RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA PLANEJAMENTO FLORESTAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida defendida pelo Sr. MANOEL ARAUJO LOURENÇO TELHADA e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 4/12/86

Miguel Taube Netto
Orientador

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA.

RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA PLANEJAMENTO FLORESTAL

Autor: MANOEL ARAUJO LOURENÇO TELHADA

Orientador: MIGUEL TAUBE NETTO

1986

RESUMO

A partir de alguns métodos de resolução de problemas de Programação Linear com estrutura angular, adaptamos os métodos primal-simplex, dual-simplex e Rosen para resolver um modelo de Programação Linear para planejamento florestal, considerando a sua estrutura matricial.

A meus pais.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Uma empresa florestal tem a necessidade de avaliar, dentro de um horizonte de planejamento, digamos 20 anos, os efeitos de suas decisões quanto às implantações de projetos, compras ou vendas de terras, determinações dos anos de corte dos diferentes projetos florestais, etc. - para poder definir a política de atuação da empresa em cada ano do horizonte.

Procurando atender a esta necessidade, foi criado um modelo matemático de programação linear, o Sistema PLANFLOR - Planejamento Florestal Otimizado. Este sistema gera, a partir dos dados de entrada, os vários planos florestais possíveis, montando um problema de programação linear a ser resolvido pelo pacote de programação MPSX, da IBM.

A finalidade desta dissertação de mestrado é estudar alguns métodos de resolução de problemas de programação linear e adaptá-los para resolver o modelo de planejamento florestal, levando em conta sua estrutura matricial particular.

Nos dois primeiros capítulos, apresentaremos o modelo matemático desenvolvido e as adaptações dos métodos primal-simplex, dual-simplex e Rosen para problemas que possuem matriz de restrições com estrutura semelhante ao do modelo florestal. Em seguida, no terceiro capítulo, adaptaremos os métodos mencionados acima para resolver o problema de planejamento florestal. O quarto capítulo apresenta um exemplo numérico da aplicação do método primal-simplex.

Não é objetivo deste trabalho a programação dos algoritmos desenvolvidos, pois trata-se de um trabalho adicional complexo devido aos problemas numéricos envolvidos, os quais constituem, em si, objeto de novas investigações.

CAPÍTULO 1

MODELO MATEMÁTICO

O modelo de programação linear para planejamento florestal possui restrições determinadas pelas condições de mercado e pelo sistema administrativo. Nós examinaremos estas condições separadamente.

1.1. CONDIÇÕES DE MERCADO

Uma empresa florestal possui várias áreas de plantio, denominadas de projetos florestais, que podem estar em diferentes estados de desenvolvimento. De um ano para outro, os projetos florestais mudam de estado, seguindo algumas regras de sucessão. A Tab. 1 fornece os vários estados para uma floresta de eucaliptos e os possíveis estados no ano seguinte.

Assim, para cada projeto florestal, podemos construir, a partir de um estado inicial, várias seqüências de estados ao longo de um horizonte de planejamento de H anos, seqüências estas que são denominadas de planos florestais.

Para cada plano florestal, podemos determinar o seu custo total e a produção anual de madeira - dado em volume de madeira - caso o plano q seja implantado em toda a área do projeto p. Ou seja, temos os seguintes coeficientes:

d_{pq} : custo total do plano q do projeto p

$a_{pq}(h)$: produção total de madeira no ano h do plano q do projeto p, se toda a área de plantio for ocupada pelo plano q

Em um projeto florestal, podemos implantar um ou mais planos florestais. Por isso, definimos as variáveis X_{pq} que representam a fração de área do projeto p em que o plano q será implantado. É claro que devemos ter:

$$\sum_{q=1}^{Q(p)} X_{pq} \leq 1 \quad \text{para todo } p \tag{1}$$

Nº	CÓDIGO	DESCRIÇÃO	ESTADOS POSSÍVEIS NO ANO SEGUINTE
1	V	Venda da terra logo após o corte.	5
2	B1	Primeiro corte após plantio seguido pela primeira regeneração (primeira rebrota).	21
3	B2	Segundo corte após plantio seguido pela segunda regeneração (segunda rebrota).	31
4	R	Reforma: novo plantio em área cortada; o plantio pode ocorrer no mesmo ano do corte ou até três anos após o corte.	11
5	I	Implantação: plantio em terreno nativo.	11
6	11	1º ano após I ou R.	12
7	12	2º ano após I ou R.	13
8	13	3º ano após I ou R.	14
9	14	4º ano após I ou R.	15,R,C,V,B1
10	15	5º ano após I ou R.	16,R,C,V,B1
11	16	6º ano após I ou R.	17,R,C,V,B1
12	17	7º ano após I ou R.	18,R,C,V,B1
13	18	8º ano após I ou R.	R,C,V,B1
14	21	1º ano após B1.	22
15	22	2º ano após B1.	23
16	23	3º ano após B1.	24
17	24	4º ano após B1.	25,R,C,V,B2
18	25	5º ano após B1.	26,R,C,V,B2
19	26	6º ano após B1.	27,R,C,V,B2
20	27	7º ano após B1.	28,R,C,V,B2
21	28	8º ano após B1.	R,C,V,B2
22	31	1º ano após B2.	32
23	32	2º ano após B2.	33
24	33	3º ano após B2.	34
25	34	4º ano após B2.	35,R,C,V
26	35	5º ano após B2.	36,R,C,V
27	36	6º ano após B2.	37,R,C,V
28	37	7º ano após B2.	38,R,C,V
29	38	8º ano após B2.	R,C,V
30	O	Aguardando implantação.	O,I,V
31	5	Projeto vendido (descartado).	5
32	C	Corte sem plantio no mesmo ano.	R,41
33	41	Um ano após C aguardando R.	42,R
34	42	Dois anos após C aguardando R.	43,R
35	43	Três anos após C aguardando R.	R
36	6	Projeto potencial aguardando eventual compra.	6,I

Tabela 1 -Estados de uma floresta de eucaliptos

Fonte: Taube Netto,M. [8], pp. 23-24.

onde $Q(p)$ é o número total de planos possíveis do projeto p.

Considerando que em cada ano a empresa deve satisfazer uma determinada demanda de madeira $b(h)$, o objetivo da empresa consiste em determinar quais os planos florestais que devem ser implantados, de modo que o custo total seja mínimo e as demandas anuais sejam satisfeitas.

Assim, queremos minimizar a função objetivo:

$$z = \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q(p)} d_{pq} . X_{pq} \qquad (2)$$

onde P é o número total de projetos, sujeito às restrições:

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q(p)} a_{pq}(h) . X_{pq} = b(h) \qquad (h = 1,...,H) \qquad (3)$$

No caso em que a utilização de estoques seja possível, a expressão (3) será modificada para:

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q(p)} a_{pq}(h) . X_{pq} + X_0(h-1) = b(h) + X_0(h) \qquad (4)$$

$$(h = 1,...,H)$$

onde $X_0(h-1)$ e $X_0(h)$ são os estoques de madeira transferidos do ano h-1 para o ano h e do ano h para o ano h+1, respectivamente.

É claro que devemos considerar as despesas com armazenamento na função objetivo, ou seja, sendo $d_0(h)$ o custo de armazenamento por volume de madeira no ano h, temos:

$$z = \sum_{h=1}^{H} d_0(h) . X_0(h) + \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q(p)} d_{pq} . X_{pq} \qquad (5)$$

Note que $X_0(0)$ - quantidade de madeira em estoque antes do horizonte de planejamento - é um dado do problema e que $X_0(h)$, $h = 1,\ldots,H$ são variáveis de decisão do problema.

Ainda devemos considerar o fato de que o tempo de estocagem de madeira não pode ser superior a um ano e, por isso, acrescentamos as seguintes restrições:

$$X_0(h-1) \leq b(h) \qquad (h=2,\ldots,H) \tag{6}$$

Finalmente, devemos ressaltar que as receitas provenientes da venda de terras devem ser levadas em conta nos cálculos de d_{pq} como uma parcela com sinal negativo.

Agora, podemos formular o problema de planejamento florestal, para o caso em que é possível a utilização de estoques, do seguinte modo:

$$\min \quad z = \sum_{h=1}^{H} d_0(h) \cdot X_0(h) + \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q(p)} d_{pq} \cdot X_{pq}$$

s.a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q(p)} a_{pq}(h) \cdot X_{pq} + X_0(h-1) = b(h) + X_0(h) & \text{para } h = 1,\ldots,H \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{Q(p)} X_{pq} \leq 1 & \text{para } p = 1,\ldots,P \\ X_{pq} \geq 0 & \text{para } p = 1,\ldots,P \\ & \phantom{\text{para }} q = 1,\ldots,Q(p) \\ X_0(h-1) \leq b(h) & \text{para } h = 2,\ldots,H \end{cases}$$

1.2. CONDIÇÕES ADMINISTRATIVAS

Além das restrições acima, podemos construir outras restrições para satisfazer certas condições administrativas . Normalmente, a empresa florestal divide seus projetos por unidades de produção, formando núcleos aos quais são especificados, a cada ano, as cotas inferior e superior de participação na produção total da empresa e os limites máximos de crescimento e queda de produção de um ano para outro. Assim, temos:

$$CFI(s,h) \leq \sum_{p=1}^{K(s)} \sum_{q=1}^{Q(p)} a_{pq}(h) \, . \, X_{pq} \leq CFS(s,h) \qquad (7)$$

$$s = 1,\ldots,S$$
$$h = 1,\ldots,H$$

onde

S : número total de núcleos;

K(s) : número total de projetos pertencentes ao núcleo s;

CFI(s,h) : cota fixa inferior de produção do núcleo s no ano h;

CFS(s,h) : cota fixa superior de produção do núcleo s no ano h

e

$$-QM(s,h) \leq \sum_{p=1}^{K(s)} \sum_{q=1}^{Q(p)} [a_{pq}(h)-a_{pq}(h-1)]X_{pq} \leq CM(s,h) \quad (8)$$

$$s = 1,\ldots,S$$
$$h = 1,\ldots,H$$

onde:

QM(s,h) : queda máxima de produção do núcleo s, do ano h-1 para o ano h

CM(s,h) : crescimento máximo de produção do núcleo s, do ano h-1 para o ano h

$a_{pq}(0)$: produção do projeto p no primeiro ano anterior ao horizonte de planejamento.

As restrições (8) podem ser apresentadas em termos percentuais, ou seja:

$$\sum_{p=1}^{K(s)} \sum_{q=1}^{Q(p)} \{100\ a_{pq}(h) - [100 + \alpha(s,h)]a_{pq}(h-1)\}\ X_{pq} \leq 0 \qquad (9)$$

$$s = 1,\ldots,S$$
$$h = 1,\ldots,H$$

onde:

$\alpha(s,h)$: porcentagem máxima de crescimento da produção do núcleo s, do ano h-1 para o ano h

e

$$\sum_{p=1}^{K(s)} \sum_{q=1}^{Q(p)} \{[100 - \beta(s,h)].a_{pq}(h-1) - 100.a_{pq}(h)\}X_{pq} \leq 0 \qquad (10)$$

$$s = 1,\ldots,S$$
$$h = 1,\ldots,H$$

onde $\beta(s,h)$: porcentagem máxima da queda de produção do núcleo s, do ano h-1 para o ano h.

Acrescentando as restrições (7),(8),(9) e (10) ao problema de planejamento florestal, obtemos um problema de programação linear que representado na forma matricial, será do seguinte tipo:

$$\min\ d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + \ldots + d_S X_S$$

$$\text{s.a}\left|\begin{array}{l} A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_S X_S = b_0 \\ \qquad B_1 X_1 = b_1 \\ \qquad\qquad B_2 X_2 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad B_S X_S = b_S \\ 0 \leq X_0 \leq b_0 \\ X_s \geq 0 \quad (s = 1,\ldots,S) \end{array}\right.$$

onde:

$$B_s = \begin{bmatrix} C_{s1} & C_{s2} & \ldots & C_{sK(s)} \\ \mathbb{1} & & & \\ & \mathbb{1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{1} \end{bmatrix} ; \quad b_s = \begin{bmatrix} b_{s0} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$s = 1, \ldots, S$

e sendo:

X_o : vetor cujos elementos são as variáveis de estoque

X_s : vetores cujos elementos são as variáveis que representam fração de área; $s = 1, \ldots S$

A_s : matrizes relativas às restrições (4); $s = 0, 1 \ldots S$

C_{sp}: matrizes relativas às restrições (7), (8), (9), (10), $p = 1, \ldots K(s)$, $s = 1, \ldots S$

$\mathbb{1}$: vetores linhas, cujos elementos são iguais a 1, que são relativos às restrições dadas por (1).

CAPÍTULO 2

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM ESTRUTURA ANGULAR

O problema de planejamento florestal obtido no Cap. 1 nos remete à classe de problemas de Programação Linear com estrutura angular. Neste capítulo, apresentaremos alguns métodos existentes para resolvê-los.

2.1. MÉTODO G.U.B. (Generalized Upper Bounding)

Este método, desenvolvido por Dantzig e Van Slyke [3], é uma adaptação do método simplex revisado aos problemas com estrutura linha-angular, ou seja, problemas do seguinte tipo:

$$P1: \quad \min \; d_1 X_1 + d_2 X_2 + \dots + d_S X_S \qquad (1)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_S X_S = b_0 & (2) \\ \mathbb{1} X_1 = 1 & \\ \qquad \mathbb{1} X_2 = 1 & (3) \\ \qquad\qquad \ddots \quad \mathbb{1} X_S = 1 & \\ X_1, X_2, \dots, X_S \geq 0 & (4) \end{cases}$$

onde

d_s : vetores linha com n_s elementos; $s = 1,\dots,S$

A_s : matrizes de dimensões $m \times n_s$; $s = 1,\dots,S$

b_0 : vetor coluna com m elementos

$\mathbb{1}$: vetor linha cujos elementos são iguais a 1.

Seja R_s, $s = 1,\dots,S$, o conjunto dos índices das colunas cujas variáveis correspondentes pertençam ao vetor X_s.

Para que uma base do problema P1 tenha posto completo, é necessário que cada conjunto R_s, $s = 1,\dots,S$, possua pelo menos um índice cuja coluna pertença à base.

De fato, se a base não tivesse uma coluna de um conjunto, digamos R_k, então a (m+k)-ésima linha da base teria todos os elementos iguais a zero e o posto não seria completo.

Desse modo, uma base $\mathfrak{A}^B$ do problema P1 pode ser particionada da seguinte forma:

$$\mathfrak{A}^B = \left[\begin{array}{c|c} A^L & A^I \\ \hline D & E \end{array}\right] \tag{5}$$

onde

I : conjunto de índices das colunas chaves, isto é, das S colunas, escolhidas de cada um dos S conjuntos R_k, que garantem que a matriz básica seja não singular;

L : conjunto de índices das colunas não chaves;

$B = L \oplus I$;

A^L : matriz de dimensões m x m;

A^I : matriz de dimensões m x S;

D : matriz de dimensão S x m, onde cada coluna tem um elemento igual a 1 e os demais iguais a zero;

E : matriz identidade de dimensões S x S.

As restrições dadas por (3) nos permite escrever as variáveis correspondentes às colunas chaves em relação às demais variáveis, ou seja:

$$X_s^I = 1 - \sum_{j \notin I} (X_s)_j ; \quad (s = 1,\ldots,S) \tag{6}$$

onde X_s^I é a variável do vetor X_s cujo índice pertence ao conjunto I.

Note que cada vetor X_s, $s = 1,\ldots,S$, tem apenas uma variável com índice no conjunto I.

Substituindo a expressão (6) em (1) e (2), obtemos o seguinte problema reduzido:

$$PR : \min \tilde{d}_1 X_1^J + \tilde{d}_2 X_2^J + \ldots + \tilde{d}_S X_S^J$$

s.a

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 X_1^J + \tilde{A}_2 X_2^J + \ldots + \tilde{A}_S X_S^J = \tilde{b}_0 \\ X_1^J, X_2^J, \ldots, X_S^J \geq 0 \end{cases}$$

onde

J : conjunto dos índices das colunas da matriz de restrições que não pertencem ao conjunto I.

$$\tilde{d}_s = [(\tilde{d}_s)_j] \; ; \; (\tilde{d}_s)_j = (d_s)_j - d_s^I \quad ; \quad p/j \in J$$

$$\tilde{A}_s = [(\tilde{A}_s)^j] \; ; \; (\tilde{A}_s)^j = (A_s)^j - A_s^I \quad ; \quad p/j \in J$$

$$X_s^J = [(X_s)_j] \qquad ; \; p/j \in J$$

$$\tilde{b}_0 = b_0 - \sum_{s=1}^{S} A_s^I$$

sendo

d_s^I : coeficiente de custo cujo índice pertence ao conjunto R_s e ao conjunto I

A_s^I : coluna da matriz A_s cujo índice pertence ao conjunto I

X_s^I : variável cujo índice pertence ao conjunto R_s e ao conjunto I.

Nós podemos obter uma base para o problema reduzido a partir de uma base do problema P1.

De fato, seja:

$$V = \left[\begin{array}{c|c} E_1 & 0 \\ \hline -D & E \end{array}\right] \tag{7}$$

onde E_1 é a matriz identidade com dimensão m x m.

