COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OBTENÇÃO DA INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE DE UMA MATRIZ

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Rosa Maria da Veiga Pessôa e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, de

José V. T... Zago

Prof.Dr. José Vitório Zago
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Dezembro/1986

Esse trabalho foi financiado pela CAPES e FAPESP
processo nº 83/2064-9

Aos meus pais
Paulo e Rosa

e irmãos
Aninha, Paulinho,
Túlio, Dei, Rosal
va, Rosângela,Bar
tolomeu e Zanita.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por estar em seus planos a realização deste trabalho.

Ao Prof. José Vitório Zago pela proposição do trabalho, pela orientação segura, pela compreensão e pela confiança em mim depositada.

À todos Professores do IMECC ressaltando a Professora Maria Cristina Cunha Bezerra, O Professor José Vitório Zago, o Professor José Mário Martínez, o Professor Rakesh K.Bhatnagar e o Professor Mauro Bianchini, meus Professores durante o curso, pelos estímulos e ensinamentos.

À CAPES e à FAPESP, que, com seus apoios financeiros, possibilitaram a realização deste trabalho.

À Secretaria de Educação de Pernambuco e em especial à Profa. Creuza Maria G. Aragão por ter autorizado o meu afastamento.

À Valdério Reisen pela bela amizade e os bons momentos.

À todos funcionários do IMECC inclusive os do Centro de Processamento de Dados da UNICAMP.

À meus familiares, ao movimento Apostólico Mariano de Schoenstatt através do Santuário da Mãe Rainha e Vencedora Três Vêzes Admirável de Schoenstatt e pessoas amigas pelas orações.

À Isabel pelo trabalho de datilografia paciente, dedicado e eficiente.

À meus colegas amigos e em especial a meus companheiros de final de tese.

E para finalizar a todos que demonstraram amizade,apoio, sorrisos e que de alguma forma contribuiram para que eu aqui chegasse.

Minha gratidão

Rosa Maria de Veiga Pessôa

SUMÁRIO

São estudados neste trabalho os métodos diretos e iterativos para cálculo da inversa (generalizada) de Moore-Penrose de uma matriz. Geralmente denotada por A^+, a inversa de Moore-Penrose tem a propriedade de que $x = A^+b$ é a única solução aproximada do sistema linear $Ax = b$ que minimiza tanto a norma euclidiana de x como os resíduos quadráticos($\|Ax-b\|$).

Após o estudo dos métodos para cálculo de A^+, foi feita a implementação de quatorze métodos; dois iterativos e doze diretos, para compará-los em termos de eficiência computacional.

Os métodos diretos foram classificados tendo como critério o menor número de operações.

A comparação dos métodos é realizada através de uma análise dos resultados obtidos na aplicação dos métodos à matrizes previamente selecionadas. Daí tiramos a conclusão de que métodos são os mais indicados em termos de utilização de memória, tempo real de execução e precisão. Esses métodos são: o iterativo de ordem $p = 3$, o de Greville(6.11) , eliminação Gaussiana(1.15) e Gram-Schmidt modificado(3.31).

ÍNDICE

NOTAÇÃO

Uma matriz será sempre representada por uma letra maíuscula.

Um vetor será sempre representado por uma letra minúscula.

I matriz identidade

I_n matriz identidade de ordem n

0 matriz nula

A matriz real $m \times n$ de posto r

A^{-1} matriz inversa de $A_{n \times n}$ não singular, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

A^{+} inversa de Moore-Penrose

A_E^{-1} inversa a esquerda, $A_E^{-1}A = I_n$

A_D^{-1} inversa a direita, $AA_D^{-1} = I_m$

a_k k-ésima coluna de A

A_k submatriz, consistindo das k primeiras colunas de A

$A = [a_{ij}]$ matriz real

A^t transporta de A, $a_{ij}^t = a_{ji}$

$P(A)$ posto de A, o número de linhas ou colunas linearmente independentes de A. $\equiv \rho[A]$

$tr(A)$ traço de $A_{n \times n}$

$|A|$ determinante de $A_{n \times n}$

$\|A\|$ norma euclidiana ou norma 2 de A

$\|A\|_1$ norma um de A

$\|A\|_\infty$ norma infinita de A

Z^+ conjunto dos números inteiros positivos, $\{1,2,3,\ldots\}$.

$\mathbb{R}^n$ espaço n-dimensional

$C(A)$ número de condição de A

$R(A)$ espaço imagem de A

$N(A)$	espaço nulo de A, $\{x : Ax = 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$
$R(A)^{\perp}$	complemento ortogonal de $R(A)$
$\lambda(A)$	autovalor de A
$\rho(A)$	raio espectral de A
$\sigma(A)$	valor singular de A
$\lvert\lambda\rvert$	módulo de λ , valor absoluto de λ um escalar
$\Rightarrow$	implica
$\forall$	para todo
$\neq$	diferente
$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\Leftrightarrow$	se só se
ϕ	conjunto vazio
$\subset$	está contido

NOTA: Os métodos diretos 1.11, 1.12,..., 1.16, 2.21, 2.22,..., 2.26, 3.31, 3.32,..., 3.36 têm os nomes na seguinte forma e significado:

a.ab

procedimento . a

procedimento . 0b

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1.1. PROBLEMA DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Um vetor x é chamado uma solução de mínimos quadrados da equação $Ax = b$, se ele

$$\text{minimiza} \quad \|Ax - b\|, \tag{1.1}$$

isto é, se ele é uma solução da equação $Ax = b_1$, onde b_1 é a projeção ortogonal de b em $\mathcal{R}(A)$, espaço vetorial gerado pelas colunas de A.

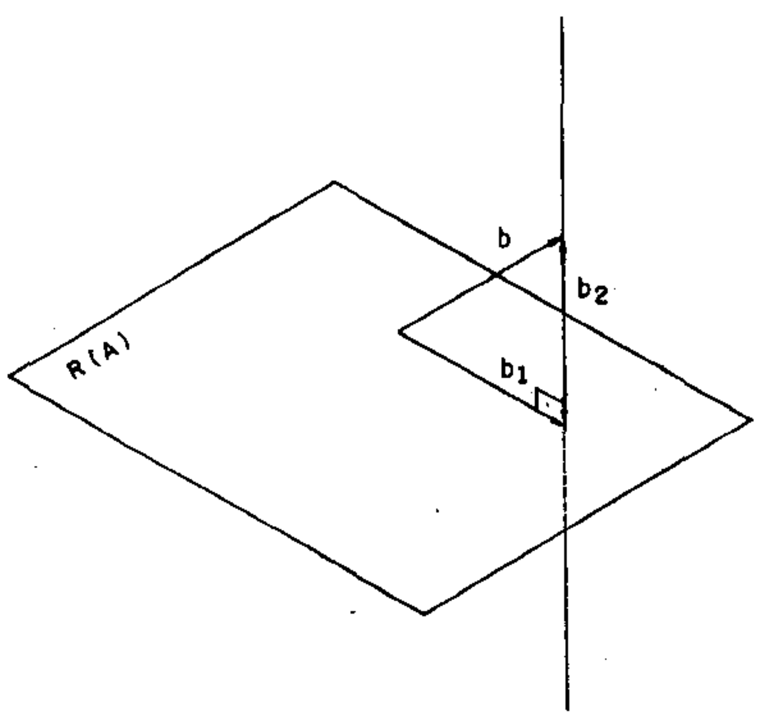


FIGURA 1.1

Na figura 1.1 temos:

$$b = b_1 + b_2 \Rightarrow \ b_2 = \ b - b_1 = \ b - Ax.$$

$b_1 \in R(A)$, projeção ortogonal de b sobre $R(A)$

$b_2 \in R(A)^{\perp}$, projeção ortogonal de b sobre $R(A)^{\perp}$, o complemento ortogonal de $R(A)$, isto é, o espaço de todos os vetores b_2 tal que $b_2^t b_1 = 0 \ \ \forall \ b_1 \in R(A)$.

$A^t b_2 = 0$.

PROPOSIÇÃO 1.1. Seja x uma solução do problema dos mínimos quadrados (1.1). Então o resíduo $r = b - Ax$ satisfaz

$$A^t r = 0.$$

Equivalentemente

$$A^t Ax = A^t b. \tag{1.2}$$

DEMONSTRAÇÃO

Desde que x é uma solução, $Ax = b_1$. Portanto $r = b - Ax = b - b_1 = b_2$. Mas desde que $b_2 \in R(A)^{\perp} \Rightarrow \ 0 = A^t b_2 = A^t r$

Então $A^t r = A^t (b - Ax) = 0$.

$$A^t Ax = A^t b.$$

O sistema quadrado de equações (1.2) é chamado o sistema de equações normais para o problema dos mínimos quadrados.

1.2 DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

DEFINIÇÃO 1.1 . Sejam $A_{m \times n}$ e λ um número real tal que

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

então λ é chamado autovalor de A e x autovetor associado a λ.

DEFINIÇÃO 1.2. Sejam A uma matriz, σ um número não negativo e u,v vetores tais que

$$Au = \sigma v, \quad A^t v = \sigma u,$$

então σ não nulo é chamado um valor singular de A e u,v são chamados vetores singulares de A.

Note que $A^tAu = \sigma^2 u$, $AA^t v = \sigma^2 v$. De fato

$$Au = \sigma v \Rightarrow A^tAu = A^t\sigma v = \sigma A^t v = \sigma\sigma u = \sigma^2 u.$$

$$A^t v = \sigma u \Rightarrow AA^t v = A\sigma u = \sigma Au = \sigma\sigma v = \sigma^2 v.$$

Assim os valores singulares de A são as raízes quadradas dos autovalores não nulos da matriz simétrica AA^t ou A^tA. Os vetores singulares são os autovetores de A^tA ou AA^t.

