

**ANÁLISE HIPERCOMPLEXA: ESTUDO
DETALHADO DE CASOS PARTICULARES,
INTERPRETAÇÃO E APLICAÇÕES**

Adilson Enio Motter

ANÁLISE HIPERCOMPLEXA: ESTUDO DETALHADO DE CASOS
PARTICULARES, INTERPRETAÇÃO E APLICAÇÕES

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Adilson Enio Motter e aprovada pela comissão julgadora.

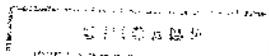
Campinas, 18 de fevereiro de 1998.



Prof. Dr.: Márcio Antônio de Faria Rosa

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

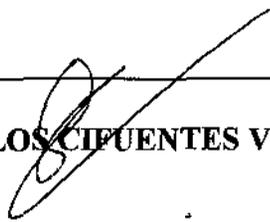


Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 18 de fevereiro de 1998

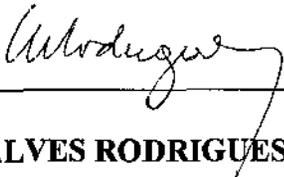
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MÁRCIO ANTÔNIO DE FARIA ROSA



Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS CIFUENTES VÁSQUEZ



Prof (a). Dr (a). WALDYR ALVES RODRIGUES JÚNIOR

Caso quisesse citar pensamentos que, de alguma forma, embasam a criação deste trabalho, não ficaria satisfeito se não reproduzisse aqui boa parte das obras de Nelson Rodrigues e Luis Fernando Verissimo, interpoladas por algumas tirinhas do Hagar. Mas daí não seria mais uma tese matemática e sim um compêndio literário. Tendo que escolher algumas poucas frases, porém, ficaria com a sensação de estar me expressando de forma incompleta. Eis porque vou me dar ao direito de omitir a tradicional epígrafe nesta dissertação, a qual, talvez, já tenha se caracterizado e ganho o devido significado pela simples menção dos autores acima.

*Dedico este trabalho aos meus pais, Otávio e Maria Antonieta,
que, mais que meros genitores, se anteciparam ao seu tempo
e souberam nos dar educação na mais completa acepção da palavra.*

Agradecimentos

Agradeço

a minha família que, com o seu jeito italiano de ser, sempre deu a tranqüilidade e o apoio necessário;

aos colegas da turma de física de 92, e que as amizades cultivadas nestes seis anos não sejam vítimas da competitividade profissional;

aos veteranos colegas da turma de 91, pelas discussões sobre física, matemática e *otras cositas más*;

a minha namorada Alessandra, empreendedora consciente e determinada, pelo carinho e incentivo desprendidos;

aos (ex-)colegas de grupo, Alex, Mosna, Rogério e Terra-Cunha, pela ajuda na compreensão de vários assuntos relacionados ou não com este trabalho;

ao Gregório, exemplo de que é possível fazer ciência sem se privar das outras boas coisas da vida, pelos inúmeros favores prestados;

aos colegas de pós-graduação da física e da matemática, em particular aqueles que sabem respeitar as diferenças e conseguem valorizar outras áreas do conhecimento;

aos professores da Unicamp, não a todos, mas aqueles que além da produção científica valorizam também a formação dos estudantes;

aqueles funcionários da Unicamp que, apesar da falta de incentivo salarial, trabalham e são competentes. Aos demais, “desagrado”;

aos professores que participaram da defesa de tese, Cifuentes, Edmundo e Waldyr, pelos comentários, sugestões e correções. A Cifuentes, também, pela hospitalidade na Universidade Federal do Paraná;

a Márcio Rosa, não apenas pela orientação desde os tempos da iniciação científica, mas também por ter sido efetivamente um professor;

ao povo do estado de São Paulo que, através da FAPESP, criou condições para a realização deste trabalho. E agradeço por fim à FAPESP enquanto agência de fomento à pesquisa, pela forma séria e objetiva com que dá suporte financeiro a seus bolsistas.

Resumo

A dissertação consiste essencialmente do estudo de casos particulares de Análise de Clifford. Inicialmente revisamos a Análise Quaterniônica de Fueter comparando com abordagens alternativas e, neste contexto, pesquisamos uma aplicação das correspondentes relações de dispersão em fenomenologia de partículas elementares. Empregando a mesma sistemática investigamos a teoria de funções resultante no caso da álgebra não divisora dos biquatérnios, onde os principais resultados dizem respeito à formulação rigorosa da Fórmula Integral e a relações com o eletromagnetismo. Situamos estes e outros casos no escopo das Análises de Clifford, chamando a atenção para aspectos de caráter geral. Tendo em vista os vínculos algébricos entre quatérnios e Instantons da Teoria de Yang-Mills $SU(2)$, chamamos a atenção, também, para relações analíticas entre os Instantons e a teoria de Fueter.

Abstract

This thesis refers essentially to the study of particular cases of Clifford analysis. First we review Fueter's quaternionic analysis and compare it with alternative theories. In this context we have inquired a possible application of the corresponding dispersion relations in fenomenology of elementary particles. Making use of the the same approach, we have investigated the function theory resulting in the case of the non-division biquaternion algebra. Concerning that the most important results are the rigorous formulation of the Integral Formula and the relations with eletromagnetism. We have situated these and others cases in the picture of the Clifford analysis, paying attention to general features. Mindful of the algebraic links between quaternions and Instantons of the $SU(2)$ Yang-Mills Theory, we call attention again to analytical relations between Instantons and the Fueter's theory.

Sumário

1 - ANÁLISE QUATERNIÔNICA	1
1.1 Introdução	1
1.2 Quatérnios	1
1.3 Formas Diferenciais Quaterniônicas	7
1.4 Funções Quaterniônicas Regulares	10
1.5 Geração de Funções Regulares	26
1.6 Séries e o Teorema dos Resíduos	27
2 - ANÁLISE BIQUATERNIÔNICA	39
2.1 Introdução	39
2.2 Biquatérnios	40
2.3 Formas Diferenciais Biquaterniônicas	48
2.4 Funções Biquaterniônicas Regulares	50
2.5 Geração de Funções Regulares	54
2.6 Séries	56
2.7 Propriedades Regulares do Eletromagnetismo	58
2.8 Isomorfismo Maxwell-Dirac	61
3 - ALGUNS ELEMENTOS DE ANÁLISE DE CLIFFORD	64
3.1 Introdução	64
3.2 Álgebras de Clifford	64
3.3 O Operador de Dirac	69
3.4 Sobre os Casos Particulares	70
3.5 Resultados Básicos para o Caso Euclídeano	72
4 - INSTANTONS DA TEORIA DE YANG-MILLS $SU(2)$ E ANÁLISE QUATERNIÔNICA	73
4.1 Introdução	73
4.2 A Teoria de Yang-Mills $SU(2)$	74
4.3 Instantons e a Análise Quaterniônica	78
OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	82

Apêndice A - Análise Pseudocomplexa	84
Introdução	84
Teoria de Funções	85
Apêndice B - Análise Pseudoquaterniônica × Extensão da Análise Pseudocomplexa	87
Introdução	87
Pseudoquatérnios	87
Funções Pseudoquaterniônicas Regulares	88
Apêndice C - Teorias Alternativas	90
Introdução	90
Uma Teoria Alternativa de Funções Quaterniônicas	90
Uma Extensão 4-Dimensional não Associativa dos Pseudocomplexos	92
REFERÊNCIAS	94

INTRODUÇÃO

No final do século passado, quando da ausência da álgebra vetorial, os quatérnios foram uma ferramenta notacional muito útil para vários físicos. Basta ver que J.C. Maxwell os empregou para escrever o seu tratado sobre a teoria eletromagnética. Depois, porém, com o advento da álgebra vetorial e em virtude do seu caráter não comutativo, os quatérnios caíram em desuso, assim permanecendo por mais de meio século. A formulação de teorias físicas modernas baseadas na noção de grupo de simetria trouxe novamente à tona os quatérnios bem como uma série de outras álgebra, principalmente a partir da década de sessenta. A idéia é expressar as teorias através de estruturas matemáticas que já possuam elementos característicos da própria teoria.

Tendo em vista o sucesso da teoria de funções complexas e o crescente uso das estruturas hipercomplexas em física, é natural o interesse em pesquisar as correspondentes análises no contexto das funções hipercomplexas a fim de generalizar os resultados clássicos da análise complexa. Começando com a própria análise quaterniônica, apresentamos neste trabalho os resultados da nossa pesquisa relativa à teoria de funções sobre as álgebras de Clifford de mais baixa dimensão, buscando também aplicações que justifiquem seu estudo. Estas álgebras, além de apresentarem grande interesse do ponto de vista matemático, vêm sendo muito usadas na física devido às suas propriedades geométricas.

Em todos os casos estudados a questão fundamental é definir uma classe não trivial de funções para desempenhar um papel análogo ao das funções analíticas em variáveis complexas, a qual pode ser resolvida se nos restringimos ao núcleo de certos operadores diferenciais que generalizam as equações de Cauchy-Riemann.

O trabalho está dividido da seguinte forma. No capítulo 1 apresentamos uma revisão da análise quaterniônica de Fueter, dirigindo nossos resultados a uma possível aplicação a relações de dispersão. Os quatérnios bem como os complexos, apresentam um caráter elíptico, e a teoria de funções quaterniônica surge como extensão 4-dimensional natural da análise complexa. Existe, no entanto, uma estrutura 2-dimensional hiperbólica, os pseudo-complexos, cuja teoria de funções é discutida no apêndice A. Tratamos, no apêndice B, dos pseudoquatérnios, candidato natural para generalizar a álgebra e a análise pseudo-complexa. Acrescentamos um último apêndice onde são expostas abordagens alternativas

àquelas que pesquisamos. (Sugerimos ao leitor que proceda a leitura nesta ordem, consultando os apêndices antes do capítulo 2).

Estendendo as noções do capítulo 1, dedicamos o capítulo 2 ao estudo de funções sobre os biquatérnios (quatérnios complexificados). Estes chamam a atenção devido a relação que tem com o espaço-tempo de Minkowski, eletromagnetismo e equação de Dirac. No que diz respeito a teoria de funções propriamente dita o ponto principal se refere a Fórmula Integral de Cauchy, que constitui um elemento não trivial da teoria devido à propriedade não divisora da álgebra.

No capítulo 3 situamos os casos particulares estudados no contexto geral das análises de Clifford. O último capítulo se refere a uma aplicação específica da análise quaterniônica, tratando de suas relações com a formulação euclideana da Teoria de Yang-Mills $SU(2)$ no ansatz de 't Hooft.

Quanto ao estilo pelo qual esta dissertação foi escrita, cabe observar que optamos por uma apresentação tão elementar quanto possível. Esperamos com isto que um bom aluno em final de graduação, em matemática ou física, possa lê-la sem dificuldades¹.

¹Embora, por uma questão de comodidade, escrita em primeira pessoa do plural, este trabalho é de inteira responsabilidade do autor.

ANÁLISE QUATERNIÔNICA

Dedicamos este primeiro capítulo ao estudo da teoria de funções quaterniônicas iniciada pela escola de R. Fueter ([fueter]), a análise quaterniônica. Além do seu valor intrínseco, por estar associada à álgebra com mais propriedades depois dos complexos, esta teoria serve também de referência para o restante da dissertação como protótipo de análise hipercomplexa.

1.1 Introdução

Na década de trinta Fueter e seus colaboradores desenvolveram a análise associada à álgebra dos quatérnios, a qual surge em quatro dimensões de forma similar a já bem conhecida análise complexa em duas dimensões. A idéia central baseia-se essencialmente na escolha (definição) adequada das funções quaterniônicas regulares, que neste caso desempenham o papel que as funções diferenciáveis (no sentido complexo) ocupam na análise complexa.

Aos trabalhos originais de Fueter¹ seguiram-se outros que levaram a novos resultados e a formalização dos mesmos. Baseando-se nestes últimos, particularmente em [sudbery], apresentamos uma abordagem precisa e completa da análise quaterniônica, utilizando para tanto a linguagem das formas diferenciais quaterniônicas. Estabelecemos também alguns resultados ausentes na literatura, dos quais talvez os mais importantes sejam aqueles que dizem respeito a uma aplicação às relações de dispersão quaterniônicas.

1.2 Quatérnios

Um resultado algébrico já bem conhecido (cuja demonstração pode ser encontrada em [kantor]) é o Teorema de Frobenius, segundo o qual existem apenas três álgebras reais associativas de divisão, a saber, reais (\mathbb{R}), complexos (\mathbb{C}), e quatérnios (\mathbb{H}). Assim, estes últimos, inventados por W.R. Hamilton em 1843 ([hamilton]), surgem como a única

¹A publicação dos artigos em alemão e a guerra adiaram em quase quarenta anos a efetiva divulgação da obra de Fueter, que se fez principalmente através de [deavours].

possibilidade 4-dimensional de álgebra real associativa de divisão².

Os quatérnios podem ser convenientemente definidos como o conjunto de todas as quádruplas reais ordenadas, ou seja $\{(t, x_1, x_2, x_3); t, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, com as operações de soma e produto:

$$(t, x_1, x_2, x_3) + (w, y_1, y_2, y_3) = (t + w, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad (1.1)$$

$$\alpha(t, x_1, x_2, x_3) = (\alpha t, \alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

$$(t, x_1, x_2, x_3)(w, y_1, y_2, y_3) = (T, X_1, X_2, X_3) \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} T = tw - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \\ X_1 = ty_1 + x_1w + x_2y_3 - x_3y_2 \\ X_2 = ty_2 - x_1y_3 + x_2w + x_3y_1 \\ X_3 = ty_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3w \end{cases}$$

onde (1.1) e (1.2) são a soma e produto por escalar usuais de \mathbb{R}^4 , e (1.3) é o produto quaterniônico³.

Introduzindo a base $1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 0, 1)$ de \mathbb{H} , um elemento genérico $q = (t, x_1, x_2, x_3)$ pode ser reescrito como

$$q = t + e_i x_i, \quad (1.4)$$

onde soma-se sobre os índices repetidos segundo a convenção de Einstein⁴.

Em termos do delta de Kronecker (δ_{ij}) e do tensor de Levi-Civita (ε_{ijk}) o produto entre os elementos da base torna-se

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} e_k. \quad (1.5)$$

Os elementos e_1, e_2, e_3 podem ser identificados com a base canônica de \mathbb{R}^3 , e \mathbb{H} (enquanto espaço vetorial) com a soma direta $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$. Usando então a notação vetorial

$$q = t + \vec{v} \quad (\vec{v} = e_i x_i), \quad (1.6)$$

²Um aspecto histórico interessante pode ser encontrado em [bork], onde o autor escreve "A facet of the development of electromagnetic theory was the choice of a proper notation. This seemingly minor problem generated a large dispute from about 1880 to 1900, reaching a climax in a series of letters in Nature arguing about the relative merits of quaternion formulation, due to Hamilton and supported by Tait, and the never vector analysis of Gibbs and Heaviside. This quarrel was carried on at a violent level in many letters in Nature."

³Da definição vemos que os reais podem ser identificados com os quatérnios do tipo $(\alpha, 0, 0, 0)$. Os quatérnios possuem estrutura de espaço vetorial real e de corpo não comutativo.

⁴Os índices latinos sempre indicarão que a soma se faz de 1 a 3, e os índices gregos serão usados quando a soma se faz de 0 a 3.

tendo em vista (1.5),

$$\vec{v}_1 \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

(\cdot denota o produto escalar e \times o produto vetorial usual de \mathbb{R}^3). Com isto, para $q_1 = t_1 + \vec{v}_1$ e $q_2 = t_2 + \vec{v}_2$, o produto quaterniônico toma a forma

$$q_1 q_2 = t_1 t_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + t_1 \vec{v}_2 + t_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2. \quad (1.7)$$

É adequado introduzir a seguinte notação:

$$\bar{q} = t - e_i x_i \quad (\text{conjugado}) \quad (1.8)$$

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} \quad (\text{módulo}) \quad (1.9)$$

$$R_e q = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \quad (\text{parte escalar}) \quad (1.10)$$

$$Pu(q) = \frac{1}{2}(q - \bar{q}) \quad (\text{parte vetorial}) \quad (1.11)$$

$$Pu_i(q) = x_i \quad (i\text{-ésima componente}) \quad (1.12)$$

donde, tendo em vista (1.7), surge

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \quad \text{para } q \neq 0 \quad (\text{inversa}) \quad (1.13)$$

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1 \quad (1.14)$$

$$(q_1 q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1} \quad \text{para } q_1, q_2 \neq 0 \quad (1.15)$$

$$|q_1 q_2| = |q_1| |q_2| \quad (1.16)$$

e o produto interno usual de \mathbb{R}^4 ,

$$\langle q_1, q_2 \rangle = R_e(q_1 \bar{q}_2). \quad (1.17)$$

Sempre que dois elementos forem ditos ortogonais será no sentido de (1.17).

Um aspecto notável dos quatérnios é a conexão dos mesmos com rotações em três e quatro dimensões, o que pode ser apreciado pela proposição abaixo.

Proposição-1.1:

(i) Para \mathbb{H} visto como $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, e $r \in \mathbb{H}$ tal que $Pu(r) \neq 0$, a aplicação

$$Pu(q) \mapsto -Pu(r)Pu(q)(Pu(r))^{-1} \quad (1.18)$$

é uma reflexão em \mathbb{R}^3 com relação ao plano ortogonal a $Pu(r)$.

(ii) Toda rotação em \mathbb{R}^3 pode ser escrita na forma

$$Pu(q) \rightarrow sPu(q)s^{-1}, \quad (1.19)$$

para algum $0 \neq s \in \mathbb{H}$, e toda transformação linear desse tipo é uma rotação.

(iii) Identificando \mathbb{H} com \mathbb{R}^4 , para u e v unitários ($|u| = |v| = 1$) a aplicação

$$q \rightarrow uqv \quad (1.20)$$

é uma rotação em \mathbb{R}^4 .

(iv) Toda rotação em \mathbb{R}^4 pode ser expressa na forma (1.20).

Dem.(i): (1.7) fornece que $-Pu(r)Pu(q)(Pu(r))^{-1}$ é um quatérnio puramente vetorial, portanto pertence a \mathbb{R}^3 , e que $Pu(u) \perp Pu(r)$ implica $-Pu(r)Pu(u)(Pu(r))^{-1} = Pu(u)$. Observamos ainda que $-Pu(r)Pu(r)(Pu(r))^{-1} = -Pu(r)$. Assim, (i) segue da linearidade da aplicação e do fato de que todo quatérnio é a soma de uma parte paralela e outra ortogonal a $Pu(r)$.

(ii): Inicialmente observamos que (1.19) se trata de fato de uma rotação. Para q_1 um quatérnio puramente vetorial ortogonal a parte vetorial de s , o produto sq_1 é puramente vetorial, e portanto s sempre pode ser decomposto no produto de dois quatérnios puramente vetoriais. Tendo em vista (i), (1.19) é o produto de duas reflexões, o que implica ser uma rotação. Por outro lado toda rotação em \mathbb{R}^3 pode ser obtida pela seqüência de duas reflexões planas e, novamente por (i), adquire a forma (1.19).

(iii): Embora esta demonstração possa ser feita diretamente, uma maneira mais interessante de fazê-la é por meio de um isomorfismo que pode ser estabelecido entre os quatérnios e um subconjunto das matrizes $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, a saber,

$$q \approx M_q = \begin{pmatrix} t & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & t & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & x_3 & t & -x_1 \\ -x_3 & -x_2 & x_1 & t \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

pelo qual vemos que as matrizes associadas a quatérnios unitários são ortogonais com

determinante $+1$, e portanto são matrizes de rotação⁵. Segue então que uq ($\approx M_u M_q$) e qv ($\approx M_q M_v = (M_v^t M_q^t)^t$) são rotações de q , e por consequência uqv também o é.

(iv): Seja ρ uma rotação qualquer em \mathbb{R}^4 , e seja $r = \rho(1)$. Por (iii), $q \rightarrow r^{-1}\rho(q)$ é uma rotação a qual mantém todos os quatérnios puramente escalares fixos, donde é uma rotação em \mathbb{R}^3 . Agora por (ii), existe um quatérnio unitário s tal que para todo q temos $r^{-1}\rho(q) = sqs^{-1}$, donde $\rho(q) = (rs)q(s^{-1})$ e isto encerra a demonstração⁶.

Portanto os quatérnios estão associados a roto-homotetias em \mathbb{R}^4 (e \mathbb{R}^3) assim como os complexos estão associados a roto-homotetias no plano. A analogia entre \mathbb{H} e \mathbb{C} se torna ainda mais evidente quando empregamos a forma polar quaterniônica,

$$q = |q| \left\{ \frac{t}{|q|} + \left(\frac{e_i x_i}{\sqrt{x_j x_j}} \right) \frac{\sqrt{x_k x_k}}{|q|} \right\} = |q| \{ \cos \theta + (\hat{r}) \text{sen} \theta \} \equiv |q| e^{\hat{r}\theta}. \quad (1.22)$$

Esta expressão pode ser vista como a definição da exponencial de $\hat{r}\theta$, a qual é feita propositalmente desta forma para ser consistente com a já bem conhecida exponencial da matriz $M_{\hat{r}\theta}$ ([apostol]), isomorfa a $\hat{r}\theta$ por (1.21).

Os quatérnios proporcionam uma maneira muito prática e elegante de fazer rotação de vetores em \mathbb{R}^3 , a qual surge do seguinte resultado.

Proposição-1.2: Para s e q , quatérnios com parte vetorial não nula, sendo $s = \cos \phi/2 + \hat{r}_s \text{sen} \phi/2$,

$$q \rightarrow sqs^{-1} \quad (1.23)$$

é uma rotação que mantém fixa a parte escalar de q e roda $Pu(q)$ do ângulo ϕ em relação à direção \hat{r}_s .

Dem.: Segue da Proposição-1.1 que (1.23) é uma rotação em \mathbb{R}^3 , a qual obviamente conserva a parte escalar de q . Por outro lado $Pu(q)$ sempre pode ser escrito como $q_1 + q_2$,

⁵No caso geral $\det M_q = |q|^4$.

⁶Nem todas as rotações em \mathbb{R}^4 podem ser colocadas na forma $q \rightarrow uq$, para u unitário. Isto porque em (1.21) os quatérnios unitários são isomorfos a apenas um subconjunto das matrizes de rotação, e não a todas.

onde $q_1 \perp \hat{r}_s$ e $q_2 // \hat{r}_s$. De (1.7)

$$\begin{aligned} sqs^{-1} &= Re(q) + (\cos \phi/2 + \hat{r}_s \text{sen} \phi/2)(q_1 + q_2)(\cos \phi/2 - \hat{r}_s \text{sen} \phi/2) \\ &= Re(q) + q_2 + q_1 \cos \phi + \hat{r}_s q_1 \text{sen} \phi, \end{aligned}$$

onde em notação vetorial $\hat{r}_s q_1 = \hat{r}_s \times \vec{q}_1$, e portanto obtivemos exatamente a expressão para rotação de ϕ de um vetor em relação a outro que se obtém da álgebra vetorial elementar.

As propriedades de rotação dos quatérnios têm conseqüências na Mecânica Quântica onde $e^{\hat{r}\phi/2}$, a menos de constantes, pode ser identificado com o operador de rotação

$$D(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{S} \cdot \hat{n} \phi}$$

para o caso de partículas de spin 1/2 ([sakurai])⁷. Para tanto basta observar a relação existente entre os quatérnios e as matrizes de Pauli ([porteous])⁸,

$$1 \approx \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_1 \approx \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \approx \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_3 \approx \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Do mesmo modo que os reais podem ser vistos como o subconjunto de \mathbb{H} gerado por $\{1\}$, os complexos podem ser tomados como o subconjunto de \mathbb{H} gerado por $\{1, e_1\}$. Com isto \mathbb{H} pode ser equivalentemente introduzido sob o corpo dos complexos, ainda como álgebra real, fazendo

$$q = z_1 + z_2 e_2 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}), \quad (1.24)$$

onde, por comparação com (1.4), $z_1 = t + e_1 x_1$ e $z_2 = x_2 + e_1 x_3$. Por fim, destas observações segue o isomorfismo

$$q \approx \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix},$$

do qual é claro que os quatérnios unitários são isomorfos ao grupo de Lie $SU(2)$ e que os quatérnios puramente vetoriais são isomorfos à álgebra de Lie $su(2)$ ([sattinger]).

⁷ \vec{S} é o operador de spin, \hbar a constante de Plank e \hat{n} o versor que determina a direção de rotação.

⁸ Aqui i é a unidade imaginária complexa.

1.3 Formas Diferenciais Quaterniônicas

Denotando por \mathbb{H}_q o espaço tangente a \mathbb{H} no ponto q , é natural definir uma k -forma quaterniônica como uma aplicação que para cada ponto de \mathbb{H} fornece uma transformação multilinear alternada com respeito aos reais

$$w_q : \underbrace{\mathbb{H}_q \times \cdots \times \mathbb{H}_q}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{H}. \quad (1.25)$$

Obviamente, \mathbb{H}_q é um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{H} (\mathbb{R}_q^4 é isomorfo a \mathbb{R}^4).

No caso de 1-formas (1.25) reduz-se as transformações lineares $\mathbb{H}_q \rightarrow \mathbb{H}$. Em particular, para $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ uma função diferenciável (no sentido real⁹), o diferencial

$$df_q = \frac{\partial f}{\partial t}(q)dt + \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)dx_i \quad (1.26)$$

é uma 1-forma quaterniônica.

O produto exterior é definido da forma usual. Para w uma k -forma e η uma l -forma,

$$w \wedge \eta(h_1, \dots, h_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\rho \in \sigma} \text{sgn}(\rho) w(h_{\rho(1)}, \dots, h_{\rho(k)}) \eta(h_{\rho(k+1)}, \dots, h_{\rho(k+l)}), \quad (1.27)$$

onde $\text{sgn}(\rho)$ é a paridade da permutação ρ , e σ é o conjunto de todas as permutações de $(1, \dots, k+l)$. Tendo em vista, no entanto, que o produto quaterniônico é não comutativo, em geral não é válido que $w \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge w$. O que temos é $\overline{w \wedge \eta} = (-1)^{k\ell} \overline{\eta} \wedge \overline{w}$.