Pós-multiplicando a matriz básica pela matriz V, temos:

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{B} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}^{L} & A^{I} \\ \hline 0 & E \end{array}\right] \tag{8}$$

onde $\tilde{A}^{L}$ é dada por:

$$\tilde{A}^{L} = A^{L} - A^{I} \cdot D \tag{9}$$

Como vimos, a matriz $\tilde{\mathfrak{A}}^{B}$ é dada por:

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{B} = \mathfrak{A}^{B} \cdot V$$

Mas sabemos que det $\mathfrak{A}^{B} \neq 0$ e podemos ver que det V=1. Logo, det $\tilde{\mathfrak{A}}^{B} \neq 0$, o que implica em det $\tilde{A}^{L} \neq 0$.

Este resultado nos mostra que a matriz $\tilde{A}^{L}$ é uma base do problema reduzido.

A matriz $\tilde{A}^{L}$ é chamada de base de trabalho do problema P1 e podemos utilizá-la para calcular todos os passos do método simplex, com a vantagem de que a matriz $\tilde{A}^{L}$ tem dimensão menor que a matriz básica $\mathfrak{A}^{B}$.

Não apresentaremos aqui todas as operações do método simplex utilizando a base de trabalho, remetendo o leitor a Lasdon [4]. Para nosso propósito, que é resolver o problema de planejamento florestal, apenas mostraremos a representação de uma coluna em relação à base.

Sejam $\mathfrak{A}^{j}$ uma coluna tal que $j \in R_k$ e $\mathfrak{A}^{B}$ uma base do problema P1. Nós queremos calcular:

$$\hat{\mathfrak{A}}^{j} = (\mathfrak{A}^{B})^{-1} \cdot \mathfrak{A}^{j}$$

que é equivalente a

$$\mathfrak{A}^{B} \, . \, \hat{\mathfrak{A}}^{j} = \mathfrak{A}^{j} \tag{10}$$

Seja

$$\hat{\mathfrak{A}}^{j} = V \, . \, Z^{j} \tag{11}$$

onde V é a matriz dada por (7).

Substituindo (11) em (10), temos:

$$[\mathfrak{A}^{B} \, . \, V] \; Z^{j} = \mathfrak{A}^{j}$$

ou seja,

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{B} \, . \, Z^{j} = \mathfrak{A}^{j}$$

que é idêntico a

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}^{L} & A^{I} \\ \hline 0 & E \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} Z^{j}_{1} \\ \vdots \\ Z^{j}_{m} \\ \cdots\cdots \\ Z^{j}_{m+1} \\ \vdots \\ Z^{j}_{m+S} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A^{j} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{posição } k \\ \\ \\ \end{array} \tag{12}$$

Das S últimas equações, temos:

$$\begin{cases} Z^{j}_{m+i} = 0 & 1 \leq i \leq S \;,\; i \neq k \\ Z^{j}_{m+k} = 1 & \end{cases} \tag{13}$$

Substituindo estes valores nas primeiras m equações, temos:

$$\tilde{A}^L \cdot \begin{bmatrix} z_1^j \\ \vdots \\ z_m^j \end{bmatrix} + A_k^I = A^j$$

Definindo

$$\bar{Z}^j = \begin{bmatrix} z_1^j \\ \vdots \\ z_m^j \end{bmatrix},$$

da expressão acima obtemos:

$$\bar{Z}^j = (\tilde{A}^L)^{-1} [A^j - A_k^I] \tag{14}$$

Combinando este resultado com a expressão (11), podemos calcular:

$$\hat{\mathfrak{A}}^j = \begin{bmatrix} \hat{A}_1^j \\ \vdots \\ \hat{A}_m^j \\ \hline \hat{A}_{m+1}^j \\ \vdots \\ \hat{A}_{m+S}^j \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} E_1 & 0 \\ \hline -D & E \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{Z}^j \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{posição } k \\ \\ \\ \end{array} \tag{15}$$

Sabendo que o índice da t-ésima coluna da matriz D pertence ao conjunto $R_{r(t)}$, então a t-ésima coluna da matriz -D possui um elemento igual a -1 na posição r(t) e zeros nas demais posições. Assim, ao fazermos o produto escalar da i-ésima linha da matriz -D com $\bar{Z}^j$, teremos um valor diferente de zero sempre que r(t) for igual a i.

Portanto, se definirmos o conjunto:

$$\psi(i) = \{t/t \in (1,2,\ldots m); r(t) = i\} \tag{16}$$

os elementos do vetor $\hat{\mathfrak{A}}^j$ serão dados por:

$$\hat{\mathfrak{A}}_i^j = \bar{z}_i^j \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$\hat{\mathfrak{A}}_{m+i}^j = \begin{cases} -\sum\limits_{t\varepsilon\psi(i)} \bar{z}_t^j & p/\ i = 1,\ldots,S\ ;\ i \neq k \\ 1 - \sum\limits_{t\varepsilon\psi(i)} \bar{z}_t^j & p/\ i = k \end{cases} \tag{17}$$

De maneira análoga para o vetor b igual a

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

teríamos

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hline \hat{b}_{m+1} \\ \vdots \\ \hat{b}_{m+S} \end{bmatrix} \tag{18}$$

onde

$$\hat{b}_0 = (\tilde{A}^L)^{-1} [b_0 - \sum_{s=1}^{S} A_s^I] \tag{19}$$

$$\hat{b}_{m+i} = 1 - \sum_{t\varepsilon\psi(i)} (\hat{b}_0)_t \quad ; \quad i = 1,\ldots,S \tag{20}$$

2.2. MÉTODO G.G.U.B. (Generalized Generalized Upper Bounding)

O problema a ser resolvido é do seguinte tipo:

P2: $$\min \quad d_1 X_1 + d_2 X_2 + \dots + d_S X_S \tag{1}$$

s.a

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_S \\ B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & B_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_S \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$X_1 \, , \, X_2 \, , \dots , \, X_S \geq 0 \tag{3}$$

onde:

d_s : vetor linha com n_s elementos; $s = 1,\dots,S$

A_s : matriz de dimensões $m_0 \times n_s$; $s = 1,\dots,S$

B_s : matriz de dimensões $m_s \times n_s$; $s = 1,\dots,S$

b_s : vetor coluna com m_s elementos ; $s = 0,1,\dots,S$

$$m = \sum_{s=1}^{S} m_s \qquad\qquad n = \sum_{s=1}^{S} n_s$$

O método G.G.U.B. é uma adaptação do método simplex revisado para problemas cuja matríz de restrições possui a estrutura dada acima, istó é, possui estrutura bloco-angular.

Para representarmos este método, seguiremos o procedimento adotado por Ribeiro em sua tese de doutorado [7].

O princípio deste método é semelhante ao do método G.U.B., ou seja, a partir de um conjunto de colunas chaves, isolamos as variáveis $X_s^{I_s}$, $s = 1,\dots,S$, onde I_s é o conjunto de índices das colunas chaves que pertencem ao bloco s, e construímos um problema reduzido, obtendo uma base de trabalho $\tilde{A}^L$.

A seguir, descreveremos este processo mais detalhadamente.

Para que a matriz de restrições seja não-singular, é necessário supor que as matrizes B_s, $s = 1,\ldots,S$, tenham posto completo. Assim, nós podemos formar bases para o problema P2 que, particionadas em colunas chaves (conjunto I) e colunas não chaves (conjunto L), são do tipo:

$$\mathfrak{A}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} A^L & A^I \\ \hline B^L & B^I \end{array}\right] \tag{4}$$

onde

$$A^I = [A_1^{I_1} \quad A_2^{I_2} \quad \ldots \quad A_S^{I_S}] \tag{5}$$

$$B^I = \begin{bmatrix} B_1^{I_1} & & & \\ & B_2^{I_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_S^{I_S} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Uma vez que a matriz básica é não singular, é sempre possível ordenar as suas colunas de modo que as matrizes $B_s^{I_s}$, $s = 1,\ldots,S$, tenham posto completo. Com isso, a matriz B^I é não singular.

Reescrevendo o problema P2 com a matriz de restrições particionadas em colunas não chaves, chaves e não básicas, temos:

$$\min \quad d^L X^L + d^I X^I + d^{\overline{\mathcal{B}}} X^{\overline{\mathcal{B}}}$$

$$\text{s.a} \quad \left[\begin{array}{c|c|c} A^L & A^I & A^{\overline{\mathcal{B}}} \\ \hline B^L & B^I & B^{\overline{\mathcal{B}}} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} X^L \\ X^I \\ X^{\overline{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} b_0 \\ \hline b \end{array}\right] \begin{array}{l} m_0 \\ m \end{array}$$

$$X^L, X^I, X^{\overline{\mathcal{B}}} \geq 0$$

onde

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_S \end{bmatrix}$$

e $\overline{\mathcal{B}}$ é o conjunto de índices das colunas não básicas.

As primeiras m_0 restrições são chamadas de restrições globais ou de acoplamento e as demais, de restrições locais.

Do conjunto de restrições locais, nós temos:

$$X^I = (B^I)^{-1} \, (b - B^L X^L - B^{\overline{\mathcal{B}}} X^{\overline{\mathcal{B}}}) \tag{7}$$

que, substituindo no conjunto de restrições globais e na função objetivo, nos fornece o seguinte problema reduzido:

PR: $\quad \min \; \tilde{d}^L X^L + \tilde{d}^{\overline{\mathcal{B}}} X^{\overline{\mathcal{B}}}$

s.a

$$\begin{cases} \tilde{A}^L X^L + \tilde{A}^{\overline{\mathcal{B}}} X^{\overline{\mathcal{B}}} = \tilde{b}_0 \\ \\ X^L, X^{\overline{\mathcal{B}}} \geq 0 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{d}^L &= d^L - d^I (B^I)^{-1} B^L \\ \tilde{d}^{\overline{\mathcal{B}}} &= d^{\overline{\mathcal{B}}} - d^I (B^I)^{-1} B^{\overline{\mathcal{B}}} \\ \tilde{A}^L &= A^L - A^I (B^I)^{-1} B^L \\ \tilde{A}^{\overline{\mathcal{B}}} &= A^{\overline{\mathcal{B}}} - A^I (B^I)^{-1} B^{\overline{\mathcal{B}}} \\ \tilde{b}_0 &= b_0 - A^I (B^I)^{-1} b \end{aligned} \tag{8}$$

Com esta operação, a matriz básica $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}$ foi transformada em:

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}^L & 0 \\ \hline \hat{B}^L & E \end{array}\right] \tag{9}$$

onde

$$\tilde{B}^L = (B^I)^{-1} B^L$$

E : é a matriz identidade de ordem m.

Como a matriz $\tilde{\mathfrak{A}}^B$ foi obtida por transformações de pivotamento a partir da matriz $\mathfrak{A}^B$ que tem posto completo, então a matriz $\tilde{\mathfrak{A}}^B$ tem posto completo, o que implica em posto $(\tilde{A}^L) = m_0$. Ou seja, $\tilde{A}^L$ é uma base do problema reduzido.

Utilizando as matrizes $\tilde{A}^L$ e $B_s^{I^s}$, s = 1,...,S, podemos desenvolver todos os passos do método primal-simplex, cujos detalhes podem ser vistos em [7].

2.3. MÉTODO DUAL-SIMPLEX PARA RESOLVER PROBLEMAS COM ESTRUTURA BLOCO ANGULAR

Ribeiro [7] desenvolveu o método dual-simplex para resolver problemas com estrutura bloco-angular, como o problema P2 da seção anterior.

Como nas seções anteriores, apresentaremos o princípio básico do método, indicando a tese de doutorado de Ribeiro [7] para maiores detalhes.

Seja π_0 o vetor cujos elementos são as variáveis duais correspondentes às restrições de acoplamento.

Do problema P2, para um valor arbitrário de π_0, podemos construir o seguinte problema:

$$\min \quad d' X$$
$$\text{s.a} \begin{cases} B \quad X = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

onde

$$d' = d - \pi_0 A$$

Este problema pode ser particionado nos seguintes problemas auxiliares:

$$(PAP)_s \begin{cases} \min \; d'_s X_s \\ \text{s.a} \\ \quad \begin{cases} B_s X_s = b_s \\ X_s \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad s = 1,\ldots,S$$

Dos problemas auxiliares, nós podemos obter o conjunto I de colunas chaves e as bases $B_s^{I_s}$, $s = 1,\ldots,S$, duais- factíveis.

Com estas matrizes, podemos construir o problema reduzido:

$$PR: \quad \begin{cases} \min \; \tilde{d}^J X^J \\ \text{s.a} \\ \quad \begin{cases} \tilde{A}^J X^J = \tilde{b}_0 \\ X^J \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

onde

J : conjunto dos índices das colunas da matriz de restrições que não pertencem ao conjunto I.

$$\tilde{d}^J = d^J - d^I (B^I)^{-1} B^J$$

$$\tilde{A}^J = A^J - A^I (B^I)^{-1} B^J$$

$$\tilde{b}_0 = b_0 - A^I (B^I)^{-1} b$$

Note que no problema reduzido nós relaxamos a restrição $X^I \geq 0$.

Do problema reduzido, obtemos uma base dual-factível

$\tilde{A}^L$ e um conjunto L de colunas não chaves que, junto com as colunas chaves, formam uma base dual-factível para o problema original.

Utilizando a matriz de trabalho $\tilde{A}^L$ e as matrizes $B_s^{I_s}$, $s = 1,\ldots,S$, podemos calcular os valores das variáveis básicas. Se tivermos $X^{\beta} \geq 0$, então a solução é ótima; caso contrário, determinamos as colunas a sair e a entrar na base, obtendo uma nova base dual-factível.

2.4. MÉTODO DE ROSEN

Assim como o método anterior, este método trabalha com bases duais-factíveis.

A partir de um vetor π_0 arbitrário, podemos construir os problemas auxiliares cuja resolução nos fornece as bases $B_s^{I_s}$, $s = 1,\ldots,S$, e as soluções $X_s^{I_s} = (B_s^{I_s})^{-1}\, b_s \geq 0$; $s = 1,\ldots,S$.

Com isso, construímos o problema reduzido de onde obtemos a solução $X^L = (\tilde{A}^L)^{-1}\, \tilde{b}_0 \geq 0$.

Mas das restrições locais, temos:

$$X_s^{I_s} = (B_s^{I_s})^{-1}\,(b_s - B_s^{L_s}\, X_s^{L_s}) \quad s = 1,\ldots,S$$

onde L_s é o conjunto de índices do conjunto L cuja coluna pertence ao bloco s.

Substituindo o valor de $X_s^{L_s}$ nas equações acima, nós obtemos os novos valores $X_s^{I'_s}$ das variáveis correspondentes às colunas chaves. Se $X_s^{I'_s} \geq 0$ para todo s, então a solução é ótima porque os conjuntos de colunas chaves e não chaves formam uma base dual-factível para o problema original e temos $X^{\beta} \geq 0$, onde $\beta = L \oplus I$.

Se $X_s^{I'_s} \not\geq 0$ para algum s, podemos construir as seguintes problemas:

$$(P_s) \quad \begin{cases} \min \sum_{j \in \gamma_s} (X_s^{B_s})_j & (1) \\ \text{s.a} \begin{cases} B_s^{B_s} \cdot X_s^{B_s} = b_s & (2) \\ X_s^{B_s} \geq 0 & (3) \end{cases} \end{cases}$$

para s = 1,...,S e s tal que $X_s^{I'_s} \not\geq 0$,

onde

$$\gamma_s = \{j / (X_s^{B_s})_j < 0\}$$

É possível provar (ver Lasdon [3]) que a partir da matriz $B_s^{I_s}$, podemos permutar as colunas do conjunto B_s obtendo novas bases para o problema P_s. Assim, resolvendo estes problemas, obtemos novas matrizes $B_s^{I_s}$ com as quais construimos outro problema reduzido, iniciando uma nova iteração.

CAPÍTULO 3

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO FLORESTAL

Neste capítulo, os método primal-simplex , dual - simplex e o método de Rosen, descritos no capítulo anterior, serão adaptados para resolver o problema de programação linear decorrente do modelo de planejamento florestal, apresentado no primeiro capítulo.

A descrição dos dois primeiros métodos seguirá, basicamente, a ordem de exposição de Ribeiro [7], sendo que a inclusão das variáveis de estoque, X_0, e a estrutura das matrizes bloco-angulares, exigirão um tratamento específico em certas passagens, principalmente no processo de atualização das bases.

Quanto ao método de Rosen, apenas chamaremos a atenção para algumas particularidades que surgem quando utilizamos o método para resolver o problema florestal.