TEOREMA 1.1. Dada qualquer matriz real $A_{m\times n}$, $P(A)=r$, existe uma *decomposição em valores singulares de* A, que é qualquer fatorização da forma

$$A = UDV^t,$$

onde $U_{m\times m}$ e $V_{n\times n}$ são matrizes ortogonais

$$\text{e} \qquad D_{m\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.$$

Os σ_i, $i = 1,2,\ldots,r$ são os valores singulares de A e as colunas de U e V são vetores singulares à esquerda e à direita de A.

Demonstração [3,p.327].

1.3. TEOREMAS E DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 1.3. O raio espectral de $A_{n\times n}$ é definido por

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)| ,$$

onde $\lambda_i(A)$ é o i-ésimo autovalor de A.

TEOREMA 1.2. Seja $A_{m\times n}$. Então:

$$\|A\| = \sigma_1(A) = \max_i \{\sqrt{\lambda_i(A^tA)}\} = \rho(A^tA)$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \text{ máximo absoluto da soma das colunas.}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ máximo absoluto da soma das linhas.}$$

DEMONSTRAÇÃO [23,pp. 9-11].

DEFINIÇÃO 1.4. O número $C(A) = \|A\|.\|A^+\|$ é denominado número de condição de A.

O número de condição depende da norma usada. Para a norma euclidiana $C(A) = \|A\|\|A^+\| = \sigma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_r} \geq 1$, onde σ_1, σ_r são o maior e o menor valor singular de A, respectivamente.

TEOREMA 1.3. (Gerschgorin). Seja $A_{n\times n}$. Então cada autovalor de A está em um dos círculos no plano complexo

$$\mathcal{D}_i = \{\lambda : |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}|\} , i = 1,2,\ldots,n.$$

DEMONSTRAÇÃO [18,p.302].

DEFINIÇÃO 1.5. Seja $A_{n\times n}$. Então

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{é}$$

chamada traço de A.

E a expressão

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

é o determinante de A, onde A_{1j} é o cofator de a_{1j}.

DEFINIÇÃO 1.6. O determinante de uma matriz $(n-1)\times(n-1)$ formada omitindo a i-ésima linha e a j-ésima coluna de $A_{n\times n}$ é chamada o menor de a_{ij} e é denotado por M_{ij}. O número

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

é chamado o cofator de a_{ij}.

1.4. MATRIZES ESPECIAIS

TABELA 1.1

$A_{n \times n}$	DEFINIÇÃO
Simétrica	$A = A^t$
Ortogonal	$AA^t = A^tA = I$
Normal	$AA^t = A^tA$
Idempotente	$A^2 = A$
Positiva definida	$x^tAx > 0 \quad \forall \quad x \neq 0$

DEFINIÇÃO 1.7. $A_{m \times n}$ é trapezoidal superior se $i > j \Rightarrow a_{ij}=0$. Ela é trapezoidal inferior se $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Uma matriz trapezoidal superior (inferior) quadrada é chamada triangular superior (inferior).

DEFINIÇÃO 1.8. Matriz particionada é uma matriz escrita em termos de suas submatrizes

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO 1.9 Matriz permutação é a matriz identidade com linhas (ou colunas) trocadas.

DEFINIÇÃO 1.10 Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $V_{m \times \ell}$, $U_{k \times n}$ e $W_{k \times \ell}$, a matriz

$$\begin{bmatrix} A & V \\ U & W \end{bmatrix}$$

é chamada de matriz orlada de A.

DEFINIÇÃO 1.11 $A_{m\times n}$ é de Hessenberg superior se

$$i > j + 1 \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Ela é de Hessenberg inferior se

$$i < j - 1 \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Ela é tridiagonal se ela é Hessenberg superior e inferior, isto é

$$|i - j| > 1 \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

DEFINIÇÃO 1.12 $A_{m\times n}$ é bidiagonal superior se $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ e $i < j - 1 \Rightarrow a_{ij} = 0$.

1.5 INVERSAS DE MATRIZES DE POSTO COMPLETO

Seja $A_{m\times n}$. Se $P(A) = \min(m,n)$ então A é de posto completo.

1.5.1 INVERSA DE UMA MATRIZ QUADRADA

Seja $A_{n\times n}$ e $\rho(A) = n$. Então existe uma única matriz A^{-1}, chamada a inversa de A, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

1.5.2 INVERSA DE UMA MATRIZ RETANGULAR

INVERSA À DIREITA - Seja $A_{m\times n}$ e $\rho(A) = m$. Então $AA^t_{m\times m}$ e $\rho(AA^t) = m$. A inversa $(AA^t)^{-1}$ existe e

$$I_m = (AA^t)(AA^t)^{-1} = A\,[A^t(AA^t)^{-1}] = AA_D^{-1}$$

onde $A_D^{-1} = A^t(AA^t)^{-1}$ é chamada uma inversa a direita de A.

INVERSA À ESQUERDA - Similarmente, se $\rho(A) = n$, existe uma matriz A_E^{-1} chamada uma inversa a esquerda de A tal que

$$I_n = A_E^{-1}A\,, \quad \text{onde} \quad A_E^{-1} = (A^tA)^{-1}A^t.$$

A_E^{-1} ou A_D^{-1} existem somente quando A é de posto completo. Em ambos casos a inversa não é única.

CAPÍTULO II

INVERSA DE MOORE-PENROSE

2.1. INVERSA GENERALIZADA

A inversa de Moore-Penrose tem suas origens na resolução de sistemas lineares.

O sistema linear

$$\begin{aligned} &Ax = b, \text{ onde } A_{m\times n} \text{ e } P(A) = r \\ &b \in \mathbb{R}^m, \text{ conhecido} \\ &x \in \mathbb{R}^n, \text{ vetor de incógnitas} \end{aligned} \tag{2.1}$$

é consistente, isto é, admite pelo menos uma solução se e somente se $P(A) = P([A,b])$. Quando $P(A) \neq P([A,b])$ o sistema é inconsistente, nesse caso vamos procurar uma solução aproximada. Podemos exigir que essa solução minimize $\|Ax - b\|_\infty$ como é feito em alguns problemas de controle ou que a solução aproximada minimize $\|Ax - b\|_1$ como é usado em problemas de estatística. Podemos também procurar solução aproximada pelo método dos mínimos quadrados (1.1), onde o resíduo $r = Ax - b$ é calculado pela norma euclidiana.

Se $P(A) = P([A,b]) = n = m$, A^{-1} existe e a solução de (2.1) será dada por $x = A^{-1}b$. Se $A_{n\times n}$ $P(A) < n$ ou $A_{m\times n}$, $m \neq n$, não tem inversa e a solução exata ou aproximada poderá ter uma representação similar, isto é, da forma $x = Gb$. Então $G_{n\times m}$ comporta-se como a inversa de A, podendo então ser chamada uma inversa generalizada de A. Daremos algumas definições de inversa generalizada. As inversas a esquerda A_E^{-1} e a direita A_D^{-1} satisfazem algumas dessas definições, sendo portanto uma solução do sistema (2.1) quando $P(A) = P([A,b]) = \min(m,n)$, isto é, quando A é de posto completo.

2.1.1. SOLUÇÃO DE $Ax = b$ (CONSISTENTE)

1. Inversa generalizada. $G = A^-$ é qualquer matriz tal que $AGA = A$.

   Gb é uma solução de $Ax = b$.

2. Inversa generalizada reflexiva. $G = A_r^-$ é qualquer matriz tal que $AGA = A$, $GAG = G$

   Gb é uma solução de $Ax = b$

3. Inversa generalizada norma mínima. $G = A_m^-$ é qualquer matriz tal que $AGA = A$, $(GA)^t = GA$.

   Gb é de norma mínima na classe de soluções de $Ax = b$.

2.1.2. SOLUÇÃO DE $Ax = b$ (INCONSISTENTE)

1. Inversa generalizada simétrica. $G = A_\ell^-$ é qualquer matriz tal que $AGA = A$, $(AG)^t = AG$.

   Gb é uma solução de mínimos quadrados de $Ax = b$.

2. A definição mais importante é a da inversa (generalizada) de Moore-Penrose, que será dada na seção seguinte.

Toda matriz real $A_{m\times n}$, $P(A) = r$ tem inversa de Moore-Penrose $A^+_{n\times m}$, considerada como uma extensão do conceito da inversa de uma matriz não singular. Se A é não singular então $A^+ = A^{-1}$. A^+ é unicamente determinada por A.

OBS.: A terminologia e notação que usamos para as inversas generalizadas não é universalmente aceita.

2.2. DEFINIÇÕES E UNICIDADE

2.2.1. DEFINIÇÃO 1. PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Considere o sistema linear (2.1).

O sistema tem solução mínima aproximada única

$$x = A^+b \tag{2.2}$$

se:

1) x minimiza $\|Ax - b\|$

2) $\|x\|$ seja mínima.

A solução x é então escrita como resultado da aplicação de uma transformação linear a b e A^+ é a matriz transformação.

TEOREMA 2.1. As equações normais (1.2) para os problemas dos mínimos quadrados (1.1) sempre têm uma solução; a solução é única se e somente se $P(A) = n$.

Demonstração [3, p.332].

Pela prova do teorema anterior a solução única acontece quando A^tA é não singular e pode ser escrita na forma

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b \qquad (2.3)$$

Se definimos $A^+ = (A^t A)^{-1} A^t$, então (2.3) ficará $x = A^+ b$.

OBS.: Quando $\mathcal{P}(A) = m$, $A^+ = A^t (AA^t)^{-1}$.

Pela decomposição em valores singulares de A, obtemos uma definição geral da inversa de Moore-Penrose (MP) que resolve o problema dos mínimos quadrados.

