Funções Geradoras e Aplicações em Partições

César Adriano do Amaral Sampaio

Orientador: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

IMECC - UNICAMP
1998

Funções Geradoras e Aplicações em Partições

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por César Adriano do Amaral Sampaio e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de fevereiro de 1998.

Prof. Dr.: José Plínio de O. Santos
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 11 de fevereiro de 1998 pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof (a). Dr (a). PAULO MONDEK

Prof (a). Dr (a). WILSON DE CASTRO FERREIRA JÚNIOR

Aos meus pais:
Caio e Theodora.
A minha esposa:
Ana Lúcia.

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio e carinho.

Agradeço a minha esposa pela paciência, carinho e compreensão.

Agradeço ao Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos pela dedicação, competência e paciência na orientação deste trabalho.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

Agradeço a todos professores, funcionários e colegas do IMECC.

Sumário

Lista de Símbolos

Resumo

No primeiro capítulo apresentamos as funções geradoras ordinária e exponencial, algumas propriedades básicas e algumas aplicações; realizamos a interpretação de problemas com funções geradoras e desenvolvemos algumas técnicas para o cálculo de coeficientes de polinômios. Para finalizar este capítulo apresentamos relações de recorrências e desenvolvemos um procedimento para o cálculo da fórmula exata do termo geral de uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes. Desenvolvemos vários exemplos importantes destacando, dentre eles, Desarranjo, *block fountain* e os importantes números de Fibonacci

No segundo capítulo apresentamos a teoria de partições, apresentamos várias definições e resultados envolvendo partições com restrições, o teorema dos números Pentagonais com uma demonstração combinatória, além de várias identidades analíticas, entre elas o teorema dos números pentagonais de Euler o qual permite a obtenção de uma relação de recorrência para se determinar o número de partições de um inteiro positivo n. O produto triplo de Jacobi, a primeira e segunda identidades de Rogers-Ramanujan, um teorema de Heine e também o estudo dos polinômios de Gauss são apresentados.

No terceiro e último capítulo apresentamos as séries hipergeométricas ordinárias e básicas, com aplicações destas últimas em partições.

Em todo o texto apresentamos um número razoável de exemplos resolvidos e todos os teoremas possuem demonstração combinatória ou analítica.

Introdução

No primeiro capítulo apresentamos as funções geradoras ordinária e exponencial, algumas propriedades básicas e algumas aplicações. Dentre as aplicações destacamos: Desarranjo, *block fountain* e os importantes números de Fibonacci - os números de Fibonacci surgiram como um dos problemas contido no livro *Liber Abaci* (1202), escrito por Fibonacci (Leonardo de Pisa), que é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado. O problema original dos números de Fibonacci possui o seguinte enunciado: "Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?".

No segundo capítulo apresentamos a teoria de partições - certos problemas em partições datam da idade média; entretanto, a primeira descoberta de alguma relevância foi feita apenas no século XVIII quando L. Euler provou vários teoremas básicos em partições. Euler realmente desenvolveu os fundamentos da teoria de partições. Muitos outros grandes matemáticos como Cayley, Gauss, Hardy, Jacobi, Lagrange, Legendre, Littlewood, Rademacher, Ramanujan, Schur e Silvester contribuíram para o desenvolvimento da teoria - apresentamos várias definições e resultados envolvendo partições com restrições, trazemos também o teorema dos números Pentagonais com uma demonstração combinatória, além de várias identidades analíticas, entre elas o teorema dos números pentagonais de Euler, que permite a obtenção de uma relação de recorrência para se determinar o número de partições de um inteiro positivo n. A primeira e segunda identidades de Rogers-Ramanujan e o estudo dos polinômios de Gauss também são apresentados.

No terceiro e último capítulo apresentamos as séries hipergeométricas ordinárias e básicas, com aplicações destas últimas em partições. Historicamente, o estudo das séries hipergeométricas básicas (também chamadas q-séries hipergeométricas) iniciou-se essencialmente em 1748 quando Euler considerou o produto infinito $(q;q)_\infty^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-q^{k+1}\right)^{-1}$ como a função geradora para *p(n)*, o número de partições de um inteiro positivo *n*. Mas foi aproximadamente cem anos depois que o assunto adquiriu um status independente quando Heine converteu uma simples observação que $\lim_{q\to 1}\frac{1-q^a}{1-q} = a$ em um estudo sistemático da teoria da série hipergeométrica básica ${}_2\Phi_1$ paralela a teoria de Gauss da série hipergeométrica ${}_2F_1$.

Capítulo 1

Funções Geradoras

Neste capítulo introduzimos o conceito de funções geradoras ordinárias e exponenciais e apresentamos aplicações desta ferramenta para a solução de vários problemas, entre eles alguns envolvendo relações de recorrência. É importante frisar que os resultados apresentados neste capítulo serão essenciais nos capítulos posteriores.

1.1 Definições

Definição 1.1.1. *Uma função $f(x)$ é uma função geradora para uma seqüência $(a_0, a_1, a_2, ...)$, $a_n \in IR$, relativa à seqüência de funções $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...)$ se:*

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots \ .$$

Exemplo 1. x^2 é a função geradora para a seqüência de coeficientes $(4, -4, 1)$, com respeito a seqüência de funções $((x+2)^0, (x+2)^1, (x+2)^2)$, pois, como podemos verificar: $x^2 = 4(x+2)^0 - 4(x+2)^1 + 1(x+2)^2$.

Exemplo 2. Se $f(x) = 0 + 1\exp(x) + 2\exp(2x) + 3\exp(3x) + \ldots$, então $f(x)$ é a função geradora para a seqüência $(0, 1, 2, ..., n, ...)$, relativa à seqüência de funções $(\exp(0), \exp(1x), \exp(2x), ..., \exp(nx), ...)$.

Propriedade 1.1.1. *Dadas as funções*

$$f(x) = a_0u_0(x) + a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + ... \ ,$$

e

$$g(x) = b_0u_0(x) + b_1u_1(x) + b_2u_2(x) + ... \ ,$$

então:

i) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_n = b_n$ *para qualquer* $n \in I\!N$.

ii) $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)u_0(x) + (a_1 + b_1)u_1(x) + (a_2 + b_2)u_2(x) + ... \ .$

Definição 1.1.2. *Definimos* $f(x)$, *a função geradora ordinária para a seqüência* $(a_0, a_1, a_2, ...)$, *como sendo a função geradora para a seqüência* $(a_0, a_1, a_2, ...)$, *relativa à seqüência* $(1, x^1, x^2, ..., x^n, ...)$, *ou seja,*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... \ .$$

Exemplo 3. $\frac{1}{1-x}$ é a função geradora ordinária para a seqüência $(1, 1, 1, ...)$, pois:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \ .$$

Exemplo 4. $(1 + x)^n$ é a função geradora ordinária para a seqüência $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}\right)$, pois:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$

Propriedade 1.1.2. *(Produto de Convolução): Dadas as funções*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... \ ,$$

então:

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ... \ ;$$

onde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0.$$

Propriedade 1.1.3. *Se*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ,$$

então,

$$h^*(x) = \frac{h(x)}{1-x}$$

é a função geradora para a soma parcial dos coeficientes a_r's, isto é:

$$h^*(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + ... + \left(\sum_{n=0}^{r} a_n\right) x^r + ... \; .$$

Isto segue imediatamente da propriedade anterior, bastando tomar

$$g(x) = 1 + x + x^2 + ... \; .$$

Definição 1.1.3. *Definimos $f(x)$, a função geradora exponencial para a seqüência $(a_0, a_1, a_2, ...)$, como sendo a função geradora para a seqüência $(a_0, a_1, a_2, ...)$, relativa à seqüência $\left(1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, ..., \frac{x^n}{n!}, ...\right)$, ou seja,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + ... + a_n \frac{x^n}{n!} + ... \; .$$

Exemplo 5. $\exp(x)$ é a função geradora exponencial para a seqüência $(1, 1, 1, ...)$, pois:

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \; .$$

Propriedade 1.1.4. *Dadas as funções*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + ... + a_n \frac{x^n}{n!} + ...$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + ... + b_n \frac{x^n}{n!} + ... \ ,$$

então:

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + ... + c_n \frac{x^n}{n!} + ...$$

onde:

$$c_n = \binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + ... + \binom{n}{r} a_r b_{n-r} + ... + \binom{n}{n} a_n b_0.$$

1.2 Interpretação de Problemas com Funções Geradoras.

Nesta seção apresentamos vários exemplos de modelagem de problemas com funções geradoras.

Começamos esta seção com o estudo do seguinte problema:

Exemplo 6. Qual o número de soluções para a equação: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, onde x_1, x_2, x_3 são inteiros não negativos?

Uma maneira de solucionar este problema seria determinar todas as soluções diretamente, no entanto este não seria razoável se no lugar do número 6 tivéssemos, por exemplo, 100. Vamos então desenvolver um método para interpretar este problema por meio de funções geradoras.

Aqui nós vamos associar cada solução da seguinte maneira:

Considere a solução: $1 + 2 + 3 = 6$, e associe a $x^1 x^2 x^3 = x^{1+2+3} = x^6$.

Agora considere: $0 + 2 + 4 = 6$, e associe a $x^0 x^2 x^4 = x^{0+2+4} = x^6$.

E por último: $1 + 1 + 4 = 6$, e associe a $x^1 x^1 x^4 = x^{1+1+4} = x^6$.

Note que, se fizermos tal associação para cada solução do nosso problema inicial, estaremos solucionando o problema equivalente de encontrar o número de soluções de: $x^{x_1} x^{x_2} x^{x_3} = x^{x_1+x_2+x_3} = x^6$, onde $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Observe que se desenvolvermos o produto

$$\begin{aligned}&\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\\&\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right),\end{aligned}$$

teremos que o coeficiente de x^6 será o número de soluções desejadas.

Como

$$\left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^3=$$

$$=1+3x+21x^5+15x^4+10x^3+6x^2+28x^6+33x^7+36x^8+37x^9+36x^{10}+$$
$$+33x^{11}+28x^{12}+21x^{13}+15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18},$$

teremos então que o número de soluções de nossa equação será 28.

Para melhor fixar esta idéia apresentamos mais alguns exemplos:

Exemplo 7. Qual é o número de soluções de $x_1+x_2+x_3+x_4=6$, onde x_1,x_2,x_3,x_4 são inteiros não negativos?

Neste nosso caso $x_1,x_2,x_3,x_4 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, e como no exemplo anterior, basta encontrar o coeficiente de x^6 na expansão de

$$\left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^4.$$

Quando expandimos este produto não é necessário determinar os termos cuja potência de x é maior do que 6, pois estes não trarão contribuição alguma ao coeficiente de x^6, temos então:

$$\left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^2=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+\ldots\ ;$$

$$\left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^3=$$

$$\begin{aligned} &= \left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right). \\ &\quad .\left(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+\ldots\right) \\ &= 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+\ldots\ ; \end{aligned}$$

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4=$$

$$=(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+\ldots)$$
$$=1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+84x^6+\ldots\ .$$

Temos portanto que a nossa equação possui 84 soluções.

Exemplo 8. Qual é o número de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$, onde x_1, x_2, x_3, x_4 são inteiros não negativos?

Note que este exemplo difere do exemplo anterior apenas pelo coeficiente de x_4, neste caso o termo $2x_4$ irá contribuir com $0, 2, 4$ ou 6, e como para x_1, x_2, x_3 não temos mudança alguma, teremos que nossa função geradora será:

$$\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^3 \left(x^0 + x^2 + x^4 + x^6\right).$$

Temos então apenas que expandir este produto:

$$\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^3 =$$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + ... \;;$$

$$\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^3 \left(x^0 + x^2 + x^4 + x^6\right)$$

$$= 1 + 3x + 7x^2 + 13x^3 + 22x^4 + 34x^5 + 50x^6 + ... \;.$$

Vemos, portanto, que existem 50 soluções para nossa equação.

Para determinar as funções geradoras acima, nós utilizamos o seguinte critério: Avaliamos a que conjunto cada um de nossos $x_i's$ pertence, e colocamos no produto o fator correspondente a um polinômio de coeficientes unitários que possue exatamente as potências correspondentes ao nosso conjunto. Fazendo isto com cada x_i, teremos então a nossa função geradora.

No primeiro exemplo a nossa função geradora foi:

$$\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^3;$$

Como estamos interessados apenas no coeficiente x^6, não teríamos alteração alguma no coeficiente que procuramos se completássemos cada um dos polinômios com potências maiores que 6, pois estes não irão influenciar no coeficiente de x^6. Poderíamos então ter a seguinte função geradora:

$$\left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ...\right)^3;$$

mas

$$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x};$$

temos, portanto, que nossa função geradora será:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^3.$$

Para o exemplo 8 temos a função geradora:

$$\left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^3\left(x^0+x^2+x^4+x^6\right).$$

Mas, usando o critério acima, podemos substituir o polinômio

$$\left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$$

por

$$x^0+x^1+x^2+x^3+...=\frac{1}{1-x};$$

e substituir o polinômio

$$\left(x^0+x^2+x^4+x^6\right)$$

por

$$x^0+x^2+x^4+x^6+...=\frac{1}{1-x^2};$$

teremos assim que nossa função geradora será:

$$\frac{1}{(1-x)^3(1-x^2)}.$$

Para resolver o problema mais geral de determinar o número de soluções inteiras não negativas de $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n=k$, para $k\in I\!N$ e $a_i\in I\!N$, $i=1,2,3,...,n$; primeiro como cada x_i é inteiro não negativo temos que o termo a_ix_i irá gerar o conjunto $\{0a_i,1a_i,2a_i,3a_i,...\}$, e portanto a_ix_i irá contribuir com o termo

$$\left(x^{0a_i}+x^{1a_i}+x^{2a_i}+...\right)=\left(\frac{1}{1-x^{a_i}}\right);$$

portanto a função geradora para nosso problema será:

$$\left(\frac{1}{1-x^{a_1}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{a_2}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{a_3}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-x^{a_n}}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x^{a_i}}\right),$$

e o número de soluções para nossa equação será o coeficiente de x^k.

1.3 Cálculo de Coeficientes

Calcular coeficientes de polinômios por cálculo direto pode não ser uma tarefa simples quando se tratar de coeficientes de grau mais elevado; por isso vamos estudar uma técnica mais eficiente para determinar os coeficientes de uma dada função geradora.

1.3.1 A expansão binomial

Para a expansão de $(a+x)^n$, vamos observar os casos seguintes:

$(a+x)^2 = (a+x)(a+x) = aa + ax + xa + xx.$

$(a+x)^3 = (a+x)(a+x)(a+x) = aaa + aax + axa + axx + xaa + xax + xxa + xxx.$

$(a+x)^n = (a+x)(a+x)(a+x)...(a+x)$ n fatores.

Note que no primero caso temos que nossa soma consiste de todos os arranjos de duas letras com repetição das letras a e x; já no segundo caso temos que a soma consiste de todos os arranjos de três letras com repetição das letras a e x; assim temos que no caso geral, se expandirmos o produto, este consistirá de uma soma de todos os arranjos de n-letras com repetição das letras a e x. Assim o coeficiente de $a^{n-k}x^k$ será a permutacão de n elementos, onde temos $n-k$ a's idênticos e k x's idênticos. Temos então que o coeficiente de $a^{n-k}x^k$ será $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ que denotamos usualmente por $C_{n,k}$.

Observação: Temos as seguintes notações: $C_{n,k} = P(n-k,k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$.

Observação: Note que $C_{n,k} = C_{n,n-k}$, pois

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}.$$

Teremos portanto que: $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} a^{n-k} x^k$.

Exemplo 9. Calcule o coeficiente de x^{20} na expansão de $(1+x)^{22}$.

Temos pelo resultado acima que o coeficiente de x^{20} será $C_{22,20} = \frac{22!}{2!20!} = 231$.

Exemplo 10. Calcule o coeficiente de x^{20} na expansão de $(1+x)^{22}$ $(1+2x)^2$.

Para determinar o coeficiente de x^{20} no produto acima vamos expandir $(1+x)^{22}$ e $(1+2x)^2$ separadamente, e multiplicar $C_{22,20}x^{20}$ da primeira expansão por $C_{2,0}(2x)^0$ da segunda, somar com o produto de $C_{22,19}x^{19}$ por $C_{2,1}(2x)^1$ e somar com o produto de $C_{22,18}x^{18}$ por $C_{2,2}(2x)^2$. Assim temos que o coeficiente de x^{20} na expansão de $(1+x)^{22}(1+2x)^2$ será:

$$C_{22,10}C_{2,0}2^0 + C_{22,19}C_{2,1}2^1 + C_{22,18}C_{2,2}2^2 =$$

$$= \frac{22!}{2!20!}\frac{2!}{2!0!}2^0 + \frac{22!}{3!19!}\frac{2!}{1!1!}2^1 + \frac{22!}{4!18!}\frac{2!}{0!2!}2^2 = 35651.$$

1.3.2 A Expansão Multinomial

A expansão binomial pode ser usada em expressões um pouco mais complexas, como por exemplo:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^5 &= [(x+y)+z]^5 \\
&= C_{5,0}(x+y)^5z^0 + C_{5,1}(x+y)^4z^1 + C_{5,2}(x+y)^3z^2 + \\
&\quad + C_{5,3}(x+y)^2z^3 + C_{5,4}(x+y)^1z^4 + C_{5,5}(x+y)^0z^5.
\end{aligned}$$

Agora se aplicarmos novamente a expansão binomial em $(x+y)^5$, $(x+y)^4$, $(x+y)^3$, $(x+y)^2$ e substituirmos na expressão, teremos:

$$(x+y+z)^5 =$$

$$\begin{gathered}
= 20x^3yz + 30x^2y^2z + 30x^2yz^2 + 20xy^3z + 30xy^2z^2 + x^5 + y^5 + z^5 + 5xy^4 + \\
+ 5xz^4 + 5x^4y + 5x^4z + 10x^3y^2 + 10x^3z^2 + 10x^2y^3 + 10x^2z^3 + \\
+ 5yz^4 + 5y^4z + 10y^3z^2 + 10y^2z^3 + 20xyz^3.
\end{gathered}$$

Temos aqui um procedimento que nos permite efetuar a expansão mas que, no entanto, não nos fornece com rapidez o coeficiente de um termo pré determinado. Imagine se desejássemos saber qual é o coeficiente de $x^2y^1z^3$ na expansão de $(x+y+z)^{20}$, notamos que o procedimento acima não é tão adequado, pois iria exigir muitas operações.

Vamos então, nesse momento, determinar o coeficiente do termo $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}...x_k^{a_k}$ na expansão de

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n$$

onde $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = n$ e $a_i \geqslant 0$ para todo i.