Definindo o determinante de uma matriz com entradas quaterniônicas pela fórmula usual, surge de (1.27) que o produto exterior entre as 1-formas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ pode ser expresso por

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(h_1, h_2, \dots, h_k) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(h_1) & \alpha_1(h_2) & \dots & \alpha_1(h_k) \\ \alpha_2(h_1) & \alpha_2(h_2) & \dots & \alpha_2(h_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(h_1) & \alpha_k(h_2) & \dots & \alpha_k(h_k) \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Cabe observar que, novamente devido a não comutatividade do produto, ao contrário do que ocorre no caso usual, o determinante acima pode ser não nulo para matrizes de posto incompleto. Por isto podemos ter $\alpha \wedge \alpha \neq 0$.

⁹Diferenciável, sem outros adjetivos, será usado sempre neste sentido.

Por um momento, denotando dt por dx_0 , em termos das 1-formas reais dx_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), as k -formas podem ser expressas como

$$w_q = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} a_{\mu_1, \dots, \mu_k}(q) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}. \quad (1.29)$$

Assumiremos sempre que $a_{\mu_1, \dots, \mu_k} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ sejam diferenciáveis, e por isto estas formas podem ser apropriadamente denominadas formas diferenciais quaterniônicas.

A derivada exterior surge também da maneira usual,

$$dw = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} da_{\mu_1, \dots, \mu_k} \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}, \quad (1.30)$$

donde é \mathbb{H} -linear (no espaço vetorial das formas), e para a derivada do produto ainda é válida a expressão

$$d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta. \quad (1.31)$$

As únicas formas não nulas são 0, 1, 2, 3 e 4-formas. Dentre estas algumas são de particular importância, as quais serão mais freqüentemente usadas nos desenvolvimentos posteriores. O diferencial da função identidade (0-forma), a 1-forma

$$dq = dt + e_i dx_i, \quad (1.32)$$

é identidade quando vista como transformação linear ($dq(h) = h$). O produto exterior $dq \wedge dq$,

$$dq \wedge dq = \varepsilon_{ijk} e_i dx_j \wedge dx_k, \quad (1.33)$$

é uma 2-forma associada ao produto vetorial em \mathbb{R}^3 ($dq \wedge dq(t_1 + \vec{v}_1, t_2 + \vec{v}_2) = 2\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$), e portanto está associado à projeção da área em \mathbb{R}^3 . A 4-forma de volume definida por

$$v \equiv dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad (1.34)$$

ao agir em (h_1, h_2, h_3, h_4) fornece, a menos de um eventual sinal, o volume 4-dimensional do paralelepípedo definido pelas arestas h_1, h_2, h_3 e h_4 ($v(1, e_i, e_j, e_k) = \varepsilon_{ijk}$). Definimos ainda a 3-forma D_q por

$$\langle D_q(h_1, h_2, h_3), h_4 \rangle = v(h_4, h_1, h_2, h_3), \quad (1.35)$$

para todo $h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{H}$, donde $D_q(e_1, e_2, e_3) = 1$ e $D_q(1, e_i, e_j) = -\varepsilon_{ijk}e_k$, e portanto

$$D_q = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k. \quad (1.36)$$

Da definição vemos que $D_q(h_1, h_2, h_3)$ é um quatérnio ortogonal a h_1, h_2 e h_3 cujo módulo é o volume 3-dimensional do paralelepípedo definido pelas arestas h_1, h_2 e h_3 .

A forma de volume promove uma partição disjunta no conjunto das bases de \mathbb{H}_q : bases positivamente orientadas ($v(h_1, h_2, h_3, h_4) > 0$) e bases negativamente orientadas ($v(h_1, h_2, h_3, h_4) < 0$). Quando h_1, h_2, h_3 e h_4 forem linearmente dependentes (caso degenerado), $v(h_1, h_2, h_3, h_4) = 0$.

A k -forma dada por (1.29) pode ser convenientemente escrita como

$$\begin{aligned} w_q &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} R_e\{a_{\mu_1, \dots, \mu_k}(q)\} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &\quad + e_i \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} P u_i\{a_{\mu_1, \dots, \mu_k}(q)\} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &\equiv w_q^0 + e_i w_q^i, \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde w^0, w^1, w^2 e w^3 são k -formas reais.

Para \mathbb{H} identificado com \mathbb{R}^4 , seja M uma variedade orientável k -dimensional em \mathbb{H} (mergulhada no \mathbb{R}^4), e w uma k -forma definida em M , definimos a integral de w em M por

$$\int_M w \equiv \int_M w^0 + e_i \int_M w^i, \quad (1.38)$$

onde as integrais que aparecem do lado direito são as integrais usuais de k -formas em k -variedades. Tal como a derivação exterior, a integração de formas quaterniônicas é \mathbb{H} -linear.

As variedades que estaremos considerando, bem como as respectivas fronteiras, serão sempre continuamente diferenciáveis por pedaços, ou seja, constam da união finita de variedades continuamente diferenciáveis.

As formas quaterniônicas admitem também uma formulação do Teorema de Stokes, a qual pode ser feita do seguinte modo.

Teorema-1.3: Seja M uma variedade orientável compacta k -dimensional com fronteira ∂M e w uma $(k - 1)$ -forma continuamente diferenciável definida em M , então

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w. \quad (1.39)$$

Dem.: Este resultado segue imediatamente da \mathbb{H} -linearidade das operações derivação exterior e integração,

$$\begin{aligned} \int_M dw &= \int_M dw^0 + e_i \int_M dw^i, \\ \int_{\partial M} w &= \int_{\partial M} w^0 + e_i \int_{\partial M} w^i, \end{aligned}$$

e do Teorema de Stokes para formas reais em variedades mergulhadas no \mathbb{R}^4 ([spivak]).

1.4 Funções Quaterniônicas Regulares

As funções que possuem série de potência ou, equivalentemente, diferenciáveis (no sentido complexo) ocupam papel central na teoria de funções complexas. Já é bem conhecido que estas formam um conjunto não trivial de funções com propriedades interessantes¹⁰.

No caso quaterniônico, no entanto, as funções $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ que possuem série de potência quaterniônica são exatamente as mesmas que possuem série de potências quando vistas como funções de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4 . Assim, a exigência de série de potência quaterniônica é muito fraca, pois a teoria desenvolvida com estas funções é a mesma das funções reais analíticas em \mathbb{R}^4 . Por outro lado as únicas funções que possuem derivadas quaterniônicas são algumas funções lineares, o que trivializa o trabalho sobre tal conjunto ([sudbery] para demonstrações).

Surge então a necessidade de encontrar uma maneira adequada de definir o conjunto das funções, que chamaremos regulares, sobre o qual se possa desenvolver a teoria de funções quaterniônicas de forma análoga a teoria de funções complexas. Esta questão foi resolvida por Fueter ([fueter]) e na linguagem que estamos usando pode ser apresentada como segue.

¹⁰Denominaremos estas funções por complexas regulares.

Definição: Uma função $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ (real) diferenciável em $q \in \mathbb{H}$ é

(i) ℓ -regular em q se existe $f'_\ell(q) \in \mathbb{H}$ tal que

$$dq \wedge dq \wedge df_q = D_q f'_\ell(q); \quad (1.40)$$

(ii) r -regular em q se existe $f'_r(q) \in \mathbb{H}$ tal que

$$df_q \wedge dq \wedge dq = f'_r(q) D_q. \quad (1.41)$$

Obviamente que $f'_\ell(q)$ ($f'_r(q)$), denominada derivada à esquerda (direita) de f em q , se existe é única.

Agora, a fim de simplificar a notação, é conveniente introduzir alguns operadores.

Para $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ diferenciável, usaremos a seguinte notação:

$$\partial_\ell f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (1.42)$$

$$\partial_r f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right) \quad (1.43)$$

$$\Delta f = 4\bar{\partial}_r \partial_r = 4\bar{\partial}_\ell \partial_\ell = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \quad (1.44)$$

onde em (1.44) assumimos f duas vezes continuamente diferenciável. Com esta hipótese $\partial_r, \bar{\partial}_r, \partial_\ell$ e $\bar{\partial}_\ell$ comutam¹¹.

Tendo em vista (1.26), (1.33) e (1.36), em coordenadas locais (1.40) e (1.41) tornam-se respectivamente

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k \frac{\partial f}{\partial t}(q) + 2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \\ \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right) f'_\ell(q), \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(q) \varepsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) e_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \\ f'_r(q) \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right), \end{aligned} \quad (1.46)$$

Tomando como argumento (e_i, e_j, e_k) ,

$$f'_\ell(q) = 2e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q), \quad (1.47)$$

$$f'_r(q) = 2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) e_i. \quad (1.48)$$

¹¹ $\bar{\partial}_r$ e $\bar{\partial}_\ell$ são os operadores conjugados.

Enquanto que tomando $(1, e_i, e_j)$ resulta

$$f'_\ell(q) = -2 \frac{\partial f}{\partial t}(q), \quad (1.49)$$

$$f'_r(q) = -2 \frac{\partial f}{\partial t}(q). \quad (1.50)$$

Agora, da unicidade de $f'_\ell(q)$ e de $f'_r(q)$,

$$\left. \begin{aligned} f'_\ell(q) &= -\frac{\partial f}{\partial t}(q) + e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = -2\bar{\partial}_\ell f(q) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(q) + e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) &= 2\bar{\partial}_\ell f(q) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_r(q) &= -\frac{\partial f}{\partial t}(q) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)e_i = -2\bar{\partial}_r f(q) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(q) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)e_i &= 2\bar{\partial}_r f(q) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Com isto encontramos equações diferenciais que determinam uma condição necessária e suficiente de regularidade para a função, da mesma maneira que as equações de Cauchy-Riemann no caso complexo¹².

Proposição-1.4: Uma função $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ diferenciável em $q \in \mathbb{H}$ é

- (i) ℓ -regular em q se e somente se $\bar{\partial}_\ell f(q) = 0$, sendo $f'_\ell(q) = -2\bar{\partial}_\ell f(q)$;
- (ii) r -regular em q se e somente se $\bar{\partial}_r f(q) = 0$, sendo $f'_r(q) = -2\bar{\partial}_r f(q)$.

Dem.: Que estas condições são necessárias já está provado com o estabelecimento de (1.51) e (1.52). Que são suficientes decorre imediatamente da substituição em (1.45) e (1.46).

Aqui $\bar{\partial}_\ell f = 0$ ($\bar{\partial}_r f = 0$) consta de quatro equações reais as quais serão chamadas ℓ -equações (r -equações) de Cauchy-Riemann-Fueter. Empregando a notação vetorial com $f = \phi + \vec{\psi}$, obtemos de (1.7) que estas equações podem ser expressas como¹³

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}, \quad (1.53)$$

¹²É interessante observar como o procedimento empregado na obtenção destas equações lembra aquele usado para se chegar às equações de Cauchy-Riemann na análise complexa.

¹³ $\vec{\nabla}$ age da forma usual nas coordenadas x_1, x_2, x_3 .

$$\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} \pm \vec{\nabla} \times \vec{\psi}, \quad (1.54)$$

onde em (1.54) temos + para ℓ -regular e - para r -regular. Portanto as funções simultaneamente ℓ - e r -regulares devem necessariamente apresentar $\vec{\nabla} \times \vec{\psi} = 0$. Embora o conjunto das funções ℓ -regulares seja obviamente distinto do conjunto das funções r -regulares, a teoria de funções desenvolvida sobre estes conjuntos é equivalente no sentido de que cada resultado estabelecido para um conjunto possui uma versão simétrica (com mudança de operadores e ordem dos produtos quaterniônicos) válida para o outro conjunto¹⁴.

Para demonstrar os próximos teoremas é importante observar que, com f e g diferenciáveis,

$$d(gD_q f) = dg \wedge D_q f - gD_q \wedge df = 2\{(\bar{\partial}_r g)f + g(\bar{\partial}_\ell f)\}v. \quad (1.55)$$

Assim, temos um teorema tipo Cauchy generalizado:

Teorema-1.5: Seja g r -regular e f ℓ -regular continuamente diferenciáveis em U , um domínio simplesmente conexo (3-conexo, π_3 trivial)¹⁵. Para todo subdomínio D tal que $\bar{D} \subset U$, e cuja fronteira ∂D é uma superfície (3-dimensional) fechada continuamente diferenciável por pedaços, temos

$$\int_{\partial D} gD_q f = 0. \quad (1.56)$$

Dem.: Estamos nas condições do Teorema de Stokes (Teorema-1.3). Assim, tendo em vista (1.55), este resultado segue imediatamente da aplicação desse teorema.

Em virtude da equivalência existente entre as teorias de funções r - e ℓ -regulares, já acima mencionada, passaremos a trabalhar apenas com funções ℓ -regulares, exceto quando fizermos ressalva em contrário, e para simplificar a notação omitiremos o identificador “ ℓ ”.

Tomando $g = 1$ no Teorema-1.5, segue como corolário aquilo que seria o Teorema de Cauchy para o caso quaterniônico. Cumpre lembrar que para tanto é necessário exigir que f seja *continuamente* diferenciável. Mas analogamente ao que se faz no

¹⁴Isto pode ser verificado diretamente, construindo as duas teorias em paralelo.

¹⁵Domínios simplesmente conexos sempre serão considerados abertos.

caso complexo a diferenciabilidade contínua pode ser omitida das hipóteses do Teorema-1.5, empregando para isto o argumento de dissecção de Goursat. Como consequência obtemos a seguinte formulação para o Teorema de Cauchy-Goursat quaterniônico:

Teorema-1.6: Seja f uma função regular num domínio simplesmente conexo U . Para todo subdomínio D tal que $\bar{D} \subset U$, e cuja fronteira ∂D é uma superfície fechada continuamente diferenciável por pedaços, temos

$$\int_{\partial D} D_q f = 0. \quad (1.57)$$

Outro importante resultado que pode agora ser estabelecido é a Fórmula Integral de Cauchy-Fueter¹⁶.

Teorema-1.7: Seja f regular num domínio simplesmente conexo U , e D um subdomínio ($\bar{D} \subset U$) cuja fronteira ∂D é uma superfície continuamente diferenciável por pedaços. Para todo ponto q_0 interior a D , temos

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial D} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q). \quad (1.58)$$

Aqui ∂D é positivamente orientada (elementos de volume 3-dimensionais orientados para fora de D).

Dem.: Observamos que, exceto em q_0 , $\frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2}$ é infinitamente diferenciável, e

$$\bar{\partial}_r \left\{ \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} \right\} = \bar{\partial}_r \partial_r \left\{ \frac{-1}{|q - q_0|^2} \right\} = 0.$$

Tomando então $G(q - q_0) = \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2}$, pelo Teorema-1.5 (relaxada a hipótese de diferenciabilidade contínua) podemos trocar a superfície de integração ∂D por uma 3-esfera

¹⁶Talvez melhor fosse chamá-la de Fórmula Integral de Cauchy-Fueter-Moisil em homenagem a C. Moisil por suas contribuições a esta área.

$S \subset D$ centrada em q_0 :

$$\int_{\partial D} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) = \int_S \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q). \quad (1.59)$$

Da continuidade de f em q_0 , para S de raio arbitrariamente pequeno,

$$\int_S \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) = \int_S \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q_0). \quad (1.60)$$

Na 3-esfera temos

$$D_q = \frac{(q - q_0)}{|q - q_0|} dS, \quad (1.61)$$

onde dS é o elemento de volume (3-dimensional) euclidiano em S , e assim

$$\int_S \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q = \int_S \frac{dS}{|q - q_0|^3} = 2\pi^2 \quad (1.62)$$

é o volume da 3-esfera unitária ([courant]). Substituindo (1.62) em (1.60), e (1.60) em (1.59):

$$\int_{\partial D} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) = 2\pi^2 f(q_0),$$

e o teorema está demonstrado¹⁷.

Portanto, analogamente ao que se tem para funções complexas regulares, as funções quaterniônicas regulares são completamente determinadas no interior de uma região a partir dos valores assumidos na fronteira.

Mostraremos agora que toda função regular é infinitamente diferenciável. Este resultado, que também possui análogo em análise complexa, facilita muito a manipulação destas funções permitindo a omissão de hipóteses em teoremas (como a de diferenciabilidade contínua no Teorema-1.5, por exemplo).

Teorema-1.8: Se f é regular num aberto U , então f é infinitamente diferenciável em U .

¹⁷A referência [sudbery] apresenta formulações do Teorema-1.6 e -1.7 válidas para superfícies de integração menos regulares.

Dem.: Tomando q_0 um ponto arbitrário de U , como U é aberto sempre existe uma 3-esfera S centrada em q_0 tal que $S \subset U$. Denotaremos por R o raio de S . Assim, para $|h| < R$,

$$\begin{aligned} f(q_0 + h) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{(q - q_0 - h)^{-1}}{|q - q_0 - h|^2} D_q f(q) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{(q - q_0 - h)^{-1} (q - q_0)}{|q - q_0 - h|^2 |q - q_0|} dS f(q) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S g(q, q_0, h) dS f(q) \end{aligned} \quad (1.63)$$

Para $(q, q_0 + h) \in S \times \text{Int} B$, onde B é a bola de fronteira S , $g(q, q_0, h) = \frac{(q - q_0 - h)^{-1} (q - q_0)}{|q - q_0 - h|^2 |q - q_0|}$ é infinitamente diferenciável.
Denotando

$$\partial^v = \frac{\partial^{n_0+n_1+n_2+n_3}}{\partial x_0^{n_0} \partial x_0^{n_1} \partial x_0^{n_2} \partial x_0^{n_3}}$$

onde n_0, n_1, n_2 e n_3 são inteiros não negativos, mostraremos que se $\partial^v f(q_0)$ existe e é dada por¹⁸

$$\partial^v f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \partial^v g(q, q_0) dS f(q), \quad (1.64)$$

então $\frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v f(q_0)$ também existe e é dada por

$$F(q_0) \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v g(q, q_0) dS f(q) \quad (1.65)$$

(para as demais derivadas a demonstração é análoga). Tendo em vista que (1.64) é válida para $n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = 0$, com isto teremos estabelecido por indução que f é infinitamente diferenciável em q_0 .

De (1.63), (1.64) e (1.65), para todo escalar $h, |h| < R$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^v f(q_0 + h) - \partial^v f(q_0)}{h} - F(q_0) \right| &= \frac{1}{2\pi^2} \left| \int_S \left\{ \frac{\partial^v g(q, q_0, h) - \partial^v g(q, q_0)}{h} - \frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v g(q, q_0) \right\} dS f(q) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi^2} \int_S \left| \frac{\partial^v g(q, q_0, h) - \partial^v g(q, q_0)}{h} - \frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v g(q, q_0) \right| dS |f(q)| \\ &\leq MR^3 \max_{q \in S} \left| \frac{\partial^v g(q, q_0, h) - \partial^v g(q, q_0)}{h} - \frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v g(q, q_0) \right|, \end{aligned} \quad (1.66)$$

¹⁸ Para simplificar a notação fazemos $g(q, q_0) \equiv g(q, q_0, 0)$.

onde M é o máximo de f em S . Na última passagem usamos a continuidade das funções do integrando e a compacidade de S , o que garante a existência dos máximos.

Agora, posto que $\frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v g(q, q_0)$ existe para cada $q \in S$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(q)$ tal que

$$|h| < \delta(q) \Rightarrow MR^3 \left| \frac{\partial^v g(q, q_0, h) - \partial^v g(q, q_0)}{h} - \frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v g(q, q_0) \right| < \epsilon. \quad (1.67)$$

Uma vez que a função que figura do lado esquerdo desta última desigualdade é contínua, todo $q \in S$ possui uma vizinhança V_q tal que para $|h| < \delta(q)$ a desigualdade (1.67) é satisfeita $\forall q' \in V_q$. Mas, devido a compacidade, S admite uma cobertura formada por um número finito de tais vizinhanças, digamos $V_{q_1}, V_{q_2}, \dots, V_{q_k}$. Segue, então, que existe δ tal que $0 < \delta < \delta(q_j) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Este resultado juntamente com (1.66) fornece que, dado $\epsilon > 0$ existe δ para o qual

$$\left| \frac{\partial^v f(q_0 + h) - \partial^v f(q_0)}{h} - F(q_0) \right| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |h| < \delta. \quad (1.68)$$

Pela definição de derivada parcial, $\frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v f(q_0)$ existe e é igual a $F(q_0)$, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{\partial}{\partial t_0} \partial^v g(q, q_0) dS f(q).$$

Isto encerra a demonstração.

Como consequência do Teorema-1.8 obtemos, sem o uso de hipóteses adicionais, que as funções regulares são harmônicas.

Teorema-1.9: Seja f uma função regular num aberto U . Então f é harmônica, ou seja $\Delta f = 0$, e f' regular em U .

Em virtude do caráter analítico das funções harmônicas, este teorema nos proporciona um resultado mais forte do que Teorema-1.8: toda função regular é necessariamente real analítica. É interessante notar que para se chegar a esta conclusão foi necessário o uso da Fórmula Integral.

Existe uma maneira alternativa de apresentar as equações de Cauchy-Riemann-Fueter e de caracterizar a derivada como o limite de um quociente.

Proposição-1.10: Uma função diferenciável f é regular em q_0 se e somente se

$$D_q \wedge df_{q_0} = 0. \quad (1.69)$$

Se ainda f é continuamente diferenciável em alguma vizinhança V de q_0 , o que é necessariamente satisfeito se f for regular em V , temos

$$f'(q_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_C D_q \right)^{-1} \left(\int_{\partial C} dq \wedge dqf \right), \quad (1.70)$$

onde C é um 3-cubo de aresta ϵ centrado em q_0 .

Dem.: A condição (1.69) segue de (1.55) com $g = 1$, e a fórmula (1.70) do Teorema de Stokes.

Agora estabelecemos a recíproca do Teorema de Cauchy-Goursat, o Teorema de Morera, com a hipótese adicional de diferenciabilidade contínua.

Teorema-1.11: Seja f uma função continuamente diferenciável num domínio simplesmente conexo U . Se para todo subdomínio D ($\bar{D} \subset U$), cuja fronteira ∂D é uma superfície fechada continuamente diferenciável por pedaços, temos

$$\int_{\partial D} D_q f = 0, \quad (1.71)$$

então f é regular em U ¹⁹.

Dem.: O Teorema de Stokes em (1.71) fornece

$$\int_D D_q \wedge df = 0.$$

¹⁹A referência [schuler] demonstra este teorema sem exigir diferenciabilidade contínua. Para tanto o autor emprega argumentos de dissecção.

Da continuidade do integrando e da arbitrariedade de D surge

$$D_q \wedge df_{q_0} = 0 \quad \text{para todo } q_0 \in U,$$

e portanto f é regular em U , pela proposição anterior.

O Teorema de Morera pode ser usado para definir as funções regulares, tal como no caso complexo. Este procedimento quando adotado, embora apresente-se menos adequado sob outros aspectos, permite uma maior analogia com a análise complexa donde as funções regulares surgem de modo mais natural. Esta idéia é empregada por C.A. Deavours em [deavours].

Outros resultados relevantes que podem ser obtidos em virtude da Fórmula Integral de Cauchy-Fueter, e que se torna oportuno abordar, são a Fórmula Integral de Poisson, o Teorema do Módulo Máximo e o Teorema de Liouville.

Como já discutimos (Teorema-1.9) as componentes de uma função regular necessariamente satisfazem a equação de Laplace a quatro dimensões. A fórmula integral (1.58) exprime cada uma destas funções componentes no interior de um domínio em termos da integral de todas as quatro funções componentes na fronteira deste domínio. A idéia básica do próximo teorema consiste então em tomar um domínio com fronteira adequada (no caso será uma 3-esfera), tal que cada função componente possa ser expressa no interior exclusivamente em termos da integral dela própria na fronteira. Teremos obtido com isto uma solução harmônica explícita para o Problema de Dirichlet no domínio considerado, a Fórmula Integral de Poisson, já conhecida da Teoria do Potencial ([courant]).

Teorema-1.12: Consideremos a bola $B \equiv \{q' \in \mathbb{H} / |q'| \leq R\}$ cuja fronteira é, evidentemente, a 3-esfera S de raio R centrado na origem, e f uma função regular em B com parte escalar $\phi = R_e(f)$. Para $q_0 \in \text{Int}B$, denotando $|q_0|$ por r , temos

$$\phi(q_0) = \frac{(R^2 - r^2)}{2\pi^2 R} \int_S \frac{\phi(q) dS}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^2}, \quad (1.72)$$

onde θ é o ângulo entre q_0 e q quando vistos como vetores de \mathbb{R}^4 ($|q_0| |q| \cos \theta = \langle q, q_0 \rangle$) ²⁰.

²⁰Aparentemente a Fórmula Integral de Poisson assim estabelecida não seria válida para todas as funções

Dem.: Tomando o lado direito de (1.58) com $q_0 \in \text{Int}B$ substituído por $\frac{R^2}{r^2}q_0$ (a sua inversão em relação a 3-esfera S), para $\partial D = S$ obtemos

$$0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{(q - \frac{R^2}{r^2}q_0)^{-1}}{|q - \frac{R^2}{r^2}q_0|^2} D_q f(q), \quad (1.73)$$

pois $\frac{(q - \frac{R^2}{r^2}q_0)^{-1}}{|q - \frac{R^2}{r^2}q_0|^2}$ é r -regular em B (Teorema-1.5). Ainda de (1.58):

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q). \quad (1.74)$$

Assim, para uma constante qualquer $\gamma \in \mathbb{H}$, (1.74) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(q_0) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \left\{ \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} - \gamma \frac{(q - \frac{R^2}{r^2}q_0)^{-1}}{|q - \frac{R^2}{r^2}q_0|^2} \right\} D_q f(q) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \left\{ \frac{|q - \frac{R^2}{r^2}q_0|^4(\bar{q} - \bar{q}_0) - \gamma |q - q_0|^4(\bar{q} - \frac{R^2}{r^2}\bar{q}_0)}{|q - q_0|^4 |q - \frac{R^2}{r^2}q_0|^4} \right\} \frac{q}{|q|} dS f(q) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \left\{ \frac{|q - \frac{R^2}{r^2}q_0|^4(R^2 - \bar{q}_0 q) - \gamma |q - q_0|^4(R^2 - \frac{R^2}{r^2}\bar{q}_0 q)}{|q - q_0|^4 |q - \frac{R^2}{r^2}q_0|^4 R} \right\} f(q) dS. \end{aligned}$$

Tomando $\gamma = \frac{R^2}{r^2}$ a função entre chaves torna-se escalar:

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \left\{ \left(\frac{R^2 - r^2}{R} \right) \frac{1}{|q - q_0|^4} \right\} f(q) dS. \quad (1.75)$$

O teorema segue de tomar a parte real em (1.75), observando que

$$|q - q_0|^4 = (R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^2.$$

Obviamente que este teorema também é válido para as demais funções componentes de f . Embora a demonstração tenha sido feita para f tendo como domínio uma bola harmônicas, mas apenas para aquelas que fossem componente escalar de uma função regular. Cumpre observar no entanto que, como será estabelecido na Proposição-1.16, em geral toda função harmônica a valores reais é componente escalar de alguma função regular. Este teorema é apresentado em [deavours], porém tanto a formulação quanto demonstração encontradas neste artigo estão erradas.

centrada na origem, no caso do domínio estar centrado noutro ponto basta fazer uma translação nas coordenadas para obter a fórmula integral correspondente.

