_1 \rangle}^{F(X)_{\widehat{p}}}$ é o subgrupo minimal de $F(X)_{\widehat{p}}$ que é fechado, normal e contém o conjunto $R_1 = \{r_j\}_{j \in J}$. Dizemos que $\langle X \mid \Delta \rangle$ é uma **apresentação finita** de G.*

Grupos pro-p livres f.g. são finitamente apresentáveis. Se G_1, G_2 são grupos finitamente apresentáveis então $G_1 \times G_2$ é finitamente apresentável, disto segue que grupos pro-p abelianos f.g. são finitamente apresentáveis.

Proposição 3.5.35 ([W, Corolário 12.1.3, pág. 239]) *Todo p-grupo finito é finitamente apresentável se visto como um grupo pro-p.*

Teorema 3.5.36 ([RZ, Teorema 7.8.1, pág. 288]) *Seja G um grupo pro-p f.g. e seja X um conjunto minimal de geradores de G. Então*

$$|X| = \dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{F}_p)) = \dim_{\mathbb{F}_p}(H_1(G, \mathbb{F}_p)).$$

Teorema 3.5.37 ([RZ, Teorema 7.8.3, pág. 290]) *Seja G um grupo pro-p f.g. e seja R_1 um conjunto minimal de relações de G, tal que R_1 é um subconjunto de um grupo pro-p livre com base X, com X como no teorema 3.5.36. Então*

$$|R_1| = \dim_{\mathbb{F}_p}(H^2(G, \mathbb{F}_p)) = \dim_{\mathbb{F}_p}(H_2(G, \mathbb{F}_p)).$$

Observe que se G é um grupo pro-p então $H^n(G, \mathbb{F}_p)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}_p$, logo faz sentido falar da $\dim_{\mathbb{F}_p}(H^n(G, \mathbb{F}_p))$.

Definição 3.5.38 *Seja G um grupo pro-p finitamente apresentável, definimos a **deficiência** de G como o número $\dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{F}_p)) - \dim_{\mathbb{F}_p}(H^2(G, \mathbb{F}_p))$. Denotaremos a deficiência de G por $\mathrm{def}\, G$.*

Observe que se $f : \widetilde{F} \twoheadrightarrow G$ é um epimorfismo de grupos pro-p, com $\widetilde{F}$ um grupo pro-p livre com base X finita e R é um subconjunto do $\ker f$ que gera topologicamente $\ker f$ como subgrupo normal fechado de $\widetilde{F}$, i.e. $\ker f = \overline{\langle R \rangle}^{\widetilde{F}}$, com $|R|$ minimal possível, pode ser demonstrado que

$$\mathrm{def}(G) = |X| - |R|\,, \tag{3.3}$$

depende só de G e não da escolha de F e f.

Proposição 3.5.39 ([W, Proposição 12.2.1, pág. 244]) *Seja G um grupo pro-p tendo uma apresentação com d geradores e r relações e seja H um subgrupo aberto de índice n. Então H tem uma apresentação com d_1 geradores e r_1 relações, onde $d_1 - 1 = n(d-1)$ e $r_1 = nr$.*

Proposição 3.5.40 ([W, Proposição 12.2.2, pág. 244]) *Suponha que G é um grupo pro-p que tem um subgrupo normal N tal que ambos N e G/N são finitamente apresentáveis. Então G é finitamente apresentável.*

Lema 3.5.41 ([LS, Lema 16.4.3, pág. 370]) *Suponha que o grupo pro-p G tem uma apresentação $G = \langle X \mid R \rangle$. Se $|R| < |X|$ então G tem abelinização infinita i.e. $G/[G,G]$ é infinito.*

3.5.5 Grupos pro-p de Dualidade de Poincaré

Definição 3.5.42 *Um **grupo profinito G** é **de tipo** $\mathrm{FP}_\mathbf{m}$ **sobre** $\mathbb{Z}_p$, para algum $0 \leq m < \infty$, se existe uma resolução projetiva profinita do $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$,*

$$\cdots \to P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

*onde cada P_i é $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo projetivo f.g. para $i \leq m$. Um **grupo profinito G** é **de tipo** $\mathrm{FP}_\boldsymbol{\infty}$ sobre $\mathbb{Z}_p$ se é de tipo FP_m para todo inteiro $m \geq 0$.*

Define-se analogamente **grupo profinito de tipo** $\mathrm{FP}_\mathbf{m}$ **sobre** $\mathbb{F}_p$ para algum $0 \leq m \leq \infty$, trocando $\mathbb{Z}_p$ por $\mathbb{F}_p$ na definição anterior.

Teorema 3.5.43 ([SW, Proposição 3.7.1, pág. 377]) *Um grupo profinito G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se e somente se para cada resolução projetiva parcial profinita*

$$P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

do $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$, com $k < m$ e cada P_i f.g; o $\ker(P_k \to P_{k-1})$ é f.g.

Lema 3.5.44 *Um grupo pro-p G é de tipo* FP_m *sobre* $\mathbb{Z}_p$ *se e somente se* $H_i(G, \mathbb{F}_p)$ *é finito para todo* $i \leq m$. *Analogamente* G *é de tipo* FP_m *sobre* $\mathbb{Z}_p$ *se e somente se* $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ *é finito para todo* $i \leq m$.

Demonstração: Suponha primeiro que G é um grupo pro-p de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$, então existe uma resolução projetiva pro-p do $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$

$$\mathcal{P} : \cdots \to P_i \overset{d_i}{\to} P_{i-1} \overset{d_{i-1}}{\to} \cdots \to P_0 \overset{d_0}{\to} \mathbb{Z}_p \to 0,$$

onde P_i é f.g. como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo, para cada $i \leq m$.

Pela observação 2.3.25, $P_i \oplus M_i = [[\mathbb{Z}_pG]]^{d_i}$, para algum $d_i \geq 0$ e para cada $i \leq m$. Por um lado temos que

$$(P_i \oplus M_i) \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p = \left(P_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p\right) \oplus \left(M_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p\right), \tag{3.4}$$

e pelo outro

$$[[\mathbb{Z}_pG]]^{d_i} \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p^{d_i}. \tag{3.5}$$

Como (3.4) e (3.5) são iguais, $P_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p$ é $\mathbb{F}_p$-módulo projetivo f.g. mas módulos projetivos sobre corpos são módulos livres, logo existe $0 \leq k_i \leq d_i$ tal que $P_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p^{k_i}$, ou seja $P_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p$ é f.g. como $\mathbb{F}_p$-módulo. Logo $P_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p$ é finito para todo $i \leq m$, isto implica que

$$H_i(G, \mathbb{F}_p) = H_i\left(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p\right) = \frac{\ker(d_i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})}{\mathrm{im}(d_{i+1} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})} \text{ é finito } \forall i \leq m.$$

Suponha agora que $H_i(G, \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$ é finito para cada $i \leq m$. Seja

$$P_k \overset{d_k}{\to} P_{k-1} \overset{d_{k-1}}{\to} \cdots \to P_0 \overset{d_0}{\to} \mathbb{Z}_p \to 0 \tag{3.6}$$

uma resolução projetiva parcial pro-p do $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$ e cada P_l f.g. com $l = 0, \cdots, k$, e $k < m$. Considere as sequências exatas curtas:

$$\begin{aligned}
&0 \to \ker d_0 \to P_0 \overset{d_0}{\to} \mathrm{im}\, d_0 = \mathbb{Z}_p \to 0,\\
&0 \to \ker d_1 \to P_1 \overset{d_1}{\to} \mathrm{im}\, d_1 = \ker d_0 \to 0,\\
&0 \to \ker d_2 \to P_2 \overset{d_2}{\to} \mathrm{im}\, d_2 = \ker d_1 \to 0,\\
&\quad\vdots\\
&0 \to \ker d_{k-1} \to P_{k-1} \overset{d_{k-1}}{\to} \mathrm{im}\, d_{k-1} = \ker d_{k-2} \to 0,
\end{aligned}$$

para cada uma delas existe uma sequência exata longa em Tor

$$\begin{aligned}
\cdots \to \mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_j, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(P_j, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\mathrm{im}\, d_j, \mathbb{F}_p) \to\\
\to \mathrm{Tor}_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_j, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(P_j, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\mathrm{im}\, d_j, \mathbb{F}_p) \to \ldots,
\end{aligned}$$

para $j = 0, \cdots, k-1$ e $k < m$.

Mas

$$\mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(P_j, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Tor}_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(P_j, \mathbb{F}_p) = 0, \text{ para todo } j \leq k-1 \text{ e } i \geq 2,$$

pois P_j é projetivo, logo

$$\mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\mathrm{im}\, d_j, \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Tor}_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_j, \mathbb{F}_p), \text{ para todo } j \leq k-1 \text{ e } i \geq 2,$$

mas pela exatidão da resolução projetiva parcial (3.6) $\mathrm{im}\, d_j = \ker d_{j-1}$, assim temos

$$\mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_{j-1}, \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Tor}_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_j, \mathbb{F}_p), \text{ para todo } j \leq k-1 \text{ e } i \geq 2.$$

Em particular

$$\begin{aligned} H_{k-1}(G, \mathbb{F}_p) &\simeq \mathrm{Tor}_{k-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Tor}_{k-2}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_0, \mathbb{F}_p) \\ &\simeq \mathrm{Tor}_{k-3}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_1, \mathbb{F}_p) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Tor}_1^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_{k-1}, \mathbb{F}_p) \end{aligned}$$

é finito pois $k-1 < m$.

Considere agora a sequência exata curta

$$0 \to \ker d_k \to P_k \xrightarrow{d_k} \mathrm{im}\, d_k = \ker d_{k-1} \to 0,$$

então existe sequência exata longa em Tor

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Tor}_1^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_{k-1}, \mathbb{F}_p) \to (\ker d_k) \,\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p \to \\ \to P_k \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p \to (\ker d_{k-1}) \,\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p \to 0. \end{aligned}$$

Logo como $\mathrm{Tor}_1^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\ker d_{k-1}, \mathbb{F}_p)$ é finito e P_k é $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo projetivo f.g. pelo feito na primeira parte da demonstração $P_k \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p$ também é finito, logo $(\ker d_k) \,\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p$ é finito o que implica que $\ker d_k$ é f.g. pelo exemplo 3.4.17 (1) e pelo lema de Nakayama (lema 3.4.26). Portanto, pelo teorema 3.5.43, o grupo pro-p G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$. ∎

Teorema 3.5.45 ([SW, Proposição 4.2.1, pág. 382])

1. *Seja G um grupo pro-p e seja H um subgrupo pro-p aberto de G. Então G tem tipo* FP_m *sobre $\mathbb{Z}_p$ se e somente se H tem tipo* FP_m *sobre $\mathbb{Z}_p$.*

2. *O grupo pro-p G é finitamente apresentável se e somente se G é* FP_2.

Seja G um grupo pro-p e seja n um número natural. Dizemos que G é um **grupo pro-p de dualidade** de dimensão n se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\mathrm{cd}_p(G) = n$;
2. G tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$;
3. $H^i(G, [[\mathbb{Z}_p G]]) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq n \\ \text{livre de } p\text{-torção se } i = n \end{cases}$,

onde **livre de p-torção** significa que nenhum dos elementos de $H^n(G, [[\mathbb{Z}_p G]])$ tem ordem potência de p.

Como no caso abstrato, grupos pro-p de dualidad podem ser caraterizados pelo seguinte fato:

Teorema 3.5.46 ([SW, Teorema 4.5.1, pág. 389]) *Seja G um grupo pro-p de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e $\mathrm{cd}_p(G) = n < \infty$. Então G é um grupo de dualidade se e somente se existe um isomorfismo natural $H^{n-i}(G, \ ) \simeq H_i(G, H^i(G, [[\mathbb{Z}_p G]])\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p})$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Se, além disso $H^n(G, [[\mathbb{Z}_p G]]) \simeq \mathbb{Z}_p$, G é chamado de **grupo pro-p de dualidade de Poincaré** de dimensão n. Mais ainda, se a ação de G em $H^n(G, [[\mathbb{Z}_p G]])$ é trivial, G é chamado de grupo **pro-p de dualidade de Poincaré orientável**; caso contrario dizemos que G é **não orientável**.

Existem duas definições de um grupo de dualidade de Poincaré profinito G num primo p de dimensão n, elas podem ser encontradas em [SW] e [NSW]. As definições diferem em que uma requere que o grupo G seja de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e a outra não. Neste texto adoptaremos a definição de [SW]. De qualquer jeito ambas as definições são equivalentes no caso que o grupo G seja pro-p.

Observe que, apesar de $[[\mathbb{Z}_p G]]$ não ser $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulo discreto, $H^i(G, [[\mathbb{Z}_p G]])$ faz sentido pois também é possível definir cohomologia de grupos profinitos com coeficientes em $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulos profinitos. Para tanto, seja G um grupo pro-p de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e de dimensão cohomológica finita e seja

$$\mathcal{P} : 0 \to P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

uma resolução projetiva do $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulo trivial profinito $\mathbb{Z}_p$ com todos os P_i f.g. Então definimos $H^i(G, [[\mathbb{Z}_p G]])$ como

$$H^i(G, [[\mathbb{Z}_p G]]) = H^i(\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_p G]]}(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}, [[\mathbb{Z}_p G]])).$$

Observe que, pelo lema 3.3.9, cada homomorfismo abstrato de $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulos $P_i \to [[\mathbb{Z}_p G]]$ é homomorfismo contínuo. De fato $\mathcal{P}$ pode ser escolhida qualquer resolução na categoria de $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulos abstratos e, pelo lema 3.3.9, $\mathcal{P}$ seria também uma resolução na categoria de módulos pro-p pois todos os diferenciais de $\mathcal{P}$ são homomorfismos contínuos. Assim a definição de $H^i(G, [[\mathbb{Z}_p G]])$ não depende da escolha da resolução $\mathcal{P}$.