Considere primeiramente a expressão:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n.$$

Se expandirmos esta expressão, teremos que cada termo da soma será uma combinação de n-letras; considere uma parcela qualquer, digamos $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} ... x_k^{a_k}$, temos que este termo consta de exatamente a_1 x_1's, a_2 x_2's,...,a_k x_k's repetidos, assim temos que o coeficiente de $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} ... x_k^{a_k}$ será a permutação de n letras onde temos k letras repetidas, e x_1 o está repetida a_1 vêzes, x_2 está repetida a_2 vêzes, ..., e x_k está repetida a_k vêzes; assim o coeficiente de $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} ... x_k^{a_k}$ será $\frac{n!}{a_1! a_2! a_3! ... a_k!}$ que denotaremos por $P(a_1, a_2, ..., a_k; n)$.

Como $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n$ consta de uma soma de todos os termos do tipo $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} ... x_k^{a_k}$, onde $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = n$, temos então que:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n = \sum_{a_i \geqslant 0,\ i=1,2,...,k} P(a_1, a_2, ..., a_k; n) x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_k^{a_k}.$$

Note que se $s_1, s_2, ..., s_k$ for uma permutação de $a_1, a_2, ..., a_k$, então $P(s_1, s_2, ... s_k; n) = P(a_1, a_2, ..., a_k; n)$; assim, por exemplo,para expandir $(x + y + z)^5$ basta calcular os coeficientes das seguintes representações de 5 como soma de, no máximo, três inteiros não negativos:

$5 = 5 + 0 + 0;$
$5 = 4 + 1 + 0;$
$5 = 3 + 2 + 0;$
$5 = 3 + 1 + 1;$
$5 = 2 + 2 + 1.$

Onde temos que $P(5, 0, 0; 5) = 1$, $P(4, 1, 0; 5) = 5$, $P(3, 2, 0; 5) = 10$, $P(3, 1, 1; 5) = 20$, $P(2, 2, 1; 5) = 30$; assim:

$$(x + y + z)^5 =$$

$$= x^5 + y^5 + z^5 + 5x^4y + 5x^4z + 5xy^4 + 5y^4z + 5xz^4 + 5yz^4 + 10x^3y^2 + 10x^3z^2 + 10x^2y^3 +$$
$$+ 10x^2z^3 + 10y^3z^2 + 10y^2z^3 + 20x^3yz + 20xy^3z + 20xyz^3 + 30x^2y^2z + 30x^2yz^2 + 30xy^2z^2.$$

Propriedades dos coeficientes multinomiais:

i) $P(a_1, a_2, ..., a_k; n + 1) = P(a_1 - 1, a_2, a_3, ..., a_k; n) +$

$+P(a_1, a_2 - 1, a_3, ..., a_k; n) + ... + P(a_1, a_2, a_3, ..., a_k - 1; n)$.

ii) $P(a_1, a_2, ..., a_k; n+m) = \sum_{b_i+c_i=a_i} P(b_1, b_2, ..., b_k; m)P(c_1, c_2, ..., c_k; n)$.

Para demonstrar *i)* basta multiplicar ambos os lados de

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n = \sum_{b_i \geqslant 0,\ i=1,2,...,k} P(b_1, b_2, ..., b_k; n) x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_k^{b_k}$$

por

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)$$

e igualar os coeficientes de $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_k^{a_k}$ onde $a_1 + a_2 + ... + a_k = n + 1$.

Para demostrar ii) considere

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^m = \sum_{b_i \geqslant 0,\ i=1,2,...,k} P(b_1, b_2, ..., b_k; m) x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_k^{b_k}$$

e

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n = \sum_{c_i \geqslant 0,\ i=1,2,...,k} P(c_1, c_2, ..., c_k; n) x_1^{c_1} x_2^{c_2} ... x_k^{c_k}.$$

Multiplicando, membro a membro, os lados correspondentes destas igualdades e igualando os coeficientes de $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_k^{a_k}$ temos a propriedade.

■

1.3.3 A Expansão em Série Binomial

Tendo em vista o primeiro exemplo, onde desejávamos calcular o coeficiente de x^6 na expansão de $(1 + x^1 + x^2 + x^3 + .. + x^6)^3$, que como vimos era equivalente a calcular o coeficiente na expansão de $\frac{1}{(1-x)^3} = (1 - x)^{-3}$, vemos então a necessidade de generalizar o cálculo dos coeficientes do binômio de Newton para potências negativas, isto é, determinar uma maneira geral de determinar a expansão de $(a + x)^n$ para n inteiro.

Vamos provar que:

Teorema 1.3.3.1. *Se a for um número positivo e se $|x| < a$, então para qualquer inteiro n temos a igualdade:*

$$\begin{aligned}(a + x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 + ... \\ &\quad ... + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} a^{n-k} x^k + ... \ .\end{aligned}$$

Note que a expansão acima é exatamente o binômio de Newton se n for um inteiro positivo, pois o coeficiente de x^{n+k} será 0 para k inteiro positivo.

Prova: Vamos utilizar indução nesta prova, mas primeiramente vamos rearranjar as expressões:

Como n é inteiro negativo, $n = -m$ onde m é um inteiro positivo. Vejamos o coeficiente de $a^{-m-k}x^k$ na seguinte expansão:

$$(a+x)^{-m} =$$

$$\begin{aligned}
&a^{-m} - ma^{-m-1}x + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}a^{-m-2}x^2 - \\
&-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-m-3}x^3 + \ldots \\
&+(-1)^k\frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}a^{-m-k}x^k + \ldots \; .
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Este é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^k m(m+1)\cdots(m+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} &= \frac{(-1)^k (m+k-1)!}{(m-1)!k!} \\
&= \frac{(-1)^k (m+k-1)!}{((m+k-1)-k)!k!} \\
&= (-1)^k C_{m+k-1,k}.
\end{aligned}$$

Se multiplicarmos ambos os lados da igualdade 1.1 por a^m teremos:

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-m} = 1 - C_{m,1}\left(\frac{x}{a}\right) + C_{m+1,2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - C_{m+2,3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k C_{m+k-1,k}\left(\frac{x}{a}\right)^k + \ldots \; .$$

Neste ponto faremos a substituição de $\frac{x}{a}$ por $-t$ e teremos então a igualdade:

$$(1-t)^{-m} = 1 + C_{m,1}t + C_{m+1,2}t^2 + C_{m+2,3}t^3 + \ldots + C_{m+k-1,k}t^k + \ldots$$

Vamos finalmente utilizar indução em m.

Para $m = 1$, temos que $C_{1+k-1,k} = C_{k,k} = 1$, e portanto:

$$(1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \ldots \ .$$

que é a expansão bem conhecida de $\frac{1}{1-t}$ para $|t| < 1$ (como temos por hipótese que $|x| < a$ temos que $|t| = \left|\frac{x}{a}\right| < 1$). Portanto o primeiro passo da indução é verdadeiro.

Vamos assumir que a relação seja verdadeira para m e vamos mostrar que ela é válida para $m+1$, ou seja, vamos mostrar que a seguinte expressão é verdadeira:

$$(1-t)^{-m-1} = 1 + C_{m+1,1}t + C_{m+2,2}t^2 + C_{m+3,3}t^3 + \ldots + C_{m+k,k}t^k + \ldots \ .$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $(1-t)$ obtemos:

$$(1-t)^{-m} = \left(1 + C_{m+1,1}t + C_{m+2,2}t^2 + C_{m+3,3}t^3 + \ldots + C_{m+k,k}t^k + \ldots\right)(1-t).$$

Nos resta, pois, mostrar que

$$C_{m+k-1,k} = C_{m+k,k} - C_{m+k-1,k-1},$$

a qual é verdadeira uma vez que

$$\begin{aligned} C_{m+k,k} - C_{m+k-1,k-1} &= \frac{(m+k)!}{m!k!} - \frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!} \\ &= \frac{((m+k)-k)(m+k-1)!}{m!k!} \\ &= \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!} \\ &= C_{m+k-1,k}. \end{aligned}$$

Temos portanto que a relação é válida para todo inteiro positivo m, ou seja, que a expansão em série binomial proposta é valida para todo inteiro n.

■

Exemplo 11. Voltando ao primeiro problema de encontrar o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, teremos que calcular o coeficiente de x^6 na expansão de $(1-x)^{-3}$ que, pelo resultado acima será:

$C_{3+6-1,6} = C_{8,6} = \frac{8!}{2!6!} = 28$. Portanto existem 28 soluções para a equação como já havíamos calculado.

Exemplo 12. Encontrar o número de soluções inteiras não negativas para a equação: $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$. Este número é o coeficiente de x^6 na expansão de

$$\frac{1}{(1-x)^3(1-x^2)} = (1-x)^{-3}(1-x^2)^{-1}.$$

Neste caso podemos encontrar x^6 como o produto de: $x^0\left(x^2\right)^3$ ou $x^2\left(x^2\right)^2$ ou $x^4\left(x^2\right)^1$ ou $x^6\left(x^2\right)^0$; neste caso, a solução de nosso problema será dado por:

$$C_{3+0-1,0}C_{1+3-1,3} + C_{3+2-1,2}C_{1+2-1,2} + C_{3+4-1,4}C_{1+1-1,1} + C_{3+6-1,6}C_{1+0-1,0}.$$

1.4 Relações de Recorrência

Definição 1.4.1. *Uma relação de recorrência é um esquema que permite determinar um elemento qualquer de uma seqüência, a partir de operações com os termos anteriores.*

Exemplo 13. Imagine uma seqüência de números onde temos um termo inicial, digamos a_0, e tal que cada termo da seqüência seja o dobro do termo anterior.

Se considerarmos um termo geral a_n teremos a seguinte relação: $a_n = 2a_{n-1}$. Teremos assim que:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}; \\ a_{n-1} &= 2a_{n-2}; \\ a_{n-2} &= 2a_{n-3}; \\ &\dots \\ a_1 &= 2a_0. \end{aligned}$$

Temos, portanto, que:

$$\begin{aligned} a_n &= 2(2a_{n-2}) = 2^2a_{n-2} = 2^2(2a_{n-3}) = 2^3a_{n-3} \\ &= 2^3(2a_{n-4}) = \dots = 2^na_{n-n} = 2^na_0. \end{aligned}$$

isto é:

$$a_n = 2^n a_0.$$

Exemplo 14. Encontrar uma relação de recorrência para determinar o número de maneiras de arranjar n objetos distintos em fila.

Seja a_n o número desejado, para uma fila de n objetos podemos escolher um em n opções,

$$\boxed{n}\underbrace{\boxed{}}_{n-1}$$

e temos que determinar ainda qual é o número de possibilidades de preencher os $n-1$ lugares vagos, ou seja, temos que:

$$a_n = na_{n-1}.$$

Temos, portanto, que:

$$a_n = n!a_1.$$

Como

$$a_1 = 1,$$

então,

$$a_n = n!.$$

Exemplo 15. (Números de Fibonacci) Os números de Fibonacci tiveram origem histórica no estudo do crescimento da população de coelhos. Para informações sobre sua origem recomendamos [21] . Aqui vamos introduzir os números de Fibonacci por meio de um problema combinatório (onde a_n será o n-ésimo número de Fibonacci).

Sejam $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; para $n \geq 2$ seja a_n o número de maneiras de encontrar uma permutação $a_1a_2a_3...a_n$ de $1, 2, 3, ..., n$ tal que para cada i, a_i esteja na i-ésima coluna da tabela:

	1	2	.	.	.	$n-3$	$n-2$	$n-1$
1	2	3	.	.	.	$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	.	.	.	$n-1$	n	

Para $n = 2$ analisando a tabela correspondente

$$\begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & \end{array}$$

vemos que $a_2 = 2$; pois as únicas permutações possíveis são 12 e 21.

Para $n = 3$ analisando

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

vemos que $a_3 = 3$; pois as permutações possíveis são: 123, 132 e 213.

Para $n = 4$ a tabela

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

nos fornece $a_4 = 5$.

Para solucionarmos o caso geral vamos fixar o n na n-ésima ou na $(n-1)$-ésima coluna e teremos:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & . \; . \; . & n-3 & n-2 & n-1 & \\ 1 & 2 & 3 & . \; . \; . & n-2 & n-1 & \boxed{n} & \\ 2 & 3 & 4 & . \; . \; . & n-1 & n & & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & . \; . \; . & n-3 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & . \; . \; . & n-2 & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & . \; . \; . & n-1 & \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & . \; . \; . & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & . \; . \; . & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & . \; . \; . & n-1 & \boxed{n} & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & . \; . \; . & n-3 \\ 1 & 2 & 3 & . \; . \; . & n-2 \\ 2 & 3 & 4 & . \; . \; . & \end{array}$$

Temos assim que o número de tais permutações do primeiro caso será a_{n-1} e do segundo caso a_{n-2}.

Assim temos a relação de recorrência: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Exemplo 16. (Desarranjo) Um desarranjo de n elementos é uma maneira de dispor os números $1, 2, 3, ..., n$ em fila, tal que, o número j não ocupe a j-ésima posição, isto para $1 \leqslant j \leqslant n$.

Encontre uma relação de recorrência para calcular o número de desarranjos de n elementos.

Para calcular tal relação de recorrência vamos considerar a tabela:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_n \end{pmatrix}$$

onde os elementos da primeira linha indicam a posição e os da segunda linha indicam o elemento a_j que ocupa a j-ésima posição.

Queremos que $a_1 \neq 1$. Supondo $a_1 = j$ teremos duas possibilidades para a_j; $a_j = 1$ ou $a_j \neq 1$. Note que estas duas possibilidades cobrem todos os possíveis desarranjos.

Suponha primeiramente que $a_j = 1$. Temos então

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & . & . & . & j & . & . & . & n \\ a_2 & a_3 & . & . & . & 1 & . & . & . & a_n \end{pmatrix}$$

e assim esta tabela se reduz ao desarranjo de $n-2$ elementos, como $a_1 = j$, $1 < j \leqslant n$; então para $a_1 = j$ e $a_j = 1$ temos $(n-1)a_{n-2}$ possibilidades.

Agora se $a_j \neq 1$ teremos

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & . & . & . & i & . & . & . & j & . & . & . & n \\ a_2 & a_3 & . & . & . & 1 & . & . & . & a_j & . & . & . & a_n \end{pmatrix}$$

que se reduz ao desarranjo de $n-1$ elementos e $a_1 = j$, $1 < j \leqslant n$. Assim para $a_1 = j$ e $a_j \neq 1$ temos $(n-1)a_{n-1}$ possibilidades.

Como $a_1 = j$ e $a_j = 1$ ou $a_1 = j$ e $a_j \neq 1$ completam todas as possibilidades (sem repetição de desarranjos) temos que $a_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$.

Exemplo 17. A Torre de Hanoy é um jogo que consiste de um tabuleiro com três pinos verticais alinhados e de n discos de tamanhos distintos; o objetivo é fazer com que todas as peças que estão em um dos pinos (digamos o da esquerda), passem para outro pino (digamos o da direita), sendo que devemos sempre manter um disco menor sobre um maior e devemos mover um disco de cada vez. Com estas regras determinar uma relação de recorrência para calcular o menor número de movimentos necessários para mover as n peças do pino de esquerda para o pino da direita.

Para resolver este problema vamos primeiro chamar os pinos da direita para a esquerda de A, B e C (respectivamente); assim temos inicialmente que os n discos estão em A. Seja a_n o número de movimentos para mudar os n discos de pino.

Se queremos mudar os discos de A para C temos, em algum momento, que ter os $n-1$ discos menores em B, para que o maior disco mude de A para C, e para isto temos que mudar os $n-1$ discos menores de A para B o que requer a_{n-1} movimentos. Agora com os $n-1$ discos em B, mudamos o maior disco de A para C o que usa um movimento e finalmente passamos os $n-1$ discos de B para C que usa mais a_{n-1} movimentos. Assim para que toda a torre seja transferida de A para C serão necessários $2a_{n-1}+1$ movimentos.

Logo $a_n = 2a_{n-1}+1$.

1.4.1 Relações de Recorrência e Funções Geradoras

Aqui trataremos de alguns exemplos que utilizam funções geradoras como ferramenta para auxiliar a encontrar o termo geral de algumas relações de recorrências.

Exemplo 18. Considerando a relação de recorrência de Fibonacci

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{1.2}$$

determinar a fórmula para o termo geral.

Consideremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a função geradora ordinária da seqüência $\{a_n\}$.

Multiplicando ambos os lados de $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ por x^n obtemos:

$$a_n x^n = a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n.$$

Agora somando em n para $n \geq 2$ temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n,$$

ou seja,

$$f(x) - a_0 - a_1 x = x\left(f(x) - a_0\right) + x^2 f(x).$$

Como $a_0 = a_1 = 1$ teremos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Agora vamos separar $f(x)$ em frações parciais:

$$\begin{aligned}
-x^2-x+1 &= -\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)= \\
&= -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)= \\
&= \left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{A}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}+\frac{B}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}.$$

Daí

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}A+\frac{1-\sqrt{5}}{2}B=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ B=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{array}\right. .$$

Como

$$\frac{1}{1-kx}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n x^n,$$

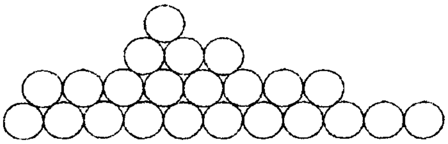
então,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n\right\},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Exemplo 19. Definimos por um *fountain* um arranjo de n moedas em linhas tal que a primeira linha (linha inferior) consiste de um único bloco contínuo e cada moeda da linha contígua superior toca em exatamente 2 moedas da linha inferior. Dentre todas as possibilidades de *fountains* existe uma em que todas as linhas são constituídas de blocos contínuos, este arranjo é chamado de *block fountain*. Definimos por *k-block fountain* ao *block fountain* que possuir exatamente k moedas na primeira linha (linha inferior).



exemplo de 11-block fountain

Determine quantos *k-block fountains* existem.

Seja $f(k)$ o número de *k-block fountains* para $k = 0, 1, 2, ...$

Se a primeira linha possui k moedas então na linha de cima podemos colocar j moedas agrupadas, $0 \leq j \leq k-1$, o que implica que cada bloco de j moedas é na verdade um *j-block fountain*, e mais ainda, se um *j-block fountain* $(1 \leq j \leq k-1)$ estiver na segunda linha, temos ainda $k-j$ posições possíveis para este *j-block fountain*; e para a possibilidade de $j = 0$ existe um único *k-block fountain* com nenhum elemento na segunda linha. Assim temos

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) f(j) + 1 \\ &= \sum_{j=1}^{k} (k-j) f(j) + 1, \qquad (k = 1, 2, 3, ...). \end{aligned}$$

Definimos $F(x)$ como a função geradora ordinária da seqüência $\{f(n)\}$:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) x^j.$$

Multiplicando por x^k e somando agora em k, para $k > 0$, temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} (k-j) f(j) + 1 \right) x^k,$$

isto é,

$$F(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} (k-j) f(j) + 1 \right) x^k.$$

Note que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} (k-j) f(j) + 1 \right) x^k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(m) x^m \right) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Como a função geradora ordinária para $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ é $\frac{x}{(1-x)^2}$, e para $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é $\frac{x}{1-x}$ temos que:

$$F(x) - f(0) = \frac{x}{(1-x)^2} (F(x) - f(0)) + \frac{x}{1-x},$$

$$F(x) - 1 = \frac{x}{(1-x)^2} (F(x) - 1) + \frac{x}{1-x}.$$

Portanto:

$$F(x) = \frac{1-2x}{x^2 - 3x + 1}.$$

Agora, vamos expandir esta função em série para obtermos uma fórmula fechada para $f(x)$.