2.2.2. DEFINIÇÃO 2. PELA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES (DVS).

Primeiro definiremos σ^+, onde σ é um escalar.

$$\sigma^+ = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} & \text{se } \sigma \neq 0 \\ 0 & \text{se } \sigma = 0 \end{cases}$$

Note que $\sigma^+\sigma$ e $\sigma\sigma^+ = 0$ ou 1.

Pela DVS $A = UDV^t$ como no teorema 1.1 com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, valores singulares de A.

$$\text{Então} \quad A^+ = VD^+U^t \qquad (2.4)$$

onde $D^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^+ & & & & 0 \\ & \sigma_2^+ & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r^+ & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$

A^+ é única embora U e V possam não ser.

2.2.3. DEFINIÇÃO 3. PELAS CONDIÇÕES DE MOORE-PENROSE

A^+ é a única matriz satisfazendo:

$$AA^+A = A \qquad (2.5)$$

$$A^+AA^+ = A^+ \qquad (2.6)$$

$$(AA^+)^t = AA^+ \qquad (2.7)$$

$$(A^+A)^t = A^+A \qquad (2.8)$$

TEOREMA 2.2. A inversa de Moore-Penrose de A é única.

Demonstração

Sejam X e Y duas matrizes satisfazendo (2.5) - (2.8).

$X = XAX$ por (2.6)

$= (XA)^tX$ por (2.8)

$= A^tX^tX$

$= A^tY^tA^tX^tX$ pela transposta de (2.5)

$$= A^tY^t(XA)^tX$$

$$= A^tY^tXAX \qquad \text{por (2.8)}$$

$$= A^tY^tX \qquad \text{por (2.6)}$$

$$= (YA)^tX$$

$$= YAX \qquad \text{por (2.8)}$$

$$= YAYAX \qquad \text{por (2.6)}$$

$$= Y(AY)^t(AX)^t \qquad \text{por (2.7)}$$

$$= YY^tA^tX^tA^t$$

$$= YY^tA^t \qquad \text{pela transporta de (2.5)}$$

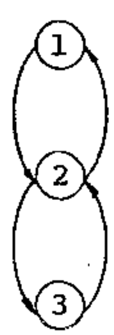
$$= Y(AY)^t$$

$$= YAY \qquad \text{por (2.7)}$$

$$= Y$$

Portanto $X = Y$ e a inversa de MP é única.

2.3. EQUIVALÊNCIA DAS DEFINIÇÕES



1) $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$

Pela DVS $A = UDV^t$ como no teorema 1.1.

E seja o problema dos mínimos quadrados (1.1).

Desde que a norma 2 de uma matriz ortogonal é sempre igual a um:

$$\|Ax - b\| = \|UDV^t x - b\| = \|U^t\| \|UDV^t x - b\| = \|U^t (UDV^t x - b)\| =$$
$$= \|U^t UDV^t x - U^t b\| = \|DV^t x - U^t b\| = \|Dy - U^t b\| ,$$

onde $y = V^t x$.

Portanto x resolve o problema dos mínimos quadrados (1.1) $\Longleftrightarrow$ $y = V^t x$, resolve: minimizar $\|Dy - d\|$, onde $d = U^t b$.

Então a DVS reduz o problema dos mínimos quadrados geral para um envolvendo uma matriz diagonal. Mas desde que:

$$\|Dy - d\| = [(\sigma_1 y_1 - d_1)^2 + (\sigma_2 y_2 - d_2)^2 + \ldots + (\sigma_r y_r - d_r)^2 +$$
$$+ (0.y_{r+1} - d_{r+1})^2 + \ldots + (0.y_n - d_n)^2]^{1/2} = 0.$$

$$\sigma_1 y_1 - d_1 = 0 \Longleftrightarrow \sigma_1 y_1 = d_1 \Longleftrightarrow y_1 = \frac{d_1}{\sigma_1}$$
$$\sigma_2 y_2 - d_2 = 0 \Longleftrightarrow \sigma_2 y_2 = d_2 \Longleftrightarrow y_2 = \frac{d_2}{\sigma_2}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\sigma_r y_r - d_r = 0 \Longleftrightarrow \sigma_r y_r = d_r \Longleftrightarrow y_r = \frac{d_r}{\sigma_r}$$

Então o vetor y que produz o mínimo de $\|Ax - b\|$ é dado por:

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{d_i}{\sigma_i} & \text{se} \quad \sigma_i \neq 0 \qquad 1 \leq i \leq r \\ \\ y_i \ \text{arbitrário se} & \sigma_i = 0 \qquad 1 + r \leq i \leq n \end{cases}$$

Desde que $y = V^t x \iff x = Vy$. Então a solução dos mínimos quadrados é da forma

$$x = Vy = V \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \\ \}n - r, \end{matrix}$$

onde os y_2 são arbitrários.

Agora a norma mínima de y é dada quando $y_i = 0$, $r+1 \leq \leq i \leq n$ e como $\|x\| = \|Vy\| = \|V\| \|y\| = \|y\| \iff$ solução mínima aproximada única é dada $\iff x = V \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ onde $y_i = \dfrac{d_i}{\sigma_i}$, $1 \leq i \leq r$ e $d = U^t b$.

Então $x = V \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix} = V \dfrac{d_i}{\sigma_i} = V\sigma_i^{-1} U^t b = VD^+ U^t b$.

Portanto $x = A^+ b$, onde $A^+ = VD^+ U^t$.

2) $\boxed{2 \Rightarrow 3.}$

Pela DVS $A = UDV^t$ e $A^+ = VD^+ U^t$.

1. $AA^+A = UDV^t VD^+ U^t UDV^t = UDD^+ DV^t = UDV^t = A$.

2. $A^+AA^+ = VD^+ U^t UDV^t VD^+ U^t = VD^+ DD^+ U^t = VD^+ U^t = A^+$

3. $(AA^+)^t = (UDV^tVD^+U^t)^t = (UDD^+U^t)^t = U(DD^+)^tU^t = UDD^+U^t =$

$= UDVV^tD^+U^t = AA^+.$

4. $(A^+A)^t = (VD^+U^tUDV^t)^t = (VD^+DV^t)^t = V(D^+D)^tV^t = VD^+DV^t =$

$= VD^+U^tUDV^t = A^+A.$

3) $\boxed{3 \Rightarrow 2.}$

Pela DVS $A = UDV^t$, onde

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Calcular A^+ por (2.5) já é suficiente desde que A^+ é única.

$AXA = A$
$UDV^tXUDV^t = UDV^t$
$U^tUDV^tXUDV^tV = U^tUDV^tV$

$DV^tXUD = D$, agora $V^tXUD = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$ e

$$V^tXU \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então} \quad V^t X U = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} \text{, pois}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\text{Portanto} \quad V^t X U = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = D^+$$

e $X = VD^+U^t$.

2.4. PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICAS

Como a inversa de MP é sempre única, algumas relações poderão ser verificadas através das quatros condições de Moore-Penrose.

PROPOSIÇÃO 2.1. Se P e Q são matrizes ortogonais então $(PAQ)^+ = Q^tA^+P^t$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. $PAQQ^tA^+P^tPAQ = PAA^+AQ = PAQ$

2. $Q^tA^+P^tPAQQ^tA^+P^t = Q^tA^+AA^+P^t = Q^tA^+P^t$.

3. $(PAQQ^tA^+P^t)^t = (PAA^+P^t)^t = P(AA^+)^tP^t = PAA^+P^t = PAQQ^tA^+P^t$

4. $(Q^tA^+P^tPAQ)^t = (Q^tA^+AQ)^t = Q^t(A^+A)^tQ = Q^tA^+AQ = Q^tA^+P^tPAQ$.

PROPOSIÇÃO 2.2. $(A^t)^+ = (A^+)^t$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela DVS $A = UDV^t$ como no teorema 1.1 e $A^+ = VD^+U^t$.

Agora $D^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}$ e $(D^+)^t = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$

$D^t = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}$ e $(D^t)^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/\sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$

E portanto $(D^+)^t = (D^t)^+$.

Agora podemos mostrar que $(A^t)^+ = (A^+)^t$.

$A^t = (UDV^t)^t = VD^tU^t$.

$(A^+)^t = (VD^+U^t)^t = U(D^+)^tV^t$

$(A^t)^+ = (VD^tU^t)^+ = U(D^t)^+V^t$

Mas como $(D^+)^t = (D^t)^+$

Então $(A^t)^+ = (A^+)^t$.

Em geral $(BC)^+ \neq C^+B^+$ como pode ser visto no exemplo seguinte: Sejam $B_{1\times 2}, C_{2\times 1}$ onde $B = [1,0]$ e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\rho(B) = 1 \Rightarrow B^+ = B^t(BB^t)^{-1}$, pois B tem posto linha completo.

$$B^+ = [1,0]^t([1,0][1,0]^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\left([1,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(C) = 1 \Rightarrow C^+ = (C^tC)^{-1}C^t$, pois C tem posto coluna completo.

$$C^+ = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^t = \left([1,1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}[1,1] = 2^{-1}[1,1] = \frac{1}{2}[1,1] =$$

$$= [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

$$(BC)^+ = \left([1,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^+ = 1^+ = 1$$

$$C^+B^+ = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Portanto $(BC)^+ \neq C^+B^+$.

Mas quando $B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$ e $P(B)=P(C)=r$, $(BC)^{+} = C^{+}B^{+}$ é sempre verdadeira como é demonstrado nas duas proposições seguintes:

PROPOSIÇÃO 2.3. Sejam $A_{m\times n}$, $P(A) = r$ e $A = BC$ onde $B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$ e $P(B) = P(C) = r$. Então

$$A^{+} = C^{+}B^{+} \tag{2.9}$$

DEMONSTRAÇÃO: Por (2.1) $Ax = b$.

Podemos fazer esta substituição porque B e C têm postos completos.