3.1. MÉTODO PRIMAL-SIMPLEX

Acrescentando as variáveis de folga ao problema de planejamento florestal, obtemos um problema do seguinte tipo:

PF: $$\min \ \mathfrak{d}\begin{bmatrix} X_0 \\ X \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{A}\begin{bmatrix} X_0 \\ X \end{bmatrix} = \mathfrak{b} & (2) \\ 0 \leq X_0 \leq \mu & (3) \\ X \geq 0 & (4) \end{array} \right.$$

sendo

$$\mathfrak{d} = [d_0 \quad d_1 \quad d_2 \; \ldots \; d_S]$$

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_S \\ & B_1 & & & \\ & & B_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_S \end{bmatrix} \; ; \quad \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_S \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_S \end{bmatrix}$$

onde

d_s : vetor linha com n_s elementos ; $s = 0,1,\ldots,S$

A_s : matriz de dimensões $m_0 \times n_s$; $s = 0,1,\ldots,S$

B_s : matriz de dimensões $m_s \times n_s$; $s = 1,\ldots,S$

b_s : vetor coluna com m_s elementos ; $s = 0,1,\ldots,S$

$$m = \sum_{s=1}^{S} m_s \qquad\qquad n = \sum_{s=0}^{S} n_s$$

e ainda

$$B_s = \begin{bmatrix} c_{s1} & c_{s2} & \ldots & c_{sK(s)} \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad b_s = \begin{bmatrix} b_{s0} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde

C_{sj} : matriz de dimensões $\bar{m}_s \times n_{sj}$; $j = 1,\ldots,K(s)$

b_{s0} : vetor coluna com $\bar{m}_s$ elementos

$\mathbf{1}$: vetor linha cujos elementos são iguais a 1

$$m_s = \bar{m}_s + K(s)$$

$$n_s = \sum_{j=1}^{K(s)} n_{sj}$$

Agora, definiremos os seguintes conjuntos:

U_s : conjunto dos índices das colunas da matriz $\mathfrak{A}$ que pertecem à submatriz $\mathfrak{A}_s$ dada por

$$\mathfrak{A}_s = \begin{bmatrix} A_s \\ \hline 0 \\ \hline B_s \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad s = 1,\ldots,S$$

R_{sj} : conjunto dos índices que pertencem ao conjunto U_s e cujas colunas tenham um elemento igual a 1 na $(\bar{m}_s + j)$-ésima posição da matriz B_s, $s = 1,\ldots,S$ e $j = 1,\ldots,K(s)$.

Para que a matriz $\mathfrak{A}$ tenha posto completo, é necessário que as matrizes B_s, $s = 1,\ldots,S$ sejam não-singulares. Admitamos esta hipótese, o que nos permite construir uma matriz básica $\mathfrak{A}^B$ para o problema (PF).

Sejam:

$\mathcal{B}_s$: conjunto dos índices das colunas básicas que pertencem ao conjunto U_s ; $s = 1,\ldots,S$.

$\overline{\mathcal{B}}_s$: conjunto complementar de $\mathcal{B}_s$ em relação ao conjunto U_s (colunas não básicas); $s = 1,\ldots,S$.

$U_s = \mathcal{B}_s \oplus \overline{\mathcal{B}}_s$; $s = 1,\ldots,S$

partição s : submatriz formada por m_s linhas da matriz básica $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}$ que contêm todos os elementos da submatriz $B_s^{\mathcal{B}_s}$.

Note que os elementos diferentes de zero da partição s necessariamente pertencem às colunas com índices no conjunto $\mathcal{B}_s$.

partição s : $[0\vdots\ldots\vdots B_s^{\mathcal{B}_s}\vdots\ldots\vdots 0]$

Com as definições acima, podemos demonstrar os seguintes teoremas:

Teorema 1: Toda matriz básica $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}$ do problema (PF) é tal que posto $[B_s^{\mathcal{B}_s}] = m_s$, $s = 1,\ldots,S$.

Dem. : Dada uma partição s, os únicos elementos diferentes de zero serão os elementos da matriz $B_s^{\mathcal{B}_s}$. Suponhamos que o posto de $B_s^{\mathcal{B}_s}$ seja inferior a m_s; isto implica que as linhas de $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}$ na partição s são linearmente dependentes, o que é impossível, uma vez que $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}$ é uma base.

Teorema 2: Toda matriz $B_s^{\mathcal{B}_s}$, $s = 1,\ldots,S$, possui pelo menos uma coluna cujo índice pertence ao conjunto R_{sj}, para todo $j = 1,\ldots,K(s)$.

Dem. : Suponhamos que a matriz $B_s^{\mathcal{B}_s}$ não possua colunas com índices no conjunto R_{sk}; isto significa que a linha

$\overline{m}_s + k$ possui todos os elementos iguais a zero, o que é impossível, dado que o posto da matriz $B_s^{\mathcal{B}_s}$ é igual a m_s.

Os Teoremas 1 e 2 nos permitem particionar a matriz básica $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}$ da seguinte forma:

$$\mathfrak{A}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|cccc} A_0^L & A^L & A_1^{I_1} & A_2^{I_2} & \cdots & A_S^{I_S} \\ \hline & & B_1^{I_1} & & & \\ & B^L & & B_2^{I_2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_S^{I_S} \end{array}\right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c} A_0^L & A^L & A^I \\ \hline & B^L & B^I \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_0^L & \mathfrak{A}^L & \mathfrak{A}^I \end{array} \end{array}$$

sendo

$[A_0^L \vdots A^L]$: matriz de ordem $m_0 \times m_0$

$B_s^{I_s}$: matriz de ordem $m_s \times m_s$; $s = 1,\ldots,S$

L : conjunto dos índices das coluna da matriz $[\mathfrak{A}_0^L \vdots \mathfrak{A}^L]$ (colunas não chaves da matriz básica).

I : conjunto dos índices das colunas da matriz $\mathfrak{A}^I$ (colunas chaves da matriz básica).

I_s : conjunto dos índices das colunas chaves que pertencem ao conjunto U_s; $s = 1,\ldots,S$.

$I = I_1 \oplus I_2 \oplus I_S$

$\mathcal{B} = L \oplus I$

Além disso, as submatrizes $\mathfrak{A}^{I_s}$ dadas por:

$$\mathcal{A}^{I_s} = \left[\begin{array}{c} A_s^{I_s} \\ \hline 0 \\ \hline B_s^{I_s} \\ \hline 0 \end{array}\right] \quad ; \; s = 1,\dots,S$$

estão com as colunas ordenadas de modo que os elementos da matriz $B_s^{I_s}$ apresentem a seguinte disposição:

$$B_s^{I_s} = \left[\begin{array}{c|c} C_s^{L(I_s)} & C_s^{I(I_s)} \\ \hline D_s & E_s \end{array}\right] \quad ; \; s = 1,\dots,S$$

onde:

$L(I_s)$: conjunto dos índices das colunas não chaves de matriz $B_s^{I_s}$, $s = 1,\dots,S$

$I(I_s)$: conjunto dos índices das colunas chaves da matriz $B_s^{I_s}$; $s = 1,\dots,S$

$I_s = L(I_s) \oplus I(I_s)$; $s = 1,\dots,S$

$C_s^{L(I_s)}$: matriz de dimensões $\overline{m}_s \times \overline{m}_s$

$C_s^{I(I_s)}$: matriz de dimensões $\overline{m}_s \times K(s)$

D_s : matriz de dimensões $K(s) \times \overline{m}_s$, onde cada coluna possui um elemento igual a 1 e os demais iguais a zero

E_s : matriz identidade de ordem $K(s) \times K(s)$.

Antes de prosseguirmos, definiremos os seguintes conjuntos:

L_0 : conjuntos dos índices das colunas da matriz básica correspondentes às variáveis X_0

L_s : conjunto de índices das colunas da matriz básica que pertencem ao conjunto L e ao conjunto U_s, s= 1,...,S

$\bar{\mathcal{B}}_0$: conjunto dos índices das colunas não básicas cujas variáveis pertencem ao vetor X_0

$$L : L_0 \oplus L_1 \oplus \ldots \oplus L_S$$

$$\mathcal{B} : L_0 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_S$$

$$\mathcal{B}_s : L_s \oplus I_s \;;\; s = 1,\ldots,S$$

$$\bar{\mathcal{B}} : \bar{\mathcal{B}}_0 \oplus \bar{\mathcal{B}}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{\mathcal{B}}_S$$

Para uma dada matriz básica, podemos escrever a matriz $\mathfrak{A}$ particionada em colunas não chaves, chaves e não básicas e dividir o sistema (2) em um sistema de restrições globais e um sistema de restrições locais.

Temos então, para as restrições globais:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} d_0^L & d^L & d^I & d_0^{\bar{\mathcal{B}}} & d^{\bar{\mathcal{B}}} \\ \hline A_0^L & A^L & A^I & A_0^{\bar{\mathcal{B}}} & A^{\bar{\mathcal{B}}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} X_0^L \\ X^L \\ X^I \\ X_0^{\bar{\mathcal{B}}} \\ X^{\bar{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} z \\ \hline b_0 \end{array}\right] \tag{5}$$

e para as restrições locais:

$$[B^L \;\vdots\; B^I \;\vdots\; B^{\bar{\mathcal{B}}}] . \begin{bmatrix} X^L \\ X^I \\ X^{\bar{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} = b \tag{6}$$

O Teorema 1 garante que a matriz $B_s^{\mathcal{B}_s} = [B_s^{L_s} \vdots B_s^{I_s}]$; $s = 1,\ldots,S$, tem posto igual a m_s. Portanto, é sempre possível particionar a matriz básica de modo que a matriz $B_s^{I_s}$ seja não-singular, o que significa que B^I é não-singular.

Pré-multiplicando (6) por $(B^I)^{-1}$, temos:

$$[\hat{B}^L \vdots E \vdots \hat{B}^{\overline{\mathcal{B}}}] \begin{bmatrix} X^L \\ X^I \\ X^{\overline{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} = \hat{b} \tag{7}$$

onde:

$$\hat{B}^L = (B^I)^{-1} B^L$$

$$\hat{B}^{\overline{\mathcal{B}}} = (B^I)^{-1} B^{\overline{\mathcal{B}}}$$

$$\hat{b} = (B^I)^{-1} b$$

De (7) obtemos:

$$X^I = \hat{b} - \hat{B}^L X^L - \hat{B}^{\overline{\mathcal{B}}} X^{\overline{\mathcal{B}}} \tag{8}$$

que, substituindo em (5), fornece o seguinte problema reduzido:

PR:
$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} d_0^L & \tilde{d}^L & 0 & d_0^{\overline{\mathcal{B}}} & \tilde{d}^{\overline{\mathcal{B}}} \\ \hline A_0^L & \tilde{A}^L & 0 & A_0^{\overline{\mathcal{B}}} & \tilde{A}^{\overline{\mathcal{B}}} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} X_0^L \\ X^L \\ X^I \\ X_0^{\overline{\mathcal{B}}} \\ X^{\overline{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \tilde{z} \\ \hline \tilde{b}_0 \end{array}\right]$$

onde:

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}^L &= d^L - d^I\,\hat{B}^L \\
\tilde{d}^{\overline{B}} &= d^{\overline{B}} - d^I\,\hat{B}^{\overline{B}} \\
\tilde{A}^L &= A^L - A^I\,\hat{B}^L \\
\tilde{A}^{\overline{B}} &= A^{\overline{B}} - A^I\,\hat{B}^{\overline{B}} \\
\tilde{z} &= z - d^I\,\hat{b} \\
\tilde{b}_0 &= b_0 - A^I\,\hat{b}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Seja $\tilde{A}_0^L = [A_0^L \vdots \tilde{A}^L]$

<u>Teorema 3</u> : A matriz $\tilde{A}_0^L$ ê não-singular.

<u>Dem.</u> : A matriz básica $\mathcal{A}^B$ sofreu transformações de pivotamento que não modificam o posto da matriz. A nova matriz que tem posto igual a $m_0 + m$, pode ser escrita na forma:

$$
\left[\begin{array}{c|c|c}
A_0^L & \tilde{A}^L & 0 \\
\hline
0 & \hat{B}^L & E
\end{array}\right]
$$

Como a matriz identidade tem posto igual a m, a matriz $\tilde{A}_0^L$ tem posto igual a m_0, sendo, portanto, não singular.

Pré-multiplicando as restrições do problema reduzido por $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$, obtemos:

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
d_0^L & \tilde{d}^L & 0 & d_0^{\overline{B}} & \tilde{d}^{\overline{B}} \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{E_0} & 0 & \hat{A}_0^{\overline{B}} & \hat{\tilde{A}}^{\overline{B}}
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} x_0^L \\ x^L \\ x^I \\ x_0^{\overline{B}} \\ x^{\overline{B}} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{c} \tilde{z} \\ \hline \hat{\tilde{b}}_0 \end{array}\right]
$$

de onde tiramos

$$\begin{bmatrix} X_0^L \\ X^L \end{bmatrix} = \hat{\tilde{b}}_0 - \hat{\tilde{A}}_0^{\overline{B}} \; X_0^{\overline{B}} - \hat{\tilde{A}}^{\overline{B}} \; X^{\overline{B}} \tag{10}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{A}}_0^{\overline{B}} &= (\tilde{A}_0^L)^{-1} \; A_0^{\overline{B}} \\ \hat{\tilde{A}}^{\overline{B}} &= (\tilde{A}_0^L)^{-1} \; \tilde{A}^{\overline{B}} \\ \hat{\tilde{b}}_0 &= (\tilde{A}_0^L)^{-1} \; \tilde{b}_0 \end{aligned} \tag{11}$$

Sejam:

F_0 : conjunto dos índices das linhas do vetor dado por (10) correspondentes às variáveis X_0^L

F_1 : conjunto dos índices das linhas do vetor dado por (10) correspondentes às variáveis X^L

Com isso, podemos particionar a expressão (10) da seguinte maneira:

$$X_0^L = [\hat{\tilde{b}}_0]_{F_0} - [\hat{\tilde{A}}_0^{\overline{B}}]_{F_0} \; X_0^{\overline{B}} - [\hat{\tilde{A}}^{\overline{B}}]_{F_0} \; X^{\overline{B}} \tag{10a}$$

$$X^L = [\hat{\tilde{b}}_0]_{F_1} - [\hat{\tilde{A}}_0^{\overline{B}}]_{F_1} \; X_0^{\overline{B}} - [\hat{\tilde{A}}^{\overline{B}}]_{F_1} \; X^{\overline{B}} \tag{10b}$$

Substituindo (10a) e (10b) na função objetivo de (PR), encontramos:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \hat{d}_0^{\overline{B}} & \hat{\tilde{d}}^{\overline{B}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{E_0} & 0 & \hat{A}_0^{\overline{B}} & \hat{\tilde{A}}^{\overline{B}} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} X_0^L \\ X^L \\ X^I \\ X_0^{\overline{B}} \\ X^{\overline{B}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \hat{\tilde{z}} \\ \hline \hat{\tilde{b}}_0 \end{array}\right] \tag{12}$$

onde

$$\hat{d}_0^{\overline{B}} = d_0^{\overline{B}} - d_0^L\,[\hat{A}_0^{\overline{B}}]_{F_0} - \tilde{d}^L[\hat{A}_0^{\overline{B}}]_{F_1}$$

$$\hat{\tilde{d}}_0^{\overline{B}} = \tilde{d}^{\overline{B}} - d_0^L\,[\hat{\tilde{A}}^{\overline{B}}]_{F_0} - \tilde{d}^L[\hat{\tilde{A}}^{\overline{B}}]_{F_1} \qquad (13)$$

$$\hat{\tilde{z}} = \tilde{z} - d_0^L[\hat{\tilde{b}}_0]_{F_0} - \tilde{d}^L[\hat{\tilde{b}}_0]_{F_1}$$

E substituindo (10b) em (7), temos:

$$[0 \ \vdots\ E\ \vdots\ \tilde{B}^{\overline{B}}\ \vdots\ \tilde{\tilde{B}}^{\overline{B}}\ ] \begin{bmatrix} X^L \\ X^I \\ X_0^{\overline{B}} \\ X^{\overline{B}} \end{bmatrix} = \tilde{\tilde{b}} \qquad (14)$$

onde

$$\tilde{B}^{\overline{B}} = -\hat{B}^L[\hat{A}_0^{\overline{B}}]_{F_1}$$

$$\tilde{\tilde{B}}^{\overline{B}} = \hat{B}^{\overline{B}} - \hat{B}^L[\hat{\tilde{A}}^{\overline{B}}]_{F_1} \qquad (15)$$

$$\tilde{\tilde{b}} = \hat{b} - \hat{B}^L[\hat{\tilde{b}}_0]_{F_1}$$

De (14), tiramos:

$$X^I = \tilde{\tilde{b}} - \tilde{B}^{\overline{B}}\, X_0^{\overline{B}} - \tilde{\tilde{B}}^{\overline{B}}\, X^{\overline{B}} \qquad (16)$$

Utilizando as expressões obtidas acima, calculamos todas as operações do método primal-simplex.