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right).$$

Daí

$$\begin{aligned}
\frac{1-2x}{x^2-3x+1} &= \frac{1-2x}{\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} \\
&= \frac{1-2x}{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)} \\
&= \frac{1-2x}{\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)} \\
&= \frac{A}{\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\frac{A}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)}=\frac{A+B-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}A+\frac{3-\sqrt{5}}{2}B\right)x}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)}.$$

Logo

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=1 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}A+\frac{3-\sqrt{5}}{2}B=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ B=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{array}\right. .$$

Como

$$\frac{A}{\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right)}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}x^{n}$$

e

$$\frac{B}{\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}x^{n}$$

temos:

$$F(x)=\frac{1-2x}{x^2-3x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]x^{n}.$$

Vamos agora observar o seguinte termo da sequência de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
a_{2n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n-1}-\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n}-\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].
\end{aligned}$$

Temos, com esta observação, que

$$f(n) = a_{2n-1}.$$

1.4.2 Relações de Recorrências Lineares com Coeficientes Constantes

Definição 1.4.2.1. *Uma relação de recorrência é dita ser linear se o termo geral for a combinação linear de termos de menores índices.*

Exemplo 20. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (Seqüência de Fibonacci).

Exemplo 21. $a_n = 2a_{n-1} + a_0$ (Torre de Hanoy para $a_0 = 1$).

De modo geral não existe uma técnica que nos permita resolver qualquer tipo de relação de recorrência, mais ainda, não são todas as relações de recorrência que possuem soluç ão, isto é, nem sempre é possível determinar uma fórmula exata do termo geral; mas em particular para as relações de recorrência linear com coeficientes constantes existe um procedimento para o cálculo da fórmula exata do termo geral.

Teorema 1.4.2.1. Suponha a seqüência $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ satisfazendo a relação de recorrência linear com coeficientes constantes (b_i's)

$$a_{n+r} = b_1 a_{n+r-1} + b_2 a_{n+r-2} + ... + b_r a_n,\ n \geqslant 0,$$

seja $f(x) = x^r - b_1 x^{r-1} - b_2 x^{r-2} - ... - b_r$ o polinômio característico desta recorrência e seja $f(x) = (x - \alpha_1)^{e_1}(x - \alpha_2)^{e_2}...(x - \alpha_s)^{e_s}$, $e_1 + e_2 + ... + e_s = r$ a fatoração de $f(x)$ como o produto de fatores lineares. Então $a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\alpha_i^n$ para todo n, onde $P_i(n)$ é um polinômio de grau, no máximo, $e_i - 1$ em n. Os coeficientes do polinômio $P_i(n)$ são determinados por valores iniciais $a_0, a_1, ... a_{r-1}$ da seqüência $\{a_n\}$.

Prova: Suponha que a seqüência $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ satisfaça a seguinte relação de recorrência linear com coeficientes constantes de ordem r :

$$a_{n+r} = b_1 a_{n+r-1} + b_2 a_{n+r-2} + ... + b_r a_n, n = 0, 1, 2, ... \ . \tag{1.3}$$

Então se $g(x)$ é a função geradora para a seqüência $\{a_n\}$,isto é:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ..., \tag{1.4}$$

e se considerarmos $k(x)$ o polinômio

$$k(x) = 1 - b_1x - b_2x^2 - ... - b_rx^r, \tag{1.5}$$

teremos que

$$g(x)k(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{r-1}x^{r-1} = C(x), \tag{1.6}$$

onde $C(x)$ é um polinômio de grau no máximo $r-1$, pois

$$c_{n+r} = a_{n+r} - b_1a_{n+r-1} - b_2a_{n+r-2} - ... - b_ra_n = 0$$

para $n \geqslant 0$.

Temos então que para uma seqüência $\{a_n\}$ satisfazendo tal recorrência linear a coeficientes constantes, a função geradora $g(x)$ é uma função racional

$$g(x) = \frac{C(x)}{k(x)}. \tag{1.7}$$

Com a relação de recorrência linear dada, vamos associar o *polinômio característico* $f(x)$ dado por:

$$f(x) = x^r - b_1x^{r-1} - b_2x^{r-2} - ... - b_r. \tag{1.8}$$

Sem perda de generalidade vamos assumir $a_r \neq 0$. Se $a_r = 0$ a recorrência não seria válida para ordem r mas seria para ordens menores. Considere a fatoração de $f(x)$ em fatores lineares:

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{e_1}(x-\alpha_2)^{e_2}...(x-\alpha_s)^{e_s}, \tag{1.9}$$

onde $e_1 + e_2 + ...e_s = r$ e α_i $1 \leq i \leq s$ são raízes de $f(x)$. Comparando $f(x)$ com $k(x)$ teremos que

$$k(x) = x^r f\left(\frac{1}{x}\right) \tag{1.10}$$

e com a fatoração de $f(x)$ teremos que

$$\begin{aligned} k(x) &= x^r\left(\frac{1}{x}-\alpha_1\right)^{e_1}\left(\frac{1}{x}-\alpha_2\right)^{e_2}...\left(\frac{1}{x}-\alpha_s\right)^{e_s} \\ &= (1-\alpha_1x)^{e_1}(1-\alpha_2x)^{e_2}...(1-\alpha_sx)^{e_s}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Como

$$g(x) = \frac{C(x)}{k(x)}$$

podemos então expressar $g(x)$ em termos de frações parciais

$$g(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{e_i} \frac{\beta_{ik}}{(1-\alpha_i x)^k} \tag{1.12}$$

onde β_{ik} são constantes.

Note que a função geradora $g(x)$ está sendo expressa acima como soma de funções da forma $\frac{\beta}{(1-\alpha x)^k}$ onde

$$\frac{\beta}{(1-\alpha x)^k} = \beta\,(1-\alpha x)^{-k}$$

que pode ser expandida como

$$\beta\,(1-\alpha x)^{-k} = \beta\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{k+n-1}{n}(-\alpha x)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta\binom{k+n-1}{n}\alpha^n x^n$$

então o coeficiente de x^n será:

$$\beta\binom{k+n-1}{n}\alpha^n = \beta\binom{k+n-1}{k-1}\alpha^n.$$

Note que

$$\sum_{k=1}^{e_i}\beta_{ik}\binom{k+n-1}{k-1}\alpha_i^n = P_i(n)\alpha_i^n, \tag{1.13}$$

onde $P_i(n)$ é um polinômio de grau, no máximo, $e_i - 1$ em n, e que qualquer polinômio $P_i(n)$ pode ser obtido usando coeficientes β_{ik} adequados.

Teremos então que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{e_i}\frac{\beta_{ik}}{(1-\alpha_i x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{s}P_i(n)\alpha_i^n x^n$$

e

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Portanto

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\alpha_i^n \tag{1.14}$$

onde $P_i(n)$ é de grau, no máximo, $e_i - 1$.

■

Exemplo 22. Vamos aplicar o teorema acima para a seguinte relação de recorrência: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Seja

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \ ,$$

a função geradora para a seqüência a_0, a_1, a_2,... . Para este exemplo temos que

$$k(x) = 1 - x - x^2.$$

Por 1.6 como $C(x) = g(x)k(x)$, então $C(x) = 1$.

E

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow f(x) = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Daqui temos que $\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e que $\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Como por 1.10

$$k(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$$

segue de 1.11 e 1.12 que

$$k(x) = \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) = \frac{\beta_1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\beta_2}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

$$\text{portanto} \begin{cases} \beta_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ \beta_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{cases};$$

$\beta_1 \binom{n}{n}\alpha_1^n = P_1(n)\alpha_1^n \Rightarrow P_1(n) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$;

$\beta_2 \binom{n}{n}\alpha_2^n = P_2(n)\alpha_2^n \Rightarrow P_2(n) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$;

Como $a_n = P_1(n)\,\alpha_1^n + P_2(n)\,\alpha_2^n$, temos finalmente que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \tag{1.15}$$

Exemplo 23. Determinar a fórmula explícita do termo geral da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

onde $a_0 = a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

Novamente vamos seguir passo a passo o teorema anterior.

Sejam

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

e

$$k(x) = 1 - 4x + 5x^2 - 2x^3,$$

então,

$$\begin{aligned} g(x)\,k(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)\left(1 - 4x + 5x^2 - 2x^3\right) \\ &= a_0 + (a_1 - 4a_0)\,x + (a_2 - 4a_1 + 5a_0)\,x^2 \\ &= 1 - 3x + 3x^2, \end{aligned}$$

portanto

$$C(x) = 1 - 3x + 3x^2$$

e daí

$$g(x) = \frac{1 - 3x + 3x^2}{1 - 4x + 5x^2 - 2x^3}.$$

Fatorando $f(x)$ temos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\ &= (x-1)^2\,(x-2), \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1,\ e_1 = 2, \\ \alpha_2 &= 2,\ e_2 = 1. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} k(x) &= x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^3\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \\ &= (1-x)^2\,(1-2x). \end{aligned}$$

Agora vamos separar $g(x)$ em frações parciais. Escrevendo

$$g(x) = \frac{\beta_{11}}{(1-x)} + \frac{\beta_{12}}{(1-x)^2} + \frac{\beta_{21}}{(1-2x)},$$

resolvemos a igualdade

$$\frac{1-3x+3x^2}{1-4x+5x^2-2x^3} = \frac{\beta_{11}}{(1-x)} + \frac{\beta_{12}}{(1-x)^2} + \frac{\beta_{21}}{(1-2x)}$$

obtendo:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 1; \\ \beta_{12} &= -1; \\ \beta_{21} &= 1. \end{aligned}$$

Agora fazemos

$$\beta_{11} \binom{1+n-1}{1-1} \alpha_1^n + \beta_{12} \binom{2+n-1}{2-1} \alpha_1^n = P_1(n)\, \alpha_1^n$$

temos, portanto, que

$$P_1(n) = -n;$$

e como

$$\beta_{21} \binom{1+n-1}{n} \alpha_2^n = P_2(n)\, \alpha_2^n$$

temos

$$P_2(n) = 1.$$

Finalmente

$$a_n = P_1(n)\, \alpha_1^n + P_2(n)\, \alpha_2^n;$$

o que nos fornece

$$a_n = 2^n - n.$$

Capítulo 2

Partições

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de partições e desenvolver uma quantidade razoável de ferramentas visando a demonstração de vários resultados clássicos como o Teorema de Euler para partições, a Identidade de Euler (que fornece uma fórmula recursiva para calcular $p(n)$), a Primeira e a Segunda Identidades de Rogers-Ramanujan e o estudo do Polinômio Gaussiano.

2.1 Definições

Definição 2.1.1. *Uma partição de um número inteiro positivo n é uma representação de n como soma de inteiros positivos, chamados partes da partição. Vamos considerar que as partições* 2+1+1 *e* 1+2+1 *correspondem a mesma partição, isto é, consideramos a ordem das partes irrelevante. Sendo assim, sempre iremos escrever uma dada partição com as partes em ordem não crescente.*

Exemplo 24. As partições de 4 são:

$$
\begin{aligned}
&4\\
&3+1\\
&2+2\\
&2+1+1\\
&1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Definição 2.1.2. *A função $p(n)$ denotará o número de partições de n.*

Exemplo 25. Temos que $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11, \ldots$

Para se ter uma idéia do crescimento da função $p(n)$ observe as seguintes avaliações $p(1) = 1$; $p(10) = 42$; $p(50) = 204.226$; $p(100) = 190.569.292$; $p(200) = 3.972.999.029.388$.

2.2 Representação Gráfica.

A representação gráfica de partições fornece uma poderosa ferramenta para demonstrar combinatoriamente muitas identidades entre partições. Entre as demonstrações combinatórias apresentamos o Teorema dos Números Pentagonais, que será posteriomente utilizado como ferramenta para demonstrar o Teorema dos Números Pentagonais de Euler, sendo que este é a chave para encontrar uma fórmula recursiva para $p(n)$.

Uma partição de n pode ser representada graficamente por pontos, onde distribuímos os pontos associados a cada parte na horizontal e distribuímos as partes na vertical, conforme o seguinte exemplo.

Exemplo 26. A partição $5+3+3+2+1+1$, de 15, possui a seguinte representação gráfica:

$$
\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}
$$

Definição 2.2.1. *A partição conjugada de uma partição dada é formada pela leitura de cada parte como sendo o número de pontos das colunas sucessivas da representação gráfica.*

Exemplo 27. A partição conjugada de $5+3+3+2+1+1$, é a partição $6+4+3+1+1$.

Teorema 2.2.1. *Se $p_m(n)$ denota o número de partições de n em no máximo m partes, e $\pi_m(n)$ denota o número de partições de n em que cada parte não excede m, então:*

$$p_m(n) = \pi_m(n).$$

Prova: Note que, se considerarmos a partição conjugada de uma partição de n em no máximo m partes, teremos que esta corresponde a uma partição de n em que cada parte não excede m. Temos assim uma correspondência biunívoca entre os conjuntos enumerados por $p_m(n)$ e $\pi_m(n)$. Portanto $p_m(n) = \pi_m(n)$.

■

Exemplo 28. As partições de 6 em no máximo 3 partes são: 6, $5+1$, $4+2$, $4+1+1$, $3+3$, $3+2+1$, $2+2+2$, temos portanto que $p_3(6) = 7$; e as partições de 6 em que cada parte não excede 3 são: $1+1+1+1+1+1$, $2+1+1+1+1$, $2+2+1+1$, $2+2+2$, $3+1+1+1$, $3+2+1$, $3+3$, isto é, $\pi_3(6) = 7$. Podemos fazer as seguintes correspondências:

$$6 \leftrightarrow 1+1+1+1+1+1$$

$$\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$5+1 \leftrightarrow 2+1+1+1+1$$

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & & \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \\ \bullet & \\ \bullet & \\ \bullet & \end{array}$$

$$4+2 \leftrightarrow 2+2+1+1$$

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \\ \bullet & \end{array}$$

$$4+1+1 \leftrightarrow 3+1+1+1$$

$$\begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$$

$$3+3 \leftrightarrow 2+2+2$$

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

$$3+2+1 \leftrightarrow 3+2+1$$

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

$$2+2+2 \leftrightarrow 3+3$$

$$\begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

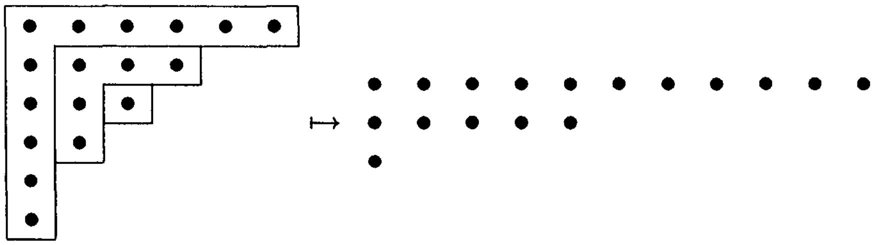
Definição 2.2.2. *Uma partição é dita ser auto-conjugada se ela é igual a sua partição conjugada.*

Exemplo 29. $4+4+3+2$ e $5+3+3+1+1$ são partições auto-conjugadas de 13.

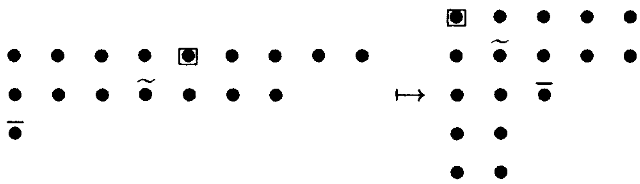
Exemplo30. As partições de 12 em partes ímpares distintas são $11+1$, $9+3$ e $7+5$, ou seja, são 3 as partições de 12 em partes ímpares distintas; as partições de 12 que são auto-conjugadas são $6+2+1+1+1+1$, $5+3+2+1+1$ e $4+4+2+2$ logo são 3 as partições de 12 auto-conjugadas.

Teorema 2.2.2. *O número de partições de n em partes ímpares distintas é igual ao número de partições auto-conjugadas de n.*

Prova: Para cada partição auto-conjugada de n considere sua representação gráfica, e considere a seguinte transformação:



Temos que cada partição auto-conjugada é transformada em uma partição em partes ímpares distintas. Se considerarmos uma partição qualquer em partes ímpares distintas faremos a seguinte transformação em sua representação gráfica:



teremos uma partição auto-conjugada de n. E daí segue o resultado.

$\blacksquare$

Definição 2.2.3. *Denotaremos por $D^e(n)$ o número de partições de n em um número par de partes distintas.*

Exemplo 31. As partições de 7, 10 e 12 em número par de partes distintas são respectivamente:

$6+1$, $5+2$, $4+3$;

$9+1$, $8+2$, $7+3$, $6+4$, $4+3+2+1$ e

$9+3$, $11+1$, $10+2$, $8+4$, $7+5$, $6+3+2+1$, $5+4+2+1$

ou seja, $D^e(7) = 3$, $D^e(10) = 5$ e $D^e(12) = 7$.

Definição 2.2.4. *Denotaremos por $D^o(n)$ o número de partições de n em um número ímpar de partes distintas.*

Exemplo 32. As partições de 7, 10 e 12 em número ímpar de partes distintas são respectivamente:

$7,\ 4+2+1;$

$10,\ 7+2+1,\ 6+3+1,\ 5+4+1,\ 5+3+2$ e

$12,\ 9+2+1,\ 8+3+1,\ 7+4+1,\ 7+3+2,\ 6+5+1,\ 6+4+2,\ 5+4+3.$

, ou seja, $D^o(7) = 2$, $D^o(10) = 5$ e $D^o(12) = 8$.