Exemplos 3.5.47 *O único grupo pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão* 1 *é* $\mathbb{Z}_p$. ∎

Análogamente ao caso abstrato temos:

Proposição 3.5.48 ([SW, Proposição 4.4.1, pág. 388]) *Seja* G *um grupo pro-p de tipo* FP_∞ *sobre* $\mathbb{Z}_p$ *e* $\mathrm{cd}_p(G) = n < \infty$ *e seja* H *um subgrupo aberto de* G*. Então* G *é um grupo de dualidade (respetivamente grupo de dualidade de Poincaré) se e somente se* H *é um grupo de dualidade (respetivamente grupo de dualidade de Poincaré).*

3.5.6 Característica de Euler de Grupos profinitos

Para qualquer grupo abeliano profinito f.g. B, definimos o **posto** de B por

$$\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}(B) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} B),$$

onde $\mathbb{Q}_p$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}_p$.

Observe que $\mathbb{Q}_p$ não é grupo abeliano profinito pois não é compacto.

Definição 3.5.49 *Seja* G *um grupo profinito e* p *um primo. Suponha que* G *é de tipo* FP_∞ *sobre* $\mathbb{Z}_p$ *e* $\mathrm{cd}_p(G) < \infty$*, definimos então* $\chi_p(G)$ *a* **p-*característica de Euler*** *de* G *por*

$$\chi_p(G) = \sum_{0 \le i \le \mathrm{cd}_p(G)} (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}\left(H_i\left(G, \mathbb{Z}_p\right)\right).$$

Seja $\mathcal{S} : 0 \to S_n \to S_{n-1} \to \cdots \to S_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0$ uma resolução projetiva do $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$ com todos os S_i f.g. Então $\chi_p(G) = \sum_i (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}\left(H_i\left(\mathcal{S}_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{Z}_p\right)\right)$, mas como $\mathbb{Z}_p$ é f.g. como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo, temos

$$\begin{aligned}
\chi_p(G) &= \sum_i (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}\left(H_i\left(\mathcal{S}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{Z}_p\right)\right) \\
&= \sum_i (-1)^i \,\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}\left(S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{Z}_p\right) \text{ pelo análogo da proposição 2.5.3 para o caso profinito} \\
&= \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}\left(S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p\right) \\
&= \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_i\left(\mathcal{S}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{[[\mathbb{Z}_pG]]} \mathbb{F}_p\right)\right) \\
&= \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}\left(H_i\left(G, \mathbb{F}_p\right)\right).
\end{aligned}$$

Note que em geral para um $\mathbb{Z}_p$-módulo f.g. A

$$\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}(A) \neq \dim_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A).$$

Por exemplo se $A = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{F}_p$ então $\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}(A) = 1$ e $\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A) = 2$. Mas, no nosso caso, S_i é $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo profinito projetivo f.g. então é somando de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo profinito livre, assim

$$S_i \oplus L_i = [[\mathbb{Z}_pG]]^{m_i}.$$

Isto implica que $S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_p G]]} \mathbb{Z}_p$ é somando direto de $[[\mathbb{Z}_p G]]^{m_i} \otimes_{[[\mathbb{Z}_p G]]} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p^{m_i}$ que é $\mathbb{Z}_p$-módulo livre f.g. e cada $\mathbb{Z}_p$-módulo f.g. é soma direta de $\mathbb{Z}_p$-módulos cíclicos, pois $\mathbb{Z}_p$ é domínio de ideais principais (veja o Teorema de Decomposição Cíclica de um Módulo Primário, [Ro, pág. 149]). Logo cada submódulo de $\mathbb{Z}_p^{m_i}$ é $\mathbb{Z}_p^{k_i}$ para algum $k_i \leq m_i$, ou seja

$$S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_p G]]} \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p^{k_i} \leq \mathbb{Z}_p^{m_i}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_p G]]} \mathbb{F}_p &\simeq S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_p G]]} \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \\ &= \mathbb{Z}_p^{k_i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p^{k_i}. \end{aligned}$$

Logo $\text{posto}_{\mathbb{Z}_p}\left(S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_p G]]} \mathbb{Z}_p\right) = k_i = \dim_{\mathbb{F}_p}\left(S_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_p G]]} \mathbb{F}_p\right)$.

Prova-se analogamente à proposição 2.5.6 do caso abstrato que:

Proposição 3.5.50 *Se G for um grupo pro-p orientável de dualidade de Poincaré de dimensão n impar, então $\chi_p(G) = 0$.*

Capítulo 4

Completamentos Pro-p de Grupos de Dualidade de Poincaré de Dimensão 3

Ao longo deste capítulo, p denotará sempre um número primo fixo, Tor e Ext serão funtores de módulos abstratos, mesmo se aplicados a anéis de grupos completos.

Para um grupo abstrato G denotamos por $G_{\widehat{p}}$ e $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ o completamento pro-p e o limite inverso

$$\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} G/N,$$

onde $\mathcal{N}$ é uma coleção não vazia de subgrupos normais do grupo G, tal que cada quociente G/N, com $N \in \mathcal{N}$, pertence à classe $\mathcal{C}$ de p-grupos finitos, respetivamente. Note que, na verdade, $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ é $\mathcal{K}_{\mathcal{N}}(G)$ definido na seção 3.2.1, mas usaremos a notação $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ para maior simplicidade.

Neste capítulo estabelecemos uma relação entre homologia e cohomologia de um grupo G e homologia e cohomologia contínuas do seu completamento pro-p.

Também discutimos algumas condições suficientes para que vários invariantes homológicos de G sejam preservados no completamento. Estes invariantes são, por exemplo, o tipo homológico, a característica de Euler e a dimensão cohomológica.

Isto se aplica principalmente à classe de grupos de dualidade de Poincaré de dimensão 3, mas muitos resultados continuam sendo válidos para uma classe mais ampla de grupos.

Os resultados deste capítulo foram originalmente demonstrados em [KZ].

4.1 Completamentos de Grupos Abstrados de Tipo FP_m

O seguinte lema estabelece uma relação entre as propriedades de módulos abstratos sobre o anel topológico $[[RG]]$, onde G é um grupo profinito e $R = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$, e módulos profinitos sobre o mesmo anel ou entre as propriedades do mesmo grupo profinito G.

Lema 4.1.1 *Seja p um número primo, R o anel $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$ e G um grupo profinito. Então*

1. *Cada $[[RG]]$-módulo abstrato projetivo f.g. é um $[[RG]]$-módulo profinito projetivo.*

2. *Se o $[[RG]]$-módulo trivial abstrato R tem tipo homológico FP_m então o grupo profinito G tem tipo homológico FP_m sobre R.*

3. *Se o $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo abstrato trivial $\mathbb{Z}_p$ tem resolução projetiva de comprimento menor ou igual a m e todos os módulos projetivos são f.g. então $\mathrm{cd}_p(G) \leq m$.*

4. *Se o $[[RG]]$-módulo trivial abstrato R tem tipo FP_m, então para qualquer $[[RG]]$-módulo finito discreto M e $i \leq m-1$ existe um isomorfismo natural entre o funtor de módulos abstratos $\mathrm{Ext}^i_{[[RG]]}(R, M)$ e a cohomologia contínua $H^i(G, M)$.*

5. *Se o $[[RG]]$-módulo trivial abstrato R tem tipo FP_m, então para qualquer $[[RG]]$-módulo profinito N e $i \leq m-1$ existe um isomorfismo natural entre o funtor de módulos abstratos $\mathrm{Tor}_i^{[[RG]]}(R, N)$ e a homologia contínua $H_i(G, N)$.*

Demonstração:

1. Seja P um $[[RG]]$-módulo abstrato projetivo f.g; então P é somando de um $[[RG]]$-módulo abstrato livre f.g., i.e.

$$F = [[RG]]^n = P \oplus P\prime$$

Logo F é um $[[RG]]$-módulo profinito livre f.g, pois a soma é finita. Seja $\varphi : F \to F$ a projeção canônica na primeira coordenada, $(p, p') \mapsto (p, 0)$, φ é um homomorfismo de módulos abstratos sobre o anel $[[RG]]$, tal que $\mathrm{im}\,\varphi = P$. Pelo Lema 3.3.9, φ é contínua, logo P é um $[[RG]]$-módulo profinito, por ser imagem contínua de profinito, e um somando direto do $[[RG]]$-módulo profinito livre, portanto P é um $[[RG]]$-módulo profinito projetivo.

2. Como R tem tipo homológico FP_m como $[[RG]]$-módulo abstrato, existe uma resolução projetiva de $[[RG]]$-módulos abstratos

$$\mathcal{P} : \cdots \to P_i \xrightarrow{\partial_i} \cdots \to P_0 \xrightarrow{\partial_0} R \to 0,$$

tal que P_i é f.g. para cada $i \leq m$. Pela parte 1, P_i é $[[RG]]$-módulo profinito projetivo f.g. para cada $i \leq m$ e pelo lema 3.3.9, ∂_i é contínua para cada $i \leq m$. Logo

$$\mathcal{P}^{(m)} : P_m \xrightarrow{\partial_m} \cdots \to P_0 \xrightarrow{\partial_0} R \to 0$$

é uma resolução parcial profinita projetiva de tipo finito do $[[RG]]$-módulo trivial R. Logo G tem tipo FP_m sobre R.

3. Seja
$$\mathcal{P} : 0 \to P_m \stackrel{\partial_m}{\to} \cdots \to P_0 \stackrel{\partial_0}{\to} \mathbb{Z}_p \to 0$$
uma resolução projetiva do $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo abstrato trivial $\mathbb{Z}_p$ tal que para cada i, P_i é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo abstrato projetivo f.g. Pela prova de 2, $\mathcal{P}$ é uma resolução projetiva profinita de $\mathbb{Z}_p$, logo pela proposição 3.5.15 $\mathrm{cd}_p(G) \leq m$.

4. Como o $[[RG]]$-módulo trivial abstrato R tem tipo FP_m existe uma resolução projetiva abstrata
$$\mathcal{P} : \cdots \to P_m \stackrel{\partial_m}{\to} \cdots \to P_0 \stackrel{\partial_0}{\to} R \to 0,$$
com módulos projetivos f.g. em dimensão $\leq m$. Por 1 e 2
$$\mathcal{P}^{(m)} : P_m \stackrel{\partial_m}{\to} \cdots \to P_0 \stackrel{\partial_0}{\to} R \to 0$$
é uma resolução profinita projetiva parcial de tipo finito do $[[RG]]$-módulo profinito trivial R e pode ser usada para calcular $H_i(G, N)$ e $H^i(G, M)$ para $i \leq m-1$. Novamente pelo lema 3.3.9 temos que o conjunto de homomorfismos de $[[RG]]$-módulos abstratos indo de qualquer $[[RG]]$-módulo profinito f.g. (em particular P_i para $i \leq m$) a M é o conjunto de todos os homomorfismos de módulos contínuos. Então
$$\mathrm{Ext}^i_{[[RG]]}(R, M) \simeq H^i(\mathrm{Hom}_{[[RG]]}(\mathcal{P}^{\mathrm{del}}, M)) \simeq H^i(G, M), \text{ para } i \leq m-1.$$

5. Usando a resolução profinita projetiva parcial anterior, temos que
$$\mathrm{Tor}_i^{[[RG]]}(R, N) \simeq H_i(\mathcal{P}^{\mathrm{del}} \otimes_{[[RG]]} N) \simeq H_i(\mathcal{P}^{\mathrm{del}} \widehat{\otimes}_{[[RG]]} N) \simeq H_i(G, N) \text{ para } i \leq m-1,$$
onde o isomorfismo $H_i(\mathcal{P}^{\mathrm{del}} \otimes_{[[RG]]} N) \simeq H_i(\mathcal{P}^{\mathrm{del}} \widehat{\otimes}_{[[RG]]} N)$ segue do fato que o produto tensorial abstrato $\otimes_{[[RG]]}$ e o produto tensorial completo $\widehat{\otimes}_{[[RG]]}$ são naturalmente isomorfos se aplicados a módulos profinitos com pelo menos um deles f.g. (proposição 3.4.24 item 4).

∎

Seja G um grupo abstrato de tipo homológico FP_m sobre o anel $\mathbb{Z}$ para algum $m \geq 1$, em particular G é f.g. Então existe uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo à direita trivial $\mathbb{Z}$
$$\mathcal{R} : \cdots \to R_i \stackrel{d_i}{\to} R_{i-1} \to \cdots \to R_0 \stackrel{d_0}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$
com todos os R_i f.g. para $i \leq m$. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de subgrupos normais N de índice finito em G tal que para cada $N \in \mathcal{N}$, $G/N \in \mathcal{C}$, a classe dos p-grupos finitos. O conjunto $\mathcal{N}$ é dirigido no sentido que se N_1, $N_2 \in \mathcal{N}$ então existe $N_3 \in \mathcal{N}$ tal que $N_3 \leq N_1 \cap N_2$, ou seja $\mathcal{N}$ satisfaz a condição (3.1). Definimos
$$\widehat{G}_{\mathcal{N}} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N, \; [[\mathbb{F}_p \widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} [\mathbb{F}_p (G/N)]$$

observe que $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ pode ser o completamento pro-p de G mas também pode ser somente um quociente de tal completamento. Para cada $N \in \mathcal{N}$ definimos

$$\mathcal{R}_N = \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p,$$

logo $\mathcal{R}_N$ é um complexo, em geral não exato, de $[\mathbb{F}_p\,(G/N)]$-módulos projetivos e $\{\mathcal{R}_N\}_{N\in\mathcal{N}}$ é um sistema inverso sobrejetor de complexos via as aplicações sobrejetoras $G/N_1 \to G/N_2$ para os grupos $N_1 \subseteq N_2$ de $\mathcal{N}$. Definimos o complexo $\widehat{\mathcal{R}}$ como

$$\widehat{\mathcal{R}} = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{R}_N. \tag{4.1}$$

Teorema 4.1.2 ([We, Teorema 3.5.8, pág. 83]) *Seja $\cdots \to \mathcal{R}_{N_1} \to \mathcal{R}_{N_0} \to 0$ uma torre de cadeias de complexos de grupos abelianos satisfazendo a condição de Mittag-Leffler (pág. 29). Então existe uma sequência exata, para cada k*

$$0 \to \varprojlim{}^1 H_{k+1}\left(\mathcal{R}_{N_i}\right) \to H_k\left(\varprojlim \mathcal{R}_{N_i}\right) \to \varprojlim H_k\left(\mathcal{R}_{N_i}\right) \to 0,$$

onde $\varprojlim^1$ é um funtor derivado de $\varprojlim$.