3.1.1. SOLUÇÃO BÁSICA

Das expressões (10) e (16), podemos deduzir:

$$\begin{bmatrix} x_0^L \\ x^L \end{bmatrix} = \hat{\tilde{b}}_0 - \sum_{j\varepsilon\phi} [\tilde{A}_0^{\overline{B}}]^j \cdot \mu_j \qquad (17)$$

$$x^I = \tilde{\tilde{b}} - \sum_{j\varepsilon\phi} [\tilde{B}^{\overline{B}}]^j \mu_j \qquad (18)$$

onde o conjunto ϕ é dado por

$$\phi = \{j/[x_0^{\overline{B}}]_j = \mu_j\}$$

A partir das expressões acima, podemos determinar a inversa da matriz básica. De fato, sabendo que:

$$x^B = (\mathfrak{A}^B)^{-1}\, \mathfrak{b} - \sum_{j\varepsilon\phi} (\mathfrak{A}^B)^{-1} (\mathfrak{A}^{\overline{B}})^j \mu_j$$

de (17) e (18), obtemos:

$$(\mathfrak{A}^B)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} (\tilde{A}_0^L)^{-1} & -(\tilde{A}_0^L)^{-1} A^I (B^I)^{-1} \\ \hline -(B^I)^{-1} B^L (\tilde{A}_0^L)^{-1}_{F_1} & (B^I)^{-1} + (B^I)^{-1} B^L (\tilde{A}_0^L)^{-1}_{F_1} A^I (B^I)^{-1} \end{array}\right] \qquad (19)$$

3.1.2. VETOR MULTIPLICADOR $\mathfrak{p} = (\pi_0 \vdots \pi)$

Os valores das variáveis duais são obtidos pela expressão:

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{A}^B = \mathfrak{d}^B$$

que é equivalente a

$$(\pi_0 \vdots \pi) \left[\begin{array}{c|c|c} A_0^L & A^L & A^I \\ \hline & B^L & B^I \end{array}\right] = [d_0^L \vdots d^L \vdots d^I] \qquad (20)$$

Sabendo que

$$\tilde{d}^L = d^L - d^I \hat{B}^L$$

e $$\tilde{A}^L = A^L - A^I \hat{B}^L,$$

de (20) temos:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= [d_0^L \ \vdots \ \tilde{d}^L] \ (\tilde{A}_0^L)^{-1} \\ \pi &= (d^I - \pi_0 \ A^I) \ (B^I)^{-1} \end{aligned} \qquad (21)$$

3.1.3. <u>CUSTO RELATIVO DAS VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS</u>

O custo relativo é dado por:

$$\widehat{d_0^{\bar{B}}} = d_0^{\bar{B}} - (\pi_0 \ \vdots \ \pi) \begin{bmatrix} A_0^{\bar{B}} \\ \hline 0 \end{bmatrix} = d_0^{\bar{B}} - \pi_0 \ A_0^{\bar{B}}$$

$$\widehat{d^{\bar{B}}} = d^{\bar{B}} - (\pi_0 \ \vdots \ \pi) \begin{bmatrix} A^{\bar{B}} \\ \hline B^{\bar{B}} \end{bmatrix} = d^{\bar{B}} - \pi_0 \ A^{\bar{B}} - \pi \ B^{\bar{B}}$$

Substituindo os valores de π_0 e π dados por (21) nas expressões acima e comparando o resultado com (13), concluimos que:

$$[\widehat{d_0^{\bar{B}}} \ \vdots \ \widehat{d^{\bar{B}}}] = [\hat{d}_0^{\bar{B}} \ \vdots \ \hat{\bar{d}}^{\bar{B}}] \qquad (22)$$

3.1.4. CRITÉRIO DE OTIMALIDADE

Sendo um problema de minimização, devemos ter:

$$\begin{array}{lll} [\hat{d}_0^{\overline{B}}]_j \geq 0 & \text{se} & [X_0^{\overline{B}}]_j = 0 \\ [\hat{d}_0^{\overline{B}}]_j \leq 0 & \text{se} & [X_0^{\overline{B}}]_j = \mu_j \\ [\hat{\tilde{d}}^{\overline{B}}]_j \geq 0 & & \text{para todo } j \in (\overline{B} - \overline{B}_0) \end{array} \qquad (23)$$

3.1.5. EXPRESSÃO DAS COLUNAS $\mathfrak{A}^{\gamma}$ e $\mathfrak{b}$ EM RELAÇÃO À BASE

Nós queremos calcular a expressão:

$$\hat{\mathfrak{A}}^{\gamma} = (\mathfrak{A}^{B})^{-1}\ \mathfrak{A}^{\gamma}$$

Mas, de (12) e (14), sabemos que:

$$(\mathfrak{A}^{B})^{-1}\ \mathfrak{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} E_0 & 0 & \hat{A}_0^{\overline{B}} & \hat{\tilde{A}}^{\overline{B}} \\ \hline 0 & E & \tilde{B}^{\overline{B}} & \tilde{\tilde{B}}^{\overline{B}} \end{array}\right]$$

Portanto, se a coluna $\mathfrak{A}^{\gamma}$ corresponde a uma variável do vetor X_0, $\hat{\mathfrak{A}}^{\gamma}$ será dado por:

$$\hat{\mathfrak{A}}^{\gamma} = \left[\begin{array}{c} \hat{A}_0^{\overline{B}} \\ \hline \tilde{B}^{\overline{B}} \end{array}\right]^{\gamma} \qquad (24)$$

E se a coluna $\mathfrak{A}^{\gamma}$ corresponde a uma variável de vetor X, temos:

$$\hat{\mathfrak{A}}^{\gamma} = \left[\begin{array}{c} \hat{\tilde{A}}^{\overline{B}} \\ \hline \tilde{\tilde{B}}^{\overline{B}} \end{array}\right]^{\gamma} \qquad (25)$$

Analogamente, para o vetor $\mathfrak{b}$ temos:

$$\hat{\mathfrak{b}} = \left[\begin{array}{c} \tilde{\bar{b}}_0 \\ \hline \tilde{\bar{b}} \end{array}\right]$$

A expressão do vetor $\mathfrak{b}$ em relação à base é utilizada para o cálculo das variáveis básicas como mostram as expressões (17) e (18).

3.1.6. DETERMINAÇÃO DA COLUNA A SAIR DE BASE

A atualização das variáveis básicas pode ser feita através da seguinte equação:

$$X^{\mathcal{B}'}_j = X^{\mathcal{B}}_j - \hat{\mathfrak{A}}^{\gamma}_j \cdot \Delta X_\gamma \quad ; \; j \in \mathcal{B} \tag{26}$$

onde X_γ é a variável a entrar na base e

$$\Delta X_\gamma = X'_\gamma - X_\gamma$$

Nós iremos atribuir um valor para ΔX_γ de modo que uma das variáveis $X^{\mathcal{B}'}_j$, $j \in \mathcal{B}$, atinja um de seus limites. Desse modo, considerando os casos em que $X_\gamma = 0$ ou $X_\gamma = \mu_\gamma$ (para $\gamma \in \overline{\mathcal{B}}_0$), o sinal de $\hat{\mathfrak{A}}^{\gamma}_j$ e o fato de $j \in L_0$ ou $j \in \mathcal{B}$, podemos calcular o valor de ΔX_γ para cada variável básica. O menor valor obtido, em módulo, será o escolhido.

Assim, temos:

1. $X_\gamma = 0$

$$(\Delta X_\gamma)_1 = \min_{j/\hat{\mathfrak{A}}^{\gamma}_j > 0} \frac{X^{\mathcal{B}}_j}{\hat{\mathfrak{A}}^{\gamma}_j} \quad ; \quad \text{para } j \in \mathcal{B} \tag{27}$$

$$(\Delta X_\gamma)_2 = \min_{j/\hat{\mathfrak{A}}_j^\gamma < 0} \frac{X_j^{\mathcal{B}} - \mu_j}{\hat{\mathfrak{A}}_j^\gamma} \quad ; \text{ para } j \in L_0 \tag{28}$$

2. $X_\gamma = \mu_\gamma \ (\gamma \in \overline{\mathcal{B}}_0)$

$$(\Delta X_\gamma)_1 = \min_{j/\hat{\mathfrak{A}}_j^\gamma < 0} \frac{-X_j^{\mathcal{B}}}{\hat{\mathfrak{A}}_j^\gamma} \quad ; \text{ para } j \in \mathcal{B} \tag{29}$$

$$(\Delta X_\gamma)_2 = \min_{j/\hat{\mathfrak{A}}_j^\gamma > 0} \frac{\mu_j - X_j^{\mathcal{B}}}{\hat{\mathfrak{A}}_j^\gamma} \quad ; \text{ para } j \in L_0 \tag{30}$$

$$\text{Seja } y = \min \{(\Delta X_\gamma)_1 \ ; \ (\Delta X_\gamma)_2\} \tag{31}$$

A coluna a sair da base será aquela cuja variável correspondente nos forneceu o valor y.

3.1.7. COMENTÁRIOS SOBRE A ESTRUTURA DA MATRIZ B^I

Para a determinação das expressões anteriores, partimos da matriz $(B^I)^{-1}$, ou seja, do cálculo de $(B^I)^{-1}.b$, $(B^I)^{-1}.B^L$ e $(B^I)^{-1}.B^{\overline{\mathcal{B}}}$.

Estas multiplicações podem ser feitas considerando a estrutura da matriz $(B^I)^{-1}$ que é bloco-angular, desde que esta matriz é a inversa de uma matriz bloco-angular.

Desse modo, a multiplicação $(B^I)^{-1}.b$, por exemplo, será dada por:

$$\begin{bmatrix} (B_1^{I_1})^{-1} \; . \; b_1 \\ (B_2^{I_2})^{-1} \; . \; b_2 \\ \vdots \\ (B_S^{I_S})^{-1} \; . \; b_S \end{bmatrix} .$$

Agora, para calcular $(B_s^{I_s})^{-1}.b_s$, $s = 1,\ldots,S$, podemos considerar a estrutura da matriz $B_s^{I_s}$ e utilizar as bases de trabalho

$$\tilde{C}_s^{L(I_s)} = C_s^{L(I_s)} - C_s^{I(I_s)} \; . \; D_s \; ; \; s = 1,\ldots,S \qquad (32)$$

como vimos na apresentação do método G.U.B. no capítulo anterior.

Dessa forma, todas as expressões do método simplex podem ser obtidas através das bases do trabalho $\tilde{A}_0^L$ e $\tilde{C}_s^{L(I_s)}$; $s = 1,\ldots,S$.

3.1.8. ATUALIZAÇÃO DAS BASES DE TRABALHO

Antes de iniciarmos, queremos avisar que as posições das colunas são dadas em relação ao conjunto a que pertence o índice da coluna, ou seja, em relação aos conjuntos L e I_h, que têm os seus elementos ordenados de acordo com a posição das colunas na matriz básica.

Sejam $\mathfrak{A}^\rho$, na posição ℓ , a coluna a sair da base e $\mathfrak{A}^\gamma$ a coluna a entrar na base.

Dependendo dos conjuntos a que pertencem os índices ρ e γ , temos os seguintes casos:

Caso 1: $\rho \varepsilon L$

Nós podemos permutar as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\gamma}$ atualizando a base de trabalho $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$.

Caso 2: $\rho \varepsilon L(I_h)$

Caso 2a: $\gamma \notin \mathcal{B}_h$

A substituição da coluna $\mathfrak{A}^{\rho}$ pela coluna $\mathfrak{A}^{\gamma}$ faria com que a matriz $B_h^{I_h'}(I_h' = I_h - \{\rho\} + \{\gamma\})$ ficasse com uma coluna com todos os elementos iguais a zero. Mas, o Teorema 1 garante que a matriz $B_h^{\mathcal{B}_h'}$ $(\mathcal{B}_h' = \mathcal{B}_h - \{\rho\} + \{\gamma\})$ tem posto completo e, portanto, existe uma coluna $\mathfrak{A}^{\tau}$, com $\tau \varepsilon L_h$ e na posição t, tal que a coluna $[B_h^L]^{\tau}$ é linearmente independente das colunas da matriz $B_h^{\bar{I}_h}$ $(\bar{I}_h = I_h - \{\rho\})$.

Dessa forma, podemos permutar as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\gamma}$. Entretanto, para que a estrutura bloco-angular da matriz básica seja mantida, nós permutamos as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\tau}$, atualizando as matrizes $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$ e $(\tilde{C}_s^{L(I_h)})^{-1}$, e aplicamos o Caso 1.

Caso 2b: $\gamma \varepsilon \mathcal{B}_h$

Nós devemos considerar duas situações:

Caso 2b1: Existe uma coluna da matriz B^L com elementos diferentes de zero na partição h, ou seja, existe $\tau \varepsilon L_h$.

É claro que nós poderíamos permutar as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\gamma}$, atualizando as matrizes $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$ e $(\tilde{C}_s^{L(I_h)})^{-1}$, desde que a nova matriz $B_h^{I'_h}$ $(I'_h = I_h - \{\rho\} + \{\gamma\})$ tenha posto completo. Entretanto, preferimos aplicar o Caso 2a em vez de trabalhar com mais um caso no método.

Note que neste caso, nós consideramos que a simples existência da coluna $\mathfrak{A}^\tau$ é condição suficiente para que a coluna $[B_h^L]^\tau$ seja linearmente independente das colunas da matriz $B_h^{\bar{I}_h}$ $(\bar{I}_h = I_h - \{\rho\})$.

<u>Caso 2b2</u>: A partição h da matriz B^L tem todos os elementos iguais a zero, ou seja, não existe $\tau \in L$ tal que $[B_h^L]^\tau \neq 0$.

Agora, devemos trocar a coluna $\mathfrak{A}^\rho$ pela coluna $\mathfrak{A}^\gamma$ diretamente, e como temos $B_h^L = 0$, a matriz $\tilde{A}_0^L$ não sofre alteração, sendo necessário, apenas, atualizar a matriz $(\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1}$.

<u>Caso 3</u>: $\rho \in I(I_h)$; $\rho \in R_{hk}$

<u>Caso 3a</u>: $\gamma \notin \bar{B}_h$

Como provamos no Caso 2a, existe uma coluna $\mathfrak{A}^\tau$, com $\tau \in L_h$ e na posição t, tal que a coluna $[B_h^L]^\tau$ é linearmente independente das colunas da matriz $B_h^{\bar{I}_h}$ $(\bar{I}_h = I_h - \{\rho\})$.

Além disso, devemos considerar as seguintes situações:

<u>Caso 3a1</u>: Não existe $\tau \in L_h$, tal que $\tau \in R_{hk}$.

Neste caso, se permutarmos as colunas $\mathfrak{A}^\tau$ e $\mathfrak{A}^\rho$, nós destruiríamos a estrutura linha-angular da matriz $B_h^{I_h}$. Portanto, devemos permutar a coluna $\mathfrak{A}^{\rho}$ com uma coluna $\mathfrak{A}^{\tau'}$, com $\tau' \in L(I_h)$ e na posição τ', tal que $\tau' \in R_{hk}$. A existência desta coluna é garantida pelo Teorema 2, uma vez que a inexistência da coluna $\mathfrak{A}^{\tau'}$ faria com que a nova matriz básica tivesse nenhuma coluna com índice no conjunto R_{hk}, o que contradiz o teorema.

Assim, podemos permutar as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\tau'}$, atualizando a matriz $(\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1}$ e aplicar o Caso 2a.

Note que não precisamos atualizar a matriz $\tilde{A}_0^{L}$ onde a submatriz $\tilde{A}^{L_h}$ é dada por

$$\tilde{A}^{L_h} = A^{L_h} - A_h^{I_h} \cdot (B_h^{I_h})^{-1} \cdot B^{L_h}$$

De fato, as permutarmos as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\tau'}$ da matriz básica, nós permutaremos as colunas das posições ℓ e t' da matriz $A_h^{I_h}$ e as linhas das posições ℓ e t' da matriz $(B_h^{I_h})^{-1}$, não alterando, portanto, a matriz $\tilde{A}_0^{L}$.

<u>Caso 3a2</u>: Existe $\tau \in L_h$ tal que $\tau \in R_{hk}$.

Nós temos as seguintes situações:

<u>Caso 3a2a</u>: Existe $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$.

É claro que poderíamos permutar as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\tau}$, mas preferimos aplicar o caso 3a1, em vez de termos mais um caso a considerar no método.

<u>Caso 3a2b</u>: Não existe $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$.

Nós poderíamos trocar as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ por $\mathfrak{A}^{\gamma}$ diretamente, mas para manter a estrutura linha-angular da matriz $B_h^{I_h}$ preferimos permutar as colunas $\mathfrak{A}^\rho$ e $\mathfrak{A}^\tau$, atualizando a matriz $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$ e aplicar o Caso 1.

Desde que o conjunto $L(I_h)$ não possui elementos no conjunto R_{hk}, a matriz $\tilde{C}_h^{L(I_h)}$ não é modificada.

<u>Caso 3b</u>: $\gamma \in \bar{B}_h$

<u>Caso 3b1</u>: Existe uma coluna $\mathfrak{A}^\tau$, $\tau \in L$, tal que $[B_h^L]^\tau \neq 0$.

Este caso é semelhante ao caso 3a, podendo ser dividido nos seguintes casos:

<u>Caso 3b1a</u>: Existe uma coluna $\mathfrak{A}^{\tau'}$, $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$.

Nós aplicamos o Caso 3a1 permutando as colunas $\mathfrak{A}^\rho$ e $\mathfrak{A}^{\tau'}$.

<u>Caso 3b1b</u>: Não existe $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$.

Nós temos as seguintes situações:

<u>Caso 3b1b1</u>: Existe $\tau \in L_h$ tal que $\tau \in R_{hk}$.

Nós aplicamos o Caso 3a2b, permutando as colunas $\mathfrak{A}^\rho$ por $\mathfrak{A}^\tau$.

<u>Caso 3b1b2</u>: Não existe $\tau \in L_h$ tal que $\tau \in R_{hk}$.

Agora, devemos ter $\gamma \in R_{hk}$ para que a nova base seja factível; caso contrário, a nova base teria nenhuma coluna cujo índice pertencesse ao conjunto R_{hk}, o que contraria o Teorema 2.

É claro que a matriz $\tilde{C}_h^{L(I_h)}$ não é modificada porque não existe $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$.

Agora, verificaremos se é necessário atualizar a matriz $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$.