A Fórmula Integral de Poisson tem inúmeras conseqüências já bem conhecidas da Teoria do Potencial. Em particular o Teorema da Média para funções harmônicas, segundo o qual o valor da função ϕ num ponto q_1 é o valor médio da função numa 3-esfera centrada em q_1 , decorre diretamente desta fórmula. Daí segue que os máximos do módulo de ϕ (não constante), num domínio fechado e limitado, encontram-se na fronteira do domínio. Resultado análogo é válido também para f como mostra o próximo teorema (Teorema do Módulo Máximo).

Teorema-1.13: Seja f regular num domínio simplesmente conexo U . Para $D \subset U$ um subdomínio fechado e limitado cuja fronteira ∂D é uma superfície fechada continuamente diferenciável por pedaços, o módulo de f assume valor máximo em ∂D o qual é estritamente maior que o módulo de f no $\text{Int}D$, exceto quando f é constante.

Dem.: Módulo de f é uma função contínua em U , pois

$$\left| |f(q_0 + h)| - |f(q_0)| \right| \leq \left| f(q_0 + h) - f(q_0) \right|$$

e f é contínua em U . Como D é compacto, $|f|$ possui pontos de máximo neste conjunto. Suponhamos então que $|f|$ assuma valor máximo no ponto $q_0 \in \text{Int}D$. Pela Fórmula Integral de Cauchy-Fueter aplicada a uma 3-esfera $S \subset \text{Int}D$ e centrada em q_0 , temos

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{dS}{|q - q_0|^3} f(q).$$

Para $f(q_0) = 0$, f é identicamente nula e não há nada a demonstrar. Assumindo $f(q_0) \neq 0$, da expressão anterior

$$1 \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{dS}{|q - q_0|^3} \frac{|f(q)|}{|f(q_0)|}. \quad (1.76)$$

Tendo em vista que

$$\frac{|f(q)|}{|f(q_0)|} \leq 1$$

é função contínua de q , e que

$$\int_S \frac{dS}{|q - q_0|^3} = 2\pi^2,$$

(1.76) só não é violada se

$$\frac{|f(q)|}{|f(q_0)|} = 1, \quad \forall q \in S. \quad (1.77)$$

Mas (1.77) deve ser válido para toda 3-esfera $S \subset D$ com centro em q_0 , e portanto existe uma vizinhança de q_0 em que f é constante. Uma vez que q_0 é um ponto arbitrário do interior de D , segue que f é constante em D . Isto encerra a demonstração.

Tal como na análise complexa, a única função limitada regular em todos os pontos é a função constante. Assim, também neste caso se faz presente o Teorema de Liouville.

Teorema-1.14: Se f é uma função regular para todo $q \in \mathbb{H}$, e limitada (existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(q)| \leq M \quad \forall q \in \mathbb{H}$), então f é constante.

Dem.: Seja q_0 um quatérnio fixo mas arbitrário, e S uma 3-esfera centrada na origem com raio $R > |q_0|$. Da Fórmula Integral de Cauchy-Fueter:

$$\begin{aligned} f(q_0) - f(0) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \left\{ \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} - \frac{q^{-1}}{|q|^2} \right\} D_q f(q) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \left\{ \frac{R^4(\bar{q} - \bar{q}_0) - |q - q_0|^4 \bar{q}}{R^4 |q - q_0|^4} \right\} \frac{q}{R} f(q) dS. \end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned} |f(q_0) - f(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{|R^4(\bar{q} - \bar{q}_0) - |q - q_0|^4 \bar{q}|}{R^4 (R - |q_0|)^4} M dS \\ &\leq \frac{M}{R(R - |q_0|)^4} \left\{ \max_{q \in S} |R^4(\bar{q} - \bar{q}_0) - |q - q_0|^4 \bar{q}| \right\}. \quad (1.78) \end{aligned}$$

Feitas as devidas simplificações vemos que o termo entre chaves em (1.78) é da ordem de R^4 , o qual está dividido por um termo que vai com R^5 . Assim, como a desigualdade é válida para todo $R > |q_0|$, do limite $R \rightarrow \infty$ obtemos que $f(q_0) = f(0)$. Uma vez que q_0 é arbitrário, isto demonstra o teorema.

Também os quatérnios admitem uma fórmula integral com “termos de correção” a qual é de validade geral para funções regulares e não regulares (inclusive não real-

analíticas).

Proposição-1.15: Seja f continuamente diferenciável num domínio simplesmente conexo U , e D um subdomínio (tal que o compacto \bar{D} esteja contido em U) cuja fronteira ∂D é uma superfície continuamente diferenciável por pedaços. Então, para todo q_0 interior a D , temos

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial D} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) - \frac{1}{\pi^2} \int_D \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} \bar{\partial}_\ell f(q) v, \quad (1.79)$$

onde, obviamente, a última integral é imprópria.

Dem.: Pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial D} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_S \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \int_{D-B} d \left\{ \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} D_q f(q) \right\}, \end{aligned} \quad (1.80)$$

sendo $B \subset D$ uma bola de raio δ centrada em q_0 e com fronteira S . Pela mesma argumentação apresentada na demonstração do Teorema-1.7, devido a continuidade de f , o primeiro termo do lado direito de (1.80) resulta $f(q_0)$ no limite $\delta \rightarrow 0$. Quanto ao segundo termo, tendo em vista (1.55) e o fato de $\bar{\partial}_r \left\{ \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} \right\} = 0$ para $q \neq q_0$, podemos reescrevê-lo como

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{D-B} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} \bar{\partial}_\ell f(q) v,$$

onde $v = dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ é a forma de volume. Para $\delta \rightarrow 0$ os módulos de $\frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2}$ e v vão respectivamente com δ^{-3} e δ^4 . Assim uma vez que $\bar{\partial}_\ell f$ é contínua por hipótese e, portanto, limitada em B ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_B \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} \bar{\partial}_\ell f(q) v = 0.$$

Isto mostra que no segundo termo de (1.80) a integral de volume converge absolutamente e, portanto, está bem definida, o que encerra a demonstração.

Em (1.79) vemos que a integral de volume aparece exclusivamente para compensar uma eventual não regularidade da função na região de integração a qual zera no caso da função ser regular, como exigido pelo Teorema-1.7. Este resultado pode ser importante em aplicações físicas permitindo, por exemplo, quantificar possíveis contribuições não regulares associadas a erros experimentais.

Em virtude da Proposição-1.15 podemos ainda estabelecer aquele que seria o $\bar{\partial}$ -Lema de Poincaré para variável quaterniônica.

Teorema-1.16: Seja g continuamente diferenciável num domínio simplesmente conexo U , e D subdomínio aberto com $\bar{D} \subset U$ (compacto) cuja fronteira é uma superfície continuamente diferenciável por pedaços. Então

$$f(q) = \frac{-1}{\pi^2} \int_D \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} g(q') v' \quad (1.81)$$

é uma função continuamente diferenciável definida em D , a qual satisfaz

$$\bar{\partial}_\ell f(q) = g(q) \quad \forall q \in D. \quad (1.82)$$

Dem.: Para $q_0 \in D$ fixo podemos tomar $\delta > 0$ tal que as bolas abertas B_δ e $B_{2\delta}$ centradas em q_0 e de raios respectivamente δ e 2δ estejam contidas em D . Assim, segue do Teorema 3-11 (Partição da Unidade) de [spivak] que existem funções C^∞ , φ_1 e φ_2 , tais que $\varphi_1(q) + \varphi_2(q) = 1 \quad \forall q \in D$, e φ_1 é identicamente nula fora de $B_{2\delta}$ enquanto $\varphi_2 \equiv 0$ dentro de B_δ . Isto nos permite decompor g em D como

$$g(q) = \varphi_1(q)g(q) + \varphi_2(q)g(q),$$

onde $g_1 \equiv \varphi_1 g$ e $g_2 \equiv \varphi_2 g$ são continuamente diferenciáveis, e identicamente nulas respectivamente fora de $B_{2\delta}$ e dentro de B_δ .

Então

$$f_2(q) \equiv \frac{-1}{\pi^2} \int_D \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} g_2(q') v'$$

está definida e é continuamente diferenciável para $q \in B_\delta$. Sendo

$$\bar{\partial}_\ell \left\{ \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} \right\} = 0 \quad p/ \quad q \neq q',$$

segue que em B_δ

$$\bar{\partial}_\ell f_2(q) = \frac{-1}{\pi^2} \int_D \bar{\partial}_\ell \left\{ \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} \right\} g_2(q') v' = 0. \quad (1.83)$$

Por outro lado,

$$f_1(q) \equiv \frac{-1}{\pi^2} \int_D \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} g_1(q') v'$$

está definida e é continuamente diferenciável em B_δ , pois

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\pi^2} \int_D \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} g_1(q') v' &= \frac{-1}{\pi^2} \int_H \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} g_1(q') v' \\ &= \frac{-1}{\pi^2} \int_H \frac{u^{-1}}{|u|^2} g_1(q + u) v_u, \end{aligned}$$

onde $u = q' - q$, e o índice na forma de volume indica que é em relação a u que se procede a integração. Denotando por $\bar{\partial}'_\ell$ o operador $\bar{\partial}_\ell$ na variável q' ,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\ell f_1(q) &= \frac{-1}{\pi^2} \int_H \frac{u^{-1}}{|u|^2} \bar{\partial}_\ell \{g_1(q + u)\} v_u \\ &= \frac{-1}{\pi^2} \int_D \frac{(q' - q)^{-1}}{|q' - q|^2} \bar{\partial}'_\ell \{g_1(q')\} v' \\ &= g_1(q), \end{aligned} \quad (1.84)$$

onde na última passagem usamos a Proposição-1.15 juntamente com o fato de que $g_1|_{\partial D} \equiv 0$.

De (1.84) e (1.83) surge que a função f dada por (1.81) está definida e é continuamente diferenciável em B_δ , onde satisfaz ainda $\bar{\partial}_\ell f = g$. O teorema segue, então, da arbitrariedade do ponto q_0 .

Uma conseqüência imediata deste resultado é que, para g e D tal como no teorema, a equação

$$\bar{\partial}_\ell f = g \quad (1.85)$$

sempre possui solução em D , embora não única. A não unicidade segue do fato de que se f satisfaz (1.85), então $f + h$ também satisfaz para h regular qualquer. Portanto, (1.81) é a solução de (1.85) a menos de uma função regular a ser determinada pelas condições de contorno.

Cabe observar que também os últimos dois resultados são generalizações bastante naturais dos análogos complexos, como pode ser visto em [griffits].

1.5 Geração de Funções Regulares

Funções quaterniônicas regulares podem ser geradas a partir de funções harmônicas, de funções complexas regulares e por meio de transformações conformes em funções regulares, como estabelecem as seguintes proposições:

Proposição-1.17: Seja f uma função harmônica num aberto U , duas vezes continuamente diferenciável. Então $\partial_\ell f$ é regular em U .

Exemplo: para $q \neq q_0$, $|q - q_0|^{-2}$ é harmônica e $\partial_\ell |q - q_0|^{-2} = -\frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} = G(q - q_0)$ é regular, como já discutido na demonstração do Teorema-1.7 onde esta função figura como núcleo da Fórmula Integral.

Proposição-1.18: Seja ϕ uma função harmônica a valores reais, portanto duas vezes continuamente diferenciável, num conjunto aberto $V \subset \mathbb{H}$ com forma de estrela em relação a um ponto q_0 . Então a função

$$f(q) = \phi(q) + 2Pu \int_0^1 s^2 \partial_\ell \phi((1 - s)q_0 + sq)(q - q_0) ds \quad (1.86)$$

é regular em V .

Exemplo: tomando $\phi(q) = |q - q_0|^{-2}$ e $q_0 = 1$, obtemos o *logaritmo quaterniônico*,

$$L(q) = \frac{r^2 + te_i x_i}{2r^2(r^2 + t^2)} + \frac{e_i x_i}{2r^3} \arctan\left(\frac{r}{t}\right),$$

(r é o módulo da parte vetorial) o qual é regular e possui derivada $\partial_\ell L(q) = G(q)$.

Proposição-1.19: Seja $F = u + iv$ uma função complexa regular num aberto $W \subset \mathbb{C}$, e seja

$$f(q) = u(t, r) + \hat{r}v(t, r), \quad (1.87)$$

onde $r = \sqrt{x_k \bar{x}_k}$ e $\hat{r} = \frac{e_j x_j}{\sqrt{x_k \bar{x}_k}}$. Então, Δf é uma função regular em todo q tal que $t + ir \in W$.

Exemplo: para $F(z) = z^{-1}$ temos $\Delta f(z) = -4G(q)$, e para $F(z) = \ln z$, $\Delta f(z) = -4L(q)$.

As transformações conformes homográficas em \mathbb{H} são do tipo

$$\nu(q) = (aq + b)(cq + d)^{-1} \quad (a^{-1}b \neq c^{-1}d).$$

Com esta notação temos

Proposição-1.20: Se f é uma função regular em $\nu(q)$, então

$$f_\nu(q) = \frac{1}{|b - ac^{-1}d|^2} \frac{(cq + d)^{-1}}{|cq + d|^2} f(\nu(q)) \quad (1.88)$$

é regular em q .

A demonstração destas proposições é relativamente simples, pois consta essencialmente em verificar que são satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann-Fueter ([sudbery] e [deavours]). Existe ainda o Teorema de Extensão de Cauchy-Kovalevska, que serve para gerar funções regulares a partir de funções analíticas, o qual é discutido num contexto mais geral em [delanghe].

1.6 Séries e o Teorema dos Resíduos

Um aspecto muito importante da análise complexa é o Teorema dos Resíduos, o qual é útil desde o ponto de vista operacional no cálculo de integrais até o estudo de relações de dispersão, ou ainda no desenvolvimento de teorias físicas onde as singularidades representam fontes e sumidouros de partículas. Assim, é natural esperar que o estabelecimento de um resultado análogo para os quatérnios traga conseqüências não triviais, em virtude principalmente do maior número de dimensões presentes.

O Teorema dos Resíduos está intimamente relacionado com as séries para funções regulares. No caso complexo as funções regulares podem ser representadas por séries de

Taylor, ou por séries de Laurent quando da presença de singularidades. Trataremos inicialmente de estabelecer os análogos para as funções quaterniônicas. Para tanto, obviamente, não podemos empregar como base as potências de q , uma vez que em geral as mesmas são não regulares.

Empregando uma notação semelhante a de [sudbery], identificamos ν_n com o conjunto não ordenado de inteiros $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ onde $1 \leq i_r \leq 3$, ou ainda com $[n_1, n_2, n_3]$ onde n_1, n_2 e n_3 correspondem ao número de ocorrências de 1, 2 e 3 respectivamente no conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Portanto, para cada n existem $\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ tais conjuntos de ν_n cuja classe denotaremos por σ_n . Tal como na demonstração do Teorema-1.8, introduzimos o operador²¹

$$\partial_{\nu_n} = \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}},$$

para $G(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2}$

$$G_{\nu_n}(q) = \partial_{\nu_n} G(q),$$

e definimos ainda

$$P_{\nu_n}(q) = \frac{1}{n!} \sum (te_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (te_{i_n} - x_{i_n}),$$

onde neste último a soma é tomada sobre as $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ diferentes ordenações do conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Para $n = 0$, $P_{\nu_0}(q) = 1$.

Uma função quaterniônica f , definida num certo domínio, é denominada homogênea de grau n (inteiro) se $f(\alpha q) = \alpha^n f(q)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim é fácil ver que P_{ν_n} é uma função homogênea de grau n , e sendo G homogênea de grau -3 segue que G_{ν_n} é homogênea de grau $-n-3$ em todos os pontos de $\mathbb{H} - \{0\}$.

Denotamos por U_n o conjunto de funções regulares homogêneas de grau n (no domínio considerado), o qual forma um espaço vetorial quaterniônico por multiplicação à direita pois

$$\bar{\partial}_\ell [f(q)q_1 + g(q)q_2] = [\bar{\partial}_\ell f(q)]q_1 + [\bar{\partial}_\ell g(q)]q_2.$$

Como mostrado em [sudbery], tal espaço tem dimensão $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Usaremos este resultado para estabelecer a próxima proposição.

²¹Aqui não figuram derivadas em t .

Proposição-1.21: Os polinômios P_{ν_n} são regulares e formam uma base para U_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Dem.: Seja $f \in U_n$. Sendo f regular,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(q) + e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = 0, \quad (1.89)$$

e sendo homogênea de grau n ,

$$f(\alpha q) = \alpha^n f(q). \quad (1.90)$$

Derivando (1.90) em relação a α em $\alpha = 1$,

$$t \frac{\partial f}{\partial t}(q) + x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = n f(q) \quad (\text{fórmula de Euler}). \quad (1.91)$$

Assim, de (1.89) e (1.91),

$$n f(q) = -(te_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(q). \quad (1.92)$$

Agora, derivando (1.90) em relação a x_i obtemos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(q)$ é homogênea de grau $n - 1$, a qual é também regular pois $\bar{\partial}_\ell$ comuta com $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Isto nos permite repetir o argumento sucessivamente tal que depois de n vezes obtemos

$$n! f(q) = (-1)^n (te_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (te_{i_n} - x_{i_n}) \frac{\partial^n f(q)}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}, \quad (1.93)$$

onde, como sempre, soma-se sobre os índices repetidos. Trocando-se a ordem de derivação em (1.93) quando necessário, o que é permitido pois f é infinitamente diferenciável com continuidade,

$$f(q) = \sum_{\nu_n \in \sigma_n} (-1)^n P_{\nu_n}(q) \partial_{\nu_n} f(q). \quad (1.94)$$

Tomando (1.90) novamente e aplicando $\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}$ segue que $\partial_{\nu_n} f$ é regular homogênea de grau zero e portanto uma constante ($\in \mathbb{H}$), pois toda função constante é elemento de U_0 e $\dim U_0 = 1$. Assim, de (1.94), todo elemento de U_n pertence ao espaço vetorial quaterniônico V_n gerado por $\{P_{\nu_n}\}_{\nu_n \in \sigma_n}$ mediante multiplicação pela direita. A

recíproca segue de observar que a dimensão de U_n é igual ao número de elementos em $\{P_{\nu_n}\}_{\nu_n \in \sigma_n}$. Portanto $V_n = U_n$, e com isto mostramos que os polinômios P_{ν_n} são regulares e que $\{P_{\nu_n}\}_{\nu_n \in \sigma_n}$ é um conjunto linearmente independente (por produto quaterniônico à direita) o qual forma uma base para U_n ²².

Um aspecto importante da demonstração anterior é que ela nos fornece explicitamente, através de (1.94), a expressão dos elementos de U_n em termos de P_{ν_n} , o que nos permite estabelecer uma série para funções regulares análoga à série de Taylor em variáveis complexas.

Teorema-1.22: Seja f regular numa vizinhança V de q_0 . Então existe uma bola $B \subset V$ centrada em q_0 , na qual

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(q - q_0) a_{\nu_n}, \quad (1.95)$$

sendo esta série uniformemente convergente (para toda bola fechada de centro q_0 contida em B) e os coeficientes dados por

$$\begin{aligned} a_{\nu_n} &= (-1)^n \partial_{\nu_n} f(q_0) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial B} G_{\nu_n}(q - q_0) D_q f(q). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Dem.: Da regularidade segue que f é analítica em V . Então existe uma bola B centrada em q_0 tal que a série de Taylor de f em torno do ponto q_0 é uniformemente convergente (para toda bola fechada de centro q_0 contida em B), o mesmo ocorrendo com a série de Taylor das derivadas de todas as ordens de f . Ainda, a série de uma certa derivada de f é dada pela série de Taylor de f derivada termo a termo. Uma vez que²³

$$t = \frac{1}{4}(q - e_1 q e_1 - e_2 q e_2 - e_3 q e_3)$$

²²Obviamente, para funções r -regulares homogêneas um resultado simétrico a este sustenta-se ainda para a mesma base, a qual é portanto, regular à esquerda e à direita.

²³Destas relações pode ser observado, também, que $e_{\mu} q e_{\mu} = -2\bar{q}$.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{4e_1}(q - e_1qe_1 + e_2qe_2 + e_3qe_3) \\x_2 &= \frac{1}{4e_2}(q + e_1qe_1 - e_2qe_2 + e_3qe_3) \\x_3 &= \frac{1}{4e_3}(q + e_1qe_1 + e_2qe_2 - e_3qe_3)\end{aligned}$$

a série de Taylor de f pode ser escrita como

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(q - q_0), \quad (1.97)$$

onde $P^{(n)}$ é uma função polinomial homogênea de grau n ²⁴. A regularidade de f fornece

$$\begin{aligned}0 = \bar{\partial}_\ell f(q) &= \bar{\partial}_\ell \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(q - q_0) \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\partial}_\ell P^{(n)}(q - q_0)\end{aligned} \quad (1.98)$$

e sendo $\bar{\partial}_\ell P^{(n)}$ homogênea de grau $n - 1$, da independência linear segue que $\bar{\partial}_\ell P^{(n)} = 0$. Assim $P^{(n)}$ é regular homogênea de grau n o que nos permite usar (1.94) para obter²⁵

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} (-1)^n P_{\nu_n}(q - q_0) \partial_{\nu_n} P^{(n)}. \quad (1.99)$$

Posto que $\partial_{\nu_n} P^{(n)}$ é constante, $\partial_{\nu_n} P^{(m)}$ é zero para $n > m$ e homogênea de grau $m - n$ para $m > n$, de (1.97)

$$\partial_{\nu_n} f(q_0) = \partial_{\nu_n} P^{(n)}.$$

Com isto

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} (-1)^n P_{\nu_n}(q - q_0) \partial_{\nu_n} f(q_0) \quad (1.100)$$

Agora, da continuidade de G_{ν_n} ,

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_n} f(q_0) &= \partial_{\nu_n} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial B} G(q - q_0) D_q f(q) \right\} \\&= \frac{(-1)^n}{2\pi^2} \int_{\partial B} G_{\nu_n}(q - q_0) D_q f(q),\end{aligned}$$

²⁴Soma de termos do tipo $a_0 q a_1 \dots a_{n-1} q a_n$, portanto alternado por constantes quaterniônicas.

²⁵Obviamente, estamos sempre considerando $q \in B$.

o que encerra a demonstração²⁶.

Uma constatação interessante que podemos fazer agora diz respeito aos zeros de uma função regular. Ao contrário do caso complexo, para tais funções os mesmos são não necessariamente isolados. Como exemplo mais simples podemos tomar a função $f(q) = te_1 - x_1$, a qual zera no 2-plano $t = x_1 = 0$. Aliás, para $n > 0$, todo P_{ν_n} zera em um, na união de dois, ou de três planos do tipo $t = x_i = 0$. Embora a interferência entre os P_{ν_n} de mesmo grau imprima dificuldades à caracterização dos zeros de uma função regular arbitrária, da independência linear destes elementos segue que não existem bolas inteiramente contidas no conjunto de nulidade da função. Este resultado é importante para a implementação de prolongamentos analíticos via sucessivos abertos que se interceptam.

Afim de obter um resultado correspondente a série de Laurent, estabelecemos antes que

Lema-1.23: Para $|q| < |p|$

$$G(p - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(q) G_{\nu_n}(p) \quad (1.101)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} G_{\nu_n}(p) P_{\nu_n}(q), \quad (1.102)$$

sendo a convergência uniforme em $\{q \in \mathbb{H} / |q| \leq r|p|\}$ para $r < 1$.

Dem.: Segue do Teorema-1.22 mas, com o intuito de exercitar alguns argumentos que serão usados no Lema-2.11, elaboramos uma demonstração explícita para este resultado.

Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} G(p - q) &= \frac{(p - q)^{-1}}{|p - q|^2} \\ &= (\bar{p} - \bar{q})^{-1} (p - q)^{-1} (p - q)^{-1} \\ &= (1 - \bar{p}^{-1} \bar{q})^{-1} \bar{p}^{-1} (1 - p^{-1} q)^{-1} p^{-1} (1 - p^{-1} q)^{-1} p^{-1}, \end{aligned}$$

²⁶Por esta demonstração é fácil ver que B pode ser tomada como a maior bola (aberta) de centro q_0 inteiramente contida na vizinhança de regularidade V .

onde

$$(1-s)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n$$

converge absolutamente para $\{s \in \mathbb{H}/|s| < 1\}$, e uniformemente na bola $|s| \leq r$ para $r < 1$. Assim, para $|p^{-1}q| < 1$,

$$G(p-q) = \sum_{i=0}^{\infty} (\bar{p}^{-1}\bar{q})^i \bar{p}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (p^{-1}q)^j p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-1}q)^k p^{-1}.$$

Também para quaternions é válido o resultado de que o produto de séries absolutamente convergentes é absolutamente convergente e sua soma independe da ordenação dos termos²⁷, donde

$$\begin{aligned} G(p-q) &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} (\bar{p}^{-1}\bar{q})^i \bar{p}^{-1} (p^{-1}q)^j p^{-1} (p^{-1}q)^k p^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} (\bar{p}^{-1}\bar{q})^i \bar{p}^{-1} (p^{-1}q)^j p^{-1} (p^{-1}q)^k p^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Passaremos a denotar os $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ termos entre chaves em (1.103) por $P^{(n)}(p, q)$,

$$G(p-q) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(p, q). \quad (1.104)$$

Esta série é uniformemente convergente em $\{q \in \mathbb{H}/|q| \leq r|p|\}$ para $r < 1$, como pode ser facilmente visto pela aplicação do critério M de Weierstrass com a comparação feita em relação a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \frac{r^n}{|p|^3}.$$

Agora, $P^{(n)}$ é homogênea de grau n em q e, pelos mesmos argumentos usados na demonstração do teorema anterior, é também regular para $|q| < |p|$. Uma vez que toda função regular homogênea de grau n pode ser escrita como combinação de P_{ν_n} por (1.94),

$$P^{(n)}(p, q) = \sum_{\nu_n \in \sigma_n} (-1)^n P_{\nu_n}(q) \partial_{\nu_n}^q P^{(n)}(p, q), \quad (1.105)$$

²⁷A demonstração é a mesma que para o caso real (vide [kaplan] para os resultados sobre séries).

onde o índice q em $\partial_{\nu_n}^q$ indica que as derivadas se fazem em relação à variável q . Sendo $\partial_{\nu_n}^q P^{(n)}$ independente de q , $\partial_{\nu_n}^q P^{(m)}$ zero para $n > m$ e homogênea de grau $m - n$ em q para $m > n$, ao derivar (1.104) em $q = 0$:

$$\begin{aligned} (-1)^n G_{\nu_n}(p - q) \Big|_{q=0} &= \partial_{\nu_n}^q G(p - q) \Big|_{q=0} \\ &= \partial_{\nu_n}^q \sum_{m=0}^{\infty} P^{(m)}(p, q) \Big|_{q=0} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \partial_{\nu_n}^q P^{(m)}(p, q) \Big|_{q=0}, \end{aligned} \quad (1.106)$$

surge

$$\partial_{\nu_n}^q P^{(n)}(p, 0) = (-1)^n G_{\nu_n}(p),$$

e com isto obtemos (1.101)

$$G(p - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(q) G_{\nu_n}(p).$$

Para obter (1.102) basta observar que G é também regular à direita e P_{ν_n} é base das funções homogêneas de grau n regulares à direita²⁸.

Agora estamos em posição de estabelecer aquela que seria a série de Laurent. Porém, ao contrário do que fizemos no teorema anterior, já visando eventuais aplicações, deixaremos explícita a região de convergência da série. Assim, a série de Taylor, enquanto caso particular deste resultado, estará formulada de maneira ligeiramente diferente àquela do Teorema-1.22.

Teorema-1.24: Seja f regular num anel

$$A = \{q \in \mathbb{H} / r \leq |q - q_0| \leq R\}, \quad \text{para } 0 < r < R.$$

Então para q interior a A ,

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} \{P_{\nu_n}(q - q_0) a_{\nu_n} + G_{\nu_n}(q - q_0) b_{\nu_n}\}, \quad (1.107)$$

²⁸A última passagem para obter (1.106) é permitida pela convergência uniforme da série das derivadas.

cujos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a_{\nu_n} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_C G_{\nu_n}(q - q_0) D_q f(q), \\ b_{\nu_n} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_C P_{\nu_n}(q - q_0) D_q f(q), \end{aligned}$$

onde $C \subset A$ é uma 3-superfície fechada (continuamente diferenciável por pedaços) que envolve q_0 .

Dem.: Para $q \in \text{Int} A$, por argumentos análogos aos do caso complexo segue que

$$f(q) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_1} G(q' - q) D_{q'} f(q') - \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_2} G(q' - q) D_{q'} f(q'),$$

onde S_1 e S_2 são respectivamente as 3-esferas externa (raio R) e interna (raio r) que limitam A . Uma vez que $|q' - q_0| > |q - q_0|$ na primeira integral e $|q - q_0| > |q' - q_0|$ na segunda integral, pelo lema anterior

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_1} G((q' - q_0) - (q - q_0)) D_{q'} f(q') + \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_2} G((q - q_0) - (q' - q_0)) D_{q'} f(q') \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(q - q_0) G_{\nu_n}(q' - q_0) \right\} D_{q'} f(q') + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} G_{\nu_n}(q - q_0) P_{\nu_n}(q' - q_0) \right\} D_{q'} f(q') \quad (1.108) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} \left\{ P_{\nu_n}(q - q_0) \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_1} G_{\nu_n}(q' - q_0) D_{q'} f(q') + \right. \\ &\quad \left. + G_{\nu_n}(q - q_0) \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_2} P_{\nu_n}(q' - q_0) D_{q'} f(q') \right\}, \quad (1.109) \end{aligned}$$

onde a última passagem é permitida pela convergência uniforme das séries em (1.108) sobre S_1 e S_2 respectivamente. As funções integrando em (1.109) são regulares em A , o que nos permite trocar S_1 e S_2 por C nas integrais e com isto encerramos a demonstração.

Tomando $f = P_{\nu_n}$ e $f = G_{\mu_m}$ no teorema acima obtemos as seguintes relações:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_C G_{\mu_n}(q) D_q P_{\nu_m}(q) = \delta_{\mu_m \nu_n}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi^2} \int_C G_{\nu_n}(q) D_q G_{\mu_m}(q) &= 0 \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_C P_{\nu_n}(q) D_q P_{\mu_m}(q) &= 0 \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_C P_{\nu_n}(q) D_q G_{\mu_m}(q) &= \delta_{\mu_m \nu_n}\end{aligned}$$

Na série (1.107), quando q_0 é um ponto de singularidade isolado, ou seja, f é regular numa vizinhança de q_0 exceto no próprio q_0 , adotando a nomenclatura do caso complexo dizemos que o coeficiente b_{ν_0} é o resíduo de f no ponto q_0 . Em particular, quando trata-se de um pólo simples ($b_{\nu_0} \neq 0, b_{\nu_n} = 0$ p/ $n \geq 1$) o resíduo pode ser facilmente obtido através do seguinte limite²⁹

$$b_{\nu_0} = \lim_{q \rightarrow q_0} G^{-1}(q - q_0) f(q). \quad (1.110)$$

Apresentamos agora um importante resultado, a versão quaterniônica do Teorema dos Resíduos.

Teorema-1.25: Seja f regular num domínio simplesmente conexo U a menos de um número finito de pontos, e D um subdomínio ($\bar{D} \subset U$) cuja fronteira ∂D é uma superfície continuamente diferenciável por pedaços. Então, se q_1, \dots, q_n são os pontos singulares de f em D e R_1, \dots, R_n os respectivos resíduos, temos

$$\int_{\partial D} D_q f(q) = 2\pi^2 \sum_{j=1}^n R_j. \quad (1.111)$$

Dem.: Imediata do teorema anterior.

Uma das aplicações deste teorema surge no cálculo de integrais impróprias em \mathbb{R}^3 . Porém, cabe uma ressalva: uma vez que o produto e a composição de funções regulares

²⁹De (1.107)

$$\lim_{q \rightarrow q_0} G^{-1}(q - q_0) [f(q) - G(q - q_0) b_{\nu_0}] = \lim_{q \rightarrow q_0} G^{-1}(q - q_0) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(q - q_0) a_{\nu_n} \right],$$

onde a convergência uniforme da série do lado direito (é uniforme pois trata-se de uma série de potências) implica em sua soma ser função contínua e portanto o limite à direita vale zero, donde segue (1.110).

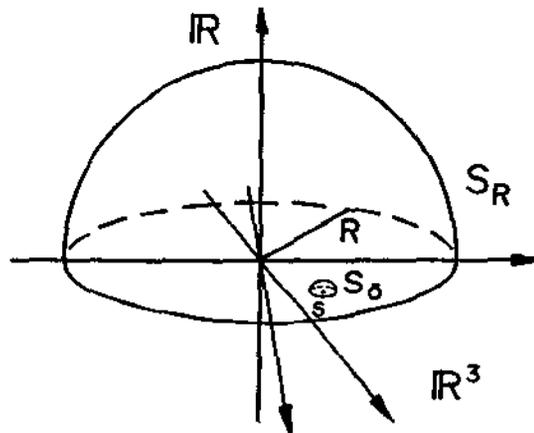
é em geral não regular, aqui o cálculo dos resíduos tem aplicação mais restrita do que no caso complexo.

Adotamos agora um procedimento já conhecido da análise complexa ([byron]) que, além de fornecer um método para cálculo de integrais (vide (1.112) abaixo), tem por conseqüência aquele que talvez seja o mais importante resultado desta seção em virtude da possível aplicação a Relações de Dispersão ([nussenzeig]). Trata-se do análogo das transformações de Hilbert.

Seja f uma função regular no semi-espaco $t \geq 0$ e no qual satisfaz $\lim_{|q| \rightarrow \infty} |f(q)| = 0$. Da regularidade de f ,

$$\int_C G(q-s) D_q f(q) = 0,$$

onde C é o 3-contorno representado esquematicamente abaixo e $s \in \mathbb{H}^3$ (subespaço de \mathbb{H} definido por $t = 0$)³⁰. Nesta figura S_δ e S_R são as 3-semi-esferas de raio δ e R centradas respectivamente em s e na origem.



Contorno de integração em \mathbb{H} .

No limite $\delta \rightarrow 0$ a integral em S_δ resulta $-\pi^2 f(s)$, o que segue da continuidade de f e do teorema anterior (tendo em vista a simetria da integral). Uma vez que para $R \rightarrow \infty$ D_q vai com R^3 , $|G(q-s)|$ vai com R^{-3} e $|f(q)| \rightarrow 0$, a integral em S_R não contribui neste

³⁰Em outras palavras, s é puramente vetorial, porém, para não carregar a notação desnecessariamente omitiremos as setas por ora.

limite. Então, posto que $D_q|_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \equiv D_x$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(x-s) D_x f(x) = -\pi^2 f(s). \quad (1.112)$$

Esta integral, que é imprópria, é o análogo do valor principal de Cauchy do caso complexo. A relação integral (1.112) é a base para o estabelecimento das transformações de Hilbert, como atesta o resultado seguinte.

Proposição-1.26: Seja $f = \phi + \vec{\psi}$ regular no semi-espaço $t \geq 0$, no qual $\lim_{|q| \rightarrow \infty} |f(q)| = 0$. Então, empregando a notação $G|_{\mathbb{R}^3} = \vec{g}$, temos

$$\phi(s) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{g}(x-s) \cdot \vec{\psi}(x) dv^3 \quad (1.113)$$

$$\vec{\psi}(s) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{g}(x-s)\phi(x) + \vec{g}(x-s) \times \vec{\psi}(x)] dv^3 \quad (1.114)$$

onde dv^3 é o elemento de volume em \mathbb{R}^3 .

Dem.: Segue de (1.112) mediante a identificação de D_x com dv^3 (positivamente orientado).

Essencialmente, esta proposição nos fornece relações integrais entre as componentes da função f , cada uma das quais expressa em termos das outras três.

Em [menon] apresentamos a primeira aplicação do resultado acima. Trata-se de relações de dispersão quaterniônicas em fenomenologia de partículas elementares, para o estudo de espalhamentos hadron-hadron.

ANÁLISE BIQUATERNIÔNICA

Tomamos os quatérnios complexificados ($\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$), denominados biquatérnios, e estudamos a teoria de funções correspondente. Trata-se de uma álgebra complexa com divisores de zero, o que traz dificuldades ao estabelecimento de uma Fórmula Integral, a qual no entanto existe, constituindo o ponto principal e mais bonito deste capítulo.

2.1 Introdução

Da mesma forma que os quatérnios estão associados a rotações em \mathbb{R}^3 , os biquatérnios possuem na sua estrutura, além das rotações usuais, as transformações de Lorentz subluminais e aquelas que podem ser interpretadas como superluminais em $M_{1,3}$ ([imaeda 1979]). Ainda, o cone de luz e a métrica de Minkowski aparecem de modo natural no subespaço dos biquatérnios reais, induzidos pela norma biquaterniônica. Isto torna esta estrutura muito atraente para o estudo da teoria de funções associadas.

Os resultados são de fato interessantes, pois uma abordagem com a caracterização das funções regulares via Fueter produz “equações de Cauchy-Riemann-Fueter” que podem ser reduzidas às equações de Maxwell do eletromagnetismo, e proporciona também a existência de uma Fórmula Integral, o que é admirável em se tratando de uma álgebra com divisores de zero.

Os primeiros trabalhos em análise biquaterniônica parecem ter sido feitos por K. Imaeda ao estudar um novo formalismo para a eletrodinâmica clássica (vide [imaeda 1976] e referências). Idéia semelhante foi também explorada por N. Salinas, em [salinas], usando a álgebra de Clifford sobre o espaço de Minkowski.

Do ponto de vista matemático, [imaeda 1976] consta de pouco rigor e é incompleto em alguns pontos. Posteriormente, porém, J. Ryan ([ryan 1990]) formalizou parte destes resultados no contexto das análises de Clifford complexas. Inspirados nestes trabalhos, apresentamos uma formulação precisa da Fórmula Integral e de algumas de suas conseqüências.

2.2 Biquatérnios

Os biquatérnios (\mathcal{B}) podem ser introduzidos como o conjunto de todas as quádruplas complexas ordenadas, ou seja $\{(z_0, z_1, z_2, z_3); z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\}$, com as operações de soma e produto por escalar usuais de \mathbb{C}^4 e munido do produto biquaterniônico, o qual é uma aplicação bilinear $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ mais convenientemente definida em termos da base $1 = (1, 0, 0, 0), \sigma_1 = (0, 1, 0, 0), \sigma_2 = (0, 0, 1, 0), \sigma_3 = (0, 0, 0, 1)$, a saber³¹

$$\sigma_k \sigma_m = \delta_{km} + \varepsilon_{kmn} i \sigma_n. \quad (2.1)$$

Em notação vetorial,

$$Z = z_0 + \vec{z},$$

o produto adquire a forma

$$\begin{aligned} ZW &= (z_0 + \vec{z})(w_0 + \vec{w}) \\ &= z_0 w_0 + \vec{z} \cdot \vec{w} + z_0 \vec{w} + w_0 \vec{z} + i \vec{z} \times \vec{w}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $\vec{z} \cdot \vec{w} \equiv z_k w_k$ e $\vec{z} \times \vec{w} \equiv \varepsilon_{kmn} z_k w_m \sigma_n$; $k, m, n = 1, 2, 3$ ³².

É consequência de (2.1) que

$$(\sigma_k \sigma_m) \sigma_n = \sigma_k (\sigma_m \sigma_n), \quad (2.3)$$

e trata-se portanto de uma álgebra associativa, embora não comutativa. De fato, por (2.2),

$$ZW - WZ = 2i \vec{z} \times \vec{w}, \quad (2.4)$$

o que mostra que o centro da estrutura é \mathbb{C} . Denotando $z_u = x_u + iy_u$, outra notação que pode ser empregada é

$$\begin{aligned} Z &= z_0 + z_k \sigma_k \\ &= x_0 + \vec{x} + iy_0 + i\vec{y}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sendo os biquatérnios uma álgebra sobre corpo complexo podemos conjugar em relação a sua base, em relação ao corpo ou em relação a ambos, definindo

³¹Aqui i é a unidade imaginária complexa.

³²Empregamos índices latinos para denotar 1, 2 e 3, e índices gregos para 0, ..., 3.

$$\bar{Z} = x_0 - \vec{x} + iy_0 - i\vec{y} \quad (\text{conjugado hipercomplexo}), \quad (2.6)$$

$$Z^* = x_0 + \vec{x} - iy_0 - i\vec{y} \quad (\text{conjugado complexo}), \quad (2.7)$$

os quais satisfazem

$$\overline{ZW} = \bar{W} \bar{Z}, \quad (2.8)$$

$$(ZW)^* = W^* Z^*. \quad (2.9)$$

Veremos que o conjugado hipercomplexo coincide com a conjugação usual no caso quaterniônico e pseudoquaterniônico, e como queremos que a norma também coincida é adequado defini-la como

$$\begin{aligned} N(Z) &= Z \bar{Z} \\ &= z_0^2 - z_k z_k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De (2.10) segue que N pode assumir qualquer valor complexo, havendo inclusive $N(Z) = 0$ para $Z \neq 0$ e portanto \mathbb{B} não é álgebra de divisão. Os únicos divisores de zero são aqueles com norma nula ($\Leftrightarrow z_0^2 = z_i z_i$), e os demais admitem inversa única

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{N(Z)}. \quad (2.11)$$

Por (2.8)

$$N(ZW) = N(Z)N(W) \quad (\text{álgebra de composição}), \quad (2.12)$$

$$(ZW)^{-1} = W^{-1}Z^{-1}. \quad (2.13)$$

São também úteis as identidades

$$(Z^*)^{-1} = (Z^{-1})^*, \quad (2.14)$$

$$(\bar{Z})^{-1} = \overline{(Z^{-1})}. \quad (2.15)$$

De (2.1) temos que os elementos da base $\{1, \sigma_k; k = 1, 2, 3\}$ são isomorfos às matrizes de Pauli

$$1 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 \approx \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

donde \mathbb{B} é isomorfo as matrizes complexas $\mathbb{C}^{2 \times 2}$,

$$z \approx M_z = \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

De fato, trata-se de uma bijeção onde $M_z + M_w = M_{z+w}$ e $M_z M_w = M_{zw}$. Ainda,

$$N(Z) = \det M_z \quad (2.18)$$

e portanto preserva-se a norma nas transformações mediante as quais o determinante da matriz isomorfa é invariante. Através deste isomorfismo podemos operar com matrizes, usando resultados já conhecidos das mesmas, como por exemplo na exponenciação de elementos de \mathbb{B} .

Os biquatérnios, que podem ser identificados com $\mathbb{C}^4 (= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3)$, possuem subespaços isomorfos aos quatérnios e aos pseudoquatérnios (pelo produto induzido), como já mencionamos. Os quatérnios podem ser vistos como o subespaço $\mathbb{R} \oplus (-i)\mathbb{R}^3$, ou equivalentemente

$$\mathbb{H} \approx \{Z \in \mathbb{B}; \bar{Z}^* = Z\}, \quad (2.19)$$

onde a base quaterniônica usual é³³

$$e_k \approx -i\sigma_k. \quad (2.20)$$

De forma análoga para os pseudoquatérnios basta considerar coeficientes reais em relação à base usual que agora pode ser tomada como

$$e'_1 \approx -i\sigma_1, e'_2 \approx \sigma_2, e'_3 \approx \sigma_3. \quad (2.21)$$

Um subespaço também particularmente interessante é o dos biquatérnios reais,

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \equiv \{Z \in \mathbb{B}; Z^* = Z\}, \quad (2.22)$$

³³Obviamente estas identificações não são únicas. Em particular ao tomar $e_k \approx i\sigma_k$ obtemos uma álgebra isomorfa aos quatérnios (com inversão dos eixos espaciais). Para \mathbb{H} e \mathbb{B} os elementos genéricos ficam dados respectivamente por $Z = x_0 - y_k(-i\sigma_k)$ e $Z' = x_0 - y_1(-i\sigma_1) + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$.

cujos elementos são do tipo

$$X = x_0 + \vec{x}, \quad (2.23)$$

o que permite identificá-los com $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$. Embora, ao contrário dos casos anteriormente estudados, $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ não seja fechado em relação ao produto, seus elementos gozam de propriedades muito úteis para aplicações físicas. Podemos inicialmente observar que a norma dos elementos de $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ reproduz a métrica de Minkowski,

$$N(X) = x_0^2 - x_k x_k. \quad (2.24)$$

Outro aspecto, discutido nos próximos teoremas, é a relação entre as transformações de Lorentz e as transformações lineares representadas na estrutura biquaterniônica.

Proposição-2.1:

(i) A aplicação

$$X \rightarrow AXB + C \quad (2.25)$$

é uma transformação linear de $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ em $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ com $A, B, C \in \mathbb{B}$ e $N(A) \neq 0$, se e somente se $C \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ e $B = kA^*$ para algum $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Com relação a (i) as transformações que preservam a norma podem ser escritas como

$$X \rightarrow \pm A'XA'^*, \quad (2.26)$$

com $N(A') = \pm 1$.

Dem.(i): Para que a imagem de (2.25) pertença a $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ devemos ter $(AXB + C)^* = AXB + C \quad \forall X \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Em particular, tomando $X = 0$ obtemos $C^* = C$, logo $C \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, e assim $B^*XA^* = AXB$, donde

$$A^{-1}B^*X = X(A^{-1}B^*)^*. \quad (2.27)$$

Uma vez que (2.27) é válida para $X = 1$,

$$A^{-1}B^* = (A^{-1}B^*)^*. \quad (2.28)$$

Então $A^{-1}B^*$ comuta com todo $X \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, e portanto deve ser escalar em virtude de (2.4) e real devido a (2.28). Segue então que $B = kA^*$ para $k \in \mathbb{R}$.

(ii): Obviamente, é necessário $k \neq 0$ para que a norma seja preservada. Ao tomar $X = 0$ em (2.25) a preservação da norma implica em $N(C) = 0$. Assim $X \rightarrow AXB$ é uma transformação linear inversível, portanto uma bijeção, que por (2.12) associa elementos de norma nula a elementos de norma nula. Supondo $C \neq 0$ podemos tomar X , com $N(X) = 0$, tal que $AXB = \bar{C}$ o que viola a hipótese de preservar a norma em (2.25). Logo $C = 0$. Ainda,

$$\begin{aligned} AXB &= \pm(\sqrt{|k|}A)X(\sqrt{|k|}A^*) \\ &= \pm A'XA'^*, \end{aligned}$$

donde $N(AXB) = N(X) \Leftrightarrow N(A') = \pm 1$.

Na próxima proposição \mathcal{L}_+^\uparrow denota o grupo de Lorentz (homogêneo) próprio ortócrono, e $\mathcal{L}_+^\downarrow, \mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_-^\downarrow$ denotam, respectivamente, os casos próprio não ortócrono, impróprio ortócrono, e impróprio não ortócrono. Os elementos serão denotados pelas correspondentes letras minúsculas, por exemplo ℓ_+^\uparrow para \mathcal{L}_+^\uparrow .

Proposição-2.2: Para $N(A) = 1$

(i) A aplicação

$$X \rightarrow AXA^* \tag{2.29}$$

é uma transformação de Lorentz própria ortócrona, e toda $\ell_+^\uparrow \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ é gerada por uma aplicação deste tipo, sendo a correspondência dois-um (espinorial),

$$\{A, -A\} \rightarrow \ell_{+(A)}^\uparrow. \tag{2.30}$$

O grupo de Poincaré é gerado admitindo a parte não homogênea,

$$X \rightarrow AXA^* + C, \quad C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}. \tag{2.31}$$

(ii) A aplicação

$$X \rightarrow -AXA^* \tag{2.32}$$

é Lorentz própria não ortócrona, e toda $\ell_+^\dagger \in \mathcal{L}_+^\dagger$ é assim gerada sendo a correspondência

$$\{A, -A\} \rightarrow \ell_{+(A)}^\dagger. \quad (2.33)$$

(iii) Analogamente,

$$X \rightarrow A\bar{X}A^* \quad (2.34)$$

é Lorentz imprópria ortócrona, e

$$\{A, -A\} \rightarrow \ell_{-(A)}^\dagger. \quad (2.35)$$

(iv) Ainda,

$$X \rightarrow -A\bar{X}A^* \quad (2.36)$$

é Lorentz imprópria não ortócrona, onde neste caso temos

$$\{A, -A\} \rightarrow \ell_{-(A)}^\dagger. \quad (2.37)$$

Dem.(i): Denotando as matrizes de Pauli por $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ e σ_3 (vide (2.16)), toda matriz 2×2 hermitiana pode ser escrita como

$$Q = x_0\sigma_0 + x_k\sigma_k.$$

É conhecido o resultado ([barut],[naber]) de que para $M \in SL(2, \mathbb{C})$ ³⁴ a aplicação³⁵

$$Q \rightarrow MQM^\dagger \quad (2.38)$$

é transformação de Lorentz própria ortócrona nas coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) , e que toda $\ell_+^\dagger \in \mathcal{L}_+^\dagger$ pode ser representada por (2.38) para algum $M \in SL(2, \mathbb{C})$. Assim surge um homomorfismo dois-um entre $SL(2, \mathbb{C})$ e \mathcal{L}_+^\dagger pelo qual todo $\ell_+^\dagger \in \mathcal{L}_+^\dagger$ é imagem de $\pm M$ para algum $M \in SL(2, \mathbb{C})$.

Agora, tendo em vista o isomorfismo (2.17),

$$\begin{aligned} X &= x_0 + x_k\sigma_k \approx Q_X = x_0\sigma_0 + x_k\sigma_k, \\ A &= z_0 + z_k\sigma_k \approx M_A = z_0\sigma_0 + z_k\sigma_k \Rightarrow M_A^\dagger = M_{A^*}, \end{aligned}$$

³⁴Matrizes complexas 2×2 unimodulares (com determinante +1).

³⁵ M^\dagger é a matriz adjunta de M .

a proposição segue imediatamente do resultado já conhecido para $SL(2, \mathbb{C})$.

(ii): Considerando por ora a representação matricial das transformações de Lorentz, L é matriz de Lorentz se e só se

$$L^t \eta L = \eta, \quad (2.39)$$

onde $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Uma vez que \mathcal{L}_+^\uparrow corresponde aquele conjunto de matrizes que satisfazem (2.39), com $\det L = +1$ e $L_{11} \geq 1$, é evidente que \mathcal{L}_+^\downarrow , formado pelas matrizes com $\det L = +1$ e $L_{11} \leq -1$, é obtido multiplicando-se os elementos de \mathcal{L}_+^\uparrow por -1 . Com isto (ii) segue de (i).

(iii): Na notação acima \mathcal{L}_-^\uparrow corresponde às matrizes com $\det L = -1$ e $L_{11} \geq 1$, as quais podem ser obtidas por uma inversão espacial (conjugação) seguida de Lorentz própria ortócrona. Assim (iii) segue de (i).