Teorema 4.1.3 ([We, pág. 83]) *Se $\left\{V_i, \psi_i^j\right\}$ é uma torre de espaços vetoriais (definição 1.6.9) de dimensão finita sobre um corpo, então $\varprojlim^1 V_i = 0$.*

Lema 4.1.4 *Seja G um grupo abstrato de tipo homológico FP_m sobre o anel $\mathbb{Z}$ para algum $m \geq 1$ e sejam $\mathcal{R}$, $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$, $[[F_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$, $\mathcal{R}_N$, e $\widehat{\mathcal{R}}$, definidos como antes. Então existe um isomorfismo de $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulos abstratos*

$$H_0(\widehat{\mathcal{R}}) = 0 \text{ e } H_i(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(\mathcal{R}_N) \simeq \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N, \mathbb{F}_p) \text{ para } 1 \leq i \leq m-1,$$

onde a ação de G/N em $H_i(N, \mathbb{F}_p)$, induzida por conjugação, induz uma ação de $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ em $\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N, \mathbb{F}_p)$.

Demonstração: Como $\mathcal{R}$ é uma resolução projetiva, então $\mathcal{R}$ é uma sequência exata longa. Também $\otimes_{[\mathbb{Z}N]}\mathbb{F}_p$ é funtor exato à direita, logo

$$R_1 \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p \overset{d_1\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}}{\longrightarrow} R_0 \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p \overset{d_0\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p \to 0$$

é exata, portanto $H_0(\mathcal{R}_N) = 0$. Por outro lado, para $i \geq 1$,

$$H_i(\mathcal{R}_N) = H_i(\mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p) = \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}N]}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p) = H_i(N, \mathbb{F}_p).$$

Como G é f.g. qualquer conjunto de subgrupos normais de índice potência de p em G é enumerável, portanto podemos substituir $\mathcal{N}$ por um subconjunto $\mathcal{N}'$ cofinal enumerável totalmente ordenado, obtendo o mesmo limite inverso: $\widehat{\mathcal{R}} = \varprojlim_{N_i \in \mathcal{N}'} \mathcal{R}_{N_i}$.

Se $N_{i+1} \subseteq N_i$, com N_{i+1}, $N_i \in \mathcal{N}'$, existe um epimorfismo

$$\psi_{N_i}^{N_{i+1}} : \mathcal{R}_{N_{i+1}} \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{N_i}$$

proveniente do sistema inverso que define $\widehat{\mathcal{R}}$. Portanto $\left\{\mathcal{R}_{N_i}, \psi_{N_i}^{N_j}\right\}_{N_i \in \mathcal{N}'}$ é uma torre de cadeias de complexos de grupos abelianos, tal que as aplicações $\psi_{N_i}^{N_{i+1}}$ são sobrejetoras, logo $\left\{\mathcal{R}_{N_i}, \psi_{N_i}^{N_j}\right\}_{N_i \in \mathcal{N}'}$ satisfaz a condição de Mittag-Leffler.

Então o teorema 4.1.2 afirma que para cada i

$$0 \to \varprojlim_{N_k \in \mathcal{N}'}{}^1 H_{i+1}(\mathcal{R}_{N_k}) \to H_i(\varprojlim_{N_k \in \mathcal{N}'} \mathcal{R}_{N_k}) \to \varprojlim_{N_k \in \mathcal{N}'} H_i(\mathcal{R}_{N_k}) \to 0,$$

é uma sequência exata curta.

Mas se $i+1 \leq m$, $H_{i+1}(\mathcal{R}_{N_k}) = H_{i+1}(N_k, \mathbb{F}_p)$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}_p$, pois como G é de tipo FP_m todo subgrupo de índice finito em G é de tipo FP_m, em particular cada $N_k \in \mathcal{N}'$ é de tipo FP_m, isto implica que $H_j(N_k, \mathbb{F}_p)$ é finito para cada $j \leq m$ (veja lema 3.5.44). Então pelo teorema 4.1.3

$$\varprojlim_{N_k \in \mathcal{N}}{}^1 H_{i+1}(\mathcal{R}_{N_k}) = 0 \text{ se } i+1 \leq m.$$

Portanto, se $1 \leq i \leq m-1$

$$H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = H_i(\varprojlim_{N_k \in \mathcal{N}'} \mathcal{R}_{N_k}) \simeq \varprojlim_{N_k \in \mathcal{N}'} H_i(\mathcal{R}_{N_k}) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_i(\mathcal{R}_N).$$

∎

Para cada $i \leq m$, R_i é $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo f.g. Logo existe M_i um $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo tal que $R_i \oplus M_i = [\mathbb{Z}G]^{k_i}$, portanto

$$\begin{aligned}[\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p &= (R_i \oplus M_i) \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p \\ &= \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right) \oplus \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right),\end{aligned}$$

note que como $R_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p$ é somando direto de $[\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p$, donde

$$[\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p = \left([\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right)^{k_i},$$

e como $[\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p \simeq [\mathbb{F}_p(G/N)]$ com isomorfismo $g \otimes f \mapsto f\overline{g}$, onde $f \in \mathbb{F}_p$, $\overline{g}$ é a imagem de $g \in G$ em G/N, logo temos

$$\left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right) \oplus \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right) = [\mathbb{F}_p(G/N)]^{k_i}.$$

Portanto

$$\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right) \oplus \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right) = \left\{ \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} [\mathbb{F}_p(G/N)] \right\}^{k_i} = [[F_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]^{k_i},$$

ou seja,

$$\widehat{R}_i, \text{ o módulo em dimensão } i \text{ de } \widehat{\mathcal{R}}, \text{ é um } [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\text{-módulo projetivo pro-}p \text{ f.g.} \tag{4.2}$$

Por outro lado, se $i \leq m$

$$\begin{aligned} R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] &= R_i\widehat{\otimes}_{[\mathbb{Z}G]}[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]], \text{ pois } R_i \text{ é f.g.} \\ &= R_i\widehat{\otimes}_{[\mathbb{Z}G]}(\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} [\mathbb{F}_p\,(G/N)]) \\ &= \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} (R_i\widehat{\otimes}_{[\mathbb{Z}G]}[\mathbb{F}_p\,(G/N)]), \text{ pois } \varprojlim \text{ comuta com } \widehat{\otimes} \\ &= \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} (R_i\widehat{\otimes}_{[\mathbb{Z}G]} \left([\mathbb{Z}G] \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right)) \\ &= \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}N]} \mathbb{F}_p\right) = \widehat{R}_i. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Observe ainda que

$$\widehat{R}_{-1} = R_{-1} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = \mathbb{F}_p,$$

pois como G tem tipo FP_1, G é f.g. Sejam $g_1, \cdots, g_m$ os geradores do grupo abstrato G, então as imagens $\overline{g_1}, \cdots, \overline{g_m}$ de $g_1, \cdots, g_m$ em $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ geram $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ topologicamente. Portanto o ideal aumentado $((I))$ de $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ é gerado topologicamente por $\overline{g_1} - 1, \cdots, \overline{g_m} - 1$. Como este conjunto é finito, pelo lema 3.3.9, $\overline{g_1} - 1, \cdots, \overline{g_m} - 1$ geram $((I))$ como $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo abstrato. Então

$$[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = \mathbb{F}_p \oplus ((I)) = \mathbb{F}_p \oplus (\overline{g_1} - 1)\,[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \oplus \cdots \oplus (\overline{g_m} - 1)\,[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]],$$

como $\mathbb{F}_p$-módulos. Então para $\lambda \in [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ e $z \in \mathbb{Z}$ temos

$$z \otimes (\overline{g_i} - 1)\lambda = z(\overline{g_i} - 1) \otimes \lambda = 0 \otimes \lambda = 0$$

ou seja $\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} (\overline{g_i} - 1)\,[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Isto implica que

$$\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{F}_p, \tag{4.4}$$

mas G age trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{F}_p$, logo

$$\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{F}_p = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{F}_p. \tag{4.5}$$

Por outro lado $\otimes_{[\mathbb{Z}G]}[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ é funtor exato à direita, logo

$$R_1 \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \xrightarrow{d_1\otimes \mathrm{id}} R_0 \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \xrightarrow{d_0\otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \to 0$$

é sequência exata curta, onde $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}$. Isto implica que

$$\mathrm{im}(\widehat{d}_o) = \mathrm{im}(d_0 \otimes \mathrm{id}) = \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = \mathbb{F}_p, \tag{4.6}$$

por 4.4 e 4.5.

O mesmo argumento continua válido se substituímos $\mathbb{F}_p$ por $\mathbb{Z}_p$.

O seguinte teorema relaciona os tipos homológicos de $\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N, \mathbb{F}_p)$ e $\mathbb{F}_p$ considerados como $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulos.

Teorema 4.1.5 *Suponha que G é um grupo abstrato de tipo FP_m, para algum $m \geq 2$, e $\mathcal{N}$ é um conjunto dirigido de subgrupos normais N de G tal que G/N pertence à classe $\mathcal{C}$ dos p-grupos finitos. Suponha também que o limite inverso $\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N, \mathbb{F}_p)$ é de tipo homológico FP_{m-1-i} como $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo abstrato para cada $1 \leq i \leq m-1$. Então o $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo trivial abstrato $\mathbb{F}_p$ tem tipo FP_m.*

Demonstração: Considere as sequências exatas curtas de módulos

$$0 \to \ker(\widehat{d}_j) \to \widehat{R}_j \to \mathrm{im}(\widehat{d}_j) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{im}(\widehat{d}_j) \to \ker(\widehat{d}_{j-1}) \to H_{j-1}(\widehat{\mathcal{R}}) \to 0$$

a primeira sequência é exata pelo teorema de homomorfismos e a segunda pela definição de homologia. Aqui $\widehat{d}_j$ e $\widehat{R}_j$ denotam os diferenciais e os módulos, respetivamente, do complexo $\widehat{\mathcal{R}}$, definido como anteriormente, em dimensão j.

Vamos provar que $\widehat{R}_j$ é de tipo FP_∞ sobre $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ para $j \leq m$. Por (4.2), $\widehat{R}_j$ é $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo projetivo f.g. Assim

$$0 \to P_0 = \widehat{R}_j \to \widehat{R}_j \to 0$$

é resolução projetiva de $\widehat{R}_j$ onde cada módulo é f.g., o que implica que $\widehat{R}_j$ tem tipo FP_∞.

Vamos provar por indução inversa em j que $\mathrm{im}(\widehat{d}_j)$ é de tipo FP_{m-j} para todo $0 \leq j \leq m$.

Caso $j = m$, o $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo $\widehat{R}_m$ é f.g. logo tem tipo homológico FP_0. Então $\mathrm{im}(\widehat{d}_m)$ é f.g. como $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo, também tem tipo FP_0.

Supomos que a hipótese vale para $j = i$, i.e. $\mathrm{im}(\widehat{d}_i)$ é de tipo FP_{m-i} para algum $1 \leq i \leq m$. Pela hipótese do teorema $H_{i-1}(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_{i-1}(N, \mathbb{F}_p)$ é de tipo homológico FP_{m-i}, logo pelo item (3) do teorema 2.3.28 aplicado na segunda sequência para $j \geq i$, $\ker(\widehat{d}_{i-1})$ é de tipo FP_{m-i}.

Pelo item (4) do teorema 2.3.28, aplicado na primeira sequência, para $j = i-1$, temos que $\mathrm{im}(\widehat{d}_{i-1})$ é de tipo $\mathrm{FP}_{m-(i-1)}$. Isto completa o passo indutivo, por tanto $\mathrm{im}(\widehat{d}_0)$ é de tipo FP_m, mas $\mathrm{im}(\widehat{d}_0) = \mathbb{F}_p$, por (4.6), que é o que queríamos provar. ∎

Teorema 4.1.6 *Suponha que G é um grupo abstrato de tipo FP_∞ e dimensão cohomológica finita, e $\mathcal{N}$ é um conjunto dirigido de subgrupos normais N de G tal que G/N pertence à classe $\mathcal{C}$ dos p-grupos finitos, com p um número primo. Suponha também que o limite inverso $\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N,\mathbb{F}_p) = 0$ para todo $i \geq 1$. Então para cada $m \geq 1$ e $i \geq 1$*

1. $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0$ *e* $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0.$
2. *$\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ é grupo pro-p de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração:

1. Vamos provar que $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0$ por indução sobre m.

   Caso $m = 1$. Como G tem tipo FP_∞ e dimensão cohomológica finita então, pela proposição 2.3.41, G tem tipo FP, logo existe uma resolução projetiva de tipo finito e comprimento finito $j = \mathrm{cd}(G)$ do $[\mathbb{Z}G]$-módulo abstrato trivial $\mathbb{Z}$. Seja

   $$\mathcal{R} : 0 \to R_j \xrightarrow{d_j} R_{j-1} \to \cdots \to R_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$$

   tal resolução.