Teorema 2.2.3. (Teorema do Número Pentagonal) *Para qualquer inteiro positivo n temos:*

$$D^e(n) - D^o(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } n = \frac{j(3j\pm1)}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.1}$$

Prova: Vamos considerar uma partição qualquer de n em partes distintas e sua representação gráfica, denotaremos por A_1 o último elemento da direita da linha superior; se na segunda linha o último elemento da direita estiver exatamente na coluna contígua à esquerda de A_1, denotaremos então este elemento por A_2, caso contrário não daremos nome a ele. Se temos A_2 então passaremos a terceira linha e, se novamente, o último elemento da direita estiver exatamente na coluna contígua à esquerda de A_2, denotaremos este elemento por A_3, caso contrário não daremos nome a ele. Continuamos este processo até o momento em que algum elemento não receba nome. Seja A_t o último elemento desta seqüência. Denominamos, também, por B_1, B_2, B_3,..., B_s os elementos da última linha (da esquerda para direita). Teremos assim a seguinte representação da partição $7+6+4+3$

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\, A_1 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\, A_2 & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
B_1 & B_2 & B_3 & & & &
\end{array} .$$

Temos então A_t, B_s com $t \geq 1$ e $s \geq 1$; e podemos separar todas as partições de n em partes distintas com esta notação em essencialmente três classes distintas, são elas:

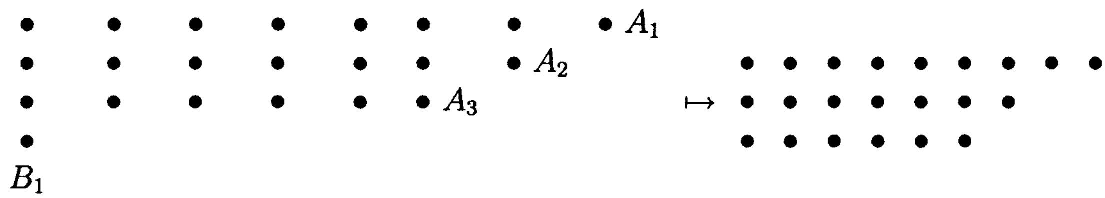
Classe 1) $t > s$ ou $t = s$ e $A_t \neq B_s$;

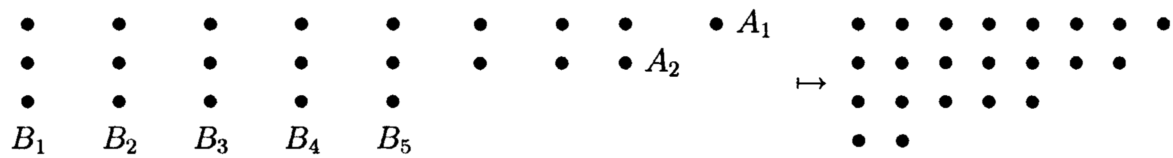
Classe 2) $t < s - 1$ ou $t = s - 1$ e $A_t \neq B_s$;

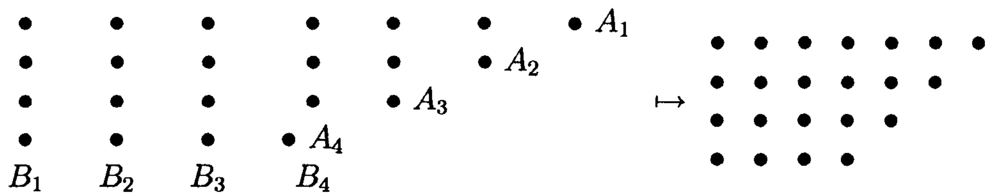
Classe 3) $A_t = B_s$ com $s = t$ ou $t = s - 1$.

Agora vamos realizar um tipo de transformação em cada classe de partição enumerada acima.

Na classe 1 transferimos cada ponto B_i para à direita do elemento A_i, como $t > s$ ou $t = s$ e $A_t \neq B_s$ teremos uma nova representação gráfica, ou seja, uma nova partição que pertence a classe 2. Na classe 2 trasferimos cada elemento A_i para baixo do elemento B_i, como $t \leq s - 1$ ou $t = s - 1$ e $A_t \neq B_s$ teremos uma nova rapresentação gráfica, ou seja, uma nova partição que pertence a classe 1. Na terceira classe não efetuamos nenhuma mudança. Vejamos o que acontece com as seguintes partições:







Note que as transformações aplicadas aos elementos das classes 1 e 2 diminuem ou aumentam em uma parte a partição inicial. Assim temos que estas transformações levam as partições de n em número par de partes distintas das classes 1 e 2 (respectivamente) em partições de n em número ímpar de partes distintas das classes 2 e 1 (respectivamente), e vice-versa. Temos assim uma bijeção entre as partições de n em número par de partes distintas e as partições de n em número ímpar de partes distintas pertencentes as classes 1 e 2. Se existe uma partição de n em partes distintas pertencente à classe 3, teremos que ela é única.

Assim se n possui uma partição da classe 3 teremos:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\, A_1 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet\, A_2 & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet\, A_3 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet\, A_t & & & \\
B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_s & & &
\end{array}
$$

Se $t = s$ então $n = \frac{t(3t-1)}{2}$.
Se $t = s - 1$ então $n = \frac{t(3t+1)}{2}$.
Portanto

$$n = \frac{t\,(3t \pm 1)}{2}$$

Se t for um número par temos que a partição de n da classe 3 terá um número par de partes distintas; se t for ímpar teremos uma partição de n da classe 3 com um número ímpar de partes distintas.

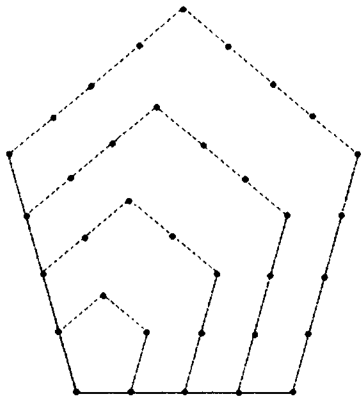
Assim

$$D^e\,(n) - D^o\,(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } \; n = \dfrac{j\,(3j \pm 1)}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

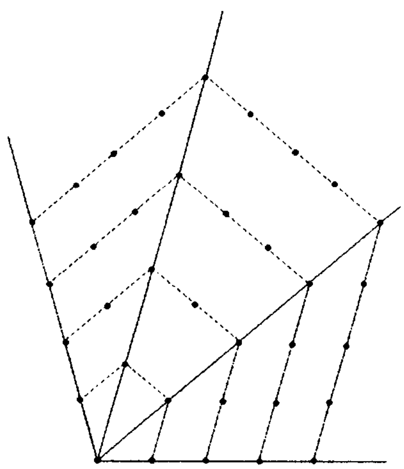
■

Exemplo 33. Note que:
$D^e\,(7) - D^o\,(7) = 3 - 2 = 1$ e $7 = \frac{2(3.2+1)}{2}$, isto é, $j = 2$,
$D^e\,(10) - D^o\,(10) = 5 - 5 = 0$, pois $\nexists j \in I\!N$ tal que $\frac{j(3j\pm 1)}{2} = 10$,
$D^e\,(12) - D^o\,(12) = 7 - 8 = -1$ e $12 = \frac{3(3.3+1)}{2}$, isto é, $j = 3$.

Este último Teorema recebe o nome de Teorema dos Números Pentagonais, devido ao fato dos números pentagonais serem de forma $\frac{j(3j-1)}{2}$. Um número pentagonal de ordem n é o número de pontos contidos na figura formada por n pentágonos regulares de lados inteiros com um vértice comum a todos e cada lado do pentágono de lado k possui $k + 1$ pontos equidistantes.



O número de pontos da figura acima representa o número pentagonal de ordem 4.



O número pentagonal de ordem n será:

$4n - 1$ (número de pontos contidos nas retas da figura acima)

$+\dfrac{3(n-2)(1+n-2)}{2}$ (número de pontos não contidos nas retas da figura acima)

Assim, o n-ésimo número pentagonal será:

$$\frac{n(3n-1)}{2}.$$

2.3 Funções Geradoras para Partições

Nesta seção iremos desenvolver um procedimento para, dada uma partição com restrição, fornecer sua função geradora ordinária; uma vez que tenhamos em mãos as funções geradoras de diversas partições com restrição, poderemos manipular algebricamente suas funções geradoras e encontrar identidades entre partições com restrições.

Temos que uma função geradora $f(q)$, para uma certa partição com restrição $\widetilde{p}(n)$, será um produto de termos das seguintes formas:

$$\frac{1}{1-q^{a}}$$

e / ou

$$1+q^{a}.$$

Observamos que, como estamos interessados apenas nos coeficientes da série, não iremos nos preocupar com a convergência de tais séries, embora tenhamos que elas convergem para $|q|<1$.

Pelo capítulo 1 teremos relações do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{p}(n)\,q^{n}=f(q)$$

onde podemos calcular os coeficientes $\widetilde{p}(n)$ através da expansão de f em série de potências de q.

Se tivermos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{p}(n)\,q^{n}=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{a_i}},$$

como

$$\frac{1}{1-q^{a_i}}=1+q^{a_i}+q^{2a_i}+q^{3a_i}+..+q^{ka_i}+...$$

temos que

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{a_i}} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + q^{a_i} + q^{2a_i} + q^{3a_i} + .. + q^{ka_i} + ...\right)$$

e daí o coeficiente de q^n na expansão do produto em série de potência em q será o número de maneiras possíveis de gerar n como soma de $a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_i$ onde $a_i > 0$ para qualquer $i \in I\!N$. Note que o termo q^{ka_i} indica uma contribuição de k a_i's como partes de n. Assim se quisermos determinar a função geradora para as partições de n onde as partes de n pertençam ao conjunto $S = \{a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_s\}$ basta fazer o produto de fatores da forma $\frac{1}{1-q^{a_i}}$ para $i = 1, 2, 3, ..., s$. Desta maneira temos o seguinte teorema onde denotamos por $p(S, n)$ o número de partições de n onde as partes pertencem ao conjunto de inteiros positivos S.

Teorema 2.3.1. *A função geradora para $p(S,n)$ onde $S = \{a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_s\}$, $a_i \in I\!N$, $i = 1, 2, 3, ..., s$ e $|q| < 1$ será:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(S,n)\, q^n = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1-q^{a_i}}.$$

Prova: Segue do comentário feito acima.

∎

Já se considerarmos produtos da forma:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^{a_i})$$

o coeficiente de q^n será o número de maneiras de obter n como soma de a_i's distintos, pois cada a_i irá aparecer no máximo uma única vez como parte de cada partição de n. Teremos assim:

Definição 2.3.1. *Denotamos por $p^d(S,n)$ o número de partições de n em partes distintas e pertencentes ao conjunto de inteiros positivos S.*

Teorema 2.3.2. *A função geradora para* $p^d(S,n)$ *onde* $S=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_s\}$, $a_i\in I\!N$, $i=1,2,3,\dots,s$ *e* $|q|<1$ *é:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^d(S,n)\,q^n=\prod_{i=1}^{s}(1+q^{a_i})\,.$$

Prova: Segue do comentário acima.

■

Teorema 2.3.3. *A função geradora para* $p(n)$ *é:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}p(n)\,q^n=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^i}. \tag{2.2}$$

Prova: Note que, se considerarmos $S=\{1,2,\dots,k\}$ temos que

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-q^i}$$

será a função geradora para $\{p(1),p(2),\dots,p(k)\}$, e se $n>k$ o coeficiente de q^n não irá representar $p(n)$, pois tal produto não estaria considerando partes maiores que k.

Para fazer a passagem de

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-q^i}$$

para um produto infinito, necessitamos saber se tal produto existe, assim estaremos garantindo que

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^i}$$

será a função geradora de $p(n)$.

Seja

$$p_k(q)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-q^i}$$

para $0 < |q| < 1$ temos que $\frac{1}{1-q^i} > 1$ para qualquer $i \in I\!N^*$. Assim

$$p_k(q) > 1 \text{ para } \forall k \in I\!N^*$$

e portanto $\{p_k(q)\}$ define uma seqüência crescente.

Portanto, para mostrarmos que $\{p_k(q)\}$ possui limite, precisamos provar que ela possui um limitante superior. Para isto fazemos uso da seguinte propriedade:

Propriedade 2.3.1. Para $a > 0$ temos:

$$1 + a < e^a. \tag{2.3}$$

Prova: Sejam

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x; \\ g(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1; \\ g'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Como $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $x > 0$; temos provada a afirmação.

Suponha agora que $m \in I\!N^+$ e que $0 < q < 1$. Então

$$q^m < q$$

e daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q^m} &= 1 + \frac{q^m}{1-q^m} \\ &< 1 + \frac{q^m}{1-q} \\ &< e^{\frac{q^m}{1-q}} \end{aligned}$$

por 2.3.

Segue que

$$\begin{aligned} p_k(q) &< \prod_{i=1}^{k} e^{\frac{q^m}{1-q}} && (2.4) \\ &= e^{\frac{\left(q+q^2+q^3+\ldots+q^k\right)}{1-q}} \\ &= e^{\frac{q\left(1-q^k\right)}{(1-q)^2}} \\ &< e^{\frac{q}{(1-q)^2}} && (2.5) \end{aligned}$$

Temos que 2.5 nos fornece um limitante superior para a seqüência $\{p^k(q)\}$ e isto implica que esta seqüência possui um limite.

Isto implica que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$$

converge para $0 < q < 1$. Desde que o intervalo de convergência da série de pontência é centrada em 0, isto implica que esta série converge para $|q| < 1$.

■

Exemplo 34. Na tabela abaixo apresentamos algumas condições de restrições para as partes de partições e as respectivas funções geradoras:

partes	$f(q)$
distintas	$\prod_{i=1}^{\infty}(1+q^i)$
pares	$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2i})}$
pares distintas	$\prod_{i=1}^{\infty}(1+q^{2i})$
ímpares	$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2i-1})}$
ímpares distintas	$\prod_{i=1}^{\infty}(1+q^{2i-1})$
quadradas	$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{i^2}\right)}$
quadradas distintas	$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+q^{i^2}\right)$

Definição 2.3.2. *Denotamos por $p^o(n)$ o número de partições de n em partes ímpares.*

Definição 2.3.3. *Denotamos por $p^d(n)$ o número de partições de n em partes distintas.*

Teorema 2.3.4. *(Euler) Para $n \in IN$ temos*

$$p^o(n) = p^d(n).$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)\, q^n &= \prod_{i=1}^{\infty} \left(1+q^i\right) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \left(1+q^i\right) \frac{\left(1-q^i\right)}{\left(1-q^i\right)} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1-q^{2i}\right)}{\left(1-q^i\right)} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1-q^{2i}\right)}{\left(1-q^{2i-1}\right)\left(1-q^{2i}\right)} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2i-1}\right)}.
\end{aligned}$$

Como

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2i-1}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} p^o(n)\, q^n,$$

temos provado o teorema.

∎

Definição 2.3.4. *Denotamos por S_d o conjunto dos inteiros positivos congruentes a 1 ou $(d+2)$ módulo $(d+3)$.*

Observação: Note que S_1 é o conjunto dos números ímpares; assim temos que $p(S_1, n) = p^o(n) = p^d(n)$.

Definição 2.3.5. *Denotamos por $Q_3(n)$ o número de partições de n em partes distintas, onde nenhuma parte é múltipla de 3.*

Teorema 2.3.5. *Para todo $n \in IN$ temos que*

$$Q_3(n) = p(S_3, n).$$

Prova: Primeiramente observemos que
$S_3 = \{x \in IN; x \equiv 1 \bmod 6, \text{ ou } x \equiv 5 \bmod 6\}$ e portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(S_3, n) q^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})}.$$

Por outro lado

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_3(n) q^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1+q^i)}{(1+q^{3i})}.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1+q^i)}{(1+q^{3i})} &= \prod_{i=0}^{\infty} \left(1+q^{3i+1}\right)\left(1+q^{3i+2}\right) \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})}{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})}{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})}{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+5})} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})}.
\end{aligned}$$

Temos assim que $Q_3(n) = p(S_3, n)$.

■

Teorema 2.3.6. *O Teorema dos Números Pentagonais de Euler. Para qualquer $n \in IN$, e para $|q| < 1$, temos:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} (1+q^n) \qquad (2.6)$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m). \qquad (2.7)$$

Prova: Efetuando a partir do lado esquerdo de 2.6 temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}+\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} q^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}(1+q^n)\,;.
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = 1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(D^e(m)-D^o(m)\right)q^m \qquad \text{por 2.1}$$

Assim resta nos provar que

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(D^e(n)-D^o(n)\right)q^n=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).$$

Note que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ representa a função geradora para o número de partições de n em um número par de partes distintas menos o número de partições de n em um número ímpar de partes distintas, pois

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}\sum_{a_3=0}^{1}\cdots(-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots}\,q^{a_1 1+a_2 2+a_3 3+\dots},$$

isto é, $(-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots}$ será -1 se o número de partes for ímpar; e $(-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots}$ será $+1$ se o número de partes for par; e portanto

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) &= \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}\sum_{a_3=0}^{1}\cdots(-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots}\,q^{a_1 1+a_2 2+a_3 3+\dots} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(D^e(n)-D^o(n)\right)q^n.
\end{aligned}$$

Temos então provado:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n).$$

■

Teorema 2.3.7. *A Identidade de Euler*
Para qualquer $n \in I\!N$ temos:

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - ... \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} p\left(n - \frac{j(3j+1)}{2}\right) + \sum_j (-1)^{j+1} p\left(n - \frac{j(3j-1)}{2}\right), \end{aligned}$$

onde cada soma se estende sobre todos inteiros positivos j para o qual o argumento for não negativo.

Prova: Do teorema dos Números Pentagonais de Euler temos 2.6 e daí

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(q^{\frac{j(3j+1)}{2}} + q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\right);$$

como

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)},$$

então

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(q^{\frac{j(3j+1)}{2}} + q^{\frac{j(3j-1)}{2}}\right)\right) \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^k = 1,$$

daí

$$(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + ...) \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^k - \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{k+5} + \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{k+7} - ... = 1$$

e portanto (igualando os coeficientes de q^n) teremos:

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) - ... = 0$$

e segue o resultado.

■

2.4 Identidades entre Séries e Produtos

Nesta seção iremos apresentar algumas identidades envolvendo séries e produtos que serão essenciais na prova de algumas identidades sobre partições. Destacamos o importante resultado conhecido por Produto Triplo de Jacobi (Teorema 2.4.4).

Teorema 2.4.1.(Cauchy) *Para* $|q| < 1$ *e* $|z| < 1$*; temos:*

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})\,z^{n}}{(1-q)(1-q^{2})\ldots(1-q^{n})}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-azq^{n})}{(1-zq^{n})}. \qquad (2.8)$$

Prova: Consideremos

$$F(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-azq^{n})}{(1-zq^{n})}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}z^{n} \qquad (2.9)$$

onde A_n depende de a e q. (Note que A_n existe desde que o produto infinito é uniformemente convergente para a fixo e q dentro de $|z| \leq 1-\varepsilon$, e portanto ela define uma função analítica de z dentro de $|z| < 1$).