(iv): \mathcal{L}_-^\downarrow corresponde às matrizes com $\det L = -1$ e $L_{11} \leq -1$, obtidas multiplicando-se os elementos de \mathcal{L}_-^\uparrow por -1 . Tendo em vista (iii), isto encerra a demonstração.

Em [Imaeda 1979] Imaeda discute uma formulação taquiônica em termos de biquatérnios. A fim de preservar a métrica de Minkowski (a menos de sinal) mediante transformações de Lorentz em $M_{1,3}$, o autor levanta a necessidade de trabalhar com um espaço-tempo 4-dimensional complexo. Por exemplo, para um "boost" superluminal na direção x_1 , a transformação de coordenadas fica dada por

$$x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, x'_2 = ix_2, x'_3 = ix_3, \beta > 1, \quad (2.40)$$

para a qual temos

$$(x_0'^2 - x_k' x_k') = -(x_0^2 - x_k x_k). \quad (2.41)$$

Para manter a consistência lógica, temos que toda transformação de Lorentz superluminal pode ser escrita como produto de (2.40) por duas transformações subluminais.

Na estrutura biquaterniônica estes resultados ficam expressos de maneira bastante natural, como atesta a seguinte proposição.

Proposição-2.3:

(i) Para $X = x_\mu e_\mu$, a transformação (2.40) pode ser identificada com a seguinte aplicação

$$X \rightarrow AXA^*B, \quad (2.42)$$

onde $A = \exp\{-(\chi/2 - i\pi/4)e_1\}$, $B = -e_1$ e $\chi = \text{arc cotgh } \beta$.

(ii) Uma transformação de Lorentz superluminal pode ser identificada com uma aplicação do tipo

$$Z \rightarrow AZA^*B, \quad (2.43)$$

com $N(A) = 1$, $N(B) = -1$, $\bar{B} = -B$, sendo a recíproca também verdadeira.

Dem.(i): Basta comparar a forma explícita de (2.42) com (2.40).

(ii): Segue de (i) e do fato das transformações superluminais serem expressas como composição de (2.42) com transformações subluminais³⁶.

A base $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ mostrou-se adequada para o estudo das propriedades algébricas dos biquatérnios, principalmente devido às proposições 2.1, 2.2 e 2.3. Tendo em vista porém que os quatérnios são uma subálgebra dos biquatérnios esperamos, na construção da análise biquaterniônica, resgatar (ou comparar com) resultados obtidos no capítulo 1. Para tanto parece mais adequado o emprego da base $\{1, e_1, e_2, e_3\}$, isomorfa à base quaterniônica usual. Estas bases estão relacionadas por (2.20).

A menos de menção explícita em contrário, nas próximas seções os elementos e funções de \mathbb{H} estarão sempre representados nesta nova base, para a qual definimos

$$\begin{aligned} Z &= z_0 + \vec{z} \\ &= z_0 + z_k e_k \\ &= x_0 + i\vec{x} + iy_0 + i\vec{y} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\bar{Z} = x_0 - \vec{x} + iy_0 - i\vec{y} \quad (2.45)$$

$$Z^* = x_0 + \vec{x} - iy_0 - i\vec{y} \quad (2.46)$$

³⁶Está claro que (2.43) preserva a norma biquaterniônica. Para interpretação física referimos o artigo citado acima.

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} ZW &= (z_0 + \vec{z})(w_0 + \vec{w}) \\ &= z_0 w_0 - \vec{z} \cdot \vec{w} + z_0 \vec{w} + w_0 \vec{z} + \vec{z} \times \vec{w}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$N(Z) = Z\bar{Z} = z_0^2 + z_k z_k. \quad (2.48)$$

2.3 Formas Diferenciais Biquaterniônicas

A definição de formas diferenciais a valores biquaterniônicos, bem como produto exterior, derivação exterior, integração e Teorema de Stokes seguem imediatamente do caso quaterniônico (seção 1.3). De fato, as formas diferenciais são definidas sobre a álgebra assumindo valores na álgebra da maneira usual e, assim, a única modificação em relação aos quatérnios é que neste caso a álgebra é feita sobre corpo complexo. Como conseqüência, em cada ponto a forma diferencial fornecerá uma aplicação multilinear alternada com respeito aos complexos (e não mais aos reais como para \mathbb{H}).

As afirmações acima podem ser justificadas observando-se que em \mathbb{C}^4 o espaço tangente a um ponto (z_0, z_1, z_2, z_3) , onde $z_\mu = x_\mu + iy_\mu$ e $\bar{z}_\mu = x_\mu - iy_\mu$, pode ser identificado com o espaço vetorial complexo de base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right\}_{\mu=0}^3$, ou equivalentemente em termos da base complexa $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\mu} \right\}_{\mu=0}^3$, sendo estes últimos definidos por

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + i \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right). \quad (2.49)$$

As formas complexas podem, então, ser definidas em termos da base dual de (2.49),

$$dz_\mu = dx_\mu + idy_\mu, \quad d\bar{z}_\mu = dx_\mu - idy_\mu, \quad (2.50)$$

e assim a base das k -formas complexas fica dada por

$$\{ dz_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz_{\mu_p} \wedge d\bar{z}_{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\nu_q} / \mu_1 < \dots < \mu_p, \nu_1 < \dots < \nu_q, p + q = k \}. \quad (2.51)$$

Identificando \mathbb{C}^4 com \mathbb{B} segue que uma k -forma será uma combinação linear de formas do tipo (p, q) , com $p + q = k$, dadas por

$$\omega_Z^{(p,q)} = \sum_{\substack{\mu_1 < \dots < \mu_p \\ \nu_1 < \dots < \nu_q}} a_{\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_q}^{(p,q)}(Z) dz_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz_{\mu_p} \wedge d\bar{z}_{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\nu_q}, \quad (2.52)$$

onde $a_{\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_q}^{(p,q)} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ são funções biquaterniônicas³⁷.

O operador de derivação exterior tem agora o seguinte aspecto:

$$d = d' + d'', \quad (2.53)$$

onde d' age procedendo derivações em relação a $\{z_\mu\}_{\mu=0}^3$ e levando uma (p, q) -forma a uma $(p+1, q)$ -forma, enquanto d'' age de modo análogo em relação a $\{\bar{z}_\mu\}_{\mu=0}^3$ produzindo uma $(p, q+1)$ -forma. Portanto, atentando-se para o fato de que agora a derivação exterior se procede em relação a (2.53), o Teorema de Stokes (Teorema-1.3) se mantém, como já antes mencionado.

Na teoria de funções que estudaremos neste capítulo existe uma notável simplificação. Trabalharemos apenas com formas holomorfas (tipo $(p, 0)$), ou seja fechadas em relação ao operador d'' ($d''w = 0$), as quais podem ser escritas em termos de $\{dz_\mu\}_{\mu=0}^3$, ficando portanto com estrutura muito parecida àquela do caso real.

Assim, de modo geral, as formas a serem usadas são meras complexificações das correspondentes formas quaterniônicas. Por exemplo, para $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ diferenciável no sentido complexo em $Z \in \mathbb{B}$,

$$df_z = \frac{\partial}{\partial z_0} f(Z) dz_0 + \frac{\partial}{\partial z_k} f(Z) dz_k, \quad (2.54)$$

enquanto (1.32), (1.33), (1.36) e (1.34) serão agora substituídas respectivamente por

³⁷Fica claro que temos 0, 1, ... e 8-formas não trivialmente nulas neste caso.

$$dZ = dz_0 + e_k dz_k \quad (2.55)$$

$$dZ \wedge dZ = \varepsilon_{kmn} e_k dz_m \wedge dz_n \quad (2.56)$$

$$D_z = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 - \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} e_k dz_0 \wedge dz_m \wedge dz_n \quad (2.57)$$

$$v_z = dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \quad 38 \quad (2.58)$$

2.4 Funções Biquaterniônicas Regulares

A fim de estudar a teoria de funções sobre \mathbb{B} , novamente nos deparamos com o problema de definir um conjunto de funções que seja ao mesmo tempo amplo e com propriedades interessantes, e no qual se sustente os principais teoremas de análise.

Tendo em vista a teoria de funções quaterniônicas estudada no capítulo 1, com a linguagem que vimos empregando, a extensão das definições e conceitos é bastante sugestiva, e a regularidade pode ser caracterizada de modo natural via Fueter. Apesar disto, em virtude de não se tratar de uma álgebra de divisão, existem diferenças fundamentais que se refletirão principalmente na Fórmula Integral a ser obtida. Estes pontos serão abordados em detalhe enquanto resultados secundários e/ou que possuem análogos discutidos nos capítulos anteriores serão omitidos.

No caso quaterniônico era exigido "a priori" que as funções regulares fossem diferenciáveis no sentido real em \mathbb{R}^4 , e devido a regularidade surge que estas são de fato analíticas. Assim, parece razoável exigir diferenciabilidade no sentido real (em \mathbb{R}^8) para funções de \mathbb{B} em \mathbb{B} regulares. Porém, a fim de evitar dificuldades operacionais (na aplicação do Teorema de Stokes, por exemplo) faremos uma exigência mais forte neste caso: restringimos nosso estudo a funções diferenciáveis no sentido complexo em \mathbb{C}^4 ³⁹. A exigência de diferenciabilidade complexa apresenta-se mais compatível com a estrutura algébrica dos biquatérnios, pois trata-se de uma álgebra complexa. Assim,

³⁸ Cabe observar que agora v_z assume valores complexos, não admitindo em geral a interpretação de medida euclidiana de volume. Observação análoga se faz em relação a D_z .

³⁹ É conhecido que estas funções, que passaremos a chamar de holomorfas, são de fato analíticas. A holomorfia pode ser caracterizada por $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\mu} = 0$.

Definição: Uma função $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ holomorfa em $Z \in \mathbb{B}$ é regular à esquerda em Z se existe $f'(Z) \in \mathbb{B}$ tal que

$$dZ \wedge dZ \wedge df_z = D_z f'(Z). \quad (2.59)$$

De maneira óbvia podemos definir também a regularidade à direita. No entanto, a menos que mencionemos explicitamente o contrário, o termo *regular* sem outros especificadores significará regular à esquerda.

Os operadores correspondentes a (1.42) e (1.44) são agora definidos como

$$\partial_\ell^z f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} - e_k \frac{\partial f}{\partial z_k} \right), \quad (2.60)$$

$$\Delta^z f = 4\bar{\partial}_\ell^z \partial_\ell^z f = \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial z_k}. \quad (2.61)$$

As equações de Cauchy-Riemann-Fueter surgem na seguinte proposição.

Proposição-2.4: Uma função $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ holomorfa em $Z \in \mathbb{B}$ é regular em Z se e somente se $\bar{\partial}_\ell^z f(Z) = 0$.

Dem.: Idem ao caso quaterniônico.

A equação $\bar{\partial}_\ell^z f(Z) = 0$ possui oito EDPs reais acopladas, tal como as equações de Maxwell⁴⁰. Ao empregar a notação vetorial $f = \phi_0 + \vec{\phi} + i\psi_0 + i\vec{\psi}$ estas equações podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial z_0}(\phi_0 + i\psi_0) = \vec{\nabla}^z \cdot (\vec{\phi} + i\vec{\psi}), \quad (2.62)$$

$$\vec{\nabla}^z(\phi_0 + i\psi_0) = \frac{\partial}{\partial z_0}(\vec{\phi} + i\vec{\psi}) + \vec{\nabla}^z \times (\vec{\phi} + i\vec{\psi}), \quad (2.63)$$

ou ainda, usando (2.49),

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} = \vec{\nabla}^x \cdot \vec{\phi} + \vec{\nabla}^y \cdot \vec{\psi} \quad (2.64)$$

⁴⁰A conexão entre ambas será oportunamente explorada na seção 2.7.

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial y_0} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} = \vec{\nabla}^y \cdot \vec{\phi} - \vec{\nabla}^x \cdot \vec{\psi} \quad (2.65)$$

$$\vec{\nabla}^x \phi_0 + \vec{\nabla}^y \psi_0 = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_0} + \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_0} + \vec{\nabla}^x \times \vec{\phi} + \vec{\nabla}^y \times \vec{\psi} \quad (2.66)$$

$$\vec{\nabla}^y \phi_0 - \vec{\nabla}^x \psi_0 = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y_0} - \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_0} + \vec{\nabla}^y \times \vec{\phi} - \vec{\nabla}^x \times \vec{\psi} \quad (2.67)$$

onde o índice em $\vec{\nabla}$ indica a variável em relação a qual são feitas as derivações.

Também aqui temos um teorema tipo Cauchy.

Teorema-2.5: Seja g r -regular e f ℓ -regular em U . Para M , com $\overline{M} \subset U$, uma variedade 4-dimensional mergulhada em \mathbb{B} com fronteira ∂M , temos⁴¹

$$\int_{\partial M} g D_z f = 0. \quad (2.68)$$

Dem.: Segue do Teorema de Stokes e da identidade correspondente a (1.55).

Denotaremos por $C^L(Z_0) = \{Z \in \mathbb{B} / N(Z - Z_0) = 0\}$ o cone de luz centrado em Z_0 , e por $T_{Z_0}M$ o espaço tangente a variedade M no ponto Z_0 .

Definição: Uma variedade 4-dimensional real é dita *variedade de tipo um* se for tal como no teorema anterior e gozando ainda da seguinte propriedade

$$M \cap C^L(Z) = T_Z M \cap C^L(Z) = \{Z\} \quad \forall Z \in M.$$

Sobre este tipo particular de variedade podemos estabelecer um resultado surpreendente: uma Fórmula Integral embora a álgebra possua divisores de zero.

⁴¹Embora não mencionado explicitamente, estamos sempre supondo que tais variedades e fronteiras sejam continuamente diferenciáveis por pedaços, bem como compactas e orientáveis.

Teorema-2.6: Seja f uma função regular em U e $M \subset U$ uma variedade de tipo um. Então para todo ponto Z_0 interior a M , temos

$$f(Z_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial M} \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} D_z f(Z). \quad (2.69)$$

Dem.: A demonstração que apresentamos aqui segue de perto aquela feita por [ryan 1990] para estabelecer fórmulas integrais generalizadas em álgebras de Clifford.

Uma vez que $g(Z) = \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)}$ é r -regular para $N(Z - Z_0) \neq 0$, pelo teorema anterior, podemos substituir ∂M pela fronteira $\partial M'$ de uma subvariedade 4-dimensional de M que possui Z_0 em seu interior, a qual é homeomorfa à 3-esfera. Para $\partial M'$ suficientemente pequeno (obtido por exemplo pela interseção de uma 7-esfera infinitesimal com M) podemos deformar homotopicamente $\partial M'$ em U e sem tocar $C^L(Z_0)$ obtendo $\partial M''$, uma 3-variedade em $T_{Z_0}M$, e novamente o teorema anterior nos permite transferir a integral para $\partial M''$:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial M} \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} D_z f(Z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial M''} \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} D_z f(Z). \quad (2.70)$$

Sendo M de tipo um, $T_{Z_0}M$ é da forma $\mathcal{W} + Z_0$ onde \mathcal{W} é um subespaço real 4-dimensional e, por hipótese, sem divisores de zero. Aplica-se, então, a \mathcal{W} o Teorema 1 de [ryan 1990], segundo o qual existe uma homotopia $H : \mathcal{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}$ tal que $H(\mathcal{W}, 0) = \mathcal{W}$, $H(\mathcal{W}, 1) = \mathbb{R}^4$ e $H(\mathcal{W}, t)$ é um subespaço real de 4-dimensões sem divisores de zero para todo $t \in [0, 1]$. Isto juntamente com o Teorema-2.5 nos permite substituir $\partial M''$ em (2.70) por ∂D , onde $D \subset U$ é uma variedade 4-dimensional contida em $\mathbb{R}^4 + Z_0$ e que possui Z_0 como ponto interior. Resta então mostrar que

$$f(Z_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial D} \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} D_z f(Z), \quad (2.71)$$

o que pode ser feito com o uso dos mesmos argumentos empregados na demonstração da Fórmula Integral para quatérnios. Isto encerra a demonstração.

É interessante observar que ao contrário dos casos complexo e quaterniônico, onde a Fórmula Integral de Cauchy é estabelecida sobre um contorno de co-dimensão um, aqui

estamos integrando na fronteira de uma variedade cuja co-dimensão é igual a dimensão (\equiv quatro). Este aumento na co-dimensão parece necessário para evitar os cones de luz. Resultado análogo, porém, não pode ser obtido para pseudo-quatérnios nem para biquatérnios reais.

É indiscutível a importância da Fórmula Integral acima. Seu uso, porém, uma vez que restrito a variedades de tipo um, é mais sutil que no caso quaterniônico. A fim de aumentar nossa intuição sobre tais variedades seguimos com alguns exemplos, os quais são fundamentais no entendimento das manipulações posteriores. Se \mathcal{W} é um subespaço real 4-dimensional sem divisores de zero, então toda variedade 4-dimensional (sempre compacta e continuamente diferenciável por pedaços) em $Z + \mathcal{W}$ é variedade de tipo um, para $Z \in \mathcal{B}$. Como casos particulares temos as variedades 4-dimensionais em $\mathbb{H} \subset \mathcal{B}$. Ainda, se $\mathcal{A} \in O(\mathbb{C}^4)$ (grupo ortogonal complexo, ou seja, $\mathcal{A}^t \mathcal{A} = I$), então $Z + z\mathcal{A}(M)$ é variedade de tipo um para $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $Z \in \mathcal{B}$ e M uma variedade 4-dimensional em $\mathbb{H} \subset \mathcal{B}$. Como exemplo podemos tomar $Z + z\mathcal{A}(B)$, onde $B \equiv \{q \in \mathbb{H} / |q| \leq r\}$ é uma bola em \mathbb{H} ⁴².

2.5 Geração de Funções Regulares

As funções biquaterniônicas regulares podem ser geradas de modo semelhante às funções quaterniônicas regulares (seção 1.5). A seguir enunciamos os resultados mais importantes neste sentido.

Proposição-2.7: Seja f uma função holomorfa e complexa-harmônica ($\Delta^z f = 0$) num aberto $U \subset \mathcal{B}$. Então $\partial_{\bar{z}}^z f$ é regular em U .

Proposição-2.8: Seja $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}$ holomorfa e $\Delta^z \phi = 0$ num aberto $V \subset \mathcal{B}$ com forma de estrela em relação a um ponto Z_0 . Então a função

$$f(Z) = \phi(Z) + 2Pu \int_0^1 s^2 \partial_{\bar{z}}^z \phi((1-s)Z_0 + sZ)(Z - Z_0) ds \quad (2.72)$$

⁴²Note que $N(Z) = \bar{Z}Z = Z^t Z = Z^t \mathcal{A}^t \mathcal{A} Z$, e portanto \mathcal{A} leva subespaço sem divisores de zero em subespaço sem divisores de zero.

é regular em V .

Dem.: Análoga àquela da Proposição-1.18 (vide [sudbery]).

Proposição-2.9: Seja f uma função holomorfa definida em $V = U - \{Z \in \mathbb{B}/N(\bar{z}) = 0\}$ para um aberto $U \subset \mathbb{B}$, e que em V admite ser escrita como

$$f(Z) = u(z_0, z) + \hat{z}v(z_0, z), \quad (2.73)$$

onde $z \equiv \sqrt{N(\bar{z})}$, $\hat{z} \equiv \bar{z}/z$, e sendo u e v funções holomorfas as quais satisfazem ainda as seguintes equações tipo Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial z_0} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial z_0} \quad (2.74)$$

(i) Então $\Delta^z f$ é regular em V .

(ii) Ainda, se f está definida e é holomorfa em todos os pontos de U , então $\Delta^z f$ é regular em U .

Dem.(i): A verificação de que $\Delta^z f$ é regular é análoga àquela do Proposição-1.19 (vide [deavours]).

(ii): O resultado segue de (i), pelo qual $\bar{\partial}_l^z \Delta^z f = 0$ em V , e da continuidade de $\bar{\partial}_l^z \Delta^z f$.

Como conseqüência desta proposição temos que $\Delta^z Z^n$ é regular em todo Z para $n \geq 0$, e em todo Z tal que $N(Z) \neq 0$ para $n \leq -1$.

É interessante que podemos também gerar funções regulares em \mathbb{B} a partir de funções regulares em \mathbb{H} via prolongamento analítico. A idéia é a mesma empregada na construção de funções complexas regulares a partir de funções reais analíticas.

Proposição-2.10: Se f é regular quaterniônica em $\{q \in \mathbb{H}/|q - q_0| < r\}$, onde admite portanto ser escrita como

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(q - q_0) a_{\nu_n}, \quad (2.75)$$

podemos introduzir a seguinte função biquaterniônica

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(Z - q_0) a_{\nu_n} \quad (2.76)$$

a qual está definida e é regular em $\{Z \in \mathbb{B} / |Z - q_0| < r\}$ ⁴³.

Dem.: Cabe observar inicialmente que $P_{\nu_n}(Z)$ é definido da mesma forma que $P_{\nu_n}(q)$, com z_μ no lugar de x_μ . Uma vez que (2.75) converge uniformemente para $|q - q_0| \leq r_1 < r$, em se tratando de uma série de potências, o mesmo ocorre com (2.76) e respectivas séries das derivadas em $|Z - q_0| \leq r_1 < r$. Aplicando $\bar{\partial}_\ell^z$ em (2.76), a convergência uniforme da série das derivadas permite derivar termo a termo no lado direito:

$$\bar{\partial}_\ell^z F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} \bar{\partial}_\ell^z P_{\nu_n}(Z - q_0) a_{\nu_n}. \quad (2.77)$$

Sendo $\bar{\partial}_\ell^z = \frac{e_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial z_\mu} = \frac{e_\mu}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right) = \frac{1}{2} \bar{\partial}_\ell^x - \frac{i}{2} \bar{\partial}_\ell^y$, segue da regularidade de $P_{\nu_n}(q)$, já estabelecida no capítulo 1, que $\bar{\partial}_\ell^z F(Z) = 0$ em $\{Z \in \mathbb{B} / |Z - q_0| < r\}$.

Na próxima seção estudamos séries de funções regulares em \mathbb{B} , o que torna o resultado acima mais claro.

2.6 Séries

Nesta seção generalizamos resultados da seção 1.6 e para tanto empregamos uma manipulação ligeiramente diferente, a qual não exige conhecer *a priori* a dimensão do espaço das funções regulares homogêneas de grau n .

Lema-2.11: Para $Z, W \in \mathbb{B}$ tais que $N(W - Z) \neq 0$ e $|N(Z)| < |N(W)|$ temos

$$G(W - Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(Z) G_{\nu_n}(W) \quad (2.78)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} G_{\nu_n}(W) P_{\nu_n}(Z), \quad (2.79)$$

⁴³ Aqui denotamos $|Z| = \sqrt{z_\mu \bar{z}_\mu}$.

sendo a convergência uniforme em

$$\{Z \in \mathcal{B} / N(W - Z) \neq 0 \text{ e } |N(Z)| \leq r|N(W)|\} \text{ para } r < 1.$$

Dem.: Pela mesma manipulação empregada para chegar a (1.104) obtemos

$$G(W - Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(W, Z), \quad (2.80)$$

sendo a série uniformemente convergente na região definida acima e $P^{(n)}$ é polinomial regular homogênea de grau n em Z . Agora, se P é regular homogênea de grau n , pelos mesmos argumentos usados para obter (1.94),

$$P(Z) = \sum_{\nu_n \in \sigma_n} (-1)^n P_{\nu_n}(Z) \partial_{\nu_n}^z P(Z), \quad (2.81)$$

onde $\partial_{\nu_n}^z P$ é constante para P polinomial⁴⁴. Isto nos permite expandir

$$\begin{aligned} P^{(n)}(W, Z) &= \sum_{\nu_n \in \sigma_n} (-1)^n P_{\nu_n}(Z) \partial_{\nu_n}^z P^{(n)}(W, Z) \\ &= \sum_{\nu_n \in \sigma_n} P_{\nu_n}(Z) G_{\nu_n}(W), \end{aligned}$$

donde segue o lema.

Devido a presença de divisores de zero não é possível generalizar as séries de Laurent em regiões anelares 8-dimensionais em \mathcal{B} . Para empregar a Fórmula Integral tal como no estabelecimento do Teorema-1.24 é preciso que a região considerada seja uma variedade de tipo um, e portanto 4-dimensional. A formulação que apresentamos é uma generalização do caso quaterniônico via grupo ortogonal complexo $O(\mathcal{F}^4)$.

⁴⁴Aqui não se usa nenhum resultado externo (dimensão de U_n). Na linha de raciocínio acima pode-se mostrar ainda que P_{ν_n} é base de U_n , bastando para isto verificar que P_{ν_n} são regulares ($\partial_{\ell}^z P_{\nu_n} = 0$), linearmente independentes (o que segue da decomposição $P_{\nu_n}(Z) = \pm z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3} + z_0 P^{(n-1)}$, sendo $P^{(n-1)}$ de grau $n - 1$), e usar o resultado do próximo teorema. Como corolários resulta $\dim U_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ e que toda função regular homogênea é polinomial.

Teorema-2.12: Seja o anel $A = \{q \in \mathbb{H} \subset \mathbb{B}/r \leq |q - q_0| \leq R\}$ para $0 < r < R$. Então, para $\mathcal{A} \in O(\mathbb{C}^4)$ tal que f é regular em $A' = \mathcal{A}(A)$ e Z interior a A' ,

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu_n \in \sigma_n} \{P_{\nu_n}(Z - Z_0)a_{\nu_n} + G_{\nu_n}(Z - Z_0)b_{\nu_n}\} \quad (2.82)$$

onde $Z_0 = \mathcal{A}(q_0)$, e os coeficientes são dados por

$$a_{\nu_n} = \frac{1}{2\pi^2} \int_C G_{\nu_n}(Z - Z_0) D_z f(Z),$$

$$b_{\nu_n} = \frac{1}{2\pi^2} \int_C P_{\nu_n}(Z - Z_0) D_z f(Z),$$

para $C \subset A'$ uma 3-superfície fechada (continuamente diferenciável por pedaços) que envolve Z_0 ⁴⁵.