   Por (4.3), para cada $i \geq 0$, tem-se $\widehat{R}_i \simeq R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$. Logo, para cada $i \geq 1$

   $$\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, [[(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) = \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) = H_i(\mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) = H_i(\widehat{\mathcal{R}}),$$

   mas pelo lema 4.1.4

   $$H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N,\mathbb{F}_p) \text{ e por hipótese } \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N,\mathbb{F}_p) = 0.$$

   Logo $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, [[(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) = 0$, para cada $i \geq 1$.

   Por hipótese indutiva supomos válido o caso $m-1$, ou seja

   $$\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, [[\left(\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) = 0, \text{ para cada } i \geq 1.$$

   Considere a sequência exata curta de $[\mathbb{Z}G]$-módulos abstratos

   $$0 \to [[\left(\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \to [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \to \left[\left[\left(\frac{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}\right]\right] \to 0. \quad (4.7)$$

Observe que

$$\left[\left[\left(\frac{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}\right]\right] = \left[\left[\left(\frac{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}\right]\right] = \left[\left[\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}\right]\right] = \left[\left[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}\right]\right],$$

onde o isomorfismo $\frac{\mathbb{Z}}{p^{(m-1)}\mathbb{Z}} \simeq \frac{p\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}}$ é dado por $z + p^{(m-1)}\mathbb{Z} \mapsto pz + p^m\mathbb{Z}$. Assim a sequência (4.7) fica

$$0 \to [[\left(\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \to [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \to [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \to 0$$

e associada a ela temos a sequência exata longa em Tor

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\left(\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \to \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \to$$
$$\to \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \to \cdots.$$

Por indução

$$\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\left(\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0 \text{ para todo } i \geq 1 \text{ e}$$
$$\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0 \text{ para todo } i \geq 1,$$

o que implica que $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Por definição temos que

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \text{ então } [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]].$$

Seja $\mathcal{R}$ a resolução original, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos o complexo

$$\mathcal{P}_{(m)} = \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]],$$

note que $\mathcal{P}_{(1)} = \widehat{\mathcal{R}}$. Logo $H_0(\mathcal{P}_{(m)}) = 0$, pois o funtor $\otimes_{[\mathbb{Z}G]}[[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ é exato a direita e, para $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} H_i(\mathcal{P}_{(m)}) &= H_i(\mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) \\ &= \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0. \end{aligned}$$

Logo, para cada $m \geq 1$, $\mathcal{P}_{(m)}$ é complexo exato.

Se chamamos de π_m o morfismo

$$\pi_m : [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \to [[\left(\mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}\right)\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$$

sendo $\widehat{G}_{\mathcal{N}} \overset{\mathrm{id}}{\to} \widehat{G}_{\mathcal{N}}$ e a projeção canônica $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{(m-1)}\mathbb{Z}$, então $\left\{\mathcal{P}_{(m)}, \mathrm{id}_{R_i} \otimes \pi_m\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ é um sistema inverso sobrejetor. Seja $\mathcal{P}$ o complexo $\mathcal{P} = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_{(m)}$. Então, pelo teorema 4.1.2, para cada k existe uma sequência exata curta

$$0 \to \varprojlim_{m\in\mathbb{N}}{}^1 H_{k+1}(\mathcal{P}_{(m)}) \to H_k(\mathcal{P}) \to \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} H_k(\mathcal{P}_{(m)}) \to 0,$$

mas $\mathcal{P}_{(m)}$ é exato para todo $m \geq 1$, o que implica

$$\varprojlim_{m\in\mathbb{N}}{}^1 H_{k+1}(\mathcal{P}_{(m)}) = 0 \text{ e } \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} H_k(\mathcal{P}_{(m)}) = 0,$$

e portanto $H_k(\mathcal{P}) = 0$ para cada k, logo $\mathcal{P}$ é um complexo exato.

Por outro lado, o i-ésimo elemento de $\mathcal{P}$ é

$$\begin{aligned} P_i &= \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\, \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \\ &\simeq R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]], \end{aligned}$$

a última igualdade é obvia se o $[\mathbb{Z}G]$-módulo R_i é livre f.g. pois neste caso $R_i \simeq [\mathbb{Z}G]^{k_i}$ para algum $k_i \geq 0$. Para o caso geral no qual R_i é projetivo f.g., considere R_i como somando direto de um $[\mathbb{Z}G]^{k_i}$, i.e. $R_i \oplus M_i = [\mathbb{Z}G]^{k_i}$. Então:

$$\begin{aligned} &\varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\, \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \oplus \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\, \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \\ &= \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \left([\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\, \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\, \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]^{k_i} \\ &= [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]^{k_i} = (R_i \oplus M_i) \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \\ &= \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \oplus \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right). \end{aligned}$$

Temos também as seguintes projeções

$$\begin{aligned} R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] &\overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\, \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \\ M_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] &\overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\, \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right), \end{aligned}$$

que provêm da propriedade universal do limite inverso. Portanto os isomorfismos acima mostram que α e β são também isomorfismos, ou seja $\mathcal{P}$ é isomorfo a $\mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$. Logo, para cada $i \geq 1$,

$$0 = H_i(\mathcal{P}) = H_i(\mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) = \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right).$$

2. Observe que $P_i = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}}\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \left[(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\,(G/N)\right]\right)$, logo é um grupo pro-$p$, para cada $i \geq 0$ e $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$, por (4.4) e (4.5).

   Por outro lado R_i é $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo, logo $R_i \oplus M_i = [\mathbb{Z}G]^{k_i}$, portanto

$$\begin{aligned}[\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] &= (R_i \oplus M_i) \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \\ &= \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \oplus \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right),\end{aligned}$$

   ou seja $R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ é somando direto de

$$[\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]] = [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]^{k_i},$$

   i.e. P_i é $[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo projetivo f.g. para todo $i \geq 0$. Em conclusão o complexo

$$\mathcal{P} : 0 \to P_j \xrightarrow{\partial_j} P_{j-1} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}_p \to 0$$

   é uma resolução projetiva pro-p do $[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo pro-$p$ trivial $\mathbb{Z}_p$ com todos os módulos projetivos f.g. Logo $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$.

∎

Teorema 4.1.7 *Seja G um grupo abstrato de tipo FP_∞ e dimensão cohomológica, $\mathrm{cd}(G) = m$, finita. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto dirigido de subgrupos normais N de G tal que G/N pertence à classe $\mathcal{C}$ dos p-grupos finitos, para algum número primo p fixo. Suponha também que para cada $1 \leq i \leq m$ o limite inverso*

$$\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N, \mathbb{F}_p) = 0.$$

Então o grupo pro-p $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ tem p-dimensão cohomológica finita

$$cd_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}}) \leq m,$$

é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{F}_p$ e sobre $\mathbb{Z}_p$, e sua p-característica de Euler é $\chi_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}}) = \chi(G)$.

Demonstração: O teorema 4.1.6 afirma que $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$. Observe que na demonstração de tal teorema só usamos que $\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N, \mathbb{F}_p) = 0$ para todo $1 \leq i \leq \mathrm{cd}(G)$. Além disso construímos o complexo $\mathcal{P} \simeq \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ que é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_p$ como um $[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo abstrato, de comprimento finito e todos os módulos projetivos f.g. Então pelo item (3) do lema 4.1.1 temos que $cd_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}}) \leq m = \mathrm{cd}(G)$.

Seja

$$\mathcal{R} : 0 \to R_m \xrightarrow{d_m} R_{m-1} \to \cdots \to R_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$$

como antes, i.e. uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ com cada R_i f.g. e seja $\widehat{\mathcal{R}}$ o complexo obtido pelo limite inverso procedendo como em (4.1), i.e. $\widehat{\mathcal{R}} \simeq \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$. Pelo lema 4.1.4 $H_i(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_i(N, \mathbb{F}_p) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$, ou seja $\widehat{\mathcal{R}}$ é complexo exato. Portanto $\widehat{\mathcal{R}}$ é uma resolução projetiva pro-p do $[[\mathbb{F}_p \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo trivial $\mathbb{F}_p$ com cada $\widehat{R}_i$ f.g; logo $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{F}_p$.

Por último

$$\begin{aligned}
\chi_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}}) &= \sum_{0 \leq i \leq \mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p} \left(H_i \left(\widehat{G}_{\mathcal{N}}, \mathbb{Z}_p \right) \right) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq m} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p} \left(H_i \left(\widehat{G}_{\mathcal{N}}, \mathbb{Z}_p \right) \right) \qquad (4.8) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq m} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p} \left(P_i \otimes_{[[\mathbb{Z}_p \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]} \mathbb{Z}_p \right) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq m} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p} \left(\left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_p \widehat{G}_{\mathcal{N}}]] \right) \otimes_{[[\mathbb{Z}_p \widehat{G}_{\mathcal{N}}]]} \mathbb{Z}_p \right) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq m} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}_p \right) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq \mathrm{cd}(G)} (-1)^i \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) \qquad (4.9) \\
&= \chi(G),
\end{aligned}$$

onde a igualdade (4.8) se justifica por $H_i \left(\widehat{G}_{\mathcal{N}}, \mathbb{Z}_p \right) = 0$ para $i > \mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})$ e a igualdade (4.9) vale pois cada R_i é $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo f.g. logo existe M_i, um $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo, tal que $R_i \oplus M_i = [\mathbb{Z}G]^{k_i}$, o que implica que

$$\left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(M_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) = [\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{k_i},$$

logo $R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo projetivo f.g. Pelo exemplo 1.5.23 (2), $R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo livre, ou seja

$$R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{s_i}, \text{ para algum } s_i.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}_p &= \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \\
&= \mathbb{Z}^{s_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p^{s_i}.
\end{aligned}$$

Logo $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z}_p \right) = s_i = \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}} \left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathbb{Z} \right)$, para cada i. ∎

4.2 Grupos de Dimensão Cohomológica 3

Os seguintes resultados se referem a completamentos pro-p de grupos de dimensão cohomológica 3, com alguma outra propriedade adicional, em alguns casos pediremos que para

cada subgrupo normal N de G tal que G/N é um p-grupo finito, $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$, e em outros será suficiente que $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ ou $H_3(N, \mathbb{F}_p) = 0$. Também assumimos que o completamento pro-p de G é infinito.

Proposição 4.2.1 *Seja p um número primo fixo, e seja G um grupo abstrato de dimensão cohomológica 3 e de tipo FP_∞. Seja $\mathcal{N}$ o conjunto dirigido de todos os subgrupos normais N de G tal que G/N pertence à classe $\mathcal{C}$ dos p-grupos finitos, ou seja $\widehat{G}_{\mathcal{N}} = G_{\widehat{p}}$ o completamento pro-p de G. Suponha ainda que para cada $N \in \mathcal{N}$ ou $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ ou $H_3(N, \mathbb{F}_p) = 0$ e que $G_{\widehat{p}}$ é infinito. Então para qualquer resolução projetiva $\mathcal{R}$ de $\mathbb{Z}$ como um $[\mathbb{Z}G]$-módulo abstrato tal que $\mathcal{R}$ tem comprimento finito 3 e módulos projetivos f.g.*

$$H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = 0 \text{ para } i = 1 \text{ e } i = 3,$$

para o complexo $\widehat{\mathcal{R}} \simeq \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]$.

Demonstração: Como G é FP_∞, então G é FP_1, o que implica pela proposição 2.3.37 que N é FP_1, logo N é f.g. e portanto o quociente $\frac{N}{[N,N]N^p}$ é f.g. Veja também que $\frac{N}{[N,N]N^p}$ é um grupo abeliano f.g. no qual cada elemento tem ordem p: seja $a \in N$, então $a^p \in N^p$, portanto $a^p \in [N, N]N^p$, ou seja a classe $\overline{a^p} = \overline{1}$. Logo se

$$\overline{1} \neq \overline{a} \in \frac{N}{[N, N]N^p}, \text{ então } \overline{a}^p = \overline{a^p} = \overline{1}.$$

Logo, pelo teorema fundamental de grupos abelianos f.g. $\frac{N}{[N,N]N^p}$ é finito, mais ainda $\frac{N}{[N,N]N^p}$ é um p-grupo finito: suponha que na decomposição em primos da ordem de $\frac{N}{[N,N]N^p}$ apareça um primo $q \neq p$, logo pelo teorema de Cauchy existe um elemento em $\frac{N}{[N,N]N^p}$ de ordem q, o que é uma contradição.

Como N é f.g. então $N_{\widehat{p}}$ é f.g. como grupo pro-p, isto implica pela proposição 3.2.15, que o subgrupo de Frattini $\Phi(N_{\widehat{p}})$ é aberto. Mais ainda, pela proposição 3.2.3 item (2), $\Phi(N_{\widehat{p}})$ é também fechado e tem índice finito. Pelo lema 3.2.14, $\Phi(N_{\widehat{p}}) = [N_{\widehat{p}}, N_{\widehat{p}}]N_{\widehat{p}}^p$ e o quociente de Frattini $\frac{N_{\widehat{p}}}{[N_{\widehat{p}}, N_{\widehat{p}}]N_{\widehat{p}}^p}$ é um grupo profinito abeliano p-elementar.