$BCx = b$

$B^tBCx = B^tb$, onde B^tB é não singular

$(B^tB)^{-1}(B^tB)Cx = (B^tB)^{-1}B^tb.$

$$Cx = (B^tB)^{-1}B^tb. \tag{2.10}$$

$$x = C^t$$

$$Cx = CC^tu \tag{2.11}$$

Por (2.10) e (2.11), obtemos:

$(B^tB)^{-1}B^tb = CC^tu$, onde CC^t é não singular

$$(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tb = (CC^t)^{-1}(CC^t)u$$

$$u = (CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tb.$$

$$x = C^tu = C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tb.$$

Por (2.2) $x = A^{+}b$.

$$= C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tb.$$
$$= C^+B^+b.$$

Portanto $A^+ = C^+B^+$.

PROPOSIÇÃO 2.4. Se B e C são de posto completo como acima, então $B^+ = (B^tB)^{-1}B^t$ e $C^+ = C^t(CC^t)^{-1}$

DEMONSTRAÇÃO:

1. $AA^+A = BCC^+B^+BC = BCC^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tBC =$
$$= B(CC^t)(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}(B^tB)C = BC = A$$

2. $A^+AA^+ = C^+B^+BCC^+B^+ = C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tBCC^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t =$
$$= C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}(B^tB)(CC^t)(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t =$$
$$= C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t = C^+B^+ = A^+.$$

3. $(AA^+)^t = (BCC^+B^+)^t = (BCC^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t)^t =$
$$= (B(CC^t)(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t)^t = (B(B^tB)^{-1}B^t)^t =$$
$$= B((B^tB)^{-1})^tB^t = B((B^tB)^t)^{-1}B^t = B(B^tB)^{-1}B^t =$$
$$= B(CC^t)(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t = BCC^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t =$$
$$= BCC^+B^+ = AA^+.$$

4. $(A^+A)^t = (C^+B^+BC)^t = (C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tBC)^t =$
$$= (C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}(B^tB)C)^t = (C^t(CC^t)^{-1}C)^t =$$
$$= C^t((CC^t)^{-1})^tC = C^t((CC^t)^t)^{-1} = C^t(CC^t)^{-1}C =$$
$$= C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}(B^tB)C = C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tBC =$$

$$= C^+B^+BC = A^+A.$$

Podemos ver com o exemplo seguinte:

$B_{2\times 1}$, $C_{1\times 2}$ e $\rho(B) = \rho(C) = 1$. Onde $B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ e $C = [1,0]$.

B^+ e C^+ já foram calculadas no exemplo anterior.

$$B^+ = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \quad ; \quad C^+ = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$C^+B^+ = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(BC)^+ = \left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[1,0]\right)^+ = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Demonstraremos que $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ pelas condições de Moore-Penrose.

1. $$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

3. $$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)^t = \left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$4.\quad \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^t = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $(BC)^+ = C^+B^+$.

PROPOSIÇÃO 2.5. Se os 0's são matrizes zero de tamanho adequado, então

$$1)\quad [A,0]^+ = \begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad 2)\quad \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}^+ = [A^+,0]\ .$$

DEMONSTRAÇÃO:

1)

$$1.\quad [A,0]\begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix}[A,0] = AA^+[A,0] = [AA^+A,0] = [A,0]$$

$$2.\quad \begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix}[A,0]\begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+AA^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3.\quad \left([A,0]\begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix}\right)^t = (AA^+)^t = AA^+ = [A,0]\begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4.\quad \left(\begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix}[A,0]\right)^t = \left(\begin{bmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} (AA^+)^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A^+ \\ 0 \end{bmatrix}[A,0]\ .$$

2)

1. $$\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}[A^+,0]\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $$[A^+,0]\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}[A^+,0] = A^+A\,[A^+,0] = [A^+AA^+,0] = [A^+,0]$$

3. $$\left(\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}[A^+,0]\right)^t = \begin{bmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{t'} = \begin{bmatrix} (AA^+)^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}[A^+,0].$$

4. $$\left([A^+,0]\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}\right)^t = (A^+A)^t = A^+A = [A^+,0]\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}.$$

LEMA 2.1. Propriedades de A^+.

1. $A^{++} = A$
2. Se A é não singular $A^+ = A^{-1}$
3. $(\sigma A)^+ = \sigma^+ A^+$, σ um escalar
4. $(A^tA)^+ = A^+(A^+)^t$ e $(AA^t)^+ = (A^+)^t A^+$.
5. $(AA^t)^+AA^t = AA^+$ e $(A^tA)^+(A^tA) = A^+A$.
6. $A^+ = (A^tA)^+A^t$
7. Se $A = \Sigma A_i$, onde $A_iA_j^t = 0$ e $A_i^tA_j = 0$, sempre que $i \neq j$ então $A^+ = \Sigma A_i^+$.

8. Se A é normal $A^+A = AA^+$ e $(A^n)^+ = (A^+)^n$.

9. $\rho(A) = \rho(A^+) = \rho(A^tA) = \rho(A^+A) = tr(A^+A)$.

DEMONSTRAÇÃO [32, p.408]

LEMA 2.2. Se A é simétrica então A^+ é simétrica.

DEMONSTRAÇÃO:

Se A é simétrica então $A = A^t$ e $A^+ = (A^t)^+$. Como $(A^t)^+ = (A^+)^t$ pela proposição 2.2 então $A^+ = (A^+)^t$. Portanto A^+ é simétrica.

LEMA 2.3. A inversa de MP de uma matriz nula é uma matriz nula.

LEMA 2.4. Se u é um vetor coluna diferente de zero, então $u^+ = (u^tu)^{-1}u^t$.

LEMA 2.5. Se $A = uv^t$ então $A^+ = \dfrac{A^t}{(v^tv)(u^tu)}$.

LEMA 2.6. Se $A = [a_{ij}] = 1$ $\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$ então $A^+ = \dfrac{A^t}{mn}$.

OBS.: Os lemas 2.3.- 2.6. poderão ser demonstrados pelas condições de Moore-Penrose.

TEOREMA 2.3. Seja $A_{m\times n}$, $\rho(A) = r$, particionada na forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} é $r \times r$ não singular, então

$$A = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} [A_{11}, A_{12}] = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} A_{11} [I, Q] = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix} [I, Q]$$

onde $P = A_{21}A_{11}^{-1}$ e $Q = A_{11}^{-1}A_{12}$.

DEMONSTRAÇÃO [3, p.340].

COROLÁRIO 2.1. Se $A_{2\times 2}$, $\rho(A) = 1$ então $A^{+} = \dfrac{A^{t}}{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$.

DEMONSTRAÇÃO:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad a_{11} \neq 0$$

e pelo teorema anterior

$$Q = a_{11}^{-1}\, a_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \qquad A = BC = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \left[1, \frac{a_{12}}{a_{11}}\right]$$

E por (2.9) teremos:

$$A^+ = C^+B^+ = \begin{bmatrix} 1, & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}^+ .$$

Agora $CC^t = \begin{bmatrix} 1, & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} = 1 + \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}^2} = \dfrac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}}$

$$(CC^t)^{-1} = \frac{a_{11}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

$$B^tB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = a_{11}^2 + a_{21}^2$$

$$(B^tB)^{-1} = \frac{1}{a_{11}^2 + a_{21}^2}$$

$$A^+ = C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} \left(\frac{a_{11}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \right) \left(\frac{1}{a_{11}^2+a_{21}^2} \right) [a_{11}, a_{21}] =$$

$$= \left(\frac{a_{11}^2}{a_{11}^2+ a_{12}^2} \right) \left(\frac{1}{a_{11}^2+ a_{21}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} [a_{11}, a_{21}]$$

$$= \frac{a_{11}^2}{a_{11}^4 + a_{11}^2 a_{21}^2 + a_{12}^2 a_{11}^2 + a_{21}^2 a_{12}^2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & \dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a_{11}^2}{a_{11}^2(a_{11}^2+a_{21}^2+a_{12}^2+\dfrac{a_{21}^2 a_{12}^2}{a_{11}^2})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & \dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}^2+a_{21}^2+a_{12}^2\ +a_{22}^2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{A^t}{a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2} .$$

Pois como $A_{2\times 2}$, $\rho(A) = 1 \Rightarrow A$ é singular $\Rightarrow |A| = 0$. Logo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{22} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}, \quad a_{11} \neq 0.$$

2.5. PROJETOR ORTOGONAL

TEOREMA 2.4. Para toda matriz $A_{m\times n}$,

a) AA^+ é um projetor ortogonal sobre $R(A)$.

b) A^+A é um projetor ortogonal sobre $R(A^t)$

DEMONSTRAÇÃO

(a) Por (2.5) e (2.7) AA^+ é simétrica e idempotente, portanto projeção ortogonal. E por (2.5) AA^+ é um projetor ortogonal sobre $\mathcal{R}(A)$.

(b) Por (2.6) e (2.8) A^+A é simétrica e idempotente, portanto é uma projeção ortogonal. E por (2.6) A^+A é um projetor ortogonal sobre $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^t)$.

O seguinte teorema é equivalente ao anterior.

TEOREMA 2.5. Para toda matriz $A_{m\times n}$,

(a) AA^+ é uma projeção sobre $\mathcal{R}(A)$ na direção de $\mathcal{N}(A^t)$.

(b) A^+A é uma projeção sobre $\mathcal{R}(A^t)$ na direção de $\mathcal{N}(A)$.

DEMONSTRAÇÃO. [8 , pp. 680-681].

COROLÁRIO 2.2.

(a) $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{N}(A^+)$.

(b) $\mathcal{R}(A^{t^+}) = \mathcal{R}(A)$.

DEMONSTRAÇÃO [8 , p.681].