A inversa da nova base é dada por:

$$(\mathfrak{A}^{\beta'})^{-1} = MP_3(\rho,\gamma)\ (\mathfrak{A}^{\beta})^{-1} \tag{33}$$

sendo $MP_3(\rho,\gamma)$ a matriz de pivotamento que possui a seguinte forma:

$$MP_3(\rho,\gamma) = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & & & & & \nu_1 & & \\ & \ddots & & & & \vdots & & \\ & & 1 & & & \nu_{m_0} & & \\ \hline & & & 1 & & \eta_1 & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & \eta_\ell & & \\ & & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & \eta_m & & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E & H_2 \\ \hline 0 & MP_4(\rho,\gamma) \end{array}\right]$$

$\uparrow$ posição ℓ (34)

De (19), (33) e (34), temos

$$(\mathfrak{A}^{\beta})^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E & H_2 \\ \hline 0 & MP_4(\rho,\gamma) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} (\tilde{A}_0^L)^{-1} & \cdot \\ \hline -\hat{B}^L(\tilde{A}_0^L)^{-1}_{F_1} & \cdot \end{array}\right] \tag{35}$$

de onde deduzimos

$$(\tilde{A}_0^{L'})^{-1} = (\tilde{A}_0^{L})^{-1} - \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{m_0} \end{bmatrix} . \hat{B}_\ell^L \, (\tilde{A}_0^L)^{-1}_{F_1} \tag{36}$$

Seja $\tau \in L_h$. Nós podemos escrever a coluna $[B_h^L]^\tau$ como combinação linear das colunas da matriz $B_h^{I_h}$, uma vez que esta matriz tem posto completo. Assim, temos:

$$[B_h^L]^\tau = \sum_{j \in \bar{I}_h} \sigma_j . [B_h^{I_h}]^j + \lambda . [B_h^{I_h}]^\rho \tag{37}$$

onde

$$\bar{I}_h = I_h - \{\rho\}$$

Mas, por hipótese, temos:

$$[B_h^L]_\ell^\tau = 0$$

$$[B_h^{I_h}]_\ell^j = 0 \quad \text{para } j \in \bar{I}_h$$

$$[B_h^{I_h}]_\ell^\rho = 1$$

o que implica em $\lambda = 0$.

Pré-multiplicando (37) por $(B_h^{I_h})_\ell^{-1}$ e sabendo que $(B_h^{I_h})_\ell^{-1} . [B_h^{I_h}]^j = 0$ para $j \in \bar{I}_h$, obtemos:

$$[\hat{B}_h^L]_\ell^\tau = 0 \quad \text{para todo } \tau \in L_h$$

o que implica em:

$$\hat{B}_\ell^L = 0$$

Substituindo o resultado anterior em (36), concluimos que:

$$(\tilde{A}_0^{L'})^{-1} = (\tilde{A}_0^{L})^{-1}$$

Portanto, não é necessário atualizar a matriz $\tilde{A}_0^L$.

Caso 3b2: Não existe $\tau \in L$ tal que $[B_h^L]^\tau \neq 0$.

Nós temos os seguintes casos:

Caso 3b2a: Existe $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$.

Nós poderíamos trocar as colunas $\underset{\sim}{\mathfrak{Z}}^\rho$ e $\underset{\sim}{\mathfrak{Z}}^\gamma$ diretamente, mas preferimos aplicar o Caso 3a1. para manter a estrutura linha-angular da matriz $B_h^{I_h}$ e, depois, o Caso 2b2.

Caso 3b2b: Não existe $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$.

Neste caso, devemos ter $\gamma \in R_{hk}$ e como não existe elementos diferentes de zero na partição h da matriz B^L e não existe $\tau' \in L(I_h)$ tal que $\tau' \in R_{hk}$, as matrizes de trabalho não serão modificadas.

3.1.9. OPERAÇÕES REALIZADAS EM CADA CASO

Na secção anterior, analisamos todas as situações que podem ocorrer no processo de atualização da base e como podemos perceber, estas situações podem ser reduzidas a seis casos a saber: 1, 2a, 2b2, 3a1, 3a2b e 3b1b2.

Agora iremos desenvolver a operação de atualização das bases de trabalho para cada um dos casos citados.

<u>Caso 1</u>: $\rho \in L$. Trocar a coluna $\mathfrak{A}^{\rho}$ por $\mathfrak{A}^{\gamma}$

A inversa da nova base é dada por:

$$(\mathfrak{A}^{B'})^{-1} = MP_1(\rho,\gamma).(\mathfrak{A}^{B})^{-1} \tag{38}$$

que é equivalente a

$$\mathfrak{A}^{B'}.\ MP_1(\rho,\gamma) = \mathfrak{A}^{B} \tag{39}$$

onde $MP_1(\rho,\gamma)$ é a matriz de pivotamento que possui a seguinte forma:

$$MP_1(\rho,\gamma) = \left[\begin{array}{ccccccc|ccc}
1 & & & \nu_1 & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & \nu_\ell & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & & & \\
 & & & \nu_{m_0} & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & \eta_1 & & & & 1 & & \\
 & & & \vdots & & & & & \ddots & \\
 & & & \eta_m & & & & & & 1
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}
MP_2(\rho,\gamma) & 0 \\
\hline
H_1 & E
\end{array}\right] \tag{40}$$

$\uparrow$ posição ℓ

As matrizes básicas são dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^{B} &= [\mathfrak{A}^{1}\dots\mathfrak{A}^{\rho}\dots\mathfrak{A}^{m_0} \mid \mathfrak{A}^{m_0+1}\dots\mathfrak{A}^{m_0+m}] \\
\mathfrak{A}^{B'} &= [\mathfrak{A}^{1}\dots\mathfrak{A}^{\gamma}\dots\mathfrak{A}^{m_0} \mid \mathfrak{A}^{m_0+1}\dots\mathfrak{A}^{m_0+m}]
\end{aligned} \tag{41}$$

De (39), (40) e (41), podemos deduzir

$$\mathfrak{A}^{\rho} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\ell}}^{m_0} \nu_j \cdot \mathfrak{A}^{j} + \nu_\ell \cdot \mathfrak{A}^{\gamma} + \sum_{j=1}^{m} \eta_j\ \mathfrak{A}^{m_0+j}$$

Substituindo $\mathfrak{A}^{\gamma} = \mathfrak{A}^{\beta} \cdot \hat{\mathfrak{A}}^{\gamma}$ na expressão anterior, temos:

$$\mathfrak{A}^{\rho} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{m_0} (\nu_j + \nu_\ell \hat{\mathfrak{A}}_j^{\gamma}) \mathfrak{A}^j + \nu_\ell \cdot \hat{\mathfrak{A}}_\ell^{\gamma} \cdot \mathfrak{A}^{\rho} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (\eta_j + \nu_\ell \cdot \mathfrak{A}_{m_0+j}^{\gamma}) \mathfrak{A}^{m_0+j}$$

A condição de igualdade é satisfeita quanto tivermos:

$$\nu_j + \nu_\ell \cdot \hat{\mathfrak{A}}_j^{\gamma} = 0 \quad \text{para } j = 1 \ldots m_0;\ j \neq \ell$$

$$\nu_\ell \cdot \hat{\mathfrak{A}}_\ell^{\gamma} = 1 \quad \text{para } j = \ell$$

$$\eta_j + \nu_\ell \cdot \hat{\mathfrak{A}}_{m_0+j}^{\gamma} = 0 \quad \text{para } j = 1 \ldots m$$

A partir do resultado acima, e considerando o fato do índice γ pertencer ao conjunto $\overline{B}_0$ ou ao conjunto $\overline{B} - \overline{B}_0$, nós temos o seguinte resultado:

- Situação 1: $\gamma \in \overline{B}_0$

$$\begin{cases} \nu_\ell = 1/[\hat{A}_0^{\overline{B}}]_\ell^{\gamma} \\ \nu_j = -[\hat{A}_0^{\overline{B}}]_j^{\gamma} \,/\, [\hat{A}_0^{\overline{B}}]_\ell^{\gamma} & ;\ j = 1 \ldots m_0\ ;\ j \neq \ell \\ \eta_j = -[\tilde{B}^{\overline{B}}]_j^{\gamma} \,/\, [\hat{A}_0^{\overline{B}}]_\ell^{\gamma} & ;\ j = 1 \ldots m \end{cases} \tag{42}$$

- Situação 2: $\gamma \in (\overline{B} - \overline{B}_0)$

$$\begin{cases} \nu_\ell = 1/[\hat{\hat{A}}^{\overline{B}}]_\ell^{\gamma} \\ \nu_j = -[\hat{\hat{A}}^{\overline{B}}]_j^{\gamma} \,/\, [\hat{\hat{A}}^{\overline{B}}]_\ell^{\gamma} & ;\ j = 1 \ldots m_0\ ;\ j \neq \ell \\ \eta_j = -[\hat{\tilde{B}}^{\overline{B}}]_j^{\gamma} \,/\, [\hat{\hat{A}}^{\overline{B}}]_\ell^{\gamma} & ;\ j = 1 \ldots m \end{cases} \tag{43}$$

Mas, sabemos da seção anterior, que é necessário atualizar apenas a inversa da base de trabalho $\tilde{A}_0^L$. Assim, de (19), (38) e (40) temos:

$$(\mathfrak{A}^{\beta'})^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} MP_2(\rho,\gamma) & 0 \\ \hline H_1 & E \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} (\tilde{A}_0^L)^{-1} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array}\right]$$

de onde deduzimos

$$(\tilde{A}_0^{L'})^{-1} = MP_2(\rho,\gamma) \cdot (\tilde{A}_0^L)^{-1} \tag{44}$$

Caso 2.a: $\rho \in L(I_h)$. Permutar as colunas $\mathfrak{A}^\rho$ e $\mathfrak{A}^\tau$.

Representando a coluna $[B_h^L]^\tau$ como combinação linear das colunas da matriz $B_h^{I_h}$, temos:

$$[B_h^L]^\tau = \sum_{j \in \overline{I}_h} \sigma_j \cdot [B_h^{I_h}]^j + \lambda \cdot [B_h^{I_h}]^\rho \tag{45}$$

onde

$$\overline{I}_h = I_h - \{\rho\}$$

Desde que a coluna $[B_h^L]^\tau$ é linearmente independente das colunas da matriz $B_h^{\overline{I}_h}$, temos $\lambda \neq 0$.

Pré-multiplicando (45) por $(B_h^{I_h})_\ell^{-1}$ obtemos:

$$[\hat{B}_h^L]_\ell^\tau = \sum_{j \in \overline{I}_h} \sigma_j \cdot (B_h^{I_h})_\ell^{-1} \cdot [B_h^{I_h}]^j + \lambda \cdot (B_h^{I_h})^{-1} \cdot [B_h^{I_h}]^\rho$$

Mas, sabemos que:

$$(B_h^{I_h})_\ell^{-1} \cdot [B_h^{I_h}]^j = 0 \quad \text{para } j \in \overline{I}_h$$

$$(B_h^{I_h})_\ell^{-1} \cdot [B_h^{I_h}]^\rho = 1$$

Logo, temos:

$$[\hat{B}_h^L]_\ell^\tau = \lambda \neq 0$$

A permutação das colunas $\mathfrak{A}^\tau$ e $\mathfrak{A}^\rho$ implica em permutar as linhas t e ℓ da inversa da matriz básica. Lembrando que t está situado entre as m_0 primeiras linhas e que ℓ está entre as últimas m linhas, de (19) temos:

$$(A_0^{L'})^{-1} = \begin{bmatrix} (\tilde{A}_0^L)_1^{-1} \\ \vdots \\ (\tilde{A}_0^L)_{t-1}^{-1} \\ -[\hat{B}_h^L]_\ell \cdot (\tilde{A}_0^L)^{-1} \\ (\tilde{A}_0^L)_{t+1}^{-1} \\ \vdots \\ (\tilde{A}_0^L)_{m_0}^{-1} \end{bmatrix} = G \cdot (\tilde{A}_0^L)^{-1} \qquad (46)$$

posição t

onde

$$G = \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & -[\hat{B}_h^L] & \\ \hline 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array}\right] \text{ linha t} \qquad (47)$$

Note que todos os elementos da linha ℓ da partição h estão no vetor $[\hat{B}_h^L]_\ell$, ou seja, a este vetor foram incluídos os elementos das colunas com índices no conjunto L_0.

Uma vez que o t-ésimo elemento do vetor $[\hat{B}_h^L]_\ell$ da matriz G é diferente de zero, então a matriz G é não-singular.

As expressões (46) e (47) nos permite atualizar a matriz $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$.

Devemos, ainda, atualizar a matriz $(\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1}$. Para isso, seja a coluna:

$$Z = (\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1} \{[C_h^{L}]^{\tau} - [C_h^{I(I_h)}]^{\varepsilon}\} \tag{48}$$

onde τ e ε pertecem ao conjunto R_{hk} e ε é uma coluna chave.

Aplicando o método simplex revisado à matriz $(\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1}$ utilizando o ℓ-ésimo elemento do vetor Z como pivô, nós obtemos o inversa da nova base de trabalho.

<u>Caso 2b2</u>: $\rho \in L(I_h)$. Trocar $\mathfrak{A}^{\rho}$ por $\mathfrak{A}^{\gamma}$

Como vimos, a matriz $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$ não sofre alteração, sendo necessário atualizar, apenas, a matriz $(\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1}$ aplicando o método simplex revisado utilizando como pivô o ℓ-ésimo elemento da coluna

$$Z = (\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1} \{[C_h^{\overline{B}_h}]^{\gamma} - [C_h^{I(I_h)}]^{\varepsilon}\} \tag{49}$$

onde γ e ε pertencem ao conjunto R_{hk} e ε é uma coluna chave.

<u>Caso 3a1</u>: $\rho \in I(I_h)$. Permutar as colunas $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\tau'}$.

Nós sabemos que os índices ρ e τ' pertecem ao conjunto R_{hk}. Portanto, as colunas da matriz $\tilde{C}_h^{L(I_h)}$ cujos índices pertencem ao conjunto R_{hk} são dadas por:

$$[C_h^{L(I_h)}]^j - [C_h^{I(I_h)}]^{\rho} \qquad \text{para } j \neq \tau'$$

e

$$[C_h^{L(I_h)}]^{\tau'} - [C_h^{I(I_h)}]^{\rho}$$

Permutando as colunas $\mathfrak{A}^{\tau'}$ e $\mathfrak{A}^{\rho}$, as colunas da base de trabalho são modificadas por:

$$[C_h^{L(I_h)}]^j - [C_h^{I(I_h)}]^{\tau'} \quad \text{para } j \neq \rho$$

e
$$[C_h^{L(I_h)}]^{\rho} - [C_h^{I(I_h)}]^{\tau'}$$

onde, agora, $\tau' \in I(I_h)$ e $\rho \in L(I_h)$.

Esta operação é equivalente a pós-multiplicar a matriz de trabalho pela matriz T dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ 0 \ldots & -1 & \ldots 0 & -1 & \ldots\ldots & -1 & \ldots 0 & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \quad \text{linha } t' \qquad (50)$$

As colunas com elementos iguais a -1 ocupam, na matriz T, as mesmas posições em que ocupam, na base de trabalho, as colunas cujos índices pertencem ao conjunto R_{hk}.

Desse modo, temos:

$$\tilde{C}_h^{L'(I_h)} = \tilde{C}_h^{L(I_h)} \,.\, T$$

Mas como $T^{-1} = T$, então:

$$(\tilde{C}_h^{L'(I_h)})^{-1} = T.(\tilde{C}_h^{L(I_h)})^{-1} \qquad (51)$$

Caso 3a2b: $\rho \in I(I_h)$. Permutar $\mathfrak{A}^{\rho}$ e $\mathfrak{A}^{\tau}$

A permutação dessas colunas implica em permutar as linhas ℓ e t da inversa da matriz básica. Este caso é semelhante ao caso 2a e portanto, nós podemos utilizar as expressões (46) e (47) para atualizar a matriz $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$.

Caso 3b1b2: $\rho \in I(I_h)$. Trocar $\mathfrak{A}^{\rho}$ por $\mathfrak{A}^{\gamma}$

Como vimos, as bases de trabalho não sofrem modificações.

3.2. MÉTODO DUAL-SIMPLEX

Agora, iremos desenvolver o método dual-simplex para resolver o problema PF.

O problema dual é definido por:

$$\max \quad \phi(\mathfrak{p}) \tag{52}$$

onde $\phi(\mathfrak{p})$ é a função dual dada por:

$$\phi(\mathfrak{p}) = \min L(X_0, X, \mathfrak{p}) \tag{53}$$

$$0 \leq X_0 \leq \mu$$

$$X \geq 0$$

$$\mathfrak{p} \in W$$

sendo W o conjunto de multiplicadores de Lagrange para os quais o mínimo da função existe e $L(X_0, X, \mathfrak{p})$ é a função Lagrangeana , definida por:

$$L(X_0, X, \mathfrak{p}) = d_0 X_0 + dX + \mathfrak{p} \cdot \left[\mathfrak{b} - \mathfrak{A} \left(\frac{X_0}{X} \right) \right] \tag{54}$$

Seja $\mathfrak{p} = (\pi_0 \vdots \pi)$. Com isso, podemos escrever a expressão acima do seguinte modo:

$$L(X_0, X, \mathfrak{p}) = \pi_0 b_0 + \pi b + (d_0 - \pi_0 A_0) X_0 + (d - \pi_0 A - \pi B) X \qquad (55)$$

Substituindo (55) em (53), obtemos:

$$\phi(\mathfrak{p}) = \pi_0 b_0 + \pi b + \min_{\substack{X_0 \geq 0 \\ X_0 \leq \mu \\ X \geq 0 \\ (\pi_0 \vdots \pi) \in W}} (d_0 - \pi_0 A_0) X_0 + (d - \pi_0 A - \pi B) X \qquad (56)$$

O conjunto W é obtido aplicado as condições de Kuhn - Tucker para garantir a existência da otimalidade da função Lagrangeana. Desse modo, sejam λ, θ e ω os vetores das variáveis duais correspondentes às restrições $X_0 \geq 0$, $X_0 \leq \mu$ e $X \geq 0$, respectivamente.