Por definição $N_{\widehat{p}} = \varprojlim_{V \lhd N} N/V$, tal que N/V é um p-grupo finito, logo $N_{\widehat{p}}$ e N tem os mesmos quocientes que são p-grupos finitos. Mas

$$\frac{N}{[N, N]N^p} \tag{4.10}$$

é quociente maximal de N que é p-grupo finito abeliano e

$$\frac{N_{\widehat{p}}}{[N_{\widehat{p}}, N_{\widehat{p}}]N_{\widehat{p}}^p} \tag{4.11}$$

é quociente maximal de $N_{\widehat{p}}$ que é p-grupo finito abeliano. Logo (4.10) e (4.11) são isomorfos e o isomorfismo é natural.

Logo por [R, pág. 267]

$$H_1(N,\mathbb{F}_p) \simeq \frac{N}{[N,N]N^p} \simeq \frac{N_{\widehat{p}}}{[N_{\widehat{p}},N_{\widehat{p}}]N_{\widehat{p}}^p} \simeq H_1(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p)$$

como espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}_p$.

Como homologia contínua comuta com limite inverso, (proposição 3.5.12), temos que:

$$\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_1(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p) \simeq H_1(\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p) = 0$$

já que

$$\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} N_{\widehat{p}} = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} \varprojlim_{\substack{V\subseteq N\\ V\in\mathcal{N}}} N/V = \varprojlim_{V\in\mathcal{N}} \varprojlim_{\substack{N\in\mathcal{N}\\ N\supseteq V}} N/V,$$

pois dois limites inversos comutam e para V fixo existe um número finito de possíveis N tais que $N \supseteq V$ e $N \in \mathcal{N}$, entre eles $N = V$, assim

$$\varprojlim_{\substack{N\in\mathcal{N}\\ N\supseteq V}} N/V = 1 \text{ e } \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} N_{\widehat{p}} = \varprojlim_{V\in\mathcal{N}} 1 = 1.$$

Em particular, pelo lema 4.1.4

$$H_1(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_1(N,\mathbb{F}_p) = 0.$$

Como por hipótese $H_3(N,\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ ou 0, o limite inverso $\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_3(N,\mathbb{F}_p)$ é $\mathbb{F}_p$ ou 0. Usando de novo o lema 4.1.4

$$H_3(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_3(N,\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p \text{ ou } 0.$$

Suponha que $H_3(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \mathbb{F}_p$, onde

$$\widehat{\mathcal{R}} : 0 \to \widehat{R}_3 \overset{\widehat{d}_3}{\to} \widehat{R}_2 \overset{\widehat{d}_2}{\to} \widehat{R}_1 \overset{\widehat{d}_1}{\to} \widehat{R}_0 \overset{\widehat{d}_0}{\to} \mathbb{F}_p \to 0$$

e cada $\widehat{R}_i$ é $[[\mathbb{F}_pG_{\widehat{p}}]]$-módulo pro-$p$ projetivo f.g; logo

$$\mathbb{F}_p \simeq H_3(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \ker \widehat{d}_3 \subseteq \widehat{R}_3 \oplus M_3 = [[\mathbb{F}_pG_{\widehat{p}}]]^d,$$

ou seja, $\mathbb{F}_p$ é um $[[\mathbb{F}_pG_{\widehat{p}}]]$-submódulo finito. Vejamos qual é a ação de $G_{\widehat{p}}$ em $\mathbb{F}_p$:

Seja $\varphi : G_{\widehat{p}} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p)$ levando $g \mapsto$"ação de g", então $\frac{G_{\widehat{p}}}{\ker\varphi} \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p)$, mas por [La, Teorema 2.3, pág. 96], $|\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p)| = p-1$, mas $\frac{G_{\widehat{p}}}{\ker\varphi}$ é um p-grupo logo $\left|\frac{G_{\widehat{p}}}{\ker\varphi}\right| = 1$ o que

implica que $\ker\varphi = G_{\widehat{p}}$, ou seja φ leva todo elemento de $G_{\widehat{p}}$ ao 1. Portanto $\mathbb{F}_p$ é um $[[\mathbb{F}_pG_{\widehat{p}}]]$-submódulo trivial.

Por definição

$$[[\mathbb{F}_pG_{\widehat{p}}]] = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} [\mathbb{F}_p(G/N)],$$

então como $\mathbb{F}_p \neq 0$, existe N tal que o homomorfismo canônico $\rho_N : [[\mathbb{F}_pG_{\widehat{p}}]] \twoheadrightarrow [\mathbb{F}_p(G/N)]$ satisfaz $\rho_N(\mathbb{F}_p) \neq 0$, logo $\rho_N(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ é um $[\mathbb{F}_p(G/N)]$-submódulo trivial.

Seja $\sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{g}$, com os $\lambda_{\overline{g}} \in \mathbb{F}_p$, um elemento típico de $[\mathbb{F}_p(G/N)]$ então

$$\rho_N(\mathbb{F}_p) \simeq (\sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{g})\mathbb{F}_p.$$

Seja $\overline{h} \in G/N$, como G/N age trivialmente em $\rho_N(\mathbb{F}_p)$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{g} = \overline{h}(\sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{g}) &= \sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{h}\overline{g} = \sum_{\overline{h}\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{h}\overline{g} \\ &= \sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{h}^{-1}\overline{g}}\overline{g},\end{aligned}$$

logo $\lambda_{\overline{g}} = \lambda_{\overline{h}^{-1}\overline{g}}$ para toda $\overline{h} \in G/N$ e toda $\overline{g} \in G/N$, portanto $\lambda_{\overline{g}} = \lambda \in \mathbb{F}_p$. Com isto $\sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{g} = \lambda(\sum_{\overline{g}\in G/N} \overline{g})$ e logo

$$\rho_N(\mathbb{F}_p) \simeq (\sum_{\overline{g}\in G/N} \lambda_{\overline{g}}\overline{g})\mathbb{F}_p \simeq (\sum_{\overline{g}\in G/N} \overline{g})\mathbb{F}_p.$$

Seja agora $N_1 \in \mathcal{N}$, como $G_{\widehat{p}}$ é infinito podemos escolher $N_1 \subsetneq N \subseteq G$, então também $\rho_{N_1}(\mathbb{F}_p) \neq 0$, logo $\rho_{N_1}(\mathbb{F}_p) = (\sum_{\overline{g}\in G/N_1} \overline{g})\mathbb{F}_p$. Considere $\pi_{N_1N} : [\mathbb{F}_p(G/N_1)] \twoheadrightarrow [\mathbb{F}_p(G/N)]$ o homomorfismo canônico induzido pela projeção $G/N_1 \twoheadrightarrow G/N$, então $\pi_{N_1N} \circ \rho_{N_1} = \rho_N$. Logo

$$\pi_{N_1N} \circ \rho_{N_1}(\mathbb{F}_p) = \rho_N(\mathbb{F}_p) \text{ então } \pi_{N_1N}((\sum_{\overline{g}\in G/N_1} \overline{g})\mathbb{F}_p) = (\sum_{\overline{g}\in G/N} \overline{g})\mathbb{F}_p,$$

mas $\pi_{N_1N}(\sum_{\overline{g}\in G/N_1} \overline{g}) = [N : N_1](\sum_{\widetilde{g}\in G/N} \widetilde{g}) = 0$, pois $[N : N_1] \neq 1$ e é divisível por p, contradição. ∎

Observe que se $\mathcal{F}$ é um resolução projetiva do $[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo trivial abstrato $\mathbb{Z}_p$ com todos os módulos projetivos f.g; então $\mathcal{F}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ é resolução projetiva do $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$-módulo trivial abstrato $\mathbb{F}_p$.

Isto implica que $\mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$ para todo i, pois para a resolução apagada $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p}$ temos:

$$\mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p) \simeq H_i(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}\mathbb{F}_p) \text{ e}$$

$$\mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \simeq H_i\left(\left(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right)\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}\mathbb{F}_p\right) \simeq H_i\left(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}\mathbb{F}_p\right).$$

Teorema 4.2.2 *Suponha que todas as condições da proposição 4.2.1 sejam válidas. Mais ainda, suponha que o homomorfismo*

$$\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p) \tag{4.12}$$

induzido pelo homomorfismo canônico $N \to N_{\widehat{p}}$, onde $N_{\widehat{p}}$ é o completamento pro-p de N, é um isomorfismo para cada $N \in \mathcal{N}$. Então

1. $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0$, *para cada $i \geq 1$, e o homomorfismo canônico $G \to \widehat{G}_{\mathcal{N}}$ induz um isomorfismo $H_i(G, \mathbb{F}_p) \simeq H_i(\widehat{G}_{\mathcal{N}}, \mathbb{F}_p)$ para todo i, e $\chi_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}}) = \chi(G)$;*

2. *o grupo pro-p $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{F}_p$ e sobre $\mathbb{Z}_p$ e tem p-dimensão cohomológica $\mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}}) \leq 3$, em particular $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$ é livre de torção. Se ainda temos $H_3(G, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$, então $\mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}}) = 3$;*

3. $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) = 0$, *para cada $i \geq 1$.*

Demonstração: Como G tem tipo FP_∞ e dimensão cohomológica finita então, pela proposição 2.3.41, G tem tipo FP, logo existe uma resolução projetiva de tipo finito e comprimento finito $3 = \mathrm{cd}(G)$ do $[\mathbb{Z}G]$-módulo abstrato trivial $\mathbb{Z}$. Seja

$$\mathcal{R} : 0 \to R_3 \xrightarrow{d_3} R_2 \xrightarrow{d_2} R_1 \xrightarrow{d_1} R_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$$

tal resolução e $\widehat{\mathcal{R}} \simeq \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ por (4.3) uma resolução projetiva de comprimento finito de $\mathbb{F}_p$ sobre $[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]$ com todos os módulos f.g.

Pela proposição 4.2.1, $H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = 0$ se $i = 0, 1, 3$.

Como o homomorfismo $\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$ é um isomorfismo para todo $N \in \mathcal{N}$, e pelo lema 4.1.4

$$H_2(\widehat{\mathcal{R}}) \simeq \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N, \mathbb{F}_p) \simeq \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p) \simeq H_2(\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p),$$

pois nesta categoria homologia comuta com limite inverso (proposição 3.5.12). Como foi feito na proposição 4.2.1

$$\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} N_{\widehat{p}} = 1,$$

logo $H_2(\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p) = H_2(1, \mathbb{F}_p) = 0$, ou seja o complexo $\widehat{\mathcal{R}}$ é exato

$$0 = H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = H_i(\mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]) = \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\right) \text{ para todo } i \geq 1. \tag{4.13}$$

Vamos calcular $H_i(G,\mathbb{F}_p)$ para todo i. Seja $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ a resolução apagada obtida de $\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned} H_i(G,\mathbb{F}_p) &\simeq \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z},\mathbb{F}_p) \simeq H_i(\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}\otimes_{[\mathbb{Z}G]}\mathbb{F}_p) \\ &\simeq H_i(\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}\otimes_{[\mathbb{Z}G]}[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]\otimes_{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}\mathbb{F}_p) \\ &\simeq H_i(\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{F}_p}\otimes_{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}\mathbb{F}_p) \simeq H_i(\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{F}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}\mathbb{F}_p) \\ &\simeq \mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{F}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}(\mathbb{F}_p,\mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Tor}_i^{[[\mathbb{Z}_p\widehat{G}_{\mathcal{N}}]]}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{F}_p) \simeq H_i(\widehat{G}_{\mathcal{N}},\mathbb{F}_p). \end{aligned}$$

Veja que a condição (4.13) e o lema 4.1.4, nos dizem que $\varprojlim_{N\in\mathcal{N}} H_i(N,\mathbb{F}_p)=0$ para todo $i\geq 1$, logo pelo teorema 4.1.7 o grupo pro-p $\widehat{G}_{\mathcal{N}}$, tem p-dimensão cohomológica finita $\mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})\leq 3$, é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{F}_p$ e sobre $\mathbb{Z}_p$, e sua p-característica de Euler é $\chi_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})=\chi(G)$. Agora suponha que

$$0\neq\mathbb{F}_p\simeq H_3(G,\mathbb{F}_p)\simeq H_3(\widehat{G}_{\mathcal{N}},\mathbb{F}_p),$$

como $H_i\left(\widehat{G}_{\mathcal{N}},\mathbb{F}_p\right)=0$ para todo $i>\mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})$, então $3\leq\mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})$ e por outro lado $\mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})\leq 3$, ou seja $\mathrm{cd}_p(\widehat{G}_{\mathcal{N}})=3$. Finalmente o teorema 4.1.6 completa a prova do item 3. ∎

Vamos calcular $H_0(G,\mathbb{F}_p)$, onde G é um grupo pro-p e $\mathbb{F}_p$ é considerado como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo trivial. Pela proposição 3.5.10

$$H_0(G,\mathbb{F}_p)=\mathbb{F}_p/\overline{\langle fg-f\mid f\in\mathbb{F}_p,g\in G\rangle}$$

mas G age trivialmente sobre $\mathbb{F}_p$, logo $fg-f=f-f=0$, portanto

$$H_0(G,\mathbb{F}_p)=\mathbb{F}_p. \tag{4.14}$$

O seguinte lema é a versão pro-p de um resultado conhecido para grupos discretos.

Lema 4.2.3 *Seja G um grupo pro-p finitamente apresentável e seja H um subgrupo aberto de G. Então*

$$\mathrm{def}(H)-1\geq[G:H](\mathrm{def}(G)-1).$$

Demonstração: Seja $d_G=|X|$ o número minimal de geradores topológicos de G e seja $F=F(X)_{\widehat{p}}$ o grupo pro-p livre com base X tal que existe um epimorfismo $f:F\twoheadrightarrow G$, logo o número minimal de geradores de F é $d_F=d_G=|X|$ e F é f.g., ou seja, de tipo FP_1.