Agora

$$\begin{aligned}
(1-z)F(z) &= (1-z)\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-azq^{n})}{(1-zq^{n})}\\
&= (1-z)\frac{(1-az)}{(1-z)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-azq^{n})}{(1-zq^{n})}\\
&= (1-az)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-azq^{n})}{(1-zq^{n})}\\
&= (1-az)\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-azq^{n+1})}{(1-zq^{n+1})}\\
&= (1-az)F(zq),
\end{aligned}$$

portanto,

$$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}z^{n}=(1-az)\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}(zq)^{n}. \qquad (2.10)$$

Como

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n \text{ segue que } F(0)=A_o$$

e

$$F(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-azq^n)}{(1-zq^n)} \text{ implica que } F(0)=1$$

temos que

$$A_0=1.$$

E comparando os coeficientes de z^n em 2.10 temos que:

$$A_n-A_{n-1}=q^nA_n-aq^{n-1}A_{n-1}.$$

Portanto

$$A_n=\frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}A_{n-1}. \tag{2.11}$$

Iterando 2.11 temos que

$$A_n=\frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}\frac{(1-aq^{n-2})}{(1-q^{n-1})}\frac{(1-aq^{n-3})}{(1-q^{n-2})}\cdots\frac{(1-a)}{(1-q)}A_0. \tag{2.12}$$

Substituindo 2.12 em 2.9 teremos:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}z^n=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-azq^n)}{(1-zq^n)}.$$

■

Teorema 2.4.2. (Euler) *Para* $|q|<1$ *e* $|z|<1$ *temos:*

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-zq^n)}. \tag{2.13}$$

Prova: Considerando a equação 2.8 com $a=0$ e teremos o resultado desejado.

■

Teorema2.4.3. (Euler) *Para* $|q| < 1$ *e* $|z| < 1$ *temos:*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n). \qquad (2.14)$$

Prova: Considere a equação 2.8 e substitua a por $\frac{a}{b}$ e z por bz (onde $|bz| < 1$) e teremos:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}q\right)\dots\left(1-\frac{a}{b}q^{n-1}\right)(bz)^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{a}{b}bzq^n\right)}{(1-bzq^n)}$$

isto é

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b-a)(b-aq)\dots(b-aq^{n-1})z^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-azq^n)}{(1-bzq^n)}.$$

Agora fazendo $a = -1$ e $b = 0$ nesta última igualdade obtém-se

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n).$$

■

Teorema 2.4.4. *O Produto Triplo de Jacobi.*
Para $z \neq 0$ *e* $|q| < 1$, *temos:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1-q^{2n+2}\right)\left(1+zq^{2n+1}\right)\left(1+z^{-1}q^{2n+1}\right). \qquad (2.15)$$

Prova: Vamos assumir $|z| > |q|$ em 2.14. Com as substituições q por q^2 e z por zq; teremos

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1+zq^{2n+1}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2} z^n}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})}.$$

Agora note que

$$\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{\left(1-q^{2m+2n+2}\right)}{\left(1-q^{2m+2}\right)},$$

portanto,

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+zq^{2n+1}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty} \frac{\left(1-q^{2m+2n+2}\right)}{\left(1-q^{2m+2}\right)} \\
&= 1+\prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty}\left(1-q^{2m+2n+2}\right). \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Note se n for inteiro negativo, teremos $\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-q^{2m+2n+2}\right)=0$, desde que para este produto, o termo em que $m=n-1$, $\left(1-q^{-2n-2+2n+2}\right)=\left(1-q^0\right)=0$. Podemos então estender a soma em 2.16 de $0 \leq n<\infty$ para $-\infty<n<\infty$ que não alteramos a soma, assim:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+zq^{2n+1}\right)=\prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty}\left(1-q^{2m+2n+2}\right).$$

Agora se em 2.14 substituirmos n por m e q por q^2 e $z=-q^{2n+2}$, teremos

$$\begin{aligned}
\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-q^{2m+2n+2}\right) &= 1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m(m-1)}\left(-q^{2n+2}\right)^m}{\left(1-q^2\right)\left(1-q^4\right)\ldots\left(1-q^{2m}\right)} \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+m+2mn}}{\left(1-q^2\right)\left(1-q^4\right)\ldots\left(1-q^{2m}\right)}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+zq^{2n+1}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n\left(1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+m+2mn}}{\left(1-q^2\right)\left(1-q^4\right)\ldots\left(1-q^{2m}\right)}\right) \\
&= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n+\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+m+2mn}}{\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^{2m}\right)}\right) \\
&= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^{2m}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(m+n)^2} z^n\right) \\
&= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m z^{-m}}{\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^{2m}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(m+n)^2} z^{m+n}\right).
\end{aligned}$$

Note que para cada $m \in \mathbb{Z}$ temos que $m+n$ e n são assumidos uma única vez, assim

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(m+n)^2} z^{m+n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n.$$

Portanto,

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+zq^{2n+1}\right) = \prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m q^m z^{-m}}{(1-q^2)\ldots(1-q^{2m})}\right). \tag{2.17}$$

Substituindo em 2.13 q por q^2 e z por $-qz^{-1}$, teremos então

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1+q^{2n+1}z^{-1}\right)} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n z^{-n}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}. \tag{2.18}$$

Contanto que $|z| > |q|$ substituímos 2.18 em 2.17 e teremos

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+zq^{2n+1}\right) &= \prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1+q^{2m+1}z^{-1}\right)}\\ &= \prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{2m+2}\right)\left(1-q^{2m+1}z^{-1}\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n,\end{aligned}$$

e daí:

$$\prod_{m=0}^{\infty}\left(1+zq^{2m+1}\right)\left(1-q^{2m+2}\right)\left(1+q^{2m+1}z^{-1}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n$$

para $|z| > |q|$ e $|q| < 1$.

Agora devemos repetir todo o argumento substituindo z por z^{-1}. Desde que 2.15 é simétrico em z e z^{-1}, nosso resultado final será o mesmo.

Acompanhando as condições, teremos que $|z^{-1}| > |q|$ e $z^{-1} \neq 0$. Desde que $|q| < 1$, pelo menos uma das desigualdades $|z| > |q|$ e $|z^{-1}| > |q|$ é satisfeita. Conseqüentemente 2.15 é verificado, para todo $z \neq 0$ e $|q| < |1|$.

■

2.5 A Função $\delta_i(m,n)$

A função $\delta(m,n)$ irá desempenhar um papel essencial para demonstrar a Primeira e Segunda Identidades de Rogers-Ramanujan. Assim sendo vamos desenvolver vários resultados envolvendo $\delta(m,n)$ para, em seguida, demonstrar tais identidades.

Definição 2.5.1. *Denotamos por $\delta_i(m,n)$ o número de partições de n em m partes distintas onde 1 aparece no máximo i vezes e tal que duas partes quaisquer diferem de pelo menos 2.*

Exemplo 35. $\delta_0(3,12) = 1$, pois temos: $12 = 6 + 4 + 2$.
$\delta_1(3,12) = 3$, pois temos: $12 = 8 + 3 + 1 = 7 + 4 + 1 = 6 + 4 + 2$.

Teorema 2.5.1. *Para $m, n \in I\!N$ temos :*

$$\delta_1(m,n) = \delta_0(m,n) + \delta_0(m-1, n-m). \tag{2.19}$$

Prova: Para demonstrar esta igualdade, vamos dividir $\delta_i(m,n)$ em duas classes disjuntas e complementares, a primeira classe será o conjunto das partições que possuem 1 como parte e a segunda será o conjunto das partições que não contém 1 como parte.

O número de elementos da segunda classe será $\delta_0(m,n)$, para contar quantos elementos existem na primeira classe vamos propor a seguinte transformação: remova uma unidade de cada parte da partição, teremos assim $m-1$ partes (pois tínhamos exatamente uma parte 1), não teremos 1 como parte (pois duas partes quaisquer diferem de pelo menos 2) e a nova soma será $n-m$, assim temos $\delta_0(m-1, n-m)$. Note que se fizermos o processo inverso com estes novos elementos teremos todas as partições da primeira classe novamente.

Assim

$$\delta_1(m,n) = \delta_0(m,n) + \delta_0(m-1, n-m).$$

■

Exemplo 36. Apresentamos, a seguir, uma ilustração do resultado anterior para $m = 3$ e $n = 16$

$$\begin{array}{ccccc}
\delta_1(3,16) & = & \delta_0(3,16) & + & \delta_0(2,13) \\
12+3+1 & & \leftrightarrow & & 11+2 \\
11+4+1 & & \leftrightarrow & & 10+3 \\
10+5+1 & & \leftrightarrow & & 9+4 \\
9+6+1 & & \leftrightarrow & & 8+5 \\
10+4+2 & \leftrightarrow & 10+4+2 & & \\
9+5+2 & \leftrightarrow & 9+5+2 & & \\
8+6+2 & \leftrightarrow & 8+6+2 & & \\
8+5+3 & \leftrightarrow & 8+5+3 & &
\end{array}$$

Teorema 2.5.2. *Para $m, n \in I\!N$ temos*

$$\delta_0(m,n) = \delta_1(m, n-m)\,. \tag{2.20}$$

Prova: Se retirarmos uma unidade de cada parte das partições enumeradas por $\delta_0(m,n)$ teremos partições de $n - m$ em m partes (pois a menor parte possível era 2) e teremos no máximo uma parte 1 (pois as partes são distintas), teremos então enumerados todos elementos de $\delta_1(m, n-m)$.

Aplicando o processo inverso, teremos uma bijeção entre os elementos enumerados por $\delta_0(m,n)$ e $\delta_1(m, n-m)$ o que prova o teorema.

∎

Exemplo 37. Exemplificamos o teorema anterior para o caso particular onde $m = 3$ e $n = 16$.

$$\begin{array}{ccc}
\delta_0(3,16) & & \delta_1(3,13) \\
10+4+2 & \leftrightarrow & 9+3+1 \\
9+5+2 & \leftrightarrow & 8+4+1 \\
8+6+2 & \leftrightarrow & 7+5+1 \\
8+5+3 & \leftrightarrow & 7+4+2
\end{array}$$

Definição 2.5.2. *Sejam $m, n \in Z\!\!Z$. Definimos:*

$$\delta_1(m,n) = \delta_0(m,n) = \begin{cases} 1 & se \;\; m = n = 0 \\ 0 \;\; se \;\; m \;\; ou \;\; n < 0 & e \text{ não ambos forem zero.} \end{cases} \tag{2.21}$$

Neste momento vamos procurar encontrar uma função geradora para a função δ.

Definição 2.5.3. *Denotamos*

$$G_1(x;q) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_1(m,n)\, x^m q^n \tag{2.22}$$

e

$$G_0(x;q) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(m,n)\, x^m q^n. \tag{2.23}$$

Agora vamos usar 2.19, 2.20 e 2.21 para encontrar relações entre G_0 e G_1; de 2.19 e 2.22 temos:

$$\begin{aligned}
G_1(x;q) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_1(m,n)\, x^m q^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta_0(m,n) + \delta_0(m-1,n-m)\right) x^m q^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(m,n)\, x^m q^n + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(m-1,n-m)\, x^m q^n \\
&= G_0(x;q) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(m-1,n-m)\, xq\,(xq)^{m-1} q^{n-m} \\
&= G_0(x;q) + xq\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(m-1,n-m)\,(xq)^{m-1} q^{n-m} \\
&= G_0(x;q) + xqG_0(xq;q).
\end{aligned}$$

Portanto

$$G_1(x;q) = G_0(x;q) + xqG_0(xq;q). \tag{2.24}$$

De 2.23 e 2.20 temos:

$$\begin{aligned}
G_0(x;q) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(m,n)\, x^m q^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_1(m,n-m)\, x^m q^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_1(m,n-m)(xq)^m q^{n-m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-m}^{\infty}\delta_1(m,n)(xq)^m q^{n} \\
&= G_1(xq;q).
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$G_0(x;q) = G_1(xq;q). \tag{2.25}$$

E 2.21 implica que

$$G_1(0;q) = G_0(0;1) = 1. \tag{2.26}$$

Neste momento vamos introduzir uma nova função $f_i(x,q)$ para i inteiro e $|q| < 1$ e $|x| < |q|^{-1}$; e vamos mostrar que tal $f_i(x,q)$ satisfaz 2.24, 2.25 e 2.26. A seguinte função $f_i(x,q)$ foi desenvolvida por Rogers e Ramanujan

$$f_i(x,q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}-in}\left(1-x^{i+1}q^{(2n+1)(i+1)}\right)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)}. \tag{2.27}$$

Note que para $n = 0$ temos $\frac{1-x^{i+1}q^{i+1}}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-xq^j)}$ isto se considerarmos $(1-q)(1-q^2)..(1-q^n) = 1$ (para $n = 0$).

E para $i = -1$ temos

$$f_{-1}(x,q) = 0. \tag{2.28}$$

Abaixo vamos mostrar que

$$f_i(x,q) - f_{i-1}(x,q) = x^i q^i f_{i-1}(xq;q). \tag{2.29}$$

Observe a semelhança com 2.24. Se considerarmos $i = 1$ em 2.29, isto é, $f_1(x,q)$ seria um candidato a $G_1(x;q)$.

Mas para que $G_1(x;q)$ possa ser $f_1(x,q)$; $f_1(x,q)$ e $f_0(x,q)$ terão também que satisfazer 2.25 e 2.26, isto é,

$$f_0(x,q) = f_1(xq,q)$$

e

$$f_0(0,q) = f_1(0,q) = 1.$$

Agora vamos mostrar 2.29

$$f_i(x,q) - f_{i-1}(x,q) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} \left(q^{-in} - x^{i+1} q^{in+2n+i+1} - q^{-(i-1)n} + x^i q^{in+n+i}\right)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} \left(q^{-in}(1-q^n) + x^i q^{in+n+i}(-xq^{n+1}+1)\right)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} q^{-in}(1-q^n)}{(1-q)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)} + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} x^i q^{in+n+i}(1-xq^{n+1})}{(1-q)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)},
\end{aligned}$$

observe que $\frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} q^{-in}(1-q^n)}{(1-q)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)} = 0$ para $n = 0$, isto é,

$$f_i(x,q) - f_{i-1}(x,q) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} q^{-in}(1-q^n)}{(1-q)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} x^i q^{in+n+i}(1-xq^{n+1})}{(1-q)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)} q^{\frac{(n+1)(5(n+1)+3)}{2}} q^{-i(n+1)}\left(1-q^{(n+1)}\right)}{(1-q)\ldots(1-q^{n+1})\prod_{j=n+2}^{\infty}(1-xq^j)} + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} x^i q^{in+n+i}(1-xq^{n+1})}{(1-q)\ldots(1-q^n)(1-xq^{n+1})\prod_{j=n+2}^{\infty}(1-xq^j)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (xq)^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}-(1-i)n}(-1)x^2 q^{4n-2in+4-i}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-(xq)q^j)} + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (xq)^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}-(1-i)n} x^i q^i}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-(xq)q^j)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^i q^i (-1)^n (xq)^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}-(1-i)n} \left(1 - x^{2-i} q^{4n-2in+4-2i}\right)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}\left(1-(xq)q^j\right)}$$

$$= x^i q^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (xq)^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}-(1-i)n} \left(1 - (xq)^{1+(1-i)} q^{(2n+1)((1-i)+1)}\right)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}\left(1-(xq)q^j\right)}. \tag{2.30}$$

Comparando 2.30 com 2.27 temos

$$f_i(x,q) - f_{i-1}(x,q) = x^i q^i f_{1-i}(xq,q),$$

e para $i = 1$

$$f_1(x,q) = f_0(x,q) - xq f_0(xq,q).$$

Se tomarmos $i = 0$ teremos

$$f_0(x,q) = f_{-1}(z,q) + f_1(xq,q), \tag{2.31}$$

por 2.28 temos

$$f_0(x,q) = f_1(xq,q) \tag{2.32}$$

e finalmente para $x = 0$ em 2.27 temos

$$f_0(0,q) = f_1(0,q) = 1. \tag{2.33}$$

Até o momento mostramos que $f_0(x,q)$ e $f_1(x,q)$ como definidas em 2.27 são fortes candidatos a $G_0(x;q)$ e $G_1(x;q)$ (respectivamente). No entanto, para concluírmos que $f_0(x,q) = G_0(x;q)$ e $f_1(x,q) = G_1(x;q)$ precisamos mostrar que existe uma única $G_1(x;q)$ que satisfaz 2.24, 2.25 e 2.26 e que $\delta_i(m,n)$ é a única função que satisfaz 2.19, 2.20 e 2.21.

Vamos mostrar que $\delta_0(m,n)$ e $\delta_1(m,n)$ são as únicas funções que satisfazem 2.19, 2.20 e 2.21.

Considere $c_0(m,n)$ e $c_1(m,n)$ funções que satisfazem

$$c_1(m,n) = c_0(m,n) + c_0(m-1, n-m), \tag{2.34}$$

$$c_0(m,n) = c_1(m, n-m), \tag{2.35}$$

e

$$c_0(m,n) = c_1(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n = 0 \\ 0 \text{ se } m \text{ ou } n < 0 \text{ e } m, n \text{ não sejam ambos zero.} \end{cases} \tag{2.36}$$

Então $c_0(m,n) = \delta_0(m,n)$ e $c_1(m,n) = \delta_1(m,n)$, provaremos isto por indução em n.

Por 2.21 e 2.36 temos que

$$\delta_0(m,n) = c_0(m,n)$$

e

$$\delta_1(m,n) = c_1(m,n) \text{ para } n \leq 0.$$

Assuma

$$\delta_0(m,n) = c_0(m,n)$$

e

$$\delta_1(m,n) = c_1(m,n) \text{ para todo } n \leq k \ (k \geq 0) \text{ por 2.35,} \tag{2.37}$$

$$c_0(m,k+1) = c_1(m,k+1-m),$$

se $m \leq 0$ por 2.21 e 2.36 $c_1(m,k+1-m) = \delta_1(m,k+1-m)$

se $m > 0$ então $k+1-m \leq k$ e $c_1(m,k+1-m) = \delta_1(m,k+1-n)$ por 2.37.

Assim por 2.20

$$c_0(m,k+1) = c_1(m,k+1-m) = \delta_1(m,k+1-m) = \delta_0(m,k+1)\ . \tag{2.38}$$

Agora

$$c_1(m,k+1) = c_0(m,k+1) + c_0(m-1,k+1-m) \text{ por 2.34}$$

$$= \delta_0(m,k+1) + \delta_0(m-1,k+1-m) \text{ por 2.38}$$

$$= \delta_1(m,k+1) \text{ por 2.19}$$

Temos então

$$\delta_0(m,n) = c_0(m,n)$$

e

$$\delta_1(m,n) = c_1(m,n) \text{ para qualquer } m,n \in \mathbb{Z}.$$

Assim está garantida a unicidade da função que satisfaz 2.19, 2.20 e 2.21.