Assim, temos:

Condição 1: $\quad 0 \leq X_0 \leq \mu \;,\; X \geq 0$

Condição 2:

$$d_0 - \pi_0 A_0 - \lambda I + \theta I = 0 \quad , \quad \lambda \geq 0 \; ; \; \theta \geq 0$$

$$d - \pi_0 A - \pi B - \omega I = 0 \quad , \quad \omega \geq 0$$

Condição 3:

$$\lambda X_0 = 0 \; ; \; \theta(\mu - X_0) = 0 \; ; \; \omega X = 0$$

Das duas últimas condições, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{array}{lll} 1. & \text{se } X_{0j} = 0 & \rightarrow \pi_0 A_0^j \leq d_{0j} \\ 2. & \text{se } X_{0j} = \mu_j & \rightarrow \pi_0 A_0^j \geq d_{0j} \\ 3. & \text{se } 0 < X_{0j} < \mu_j & \rightarrow \pi_0 A_0^j = d_{0j} \\ 4. & \text{se } X_j \geq 0 & \rightarrow \pi_0 A^j + \pi B^j \leq d_j \end{array} \tag{57}$$

Portanto, o conjunto W é dado por:

$$W = \{\mathfrak{p} = (\pi_0 \vdots \pi)/\pi_0 A + \pi B \leq d\} \tag{58}$$

Considerando as expressões dadas por (57), o mínimo valor da função Lagrangeana para um dado $\mathfrak{p} \in W$ será igual a:

$$\phi^*(\mathfrak{p}) = \pi_0 b_0 + \pi b + \sum_{j \in W_0} [d_{0j} - \pi_0 A_0^j]\mu_j \tag{59}$$

onde $W_0 = \{j/\pi_0 A_0^j > d_{0j}\}$

Note que a segunda condição de Kuhn-Tucker é sempre respeitada. Dessa forma , se uma base $\mathfrak{A}^B$ do sistema (2) satisfaz a segunda condição, dizemos que $\mathfrak{A}^B$ é uma base dual-factível. Além disso, se o problema dual não for degenerado, existe m_0+m restrições ativas, dadas por (57) e $n-(m_0+m)$ restrições inativas.

O método dual-simplex procura, a partir de uma base dual-factível, encontrar uma solução primal-factível (primeira condição de Kuhn-Tucker) garantindo, em cada iteração, a factibilidade dual.

Portanto, precisamos obter, primeiro, uma base dual factível inicial.

3.2.1. DETERMINAÇÃO DE UMA BASE DUAL-FACTÍVEL INICIAL

Primeiro, iremos procurar um conjunto I de colunas chaves e, depois, um conjunto L de colunas não-chaves para completar a construção da base.

Seja π_0 um vetor qualquer e façamos $d_0' = d_0 - \pi_0 A_0$, $d' = d - \pi_0 A$ e $K = \pi_0 b_0$, transformando a expressão (56) em:

$$\phi(\mathfrak{p}) = K + \pi b + \min_{\substack{0 \leq X_0 \leq \mu \\ X \geq 0 \\ \mathfrak{p} \in W}} d_o' X_0 + (d' - \pi B) X$$

de onde tiramos o problema:

$$K + \min d_0' X_0 + d'X$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} B\,X = b \\ 0 \leq X_0 \leq \mu \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Como somente nos interessa obter uma base dual-factível, podemos eliminar o termo K da função objetivo e também podemos, devido à estrutura bloco-angular da matriz de restrições e à linearidade da função objetivo, dividir o problema acima nos seguintes problemas auxiliares:

$$(\text{PAP})_0 \qquad \begin{cases} \min d_0' X_0 \\ \text{s.a} \\ \qquad 0 \leq X_0 \leq \mu \end{cases}$$

$$(\text{PAP})_s \qquad \begin{cases} \min d_s' X_s \\ \text{s.a} \begin{cases} B_s X_s = b_s \\ X_s \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{para } s = 1,\ldots,S$$

A resolução dos problemas $(\text{PAP})_s$, $s = 1,\ldots,S$, nos fornece um conjunto de bases $B_s^{I_s}$, $s = 1,\dots,S$, e um vetor multiplicador $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_S)$, tais que:

$$
\begin{aligned}
d_s'^{I_s} - \pi_s B_s^{I_s} &= d_s^{I_s} - \pi_0 A_s^{I_s} - \pi_s B_s^{I_s} \\
&= d_s^{I_s} - \mathfrak{p}\, \underline{\mathfrak{A}}_s^{I_s} \\
&= \hat{d}_s^{I_s} = 0 \qquad \text{para } s = 1,\dots,S
\end{aligned} \tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
d_s'^{J_s} - \pi_s B_s^{J_s} &= d_s^{J_s} - \pi_0 A_s^{J_s} - \pi_s B_s^{J_s} \\
&= d_s^{J_s} - \mathfrak{p}\, \underline{\mathfrak{A}}_s^{J_s} \\
&= \hat{d}_s^{J_s} \geq 0 \qquad \text{para } s = 1,\dots,S
\end{aligned} \tag{61}
$$

onde J_s é o conjunto dos índices das colunas da matriz de restrições que não pertencem a I, mas pertencem a U_s.

As expressões (60) e (61) nos dizem que $\mathfrak{p} = (\pi_0 \vdots \pi)$ é uma solução factível para o problema dual.

Note que não é necessário otimizar os problemas auxiliares porque as expressões (60) e (61) são válidas para qualquer conjunto de bases duais-factíveis. Entretanto, se um dos problemas $(PAP)_s$, $1 \leq s \leq S$, for infactível, o problema original (PF) não tem solução.

De fato, sejam:

$$\Lambda_0 = \{X \mid X = (X_1,\dots,X_S);\ A_0 X_0 + \underline{A}\, \underline{X} = b_0;\ 0 \leq X_0 \leq \mu,\ X \geq 0\}$$

$$\Lambda_s = \{X \mid B_s X_s = b_s;\ X_s \geq 0\},\quad s = 1,\dots,S$$

$$\Lambda = \bigcap_{s=0}^{S} \Lambda_s$$

Se algum problema auxiliar não for factível, o conjunto Λ_s correspondente e, consequentemente, o conjunto Λ serão vazios.

Assim, podemos resolver todos os problemas auxiliares para testar a factibilidade do problema (PF).

Devemos observar ainda que as matrizes B_s, $s = 1, \ldots, S$, possuem estrutura linha-angular, o que permite resolver os problemas auxiliares utilizando o método GUB.

Agora, iremos determinar o conjunto de colunas não-chaves.

De (60), temos:

$$\pi = (d^I - \pi_0 A^I)(B^I)^{-1} \tag{62}$$

que, substituindo em (55), fornece:

$$L(X_0, X, \mathfrak{p}) = d^I \hat{b} + \pi_0 \tilde{b}_0 + (d_0 - \pi_0 A_0) X_0 + (\tilde{d}^J - \pi_0 \tilde{A}^J) X^J \tag{63}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{b} &= (B^I)^{-1} b \\ \tilde{b}_0 &= b_0 - A^I \hat{b} \\ \tilde{d}^J &= d^J - d^I (B^I)^{-1} B^J \\ \tilde{A}^J &= A^J - A^I (B^I)^{-1} B^J \end{aligned} \tag{64}$$

Substituindo (63) em (53) obtemos:

$$\phi(\mathfrak{p}) = d^I \hat{b} + \pi_0 \tilde{b}_0 + \min_{\substack{0 \leq X_0 \leq \mu \\ X^J \geqq 0 \\ \mathfrak{p} \in W}} (d_0 - \pi_0 A_0) X_0 + (\tilde{d}^J - \pi_0 \tilde{A}^J) X^J \tag{65}$$

de onde podemos deduzir o problema reduzido:

$$\text{PR:} \quad \min d_0 X_0 + \tilde{d}^J X^J$$
$$\text{s.a} \begin{cases} A_0 X_0 + \tilde{A}^J X^J = \tilde{b}_0 \\ 0 \leq X_0 \leq \mu \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Note que relaxamos a restrição $X^I \geq 0$.

A resolução de (PR) nos fornece uma base dual-factível $(\tilde{A}_0^L)$ e o conjunto L de índices das colunas tais que as colunas correspondentes aos índices do conjunto $\beta = L \oplus I$ fornecem uma base dual-factível para o problema original.

De fato, de (PR) nós obtemos π_0 tal que:

$$\hat{d}_0^L = d_0^L - \pi_0 A_0^L = \hat{d}_0^L = 0$$

$$\hat{d}^L = \tilde{d}^L - \pi_0 \tilde{A}^L = (d^L - d^I (B^I)^{-1} B^L) - \pi_0 (A^L - A^I (B^I)^{-1} B^L) =$$

$$= d^L - \pi_0 A^L - (d^I - \pi_0 A^I)(B^I)^{-1} B^L =$$

$$= d^L - \pi_0 A^L - \pi B^L = \hat{d}^L = 0$$

$$[\hat{d}_0^{\overline{\beta}}]_j = [d_0^{\overline{\beta}}]_j - \pi_0 [A_0^{\overline{\beta}}]^j =$$

$$= [\hat{d}_0^{\overline{\beta}}]_j \begin{cases} \geq 0 & \text{para } [X_0^{\overline{\beta}}]_j = 0 \\ \leq 0 & \text{para } [X_0^{\overline{\beta}}]_j = \mu_j \end{cases}$$

$$\hat{d}^{\overline{\beta}} = \tilde{d}^{\overline{\beta}} - \pi_0 \tilde{A}^{\overline{\beta}} = d^{\overline{\beta}} - \pi_0 A^{\overline{\beta}} - \pi B^{\overline{\beta}} = \hat{d}^{\overline{\beta}} \geq 0$$

Qualquer base dual-factível do problema reduzido satisfaz as expressões acima, não sendo necessário, portanto, obter a solução ótima deste problema.

A partir da base dada pelos conjuntos L e I, podemos resolver o problema dual.

3.2.2. OTIMIZAÇÃO DO PROBLEMA DUAL

3.2.2.1. Determinação da variável a sair da base

Através das expressões (17) e (18), podemos calcular os valores das variáveis básicas.

A variável X_ρ a sair da base será aquela cujo valor é igual a σ dado por:

$$\sigma = \min \{\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3\} \tag{66}$$

onde

$$\sigma_1 = \min_{j\in L_0/[X_0^L]_j < 0} [X_0^L]_j$$

$$\sigma_2 = \min_{j\in L_0/[X_0^L]_j > \mu_j} \mu_j - [X_0^L]_j \tag{67}$$

$$\sigma_3 = \min_{j\in \mathcal{B}/[X^{\mathcal{B}}]_j < 0} [X^{\mathcal{B}}]_j$$

3.2.2.2. Determinação da variável a entrar na base

De (10) e (16), obtemos:

$$X'_\rho = X_\rho - \sum_{j\in\overline{\mathcal{B}}} [\hat{A}_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j \, \Delta X_{0j}^{\overline{\mathcal{B}}} - \sum_{j\in\overline{\mathcal{B}}} [\hat{\tilde{A}}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j \, \Delta X_j^{\overline{\mathcal{B}}} \tag{68}$$

para $\rho \in L$

$$X'_\rho = X_\rho - \sum_{j\in\overline{\mathcal{B}}} [\tilde{B}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j \, \Delta X_{0j}^{\overline{\mathcal{B}}} - \sum_{j\in\overline{\mathcal{B}}} [\hat{\tilde{B}}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j \, \Delta X_j^{\overline{\mathcal{B}}} \tag{69}$$

para $\rho \in I$

onde

$$\Delta X_{0j}^{\overline{B}} = [X_0^{\overline{B}}]_j^{'} - [X_0^{\overline{B}}]_j$$

$$\Delta X_j^{\overline{B}} = [X^{\overline{B}}]_j^{'} - [X^{\overline{B}}]_j$$

Agora, devemos considerar os seguintes casos:

Caso 1: $X_\rho < 0$

Caso 1a: $\rho \in L$

Nós devemos aumentar o valor de X_ρ. Assim, de (68) temos:

a) Se $[\hat{A}_0^{\overline{B}}]_\rho^j > 0 \rightarrow \Delta X_{0j}^{\overline{B}} < 0 \rightarrow [X_0^{\overline{B}}]_j^{'} < [X_0^{\overline{B}}]_j$

Para que o valor da variável $[X_0^{\overline{B}}]_j$ possa diminuir, é necessário que seu valor seja igual ao limite superior, ou seja, $[X_0^{\overline{B}}]_j = \mu_j$.

b) Se $[\hat{A}_0^{\overline{B}}]_\rho^j < 0 \rightarrow \Delta X_{0j}^{\overline{B}} > 0 \rightarrow [X_0^{\overline{B}}]_j^{'} > [X_0^{\overline{B}}]_j$

o que implica em $[X_0^{\overline{B}}]_j = 0$.

c) Se $[\hat{A}^{\overline{B}}]_\rho^j > 0 \rightarrow \Delta X_j^{\overline{B}} < 0 \rightarrow [X^{\overline{B}}]_j^{'} < [X^{\overline{B}}]_j$

o que é impossível, desde que o único valor admissível para a variável $[X^{\overline{B}}]_j$ é zero.

d) Se $[\hat{A}^{\overline{B}}]_\rho^j < 0 \rightarrow \Delta X_j^{\overline{B}} > 0 \rightarrow [X^{\overline{B}}]_j^{'} > [X^{\overline{B}}]_j$

o que implica em $[X^{\overline{B}}]_j = 0$.

Portanto, as variáveis candidatas a entrar na base são aquelas que satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &[X_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{A}_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j < 0 \\ &[X_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = \mu_j \quad \text{e} \quad [\hat{A}_0^{\overline{\mathcal{B}}}]^j > 0 \\ &[X^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{\tilde{A}}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j < 0 \end{aligned} \qquad (70)$$

<u>Caso 1b</u>: $\rho \in I$

De maneira análoga, da expressão (69) tiramos que as variáveis candidatas a entrar na base são dadas por:

$$\begin{aligned} &[X_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = 0 \quad \text{e} \quad [\bar{B}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j < 0 \\ &[X_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = \mu_j \quad \text{e} \quad [\tilde{B}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j > 0 \\ &[X^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = 0 \quad \text{e} \quad [\tilde{\bar{B}}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j < 0 \end{aligned} \qquad (71)$$

<u>Caso 2</u>: $X_\rho > \mu_\rho \rightarrow \rho \in L$

Utilizando a expressão (68), podemos ver que as variáveis candidatas a entrar na base são dadas por:

$$\begin{aligned} &[X_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{A}_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j > 0 \\ &[X_0^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = \mu_j \quad \text{e} \quad [\hat{A}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j < 0 \\ &[X^{\overline{\mathcal{B}}}]_j = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{\tilde{A}}^{\overline{\mathcal{B}}}]_\rho^j > 0 \end{aligned} \qquad (72)$$

Nas expressões obtidas acima, podemos utilizar os valores dos coeficientes de custo relativo dados por (13). Lembrando que a base é dual-factível e supondo que o problema dual não é degenerado, temos:

$$[x_0^{\overline{B}}]_j = 0 \leftrightarrow [\hat{d}_0^{\overline{B}}]_j > 0$$

$$[x_0^{\overline{B}}]_j = \mu_j \leftrightarrow [\hat{d}_0^{\overline{B}}]_j < 0 \qquad (73)$$

$$[x^{\overline{B}}]_j = 0 \leftrightarrow [\hat{\tilde{d}}^{\overline{B}}]_j > 0$$

Agora, precisamos escolher qual a variável entre as candidatas, que entrará na base.

Separando as variáveis em básicas e não básicas, considerando (22) e sabendo que $\hat{d}_0^B = 0$ e $\hat{\tilde{d}}^B = 0$, podemos escrever a função dual, dada por (56), da seguinte maneira:

$$\phi(\mathfrak{p}) = \pi_0 b_0 + \pi b + \min \hat{d}_0^{\overline{B}} x_0^{\overline{B}} + \hat{\tilde{d}}^{\overline{B}} x^{\overline{B}}$$

Da expressão acima, nós obtemos o seguinte resultado:

$$\Delta\phi(\mathfrak{p}) = \sum_{j \in W_1} [\hat{d}_0^{\overline{B}}]_j \Delta x_{0j}^{\overline{B}} + \sum_{j \in W_1} [\hat{\tilde{d}}^{\overline{B}}]_j \Delta x_j^{\overline{B}} \qquad (74)$$

onde W_1 é o conjunto dos índices das variáveis não básicas que satisfazem (70), (71) ou (72).