Seja $N=f^{-1}(H)$, então N é um subgrupo aberto de F, pois H é aberto, então N é também fechado e, pelo teorema 3.5.33 N é também grupo pro-p livre. Pelo teorema 3.5.45, N é FP_1 ou seja N é grupo pro-p livre f.g. Seja d_N a cardinalidade de uma base minimal do grupo pro-p livre N.

Observe que $\ker(f)=f^{-1}(1)\subseteq f^{-1}(H)$, logo $\ker(f)=\ker(f\mid_N)\lhd N$.

Como F e N são grupos livres, que podemos supor não triviais, $\mathrm{cd}_p(F) = \mathrm{cd}_p(N) = 1$, então

$$\chi_p(F) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(F, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(F, \mathbb{F}_p) = 1 - d_F$$

pois, por (4.14), $H_0(F, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ e pelo teorema 3.5.36 $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(F, \mathbb{F}_p) = d_F$. Analogamente temos que $\chi_p(N) = 1 - d_N$.

Como F é grupo pro-p, é compacto então todo subgrupo aberto tem índice finito, logo $[F : N]$ é finito e também $\chi_p(F) = \chi(F)$. Pelo teorema 2.5.7, $\chi(N) = [F : N]\chi(F)$, i.e.

$$\begin{aligned} 1 - d_N &= [F : N]\,(1 - d_F)\,, \text{ então} \\ d_N &= [F : N]\,(d_F - 1) + 1. \end{aligned}$$

Seja r o número minimal de geradores topológicos de $\ker f$ como subgrupo normal de N. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{def}(H) &= d_N - r \\ &= [F : N]\,(d_F - 1) + 1 - r. \end{aligned}$$

Seja r_G o número minimal de geradores topológicos de $\ker f$ como subgrupo normal de F, ou seja, o número minimal de relações de G, então $\mathrm{def}(G) = d_F - r_G$, e seja $R = \{r_1, \cdots r_{r_G}\}$ o conjunto de geradores topológicos de $\ker f$ como subgrupo normal de F, então

$$\ker f = \overline{\langle r_1^F, \cdots r_{r_G}^F \rangle} = \overline{\langle r_1^{TN}, \cdots r_{r_G}^{TN} \rangle},$$

onde T é transversal à esquerda de N em F.

Observamos que $|T| = [F : N] = [G : H]$, pois existe uma bijeção entre as classes laterais $gH \leftrightarrow f^{-1}(g)N$, com $g \in G$.

Então $\left\{r_1^t, \cdots r_{r_G}^t\right\}_{t \in T}$ gera topologicamente $\ker f$ como subgrupo normal de U, isto implica que $r \leq [G : H] r_G$. Logo

$$\begin{aligned} \mathrm{def}(H) &= [F : N]\,(d_F - 1) + 1 - r \\ &\geq [F : N]\,(d_F - 1) + 1 - [G : H] r_G, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \mathrm{def}(H) - 1 &\geq [G : H]\,(d_F - r_G - 1) \\ &= [G : H]\,(\mathrm{def}(G) - 1)\,. \end{aligned}$$

∎

Lema 4.2.4 *Seja G um grupo abstrato f.g. de tipo FP_∞, dimensão cohomológica 3 e característica de Euler 0. Seja N um subgrupo de G de índice potência de p tal que $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$. Então a aplicação $\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$ é sobrejetora e $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \varphi_N) = \mathrm{def}(N_{\widehat{p}})$, onde $N_{\widehat{p}}$ é o completamento pro-p de N.*

Demonstração: Seja X um conjunto finito gerador de N, isto é possível pois N é subgrupo de G que é f.g. Pela fórmula de Hopf (veja teorema 2.3.6)

$$H_2(N,\mathbb{F}_p) \simeq \frac{R \cap [F,F]F^p}{[R,F]R^p}$$

(esta fórmula segue da sequência exata dada em [B, Capítulo 2, Proposição 5.4, pág. 43]), onde F é um grupo livre com base X tal que $f : F \to N$ é um epimorfismo e $R = \ker f$ é um subgrupo normal de F tal que $F/R \simeq N$.

Seja $F_{\widehat{p}}$ o completamento pro-p de F, i.e., $F_{\widehat{p}}$ é um grupo pro-p livre cuja base tem a mesma cardinalidade que a base de F e seja $\overline{R}$ o fecho da imagem de R em $F_{\widehat{p}}$ via a aplicação canônica $j : F \to F_{\widehat{p}}$. Então

$$H_2(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p) \simeq \frac{\overline{R} \cap \overline{[F_{\widehat{p}},F_{\widehat{p}}]F_{\widehat{p}}^p}}{\overline{[\overline{R},F_{\widehat{p}}]\overline{R}^p}},$$

e a aplicação φ_N é induzida por j, logo φ_N é sobre.

Vejamos que $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker\varphi_N) = \mathrm{def}(N_{\widehat{p}})$.

Como N é um subgrupo de G de índice finito, pelo teorema 2.5.7 $\chi(N) = [G:N]\chi(G)$, logo $\chi(N) = 0$ pois por hipótese $\chi(G) = 0$. Então

$$\begin{aligned} 0 = \chi(N) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(N,\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N,\mathbb{F}_p) + \\ + \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(N,\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(N,\mathbb{F}_p), \end{aligned}$$

por (4.14) $H_0(N,\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ e por hipótese $H_3(N,\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$, logo $\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(N,\mathbb{F}_p) = 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(N,\mathbb{F}_p)$, assim

$$0 = -\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N,\mathbb{F}_p) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(N,\mathbb{F}_p),$$

então

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N,\mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(N,\mathbb{F}_p).$$

Pela prova da proposição 4.2.1 $H_1(N,\mathbb{F}_p) \simeq H_1(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p)$, logo temos

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(N,\mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N,\mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p).$$

Como $\varphi_N : H_2(N,\mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p)$ é sobre, pelo teorema do kernel-imagem

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(N,\mathbb{F}_p) &= \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker\varphi_N) + \dim_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{im}\,\varphi_N) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker\varphi_N) + \dim_{\mathbb{F}_p}(H_2(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p)), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker\varphi_N) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(N,\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p}(H_2(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p)) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p}(H_2(N_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p)) = \mathrm{def}(N_{\widehat{p}}) \end{aligned}$$

∎

Corolário 4.2.5 *Suponha que as condições do lema 4.2.4 sejam válidas para qualquer subgrupo N de G, de índice potência de p. Então*

1. *Se $N/[N,N]$ é finito, então φ_N é um isomorfismo.*
2. *Se V é um subgrupo de G de índice potência de p tal que a aplicação φ_V não é um isomorfismo, então para qualquer subgrupo próprio W de V de índice potência de p em V, a aplicação φ_W não é um isomorfismo e* $\mathrm{def}(W_{\widehat{p}}) \geq \mathrm{def}(V_{\widehat{p}})$.

Demonstração:

1. Suponha que φ_N não é um isomorfismo, pelo lema 4.2.4 φ_N é sobre então φ_N não é injetora, logo $\ker\varphi_N$ não é trivial, isto implica que

$$\mathrm{def}(N_{\widehat{p}}) = \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker\varphi_N) \geq 1,$$

logo $N_{\widehat{p}}$ tem mais geradores do que relações então, pelo lema 3.5.41, $\frac{N_{\widehat{p}}}{[N_{\widehat{p}},N_{\widehat{p}}]}$ é infinito. Mas, pela prova da proposição 4.2.1,

$$\frac{N}{[N,N]} \simeq \frac{N_{\widehat{p}}}{[N_{\widehat{p}},N_{\widehat{p}}]},$$

logo, pela hipótese $\frac{N_{\widehat{p}}}{[N_{\widehat{p}},N_{\widehat{p}}]}$ é finito, contradição. Portanto φ_N é isomorfismo.

2. Pelo lema 4.2.3

$$\mathrm{def}(W_{\widehat{p}}) - 1 \geq [V_{\widehat{p}} : W_{\widehat{p}}](\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) - 1)$$

e como $W_{\widehat{p}}$ é subgrupo próprio de $V_{\widehat{p}}$, $[V_{\widehat{p}} : W_{\widehat{p}}] \geq 2$, logo

$$\mathrm{def}(W_{\widehat{p}}) - 1 \geq 2(\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) - 1).$$

Como V é subgrupo de índice potência de p em G, por hipótese $H_3(V,\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ e pelo lema 4.2.4

$$\varphi_V : H_2(V,\mathbb{F}_p) \to H_2(V_{\widehat{p}},\mathbb{F}_p)$$

é sobrejetora, mas não injetora pois por hipótese não é isomorfismo, e assim

$$\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) = \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker\varphi_V) \geq 1.$$

Segue que

$$\mathrm{def}(W_{\widehat{p}}) - \mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) \geq \mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) - 1 \geq 0, \text{ logo}$$
$$\mathrm{def}(W_{\widehat{p}}) \geq \mathrm{def}(V_{\widehat{p}}).$$

Como W é subgrupo de índice potência de p em G, por hipótese $H_3(W, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ e pelo lema 4.2.4

$$\varphi_W : H_2(W, \mathbb{F}_p) \to H_2(W_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$$

é sobre e $\mathrm{def}(W_{\widehat{p}}) = \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \varphi_W) \geq \mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) \geq 1$, isto implica que o $\ker \varphi_W$ é não trivial, logo φ_W não é um isomorfismo.

∎

Dizemos que um grupo abstrato G é **p-bom** se a aplicação natural indo de G no seu completamento pro-p, $j : G \to G_{\widehat{p}}$, induz um isomorfismo $H^i(G_{\widehat{p}}, M) \to H^i(G, M)$ para qualquer $G_{\widehat{p}}$-módulo discreto p-primário finito M e para todo $i \geq 1$. Aqui $H^i(G_{\widehat{p}}, M)$ denota a cohomologia contínua e $H^i(G, M)$ é cohomologia de grupos abstratos.

Exemplos de grupos bons são os grupos livres, grupos de superfícies e uma sucessão de extensões de grupos livres finitamente gerados.

Um dos principais resultados deste capítulo, o Teorema 4.3.1, afirma que um grupo de dualidade de Poincaré orientável G, de dimensão 3, cujo completamento pro-p, $G_{\widehat{p}}$, é infinito e todos os subgrupos abertos de $G_{\widehat{p}}$ têm deficiência 0 é sempre p-bom.

Teorema 4.2.6 *Seja G um grupo abstrato de dimensão cohomológica 3 e de tipo FP_∞, tal que $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ para qualquer subgrupo normal N de G de índice potência de p em G. Assuma que o completamento pro-p, $G_{\widehat{p}}$, é infinito e que o homomorfismo*

$$\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$$

induzido pelo homomorfismo $N \to N_{\widehat{p}}$ é um isomorfismo para todos os subgrupos normais N de índice potência de p em G. Então

1. $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]\right) = 0$ *e* $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{Z}_p G_{\widehat{p}}]]\right) = 0$, *para cada $i \geq 1$, e $H_i(G, \mathbb{F}_p) \simeq H_i(G_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$ para todo i, e $\chi_p(G_{\widehat{p}}) = \chi(G)$;*

2. *o grupo pro-p $G_{\widehat{p}}$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{F}_p$ e sobre $\mathbb{Z}_p$ e tem dimensão cohomológica 3, em particular $G_{\widehat{p}}$ é livre de torção.*

3. *G é um grupo p-bom.*

Demonstração: Os itens 1 e 2 são casos particulares do teorema 4.2.2 aplicado ao conjunto dirigido $\mathcal{N}$ de todos os subgrupos normais N de índice potência de p em G.

Prova do item 3: como G tem tipo FP_∞ e dimensão cohomológica finita então, pela proposição 2.3.41, G tem tipo FP, logo existe uma resolução projetiva de tipo finito e comprimento finito $3 = \mathrm{cd}(G)$ do $[\mathbb{Z}G]$-módulo abstrato trivial $\mathbb{Z}$. Seja

$$\mathcal{R} : 0 \to R_3 \xrightarrow{d_3} R_2 \xrightarrow{d_2} R_1 \xrightarrow{d_1} R_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$$

tal resolução.

Pela parte 1 sabemos que $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right) = 0$, para cada $i \geq 1$. Seja

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$$

como no teorema 4.1.6, então

$$H_0(\mathcal{P}) = 0 \text{ pois } \otimes \text{ é funtor exato à direita e}$$
$$H_i(\mathcal{P}) = H_i(\mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]) = \mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right) = 0, \text{ para todo } i \geq 1$$

então $\mathcal{P}$ é um complexo exato, mais ainda é uma resolução projetiva pro-p do $[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$ com os módulos projetivos f.g.