Suponha que

$$g_1(x;q) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_1(m,n)\, x^m q^n$$

e

$$g_0(x;q) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\, x^m q^n,$$

satisfazendo 2.24, 2.25 e 2.26, isto é,

$$g_1(x;q) = g_0(x;q) + xqg_0(xq;q)\,, \tag{2.39}$$

$$g_0(x;q) = g_1(xq;q)\,, \tag{2.40}$$

e

$$g_1(0;q) = g_0(0;q) = 1, \tag{2.41}$$

de 2.39 temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_1(m,n)\, x^m q^n =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\, x^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\,(xq)^m\, q^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\, x^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\, x^{m+1} q^{m+n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\, x^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m-1,n-m)\, x^m q^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(c_0(m,n) + c_0(m-1,n-m)\right) x^m q^n.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_1(m,n)\, x^m q^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(c_0(m,n) + c_0(m-1,n-m)\right) x^m q^n. \tag{2.42}$$

Assim igualando os coeficientes de 2.42 temos:

$$c_1(m,n) = c_0(m,n) + c_0(m-1,n-m) \tag{2.43}$$

De 2.40 temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\, x^m q^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_1(m,n)\,(xq)^m\, q^n$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_1(m,n)\, x^m q^{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_1(m,n-m)\, x^m q^n . \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_0(m,n)\, x^m q^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_1(m,n-m)\, x^m q^n, \tag{2.44}$$

igualando os coeficientes de 2.44 temos

$$c_0(m,n) = c_1(m,n-m) \tag{2.45}$$

e por 2.41 temos

$$\begin{cases} c_1(0,0) = c_0(0,0) = 1 \\ c_1(m,n) = c_0(m,n) = 0 \text{ se } m \text{ e } n \text{ não forem ambos nulos.} \end{cases} \tag{2.46}$$

Note que 2.43, 2.45 e 2.46 são exatamente 2.34, 2.35 e 2.36 respectivamente.

Assim

$$\begin{aligned} c_o(m,n) &= \delta_0(m,n), \\ c_1(m,n) &= \delta_1(m,n), \end{aligned}$$

e portanto

$$g_0(x;q) = G_0(x;q)$$

e

$$g_1(x;q) = G_1(x;q).$$

Por fim as equações 2.39, 2.40 e 2.41 são exatamente as equações 2.31, 2.32 e 2.33.

Assim

$$f_0(x,q) = G_0(x;q) \tag{2.47}$$

e

$$f_1(x,q) = G_1(x;q) \tag{2.48}$$

Se examinarmos a partição conjugada, nós temos que a partição conjugada $(6+5+5+4+3+2+2+2+2+1)$ possui exatamente duas partes que são repetidas. De fato se π é uma partição do tipo enumerado por $\beta_k(n)$ na qual 1 é uma parte, então π', a partição conjugada de π, é uma partição de n na qual a maior parte aparece somente uma vez. Todos os inteiros positivos não excedendo a maior parte aparecem e exatamente $k-1$ destes aparecem com repetição.

Se a condição que 1 aparece em π for removida, então π' será uma partição de n no qual a maior parte aparece mais de uma vez, todos os inteiros positivos não excedendo a maior parte aparece e exatamente k partes aparecem com repetição.

Desde que a união destas duas classes descritas acima faz uma relação um a um com as partições enumeradas por $\beta_k(n)$, nós vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_k(n)\,a^kq^n &= 1+\sum_{N=1}^{\infty}aq^N\prod_{j=1}^{N-1}\left(q^j+q^{2j}+aq^{3j}+\ldots\right) \qquad (3.7)\\ &+\sum_{N=1}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{N-1}\left(q^j+aq^{2j}+aq^{3j}+\right)\right\}\left(aq^{2N}+aq^{3N}+\ldots\right)\\ &= 1+\sum_{N=1}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{N-1}q^j\left(1+\frac{aq^j}{1-q^j}\right)\right\}\frac{aq^N}{1-q^N}\\ &= 1+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{aq^{\frac{N(N+1)}{2}}\left((1-a)\,q;q\right)_{N-1}}{(q;q)_N}\\ &= 1+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{(1-(1-a))\,q^{\frac{N(N+1)}{2}}\left((1-a)\,q;q\right)_{N-1}}{(q;q)_N}\\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{((1-a)\,;q)_N\,q^{\frac{N(N+1)}{2}}}{(q;q)_N}.\end{aligned}$$

Comparando 3.6 e 3.7, temos que o teorema segue imediatamente da identidade

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{((1-a)\,;q)_N\,q^{\frac{N(N+1)}{2}}}{(q;q)_N}=(-q;q)_{\infty}\left((1-a)\,q;q^2\right)_{\infty}.$$

■

e por 2.22, 2.48 e 2.27 temos

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_1(m,n)\,x^m q^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}-n}\left(1-x^2q^{2(2n+1)}\right)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)} \tag{2.49}$$

e por 2.23, 2.47 e 2.27 temos

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_0(m,n)\,x^m q^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}}\left(1-xq^{2n+1}\right)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-xq^j)}. \tag{2.50}$$

2.6 As Identidades de Rogers-Ramanujan

Definição 2.6.1. *Denotamos por $D_2(n)$ o número de partições de n onde quaisquer duas partes diferem de pelo menos 2.*

Teorema 2.6.1. *Primeira identidade de Rogers-Ramanujan.*
Para todo $n\in IN$ temos

$$p(S_2,n)=D_2(n).$$

Prova: Primeiramente note que

$$D_2(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_1(m,n)$$

e, multiplicando por q^n e somando em n, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}D_2(n)\,q^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\delta_1(m,n)\,q^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\delta_1(m,n)\,1^m q^n \text{ por } 2.49\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}-n}\left(1-q^{4n+2}\right)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-q^j)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}}\left(1-q^{4n+2}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-q^j\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+9)}{2}+2}}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-q^j\right)},$$

substitua n por $-n-1$ na segunda soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_2(n)\, q^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}} - \sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^{-n-1} q^{\frac{(-n-1)(5(-n-1)+9)}{2}+2}}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-q^j\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}} + \sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-q^j\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-q^j\right)}. \tag{2.51}$$

Agora vamos utilizar o produto triplo de Jacobi 2.15 substituindo q por $q^{\frac{5}{2}}$ e z por $-q^{\frac{1}{2}}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(q^{\frac{5}{2}}\right)^{n^2}\left(-q^{\frac{1}{2}}\right)^n =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\left(q^{\frac{5}{2}}\right)^{2n+2}\right)\left(1+\left(-q^{\frac{1}{2}}\right)\left(q^{\frac{5}{2}}\right)^{2n+1}\right)\left(1+\left(-q^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(q^{\frac{5}{2}}\right)^{2n+1}\right).$$

Portanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+1)}{2}} = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{5(n+1)}\right)\left(1-q^{5n+3}\right)\left(1-q^{5n+2}\right). \tag{2.52}$$

Substituindo 2.52 em 2.51

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_2(n)\, q^n =$$

$$= \frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{5n+5}\right)\left(1-q^{5n+3}\right)\left(1-q^{5n+2}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-q^j\right)}$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-q^{5n+5}\right)\left(1-q^{5n+3}\right)\left(1-q^{5n+2}\right)}{\left(1-q^{5n+5}\right)\left(1-q^{5n+1}\right)\left(1-q^{5n+2}\right)\left(1-q^{5n+3}\right)\left(1-q^{5n+4}\right)}$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{5n+1}\right)\left(1-q^{5n+4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} p\left(S_2, n\right) q^n.$$

Igualando os coeficientes de q^n temos

$$D_2(n) = p(S_2, n)$$

■

Definição 2.6.2. *Denotamos por $D'_2(n)$ o número de partições de n no qual duas partes quaisquer diferem de pelo menos 2, e a menor parte é maior do que 1.*

Definição2.6.3. *Denotamos por $T_2 = \{x \in IN; x \equiv 2 \bmod 5$ ou $x \equiv 3 \bmod 5\}$.*

Teorema 2.6.2. *Segunda Identidade de Rogers-Ramanujan.*
Para todo $n \in IN$

$$D'_2(n) = p(T_2, n).$$

Prova: Note que

$$D'_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_0(m, n)$$

se multiplicarmos por q^n e somarmos em n temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} D'_2(n) q^n =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_0(m, n) q^n && (2.53)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_0(m, n) 1^m q^n \text{ por } 2.50\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2}} (1 - 1q^{2n+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\prod_{j=n+1}^{\infty}(1-1q^j)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}} (1 - q^{2n+1})}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}\\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}+2n+1}}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{(n+1)(5(n+1)-3)}{2}}}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-q^j)}, \tag{2.54}$$

trocando n por $-n-1$ na segunda soma de 2.54 teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_2'(n) q^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}}}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-q^j)} =$$

$$= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(5n+3)}{2}}}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-q^j)}.$$

Agora utilizamos o produto triplo de Jacobi 2.15 e substituimos q por $q^{\frac{5}{2}}$ e z por $-q^{\frac{3}{2}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_2'(n) q^n =$$

$$= \frac{\prod_{n=0}^{\infty} \left(1-\left(q^{\frac{5}{2}}\right)^{2n+2}\right)\left(1+\left(-q^{\frac{3}{2}}\right)\left(q^{\frac{5}{2}}\right)^{2n+1}\right)\left(1+\left(-q^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}\left(q^{\frac{5}{2}}\right)^{2n+1}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-q^j)}$$

$$= \frac{\prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+5})(1-q^{5n+4})(1-q^{5n+1})}{\prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+1})(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})(1-q^{5n+4})(1-q^{5n+5})}$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} = \sum_{n=0}^{\infty} p(T_2, n) q^n.$$

Igualando os coeficientes de q^n temos

$$D_2'(n) = p(T_2, n).$$

■

2.7 Partições com Restrições

Nesta seção vamos introduzir uma nova notação que tornará os enunciados dos resultados mais compactos, desenvolver o teorema de Heine (uma identidade entre série e produto) que será muito útil na próxima seção e desenvolver a função geradora para partições de n em no máximo M partes, nenhuma excedendo N.

Vamos utilizar as seguintes abreviações:

$$\begin{aligned}
(a;q)_n &= (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\ldots\left(1-aq^{n-1}\right);\\
(a;q)_\infty &= \lim_{n\to\infty}(a;q)_n;\\
(a;q)_0 &= 1.
\end{aligned}$$

Desta maneira temos que:

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} \tag{2.55}$$

Com esta notação as equações 2.2, 2.8, 2.13, 2.14 passam a ser escritas, respectivamente, como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,q^n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)} = (q;q)_\infty^{-1};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,z^n}{(q;q)_n} = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}; \tag{2.56}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(q;q)_n} = (z;q)_\infty^{-1}; \tag{2.57}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}\,z^n}{(q;q)_n} = (-z;q)_\infty.$$

Teorema 2.7.1. *(Heine) Para* $|q|<1$, $|z|<1$, $|b|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,(b;q)_n\,z^n}{(q;q)_n\,(c;q)_n} = \frac{(b;q)_\infty\,(az;q)_\infty}{(c;q)_\infty\,(z;q)_\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_n(z;q)_n\,b^n}{(q;q)_n\,(az;q)_n}\right\}. \tag{2.58}$$

.

Prova:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,(b;q)_n\,z^n}{(q;q)_n\,(c;q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,(cq^n;q)_\infty\,(b;q)_\infty\,z^n}{(c;q)_\infty\,(q;q)_n\,(bq^n;q)_\infty}$$

$$= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cq^n;q)_\infty (a;q)_n z^n}{(bq^n;q)_\infty (q;q)_n}$$
$$= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n z^n}{(q;q)_n} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_m b^m q^{mn}}{(q;q)_m},$$

pois pela equação 2.56 temos

$$\frac{(cq^n;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty} = \frac{\left(\frac{c}{b}bq^n;q\right)_\infty}{(bq^n;q)_\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_m (bq^n;q)^m}{(q;q)_m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_m b^m q^{nm}}{(q;q)_m}$$

e

$$\frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n z^n}{(q;q)_n} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_m b^m q^{nm}}{(q;q)_m} = \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_m b^m (azq^m;q)_\infty}{(q;q)_m (zq^m;q)_\infty},$$

pois, pela equação 2.56

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n z^n q^{nm}}{(q;q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (zq^m;q)^n}{(q;q)_n} = \frac{(azq^m;q)_\infty}{(zq^m;q)_\infty},$$

e portanto

$$\frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_m b^m (azq^m;q)_\infty}{(q;q)_m (zq^m;q)_\infty} = \frac{(b;q)_\infty (az;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_m (z;q)_m b^m}{(q;q)_m (az;q)_m},$$

pois pela equação 2.55

$$(azq^m;q)_\infty = \frac{(az;q)_\infty}{(az;q)_m}$$

e

$$(zq^m;q)_\infty = \frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_m}.$$

■

Definição 2.7.1. *Denotamos por* $p(N, M, n)$ *o número de partições de* n *em no máximo* M *partes, nenhuma parte excedendo* N.

Exemplo 38. Temos $p(3, 4, 10) = 2$ pois $10 = 3+3+3+1 = 3+3+2+2$.

e $p(5,3,10) = 5$ pois $10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3.$

Note que

$$\begin{cases} \text{se } n > MN \text{ então } p(N,M,n) = 0 \\ \text{e se } n = MN \text{ então } p(N,M,n) = 1. \end{cases} \tag{2.59}$$

Considere a função geradora para $p(N,M,n)$

$$G(N,M;q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(N,M,n)\, q^n.$$

Temos por 2.59 que $G(N,M;q)$ é um polinônio de grau MN em q.

Teorema 2.7.2. *Para $M, N \geq 0$ temos:*

$$G(N,M;q) = \frac{\left(1-q^{N+M}\right)\left(1-q^{N+M-1}\right)\ldots\left(1-q^{M+1}\right)}{\left(1-q^{N}\right)\left(1-q^{N-1}\right)\ldots\left(1-q\right)} = \frac{(q;q)_{N+M}}{(q;q)_N\,(q;q)_M}. \tag{2.60}$$

Prova: Seja

$$g(N,M;q) = \frac{(q;q)_{N+M}}{(q;q)_N\,(q;q)_M}.$$

Temos

$$g(0,M;q) = g(N,0;q) = 1 \tag{2.61}$$

e

$$\begin{aligned} & g(N,M;q) - g(N,M-1;q) = \\ = \;& \frac{(q;q)_{N+M}}{(q;q)_N\,(q;q)_M} - \frac{(q;q)_{N+M-1}}{(q;q)_N\,(q;q)_{M-1}} \\ = \;& \frac{(q;q)_{N+M-1}}{(q;q)_N\,(q;q)_M}\left(\left(1-q^{N+M}\right) - \left(1-q^{M}\right)\right) \\ = \;& \frac{(q;q)_{N+M-1}}{(q;q)_N\,(q;q)_M} q\left(1-q^{N}\right) \\ = \;& \frac{(q;q)_{N+M-1}}{(q;q)_{N-1}\,(q;q)_M} q^{M} \\ = \;& q^M g(N-1,M;q). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Neste momento vamos mostrar que 2.61 e 2.62 definem uma única $g(N, M; q)$. Seja $C(N, M; q)$ tal que

$$C(0, M; q) = C(N, 0; q) = 1 \tag{2.63}$$

e

$$C(N, M; q) = C(N, M-1; q) + q^M C(N-1, M; q) \tag{2.64}$$

Aplicando 2.64 no primeiro termo do lado direito da igualdade 2.64 obteremos:

$$C(N, M; q) = C(N, M-2; q) + q^{M-1} C(N-1, M-1; q) + q^M C(N-1, M; q). \tag{2.65}$$

Aplicando 2.64 novamente no primeiro termo do lado direito de 2.65 e obteremos

$$\begin{aligned} C(N, M; q) &= C(N, M-3; q) + q^{M-2} C(N-1, M-2; q) + \\ &\quad + q^{M-1} C(N-1, M-1; q) + \\ &\quad + q^M C(N-1, M; q) \end{aligned} \tag{2.66}$$

repita este procedimento até obter $C(N-1, 0; q)$, isto é, $M-1$ vezes; como $C(K, L; q) = 0$ para K ou $L < 0$ teremos

$$C(N, M; q) = \sum_{k_1=0}^{M} C(N-1, k_1; q)\, q^{k_1}. \tag{2.67}$$

Agora aplique 2.67 no termo $C(N-1, k_1; q)$ de 2.67, e daí

$$C(N, M; q) = \sum_{k_1=0}^{M} \left(\sum_{k_2=0}^{k_1} C(N-2, k_2; q)\, q^{k_2} \right) q^{k_1}. \tag{2.68}$$

Aplique 2.67 no termo $C(N-2, k_2; q)$ de 2.68, e ficamos com

$$C(N, M; q) = \sum_{k_1=0}^{M} \left(\sum_{k_2=0}^{k_1} \left(\sum_{k_3}^{k_2} C(N-3, k_3; q)\, q^{k_3} \right) q^{k_2} \right) q^{k_1} \tag{2.69}$$

e repita este processo até obter $C(0, k_l; q)$, isto é, $N-1$ vezes, e teremos

$$C(N, M; q) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=0}^{M}\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\left(\sum_{k_3}^{k_2}\left(\cdots\left(\sum_{k_N=0}^{k_{N-1}} C\left(0,k_N;q\right) q^{k_N}\right) q^{k_{N-1}}\cdots\right) q^{k_3}\right) q^{k_2}\right) q^{k_1} \\
&= \sum_{k_1=0}^{M}\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\left(\sum_{k_3}^{k_2}\left(\cdots\left(\sum_{k_N=0}^{k_{N-1}} q^{k_N}\right) q^{k_{N-1}}\cdots\right) q^{k_3}\right) q^{k_2}\right) q^{k_1}. \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

Note que 2.70 depende apenas de M e N, ou seja, se $g\left(N,M;q\right)$ satisfaz 2.63 e 2.64 teremos que $C\left(N,M;q\right) = g\left(N,M;q\right)$. Logo a função que satisfaz 2.63 e 2.64 é única.

Observe que

$$
p\left(N,0,n\right) = p\left(0,M,n\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } N = M = n = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (2.71)
$$

pois a partição vazia de zero é a única partição na qual não existem partes positivas e é também a única partição na qual não existem partes negativas.

Daí a equação 2.71 significa que

$$
G\left(0,M;q\right) = G\left(N,0;q\right) = 1. \qquad (2.72)
$$

Observe que $p\left(N,M,n\right) - p\left(N,M-1,n\right)$ enumera o número de partições de n em exatamente M partes com nenhuma parte excedendo N. Vamos propor uma tranformação para estas partições.

Considere cada partição de n em exatamente M partes com nenhuma excedendo N e retire uma unidade de cada parte, temos assim partições de $n-M$ em no máximo M partes, nenhuma parte excedendo $N-1$; se considerarmos o processo inverso, teremos uma bijeção entre as partições de n em exatamente M partes com nenhuma parte excedendo N, e as partições de $n-M$ em no máximo M partes, nenhuma excedendo $N-1$; temos assim:

$$
p\left(N,M,n\right) - p\left(N,M-1,n\right) = p\left(N-1,M,n-M\right). \qquad (2.73)
$$

Agora, multiplicando por q^n e somando em n temos

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p\left(N,M,n\right) q^n - \sum_{n=0}^{\infty} p\left(N,M-1,n\right) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} p\left(N-1,M,n-M\right) q^n,
$$

$$
G\left(N,M;q\right) - G\left(N,M-1;q\right) = \sum_{n=M}^{\infty} p\left(N-1,M,n-M\right) q^n
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} p(N-1,M,n)\, q^n q^M \\
&= q^M \sum_{n=0}^{\infty} p(N-1,M,n)\, q^n \\
&= q^M G(N-1,M;q), \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

temos assim que 2.72 e 2.74 satisfazem respectivamente, 2.61 e 2.62, como mostramos existir única função satisfazendo 2.61 e 2.72 temos que

$$G(N,M;q) = \frac{(q;q)_{N+M}}{(q;q)_N (q;q)_M}.$$

■

2.8 Propriedades do Polinômio Gaussiano

Definição 2.8.1. *O polinômio Gaussiano* $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ é definido por:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m (q;q)_{n-m}} & \text{se } 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (2.75)$$

Observação: Note que $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ é a função geradora para partições de n em no máximo M partes, nenhuma parte excedendo $N-M$.