Podemos ver facilmente que os termos da expressão (74) são positivos e, portanto, ao atribuirmos um valor diferente de zero para algum $\Delta x_{0j}^{\overline{B}}$ ou $\Delta x_j^{\overline{B}}$, o valor da função dual crescerá.

Para um dado vetor $\mathfrak{p} = (\pi_0 \vdots \pi)$, nós calculamos o menor valor da função Lagrangeana, $(\phi(\mathfrak{p}))$, obtendo uma solução primal infactível.

Agora, para o mesmo vetor $\mathfrak{p}$, iremos aumentar o valor de $\phi(\mathfrak{p})$ até que tenhamos uma solução primal factível. Ou seja, nós queremos, para um dado $\mathfrak{p}$, o mínimo valor da função Lagrangeana de modo que a solução primal seja factível. Por isso, escolhemos o menor valor possível para $\Delta\phi(\mathfrak{p})$.

Dessa forma,, a variável X_γ a entrar na base será aquela com a qual obtivermos o valor y dado por:

$$y = \min\{y_1 , y_2\} \tag{75}$$

onde

$$y_1 = \min\{ [\hat{d}_0^{\bar{B}}]_j . \Delta X_{0j}^{\bar{B}} \; , \text{ para } j \in W_1\} \tag{76}$$

$$y_2 = \min\{ [\hat{\hat{d}}^{\bar{B}}]_j . \Delta X_j^{\bar{B}} \; , \text{ para } j \in W_1\} \tag{77}$$

Os valores de $\Delta X_{0j}^{\bar{B}}$ e $\Delta X_j^{\bar{B}}$ podem ser obtidos por (68) e (69), De fato, temos:

<u>Casos 1a e 2</u>:

$$\begin{cases} \Delta X_{0j}^{\bar{B}} = \dfrac{-\Delta X_\rho}{[\hat{A}_0^{\bar{B}}]_\rho^j} \\ \\ \Delta X_j^{\bar{B}} = \dfrac{-\Delta X_\rho}{[\hat{\hat{A}}^{\bar{B}}]_\rho^j} \end{cases} \tag{78}$$

<u>Caso 1b</u>:

$$\begin{cases} \Delta X_{0j}^{\bar{B}} = \dfrac{-\Delta X_\rho}{[\tilde{B}^{\bar{B}}]_\rho^j} \\ \\ \Delta X_j^{\bar{B}} = \dfrac{-\Delta X_\rho}{[\tilde{\hat{B}}^{\bar{B}}]_\rho^j} \end{cases} \tag{79}$$

Combinando as expressões (76), (77), (78) e (79) e sabendo que ΔX_ρ é constante porque a variável a sair da base já está determinada, temos que a variável X_γ será dada por (75), onde:

Caso 1a:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \min\limits_{j} \dfrac{-[\hat{d}_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_j}{[\hat{A}_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_\rho^j} \\ \qquad\qquad \text{para } j \text{ tal que } [X_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_j \text{ satisfaça (70)} \\ y_2 = \min\limits_{j} \dfrac{-[\hat{\tilde{d}}^{\bar{\mathcal{B}}}]_j}{[\hat{\tilde{A}}^{\bar{\mathcal{B}}}]_\rho^j} \\ \qquad\qquad \text{para } j \text{ tal que } [X^{\bar{\mathcal{B}}}]_j \text{ satisfaça (70)} \end{array}\right. \tag{80}$$

Caso 1b:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \min\limits_{j} \dfrac{-[\hat{d}_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_j}{[\tilde{B}^{\bar{\mathcal{B}}}]_\rho^j} \\ \qquad\qquad \text{para } j \text{ tal que } [X_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_j \text{ satisfaça (71)} \\ y_2 = \min\limits_{j} \dfrac{-[\hat{\tilde{d}}^{\bar{\mathcal{B}}}]_j}{[\hat{\tilde{B}}^{\bar{\mathcal{B}}}]_\rho^j} \\ \qquad\qquad \text{para } j \text{ tal que } [X^{\bar{\mathcal{B}}}]_j \text{ satisfaça (71)} \end{array}\right. \tag{81}$$

Caso 2:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \min\limits_{j} \dfrac{[\hat{d}_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_j}{[\hat{A}_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_\rho^j} \\ \qquad\qquad \text{para } j \text{ tal que } [X_0^{\bar{\mathcal{B}}}]_j \text{ satisfaça (72)} \\ y_2 = \min\limits_{j} \dfrac{[\hat{\tilde{d}}^{\bar{\mathcal{B}}}]^j}{[\hat{\tilde{A}}^{\bar{\mathcal{B}}}]_\rho^j} \\ \qquad\qquad \text{para } j \text{ tal que } [X^{\bar{\mathcal{B}}}]_j \text{ satisfaça (72)} \end{array}\right. \tag{82}$$

Uma vez determinadas as variáveis a sair e a entrar na base, podemos atualizar as bases de trabalho, conforme vimos no desenvolvimento do método primal-simplex.

3.3. MÉTODO DE ROSEN

Resolvendo o problema de planejamento florestal pelo método de Rosen, as matrizes B_s dos problemas auxiliares e as matrizes $B_s^{\beta_s}$ dos problemas (P_s) terão estrutura linha-angular, o que permite utilizar o método GUB apresentado no Cap. 2.

Além disso, nós podemos considerar a estrutura das matrizes $B_s^{I_s}$ na construção do problema reduzido.

CAPÍTULO 4

EXEMPLO NUMÉRICO

A título de ilustração do método primal-simplex adaptado ao problema de planejamento florestal, resolveremos o problema de minimização indicado abaixo:

Exemplo:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
\text{colunas:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14
\end{array}
$$

$$
\min\ [1 \quad 1 \quad 10 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 10 \quad 1 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \cdot X
$$

s.a

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 2 \\
4 & 0 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 & & & & & & & \\
1 & 3 & 2 & 0 & 5 & 3 & 0 & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & - & - & - & - & & & & & & & \\
- & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & & & & & & 0 & 6 & 2 & 2 & 1 & 7 & 3 \\
 & & & & & & & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\
 & & & & & & & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right] \cdot X = \left[\begin{array}{c}
9 \\ 8 \\ \hline 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 3 \\ 6 \\ 1 \\ 1
\end{array}\right]
$$

$$X \geqslant 0$$

Escolhemos um exemplo sem variáveis canalizadas (variáveis de estoque) com o objetivo de facilitar a apresentação do método.

A base inicial será dada por:

$$
\begin{array}{lcc:cc:cc:cc:cc}
\text{conjuntos:} & L & & L(I_1) & & I(I_1) & & L(I_2) & & I(I_2) & \\
\text{colunas:} & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 & 8 & 9 & 10 & 14 \\
\text{custos :} & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 & 10 & 1 & 10
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc:cc|cc:cc}
1 & 0 & 1 & 5 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 2 \\
4 & 3 & 0 & 3 & 3 & 5 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & & & & \\
1 & 5 & 3 & 0 & 2 & 3 & & & & \\
\cdashline{3-6}
1 & - & 1 & - & 1 & - & & & & \\
- & 1 & - & 1 & - & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 2 & 1 & 0 & 2 \\
 & & & & & & 0 & 6 & 2 & 3 \\
\cdashline{7-10}
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & - \\
 & & & & & & - & - & - & 1
\end{array}\right]
$$

- Cálculo de $(\tilde{C}_s^{L(I_s)})^{-1}$

De (32), temos:

$$\tilde{C}_1^{L(I_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & - \\ - & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -3/4 & -2/4 \\ -1/4 & -2/4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_2^{L(I_2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow (\tilde{C}_2^{L(I_2)})^{-1} = \begin{bmatrix} 4/10 & -1/10 \\ 2/10 & 2/10 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $\hat{B}^L$

coluna 1:

Sabemos que:

$$\bar{Z} = (\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1} \; [(B_1^{L_1})^1 - (B_1^{I(I_1)})^3] \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{Z} = \begin{bmatrix} -3/4 & -2/4 \\ -1/4 & -2/4 \end{bmatrix} . \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

O conjunto $\psi(i)$ é dado pela expressão (16) da seção 2.1, ou seja:

$\psi(1) = \{1\}$

$\psi(2) = \{2\}$

Através da expressão (17) da seção 2.1, obtemos:

$$(\hat{B}_1^L)^1 = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ 1-5/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

Analogamente, para a coluna 5, temos:

$$(\hat{B}_1^L)^5 = \begin{bmatrix} -13/4 \\ -\ 7/4 \\ 13/4 \\ 11/4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, temos:

$$\hat{B}_1^L = \begin{bmatrix} 5/4 & -13/4 \\ 3/4 & -\ 7/4 \\ -1/4 & 13/4 \\ -3/4 & 11/4 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_2^L = 0$$

- Cálculo de $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$

De (9), sabemos que:

$$\tilde{A}^L = A^L - A^I \hat{B}^L$$

o que nos conduz a:

$$\tilde{A}_0^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5/4 & -13/4 \\ 3/4 & -7/4 \\ -1/4 & 13/4 \\ -3/4 & 11/4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_0^L = \begin{bmatrix} -2/4 & -22/4 \\ 25/4 & -61/4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow (\tilde{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} -61/168 & 22/168 \\ -25/168 & -2/168 \end{bmatrix}$$

-Cálculo do valor das variáveis básicas:

Das expressões (19) e (20), da seção 2.1, temos:

$$\hat{b}_{10} = \begin{bmatrix} -3/4 & -2/4 \\ -1/4 & -2/4 \end{bmatrix} . \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{b}_1 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1-(-1/4) \\ 1-1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Analogamente:

$$\hat{b}_2 = \begin{bmatrix} 3/10 \\ 4/10 \\ 3/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De (9) temos a expressão de $\bar{b}_0$:

$$\tilde{b}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c} -1/4 \\ 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ \hline 3/10 \\ 4/10 \\ 3/10 \\ 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \tilde{b}_0 = \begin{bmatrix} -48/40 \\ -114/40 \end{bmatrix}$$

O valor de $\tilde{\tilde{b}}_0$ é dado por (11).

$$\tilde{\tilde{b}}_0 = \begin{bmatrix} -61/168 & 22/168 \\ -25/168 & -2/168 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -48/40 \\ -114/40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105/1680 \\ 357/1680 \end{bmatrix}$$

E de (15), temos:

$$\tilde{\tilde{b}} = \left[\begin{array}{c} -1/4 \\ 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ \hline 3/10 \\ 4/10 \\ 3/10 \\ 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} 5/4 & -13/4 \\ 3/4 & -7/4 \\ -1/4 & 13/4 \\ -3/4 & 11/4 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 105/1680 \\ 357/1680 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 609/1680 \\ 966/1680 \\ 966/1680 \\ 357/1680 \\ \hline 3/10 \\ 4/10 \\ 3/10 \\ 1 \end{array}\right]$$

Os valores de $\tilde{\tilde{b}}_0$ e $\tilde{\tilde{b}}$ nos fornecem os valores das variáveis básicas, como mostram as expressões (17) e (18).

1ª iteração:

- Determinação da coluna a entrar na base

coluna 11:

De forma análoga ao cálculo de $\hat{B}^L$, temos:

$$(\hat{B}_2^{\overline{B}})^{11} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \\ 1/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Das expressões dadas por (9) e (11), obtemos:

$$(\tilde{A}^{\overline{B}})^{11} = \begin{bmatrix} 31/10 \\ -12/10 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\tilde{A}}^{\overline{B}})^{11} = \begin{bmatrix} -61/168 & 22/168 \\ -25/168 & -2/168 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 31/10 \\ -12/10 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow (\hat{\tilde{A}}^{\overline{B}})^{11} = \begin{bmatrix} -2155/1680 \\ -751/1680 \end{bmatrix}$$

O valor dos coeficientes de custo relativo é dado por (9) e (13).

$$\tilde{d}^L = [1 \quad 1] - [1 \quad 1 \quad 10 \quad 1] \begin{bmatrix} 5/4 & -13/4 \\ 3/4 & -7/4 \\ -1/4 & 13/4 \\ -3/4 & 11/4 \end{bmatrix} = [9/4 \quad -117/4]$$

$$(\tilde{d}^{\overline{B}})^{11} = 5 - [1 \quad 10 \quad 1 \quad 10] \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \\ 1/10 \\ 1 \end{bmatrix} = -3,2$$

$$(\tilde{\bar{d}}^{\mathcal{B}})^{11} = -3{,}2 - [9/4 \quad -117/4] \begin{bmatrix} -2155/1680 \\ -751/1680 \end{bmatrix}$$

$$= -13{,}4 < 0$$

Portanto, a coluna 11 ($\gamma = 11$) entra na base.

- Expressão da coluna 11 em termos da base:

A expressão de coluna em relação à base é dada por (25) onde $(\tilde{\bar{A}}^{\mathcal{B}})^{11}$ já foi calculado e $(\tilde{\bar{B}}^{\mathcal{B}})^{11}$ é dado por (15), ou seja,

$$(\tilde{\bar{B}}_1^{\mathcal{B}})^{11} = 0 - \begin{bmatrix} 5/4 & -13/4 \\ 3/4 & -7/4 \\ -1/4 & 13/4 \\ -3/4 & 11/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2155/1680 \\ -751/1680 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 253/1680 \\ 302/1680 \\ 1902/1680 \\ 449/1680 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{\bar{B}}_2^{\mathcal{B}})^{11} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \\ 1/10 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \cdot (\tilde{\bar{A}}^{\mathcal{B}})^{11} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \\ 1/10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Determinação da coluna a sair da base

A coluna a sair da base é dada prlas expressões (27) e (31):

$$\min \left\{ -, -, \frac{609}{253}, \frac{966}{302}, \frac{966}{1902}, \frac{357}{449}, 3, -, 3, 1 \right\} =$$

$$= \frac{966}{1902}$$

Portanto, a coluna 3 ($\rho = 3$), que pertence ao conjunto $I(I_1)$, sai da base.

Caso 3a1: Permutar as colunas 3 e 2 ($\tau' = 2$)

- Atualização de $(\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1}$:

De (50), temos:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E de (51):

$$(\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3/4 & -2/4 \\ -1/4 & -2/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 2/4 \\ -1/4 & -2/4 \end{bmatrix}$$

- Atualização de $\hat{B}_1^L$

A permutação da primeira coluna com a terceira coluna da matriz B^{I_1}, implica em permutar as primeira e terceira linhas da matriz $(B_1^{I_1})^{-1}$. Logo, para atualizar $\hat{B}_1^L$, basta permutar as linhas 1 e 3:

$$\hat{B}_1^L = \begin{bmatrix} -1/4 & 13/4 \\ 3/4 & -7/4 \\ 5/4 & -13/4 \\ -3/4 & 11/4 \end{bmatrix}$$

Aplicando o caso 3a1, as colunas da base ficarão com a seguinte disposição:

$$\begin{array}{ccccc} L & L(I_1) & I(I_1) & L(I_2) & I(I_2) \\ [1 \quad 5 & \vdots \; 3 \quad 7 & \vdots \; 2 \quad 6 & \vdots \; 8 \quad 9 & \vdots \; 10 \quad 14] \end{array}$$

Caso 2a: Permutar as colunas 3 e 1 ($\tau = 1$)

- Atualização de $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$

Sabendo que $\ell = 1$ (posição da coluna 3 no conjunto $L(I_1)$) e que $t = 1$ (posição da coluna 1 no conjunto L), de (47) temos:

$$G = \begin{bmatrix} 1/4 & -13/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A nova matriz $(A_0^L)^{-1}$ é dada por (46):

$$(\tilde{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -13/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -61/168 & 22/168 \\ -25/168 & -2/168 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (\tilde{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} 66/168 & 12/168 \\ -25/168 & -2/168 \end{bmatrix}$$

- Atualização de $(\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1}$

A coluna a entrar nesta base de trabalho é a coluna dada por (48), onde as colunas τ e ε correspondem às colunas 1 e 2, respectivamente. Com isso, temos:

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 2/4 \\ -1/4 & -2/4 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Aplicando o simplex revisado utilizando o primeiro elemento ($\ell = 1$) da coluna acima como pivô, obtemos:

$$(\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Atualização de $(\tilde{\bar{A}}^{\bar{\beta}})^{11}$:

Uma vez que a coluna 11 pertence ao bloco 2, as modificações no bloco 1 não alteram $(\tilde{A}^{\bar{\beta}})^{11}$. Dessa forma, o novo valor de $(\tilde{\bar{A}}^{\bar{\beta}})^{11}$ será dado por:

$$(\tilde{\bar{A}}^{\bar{\beta}})^{11} = G \; . \; (\tilde{\bar{A}}^{\bar{\beta}})^{11} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & -13/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2155/1680 \\ -751/1680 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\bar{A}}^{\bar{\beta}})^{11} = \begin{bmatrix} 1902/1680 \\ -751/1680 \end{bmatrix}$$

Agora, as colunas da base apresentam a seguintes disposição:

$$\begin{array}{cccccccccc} \multicolumn{2}{c}{L} & \multicolumn{2}{c}{L(I_1)} & \multicolumn{2}{c}{I(I_1)} & \multicolumn{2}{c}{L(I_2)} & \multicolumn{2}{c}{I(I_2)} \\ [3 & 5 \,\vdots & 1 & 7 \,\vdots & 2 & 6 \,\vdots & 8 & 9 \,\vdots & 10 & 14] \end{array}$$

Caso 1: Trocar a coluna 3 pela coluna 11.