Seja M um $G_{\widehat{p}}$-módulo discreto p-primário finito, então:

$$H^i(G, M) = H^i\left(\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}, M\right)\right) \text{ e}$$
$$H^i(G_{\widehat{p}}, M) = H^i\left(\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}, M\right)\right) = H^i\left(\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(\mathcal{R}_{\mathbb{Z}} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], M\right)\right).$$

Para cada j, seja $\varphi_j : \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left(R_j, M\right) \to \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(R_j \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], M\right)$ o homomorfismo que leva $f \mapsto \widehat{f}$ onde

$$f : R_j \to M \text{ é um homomorfismo de } [\mathbb{Z}G]\text{-módulos e}$$
$$\widehat{f} : R_j \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \to M \text{ leva } r \otimes \lambda \mapsto f(r)\lambda,$$

e seja $\phi_j : \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(R_j \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], M\right) \to \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left(R_j, M\right)$ o homomorfismo que leva $t \mapsto \widetilde{t}$ onde

$$t : R_j \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \to M \text{ é um homomorfismo de } [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\text{-módulos e}$$
$$\widetilde{t} : R_j \to M \text{ leva } r \mapsto t(r \otimes 1).$$

É facil ver que $\phi_j = \varphi_j^{-1}$, logo

$$\mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left(R_j, M\right) \simeq \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(R_j \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], M\right), \text{ para todo } j.$$

Portanto $H^i(G, M) \simeq H^i(G_{\widehat{p}}, M)$, para todo i, o que implica que G é um grupo p-bom.∎

Corolário 4.2.7 *Seja G um grupo abstrato de dimensão cohomológica 3, de tipo FP_∞, de característica de Euler 0 e tal que $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ para qualquer subgrupo normal N de G de índice potência de p em G. Assuma que $G_{\widehat{p}}$, o completamento pro-p de G, é infinito e que para todo subgrupo normal N de índice potência de p em G, $\frac{N}{[N,N]}$ é finito. Então G é um grupo p-bom.*

Demonstração: O corolário 4.2.5 item (1) afirma que

$$\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$$

é um isomorfismo para todos os subgrupos normais N de índice potência de p em G. Logo pelo teorema 4.2.6 item (3), G é p-bom. ∎

4.3 Grupos de Dualidade de Poincaré de Dimensão 3

Nesta seção apresentamos os resultados mais importantes deste capítulo: os teoremas 4.3.1 e 4.3.3. Nesses resultados G denotará un grupo abstrato de dualidade de Poincaré de dimensão 3, logo G é um grupo abstrato de dimensão cohomológica 3, de tipo FP_∞ e de característica de Euler $\chi(G) = 0$.

Teorema 4.3.1 *Seja G um grupo abstrato de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3. Assuma que $G_{\widehat{p}}$, o seu completamento pro-p, é infinito. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *O homomorfismo $\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$ induzido pelo homomorfismo canônico $N \to N_{\widehat{p}}$ é um isomorfismo para todos os subgrupos normais N de índice potência de p em G, onde $N_{\widehat{p}}$ é o completamento pro-p de N.*
2. *$G_{\widehat{p}}$ é um grupo de dualidade de Poincaré pro-p orientável de dimensão 3.*
3. *Todo subgrupo aberto de $G_{\widehat{p}}$ tem deficiência 0.*
4. *G é um grupo p-bom.*

Demonstração: (1) implica (2). Como G tem $\mathrm{cd}(G) = 3$, finita, então pela proposição 2.3.23, G é livre de torção e é grupo abstrato orientável de dualidade de Poincaré de dimensão 3, então todo subgrupo normal N de índice potência de p em G é um grupo abstrato orientável de dualidade de Poincaré de dimensão 3 pela propriedade 2.4.5. Pela dualidade

$$H^0(N, \mathbb{F}_p) \simeq H_3(N, \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p) = H_3(N, \mathbb{F}_p),$$

pois o módulo dualizante D de N é isomorfo ao módulo trivial $\mathbb{Z}$.

Mas, pelo lema 2.3.8 $H^0(N, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^N = \{f \in \mathbb{F}_p : nf = f \ \ \forall n \in N\}$, e como N age trivialmente em $\mathbb{F}_p$ logo $nf = f$, $\forall f \in \mathbb{F}_p$ e $\forall n \in N$, o que implica $H^0(N, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p = H_3(N, \mathbb{F}_p)$ para todo subgrupo normal N de índice potência de p em G.

Pela proposição 2.5.6, $\chi(G) = 0$, pois G é grupo de dualidade de Poincaré de dimensão ímpar. Por definição G deve ser FP_∞ e por hipótese $\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \to H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$ é isomorfismo, então vale o teorema 4.2.2:

$$\begin{aligned} &\chi_p(G_{\widehat{p}}) = \chi(G) = 0,\ G_{\widehat{p}} \text{ tem tipo } \mathrm{FP}_\infty \text{ sobre } \mathbb{Z}_p, \\ &\mathrm{cd}_p(G_{\widehat{p}}) = 3, \text{ e } G_{\widehat{p}} \text{ é livre de torção.} \end{aligned}$$

Como G tem tipo FP_∞ e dimensão cohomológica finita então, pela proposição 2.3.41, G tem tipo FP, logo existe uma resolução projetiva de tipo finito e comprimento finito $3 = \mathrm{cd}(G)$ do $[\mathbb{Z}G]$-módulo à direita abstrato trivial $\mathbb{Z}$. Seja

$$\mathcal{R} : 0 \to R_3 \xrightarrow{d_3} R_2 \xrightarrow{d_2} R_1 \xrightarrow{d_1} R_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$$

tal resolução e seja $\mathcal{S} = \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}, [\mathbb{Z}G])$ um complexo de $[\mathbb{Z}G]$-módulos à esquerda

$$\mathcal{S} : 0 \to S^0 \to S^1 \to S^2 \xrightarrow{\alpha} S^3 \xrightarrow{\beta} 0,$$

então

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{S}) &= \mathrm{Ext}^i_{[\mathbb{Z}G]}(\mathbb{Z}, [\mathbb{Z}G]) = H^i(G, [\mathbb{Z}G]) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq 3 \\ D = \mathbb{Z} \text{ se } i = 3 \end{cases}, \end{aligned}$$

pelo teorema 2.4.1 item (3), ou seja o complexo $\mathcal{S}$ é exato nas dimensões $i = 0, 1, 2$ e

$$\mathbb{Z} = H^3(\mathcal{S}) = \frac{\ker \beta}{\mathrm{im}\, \alpha} = \frac{S^3}{\mathrm{im}\, \alpha}.$$

Seja agora $\mathcal{T}$ o complexo obtido de $\mathcal{S}$ adicionando a única cohomologia não trivial

$$\mathcal{T} : 0 \to S^0 \to S^1 \to S^2 \xrightarrow{\alpha} S^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \to 0,$$

onde π é a projeção canônica, então $\mathcal{T}$ é complexo exato de $[\mathbb{Z}G]$-módulos à esquerda, mais ainda é uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ com cada S^i f.g. Pelo teorema 4.2.2 (3) $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left(\mathbb{Z}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right) = 0$ e similarmente $\mathrm{Tor}_i^{[\mathbb{Z}G]}\left([[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], \mathbb{Z}\right) = 0$, para cada $i \geq 1$.

Portanto o complexo definido como $\widehat{\mathcal{T}} = [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathcal{T}$ é exato, ou seja

$$\widehat{\mathcal{T}} : 0 \to \widehat{T}^0 \to \widehat{T}^1 \to \widehat{T}^2 \xrightarrow{\widehat{\alpha}} \widehat{T}^3 \xrightarrow{\widehat{\beta}} \mathbb{Z}_p \to 0$$

é uma resolução projetiva do $[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$-módulo à esquerda trivial abstrato $\mathbb{Z}_p$.

Seja agora $\mathcal{P} = \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$, o complexo exato de $[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$-módulos à direita, obtido no teorema 4.1.6, onde cada P_i é projetivo e f.g.

Queremos ver que

$$\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(\mathcal{P}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right) \simeq \widehat{\mathcal{T}}$$

como complexos de $[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$-módulos.

Seja $\theta_{R_i} : [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(R_i, [\mathbb{Z}G]) \to \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right)$ levando $\widetilde{\lambda} \otimes f \mapsto g$, onde $\widetilde{\lambda} \in [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$, f é um homomorfismo de $[\mathbb{Z}G]$-módulos indo de R_i em $[\mathbb{Z}G]$ e $g : R_i \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \to [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$ é um homomorfismo de $[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$-módulos que leva $r_i \otimes \mu \mapsto \widetilde{\lambda} f(r_i)\mu$.

Como, para cada i, R_i é um $[\mathbb{Z}G]$-módulo projetivo f.g. então $R_i \oplus M_i = [\mathbb{Z}G]^{k_i}$, para algum $k_i \geq 0$. Logo $\theta_{[\mathbb{Z}G]^{k_i}} = \theta_{R_i} \oplus \theta_{M_i}$,

$$\theta_{[\mathbb{Z}G]^{k_i}} : [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left([\mathbb{Z}G]^{k_i}, [\mathbb{Z}G]\right) \to \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left([\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right),$$

mas neste caso temos

$$\begin{aligned}[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left([\mathbb{Z}G]^{k_i}, [\mathbb{Z}G]\right) &\simeq [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \left(\Pi_{k_i} \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left([\mathbb{Z}G], [\mathbb{Z}G]\right)\right)\\ &\simeq [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \left(\oplus_{k_i}[\mathbb{Z}G]\right)\\ &\simeq [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [\mathbb{Z}G]^{k_i} \simeq [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]^{k_i},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left([\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right) &\simeq \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left([[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]^{k_i}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right)\\ &\simeq \Pi_{k_i} \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left([[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right)\\ &\simeq \oplus_{k_i}[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] = [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]^{k_i},\end{aligned}$$

ou seja $[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}\left([\mathbb{Z}G]^{k_i}, [\mathbb{Z}G]\right) \simeq \mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left([\mathbb{Z}G]^{k_i} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]], [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right)$, portanto $\theta_{[\mathbb{Z}G]^{k_i}}$ é um isomorfismo logo θ_{R_i} é isomorfismo para cada i, e os complexos $\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(\mathcal{P}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right)$ e $\widehat{\mathcal{T}}$ são isomorfos.

Agora

$$\begin{aligned}H^i(G_{\widehat{p}}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]) &= H^i\left(\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]}\left(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}, [[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]\right)\right)\\ &= H^i\left(\widehat{\mathcal{T}}_{\mathbb{Z}_p}\right),\end{aligned}$$

mas $H^i\left(\widehat{\mathcal{T}}_{\mathbb{Z}_p}\right) = 0$ se $i \neq 3$ pois $\widehat{\mathcal{T}}$ é exato. Também pela exatidão de $\widehat{\mathcal{T}}$, temos $\mathrm{im}\,\widehat{\alpha} = \ker\widehat{\beta}$ e $\mathrm{im}\,\widehat{\beta} = \mathbb{Z}_p$ com $\widehat{\beta}$ epimorfismo, logo

$$H^3\left(\widehat{\mathcal{T}}_{\mathbb{Z}_p}\right) = \frac{T^3}{\mathrm{im}\,\widehat{\alpha}} = \frac{T^3}{\ker\widehat{\beta}} = \mathbb{Z}_p,$$

e $\mathbb{Z}_p$ é $[[\mathbb{Z}_pG_{\widehat{p}}]]$-módulo trivial. Isto, juntamente com o fato que $\mathrm{cd}_p(G_{\widehat{p}}) = 3$ e $G_{\widehat{p}}$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$, implica por definição que $G_{\widehat{p}}$ é grupo pro-p orientável de dualidade de Poincaré de dimensão 3.

(2) implica (3). Seja V um subgrupo aberto de $G_{\widehat{p}}$, como $\mathrm{cd}_p(G_{\widehat{p}}) = 3 < \infty$, pelos resultados 3.5.48 e 3.5.23 (3), V é grupo pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão 3 orientável, então $\chi_p(V) = 0$ por 3.5.50. Então

$$\begin{aligned}0 = \chi_p(V) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(V, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V, \mathbb{F}_p) +\\ + \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(V, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(V, \mathbb{F}_p),\end{aligned}$$

mas $H_0(V, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ por (4.14) e pela dualidade de V e o teorema 3.5.46, $H_3(V, \mathbb{F}_p) = H^0(V, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^V$, mas V age trivialmente em $\mathbb{F}_p$ logo $H_3(V, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$, então $\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(V, \mathbb{F}_p) = 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(V, \mathbb{F}_p)$, assim

$$0 = \chi(V) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(V, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(V, \mathbb{F}_p) = -\,\mathrm{def}(V).$$

(3) implica (4). Já vimos que para qualquer subgrupo N de índice finito em G, $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$ e pela proposição 2.5.6 $\chi(G) = 0$. Então pelo lema 4.2.4, φ_N é sobre para cada subgrupo N de índice potência de p em G, e $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \varphi_N) = \mathrm{def}(N_{\widehat{p}})$, mas $N_{\widehat{p}}$ é subgrupo aberto de $G_{\widehat{p}}$, logo pela hipótese $\mathrm{def}(N_{\widehat{p}}) = 0$, o que implica que $\ker \varphi_N$ é trivial e logo φ_N é um isomorfismo. Pelo teorema 4.2.6 (3), G é p-bom.

(4) implica (1). O homomorfismo φ_N é sobre para todo subgrupo N de índice potência de p em G. Queremos provar que $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \varphi_N) = \mathrm{def}(N_{\widehat{p}}) = 0$ o que implica em φ_N ser um isomorfismo para todo subgrupo N de índice potência de p em G.

Qualquer subgrupo N de índice potência de p em G é p-bom, logo

$$\begin{aligned}\mathrm{def}(N_{\widehat{p}}) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(N, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(N, \mathbb{F}_p),\end{aligned}$$

mais ainda, como N é grupo orientável de dualidade de Poincaré de dimensão 3 temos

$$H^i(N, \mathbb{F}_p) \simeq H_{3-i}(N, \mathbb{F}_p) \text{ e } \chi(N) = 0,$$

assim temos

$$\begin{aligned}\mathrm{def}(N_{\widehat{p}}) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(N, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(N, \mathbb{F}_p) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(N, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(N, \mathbb{F}_p) + \\ + \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(N, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(N, \mathbb{F}_p) &= \chi(N) = 0.\end{aligned}$$

∎

Teorema 4.3.2 *Seja G um grupo abstrato de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3 e seja $G_{\widehat{p}}$ o completamento pro-p de G. Assuma que $G_{\widehat{p}}$ é infinito. Então se satisfaz uma das seguintes condições:*

1. *$G_{\widehat{p}}$ é um grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3;*
2. *existe um subgrupo normal V de índice potência de p em G tal que $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) \geq 2$. Neste caso V tem quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e não existe cota superior para a deficiência dos subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$;*
3. *existe um subgrupo normal V de índice potência de p em G tal que $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) = 1$. Neste caso V tem quociente $\mathbb{Z}$. Se existe uma cota superior na deficiência dos subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$ então a cota superior é 1 e $G_{\widehat{p}}$ é virtualmente $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração: Temos as seguintes possibilidades:

(a) $\mathrm{def}(N_{\widehat{p}}) = 0$ para todo N subgrupo normal de G de índice potência de p, ou

(b) existe um subgrupo normal V de G de índice potência de p, tal que $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) \neq 0$. Neste caso ou $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) = 1$ ou $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) \geq 2$.