CAPÍTULO III

MÉTODOS ITERATIVOS

Começando de alguma matriz inicial X_0, define uma seqüência de aproximações sucessivas $X_1, X_2, X_3, \ldots$, as quais sob certas condições convergem para a solução exata.

Os dois métodos iterativos para calcular A^+ são uma generalização do método iterativo para a determinação da inversa de matrizes não singulares.

3.1. MÉTODO DE SUPER POTÊNCIA DE ORDEM P-ÉSIMA.

ALGORITMO 1.

Seja $p \geq 2$ um número inteiro.

$$X_0 = \alpha A^t$$

$$X_{k+1} = \sum_{j=0}^{p-1} (I - X_k A)^j X_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots \quad (3.1)$$

Como $(I-XA)X = X(I-AX)$ a expressão (3.1) pode também ser escrita como

$$X_{k+1} = \sum_{j=0}^{p-1} X_k (I-AX_k)^j, \qquad k = 0,1,2,\ldots \quad (3.2)$$

Para $m \geq n$ usaremos (3.1), pois para cada passo o número de operações em (3.1) é $(p-1)n^3 + mn^2$ e para (3.2) é

$(p-1)m^3+nm^2$.

TEOREMA 3.1 O método é de p-ésima ordem.

DEMONSTRAÇÃO: Teremos que provar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} I - AX_{k+1} &= (I - AX_k)^p \\ I - X_{k+1}A &= (I - X_kA)^p \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} AA^+ - AX_{k+1} &= (AA^+ - AX_k)^p \\ A^+A - X_{k+1}A &= (A^+A - X_kA)^p \end{aligned} \tag{3.4}$$

1) $E_k = I - AX_k$, $k = 0,1,2,3,\ldots$

E_k: resíduo, mede a aproximação de X_k à A^+.

Segue de (3.1) que

$$\begin{aligned} E_{k+1} = I-AX_{k+1} &= I-A\sum_{j=0}^{p-1}(I-X_kA)^jX_k \\ &= I-A\sum_{j=0}^{p-1}X_k(I-AX_k)^j \\ &= I-A[X_k+X_k(I-AX_k)+X_k(I-AX_k)^2+\ldots+X_k(I-AX_k)^{p-1}]. \\ &= I-A[X_k+X_kE_k+X_kE_k^2+\ldots+X_kE_k^{p-1}]. \\ &= I-AX_k[I+E_k+E_k^2+\ldots+E_k^{p-1}]. \\ &= E_k[I+E_k+E_k^2+\ldots+E_k^{p-1}]. \end{aligned}$$

$$= I - I + E_k\, [I + E_k + E_k^2 + \dots + E_k^{p-1}] .$$

$$= I - [I - E_k]\, [I + E_k + E_k^2 + \dots + E_k^{p-1}] .$$

$$= I - [I - E_k + E_k - E_k^2 + E_k^2 - \dots + E_k^{p-1} - E_k^p] .$$

$$= I - I + E_k^p = E_k^p = (I - AX_k)^p$$

Portanto $E_{k+1} = E_k^p = I - AX_{k+1} = (I - AX_k)^p$

2) $\bar{E}_k = I - X_k A, \quad k = 0,1,2,\dots$

Segue de (3.1) que

$$\bar{E}_{k+1} = I - \sum_{j=0}^{p-1} (I - X_k A)^j X_k A$$

$$= I - [X_k + (I - X_k A) X_k + (I - X_k A)^2 X_k + \dots + (I - X_k A)^{p-1} X_k]\, A$$

$$= I - [X_k + \bar{E}_k X_k + \bar{E}_k^2 X_k + \dots + \bar{E}_k^{p-1} X_k]\, A$$

$$= I - [I + \bar{E}_k + \bar{E}_k^2 + \dots + \bar{E}_k^{p-1}]\, X_k A$$

$$= I - [I + \bar{E}_k + \bar{E}_k^2 + \dots + \bar{E}_k^{p-1}]\, I - I + X_k A$$

$$= I - [I + \bar{E}_k + \bar{E}_k^2 + \dots + \bar{E}_k^{p-1}]\, I - (I - X_k A)$$

$$= I - [I + \bar{E}_k + \bar{E}_k^2 + \dots + \bar{E}_k^{p-1}](I - \bar{E}_k)$$

$$= I - [I - \bar{E}_k + \bar{E}_k - \bar{E}_k^2 + \dots + \bar{E}_k^{p-1} - \bar{E}_k^p]$$

$$= I - I + \bar{E}_k^p = \bar{E}_k^p = (I - X_k A)^p$$

Portanto $\bar{E}_{k+1} = \bar{E}_k^p = I - X_{k+1} A = (I - X_k A)^p$.

Antes de provar as duas últimas igualdades devemos observar que:

$$R_kE_k=(AA^+-AX_k)(I-AX_k)=AA^+-AA^+AX_k-AX_k+AX_kAX_k=AA^+-AX_k-AX_k+AX_k+$$

$$+AX_kAX_k=AA^+-2AX_k+(AX_k)^2=AA^+AA^+-2AX_k+(AX_k)^2=$$

$$=(AA^+)^2-2AX_k+(AX_k)^2=(AA^+)^2-2AA^+AX_k+(AX_k)^2=(AA^+-AX_k)^2=R_k^2.$$

$$\bar{E}_k\bar{R}_k=(I-X_kA)(A^+A-X_kA)=A^+A-X_kA-X_kAA^+A+X_kAX_kA=A^+A-X_kA-X_kA+(X_kA)^2=$$

$$=A^+A-2X_kA+(X_kA)^2=A^+AA^+A-2X_kA+(X_kA)^2=(A^+A)^2-2X_kA+(X_kA)^2=$$

$$=(A^+A)^2-2A^+AX_kA+(X_kA)^2=(A^+A-X_kA)^2=\bar{R}_k^2.$$

3) $R_k=AA^+-AX_k$, $k=0,1,2,\dots$

R_k: resíduo mede a aproximação de AA^+ à AX_k

$\bar{R}_k=A^+A-X_kA$, $k=0,1,2,\dots$

$\bar{R}_k$: resíduo, mede a aproximação de A^+A à X_kA.

Pré-multiplicando AA^+ e pós-multiplicando A^+A por (3.3) leva a (3.4).

$$AA^+-AA^+AX_{k+1}=AA^+(I-AX_k)^p$$

$$AA^+-AX_{k+1}=AA^+(I-AX_k)^p$$

$$= AA^+(I-AX_k)(I-AX_k)^{p-1}$$

$$= (AA^+-AA^+AX_k)(I-AX_k)^{p-1}$$

$$= (AA^+-AX_k)(I-AX_k)^{p-1}$$

$$= (AA^+-AX_k)(I-AX_k)(I-AX_k)^{p-2}$$

$$= (AA^+-AX_k)^2(I-AX_k)^{p-2}$$

$$= R_k^2E_k^{p-2}=R_kR_kE_kE_k^{p-3} = R_kR_k^2E_k^{p-3} =$$

$$= R_k^3E_k^{p-3} = \ldots = R_k^pE_k^{p-p} = R_k^pE_k^0 = R_k^p$$

Portanto $R_{k+1}=R_k^p = AA^+ - AX_{k+1} = (AA^+ - AX_k)^p$.

$$A^+A - X_{k+1}AA^+A = (I-X_kA)^pA^+A$$

$$A^+A - X_{k+1}A = (I-X_kA)^pA^+A$$

$$= (I-X_kA)^{p-1}(I-X_kA)A^+A$$

$$= (I-X_kA)^{p-1}(A^+A-X_kAA^+A)$$

$$= (I-X_kA)^{p-1}(A^+A-X_kA)$$

$$= (I-X_kA)^{p-2}(I-X_kA)(A^+A-X_kA)$$

$$= (I-X_kA)^{p-2}(A^+A-X_kA)^2$$

$$= \bar{E}_k^{p-2}\bar{R}_k^2 = \bar{E}^{p-3}\bar{E}_k\bar{R}_k\bar{R}_k$$

$$= \bar{E}_k^{p-3}\bar{R}_k^2 \cdot \bar{R}_k = \bar{E}_k^{p-3}\bar{R}_k^3 = \ldots =$$

$$= \bar{E}_k^{p-p}\bar{R}_k^p = \bar{E}_k^0\bar{R}_k^p = \bar{R}_k^p$$

Portanto $\bar{R}_{k+1} = \bar{R}_k^p = A^+A - X_{k+1}A = (A^+A - X_{k+1}A)^p$.

Como $E_{k+1} = E_k^p$, $\bar{E}_{k+1} = \bar{E}_k^p$

$R_{k+1} = R_k^p$ e $\bar{R}_{k+1} = \bar{R}_k^p$

então o método é de ordem p.

TEOREMA 3.2. Se $X_0 = A^tWA^t$, onde W é uma matriz arbitrária então a seguinte relação vale para a seqüência do algoritmo 1.

$$\begin{aligned} AA^+ - AX_{k+1} &= (AA^+ - AX_k)^p = AA^+(I - AX_k)^p \\ A^+A - X_{k+1}A &= (A^+A - X_kA)^p = (I - X_kA)^pA^+A. \end{aligned} \tag{3.5}$$

OBSERVAÇÃO.: A condição sobre X_0 é equivalente a $R(X_0) \subset R(A^t)$ e $R(X_0^t) \subset R(A)$, porque as colunas de X_0 são combinações lineares das colunas de A^t e as colunas de X_0^t são combinações lineares das colunas de A.

DEMONSTRAÇÃO: Como $R(X_0) \subset R(A^t)$ e $R(X_0^t) \subset R(A)$ então $A^+AX_0 = X_0$ e $X_0AA^+ = X_0$.