Teorema 2.8.1. *Sejam $0 \leq m \leq n$ inteiros. O polinômio gaussiano $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ é um polinômio de grau $m(n-m)$ em q que satisfaz:*

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1; \qquad (2.76)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}; \qquad (2.77)$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m \end{array}\right] + q^{n-m} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array}\right]; \tag{2.78}$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array}\right] + q^{m} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m \end{array}\right]; \tag{2.79}$$

$$\lim_{q\to 1} \left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right). \tag{2.80}$$

Prova: Pela definição 2.75 temos

$$\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right] = 1,$$

que prova 2.76 e

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m\,(q;q)_{n-m}} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-m}\,(q;q)_m} = \left[\begin{array}{c} n \\ n-m \end{array}\right],$$

que prova 2.78. Note que

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m \end{array}\right] &= \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m\,(q;q)_{n-m}} - \frac{(q;q)_{n-1}}{(q;q)_m\,(q;q)_{n-1-m}} \\
&= \frac{(q;q)_{n-1}\,(1-q^n)}{(q;q)_m\,(q;q)_{n-m}} - \frac{(q;q)_{n-1}\,(1-q^{n-m})}{(q;q)_m\,(q;q)_{n-m}} \\
&= \frac{(q;q)_{n-1}}{(q;q)_m\,(q;q)_{n-m}} \left((1-q^n) - (1-q^{n-m})\right) \\
&= q^{n-m}\,(1-q^m)\,\frac{(q;q)_{n-1}}{(q;q)_m\,(q;q)_{n-m}} \\
&= q^{n-m}\frac{(q;q)_{n-1}}{(q;q)_{m-1}\,(q;q)_{n-m}} \\
&= q^{n-m}\left[\begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Para mostrar 2.79 substitua m por $n-m$ em 2.78 e teremos

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n-m \end{array}\right] + q^{m} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n-m-1 \end{array}\right],$$

e agora aplique 2.77

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array}\right] + q^m \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m \end{array}\right].$$

Para mostrar 2.80 usamos o fato de

$$\lim_{q \to 1} \frac{(1-q^n)}{(1-q^m)} = \lim_{q \to 1} \frac{-nq^{n-1}}{-mq^{m-1}} = \frac{n}{m},$$

então,

$$\begin{aligned} \lim_{q \to 1} \left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] &= \lim_{q \to 1} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m (q;q)_{n-m}} \\ &= \lim_{q \to 1} \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-m})} \\ &= \lim_{q \to 1} \frac{(1-q^{n-m+1})(1-q^{n-m+2})\dots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)} \\ &= \frac{(n-m+1)}{1}\frac{(n-m+2)}{2}\dots\frac{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right). \end{aligned}$$

e por fim como

$$\left[\begin{array}{c} N \\ M \end{array}\right] = G(N-M, M; q)$$

e $G(N-M, M; q)$ é um polinômio de grau $(N-M)M$, temos mostrado o teorema.

■

Observações: As identidades do teorema acima podem ser lidas como identidades entre partições como se segue:

De $\left[\begin{array}{c} N \\ M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} N \\ N-M \end{array}\right]$ temos que, o número de partições de n em no máximo M partes, nenhuma excedendo $N-M$, é igual ao número de partições de n em no máximo $N-M$ partes, nenhuma excedendo M.

A relação $\left[\begin{array}{c} N \\ M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} N-1 \\ M \end{array}\right] + q^{N-M}\left[\begin{array}{c} N-1 \\ M-1 \end{array}\right]$ nos fornece que o número de partições de n em no máximo M partes, nenhuma excedendo $N-M$, é igual ao número de partições de n em M partes, nenhuma excedendo

$N-1-M$, mais o número de partições de $n-N+M$ em no máximo $M-1$ partes, nenhuma excedendo $N-M$.

E por último de $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-1 \\ M-1 \end{bmatrix} + q^M \begin{bmatrix} N-1 \\ M \end{bmatrix}$ temos que o número de partições de n em no máximo M partes, memhuma excedendo $N-M$, é igual ao número de partições de n em no máximo $M-1$ partes, nenhuma excedendo $N-M$ mais o número de partições de $N-M$ em no máximo M partes, nenhuma excedendo $N-1-M$.

Teorema 2.8.2.

$$(z;q)_N = \sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} (-1)^j z^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}, \tag{2.81}$$

$$(z;q)_N^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j. \tag{2.82}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
(z;q)_N &= \frac{(z;q)_\infty}{(zq^N;q)_\infty} = \frac{\left(q^{-N}\left(zq^N\right);q\right)_\infty}{(zq^N;q)_\infty} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(q^{-N};q\right)_n \left(zq^N;q\right)^n}{(q;q)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(q^{-N};q\right)_n z^n q^{Nn}}{(q;q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-q^{-N}\right)\left(1-q^{-n+1}\right)...\left(1-q^{-N+n-1}\right) z^n q^{Nn}}{(q;q)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-N}q^{-N+1}...q^{-N+n-1}\left(q^N-1\right)\left(q^{N-1}-1\right)...\left(q^{N-n+1}-1\right) z^n q^{Nn}}{(q;q)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(1-q^N\right)\left(1-q^{N-1}\right)...\left(1-q^{N-n+1}\right) z^n q^{Nn+\frac{(-2N+n-1)n}{2}}}{(q;q)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (q;q)_N z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q;q)_n (q;q)_{N-n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} (-1)^n z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Para mostrar 2.82 considere

$$
\begin{aligned}
(z)_N^{-1} &= \frac{\left(zq^N\right)_\infty}{(z)_\infty} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(q^N\right)_n z^n}{(q)_n} \quad 2.56 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q)_{N+n-1} z^n}{(q)_n (q)_{N-1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} N+n-1 \\ n \end{array} \right] z^n.
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.8.3.

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \left[\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right] = \begin{cases} (q;q^2)_n & \text{se} \quad m \quad \text{for par} \\ 0 \quad \text{se} & m \quad \text{for ímpar} \end{cases}, \tag{2.83}$$

$$\left[\begin{array}{c} n+m+1 \\ m+1 \end{array} \right] = \sum_{j=0}^{n} q^j \left[\begin{array}{c} m+j \\ m \end{array} \right] \quad \text{para } m,n \geq 0, \tag{2.84}$$

$$\sum_{k=0}^{h} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} m \\ h-k \end{array} \right] q^{(n-k)(h-k)} = \left[\begin{array}{c} n+m \\ h \end{array} \right], \tag{2.85}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} M-m \\ r \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} N+m \\ m+r \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} m+n+r \\ M+N \end{array} \right] q^{(N-r)(M-r-m)} = \left[\begin{array}{c} m+n \\ M \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} n \\ N \end{array} \right]. \tag{2.86}$$

Prova: Seja $f(m)$ o lado esquerdo de 2.75, multiplique por $\frac{z^m}{(q;q)_m}$ e some em m, então

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m) z^m}{(q;q)_m} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j (q;q)_m z^m}{(q;q)_j (q;q)_{m-j} (q;q)_m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j z^m}{(q;q)_j (q;q)_{m-j}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\frac{(-1)^j\, z^m}{(q;q)_j\,(q;q)_{m-j}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\, z^{m+j}}{(q;q)_j\,(q;q)_m} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\, z^j}{(q;q)_j}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{(q;q)_m} \\
&= (-z;q)_\infty^{-1}\,(z;q)_\infty^{-1} \quad \text{por } 2.57 \\
&= (1+z)^{-1}\,(1+zq)^{-1}\ldots(1-z)^{-1}\,(1-zq)^{-1}\ldots \\
&= \left(1-z^2\right)^{-1}\left(1-z^2q^2\right)^{-1}\left(1-z^2q^4\right)^{-1}\ldots \\
&= \left(z^2;q^2\right)_\infty^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(q^2;q^2)_n} \quad \text{por } 2.57.
\end{aligned}
$$

Comparando os coeficientes da igualdade

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(m)\,z^m}{(q;q)_m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(q^2;q^2)_n}$$

temos o resultado.

Vamos provar 2.84 por indução em n.

Se $n=0$ temos $1=1$.

Suponha 2.84 verdadeira para $n=k$, $(k\in I\!N)$, isto é

$$\begin{bmatrix} k+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{k}q^j\begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} \quad \text{para } m,k\geq 0$$

e queremos verificar se vale para $n=k+1$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} k+1+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k+m+2 \\ m+1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k+m+2-1 \\ m+1 \end{bmatrix}+q^{k+m+2-(m+1)}\cdot \\
&\quad\cdot\begin{bmatrix} k+m+2-1 \\ m+1-1 \end{bmatrix} \quad \text{por } 2.78
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} k+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} k+m+1 \\ m \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=0}^{k} q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} k+m+1 \\ m \end{bmatrix} \quad \text{por} \\
&\quad \text{hipótese de indução} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Para mostrar 2.85 considere 2.81 substituindo N por $n+m$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{h=0}^{n+m} \begin{bmatrix} n+m \\ h \end{bmatrix} z^h (-1)^h q^{\frac{h(h-1)}{2}} \\
&= (z;q)_{n+m} \\
&= (1-z)(1-zq)\left(1-zq^2\right)\ldots\left(1-zq^{n+m}\right) \\
&= (1-z)(1-zq)\ldots(1-zq^n)(1-zq^nq)\left(1-zq^nq^2\right)\ldots(1-zq^nq^m) \\
&= (z;q)_n (zq^n;q)_m \\
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (-1)^j z^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} (-1)^i (zq^n)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}} \quad \text{por 2.81} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} (-1)^{j+i} z^{j+i} q^{\frac{j(j-1)}{2} + \frac{i(i-1)}{2} + in} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} (-1)^{j+i} z^{j+i} q^{\frac{(j+i)(j+i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} q^{i(n-j)} \quad \text{por 2.75} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{j+i} z^{j+i} q^{\frac{(j+i)(j+i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} q^{i(n-j)},
\end{aligned}
$$

substitua j por k e i por $h-k$,

$$
= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h z^h q^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ h-k \end{bmatrix} q^{(h-k)(n-k)};
$$

temos portanto que:

$$
\sum_{h=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+m \\ h \end{bmatrix} z^h (-1)^h q^{\frac{h(h-1)}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h z^h q^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ h-k \end{bmatrix} q^{(h-k)(n-k)},
$$

e comparando os coeficientes desta igualdade temos

$$\left[\begin{array}{c} n+m \\ h \end{array}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} m \\ h-k \end{array}\right] q^{(h-k)(n-k)}.$$

Para mostrar 2.86 vamos mostrar primeiro uma identidade mais geral:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n \left(q^{-N};q\right)_n q^n}{(q;q)_n (c;q)_n \left(\frac{abq^{1-N}}{c};q\right)_n} = \frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_N \left(\frac{c}{b};q\right)_N}{(c;q)_N \left(\frac{c}{ab};q\right)_N}. \tag{2.87}$$

Para tal demonstração considere 2.58

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n z^n}{(q;q)_n (c;q)_n} &= \frac{(b;q)_\infty (az;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_n (z;q)_n b^n}{(q;q)_n (az;q)_n} \\
&= \frac{(b;q)_\infty (az;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z;q)_n \left(\frac{c}{b};q\right)_n b^n}{(q;q)_n (az;q)_n} \\
&= \frac{(b;q)_\infty (az;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty} \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty (bz;q)_\infty}{(az;q)_\infty (b;q)_\infty} \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{azb}{c};q\right)_n (b;q)_n \left(\frac{c}{b}\right)^n}{(q;q)_n (zb;q)_n} \quad \text{por } 2.58 \\
&= \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty (bz;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{azb}{c};q\right)_n (b;q)_n \left(\frac{c}{b}\right)^n}{(q;q)_n (zb;q)_n} \\
&= \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty (bz;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b;q)_n \left(\frac{azb}{c};q\right)_n \left(\frac{c}{b}\right)^n}{(q;q)_n (zb;q)_n} \\
&= \frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty (bz;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty} \frac{\left(\frac{azb}{c};q\right)_\infty (c;q)_\infty}{(zb;q)_\infty \left(\frac{c}{b};q\right)_\infty} \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_n \left(\frac{c}{b};q\right)_n \left(\frac{azb}{c}\right)^n}{(q;q)_n (c;q)_n} \quad \text{por } 2.58
\end{aligned}$$

temos então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n z^n}{(q;q)_n (c;q)_n} = \frac{\left(\frac{azb}{c};q\right)_\infty}{(z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_n \left(\frac{c}{b};q\right)_n \left(\frac{azb}{c}\right)^n}{(q;q)_n (c;q)_n}, \tag{2.88}$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{(z;q)_\infty}{\left(\frac{azb}{c};q\right)_\infty}$ temos:

$$\frac{(z;q)_\infty}{\left(\frac{azb}{c};q\right)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,(b;q)_n\,z^n}{(q;q)_n\,(c;q)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_n\left(\frac{c}{b};q\right)_n\left(\frac{azb}{c}\right)^n}{(q;q)_n\,(c;q)_n}.$$

Aplicando 2.56 do lado esquerdo de 2.88

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{ab};q\right)_m\left(\frac{abz}{c}\right)^m}{(q;q)_m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,(b;q)_n\,z^n}{(q;q)_n\,(c;q)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_n\left(\frac{c}{b};q\right)_n\left(\frac{azb}{c}\right)^n}{(q;q)_n\,(c;q)_n},$$

igualando os coeficientes teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,(b;q)_n\left(\frac{c}{ab};q\right)_{N-n}}{(q;q)_n\,(c;q)_n\,(q;q)_{N-n}}\frac{a^{N-n}b^{N-n}}{c^{N-n}}=\frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_N\left(\frac{c}{b};q\right)_N}{(q;q)_N\,(c;q)_N}\frac{a^Nb^N}{c^N}. \tag{2.89}$$

Agora multiplicamos ambos os lados de 2.89 por $\frac{(q;q)_N c^N}{a^Nb^N\left(\frac{c}{ab};q\right)_N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n\,(b;q)_n}{(q;q)_n\,(c;q)_n}\frac{(q;q)_N}{(q;q)_{N-n}}\frac{\left(\frac{c}{ab};q\right)_{N-n}}{\left(\frac{c}{ab};q\right)_N}\frac{c^n}{a^nb^n}=\frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_N\left(\frac{c}{b};q\right)_N}{(c;q)_N\left(\frac{c}{ab};q\right)_N}. \tag{2.90}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(q^{-N};q\right)_n q^n}{\left(\frac{ab}{c}q^{1-N};q\right)_n} &= \frac{\left(1-q^{-N}\right)\left(1-q^{-N+1}\right)...\left(1-q^{-N+n-1}\right)q^n}{\left(1-\frac{ab}{c}q^{1-N}\right)\left(1-\frac{ab}{c}q^{1-N+1}\right)...\left(1-\frac{ab}{c}q^{-N+n}\right)}\\
&= \frac{q^{-N}q^{-N+1}...q^{-N+n-1}q^n\left(q^N-1\right)\left(q^{N-1}-1\right)...\left(q^{N-n+1}-1\right)}{\left(\frac{ab}{c}\right)^n q^{1-N}q^{1-N+1}...q^{-N+n}\left(\frac{c}{ab}q^{N-1}-1\right)\left(\frac{c}{ab}q^{N-2}-1\right)...\left(\frac{c}{ab}q^{N-n}-1\right)}\\
&= \frac{\left(1-q^{N-n+1}\right)...\left(1-q^{N-1}\right)\left(1-q^N\right)c^n}{\left(1-\frac{c}{ab}q^{N-n}\right)...\left(1-\frac{c}{ab}q^{N-2}\right)\left(1-\frac{c}{ab}q^{N-1}\right)a^nb^n}\\
&= \frac{(q;q)_N\left(\frac{c}{ab};q\right)_{N-n}c^n}{(q;q)_{N-n}\left(\frac{c}{ab};q\right)_N a^nb^n}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\left(q^{-N};q\right)_n q^n}{\left(\frac{ab}{c}q^{1-N};q\right)_n}=\frac{(q;q)_N\left(\frac{c}{ab};q\right)_{N-n}c^n}{(q;q)_{N-n}\left(\frac{c}{ab};q\right)_N a^nb^n}, \tag{2.91}$$

e substituindo 2.91 no lado esquerdo de 2.90 temos mostrado 2.87.