Sabemos que para todo N subgrupo de G de índice potência de p, $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$, pelo lema 4.2.4 φ_N é sobre e $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \varphi_N) = \mathrm{def}(N_{\widehat{p}})$.

Se acontece (a), φ_N é isomorfismo para todo N subgrupo normal de G de índice potência de p. Logo, pelo teorema 4.3.1, $G_{\widehat{p}}$ é grupo pro-p orientável de dualidade de Poincaré de dimensão 3. Logo acontece 1.

Suponha agora que acontece (b) e que $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) \geq 2$. Como $V_{\widehat{p}}$ é um grupo pro-p finitamente apresentável, então existe uma aplicação sobre $f : \frac{V_{\widehat{p}}}{[V_{\widehat{p}}, V_{\widehat{p}}]} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p^{2+k}$, onde $2 + k = \mathrm{def}(V_{\widehat{p}})$ para algum $k \geq 0$. Mas, também temos as projeções canônicas $g : V_{\widehat{p}} \twoheadrightarrow \frac{V_{\widehat{p}}}{[V_{\widehat{p}}, V_{\widehat{p}}]}$ e $h : \mathbb{Z}_p^{2+k} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p^2$. Assim $h \circ f \circ g : V_{\widehat{p}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p^2$, ou seja $V_{\widehat{p}}$ tem quociente $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, isto implica que V tem quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Seja A um subgrupo aberto de $V_{\widehat{p}}$, pelo lema 4.2.3

$$\mathrm{def}(A) - 1 \geq [V_{\widehat{p}} : A] \left(\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) - 1\right),$$

mas $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) - 1 \geq 2 - 1 = 1$, então $\mathrm{def}(A) - 1 \geq [V_{\widehat{p}} : A]$, logo não existe cota superior na deficiência de subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$, pois $G_{\widehat{p}}$ é infinito, ou seja acontece 2.

Se não acontece 1 nem 2, então acontece 3: existe um subgrupo normal V de índice potência de p em G tal que $\mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) = 1$. De novo, usando o fato que a abelianização de $V_{\widehat{p}}$ tem $\mathbb{Z}_p^{\mathrm{def}(V_{\widehat{p}})}$ como quociente, ou seja existe um epimorfismo $f : \frac{V_{\widehat{p}}}{[V_{\widehat{p}}, V_{\widehat{p}}]} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$, e seja g a projeção canônica $g : V_{\widehat{p}} \twoheadrightarrow \frac{V_{\widehat{p}}}{[V_{\widehat{p}}, V_{\widehat{p}}]}$. Então $f \circ g : V_{\widehat{p}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$ é um epimorfismo, ou seja $V_{\widehat{p}}$ tem $\mathbb{Z}_p$ como quociente. Logo V tem quociente $\mathbb{Z}$.

Suponha que existe uma cota superior na deficiência dos subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$, então o caso 2 não se satisfaz e a menor cota superior é 1.

Pela prova do teorema 4.3.1, sabemos que para cada N subgrupo normal de G de índice potência de p o grupo $H_3(N, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$, logo o lema 4.2.4 nos diz que o kernel da aplicação

$$\varphi_N : H_2(N, \mathbb{F}_p) \twoheadrightarrow H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$ de dimensão $\mathrm{def}(N_{\widehat{p}})$. Agora se U é um subgrupo normal de G de índice potência de p tal que $U \subseteq V$, então pelo corolário 4.2.5 (2)

$$\mathrm{def}(U_{\widehat{p}}) \geq \mathrm{def}(V_{\widehat{p}}) = 1$$

mas $\mathrm{def}(U_{\widehat{p}}) < 2$ pois não acontece (2), logo $\mathrm{def}(U_{\widehat{p}}) = 1$ e $\dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \varphi_U) = 1$.

Seja

$$\mathcal{R} : 0 \to R_3 \to R_2 \to R_1 \to R_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

uma resolução projetiva do $[\mathbb{Z}G]$-módulo à direita trivial $\mathbb{Z}$ com todos os módulos f.g. e seja

$$\widehat{\mathcal{R}} \simeq \mathcal{R} \otimes_{[\mathbb{Z}G]} [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]].$$

Sabemos pela proposição 4.2.1 que $H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = 0$ se $i \neq 2$ e pelo lema 4.1.4

$$H_2(\widehat{\mathcal{R}}) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N, \mathbb{F}_p),$$

onde $\mathcal{N}$ é a coleção de todos os subgrupos normais do grupo G, tal que cada quociente G/N, com $N \in \mathcal{N}$, pertence à classe $\mathcal{C}$ de p-grupos finitos.

Para $N \in \mathcal{N}$, considere a sequência exata curta

$$0 \to \ker \varphi_N \hookrightarrow H_2(N, \mathbb{F}_p) \overset{\varphi_N}{\twoheadrightarrow} H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p) \to 0,$$

como $\varprojlim$ é funtor exato à esquerda temos que

$$0 \to \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} (\ker \varphi_N) \to \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N, \mathbb{F}_p) \to \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p),$$

é exata. Mas $\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N_{\widehat{p}}, \mathbb{F}_p) = 0$, pela prova da proposição 4.2.1, logo

$$\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} \ker \varphi_N \simeq \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N, \mathbb{F}_p)$$

e como $\ker \varphi_N$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$ de dimensão no máximo 1, temos que

$$\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} \ker \varphi_N = 0 \text{ ou } \mathbb{F}_p.$$

Suponha que $\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} \ker \varphi_N = 0$ então $H_2(\widehat{\mathcal{R}}) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N, \mathbb{F}_p) = 0$, ou seja o complexo $\widehat{\mathcal{R}}$ é exato, então a prova do teorema 4.3.1 implica que $G_{\widehat{p}}$ é grupo pro-p orientável de dualidade de Poincaré de dimensão 3, então o subgrupo $V_{\widehat{p}}$ de índice finito em $G_{\widehat{p}}$ é também um grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3 e logo tem deficiência 0 e não 1, uma contradição. Logo $H_2(\widehat{\mathcal{R}}) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} H_2(N, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ é o $[[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]$-modulo trivial. Assim

$$H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq 2 \\ \mathbb{F}_p \text{ se } i = 2. \end{cases}.$$

Considere o complexo $\mathcal{S} = \mathrm{Hom}_{[\mathbb{Z}G]}(\mathcal{R}, [\mathbb{Z}G])$, logo $\mathcal{S}$ é um complexo de $[\mathbb{Z}G]$-módulos à esquerda. Como G é um grupo de dualidade de Poincaré orientável $H^i(\mathcal{S}) = 0$ para $i \neq 3$ e $H^3(\mathcal{S})$ é o $[\mathbb{Z}G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$. Então complexo obtido de $\mathcal{S}$ adicionando sua única cohomologia não trivial

$$\mathcal{T} : 0 \to S^0 \to S^1 \to S^2 \overset{\alpha}{\to} S^3 \overset{\pi}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

pode ser visto como uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ como um $[\mathbb{Z}G]$-módulo à esquerda.

Definimos o complexo $\widehat{\mathcal{T}} = [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]] \otimes_{[\mathbb{Z}G]} \mathcal{T}$. Pelo parágrafo anterior aplicado a complexos de módulos à esquerda ao invés de módulos à direita $\widehat{\mathcal{T}}$ não é exato, pois, usando de novo a prova do teorema 4.3.1, $G_{\widehat{p}}$ é um grupo pro-p orientável de dualidade de Poincaré de dimensão 3, uma contradição. Então $\widehat{\mathcal{T}}$ tem só um grupo de homologia não trivial isomorfo a $\mathbb{F}_p$, que estaria na dimensão 2 se $\mathbb{Z}$ foi posicionado na dimensão -1 e $\widehat{\mathcal{T}}$ fosse uma cadeia de complexo e não uma co-cadeia de complexo, então no nosso caso esta é a primeira cohomologia

$$H^1(\widehat{\mathcal{T}}) \simeq \mathbb{F}_p,$$

e, também como na prova do teorema 4.3.1, $\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]}\left(\widehat{\mathcal{R}}, [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]\right) \simeq \widehat{\mathcal{T}}$. Então

$$H^1(\widehat{\mathcal{T}}) \simeq H^1\left(\mathrm{Hom}_{[[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]}\left(\widehat{\mathcal{R}}, [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]\right)\right) = \mathrm{Ext}^1_{[[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]}\left(\mathbb{F}_p, [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]\right) = H^1\left(G_{\widehat{p}}, [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]\right),$$

portanto

$$H^1\left(G_{\widehat{p}}, [[\mathbb{F}_p G_{\widehat{p}}]]\right) \simeq \mathbb{F}_p.$$

Logo pelo teorema 3 de [K], $G_{\widehat{p}}$ contém um subgrupo aberto $A \simeq \mathbb{Z}_p$, ou seja $G_{\widehat{p}}$ é virtualmente $\mathbb{Z}_p$. ∎

Teorema 4.3.3 *Seja G um grupo abstrato de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3 e seja $G_{\widehat{p}}$ o completamento pro-p de G. Então se satisfaz exatamente uma das seguintes condições:*

1. *$G_{\widehat{p}}$ é finito;*
2. *$G_{\widehat{p}}$ é um grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável de dimensão 3;*
3. *não existe cota superior na deficiência dos subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$;*
4. *$G_{\widehat{p}}$ é infinito e o supremo da deficiência dos subgrupos de índice finito em $G_{\widehat{p}}$ é 1. Neste caso $G_{\widehat{p}}$ é virtualmente $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração: Segue do teorema 4.3.2. ∎

Referências Bibliográficas

[AF] ANDERSON, F. W.; FULLER, K. R.; *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[B] BROWN, K. S.; *Cohomology of Groups*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[Bi] BIERI, R.; *Homological Dimension of discrete groups*. Queen Mary College, London, 1981.

[Bo] BOURBAKI, N.; *General Topology*. Springer, Berlin, 1989.

[CE] CARTAN, H.; EILENBERG S.; *Homological Algebra*. Princeton U. Press, Princeton, 1956.

[FJ] FRIED, M. D.; JARDEN, M.; *Field Arithmetic*. Springer, Berlin, 2008.

[H] HUNGERFORD, T. W.; *Algebra*. Springer, New York, 1974.

[HS] HILTON, P. J.; STAMMBACH, U.; *A Course in Homological Algebra*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[K] KORENEV, A. A.; *Pro-p groups with a finite number of ends*. (Russian) Mat. Zametki 76, 2004, n^o 4, 531-538; tradução em Math. Notes 76, 2004, n^{o}3-4, 490-496.

[KZ] KOCHLOUKOVA, D.; ZALESSKII, P.; *Profinite and pro-p completions of Poincaré duality groups of dimension* 3. Trans. Amer. Math. Soc. 360, 2008, 1927-1949.

[L] LAM, T. Y.; *Lectures on Modules and Rings*. Springer, New York, 1998.

[La] LANG, S.; *Algebra*. Springer, New York, 2002.

[LS] LUBOTZKY, A.; SEGAL, D.; *Subgroup growth*. Birkhäuser, Basel, 2003.

[ML] MAC LANE, S.; *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[NSW] NEUKIRCH, J.; SCHMIDT A.; WINGBERG K.; *Cohomology of number fields*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 323. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[P] PONTRYAGIN, L. S.; *L. S. Pontryagin Selected Works, Vol. 2, Topological Groups*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.

[R] ROTMAN, J. J.; *An Introdution to Homological Algebra*. Academis Press, Inc; Boston, 1979.

[R2] ROTMAN, J. J.; *The Theory of Groups, An Introduction*. Allyn and Bacon, Inc; Boston, 1973.

[R3] ROTMAN, J. J.; *Notes on Homological Algebra*. Van Nostrand, New York, 1970.

[Re] REZNIKOV, A.; *Three-manifolds class field theory (homology of coverings for a non-virtually b_1-positive manifold)*. Selecta Math. 3, 1997, n^{o}3, 361-399.

[Ro] ROMAN, S.; *Advanced Linear Algebra*. Springer, New York, 2000.

[RZ] RIBES, L.; ZALESSKII, P.; *Profinite Groups*. Springer, Berlin, 2000.

[S] SERRE, J. P.; *Cohomologie Galoisienne*. Springer, Berlin, 1997.

[SM] SAN MARTIN, L. A. B.; *Notas de aula de Grupos de Lie*. Campinas, Brasil, 2006.

[SW] SYMONDS, P.; WEIGEL, T.; *Cohomology of p-adic analytic groups. New horizons in pro-p groups*, 349-410, Progr. Math; 184, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2000.

[V] VERMANI, L. R.; *An Elementary Approach to Homological Algebra*. Chapman &Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2003.

[W] WILSON, J. S.; *Profinite Groups*. Clarendon Press, Oxford, 1998.

[We] WEIBEL, C. A.; *An Introdution to Homological Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[We2] WEIBEL, C. A.; *History of Homological Algebra*, History of Topology. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Wg] WEIGEL, T.; *On profinite groups with finite abelianizations*, Selecta Math. (N.S.) 13, 175–181, 2007.

Índice Remissivo