Pelas expressões (3.1) e (3.2) é observado que as colunas dos X_{k+1}'s são combinações lineares das colunas dos X_k's. Então como $\mathcal{R}(X_0) \subset \mathcal{R}(A^t)$ e $\mathcal{R}(X_0^t) \subset \mathcal{R}(A) \Rightarrow \mathcal{R}(X_k) \subset \mathcal{R}(A^t)$ e $\mathcal{R}(X_k^t) \subset \mathcal{R}(A)$

Temos que:

$$\begin{aligned} AA^+ - AX_{k+1} &= AA^+ - AA^+AX_{k+1} = AA^+(I-AX_{k+1}) = AA^+AA^+(I-AX_{k+1}) = \\ &= AA^+(AA^+ - AA^+AX_{k+1}) = AA^+(AA^+ - AX_{k+1}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} A^+A - X_{k+1}A &= A^+A - X_{k+1}AA^+A = (I-X_{k+1}A)A^+A = (I-X_{k+1}A)A^+AA^+A = \\ &= (A^+A - X_{k+1}AA^+A)A^+A = (A^+A - X_{k+1}A)A^+A \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.6),(3.4) e (3.3) teremos:

$$AA^+ - AX_{k+1} = AA^+(I-AX_{k+1}) = AA^+(I-AX_k)^p = (AA^+ - AX_k)^p$$

Portanto $AA^+ - AX_{k+1} = (AA^+ - AX_k)^p = AA^+(I-AX_k)^p$

De (3.7), (3.4) e (3.3) teremos:

$$A^+A - X_{k+1}A = (I-X_{k+1}A)A^+A = (I-X_kA)^pA^+A = (A^+A - X_kA)^p$$

Portanto $A^+A - X_{k+1}A = (A^+A - X_kA)^p = (I - X_kA)^pA^+A$

COROLÁRIO 3.1. Se X_0 tem as mesmas condições anteriores então

$$A^+ - X_{k+1} = A^+(I - AX_k)^p = A^+(A(A^+-X_k))^p$$
$$= (I-X_kA)^pA^+ = ((A^+ - X_k)A)^pA^+ \tag{3.8}$$

DEMONSTRAÇÃO: Usaremos então $A^+AX_k = X_k$ e $X_kAA^+ = X_k$.

De (3.6), temos que:

$$AA^+ - AX_{k+1} = AA^+(I - AX_{k+1}) = AA^+(AA^+ - AX_{k+1})$$

Pré-multiplicando por A^+, obtemos:

$$A^+AA^+ - A^+AX_{k+1} = A^+AA^+(I - AX_{k+1}) = A^+AA^+(AA^+ - AX_{k+1})$$

$$A^+ - X_{k+1} = A^+(I - AX_{k+1}) = A^+(AA^+ - AX_{k+1})$$

De (3.3) e (3.4), concluímos que:

$$A^+ - X_{k+1} = A^+(I - AX_k)^p = A^+(AA^+ - AX_k)^p$$

De (3.7), temos que:

$$A^+A - X_{k+1}A = (I - X_{k+1}A)A^+A = (A^+A - X_{k+1}A)A^+A$$

Pós-multiplicando por A^+, obtemos:

$$A^+AA^+ - X_{k+1}AA^+ = (I - X_{k+1}A)A^+AA^+ = (A^+A - X_{k+1}A)A^+AA^+$$

$$A^+ - X_{k+1} = (I - X_{k+1}A)A^+ = (A^+A - X_{k+1}A)A^+$$

De (3.3) e (3.4), concluímos que:

$$A^+ - X_{k+1} = (I - X_k A)^p A^+ = (A^+ A - X_k A)^p A^+.$$

3.1.1 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE SUPER POTÊNCIA DE ORDEM P-ÉSIMA

A convergência é dada em termos dos três seguintes corolários.

COROLÁRIO 3.2 . Se X_0 tem as condições anteriores, então

$$\begin{aligned} A^+ - X_k &= A^+(I - AX_0)^{p^k} = A^+(AA^+ - AX_0)^{p^k} \\ &= (I - X_0 A)^{p^k} A^+ = (A^+ A - X_0 A)^{p^k} A^+ \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim que

$$\begin{aligned} X_k &\longrightarrow A^+ \\ AX_k &\longrightarrow AA^+ \\ X_k A &\longrightarrow A^+ A, \text{ quando } k \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

se e somente se $\sigma_1(AA^+ - AX_0) = \sigma_1(A^+A - X_0 A) < 1$

DEMONSTRAÇÃO: Pelas condições de X_0, usaremos que $A^+AX_k = X_k$ e $X_k AA^+ = X_k$.

De (3.3), temos que $E_{k+1} = E_k^p$, isto é, $(I - AX_{k+1}) = (I - AX_k)^p$.

Aplicando recursivamente $E_{k+1}=E_k^p$, encontraremos $E_k=E_0^{p^k}$, $k = 0,1,2,\ldots$

$E_1 = E_0^p$; $E_2 = E_1^p = (E_0^p)^p = E_0^{p^2}$

$E_3 = E_2^p = (E_0^{p^2})^p = E_0^{p^3}$; $E_4 = E_3^p = (E_0^{p^3})^p = E_0^{p^4}$

e assim sucessivamente $E_k = E_0^{p^k}$ (3.10)

ou $I - AX_k = (I - AX_0)^{p^k}$.

De (3.3) e (3.4), temos que:

$$\bar{E}_{k+1} = \bar{E}_k^p = (I - X_{k+1}A) = (I - X_kA)^p$$

$$R_{k+1} = R_k^p = (AA^+ - AX_{k+1}) = (AA^+ - AX_k)^p$$

$$\bar{R}_{k+1} = \bar{R}_k^p = (A^+A - X_{k+1}A) = (A^+A - X_kA)^p$$

Aplicando recursivamente $\bar{E}_{k+1} = \bar{E}_k^p$, $R_{k+1} = R_k^p$ e $\bar{R}_{k+1} = \bar{R}_k^p$, encontraremos:

$$\bar{E}_k = \bar{E}_0^{p^k},\ R_k = R_0^{p^k} \text{ e } \bar{R}_k = \bar{R}_0^{p^k} \tag{3.11}$$

Isto é: $(I-X_kA)=(I-X_0A)^{p^k}$, $(AA^+ - AX_k)=(AA^+ - AX_0)^{p^k}$ e

$$(A^+A - X_kA) = (A^+A - X_0A)^{p^k}$$

Agora:

$$A^{+}-X_k = A^{+} - A^{+}AX_k = A^{+}(I-AX_k) = A^{+}AA^{+}(I-AX_k) = A^{+}(AA^{+} - AA^{+}AX_k) =$$

$$= A^{+}(AA^{+} - AX_k) \quad \text{e} \quad A^{+} - X_k = A^{+}(I-AX_k) = A^{+}(AA^{+}-AX_k)$$

De (3.10) e (3.11) teremos:

$$A^{+} - X_k = A^{+}(I - AX_0)^{p^k} = A^{+}(AA^{+} - AX_0)^{p^k}$$

$$A^{+}-X_k = A^{+}-X_kAA^{+} = (I-X_kA)A^{+} = (I-X_kA)A^{+}AA^{+} = (A^{+}A-X_kAA^{+}A)A^{+} = (A^{+}A-X_kA)A^{+}$$

$$\text{e} \quad A^{+} - X_k = (I - X_kA)A^{+} = (A^{+}A - X_kA)A^{+}$$

De (3.11), obtemos:

$$A^{+} - X_k = (I - X_0A)^{p^k}A^{+} = (A^{+}A - X_0A)^{p^k}A^{+}.$$

Demonstraremos que $\sigma_1(AA^{+} - AX_0) = \sigma_1(A^{+}A - X_0A)$

Pela DVS $A = UDV^t$ como no teorema 1.1 e $A^{+} = VD^{+}U^t$ como em (2.4).

$$\begin{aligned} AA^{+} - AX_0 &= UDV^tVD^{+}U^t - UDV^tX_0 \\ &= UDD^{+}U^t - UDV^tX_0 \\ &= U(DD^{+}U^t - DV^tX_0) \end{aligned}$$

$$= U(DD^+U^t - DV^tX_0UU^t)$$

$$= U(DD^+ - DV^tX_0U)U^t = UD(D^+ - V^tX_0U)U^t$$

$$\|AA^+ - AX_0\| = \sigma_1(AA^+ - AX_0).$$

$$\|AA^+ - AX_0\| = \|UD(D^+ - V^tX_0U)U^t\| \leq \|U\|\|D\|\|D^+ - V^tX_0U\|\|U^t\| =$$

$$= \|D\|\|D^+ - V^tX_0U\| = \sigma_1(A)\|D^+ - V^tX_0U\|.$$

$$A^+A - X_0A = VD^+U^tUDV^t - X_0UDV^t$$

$$= VD^+DV^t - X_0UDV^t$$

$$= (VD^+D - X_0UD)V^t$$

$$= (VD^+D - VV^tX_0UD)V^t$$

$$= V(D^+D - V^tX_0UD)V^t$$

$$= V(D^+ - V^tX_0U)DV^t$$

$$\|A^+A-X_0A\| = \sigma_1(A^+A-X_0A)$$

$$\|A^+A-X_0A\| = \|V(D^+-V^tX_0U)DV^t\| \leq \|V\|\|D^+ - V^tX_0U\|\|D\|\|V^t\| =$$

$$= \|D^+ - V^tX_0U\|\|D\| = \|D^+ - V^tX_0U\| \sigma_1(A)$$

$$= \sigma_1(A)\|D^+ - V^tX_0U\|$$

Portanto $\sigma_1(AA^+-AX_0)=\sigma_1(A^+A-X_0A)=\sigma_1(A)\|D^+-V^tX_0U\|$

Segue de (3.9), que:

$$\|A^+ - X_k\| \leq \|A^+\| \|I-AX_0\|^{p^k} = \|A^+\| \|AA^+ - AX_0\|^{p^k} =$$

$$= \|A^+\| \sigma_1(AA^+ - AX_0)^{p^k} = \|A^+\| \beta^{p^k} \;, \beta < 1$$

$$\|A^+ - X_k\| \leq \|I - X_0\|^{p^k} \|A^+\| = \|A^+A - X_0A\|^{p^k} \|A^+\| = \sigma_1(A^+A - X_0A)^{p^k} \|A^+\| =$$

$$= \beta^{p^k} \|A^+\|, \qquad \beta < 1$$

Pré e Pós-multiplicando A por (3.9), obtemos:

$$\|AA^+ - AX_k\| \leq \|AA^+\| \|I - AX_0\|^{p^k} = \|AA^+\| \|AA^+ - AX_0\|^{p^k} =$$

$$= \|AA^+\| \sigma_1(AA^+ - AX_0)^{p^k} = \|AA^+\| \beta^{p^k}, \; \beta < 1$$

$$\|A^+A - X_kA\| \leq \|I - X_0A\|^{p^k} \|A^+A\| = \|A^+A - X_0A\|^{p^k} \|A^+A\| =$$

$$= \sigma_1(A^+A - X_0A)^{p^k} \|A^+A\| = \beta^{p^k} \|A^+A\|, \qquad \beta < 1$$