Dem.: Segue do lema anterior com os mesmos argumentos do Teorema-1.24, observando que o grupo ortogonal preserva a norma.

Em particular o resultado acima fornece a série de Taylor para funções regulares, e se houver alguma aplicação interessante que justifique o investimento, desse teorema surge a possibilidade de estudar teoremas de resíduos bem como transformações de Hilbert, relações de dispersão e outros assuntos afins.

2.7 Propriedades Regulares do Eletromagnetismo

Os postulados fundamentais do eletromagnetismo clássico, como o espaço-tempo, o conceito de campo e as equações de Maxwell, podem ser unificados numa única entidade: a teoria de funções biquaterniônicas.

Na seção 2.2 já discutimos o espaço-tempo e as transformações de Lorentz no escopo dos biquatérnios reais (Proposição-2.2). Resta agora associar funções biquaterniônicas a campos eletromagnéticos e formular, de maneira útil, as equações de Maxwell nesta linguagem. Para tanto consideremos funções puramente vetoriais definidas sobre os biquatérnios

⁴⁵ Acreditamos que resultados mais gerais possam ser estabelecidos, o que pode ser explorado caso alguma aplicação exija.

reais⁴⁶,

$$\vec{F}(x_0, y_1, y_2, y_3) = \vec{H}(x_0, y_1, y_2, y_3) + i\vec{E}(x_0, y_1, y_2, y_3). \quad (2.83)$$

Interpretando \vec{E} e \vec{H} como os campos eletromagnéticos, (x_0, y_1, y_2, y_3) como as coordenadas espaço-temporais (x_0 para o tempo), e tendo em vista (2.64)-(2.67), vemos que as equações de Maxwell no vácuo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.84)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.85)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.86)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.87)$$

são equivalentes as equações de Cauchy-Riemann-Fueter para \vec{F}

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - ie_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \vec{F} = 0. \quad (2.88)$$

Portanto, o problema de obter uma solução das equações de Maxwell reduz-se ao problema de encontrar uma função regular que satisfaça as requeridas condições de contorno e inicial.

De maneira mais geral, quando temos densidade de carga ρ e de corrente \vec{J} , as equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.89)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.90)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.91)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (2.92)$$

tornam-se equivalentes a seguinte equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - ie_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \vec{F}(x_0, y_1, y_2, y_3) = g(x_0, y_1, y_2, y_3), \quad (2.93)$$

⁴⁶Na nomenclatura da seção 2.2 os biquatérnios reais (\mathbb{B}_R) eram os elementos da forma $x_0 + x_k \sigma_k$. Portanto na base $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ \mathbb{B}_R deve ser identificado com os elementos do tipo $X = x_0 + iy_k e_k$, como feito acima.

onde

$$g(x_0, y_1, y_2, y_3) \equiv -\{\rho(x_0, y_1, y_2, y_3) + i\bar{J}(x_3, y_1, y_2, y_3)\}. \quad (2.94)$$

Neste caso além das soluções homogêneas associadas à equação (2.88), devemos obter ainda uma solução correspondente a parte não homogênea de (2.93).

A questão que surge, então, é se seria possível generalizar o $\bar{\partial}$ -Lema de Poincaré (já estabelecido para o caso quaterniônico no Teorema-1.16) a fim de obter explicitamente uma solução da equação não homogênea, integrando extensões de g sobre uma variedade de tipo um adequada⁴⁷.

⁴⁷Esta generalização é não trivial em virtude da impossibilidade de se fazer partição da unidade com funções holomorfas. Apenas para ilustrar a dificuldade envolvida considere g uma função a valores biquaterniônicos, holomorfa em U , e $M \subset U$ uma variedade de tipo um (analítica para facilitar), que por simplicidade podemos supor num subespaço quatro dimensional (real) sem divisores de zero. Para Z_0 interior a M temos

$$g(Z_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial M} \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} D_z g(Z) - \frac{1}{\pi^2} \int_M \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} \bar{\partial}_i^z g(Z) v_z,$$

que é a versão biquaterniônica da Proposição-1.15, a qual pode ser estabelecida seguindo argumentação semelhante àquela do capítulo 1, exceto no que diz respeito ao limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi^2} \int_B \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} \bar{\partial}_i^z g(Z) v_z = 0,$$

onde $B \equiv b_\delta \cap M$ para b_δ uma bola de raio δ centrada em Z . Este agora segue de tomar coordenadas esféricas para $\Delta Z = Z - Z_0$,

$$\begin{aligned} \Delta z_0 &= \epsilon \exp(i\psi_0) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \Delta z_1 &= \epsilon \exp(i\psi_1) \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \Delta z_2 &= \epsilon \exp(i\psi_2) \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \Delta z_3 &= \epsilon \exp(i\psi_3) \operatorname{sen}(\theta_3), \end{aligned}$$

juntamente com a Forma Local das Imersões, que permite tomar localmente coordenadas nas quais $\psi_\mu = 0$. Nestas coordenadas, o ϵ^{-3} que aparece em $(\Delta Z)^{-1}/N(\Delta Z)$ cancela com o ϵ^3 de $\bar{\partial}_i^z g(Z) v_z$, e resulta num integrando que independe de ϵ . O limite segue do cálculo das integrais iteradas.

Por comparação com o caso quaterniônico seria natural esperar que

$$f(Z_0) = -\frac{1}{\pi^2} \int_M \frac{(Z - Z_0)^{-1}}{N(Z - Z_0)} g(Z) v_z$$

fosse solução da parte não homogênea de $\bar{\partial}_i^z f = g$, o que em geral não é verdade. O ponto crucial aqui é o seguinte. Ao tentar adaptar a demonstração do Teorema-1.16 para g não identicamente nula, resulta que as funções g_1 e g_2 (obtidas na partição da unidade) são não holomorfas o que impede o emprego da fórmula integral acima para seguir com a demonstração.

2.8 Isomorfismo Maxwell-Dirac

Ao observar as equações da física notamos que algumas delas são semelhantes e/ou estão fortemente relacionadas. Por exemplo,

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \text{cte}, \quad (2.95)$$

pode ser vista como a equação de Laplace ($k^2 = 0$), como a parte espacial das equações de difusão ($k^2 < 0$) e de Schrödinger ($k^2 = \frac{2m}{\hbar}(E - V)$), ou ainda como a equação de Helmholtz ($k^2 > 0$). Em particular, uma partícula livre na mecânica quântica não relativística ($E > V$) é regida formalmente pela mesma equação que aparece no estudo das ondas eletromagnéticas (equação de Helmholtz), e algo semelhante também ocorre com a equação de Klein-Gordon

$$\square\psi = -m^2\psi, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (2.96)$$

no domínio de soluções periódicas no tempo ($\psi(t, \vec{r}) = e^{i\omega t}\phi(\vec{r})$).

Em [penrose] R. Penrose observou

“ ... It (Schrödinger's equation) some what resembles Hamilton's or Maxwell's equation (having intimate relations with both) ...

Like the Hamiltonian formalism for classical physics, the Schrödinger equation is not so much a specific equation, but a framework for quantum-mechanical equations generally. Once one has obtained the appropriate quantum Hamiltonian, the time-evolution of the state according to Schrödinger's equation proceeds rather as though $|\psi\rangle$ were a classical field equation such as Maxwell. In fact, if $|\psi\rangle$ describes the state of a single *photon*, then it turns out that Schrödinger equation actually *becomes* Maxwell's equations! The equation for a single photon is precisely the same as the equation for a entire electromagnetic field ... if $|\psi\rangle$ describes the state of a single *electron*, then Schrödinger's equation *becomes* Dirac's remarkable wave equation for the electron ... ”

Este trecho nos chama a atenção para a questão já especulada por vários físicos, entre eles J.R. Oppenheimer e E. Majorana ainda na década de trinta, sobre uma possível conexão entre a eletrodinâmica (equações de Maxwell) e a mecânica quântica (equação de Dirac) - o isomorfismo Maxwell-Dirac. O aspecto interessante é que a analogia entre as

duas teorias está, em geral, baseada em interpretar $\vec{H} \pm i\vec{E}$ como uma “função de onda” (veja, por exemplo, [moses] e suas referências). Entendemos que resultados mais profundos não tenham sido obtidos talvez devido ao uso de estruturas inadequadas para representar as equações. Este argumento é reforçado por recentes trabalhos de S. De Leo e W. A. Rodrigues Jr., onde os biquatérnios se revelam como o ambiente natural para o estudo da equação de Dirac.

A interpretação de $\vec{F} = \vec{H} + i\vec{E}$ como função de onda e o uso de uma formulação biquaterniônica para as equações parecem ser os ingredientes fundamentais para se tentar conectar as duas teorias. A estrutura de espaço-tempo de Minkowski (grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e métrica de Minkowski induzida pelo produto no subespaço $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) e o grupo $U(1)$ presentes na álgebra dos biquatérnios são elementos que favorecem uma interpretação unificada das equações de Maxwell e de Dirac.

Na formulação usual da equação de Dirac temos

$$i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\Phi(x) = m\Phi(x), \quad (2.97)$$

onde γ_{μ} são as matrizes de Dirac, e $\Phi(x) \in \mathbb{C}^4$ é um espinor coluna ([itzykson]). A versão biquaterniônica apresentada em [de leo 1997b] tem a forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ie_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \Phi(t, \vec{x})e_1 = m\Phi^*(t, \vec{x}), \quad (2.98)$$

onde $\Phi^*(t, \vec{x}) \in \mathcal{B}$.

Fazendo a troca de paridade (reversão espacial) em (2.98), que neste caso coincide com a conjugação complexa ([de leo 1997c]), obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - ie_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \Phi^*(t, \vec{x})e_1 = m\Phi(t, \vec{x}). \quad (2.99)$$

Neste contexto surge uma relação natural entre a equação de Dirac sem massa ($m = 0$) e as equações de Maxwell no vácuo quando da ausência de cargas e corrente, através da identificação

$$\Phi^* = \vec{F} = \vec{H} + i\vec{E}. \quad (2.100)$$

De fato, pela associação $t \rightarrow x_0, x_k \rightarrow y_k$, é imediato observar que neste caso a equação de Dirac se reduz as equações de Maxwell. Não discutiremos as inevitáveis questões conceituais envolvidas.

Resultados mais gerais podem, certamente, ser obtidos, considerando as equações de Maxwell em meio material, com cargas e correntes, e a equação de Dirac completa, o que deve trazer conseqüências interessantes à eletrodinâmica quântica.

ALGUNS ELEMENTOS DE ANÁLISE DE CLIFFORD

Após uma rápida discussão sobre álgebras de Clifford, apresentamos os aspectos fundamentais da análise de Clifford e sua relação com os casos particulares tratados neste trabalho. As principais referências são [porteous], [brackx], [gilbert] e [delanghe].

3.1 Introdução

Em 1878, W.K. Clifford generalizou os quatérnios, inventados por W.R. Hamilton 35 anos antes, construindo álgebras geométricas, hoje chamadas álgebras de Clifford (vide [clifford]).

Estas são estruturas associativas construídas sobre espaços ortogonais, dos quais incorporam o “produto interno” e geram grupos de recobrimento para os grupos ortogonais dos espaços. Os reais, complexos, pseudocomplexos, quatérnios, pseudoquatérnios e biquatérnios são casos particulares de álgebras de Clifford.

Na década de quarenta, pouco depois de R. Fueter estabelecer a análise quaterniônica, alguns de seus alunos começaram a pesquisar teorias de funções associadas a álgebras de Clifford. Tal pesquisa só tornou-se sistemática próximo aos anos setenta, quando vários físicos e matemáticos passaram a se interessar pelo assunto. Desde então muito se descobriu, principalmente no que diz respeito a aplicações, que vão desde formalismos da física matemática até análise harmônica, e parece ainda hoje um tema com farta pesquisa.

Não tencionamos, neste capítulo, fazer uma revisão completa do assunto, o que não seria possível obviamente, e sim fornecer elementos que nos permitam situar os casos que estudamos anteriormente perante as álgebras e, principalmente, as análises de Clifford. Demonstrações omissas podem ser encontradas nas referências citadas acima.

3.2 Álgebras de Clifford

Denotamos por $\mathbb{R}^{p,q}$, $p, q \geq 0$, $p + q = n$, o espaço ortogonal obtido quando munimos \mathbb{R}^n de B , uma forma \mathbb{R} -bilinear antissimétrica e não degenerada com p autovalores positivos

e q autovalores negativos. Basta considerar $\mathbb{R}^{p,q}$, pois todos os espaços ortogonais com dimensão finita são isomorfos a estes ou, quando degenerados, a subespaços próprios destes. Existe uma base canônica (base ortonormal) que diagonaliza B tal que para $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i, \quad (3.1)$$

o que a leva a ser vista como generalização natural do produto interno usual. Tal forma é invariante por um grupo de transformações que indicamos por $O(p, q)$, o grupo (pseudo)ortogonal, sendo o subgrupo especial (determinante 1) denotado por $SO(p, q)$.

Uma álgebra de Clifford sobre $\mathbb{R}^{p,q}$, $p + q = n$, é definida como uma álgebra⁴⁸ A , real associativa e com identidade, satisfazendo

- (i) \mathbb{R} e \mathbb{R}^n podem ser identificados com subespaços de A ;
- (ii) para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x^2 = B(x, x)$;
- (iii) A é gerada como anel pelas cópias de \mathbb{R} e \mathbb{R}^n .

Através de (i) podemos identificar os elementos da base ortonormal de $\mathbb{R}^{p,q}$, $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$ com elementos da álgebra. Então (ii) é equivalente a

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\varepsilon_{ij}, \quad (3.2)$$

onde

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 & p/i \neq j \\ 1 & p/i = j \leq p \\ -1 & p/i = j > p \end{cases} \quad (3.3)$$

Para $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h\}$, um subconjunto de $N = \{1, \dots, n\}$ onde $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_h$, e denotando $e_A = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_h}$ ($e_\emptyset \equiv 1$), de (iii) obtemos que o conjunto de todos os e_A gera A (como espaço vetorial), cuja dimensão deve ser portanto $\leq 2^n$.

Com um pouco mais de estudo percebe-se que existem apenas duas possibilidades para a dimensão de A , a saber, 2^n e 2^{n-1} . O segundo caso pode ocorrer apenas quando $p - q - 1$ é divisível por 4 e é de pouco interesse. No primeiro caso, das chamadas álgebras

⁴⁸ Álgebra: espaço vetorial com operação de produto.

de Clifford Universais, um resultado fundamental garante sua existência e unicidade. Indicamos a álgebra universal sobre $\mathbb{R}^{p,q}$ por $\mathbb{R}_{p,q}$, e é sempre a esta que estaremos nos referindo, o que torna dispensável o uso do termo universal.

Existem várias realizações possíveis para estas álgebras. Para efeito de classificação é conveniente o emprego da representação matricial, onde as álgebras de Clifford aparecem como espaços de endomorfismos⁴⁹ de espaços lineares sobre \mathbb{R} , ${}^2\mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, \mathbb{C} , \mathbb{H} e ${}^2\mathbb{H} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. O símbolo \oplus indica soma direta.

Em relação às dimensões mais baixas temos que $\mathbb{R}_{0,0}$ é isomorfo aos reais, $\mathbb{R}_{0,1}$ aos complexos, $\mathbb{R}_{1,0} \approx {}^2\mathbb{R}$ aos pseudocomplexos, $\mathbb{R}_{0,2}$ aos quatérnios, e $\mathbb{R}_{1,1} \approx \mathbb{R}_{2,0}$ aos pseudoquatérnios (matrizes reais 2×2). Os pseudocomplexos e pseudoquatérnios são, juntamente com complexos e quatérnios, as únicas álgebras de Clifford duas e quatro dimensionais (sobre espaços de uma e duas dimensões, respectivamente).

Relações de recorrência permitem escrever as álgebras de maior dimensão em termos de produtos tensoriais entre estas poucas com $p + q \leq 2$. Para $p + q \leq 8$ correspondem a tabela abaixo. Todos os demais casos podem ser obtidos desta tabela com o uso de⁵⁰

$$\mathbb{R}_{p+1,q+1} \approx \mathbb{R}_{1,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{p,q}, \quad (3.4)$$

$$\mathbb{R}_{p+8,q} \approx \mathbb{R}_{p,q+8} \approx \mathbb{R}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16), \quad (3.5)$$

⁴⁹Vistos como álgebras reais.

⁵⁰ $K(m)$ denota o anel de matrizes $m \times m$ com entradas em K , e $\otimes_{\mathbb{R}}$ o produto tensorial real.

onde este último é o famoso Teorema da Periodicidade.

$p+q$	$-p+q$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0										R								
1									2R		C							
2								R(2)		R(2)		H						
3							C(2)		${}^2R(2)$		C(2)		2H					
4				H(2)				R(4)		R(4)		H(2)		H(2)				
5			${}^2H(2)$		C(4)				${}^2R(4)$		C(4)		${}^2H(2)$		C(4)			
6			H(4)		H(4)			R(8)		R(8)		H(4)		H(4)		R(8)		
7		C(8)		${}^2H(4)$		C(8)			${}^2R(8)$		C(8)		${}^2H(4)$		C(8)		${}^2R(8)$	
8	R(16)		H(8)		H(8)			R(16)		R(16)		H(8)		H(8)		R(16)		R(16)

$\mathbb{R}_{p,q}$ para $p+q \leq 8$.

Insistimos em chamar a atenção para o papel fundamental desempenhado por pseudocomplexos e quatérnios juntamente com reais, complexos e 2H , na classificação destas álgebras.

Até aqui tratamos apenas de álgebras de Clifford reais. Consideremos o caso complexo. Se tomamos $\mathbb{C}^{p,q}$ em lugar de $\mathbb{R}^{p,q}$ obtemos que a correspondente álgebra de Clifford complexa é $\mathbb{C}_{p,q} \approx \mathbb{R}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, de onde se tira que

$$\mathbb{C}_{p,q} \approx \mathbb{C}(2^m) \quad \text{para } p+q = 2m, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{C}_{p,q} \approx \mathbb{C}(2^m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(2^m) \quad \text{para } p+q = 2m+1. \quad (3.7)$$

Portanto a situação é mais simples do que no caso real, pois para cada dimensão $p+q$ todas as álgebras são isomorfas, independente dos valores de p e q . Por isto denotamos o espaço por \mathbb{C}^n e a álgebra por \mathbb{C}_n . Em particular, temos que \mathbb{C}_2 é isomorfo aos biquatérnios, matrizes complexas 2×2 enquanto álgebra complexa.

Voltemos às álgebras reais para fixar o raciocínio. Dois conceitos muito úteis são a *involução principal* $\hat{}$, uma involução⁵¹ definida pela troca de sinais dos elementos da base

⁵¹Uma involução é uma operação linear auto-reflexiva que preserva a ordem do produto ($\widehat{ab} = \widehat{a}\widehat{b}$), e uma anti-involução só difere por trocar a ordem do produto ($\widehat{ab} = \widehat{b}\widehat{a}$).

($\hat{e}_i = -e_i$), e a *anti-involução principal* $\tilde{}$, uma anti-involução que age como identidade na base ($\tilde{e}_i = e_i$). A *conjugação* surge como a composição

$$\bar{a} = \tilde{\hat{a}} = \hat{\tilde{a}} \quad (3.8)$$

para $a \in \mathbb{R}_{p,q}$, a qual coincide com a definição empregada nas estruturas que estudamos.

A involução principal permite definir o grupo de Clifford

$$\Gamma(p, q) = \{s \in \mathbb{R}_{p,q} / \exists s^{-1}, \chi(s)(x) \equiv sx\hat{s}^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q} \ \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}\}. \quad (3.9)$$

A observação de que $s \in \Gamma(p, q) \Leftrightarrow \chi(s) \in O(p, q)$, juntamente com o Teorema de Cartan-Dieudonné, fornece

$$\Gamma(p, q) = \left\{ \prod_{i=1}^l s_i / l \in \mathbb{N}, s_i \in \mathbb{R}^{p,q}, s_i^2 \neq 0 \right\}, \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\Gamma(p, q)}{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \approx O(p, q). \quad (3.11)$$

Definindo a *norma espinorial*

$$N(s) = \bar{s}s \quad p / s \in \Gamma(p, q), \quad (3.12)$$

(também igual a que usamos) surgem de maneira natural os grupos

$$\text{Pin}(p, q) = \left\{ \prod_{i=1}^l s_i / l \in \mathbb{N}, s_i \in \mathbb{R}^{p,q}, s_i^2 \neq 0, |N(s)| = 1 \right\}, \quad (3.13)$$

$$\text{Spin}(p, q) = \left\{ \prod_{i=1}^{2l} s_i / l \in \mathbb{N}, s_i \in \mathbb{R}^{p,q}, s_i^2 \neq 0, |N(s)| = 1 \right\}, \quad (3.14)$$

para os quais temos

$$\frac{\text{Pin}(p, q)}{\mathbb{Z}_2} \approx O(p, q), \quad (3.15)$$

$$\frac{\text{Spin}(p, q)}{\mathbb{Z}_2} \approx SO(p, q). \quad (3.16)$$

Com a apresentação de (3.9)-(3.16) esperamos ter revelado um pouco do valor geométrico destas álgebras.

3.3 O Operador de Dirac

Em 1928, na tentativa de construir uma mecânica quântica relativística, P.A.M. Dirac utilizou-se implicitamente de uma álgebra de Clifford ($\mathbb{R}_{1,3} \approx \mathbb{H}(2)$) para fatorar a equação de Klein-Gordon e obter uma equação de primeira ordem ([itzyson]). No caso de massa zero isto nada mais é do que tirar a raiz quadrada do operador de d'Alambert. Esta idéia foi generalizada por R. Brauer e H. Weyl para todo espaço ortogonal de dimensão finita, ainda na década de trinta.

Por outro lado, embora na análise complexa sejam equivalentes os "approaches" de Weierstrass (séries de potências), de Cauchy (diferenciabilidade) e de Riemann (núcleo de operador diferencial), já vimos que, no caso quaterniônico por exemplo, apenas este último leva a uma teoria de funções não trivial. À análise de Clifford restou então trilhar as idéias de Riemann, restringindo sua teoria a funções que satisfazem certa equação diferencial, cujo operador fatora o correspondente Laplaciano⁵². Isto faz com que estas teorias de funções estejam intimamente relacionadas às fatorações de Dirac, Brauer e Weyl, onde se encontra a origem de grande parte da nomenclatura empregada.

Abaixo $C^1(\Omega, V)$ denota as funções continuamente diferenciáveis⁵³ que vão do aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{p,q}$ para o subespaço V de $\mathbb{R}_{p,q}$ (que pode ser o próprio $\mathbb{R}_{p,q}$).

Identificando $\mathbb{R}^{p,q}$ da maneira usual como subespaço de $\mathbb{R}_{p,q}$, e com a notação da seção anterior para a base, o operador de Dirac pode ser introduzido como

$$D = - \sum_{i=1}^p e_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=p+1}^{p+q} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (3.17)$$

o qual age em funções de $C^1(\Omega, V)$ e fatora o Laplaciano tipo (p, q) , $D^2 = -D\bar{D} = \Delta_{p,q}$ ⁵⁴. Em linhas gerais, a análise de Clifford é a teoria de funções associada ao núcleo deste operador (equação de Dirac sem massa),

$$Df = 0, \quad (3.18)$$

e as soluções de (3.18) são as funções regulares (à esquerda) neste contexto⁵⁵.

⁵²Com a assinatura da álgebra.

⁵³No sentido real e com a topologia usual.

⁵⁴Em coordenadas angulares, leva também a fatoração do operador de Laplace-Beltrami.

⁵⁵Em (3.17), pelas trocas $e_1 \rightarrow 1$ e $e_i \rightarrow e_i e_1$ $p/i \neq 1$ obtemos a equação de Weyl, cuja teoria de funções

Situações mais gerais podem ser estudadas, como uma variedade (pseudo) riemanniana em lugar de $\mathbb{R}^{p,q}$, ou ainda permitir outros espaços para V , como $\mathbb{R}_{p,q}$ -módulos por exemplo. Neste último caso é de particular interesse tomar V como um subespaço (complexo) de $\mathbb{C}_{p,q}$. Uma das razões para isto é o fato dos grupos $\text{Pin}(p, q)$ e $\text{Spin}(p, q)$ possuírem representações complexas irredutíveis através dos espaços de espinores de Dirac e de Weyl, os quais podem ser tratados como ideais da própria álgebra \mathbb{C}_{p+q} por meio da realização de espaço de Fock. Este espaço é um ideal minimal à esquerda, $(\wedge W)I$, onde W é subespaço maximal isotrópico de \mathbb{C}^{p+q} e I é uma primitiva idempotente, sendo a ação dos grupos definida pela multiplicação ([delanghe]).

Os casos acima expostos se referem a análise de Clifford real. Definições análogas para o operador e a equação de Dirac complexa são, no entanto, o ponto de partida para a análise de Clifford complexa.

3.4 Sobre os Casos Particulares

É hora de olhar para as afirmações acima sob a luz dos exemplos já estudados. Em todos os casos o procedimento foi definir a classe de funções regulares como o núcleo de operadores tipo Dirac, o que é justificado pelo seguinte.

Nas estruturas com divisores de zero (pseudocomplexos, pseudoquatérnios e biquatérnios) nos encontraríamos em apuros ao tentar definir a derivada, pois a razão dos incrementos não está definida no cone de luz. No caso dos pseudoquatérnios (biquatérnios) as componentes podem ser escritas como somas de monômios, o que leva toda função real analítica (complexa analítica) a ter série pseudoquaterniônica (biquaterniônica), analogamente ao que ocorre com os quatérnios. Embora isto não aconteça com os pseudocomplexos, as séries de potência são inadequadas também neste caso. O motivo é a existência de funções regulares, contando portanto com fórmula algébrica, transformações conformes, etc, e que não possuem série de potência. A caracterização da regularidade via séries levaria a uma restrição desnecessária da classe de funções, sem o ganho de propriedades adicionais, exceto a existência de série propriamente dita.