- Atualização de $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$

A partir da coluna $(\tilde{A}^{\bar{\beta}})^{11}$ atualizada, nós podemos determinar a matriz de pivotamento $MP_2(\rho,\gamma)$ cujos elementos são dados por (43). Assim, temos:

$$MP_2(\rho,\gamma) = \begin{bmatrix} 1680/1902 & 0 \\ 751/1902 & 1 \end{bmatrix}$$

A nova base de trabalho $(A_0^L)^{-1}$ é obtida através de (44).

$$(\tilde{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1680/1902 & 0 \\ 751/1902 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 66/168 & 12/168 \\ -25/168 & -2/168 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow (A_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} 660/1902 & 120/1902 \\ 12/1902 & 31/1902 \end{bmatrix}$$

Desse modo, obtemos a nova base do problema:

conjuntos:	L		$L(I_1)$		$I(I_1)$		$L(I_2)$		$I(I_2)$	
colunas:	11	5	1	7	2	6	8	9	10	14
custos:	5	1	1	1	1	1	1	10	1	10
	5	0	1	5	1	4	0	2	3	2
	0	3	4	3	0	5	2	1	2	1
		3	2	2	1	0				
		5	1	0	3	3				
		–	1	–	1	–				
		1	–	1	–	1				
	2						2	1	0	2
	2						0	6	2	3
	–						1	1	1	–
	1						–	–	–	1

– Bases de trabalho

Os processos de atualização anteriores, nos forneceram as seguintes bases de trabalho:

$$(\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{C}_2^{L(I_2)})^{-1} = \begin{bmatrix} 4/10 & -1/10 \\ 2/10 & 2/10 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} 660/1902 & 120/1902 \\ 12/1902 & 31/1902 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $\hat{B}^L$

$$\hat{B}_1^L = \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 0 & 8 \\ 0 & 13 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_2^L = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 \\ -2/10 & 0 \\ 1/10 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cálculo das variáveis básicas

$$\bar{\bar{b}}_0 = \begin{bmatrix} 966/1902 \\ 836/1902 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{b}}_1 = \begin{bmatrix} 1358/1902 \\ 920/1902 \\ 544/1902 \\ 146/1902 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{b}}_2 = \begin{bmatrix} 474/1902 \\ 954/1902 \\ 474/1902 \\ 936/1902 \end{bmatrix}$$

<u>2ª iteração:</u>

- Determinação da coluna a entrar na base

Coluna 4:

$$(\hat{B}_1^{\bar{B}})^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{A}^{\bar{B}})^4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\tilde{A}}^{\bar{B}})^4 = \begin{bmatrix} -3060/1902 \\ 2/1902 \end{bmatrix}$$

$\tilde{d}^L = [-32/10 \quad 0]$ $\qquad (\tilde{d}^{\bar{B}})^4 = 0$

$(\bar{\tilde{d}}^{\bar{B}})^4 = -5,2 < 0$

Portanto, a coluna 4 ($\gamma = 4$) entra na base.

- Expressão da coluna 4 em relação à base.

A expressão da coluna 4 é dada por $(\tilde{\tilde{A}}^{\bar{B}})^4$ e por $(\tilde{\tilde{B}}^{\bar{B}})^4$ cujo valor é igual a:

$$(\tilde{\tilde{B}}_1^{\bar{B}})^4 = \begin{bmatrix} 26/1902 \\ 1886/1902 \\ -26/1902 \\ 14/1902 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{\tilde{B}}_2^{\bar{B}})^4 = \begin{bmatrix} 306/1902 \\ -612/1902 \\ 306/1902 \\ 3060/1902 \end{bmatrix}$$

- Determinação da coluna a sair da base:

$$\min \left\{ -, \frac{836}{2}; \frac{1358}{26}; \frac{920}{1886}; -; \frac{146}{14}; \frac{474}{306}; -; \frac{474}{306}; \frac{936}{3060} \right\}$$

$$= \frac{936}{3060}$$

Logo, a coluna 14 ($\rho = 14$), pertencente ao conjunto $I(I_2)$, sairá da base.

<u>Caso 3a2b</u>: Permutar as colunas 14 e 11 ($\tau = 11$)

- Atualização de $(\tilde{A}_0^L)^{-1}$:

A coluna 11 ocupa a primeira posição no conjunto L

($t=1$) e a coluna 14 é o quarto elemento ($\ell=4$) do conjunto $I_2 = L(I_2) \oplus I(I_2)$. Desse modo, de (47) obtemos:

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E de (46) obtemos:

$$(\tilde{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} -660/1902 & -120/1902 \\ 12/1902 & 31/1902 \end{bmatrix}$$

- Atualização de $(\hat{\bar{A}}^{\overline{B}})^4$

A permutação das colunas 11 e 14 não provoca modificações no bloco 1, Assim, a coluna $(\tilde{A}^{\overline{B}})^4$ não sofre alteração.

Portanto, para atualizar $(\hat{\bar{A}}^{\overline{B}})^4$, basta fazer:

$$(\hat{A}^{\overline{B}})^4 = G\ (\tilde{A}^{\overline{B}})^4 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3060/1902 \\ 2/1902 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^{\overline{B}})^4 = \begin{bmatrix} 3060/1902 \\ 2/1902 \end{bmatrix}$$

Agora, a disposição das colunas da base será a seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} L & L(I_1) & I(I_1) & L(I_2) & I(I_2) \\ [14 \quad 5 & : 1 \quad 7 & : 2 \quad 6 & : 8 \quad 9 & : 10 \quad 11] \end{array}$$

<u>Caso 1:</u> Substituir a coluna 14 pela coluna 4.

- Atualização de $(\hat{\bar{A}}_0^L)^{-1}$:

A matriz de pivotamento é igual a:

$$MP_2(\rho,\gamma) = \begin{bmatrix} 1902/3060 & 0 \\ -2/3060 & 1 \end{bmatrix}$$

o que nos fornece a nova base de trabalho:

$$(\hat{\tilde{A}}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} -660/3060 & -120/3060 \\ 20/3060 & 50/3060 \end{bmatrix}$$

Agora, a nova base de trabalho será:

conjuntos:	L		$L(I_1)$		$I(I_1)$		$L(I_2)$		$I(I_2)$	
colunas:	4	5	1	7	2	6	8	9	10	11
custos:	1	1	1	1	1	1	1	10	1	5
	0	0	1	5	1	4	0	2	3	5
	5	3	4	3	0	5	2	1	2	0
	2	3	2	2	1	0				
	0	5	1	0	3	3				
	–	–	1	–	1	–				
	1	1	–	1	–	1				
							2	1	0	2
							0	6	2	2
							1	1	1	–
							–	–	–	1

– Bases de trabalho

No processo de atualização anterior, obtívemos as seguintes bases de trabalho:

$$(\bar{C}_1^{L(I_1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\bar{C}_2^{L(I_2)})^{-1} = \begin{bmatrix} 4/10 & -1/10 \\ 2/10 & 2/10 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} -66/306 & -12/306 \\ 2/306 & 5/306 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $\hat{B}^L$

$$\hat{B}_1^L = \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 1 & 8 \\ 0 & 13 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_2^L = 0$$

-Cálculo do valor das variáveis básicas

$$\hat{\hat{b}}_0 = \begin{bmatrix} 936/3060 \\ 1344/3060 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\hat{b}}_1 = \begin{bmatrix} 2172/3060 \\ 552/3060 \\ 888/3060 \\ 228/3060 \end{bmatrix} \qquad \hat{\hat{b}}_2 = \begin{bmatrix} 2/10 \\ 6/10 \\ 2/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>3ª iteração</u>:

- Determinação da coluna a entrar na base.

Coluna 12:

$$(\hat{B}_2^{\bar{B}})^{12} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \\ 1/10 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{A}^{\bar{B}})^{12} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{\bar{A}}^{\bar{B}})^{12} = \begin{bmatrix} -42/3060 \\ -8/3060 \end{bmatrix}$$

$\tilde{d}^L = [0 \quad 0]$ $\qquad$ $(\tilde{d}^{\overline{B}})^{12} = -2{,}2$

$(\hat{d}^{\overline{B}})^{12} = -2{,}2 \quad 0$

Portanto, a coluna 12 ($\gamma = 12$) entrará na base.

- Expressão da coluna 12 em relação à base:

A expressão da coluna 12 em termos de base é dada por $(\hat{A}^{\overline{B}})^{12}$ (já calculado) e por $(\tilde{\hat{B}}^{\overline{B}})^{12}$, que tem o seguinte valor:

$$(\tilde{\hat{B}}_1^{\overline{B}})^{12} = \begin{bmatrix} -104/3060 \\ 106/3060 \\ 104/3060 \\ -\ 56/3060 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{\hat{B}}_2^{\overline{B}})^{12} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \\ 1/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Determinação da coluna a sair da base:

$$\min \left\{ -;-;-; \frac{552}{106} ; \frac{888}{104} ;-;2;-;2;1 \right\} = 1$$

Portanto a coluna 11 ($\rho = 11$), na segunda posição do conjunto $I(I_2)$, sairá da base.

<u>Caso 3b1b2</u>: Substituir a coluna 11 pela coluna 12:

As bases de trabalho não se alteram.

A nova base do problema será igual a:

conjuntos:	L		L(I_1)		I(I_1)		L(I_2)		I(I_2)	
colunas:	4	5	1	7	2	6	8	9	10	12
custos:	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1
	0	0	1	5	1	4	0	2	3	5
	5	3	4	3	0	5	2	1	2	0
	2	3	2	2	1	0				
	0	5	1	0	3	3				
	–	–	1	–	1	–				
	1	1	–	1	–	1				
							2	1	0	2
							0	6	2	1
							1	1	1	–
							–	–	–	1

- Bases de trabalho:

$$(\tilde{C}_1^{L(I_1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{C}_2^{L(I_2)})^{-1} = \begin{bmatrix} 4/10 & -1/10 \\ 2/10 & 2/10 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{A}_0^L)^{-1} = \begin{bmatrix} -66/306 & -12/306 \\ 2/306 & 5/306 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $\hat{B}^L$:

$$\hat{B}_1^L = \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 1 & 8 \\ 0 & 13 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_2^L = 0$$

- Cálculo do valor das variáveis básicas:

$$\hat{b}_0 = \begin{bmatrix} 978/3060 \\ 1352/3060 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b}_1 = \begin{bmatrix} 2276/3060 \\ 446/3060 \\ 784/3060 \\ 284/3060 \end{bmatrix} \qquad \tilde{b}_2 = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 8/10 \\ 1/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4ª iteração:

- Determinação da coluna a entrar na base

Coluna 13 :

$$(\hat{B}_2^{\overline{\mathcal{B}}})^{13} = \begin{bmatrix} -6/10 \\ 12/10 \\ -6/10 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{A}^{\overline{\mathcal{B}}})^{13} = \begin{bmatrix} -26/10 \\ 22/10 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^{\overline{\mathcal{B}}})^{13} = \begin{bmatrix} 1452/3060 \\ 58/3060 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{d}^L = [0 \quad 0] \qquad (\tilde{d}^{\overline{\mathcal{B}}})^{13} = -10,8$$

$$(\hat{d}^{\overline{\mathcal{B}}})^{13} = -10,8 < 0$$

Portanto, a coluna a entrar na base será a coluna 13 ($\gamma = 13$).

- Expressão da coluna 13 em relação a base

Nós já temos o valor de $(\hat{A}^{\tilde{\mathcal{B}}})^{13}$ e o valor de $(\hat{B}^{\tilde{\mathcal{B}}})^{13}$ é igual a:

$$(\hat{B}_1^{\tilde{\mathcal{B}}})^{13} = \begin{bmatrix} 754/3060 \\ -1916/3060 \\ -754/3060 \\ 406/3060 \end{bmatrix} \qquad (\hat{B}_2^{\tilde{\mathcal{B}}})^{13} = \begin{bmatrix} -6/10 \\ 12/10 \\ -6/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

– Determinação da coluna a sair da base:

$$\min \left\{ \frac{978}{1452} ; \frac{1352}{58} ; \frac{2276}{754} ; - ; - ; \frac{284}{406} ; - ; \frac{8}{12} ; - ; 1 \right\}$$

$$= \frac{8}{12}$$

Logo, a coluna a sair da base será a coluna 9 ($\rho = 9$).

Caso 2b2: Substituir a coluna 9 pela coluna 13

– Atualização de $(\tilde{C}_2^{L(I_2)})^{-1}$:

A coluna a entrar na base de trabalho é dada por (49), ou seja, é a coluna formada pelos dois primeiros elementos de $(B_2^{\tilde{\mathcal{B}}})^{13}$.

Portanto, nós atualizaremos a base de trabalho $(\tilde{C}_2^{L(I_2)})^{-1}$ através do método simplex revisado, utilizando como pivô o segundo elemento ($\ell = 2$) da coluna:

$$\begin{bmatrix} -6/10 \\ 12/10 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, a nova base de trabalho é igual a:

$$(\tilde{C}_2^{L(I_2)})^{-1} = \begin{bmatrix} 5/10 & 0 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

A nova base do problema é dada por:

conjuntos:	L		L(I_1)		I(I_1)		L(I_2)		I(I_2)	
colunas:	4	5	1	7	2	6	8	13	10	12
custos:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

0	0	1	5	1	4	0	3	3	5
5	3	4	3	0	5	2	1	2	0
2	3	2	2	1	0				
0	5	1	0	3	3				
–	–	1	–	1	–				
1	1	–	1	–	1				
						2	2	0	2
						0	7	2	1
						1	–	1	–
						–	1	–	1

A solução do problema relativa a esta base é igual a:

$$\hat{b}_0 = \begin{bmatrix} 6/1836 \\ 788/1836 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b}_1 = \begin{bmatrix} 1064/1836 \\ 1034/1836 \\ 772/1836 \\ 8/1836 \end{bmatrix}. \qquad \tilde{b}_2 = \begin{bmatrix} 5/10 \\ 4/6 \\ 5/10 \\ 2/6 \end{bmatrix}$$

Calculando os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas, obtemos:

$(\hat{\tilde{d}}^{\overline{B}})^{3} = 9 > 0$

$(\hat{\tilde{d}}^{\overline{B}})^{9} = 9 > 0$

$(\hat{\tilde{d}}^{\overline{B}})^{11} = 4 > 0$

$(\hat{\tilde{d}}^{\overline{B}})^{14} = 9 > 0$

Assim, a solução acima é a solução ótima.

CONCLUSÃO

A vantagem dos métodos apresentados no terceiro capítulo é função do número de projetos da empresa florestal. Para uma empressa com 5 núcleos e 250 projetos no total e para um horizonte de planejamento de 15 anos, teríamos uma matriz básica de dimensão 700 x 700 aproximadamente. Utilizando os métodos desenvolvidos neste trabalho, teríamos uma base de trabalho de dimensão 15 x 15 e 5 bases de dimensões 90 x 90 aproximadamente, reduzindo o número de posições de memória necessário para armazenar a base em mais de 400.000.

Quanto maior for o número de projetos por núcleo , maior será a vantagem de utilizar os métodos adaptados ao problema florestal.

Quanto aos métodos em si, o método dual-simplex apresenta vantagem na obtenção de bases iniciais (ver Bazaraa [1], pg. 265) dos problemas auxiliares e do problema reduzido, eliminando a fase I do método simplex. A vantagem do método de Rosen está baseado na possibilidade de reduzir o número de iterações, uma vez que podemos substituir mais de uma coluna da matriz básica em cada iteração. Estas questões computacionais , entretanto, não constituem objeto deste trabalho.

A constituição deste trabalho se situa no plano teórico, onde realizamos um esforço de concatenar conhecimentos de algoritmos específicos para as estruturas bloco-angular e linha-angular, no sentido de compor algoritmos específicos para o problema florestal. Desta maneira, tornam-se viáveis as implementações computacionais em microcomputadores do tipo XT ou AT com processadores de ponto flutuante. Os desenvolvimentos ainda necessários para permitir implementações confiáveis dependem de cuidados especiais com os aspectos numéricos. Investigações neste sentido certamente ensejarão o aparecimento de sistemas comerciais, os quais deverão também dispor de recursos para gerenciamento de dados e resultados, além de facilidades para preparação de diferentes cenários de planejamento.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bazaraa,M.S. e Jarvis,J.J. "Linear Programming and Network Flows". John Wiley & Sons, Inc., 1977.

[2] Dantzig,G.B. "Linear Programming and Extensions". Princeton University Press, N.J., 1963.

[3] Dantzig,G.B. and Van Slyke,R.M. "Generalized Upper Bounding Techniques". J. Computer System Sci., 1, 1967, pp. 213-226.

[4] Lasdon,L.S. "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan Pub. Co. Inc., N.Y., 1970.

[5] Lopes,T.L. e Taube Netto,M. "PANFLOR: Um programa para planejamento florestal", IMECC-UNICAMP, Campinas, SP.

[6] Periotto,A.J- "Um Método dual-simplex para problemas de programação linear com estrutura bloco-angular e variáveis canalizadas". Tese de Mestrado, IMECC/UNICAMP, Campinas, SP.

[7] Ribeiro,R.V. "Estudos em programação linear". Tese de Doutorado, FEC/UNICAMP, Campinas, SP, 1980.

[8] Taube Netto,M. "Um modelo de programação linear para planejamento de florestas de eucaliptos". Pesquisa Operacional Vol. 4, nº 1, Junho 1984.