Então quando $k \longrightarrow \infty$, $p^k \longrightarrow \infty$ e como $\beta < 1, \beta^{p^k} \longrightarrow 0$. Logo $\|A^+ - X_k\| \longrightarrow 0$, $\|AA^+ - AX_k\| \longrightarrow 0$ e $\|A^+A - X_kA\| \longrightarrow 0$, isto significa que $X_k \longrightarrow A^+$, $AX_k \longrightarrow AA^+$ e $X_kA \longrightarrow A^+A$.

Então a seqüência converge para A^+ se e somente se $\sigma_1(AA^+ - AX_0) = \sigma_1(A^+A - X_0A) < 1$.

COROLÁRIO 3.3. Se em especial $X_0 = \alpha A^t$, então a convergência no Corolário 3.2 é válida se e somente se $0 < \alpha < 2/\sigma_1^2(A)$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela DVS $A = UDV^t$ como no teorema 1.1, $A^+ = VD^+U^t$ como em (2.4) e $A^t = VD^tU^t$.

As iterações convergem quando $R_0 = AA^+ - AX_0$ e $\bar{R}_0 = A^+A - X_0A$, são matrizes convergentes. Então $\|AA^+ - AX_0\| < 1$ e $\|A^+A - X_0A\| < 1$ com $X_0 = \alpha A^t$.

$$AA^+ - AX_0 = AA^+ - A\alpha A^t = AA^+ - \alpha AA^t = UDV^tVD^+U^t - \alpha UDV^tVD^tU^t =$$

$$= UDD^+U^t - \alpha UDD^tU^t = U(DD^+ - \alpha DD^t)U^t.$$

$$A^+A - X_0A = A^+A - \alpha A^tA = VD^+U^tUDV^t - \alpha VD^tU^tUDV^t =$$

$$= VD^+DV^t - \alpha VD^tDV^t = V(D^+D - \alpha D^tD)V^t$$

$$\|AA^+ - AX_0\| = \|U(DD^+ - \alpha DD^t)U^t\| = \|U\|\,\|DD^+ - \alpha DD^t\|\,\|U^t\| =$$

$$= \|DD^+ - \alpha DD^t\| = \sigma_1(DD^+ - \alpha DD^t) = |1 - \alpha\sigma_1^2(A)| < 1$$

$$\|A^+A - X_0A\| = \|V(D^+D - \alpha D^tDV^t\| = \|V\|\,\|D^+D - \alpha D^tD\|\,\|V^t\| =$$

$$= \|D^+D - \alpha D^tD\| = \sigma_1(D^+D - \alpha D^tD) = |1 - \alpha\sigma_1^2(A)| < 1$$

Então $|1 - \alpha\sigma_1^2(A)| < 1$

$$-1 < 1 - \alpha\sigma_1^2(A) < 1$$

$$-1 - 1 < -1 + 1 - \alpha\sigma_1^2(A) < 1 - 1$$

$$- 2 < -\alpha\sigma_1^2(A) < 0$$

$$2 > \alpha\sigma_1^2(A) > 0$$

$$\frac{2}{\sigma_1^2(A)} > \alpha > 0$$

$$0 < \alpha < \frac{2}{\sigma_1^2(A)} .$$

Então a seqüência converge para A^+ se e somente se $X_0 = \alpha A^t$,

$$0 < \alpha < \frac{2}{\sigma_1^2(a)} .$$

COROLÁRIO 3.4. Assumimos que $X_0 = \alpha A^t$.

Quando p é par, $tr(AX_k) = tr(X_k A) \longrightarrow r$ se $0 < \alpha < \dfrac{2}{\sigma_1^2(a)}$

Quando p é impar, $tr(AX_k) = tr(X_k A) \longrightarrow r$ se $\dfrac{1}{\sigma_r^2(A)} < \alpha < \dfrac{2}{\sigma_1^2(A)}$

para $k = 1,2,3,\ldots$

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que $E_k = E_0^{p^k}$

$$E_k = I - X_k A = (I - X_0 A)^{p^k} = (I - \alpha A^t A)^{p^k}$$

Portanto $I - X_k A = (I - \alpha A^t A)^{p^k}$

$$X_k A = I - (I - \alpha A^t A)^{p^k}$$

Então $tr(X_k A) = tr(I) - tr(I - \alpha A^t A)^{p^k}$

$$= \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha\lambda_i(A^t A))^{p^k}$$

$$= n - \sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}$$

$$= n - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A)) - \sum_{i=r+1}^{n} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}$$

$$= n - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} - \sum_{i=r+1}^{n} (1-0)^{p^k},$$

pois $\sigma_i^2(A) = 0$, $i = r + 1,\ldots,n$

$$= n - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p} - \sum_{i=r+1}^{n} 1^{p^k}$$

$$= n - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} - \sum_{i=r+1}^{n} 1$$

$$= n - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} - (1 + 1 + \ldots + 1)$$

$$= n - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} - (n - r)$$

$$= n - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} - n + r$$

$$= r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}$$

$$tr(X_k A) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}$$

$$k = 1,2,3,\ldots$$

Agora $\bar{E}_k = \bar{E}_0^{p^k}$

$$I - AX_k = (I - AX_0)^{p^k} = (I - A\,\alpha\,A^t)^{p^k} = (I - \alpha AA^t)^{p^k}$$

Portanto $I - AX_k = (I - \alpha AA^t)^{p^k}$

$$AX_k = I - (I - \alpha AA^t)^{p^k}$$

Então $tr(AX_k) = tr(I) - tr(I - \alpha AA^t)^{p^k}$

$$= \sum_{i=1}^{m} 1 - \sum_{i=1}^{m} (1 - \alpha\lambda_i(AA^t))^{p^k}$$

$$= m - \sum_{i=1}^{m} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio anterior para calcular $tr(X_k A)$, encontraremos:

$$tr(AX_k) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}$$

E portanto $tr(X_kA) = tr(AX_k) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}$

Agora $0 < \alpha < 2/\sigma_1^2(A) \Rightarrow |1 - \alpha\sigma_1^2(A)| < 1$ e desde que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ então $|1 - \alpha\sigma_i^2(A)| < 1$ ou $-1 < 1 - \alpha\sigma_i^2(A) < 1$, $i = 1,2,\ldots r$.

1. Se p é par e $0 < \alpha < 2/\sigma_1^2(A)$.

$(1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k}$ com p par será sempre positivo para todo k e $0 < (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} < 1$, então quando $k \longrightarrow \infty$, $p^k \to \infty$ e $(1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} \longrightarrow 0$ pela direita e $tr(X_kA) = tr(AX_k) \to r$

2. Se p é impar e $1/\sigma_r^2(A) < \alpha < 2/\sigma_1^2(A)$.

$(1 - \alpha\sigma_i^2(A))$ para $1/\sigma_r^2(A) < \alpha < 2/\sigma_1^2(A)$ tomará os seguintes valores $-1 < (1 - \alpha\sigma_i^2(A)) < 0$ e como p é impar $-1 < (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} < 0$ para todo k. Então quando $k \to \infty$, $p^k \to \infty$ e $(1 - \alpha\sigma_i^2(A))^{p^k} \longrightarrow 0$ pela esquerda e $tr(X_kA) = tr(AX_k) \longrightarrow r$.

Então de modo geral

$$tr(X_kA) = tr(AX_k) \longrightarrow r$$

E os elementos de $X_k \to A^+$, com o $tr(X_kA) \longrightarrow r$.

Para os dois casos $tr(X_{k+1}A) \geq tr(X_kA)$.

$$k = 1,2,\ldots$$

Agora $tr(X_1A)$ pode ser maior ou menor que $tr(X_0A)$.

1. Se p é par e $0 < \alpha < 2/\sigma_1^2(A)$.

$$tr(X_1A) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^p = r - \beta^p, \; 0 < \beta < 1$$

$$tr(X_0A) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A)) = r - \beta, \; 0 < \beta < 1$$

$$0 < \beta < 1 \Rightarrow \beta^p < \beta \Rightarrow r - \beta^p > r - \beta .$$

Portanto $tr(X_1A) > tr(X_0A)$.

2. Se p é impar e $1/\sigma_r^2(A) < \alpha < 2/\sigma_1^2(A)$.

$$tr(X_1A) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))^p = r - \beta^p \; , \; -1 < \beta < 0$$

$$tr(X_0A) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A)) = r - \beta \; , \; -1 < \beta < 0$$

$$-1 < \beta < 0 \Rightarrow -\beta^p < -\beta \Rightarrow r - \beta > r - \beta^p$$

Portanto $tr(X_0A) > tr(X_1A)$.