As análises complexa e quaterniônica podem ser facilmente enquadradas no escopo

podê, em grande parte, ser obtida da teoria associada ao operador de Dirac mediante esta simples troca de coeficientes. Obtêm-se teorias similares para os operadores agindo à direita.

da seção anterior. Estas são exemplos euclidianos ($p = 0$), que correspondem a parte mais conhecida das análises de Clifford.

Da seção 1.2 sabemos que $\mathbb{R}_{0,2} \approx \mathbb{H}$ é isomorfo a um subanel de $\mathbb{C}(2)$. Nesta realização, o operador de Dirac e as funções de $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,2})$ podem ser vistos como

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

e

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & -\bar{f}_2 \\ f_2 & \bar{f}_1 \end{pmatrix}, \text{ p/ } f_1, f_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{C}). \quad (3.20)$$

De (3.19) e (3.20) fica claro que $Df = 0$ reduz-se às equações de Cauchy-Riemann da análise complexa quando nos restringimos a $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,2}^+) \subseteq C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,2})$, ou seja, $f_2 = 0$.

Já a análise quaterniônica pode ser obtida tomando-se $\mathbb{R}_{0,4} \approx \mathbb{H}(2)$, onde o operador de Dirac e as funções de $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,4})$ podem ser realizados como

$$D = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_0} \\ -\frac{\partial}{\partial x_0} & \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

e

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & \bar{f}_2 \\ f_3 & \bar{f}_4 \end{pmatrix}, \text{ p/ } f_1, f_2, f_3, f_4 \in C^1(\Omega, \mathbb{H}). \quad (3.22)$$

A equação de Cauchy-Riemann-Fueter é resgatada no subespaço $f_1 = -f_3, f_2 = f_4 = 0$.

A análise biquaterniônica é um exemplo de análise de Clifford complexa. Embora apresente divisores de zero, a codimensão (real) dois do cone de luz é suficiente para nos permitir evitá-lo e estabelecer uma Fórmula Integral, como visto no capítulo 2. Trabalhos recentes, devidos a J. Ryan principalmente, mostram que estamos próximos de uma teoria completa para as análises de Clifford complexas.

De mesma sorte não gozam as estruturas reais não euclidianas com divisores de zero⁵⁶. Nos pseudoquatérnios, por exemplo, a codimensão um do cone de luz parece impedir a existência de Fórmula Integral. Talvez o mais promissor neste caso fosse trocar a topologia usual por uma topologia adaptada a presença dos cones, como é o caso da Topologia de Zeeman (vide [zeeman] e [carvalho]). Nesta classe a grande exceção é a análise pseudocomplexa, que embora também não admita Fórmula Integral, possui em

⁵⁶Mais precisamente, quando tomamos como domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{p,q}$ com $p, q \neq 0$.

seu lugar uma Fórmula Algébrica, o que a viabiliza como uma teoria de funções bastante rica.

Tal como a maioria dos textos que tratam do assunto, no que segue estaremos restritos ao caso euclidiano.

3.5 Resultados Básicos para o Caso Euclidiano

As álgebras $\mathbb{R}_{0,n}$ apresentam essencialmente as mesmas propriedades que os quatérnios, o que reflete em as correspondentes análises de Clifford serem extensões relativamente diretas da análise quaterniônica⁵⁷.

Partindo de $C^1(\Omega, V)$, o Teorema de Stokes nestas álgebras é diretamente obtido da sua formulação em \mathbb{R}^n , donde segue o Teorema de Cauchy. Possuem também uma Fórmula Integral, obtida por argumentos similares aqueles utilizados no capítulo 1. O núcleo de Cauchy é $\bar{D}\Gamma_n(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\bar{x}}{|x|^n}$, para $x \in \mathbb{R}^{0,n}$ e ω_n a área da esfera unitária em \mathbb{R}^n , onde Γ_n é a solução fundamental da equação de Laplace n -dimensional. Desta fórmula surge que toda função regular pertence na verdade a $C^\infty(\Omega, V)$, portanto harmônica, e por conseqüência analítica (possui série de potência real).

Cumprir notar, no entanto, que as funções regulares formam um subconjunto próprio das funções com componentes harmônicas, e possuem propriedades adicionais em relação a estas, dentre as quais pode-se citar a própria Fórmula Integral. Embora se tenha aplicações de resultados da análise harmônica à teoria de funções regulares, a recíproca também é verdadeira, e é equivocada a idéia de que a análise de Clifford se reduz a análise harmônica.

De resto vale lembrar que a teoria é realmente uma generalização da análise complexa e muito parecida com a análise quaterniônica, permitindo análogos para os principais teoremas: Teorema de Morera, Teorema de Liouville, séries, etc.

⁵⁷O domínio das funções está em $\mathbb{R}^{0,n}$, onde a norma espinorial reduz-se a norma euclidiana, tal como no caso dos quatérnios e dos complexos.

INSTANTONS DA TEORIA DE YANG-MILLS $SU(2)$ E ANÁLISE QUATERNIÔNICA

Neste capítulo estamos interessados em explorar algumas relações existentes entre a análise quaterniônica e os instantons da Teoria de Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$. A referência geral é [rajaraman].

4.1 Introdução

Muitas vezes é possível obter informações sobre teorias quânticas de campo a partir de certas soluções das correspondentes equações clássicas não lineares. Destas, são de particular importância os solitons e os instantons.

Um soliton é uma solução das equações de campo com densidade de energia localizada no espaço, que evolui de forma indeformável e cujas formas são assintoticamente recuperadas em "colisões" com outras soluções localizadas. Neste caso a energia é finita e as equações de campo são minkowskianas (o quadri vetor posição é Lorentz invariante). Pictoricamente os solitons podem ser vistos como pacotinhos não dispersivos de energia, que depois de quantizados representam estados de partículas.

A exigência de energia finita cria uma condição de contorno: a densidade de energia deve ir a zero no infinito espacial. A partir do comportamento no infinito, as soluções com energia finita podem ser divididas em classes identificadas com certos índices. Isto permite associar a cada soliton uma quantidade que é conservada, e que torna-se um número quântico por ocasião da quantização.

Os instantons por sua vez possuem uma interpretação um pouco menos direta. É conveniente entendê-los em paralelo com os solitons. Para tanto tomemos as mesmas equações (clássicas) de campo consideradas no caso dos solitons porém na formulação euclideana (invariante por $O(4)$). Neste contexto os instantons são as soluções de ação finita (localizadas), mais especificamente, mínimos locais do funcional ação. Portanto os instantons em quatro dimensões podem ser vistos, num certo sentido, como solitons estáticos de uma teoria cinco dimensional.

A Teoria de Yang-Mills $SU(2)$ foi a primeira a ter seus instantons estudados. Nela o uso da métrica euclideana surge como uma necessidade técnica (vide [nash]). É importante observar, no entanto, que apesar da aparente distorção causada pela troca de métrica, os instantons têm papel importante no estudo de tunelamento e confinamento em teorias quânticas de campo.

Veremos abaixo que, analogamente ao caso dos solitons, a condição de ação finita permite classificar os instantons em classes indexadas.

4.2 A Teoria de Yang-Mills $SU(2)$

Estaremos sempre nos referindo à Teoria de Yang-Mills $SU(2)$ pura, sem campos de matéria. Trata-se de uma teoria de gauge com grupo de simetria $SU(2)$, ou seja, a lagrangeana é invariante sob ação de elementos de $SU(2)$. Esta teoria pode ser vista como generalização do eletromagnetismo clássico, e é o protótipo das teorias de gauge não abelianas.

Da mesma forma que no caso eletromagnético o grupo de gauge $U(1)$ pode ser identificado com os complexos unitários, $SU(2)$ pode ser identificado com os quatérnios unitários. E mais, a álgebra de Lie de $SU(2)$ pode ser identificada com os quatérnios puramente vetoriais. Alguns dos aspectos algébricos desta associação já são parcialmente explorados no estudo dos instantons (vide [atiyah] e [nash]). Aqui estamos interessados principalmente nas possíveis relações com a teoria de funções quaterniônicas, embora façamos antes nossa própria versão da formulação algébrica no contexto quaterniônico.

Na simetria que estamos considerando, as equações de Yang-Mills envolvem três potenciais vetoriais auto-acoplados de forma não linear. Denotando as componentes por $A_\mu^a(q)$, com $a = 1, 2, 3, \mu = 0, 1, 2, 3$, e $q \in \mathbb{R}^4$ é conveniente introduzir os potenciais e campos a valores quaterniônicos,

$$A_\mu(q) \equiv e_a A_\mu^a(q), \quad (4.1)$$

$$F_{\mu\nu}(q) \equiv \partial_\mu A_\nu(q) - \partial_\nu A_\mu(q) + [A_\mu(q), A_\nu(q)], \quad (4.2)$$

onde passaremos a identificar o espaço-tempo euclideano com os quatérnios, $q \in \mathbb{H}$. Está claro que os potenciais (4.1) e campos (4.2) podem ser vistos como funções assumindo

valores em $su(2) = Lie(SU(2))$, e que o espaço-tempo está naturalmente munido da métrica euclídeana através da norma quaterniônica⁵⁸.

As transformações de gauge podem ser definidas como

$$A_\mu(q) \longrightarrow u(q)A_\mu(q)u(q)^{-1} + u(q)\partial_\mu u(q)^{-1}, \quad (4.3)$$

$$F_{\mu\nu}(q) \longrightarrow u(q)F_{\mu\nu}(q)u(q)^{-1}, \quad (4.4)$$

sendo u uma função com valores nos quatérnios unitários. Do capítulo 1 nos vem que (4.4) e o primeiro termo de (4.3) são rotações restritas ao subespaço dos quatérnios vetoriais. O segundo termo de (4.3) envolve o produto de elementos ortogonais e portanto a parte escalar é nula, o que garante a transformação estar bem definida.

A pedra angular de toda teoria de campo é a lagrangeana, que neste caso adquire a simples forma⁵⁹

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

onde $\bar{F}_{\mu\nu}$ denota o conjugado de $F_{\mu\nu}$ ⁶⁰. Assim a ação fica definida por

$$\mathcal{S} = \int F_{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu}v, \quad (4.6)$$

para v a 4-forma de volume. As equações de Yang-Mills, que podem ser obtidas de (4.6) por princípio variacional (equações de Euler-Lagrange), têm a forma

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0. \quad (4.7)$$

A transformação de gauge (4.4) não mexe com a parte escalar, o que implica em a lagrangeana e, por conseqüência, a ação e as equações de campo serem invariantes de gauge.

Os instantons são soluções de ação finita. Observando que a lagrangeana é soma de quadrados das componentes do campo, isto é satisfeito para certa configuração se e somente se $F_{\mu\nu}$ vai a zero mais rápido do que $1/|q|^2$ quando $|q| \rightarrow \infty$. Para tanto é necessário que

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} A_\mu(q) = \lim_{|q| \rightarrow \infty} u(q)\partial_\mu u(q)^{-1}. \quad (4.8)$$

⁵⁸[\cdot] denota o comutador e $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

⁵⁹Talvez o mais correto neste caso fosse falar em densidade lagrangeana.

⁶⁰Estamos sempre empregando a notação do capítulo 1.

Os limites de $u(q)$ podem ser identificados sob uma 3-esfera imaginária no infinito, S^{fis} , através de três ângulos, α_1 , α_2 e α_3 .

O único problema ao tomar primeiro o limite e depois derivar (4.8) é que perde-se informação sobre a componente radial, a qual é necessária para a derivação. Isto pode ser remediado observando-se que existe uma transformação de gauge que elimina $A_{|q|}$. Já considerando este gauge,

$$A_\mu(q)|_{S^{fis}} = u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\partial_\mu u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}. \quad (4.9)$$

Como $u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é quatérnio unitário (limite da norma é a norma do limite), cujo lugar geométrico é (topologicamente) uma 3-esfera S^{int} ,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \longmapsto u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (4.10)$$

define uma aplicação contínua $S^{fis} \longmapsto S^{int}$. Estas aplicações podem ser homotopicamente classificadas usando o grupo de homotopia $\pi_3(S^3)$, que diz respeito às aplicações contínuas entre 3-esferas, o qual é isomorfo aos inteiros.

No que se refere à homotopia de esferas queremos lembrar apenas a idéia geral, referindo [terra-cunha] para uma discussão mais detalhada do assunto. Para facilitar o raciocínio, consideremos aplicações contínuas entre 1-esferas. Para cada aplicação existe um único inteiro n tal que possa ser continuamente deformada na aplicação $\theta \longmapsto n\theta$, sendo θ o ângulo que parametriza o domínio. Com isto as aplicações ficam divididas em classes de equivalência indexadas por estes inteiros. Estas classes podem ser munidas de estrutura de grupo dado pela “composição” de aplicações. Este grupo, o grupo de homotopia $\pi_1(S^1)$, é isomorfo a \mathbb{Z} . Analogamente, para 3-esferas temos $\pi_3(S^3) \approx \mathbb{Z}$.

Assim é fácil ver que as soluções de ação finita ficam divididas em classes, cada uma caracterizada por um inteiro. De fato, a condição de contorno (4.9) permite associar a $A_\mu(q)$ o índice inteiro correspondente à classe de homotopia de $u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Este número, chamado carga topológica⁶¹, é um invariante topológico e é dado pela integral

$$Q = \frac{1}{8\pi^2} \int \tilde{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} v, \quad (4.11)$$

⁶¹Também conhecido como número instantônico ou índice de Pontryagin.

onde $\tilde{F}_{\mu\nu}$ é o dual,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}.$$

É imediato da propriedade antissimétrica do tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ que o integrando é escalar. A verificação de que define corretamente a carga topológica é não trivial e pode ser encontrada em [rajaraman].

Como estamos na formulação euclideana, onde $F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$, usando que $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = 2[\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}]$ segue $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ ⁶². Isto permite decompor o espaço dos campos numa soma direta de campos auto-duais ($\tilde{F}_{\mu\nu}^+ = F_{\mu\nu}^+$) e auto-antiduais ($\tilde{F}_{\mu\nu}^- = -F_{\mu\nu}^-$),

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}[F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu}]. \quad (4.12)$$

Na notação $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^+ + F_{\mu\nu}^-$, de (4.6) e (4.11) obtemos que a ação e a carga topológica podem ser escritas, respectivamente, como

$$S = \int F_{\mu\nu}^+ \tilde{F}_{\mu\nu}^+ v + \int F_{\mu\nu}^- \tilde{F}_{\mu\nu}^- v, \quad (4.13)$$

$$8\pi^2 Q = \int F_{\mu\nu}^+ \tilde{F}_{\mu\nu}^+ v - \int F_{\mu\nu}^- \tilde{F}_{\mu\nu}^- v. \quad (4.14)$$

Portanto uma configuração é mínimo (absoluto na classe correspondente) se e somente se é auto-(anti)dual, sendo seu valor $8\pi^2|Q|$.

Que todo campo auto-(anti)dual é solução está claro por ser mínimo do funcional ação, mas isto também pode ser obtido observando-se que para todo $F_{\mu\nu}$ da forma (4.2), $\tilde{F}_{\mu\nu}$ satisfaz a equação de campo (4.7).

Seguindo uma sugestão originalmente devida a A.M. Polyakov, vários físicos e matemáticos trabalharam, com sucesso, buscando todas as soluções auto-(anti)duais durante a década de setenta⁶³. Estas soluções é que chamaremos efetivamente de instantons (anti-instantons para carga topológica negativa), embora possa, em princípio, haver outras soluções com ação finita⁶⁴.

⁶²Neste ponto surge uma dificuldade na formulação com espaço-tempo de Minkowski, pois $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$, o que faz com que o dual tenha componente escalar não nula (portanto não pertence à álgebra de Lie $su(2)$). Uma boa discussão deste problema pode ser encontrada em [chaves].

⁶³Para $Q = N$, estas soluções eram chamadas "N pseudoparticle solutions".

⁶⁴Segundo [bourguignon], outras soluções devem necessariamente corresponder a pontos estacionários instáveis da ação.

Foi mostrado ([atiyah]), com o Teorema do Índice de Atiyah-Hitchin-Singer e a construção de Horrock no twistor de Penrose, que as soluções associadas à carga topológica Q possuem exatamente $8|Q| - 3$ graus de liberdade. Aqui, no entanto, estaremos restritos às soluções de G. 't Hooft, que possuem $5|Q|$ graus de liberdade.

Como último comentário desta seção gostaríamos de fazer menção novamente à íntima relação, amplamente usada aqui, existente entre Yang-Mills $SU(2)$ e quatérnios. Os quatérnios tornam as manipulações mais simples, com as expressões e demonstrações assumindo formas compactas e permitindo uma interpretação mais concreta em analogia ao caso eletromagnético⁶⁵. A próxima seção é dedicada à questão de se existem e quais são os reflexos da estrutura quaterniônica na Teoria de Yang-Mills do ponto de vista de análise quaterniônica.

4.3 Instantons e Análise Quaterniônica

Tomemos a primeira solução auto-dual encontrada, e apresentada em [belavin],

$$A_\mu(q) = \frac{|q|^2}{|q|^2 + \lambda^2} u(q) \partial_\mu u(q)^{-1}, \quad (4.15)$$

onde λ é um parâmetro real e $u(q) = q/|q|$. Não se trata de uma função quaterniônica regular. Além do mais, é fácil ver que esta não seria uma propriedade gauge invariante⁶⁶, o que parece trazer mais dificuldades. No que diz respeito a (4.15) é importante observar que, no limite $|q| \rightarrow \infty$, (4.8) é verificado.

Bem mais interessante é, no entanto, investigar se existe outra função associada à solução do problema e que exiba alguma forma de regularidade. Não observarmos nenhum efeito em A_μ e $F_{\mu\nu}$ pode ser conseqüência de estarmos olhando para as funções erradas. De fato, no ansatz de 't Hooft⁶⁷, do qual (4.15) é caso particular, aparece uma relação natural com análise quaterniônica.

⁶⁵Em representação complexa temos que a lagrangeana eletromagnética é invariante sob multiplicação por complexos unitários ($e^{i\alpha}$: fase), cujo grupo é isomorfo a $U(1)$.

⁶⁶Seja A_μ regular não trivial (alguma componente com derivada parcial não identicamente nula). Com as condições de regularidade formuladas através de (1.53)-(1.54) fica claro que para algum $b = 1, 2$ ou 3 a transformação de gauge $A_\mu \rightarrow e_b A_\mu \bar{e}_b$ (aqui não soma sobre b) viola pelo menos uma igualdade em (1.53)-(1.54). O mesmo se aplica ao campo.

⁶⁷Vide [t hooft], embora muitas das idéias envolvidas sejam comumente referidas a uma contribuição não publicada de 't Hooft. Em [jackiw], R. Jackiw e outros apresentam os resultados fundamentais bem como uma excelente nota histórica.

Tomemos a matriz antissimétrica

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & 0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

a qual pertence ao anel de matrizes gerado pelo produto tensorial dos quatérnios com as matrizes (1.21), que formam uma representação 4-dimensional dos próprios quatérnios. De (1.21) é fácil ver que $\bar{\sigma}$ é inversível,

$$\bar{\sigma}^{-1} = \frac{1}{3}\bar{\sigma} - \frac{2}{3}I. \quad (4.17)$$

Podemos obter ainda

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\sigma}_{\beta\sigma} = \delta_{\mu\sigma}\bar{\sigma}_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\sigma}\bar{\sigma}_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\sigma}\bar{\sigma}_{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

donde segue a auto-antidualidade⁶⁸

$$\bar{\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\bar{\sigma}_{\sigma\rho}. \quad (4.19)$$

Bem como

$$[\bar{\sigma}_{\mu\sigma}, \bar{\sigma}_{\nu\rho}] = 2[\delta_{\mu\rho}\bar{\sigma}_{\sigma\nu} + \delta_{\nu\sigma}\bar{\sigma}_{\mu\rho} - \delta_{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\sigma\rho} - \delta_{\rho\sigma}\bar{\sigma}_{\mu\nu}]. \quad (4.20)$$

Suponhamos agora que

$$A_\mu(q) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{\mu\nu}a_\nu(q) \quad (4.21)$$

para um certo "potencial" a_ν . Por $\bar{\sigma}$ ser inversível, (4.21) não representa nenhuma restrição ao potencial A_μ . Tomando a inversa vemos que $a_\nu(q)$ pode ser, em geral, um quatérnio com as quatro componentes não nulas (fora da álgebra de Lie $su(2)$). O ansatz de 't Hooft consiste em restringir A_μ a imagens de a_ν puramente escalares, pois assim as propriedades de $\bar{\sigma}$ expressas acima permitem escrever as condições de auto-dualidade, $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, sob a forma

$$\bar{\sigma}_{\mu\rho}(\partial_\rho a_\nu - \partial_\nu a_\rho) + \bar{\sigma}_{\rho\nu}(\partial_\rho a_\mu - \partial_\mu a_\rho) + \bar{\sigma}_{\mu\nu}(\partial_\rho a_\rho + a_\rho a_\rho) = 0, \quad (4.22)$$

⁶⁸A barra em $\bar{\sigma}$ serve para distinguir da matriz auto-dual σ que usaremos adiante, obtida a partir de $\bar{\sigma}$ pela conjugação da primeira linha e primeira coluna.

a qual sugere tomar a_ν como derivada de um “superpotencial”⁶⁹:

$$a_\nu(q) = \partial_\nu \ln \phi(q). \quad (4.23)$$

Com isto os dois primeiros termos de (4.22) são automaticamente satisfeitos, e o último termo leva à equação

$$\frac{1}{\phi(q)} \Delta \phi(q) = 0, \quad (4.24)$$

onde Δ denota o laplaciano, o qual pode ser fatorado na forma $\frac{1}{4} \bar{\partial}_i \partial_i$ (analogamente para os operadores à direita $\bar{\partial}_r$ e ∂_r). Convém notar que a escolha de a_ν escalar bem como a passagem de (4.22) para (4.23) é suficiente porém não necessária, o que justifica o fato de não se obter todas as soluções por este procedimento.

De (4.24) podemos ver que o superpotencial ϕ tem estreita relação com análise quaterniônica, o que não pode ser notado nos potenciais A_μ e campos $F_{\mu\nu}$.

Voltemos nossa atenção para soluções limitadas no infinito e com $\partial_i \phi$ diferenciável a menos de pontos isolados. Do capítulo 1 sabemos que isto implica em ϕ ser analítica a menos destes pontos. Do Teorema de Liouville segue que a única solução não singular é a trivial $\phi = cte$, para a qual $A_\mu = 0$. Consideremos, então, ϕ com uma singularidade.

A série de Laurent quaterniônica nos diz que as funções regulares com singularidade podem ser localmente expressas em termos de funções regulares homogêneas, cuja parte principal da série, a qual nos interessa, é estritamente formada por termos de grau ≤ -3 . A possibilidade mais simples para $\partial_i \phi$ é justamente uma função regular homogênea de grau -3 . Novamente da série de Laurent, existe uma única função com estas características, $G(q - q_0) = \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2}$ - o núcleo da Fórmula Integral - a menos de produto quaterniônico pela direita. Pelo mesmo raciocínio, a fatoração $\Delta = \frac{1}{4} \bar{\partial}_r \partial_r$ fornece para $\partial_r \phi$ a mesma função porém agora com liberdade de produto por constante pela esquerda.

Para que ambas fatorações forneçam o mesmo resultado, ou seja o mesmo superpotencial, devemos ter $\bar{\partial}_i \phi = \partial_r \phi$. Da Proposição-1.1 é fácil obter que $\bar{\partial}_i \phi = \partial_r \phi = \lambda G(q - q_0)$, para λ um parâmetro escalar e q_0 um quatérnio fixo, corresponde a solução mais geral

⁶⁹Na nomenclatura de [jackiw]. Em [actor], A. Actor escreveu “... we think that ϕ can be interpreted as a physical field, and not merely as an ansatz function”.

possível. Da seção 1.5 lembramos que neste caso

$$\phi(q) = \frac{\lambda}{|q - q_0|^2}. \quad (4.25)$$

Esta é solução de (4.24) em todos os pontos, inclusive na singularidade, pois

$$|q - q_0|^2 \Delta \left(\frac{1}{|q - q_0|^2} \right) = -4\pi^2 |q - q_0| \delta(q - q_0), \quad (4.26)$$

o que parece não ocorrer noutros graus de homogeneidade. Por outro lado, somas de funções do tipo (4.25) são soluções, e podem ser convenientemente escritas na forma⁷⁰

$$\phi_N(q) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{|q - q_i|^2}. \quad (4.27)$$

Apesar dos efeitos de polarização, é intuitivo e pode ser verificado diretamente com o cálculo da carga topológica, que (4.27) é a solução instantônica para $Q = N$ com $5N$ graus de liberdade dadas pela localização q_i e pelo tamanho λ_i dos instantons. Exceto para $\phi_0 = 1$ (solução trivial), as soluções apresentam singularidades em $q = q_i$, as quais podem ser removidas com gauges singulares apropriados. Para $N = 1$, por exemplo, tal remoção pode ser feita com $u(q) = q/|q|$, com o que se obtém (4.15)⁷¹. Já o campo toma a forma

$$F_{\mu\nu} = 2\sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda}{(|q - q_0|^2 + \lambda^2)^2}, \quad (4.28)$$

claramente auto-dual.

Os anti-instantons ($Q < 0$, soluções auto-antiduais) são obtidos pela mera troca $\bar{\sigma}_{\mu\nu} \leftrightarrow \sigma_{\mu\nu}$.

Mais detalhes sobre instanton e Teorias de Yang-Mills podem ser encontrados na bibliografia já citada. Por ora gostaríamos de ressaltar que alguns aspectos da discussão acima foram enriquecidos pela presença dos quatérnios. O enfoque quaterniônico proporcionou certa rigidez, removendo parte da arbitrariedade envolvida na obtenção de (4.26), além de racionalizar o "insight" adotado. Cumpre ainda citar [gürsey], onde também pode ser encontrada uma tentativa de amparar teorias de gauge e chirais no escopo quaterniônico.

⁷⁰Longe das singularidades a equação é trivialmente satisfeita. Próximo a uma certa singularidade o termo singular domina, o que nos leva novamente ao caso anterior.

⁷¹Para ser exato a solução de Belavin é o caso particular localizado na origem.

OBSEVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Pode ser observado que as idéias envolvidas neste trabalho, apesar de termos nos referido a casos específicos, são de caráter bastante geral, podendo ser empregadas em estruturas completamente diferentes. Embora esteja subentendido que para estudar análise buscamos extensões da noção usual de número, o caminho que seguimos (via álgebras de Clifford) não é, obviamente, o único. Basta consultar o apêndice C. Outro exemplo é fornecido pela construção de Hurwitz, com a seqüência: reais, complexos, quatérnios e a álgebra não associativa dos octônios, onde estes últimos são bastante utilizados desde a matemática pura até cromodinâmica quântica. Uma situação mais exótica é obtida através de complementos (topológicos) não archimedianos dos racionais, culminando nos números p -ádicos e suas generalizações, os quais têm muitas aplicações a teoria dos números ([gouvêa]).

Uma boa compreensão das análises de Clifford revela-se, no entanto, de grande valor para o estudo de qualquer outra análise hipercomplexa. Como exemplo podemos citar [ryan 1987], onde é mostrado que a condição para a existência de Fórmula Integral de Cauchy homotopicamente invariante equivale, em certas álgebras, a existência de subálgebras isomorfas a álgebras de Clifford.

No que se refere a problemas em aberto não é preciso se voltar para outras estruturas a fim de encontrá-los. Ao longo da dissertação mencionamos uma série de problemas que julgamos relevantes e que em nosso conhecimento não parecem ter sido resolvidos. Listamos os principais

- (i) Relações de Dispersão Quaterniônicas: já obtivemos alguns resultados neste sentido (vide [menon]). Resta generalizar para funções satisfazendo a limitação polinomial qualquer. Estas relações podem trazer inúmeras aplicações à fenomenologia de partículas elementares.
- (ii) $\bar{\partial}$ -Lema de Poincaré para Biquatérnios: o estudo de soluções explícitas para a equação $\bar{\partial}_i^z f = g$ tem, além da possível aplicação à teoria eletromagnética, uma motivação puramente matemática. Equações deste tipo já foram estudadas por muitos matemáticos e em vários contextos diferentes (vide as referências do capítulo 2 de [brackx]).

- (iii) Análise de Clifford Real com Divisores de Zero: Acreditamos que o emprego de topologias tipo Zeeman possam levar a teorias de funções mais poderosas.
- (iv) Isomorfismo Maxwell-Dirac: parece haver relações profundas entre a eletrodinâmica clássica e a teoria quântica de Dirac, e os biquatérnios surgem como o ambiente adequado para sua investigação. No capítulo 2 exibimos um primeiro resultado interessante neste sentido.
- (v) Teoria de Yang-Mills $SU(2)$: tomando a formulação com espaço tempo de Minkowski, seria interessante pesquisar soluções na estrutura dos biquatérnios através de um ansatz análogo ao de 't Hooft. Ainda, o emprego da série de Laurent pode fornecer subsídios para se obter soluções do tipo onda plana.

Em linhas gerais podemos concluir que esta dissertação abre perspectivas de pesquisa tanto na direção da matemática pura quanto das aplicações a física. Por fim resta torcer para que, senão nós, alguns dos leitores possam trazer contribuições para as questões acima. E que este trabalho sirva de estímulo para que mais pessoas se interessem pelo ramo da análise hipercomplexa.

APÊNDICE A

ANÁLISE PSEUDOCOMPLEXA

Introdução

Em duas dimensões, como já mencionamos, a única álgebra real associativa de divisão é a dos complexos, cuja unidade imaginária i tem quadrado -1 . Pode-se mostrar ([kantor]) que, a menos de isomorfismos, existem ainda duas álgebras bidimensionais reais associativas e com identidade, a saber:

- (i) aquela cuja unidade imaginária ϵ tem quadrado 0 ;
- (ii) e aquela cuja unidade imaginária h tem quadrado $+1$.

Neste último caso temos os assim chamados *números pseudocomplexos* (\mathbb{IP}), os quais gozam de propriedades particularmente interessantes.

Da mesma forma que os números complexos (isomorfos ao anel de matrizes $T\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$) estão associados a roto-homotetias no plano, os números pseudocomplexos (isomorfos a $T\mathbb{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$) estão associados a Lorentz-homotetias no espaço-tempo de Minkowski 2-dimensional. A álgebra dos pseudocomplexos não é de divisão, e por isto os elementos do tipo $z = t + hx$ com $t^2 = x^2$ têm módulo zero, o que faz surgir de forma natural os cones de luz no plano pseudocomplexo. Como consequência temos que a Teoria da Relatividade Especial pode ser convenientemente formalizada na estrutura dos números pseudocomplexos, e isto sugere uma maneira de estender a teoria a velocidades superluminais, como pode ser visto em [fjelstad].

Em [motter] desenvolvemos aquilo que seria a análise associada aos números pseudocomplexos. Assim, discutiremos aqui, resumidamente, os resultados já estudados em detalhe naquele trabalho.

Teoria de Funções

As funções pseudocomplexas, $f : IP \rightarrow IP$, regulares podem ser caracterizadas como aquelas infinitamente diferenciáveis (no sentido real) e que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial t} - h \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Para f vista como função do plano no plano, (A.1) restringe a matriz Jacobiana ao anel TIP , o que permite identificá-la como a *derivada pseudocomplexa*, a qual fica dada por

$$f' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + h \frac{\partial f}{\partial x} \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Graças a comutatividade do produto, derivadas, compostas e produtos de funções regulares são regulares. No entanto existe uma diferença crucial em relação ao caso complexo: nem toda função pseudocomplexa regular é analítica ([antonuccio]).

Enquanto as componentes das funções complexas regulares satisfazem a equação de Laplace em duas dimensões, as componentes de funções pseudocomplexas regulares satisfazem a equação de onda com uma dimensão espacial. As funções regulares inversíveis geram as transformações conformes pseudocomplexas, as quais preservam a equação de onda. Isto nos fornece um método pelo qual, escolhendo uma transformação conforme adequada, um problema com condições de contorno originalmente complicadas pode ser transformado em outro problema possuindo condições de contorno mais simples.

Também se fazem presentes o Teorema de Cauchy e o Teorema de Morera, porém não contamos com Fórmula Integral de Cauchy. O cone de luz parece impedir a existência de Fórmula Integral, e isto deve estar relacionado com a presença de funções regulares não analíticas. Em seu lugar temos uma *Fórmula Algébrica de Cauchy*.

Esta fórmula permite, por exemplo, determinar completamente uma função regular a partir de seus valores sobre uma hipérbole $t^2 - x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$. Em lugar de integrais a Fórmula Algébrica envolve apenas simples projeções⁷².

⁷²De propriedades particularmente interessantes goza a álgebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \approx \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \approx IP \otimes \mathbb{C}$ (álgebra de Clifford sobre \mathbb{C}). Definindo as funções regulares como as funções holomorfas que satisfazem a versão complexificada da equação (A.1), obtemos que a teoria de funções correspondente possui Fórmula Algébrica de Cauchy (em virtude de (A.1)) bem como Fórmula Integral de Cauchy (no contexto de funções de duas

No trabalho [motter] discutimos também as superfícies de Riemann pseudocomplexas e a associação das mesmas com o movimento de “Strings” clássicas. A “esfera de Riemann” neste caso resulta num hiperbolóide de uma folha.

variáveis complexas). Num certo sentido temos os caracteres hiperbólico e elíptico presentes na mesma teoria.

APÊNDICE B

ANÁLISE PSEUDOQUATERNIÔNICA \times EXTENSÃO DA ANÁLISE PSEUDOCOMPLEXA

Introdução

No capítulo 1 vimos que a análise quaterniônica surge como a extensão natural da análise complexa, para quatro dimensões. Tendo em vista a análise pseudocomplexa, resumida no apêndice A, cabe colocar a seguinte questão: “qual seria a álgebra 4-dimensional adequada cuja análise associada fosse uma extensão natural da análise pseudocomplexa?”

Tomando como candidatas as álgebras reais associativas, no contexto das álgebras de Clifford 4-dimensional (capítulo 3), ao lado dos quatérnios temos apenas a álgebra das matrizes reais 2×2 . Como pode ser visto em [yaglom], esta é a única álgebra 4-dimensional real associativa interessante a possuir uma anti-involução (conjugado) que leva a uma norma não degenerada (álgebra de composição).

Empregando a nomenclatura deste último, chamamos os elementos da álgebra, que denotamos por \mathcal{F} , de pseudoquatérnios.

Pseudoquatérnios

Os pseudoquatérnios podem ser introduzidos sobre $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ de forma análoga aos quatérnios, ou seja, como os elementos do tipo $q = t + \vec{v} = t + e_i x_i$ p/ $t, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned} e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3, \quad e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2, \quad e_3 e_2 = -e_2 e_3 = e_1, \\ e_1^2 = -1, \quad e_2^2 = 1, \quad e_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Para um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, trocando o sinal da primeira componente, introduzimos $\widetilde{\vec{v}} \equiv (-v_1, v_2, v_3)$, donde

$$q_1 q_2 = t_1 t_2 + \vec{v}_1 \cdot \widetilde{\vec{v}}_2 + t_1 \widetilde{v}_2 + t_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \widetilde{\vec{v}}_2. \quad (\text{B.2})$$

Com o conjugado definido da maneira usual, $\bar{q} = t - e_i x_i$, temos

$$q\bar{q} = t^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad (\text{B.3})$$

que ao contrário do caso quaterniônico, pode ser um número positivo, negativo ou zero (mesmo para $q \neq 0$). De fato, os elementos que satisfazem $t^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$ têm módulo nulo e definem um cone de luz, de forma análoga ao que se tem para pseudocomplexos.

Funções Pseudoquaterniônicas Regulares

A seção 1.3 de formas diferenciais quaterniônicas, a menos de uma troca de sinal na fórmula (1.33), mantém-se exatamente a mesma para formas diferenciais pseudoquaterniônicas. Neste caso no lugar de (1.33) temos

$$dq \wedge dq = 2\{-e_1 dx_2 \wedge dx_3 + e_2 dx_3 \wedge dx_1 + e_3 dx_1 \wedge dx_2\}, \quad (\text{B.4})$$

e as funções regulares podem ser definidas de maneira análoga àquela empregada na seção 1.4.

Definição: Uma função $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ (real) diferenciável em $q \in \mathfrak{F}$, é regular (à esquerda) em q se existe $f'(q) \in \mathfrak{F}$ tal que

$$dq \wedge dq \wedge df_q = D_q f'(q). \quad (\text{B.5})$$

As equações de Cauchy-Riemann-Fueter resultam

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad (\text{B.6})$$

e, bem como no caso quaterniônico, o Teorema de Cauchy (Teorema-1.6) e o Teorema de Morera (Teorema-1.11) se sustentam. Porém, a presença de um cone de luz dividindo o espaço em regiões desconexas parece impedir a existência de um análogo para a Fórmula Integral de Cauchy, do mesmo modo que no caso pseudocomplexo. Pior, devido a não comutatividade do produto, a Fórmula Algébrica de Cauchy, tal como estabelecida para os pseudocomplexos, também não se verifica aqui.

O Teorema-1.9 possui análogo também neste caso. Se $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ é uma função regular de classe C^2 , então satisfaz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Esta equação reproduz uma propriedade semelhante àquela que tínhamos para as funções pseudocomplexas regulares em relação a equação de onda unidimensional. Aliás, ao nos restringirmos a funções independentes de x_1 obtemos exatamente a equação de onda com duas dimensões espaciais. Neste sentido, ganhamos uma dimensão em relação ao caso pseudocomplexo.

Existem várias situações matemáticas em que nos deparamos com esta equação. Por exemplo, para $f \in C^\infty$, (B.7) representa a versão plana da condição para que f seja a transformada de Radon de alguma função $g \in C^\infty$ sobre linhas afins de \mathbb{R}^3 ([atiyah]).

Esboçamos aqui apenas uma introdução informal do que seria a análise pseudo-quaterniônica. No capítulo 2 estudamos com mais detalhe a análise sobre uma estrutura 4-dimensional complexa, da qual os pseudoquatérnios são uma subálgebra real.

APÊNDICE C

TEORIAS ALTERNATIVAS

Introdução

Ao contrário do restante da dissertação, onde apresentamos resultados de nossos estudos, dedicamos este apêndice a discutir abordagens alternativas pesquisadas principalmente por J.C. Cifuentes e seu grupo ([cifuentes 1984], [cifuentes 1997] e referências destes). Trata-se de uma teoria de funções quaterniônicas distinta da teoria de Fueter, a qual sugere uma extensão 4-dimensional dos pseudocomplexos e respectiva teoria de funções através de uma estrutura não associativa.

Uma Teoria Alternativa de Funções Quaterniônicas

Todo quatérnio $q = t + e_i x_i$ com parte vetorial não nula pode ser escrito como $q = t + \hat{r}r$ onde $r = (x_i x_i)^{1/2}$ e $\hat{r} = e_i x_i / r$, sendo $\text{hat}r^2 = -1$. Subálgebras do tipo $\{a + \hat{r}b/a, b \in \mathbb{R}\}$, chamadas planos canônicos, são isomorfas aos complexos. Então, uma maneira natural de caracterizar as funções regulares em \mathbb{H} é usando os resultados já conhecidos da análise complexa, o que de fato faz sentido quando tratamos de funções que são invariantes em relação aos planos canônicos e nos quais dependem exclusivamente de t e de r .

Especificamente, pode-se definir como regular as funções $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ da forma

$$f(q) = \begin{cases} u(t, 0), & \text{se } r = 0 \\ u(t, r) + \hat{r}v(t, r), & \text{se } r \neq 0, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

tal que u é de classe C^0 , v é de classe C^1 com $v(t, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, e as restrições de f aos planos canônicos são regulares no sentido complexo⁷³. São exemplos as potências e as funções definidas em termos delas, como a exponencial, as funções trigonométricas, etc⁷⁴.

⁷³Portanto f é contínua.

⁷⁴Uma generalização imediata desta definição é dada em [de leo 1997a], onde os autores caracterizam como regulares as funções no núcleo do operador diferencial $\frac{\partial}{\partial t} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r}$. Além de fornecer a mesma classe de funções já estudada por [gürsey] empregando um operador diferencial de terceira ordem com coeficientes

Para $f = u + \hat{r}v = u + \vec{p}$ regular, com $\vec{p} = e_i p_i$, das equações de Cauchy-Riemann segue que são satisfeitas as seguintes equações

$$\nabla u = -\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}, \quad (\text{C.2})$$

$$\nabla \times \vec{p} = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{p} = \frac{\hat{r}r}{2} \left(\nabla \cdot \vec{p} - \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (\text{C.4})$$

onde ∇ age em (x_1, x_2, x_3) . A recíproca se sustenta localmente, ou seja, quando as equações acima são satisfeitas a função é localmente regular. Outro resultado interessante é que se $f = u + \vec{p}$ satisfaz (C.2)-(C.4), então existem funções v e φ tais que $\vec{p} = \hat{r}v = \nabla\varphi$ e u, v e φ são soluções da equação

$$\Delta\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{2}{r}\nabla\psi \cdot \hat{r}. \quad (\text{C.5})$$

Esta definição leva as funções regulares a coincidirem com as assim chamadas *funções intrínsecas analíticas* para o caso dos quatérnios ([rinehart]). Estas últimas são definidas como as funções que comutam com todos os elementos do subgrupo de automorfismos e anti-automorfismos de \mathbb{H} que mantém invariantes os escalares, o que implica em a função ser invariante nos planos canônicos e com dependência em (t, r) , e ainda analítica (no sentido complexo) nestes planos. Sob certas condições de simetria das superfícies de integração (agora 3-dimensionais), em [cullen] C.G. Cullen obtém resultados análogos ao Teorema Integral de Cauchy e à Fórmula Integral de Cauchy para funções intrínsecas analíticas.

As funções regulares no sentido acima são, em geral, não regulares no sentido de Fueter, mas seus laplacianos são regulares tanto à esquerda como à direita (vide seção 1.5). Reciprocamente, as únicas funções regulares à esquerda e à direita por Fueter e que são regulares pela definição acima são as funções escalares constantes. Trata-se, então, de teorias completamente distintas sobre \mathbb{H} . Por um lado temos uma teoria cujas funções têm propriedades análogas àquelas da análise complexa (por exemplo, satisfazem a equação de Laplace), embora estas funções não sejam extensões imediatas do caso complexo (basta ver que a identidade não é regular). Por outro lado temos uma teoria na qual

constantes, esta maneira de delimitar um conjunto não trivial de funções é imediatamente generalizável para o caso dos octônios, reproduzindo com fidelidade a teoria correspondente nos subespaços dos quatérnios e dos complexos.

as próprias funções são generalizações naturais daquelas da análise complexa (as potências, por exemplo), cujas propriedades são parcialmente perdidas (os teoremas integrais exigem superfícies de integração simétricas, e entre outras coisas não se satisfaz a equação de Laplace).

Um aspecto importante da teoria de funções intrínsecas é a fácil generalização para outras estruturas (vide [Rinehart]). O mesmo ocorre com o enfoque dado em [Cifuentes 1984]. Embora ambos tratamentos coincidam no caso quaterniônico o mesmo parece não ocorrer noutras álgebras.

Uma Extensão 4-Dimensional não Associativa dos Pseudocomplexos

Voltemos a questão plantada no apêndice anterior, de quem seria a extensão natural do caso pseudocomplexo. No apêndice B e no capítulo 2 discutimos possibilidades associativas, chegando aos pseudoquatérnios e aos biquatérnios reais. Contra os primeiros pesa o fato de que a sua teoria de funções parece ter aplicações restritas, principalmente pela aparente impossibilidade de se determinar as funções regulares a partir de seus valores de contorno. A segunda opção é mais natural e apresenta mais possibilidade de aplicações (à relatividade especial e ao eletromagnetismo, por exemplo). Esta porém tem a inconveniência de não ser fechada em relação ao produto.

Cifuentes por sua vez, abrindo mão da associatividade introduziu \mathbb{H}^p , uma estrutura 4-dimensional cujos planos canônicos são isomorfos aos pseudocomplexos. Agora a base canônica $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ multiplica-se como $e_i e_j = +\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} e_k$, sendo um elemento genérico de \mathbb{H}^p denotado por $q = t + e_i x_i$. Em notação vetorial temos

$$(t_1 + \vec{v}_1)(t_2 + \vec{v}_2) = t_1 t_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + t_1 \vec{v}_2 + t_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \quad (\text{C.6})$$

onde a única diferença em relação ao caso quaterniônico é a mudança no sinal do produto interno $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Em consequência, a métrica de Minkowski é obtida definindo a norma da maneira usual, como $(t + \vec{v})(t - \vec{v})$.

As funções regulares podem ser caracterizadas de forma análoga ao caso quaterniônico, porém agora regulares no sentido pseudocomplexo quando restritas a planos canônicos. Cabe observar que apesar da não associatividade as potências estão bem de-

finidas, o que permite a construção de vários exemplos de funções regulares (as próprias potências, exponencial, funções trigonométricas, etc). Também M. Imaeda estudou, num contexto geral, análise sobre estruturas com esta propriedade (vide [imaeda 1986]).

REFERÊNCIAS

- A. Actor, *Classical Solutions of $SU(2)$ Yang-Mills Theories*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 471-525.
- F. Antonuccio, *Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics*, não publicado (1993).
- T.M. Apostol, **Calculus** Vol. II (2^a ed., John Wiley & Sons, 1969).
- M.F. Atiyah, **Geometry of Yang-Mills Fields** (Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei & Scuola Superiore di Pisa, 1979).
- A.O. Barut, **Eletrodinamics and Classical Theory of Fields and Particles** (Dover, 1980).
- A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, Phys. Lett. **59B** (1975), 85-87.
- A.M. Bork, "Vectors versus Quaternions"- *The Letters in Nature*, Am. J. Phys. **34** (1966), 202-211.
- J.P. Bourguignon, H.B. Lawson and J. Simons, *Stability and Gap Phenomena for Yang-Mills Fields*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **76** (1979), 1550-1553.
- F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, **Clifford Analysis** (Pitman Advanced Publishing Program, 1982).
- F.W. Byron, Jr. and R.W. Fuller, **Mathematics of Classical and Quantum Physics**, Vol. II (Addison-Wesley, 1970).
- A.L.T. Carvalho, *Zeeman Topologies for Semi-Riemannian Affine Space*. Proceedings of SILARG VIII (1993). Editors: W.A. Rodrigues and P.A. Letelier.
- R.C. Chaves, tese em preparação.
- J.C. Cifuentes, *Análisis sobre Estructuras no Asociativas*, Atas do Primeiro Colóquio da Sociedade Matemática Peruana, Lima (1984), 39-56.

- J.C. Cifuentes e J.B. Nicolau, *Funções Regulares no Espaço Real Tetradimensional*, Atas do 46^o Sem. Bras. de Análise (1997), 354 -370.
- W.K. Clifford, *Collected Mathematical papers* (1882; Chelsea (reprint), 1968).
- R. Courant and D. Hilbert, **Methods of Mathematical Physics**, Vol. II (Interscience, Wiley, 1965).
- C.G. Cullen, *An Integral Theorem for Analytic Intrinsic Functions on Quaternions*, Duke Math. J. **32** (1965), 139-148.
- C.A. Deavours, *The Quaternion Calculus*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 995-1008.
- R. Delanghe, F. Sommen, V. Souček, F. Brackx and D. Constaes, **Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions: A Function Theory for the Dirac Operator** (Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992).
- S. De Leo and P. Rotelli, *A New Definition of Hypercomplex Analyticity*, Relatório de Pesquisa N^o 39, IMECC-Unicamp (1997a).
- S. De Leo and W.A. Rodrigues, Jr., *Quantum Mechanics: From Complex to Complexified Quaternions*, Int. J. Theor. Phys. **36**, (1997b), 2725-2757.
- S. De Leo and W.A. Rodrigues, Jr., *Quaternionic Electron Theory: Dirac's Equation*, Relatório de Pesquisa N^o 72, IMECC-Unicamp (1997c).
- P. Fjelstad, *Extending Special Relativity via the Perplex Numbers*, Am. J. Phys. **54** (1986), 416-422.
- R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv. **7** (1935), 307-330.
- J.E. Gilbert and M.A.M. Murray, **Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis** (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- P. Griffiths and J. Harris, **Principles of Algebraic Geometry** (John Wiley & Sons, 1978).

- F. Gürsey and H.C. Tze, *Complex and Quaternionic Analyticity in Chiral and Gauge Theories I*, Ann. Phys. **128** (1980), 29-130.
- W.R. Hamilton, **Elements of Quaternions** (Longmans Green, London, 1866).
- K. Imaeda, *A New Formulation of Classical Electrodynamics*, Il Nuovo Cimento, **32B** (1976), 138-162.
- K. Imaeda, *Quaternionic Formulation of Tachyons, Superluminal Transformation and a Complex Space-Time*, Il Nuovo Cimento, **50B** (1979), 271-292.
- M. Imaeda, *On Regular Functions of a Power-Associative Hypercomplex Variable*, Clifford Algebras and Their Appl. in Physics (1986), 565-572. Editors: J.S.R. Chishohm and A.K. Common.
- C. Itzykson and J-B. Zuber, **Quantum Field Theory** (McGraw-Hill, 1980).
- R. Jackiw, C. Nohl and C.R. Rebbi, *Conformal Properties of Pseudoparticle Configurations*, Phys. Rev. D **15** (1977), 1642-1646.
- I.L. Kantor and A.S. Solodovnikov, **Hypercomplex Numbers** (Springer, New York, 1980).
- W. Kaplan, **Cálculo Avançado**, Vol. II (Edgard Blücher, 1972).
- M.J. Menon and A.E. Motter, *Quaternionic Analysis and Hadron-Hadron Scattering Dispersion Relations*, XVIII Brazilian National Meeting on Particle and Fields (1997).
- H.E. Moses, *Solution of Maxwell's Equations in Terms of a Spinor Notation: The Direct and Inverse Problem*, Phys. Rev. **113** (1959), 1670-1678.
- A.E. Motter and M.A.F. Rosa, *Hyperbolic Calculus*, a ser publicado em Advances in Applied Clifford Algebras.
- G.L. Naber, **Spacetime and Singularities** (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).

- C. Nash and S. Sen, **Topology and Geometry for Physicists** (Academic Press, London, 1983).
- H.M. Nussenzveig, **Causality and Dispersion Relations** (Academic Press, 1972).
- R. Penrose, **The Emperor's New Mind** (Oxford University Press, Oxford, 1990).
- I.R. Porteous, **Topological Geometry** (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- R. Rajaraman, **Solitons and Instantons** (North-Holland Publishing Company, 1982).
- R.F. Rinehart, *Elements of a Theory of Intrinsic Function on Algebras*, Duke Math. J. **27** (1960), 1-19.
- J. Ryan, *Hypercomplex Algebra, Hypercomplex Analysis and Conformal-Invariance*, Comp. Math., **61** (1987), 61-80.
- J. Ryan, *Cells of Harmonicity and Generalized Cauchy Integral Formulas*, Proc. London Math Soc., **60** (1990), 295-318.
- J.J. Sakurai, **Modern Quantum Mechanics** (Addison-Wesley Publishing Company, 1994).
- N. Salingaros, *Eletromagnetism and the Holomorphic Properties of Spacetime*, J. Math. Phys. **22** (1981), 1919-1925.
- D.H. Sattinger and O.L. Weaver, **Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics** (Springer-Verlag, New York, 1986).
- B. Schuler, *Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionen-Variablen*, Comment. Math. Helv. **10** (1937), 327-342.
- M. Spivak, **Calculus on Manifolds** (The Benjamin/Commings Publishing Company, 1965).
- A. Sudbery, *Quaternionic Analysis*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **85** (1979), 199-225.

- M.O. Terra-Cunha, **A Geometria e os Instantons da Teoria de Yang & Mills $SU(2)$** (Tese de Mestrado, IFGW-Unicamp, 1997).
- G. 't Hooft, *Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976), 8-11.
- I.M. Yaglom, **Complex Numbers in Geometry** (Academic Press, 1968).
- E.C. Zeeman, *The Topology of Minkowski Space*, Topology **6** (1967), 161-170.