Agora para obter 2.86 basta substituir a por q^{-M+m}, b por q^{m+n+1} e c por q^{m+1} na equação 2.87 e teremos

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(q^{-M+m};q\right)_r \left(q^{m+n+1};q\right)_r \left(q^{-N};q\right)_r q^r}{(q;q)_r \left(q^{m+1};q\right)_r \left(q^{-M+m+n-N+1};q\right)_r} = \frac{\left(q^{M+1};q\right)_N \left(q^{-n};q\right)_N}{\left(q^{m+1};q\right)_N \left(q^{M-m-n};q\right)_N}. \tag{2.92}$$

Para concluir a demonstração vamos substituir em 2.92 os termos abaixo:

$$\begin{aligned}
\left(q^{-M+m};q\right)_r &= (-1)^r q^{\frac{r(-2M+2m+r-1)}{2}} \frac{(q;q)_{M-m}}{(q;q)_{M-m-r}} \\
\left(q^{m+n+1};q\right)_r &= \frac{(q;q)_{m+n+r}}{(q;q)_{m+n}} \\
\left(q^{-N};q\right)_r &= q^{\frac{r(-2N+r-1)}{2}} (-1)^r \frac{(q;q)_N}{(q;q)_{N-r}} \\
(q;q)_r &= (q;q)_r \\
\left(q^{m+1};q\right)_r &= \frac{(q;q)_{m+r}}{(q;q)_m} \\
\left(q^{m+n-M-N+1};q\right)_r &= \frac{(q;q)_{m+n-M-n+r}}{(q;q)_{m+n-M-N}} \\
\left(q^{M+1};q\right)_N &= \frac{(q;q)_{M+N}}{(q;q)_M} \\
\left(q^{-n};q\right)_N &= (-1)^N q^{\frac{N(N-2n-1)}{2}} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-N}} \\
\left(q^{m+1};q\right)_N &= \frac{(q;q)_{m+N}}{(q;q)_m} \\
\left(q^{M-m-n};q\right)_N &= q^{\frac{N(2M-2m-2n+N-1)}{2}} (-1)^N \frac{(q;q)_{n+m-M}}{(q;q)_{n+m-M-N}}
\end{aligned}$$

e teremos

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r q^{\frac{r(-2M+2m+r-1)}{2}} \frac{(q;q)_{M-m}}{(q;q)_{M-m-r}} \frac{(q;q)_{m+n+r}}{(q;q)_{m+n}} q^{\frac{r(-2N+r-1)}{2}} (-1)^r \frac{(q;q)_N}{(q;q)_{N-r}} q^r}{(q;q)_r \frac{(q;q)_{m+r}}{(q;q)_m} \frac{(q;q)_{m+n-M-n+r}}{(q;q)_{m+n-M-N}}} =$$

$$= \frac{\frac{(q;q)_{M+N}}{(q;q)_M} (-1)^N q^{\frac{N(N-2n-1)}{2}} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-N}}}{\frac{(q;q)_{m+N}}{(q;q)_m} q^{\frac{N(2M-2m-2n+N-1)}{2}} (-1)^N \frac{(q;q)_{n+m-M}}{(q;q)_{n+m-M-N}}}. \tag{2.93}$$

Simplificando 2.93:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(q;q)_{M-m}(q;q)_{m+n+r}(q;q)_N\, q^{\frac{r(-2M+2m+r-1)}{2}+\frac{r(-2N+r-1)}{2}+r}}{(q;q)_r(q;q)_{M-m-r}(q;q)_{m+n}(q;q)_{N-r}(q;q)_{m+r}(q;q)_{m+n-M-n+r}}=$$

$$=\frac{(q;q)_{M+N}(q;q)_n\, q^{\frac{N(N-2n-1)}{2}-\frac{N(2M-2m-2n+N-1)}{2}}}{(q;q)_M(q;q)_{n-N}(q;q)_{m+N}(q;q)_{n+m-M}}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(q;q)_{M-m}(q;q)_{m+N}(q;q)_{m+n+r}}{(q;q)_r(q;q)_{M-m-r}(q;q)_{m+r}(q;q)_{N-r}(q;q)_{M+N}}$$

$$\cdot\frac{q^{\frac{r(-2M+2m+r-1)}{2}+\frac{r(-2N+r-1)}{2}+r-\frac{N(N-2n-1)}{2}+\frac{N(2M-2m-2n+N-1)}{2}}}{(q;q)_{m+n-M-n+r}}=$$

$$=\frac{(q;q)_{m+n}(q;q)_n}{(q;q)_M(q;q)_{n+m-M}(q;q)_N(q;q)_{n-N}}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(q;q)_{M-m}(q;q)_{m+N}(q;q)_{m+n+r}\, q^{(N-r)(M-r-m)}}{(q;q)_r(q;q)_{M-m-r}(q;q)_{m+r}(q;q)_{N-r}(q;q)_{M+N}(q;q)_{m+n-M-n+r}}$$

$$=\frac{(q;q)_{m+n}(q;q)_n}{(q;q)_M(q;q)_{n+m-M}(q;q)_N(q;q)_{n-N}}$$

e temos portanto

$$\sum_{r=0}^{\infty}\begin{bmatrix} M-m \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N+m \\ m+r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m+n+r \\ M+N \end{bmatrix} q^{(N-r)(M-r-m)}=\begin{bmatrix} m+n \\ M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ N \end{bmatrix}$$

■

Capítulo 3

Introdução às Séries Hipergeométricas

Neste último Capítulo fazemos uma pequena introdução às Séries Hipergeométricas Ordinárias Generalizadas, denotadas por ${}_rF_s$, e alguns exemplos de aplicações destas séries, sendo que os exemplos envolvendo equações diferenciais não serão resolvidos neste texto, existindo maiores referências a estas demonstrações em [10]. Apresentaremos também uma introdução às Séries Hipergeométricas Básicas mostrando algumas aplicações destas séries à teoria de Partições.

Uma função hipergeométrica generalizada possui uma representação em série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

tal que a razão de dois termos quaisquer seja uma função racional de n. A razão $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ pode ser fatorada e escrita usualmente como

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_r)\,z}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_s)\,n!}. \tag{3.1}$$

Definição 3.1. $(a)_0 = 1$;
$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$, $n \geq 1$.

Assim temos que, se $c_0 = 1$, a equacão 3.1 resolvida em n fica

$$c_n = \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_r)_n z^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_s)_n n!}$$

e daí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_r)_n z^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_s)_n n!}.$$

Definição 3.2. Uma série hipergeométrica ordinária generalizada (ou série hipergeométrica de Gauss) com r parâmetros no numerador a_1, a_2,...,a_r e s parâmetros no denominador b_1, b_2,...,b_s é definida por:

$$
\begin{aligned}
& {}_rF_s(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_s; z) = \\
&= {}_rF_s\left[\begin{array}{c} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{array}; z\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_r)_n z^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_s)_n n!}.
\end{aligned}
$$

Observamos que as séries hipergeométricas contém quase todas as funções introduzidas nos cursos de cálculo, e para verificar a convergência podemos aplicar o teste da razão.

Exemplo 39. $\exp(z) ={}_0 F_0(-; -; z)$.
Isto decorre diretamente da definição acima; pois

$${}_0F_0(-; -; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Exemplo 40. $\mathrm{sen}(z) = z\,{}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)$
Note que:

$$z\,{}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \left(\frac{3}{2}\right)_n} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!2^{2n}\left(\frac{3}{2}\right)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!2^{2n}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)...\left(\frac{3}{2}+n-1\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!2^n 1.3.5.7...(2n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \operatorname{sen}(z).
\end{aligned}
$$

Exemplo 41. $\cos(z) = {}_0F_1\left(-;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}\right)$ pois

$$
\begin{aligned}
{}_0F_1\left(-;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\left(\frac{1}{2}\right)_n}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!2^{2n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)...\left(\frac{1}{2}+n-1\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!2^{2n}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}...\frac{2n-1}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!2^n 1.3.5..(2n-1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\
&= \cos(z).
\end{aligned}
$$

Como motivação citaremos três exemplos clássicos (sem demonstrá-los) de soluções de equações diferenciais por Séries Hipergeométricas.

Exemplo 42. A equação diferencial de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2\frac{dy}{dx}\right] - \lambda y = 0,$$

com $|x| = 1$ e $\lambda = -l\,(l+1)$ possui como solução os polinômios de Legendre:

$$P_l\,(x) = \frac{1.3.5...(2l-1)}{l!}\left(x^l - \frac{l\,(l-1)}{2\,(2l-1)}x^{l-2} + \frac{l\,(l-1)\,(l-2)\,(l-3)}{2.4.\,(2l-1)\,(2l-3)}x^{l-4} - ...\right).$$

Podemos expressar $P_l\,(x)$ como a seguinte série hipergeométrica:

$$P_l\,(x) = {}_2F_1\left(-l, l+1; 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Exemplo 43. A equação diferencial de Bessel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right)y = 0,$$

para $\mu \in IR$ possui como solução a chamada função de Bessel de ordem μ:

$$J_\mu\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\,(\mu+n+1)\,2^{\mu+2n}}x^{\mu+2n}.$$

onde $\Gamma\,(a) = (a-1)\,(a-2)\,...\,(a-\lfloor a\rfloor+2)\,(a-\lfloor a\rfloor+1)\,(a-\lfloor a\rfloor)$; e $\lfloor a\rfloor$ representa a função maior inteiro menor ou igual a a.

A expressão de $J_\mu\,(x)$ como série hipergeométrica será:

$$J_\mu\,(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\mu\,{}_0F_1\left(-;\mu+1;-\frac{x^2}{4}\right)}{\Gamma\,(\mu+1)}.$$

Exemplo 44. A equação diferencial de Hermite:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - (1-\lambda)\,y = 0,$$

para $\lambda = 2n+1$, $n = 01, 2, 3, ...$ possui como solução os polinômios de Hermite:

$$H_n\,(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right)\frac{d^n \exp\left(-x^2\right)}{dx^n}$$

(fórmula de Rodrigues para os polinômio de Hermite).

A expressão de $H_n(x)$ como série hipergeométrica será:

$$H_n(x) = (2x)^n \, {}_2F_0\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; -; -x^{-2}\right).$$

Definição 3.3. Uma série hipergeométrica básica (ou q-série hipergeométrica) com r parâmetros no numerador a_1, a_2,...,a_r e s parâmetros no denominador b_1, b_2,...,b_s é definida por:

$$\begin{aligned}
&{}_r\phi_s(a_1,a_2,...,a_r; b_1,b_2,...,b_s; q, z) = \\
&= {}_r\phi_s\left[\begin{matrix} a_1, a_2, ..., a_r \\ b_1, b_2, ..., b_s \end{matrix}; q, z\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_n (a_2;q)_n \cdots (a_r;q)_n}{(b_1;q)_n (b_2;q)_n \cdots (b_s;q)_n} \left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{1+s-r} z^n
\end{aligned}$$

onde $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $q \neq 0$ e $r > s+1$.

Observe que como

$$\lim_{q\to 1} \frac{1-q^a}{1-q} = a,$$

temos que

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} = (a)_n,$$

assim

$$\lim_{q\to 1} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ q^c \end{matrix}; q, z\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right],$$

pois

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b \\ q^c \end{matrix}; q, z\right] &= \lim_{q\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a;q)_n (q^b;q)_n}{(q;q)_n (q^c;q)_n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n \\
&= {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right].
\end{aligned}$$

Com a definição acima da ${}_r\phi_s$ temos que 2.56 e 2.58 podem ser escritas respectivamente como

$$ {}_1\phi_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix};q,z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n z^n}{(q;q)_n}=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \tag{3.2} $$

e

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};q,z\right]=\frac{(b;q)_\infty (az;q)_\infty}{(c;q)_\infty (z;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} \frac{c}{b},z \\ az \end{matrix};q,b\right]. \tag{3.3} $$

A seguir apresentamos alguns resultados que envolvem as q-séries hipergeométricas e partições. Estes resultados foram extraídos do [5].

Teorema 3.1. Se $|b|<1$, $|q|<1$, $\left|\frac{c}{ab}\right|<1$, $c\neq q^{-n}$, $\frac{c}{ab}\neq q^{-n}$ e $\frac{c}{b}\neq q^{-n}$, então

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};q,\frac{c}{ab}\right]=\frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_\infty\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty}{(c;q)_\infty\left(\frac{c}{ab};q\right)_\infty}. \tag{3.4} $$

Prova: Por 3.3, temos

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};q,\frac{c}{ab}\right] &= \frac{(b;q)_\infty\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty}{(c;q)_\infty\left(\frac{c}{ab};q\right)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} \frac{c}{b},\frac{c}{ab} \\ \frac{c}{b} \end{matrix};q,b\right] \\ &= \frac{(b;q)_\infty\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty}{(c;q)_\infty\left(\frac{c}{ab};q\right)_\infty}\,{}_1\phi_0\left[\begin{matrix} \frac{c}{ab} \\ - \end{matrix};q,b\right] \\ &= \frac{(b;q)_\infty\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty\left(\frac{c}{a};q\right)_\infty}{(c;q)_\infty\left(\frac{c}{ab};q\right)_\infty(b;q)_\infty} \\ &= \frac{\left(\frac{c}{a};q\right)_\infty\left(\frac{c}{b};q\right)_\infty}{(c;q)_\infty\left(\frac{c}{ab};q\right)_\infty}. \end{aligned} $$

■

Teorema 3.2. Se $|a|<1$, $|q|<1$, $\left|\frac{q}{b}\right|<1$, $\frac{a}{b}\neq q^{-(n+1)}$, $-\frac{1}{b}\neq q^{-(n+1)}$ e $-1\neq q^{-(n+1)}$, então

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \frac{qa}{b} \end{matrix};q,-\frac{q}{b}\right]=\frac{(aq;q^2)_\infty(-q;q)_\infty\left(\frac{q^2a}{b^2};q^2\right)_\infty}{\left(\frac{qa}{b};q\right)_\infty\left(-\frac{q}{b};q\right)_\infty}. \tag{3.5} $$

Prova:

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \frac{qa}{b} \end{matrix};q,-\frac{q}{b}\right] &= {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b,a \\ \frac{qa}{b} \end{matrix};q,-\frac{q}{b}\right] \\
&= \frac{(a;q)_\infty(-q;q)_\infty}{\left(\frac{qa}{b};q\right)_\infty\left(-\frac{q}{b};q\right)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} \frac{q}{b},-\frac{q}{b} \\ -q \end{matrix};q,a\right] \quad \text{por 3.3} \\
&= \frac{(a;q)_\infty(-q;q)_\infty}{\left(\frac{qa}{b};q\right)_\infty\left(-\frac{q}{b};q\right)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{q}{b};q\right)_n\left(-\frac{q}{b};q\right)_n}{(q;q)_n(-q;q)_n}a^n \\
&= \frac{(a;q)_\infty(-q;q)_\infty}{\left(\frac{qa}{b};q\right)_\infty\left(-\frac{q}{b};q\right)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{q^2}{b^2};q^2\right)_n}{(q^2;q^2)_n}a^n \\
&= \frac{(a;q)_\infty(-q;q)_\infty}{\left(\frac{qa}{b};q\right)_\infty\left(-\frac{q}{b};q\right)_\infty}\,{}_1\phi_0\left[\begin{matrix} \frac{q^2}{b^2} \\ - \end{matrix};q^2,a\right] \\
&= \frac{(a;q)_\infty(-q;q)_\infty\left(\frac{aq^2}{b^2};q^2\right)_\infty}{\left(\frac{qa}{b};q\right)_\infty\left(-\frac{q}{b};q\right)_\infty(a;q^2)_\infty} \quad \text{por 3.2} \\
&= \frac{(qa;q^2)_\infty(-q;q)_\infty\left(\frac{aq^2}{b^2};q^2\right)_\infty}{\left(\frac{qa}{b};q\right)_\infty\left(-\frac{q}{b};q\right)_\infty}.
\end{aligned}
$$

■

Corolário 3.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_n} = \left(aq;q^2\right)_\infty(-q;q)_\infty .$$

Prova: Esta identidade segue de 3.5 após tomarmos $b \to \infty$.

■

Finalizamos este trabalho com o seguinte teorema.

Teorema 3.3. Seja $A_k(n)$ o número de partições de n em partes ímpares (repetições são permitidas) com exatamente k partes diferentes em cada partição. Seja $\beta_k(n)$ o número de partições de n em partes distintas tal que exatamente k seqüências de inteiros consecutivos aparecem. Então para cada k e n,

$$A_k(n) = \beta_k(n).$$

Prova: Note primeiramente que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_k(n)\, a^k q^n &= \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + aq^{2j-1} + aq^{2(2j-1)}aq^{3(2j-1)} + \ldots\right) \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{aq^{2j-1}}{1-q^{2j-1}}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{\left(1+(a-1)\,q^{2j-1}\right)}{\left(1-q^{2j-1}\right)}.
\end{aligned}$$

Agora como

$$\begin{aligned}
\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^m) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2m})}{(1-q^m)} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2j-1})},
\end{aligned}$$

nós temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_k(n)\, a^k q^n = (-q;q)_{\infty}\left((1-a)\,q;q^2\right)_{\infty}. \tag{3.6}$$

Por outro lado vamos considerar a representação gráfica de uma partição do tipo enumerado por $\beta_k(n)$. Por exemplo, $10+9+5+4+3+1$ é uma partição do tipo enumerado por $\beta_3(32)$, e ela possui a seguinte representação gráfica:

$$\begin{array}{llllllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & & & &
\end{array}.$$

Bibliografia

[1] ANDREWS, George E. **Number Theory**. Philadelphia: W. B. Saunders, 1971. (Reprinted: New Delhi, Hindustan Publishing Co., 1984).

[2] __________. **The Theory of Partitions**, London, Addison-Wesley, 1976. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 2).

[3] __________. **Partition: yesterday and today**. New Zealand Math. Sic., Wellington, 1979.

[4] __________. **q-Series: Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra**, Providence, American Mathematics Society, R. I., 1986. (CBMS Regional Conferency Series in Mathematics, 66).

[5] __________. **Application to Analytic Number Functions**, SIAM Review, Vol. 16 N° 4, 1974. Pág.441 - 484

[6] APOSTOL, T. M. **Introduction the Analytic Number Theory**, New York, Springer, 1979.

[7] BERMAN, G.; K. D. FRYER, **Introduction to Combinatorics**, New York, Academic Press, 1972.

[8] BOYER, C. B. **História da Matemática**, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[9] BUTKOV,E. **Física Matemática**, Rio de Janeiro, Guanabara, 1988.

[10] FINE, N. J. **Basic Hypergeometric Series and Applications**, Providence: AMS, 1988. (Mathematics Surveys and Monographs, 27).

[11] GASPER, G. and M. RAHMAN. **Basic Hypergeometric Series**, Cambridge, Cambridge Univ., 1990. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 35)

[12] HALL, M. J., **Combinatorial Theory**, Chichester, John Wiley, 1986.

[13] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. **An Introduction to the Theory of Numbers**, London, Oxford University Press, 1960.

[14] KNOPP, K. **Theory and Application of Infinite Series**, New York, Dover, 1990.

[15] NIVEN, I. & ZUCKERMAN, H. S. **An Introduction to Theory of Numbers**, New York, John Wiley, 1972.

[16] ________, **Mathematics of Choice; How to Count Without Counting**, The Mathematical Association of America, 1965.

[17] PÓLYA, G.; R. E. TARJAN; D. R. WOODS, **Notes on Introductory Combinatorics**, Boston, Birkhäuser, 1983.

[18] RIORDAN, J., ***Combinatorial Identities***, New York, John Wiley, 1968.

[19] ___________, **An Introduction to Combinatorial Analysis**, New Jersey, Princeton, 1978.

[20] ROBERTS, F. S., **Applied Combinatorics**, New Jersey, Prentice-Hall, 1984.

[21] ROSEN, K. H. **Elementary Number Theory and its Applications**, Reading,Mas: Addison Wesley, 1984.

[22] SANTOS, J. P. O.; M. P. MELLO; I. T. C. MURARI, **Introdução à Análise Combinatória**, Campinas, Editora da Unicamp, 1995.

[23] SLOMSON, A. **An Introduction to Combinatorics**, Chapman and Hall, 1991.

[24] TOWNSEND, M. **Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory**, The Benjamin/Cummings, 1987.

[25] TUCKER, A., **Applied Combinatorics**, New York, John Wiley,1984.

[26] VILENKIN, N. Y., **Combinatorics**, New York, Academic Press, 1971.

[27] WHITTAKER, E. T. and G. N. WATSON. **A Course of Modern Analysis**, London, Cambridge University Press, 1958.

[28] WILF, H. S., **Generatingfunctionology**, Boston, Academic Press, 1994.