3.1.2. ORDEM DO p ÓTIMO, EM TERMOS COMPUTACIONAIS

Determinar o p ótimo considerando a velocidade de convergência e o número de operações.

$$AA^+ - AX_0 = R_0 \quad \text{e} \quad A^+A - X_0A = \bar{R}_0$$

Em (3.3) e (3.4) temos que $E_{k+1}=E_k^p$, $\bar{E}_{k+1}=\bar{E}_k^p$, $R_{k+1}=R_k^p$ e $\bar{R}_{k+1}=\bar{R}_k^p$ e então a velocidade de convergência do algoritmo 1 é função de p. Também o número de multiplicações de matrizes requerido em cada iteração está em função de p. Assim seria possível determinar uma ordem ótima que minimiza a quantidade de operações requerida para obter um dado grau de precisão.

No corolário 3.2 foi provado que as iterações convergem quando $\sigma_1(AA^+ - AX_0) = \sigma_1(A^+A - X_0A) < 1$, isto é, $\sigma_1(R_0) = \sigma_1(\bar{R}_0) = \beta < 1$ e que $\sigma_1(R_0)^{p^k} = \sigma_1(\bar{R}_0)^{p^k} = \beta^{p^k}$

Sabemos que a expressão (3.1) requer $(p-1)n^3+mn^2$ operações por iteração. $k((p-1)n^3+mn^2) = c$ é um número inteiro

k - número de iterações

c - número total de operações.

$$k = \frac{c}{(p-1)n^3+mn^2}$$

Agora $\beta < 1$, $\beta^{p^k} = \beta^{p^{\frac{c}{(p-1)n^3+mn^2}}}$

Temos então que minimizar $\beta^{p^{\frac{c}{(p-1)n^3+mn^2}}}$

Como $\beta < 1$, então minimizar $\beta^{p^{\frac{c}{(p-1)n^3+mn^2}}}$ significa maximizar $p^{\frac{c}{(p-1)n^3+mn^2}}$ já que c, m, n e β são independentes de p. Como n, m e c são constantes, maximizar $p^{\frac{c}{(p-1)n^3+mn^2}}$ é o mesmo que maximizar $p^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{p}$.

Então seja $f(p) = p^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$.

Estamos procurando um ponto p_0 de máximo de f no intervalo aberto $p > 0$, devemos ter $f'(p_0) = 0$.

$$f'(p) = \frac{1}{p} \cdot p^{\frac{1}{p}-1} \cdot (p)' + p^{\frac{1}{p}} \ell n p \left(\frac{1}{p}\right)'$$

$$= \frac{1}{p} \cdot p^{\frac{1}{p}} \cdot p^{-1} \cdot 1 + p^{\frac{1}{p}} \ell n p \left(-\frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \frac{1}{p} \cdot p^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p} - \frac{p^{\frac{1}{p}}}{p^2} \ell n p = \frac{p^{\frac{1}{p}}}{p^2} - \frac{p^{\frac{1}{p}}}{p^2} \ell n p$$

Portanto $f'(p) = \dfrac{p^{\frac{1}{p}}}{p^2} - \dfrac{p^{\frac{1}{p}}}{p^2} \ell n p = \dfrac{p^{\frac{1}{p}}}{p^2} (1 - \ell n p)$, $p > 0$

Temos

$$f'(p_0) = \frac{p_0^{\frac{1}{p_0}}}{p_0^2}(1 - \ell n p_0) = 0$$

Para que $f'(p_0) = 0 \Rightarrow 1 - \ell n p_0 = 0 \Rightarrow \ell n p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = 2,7182818$ $= e$. E $p_0 = e$ é a raiz de $f'(p)$.

Como $f'(p) > 0$, se $0 < p < p_0$ e $f'(p) < 0$, se $p > p_0$, pois $\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p^2}$ será sempre positivo e o sinal de f será dado por $(1 - \ell n p)$ e

$$1 - \ell n p > 0, \text{ se } 0 < p < p_0$$

$$1 - \ell n p < 0, \text{ se } p > p_0$$

Já que o ponto de máximo de $f(p) = p^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$ é obtido em $p_0 = e$ e como estamos procurando um p tal que $f(p) = p^{\frac{1}{p}}$ $(p = 2,3,\ldots)$ obtenha o seu máximo. Neste caso $p=3$ é a melhor potência do método de super potência de ordem p-ésima

3.1.3. MÉTODO DE NEWTON

A expressão (3.1) para $p = 2$, fica:

$$X_{k+1} = \sum_{j=0}^{1} (I - X_k A)^j X_k$$

$$X_{k+1} = X_k + (I - X_k A) X_k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

É chamado método de Newton porque é análogo ao resultado da aplicação do método de Newton para resolver a equação de matrizes $AX - I = 0$ ou $A - X^{-1} = 0$, quando existe X^{-1}.

Portanto $F(X) = A - X^{-1} = 0$ e $F'(X)[\ ] = X^{-1}[\ ]X^{-1}$.

E substituíndo no método de Newton

$F'(X_k)(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k)$, obtemos:

$$X_k^{-1}(X_{k+1} - X_k)X_k^{-1} = -A + X_k^{-1}$$

$$X_k^{-1}X_{k+1}X_k^{-1} - X_k^{-1}X_kX_k^{-1} = -A + X_k^{-1}$$

$$X_k^{-1}X_{k+1}X_k^{-1} - X_k^{-1} = -A + X_k^{-1}$$

$$X_k^{-1}X_{k+1}X_k^{-1} = X_k^{-1} + X_k^{-1} - A$$

$$X_k^{-1}X_{k+1}X_k^{-1} = 2X_k^{-1} - A$$

$$X_kX_k^{-1}X_{k+1}X_k^{-1}X_k = 2X_kX_k^{-1}X_k - X_kAX_k$$

$$X_{k+1} = 2X_k - X_kAX_k$$

Que é freqüentemente escrita na seguinte forma:

$$X_{k+1} = X_k(2I - AX_k).$$

3.2. MÉTODO LINEAR

ALGORITMO 2.

$$\begin{aligned} Y_0 &= \alpha A^t \\ Y_{k+1} &= Y_k + \omega(I - Y_k A)A^t, \quad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3.12}$$

$2n^2m + nm$ operações por iteração.

TEOREMA 3.3. Para qualquer Y_0

$$A^+ - Y_k = (A^+ - Y_0)(I - \omega AA^t)^k, \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.13}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Usando que $A^t = A^+AA^t$ e (3.12) temos:

$$\begin{aligned} A^+ - Y_k &= A^+ - (Y_{k-1} + \omega(I - Y_{k-1}A)A^t) \\ &= A^+ - Y_{k-1} - \omega(I - Y_{k-1}A)A^t \\ &= A^+ - Y_{k-1} - \omega(A^t - Y_{k-1}AA^t) \\ &= A^+ - Y_{k-1} - \omega A^t + \omega Y_{k-1}AA^t \end{aligned}$$

$$= A^+ - Y_{k-1} - \omega A^+AA^t + \omega Y_{k-1}AA^t$$

$$= A^+ - \omega A^+AA^t - Y_{k-1} + \omega Y_{k-1}AA^+$$

$$= A^+(I - \omega AA^t) - Y_{k-1}(I - \omega AA^t)$$

$$= (A^+ - Y_{k-1})(I - \omega AA^t)$$

$$= (A^+ - Y_{k-2})(I - \omega AA^t)\ (I - \omega AA^t)$$

$$= (A^+ - Y_{k-2})(I - \omega AA^t)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$= (A^+ - Y_{k-k})(I - \omega AA^t)^k$$

$$= (A^+ - Y_0)(I - \omega AA^t)^k$$

Portanto $\quad A^+ - Y_k = (A^+ - Y_0)(I - \omega AA^t)^k$

3.2.1. CONVERGÊNCIA E ORDEM DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO LINEAR

A convergência é dada em termos dos dois seguintes corolários.

COROLÁRIO 3.5. Assuma que $R(Y_0^t) \subset R(A)$ e $R(Y_0) \subset R(A^t)$.

Então $Y_k \longrightarrow A^+$, $AY_k \longrightarrow AA^+$ e $Y_kA \longrightarrow A^+A$ quando $k \longrightarrow \infty$, se e somente se $0 < \omega < 2/\sigma_1^2(A)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathcal{R}(Y_0^t) \subset \mathcal{R}(A)$ e $\mathcal{R}(Y_0) \subset \mathcal{R}(A^t)$ então $A^+AY_k = Y_k$ e $Y_kAA^+ = Y_k$.

Primeiro teremos que mostrar que

$$(I - \omega AA^t)^k = U(I - \omega DD^t)^k U^t \tag{3.14}$$

Pela DVS $A = UDV^t$ como no teorema 1.1 e $A^t = VD^tU^t$. Temos que

$$\begin{aligned}
(I - \omega AA^t)^k &= (I - \omega UDV^tVD^tU^t)^k = (I - \omega UDD^tU^t)^k \\
&= (UU^t - \omega UDD^tU^t)^k = (UU^t - \omega UDD^tU^t)(UU^t - \omega UDD^tU^t)^{k-1} \\
&= U(I - \omega DD^t)U^t(UU^t - \omega UDD^tU^t)(UU^t - \omega UDD^tU^t)^{k-2} \\
&= U(I - \omega DD^t)U^tU(I - \omega DD^t)U^t(UU^t - \omega UDD^tU^t)^{k-2} \\
&= U(I - \omega DD^t)^2U^t(UU^t - \omega UDD^tU^t)^{k-2} \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= U(I - \omega DD^t)^kU^t(UU^t - \omega UDD^tU^t)^{k-k} \\
&= U(I - \omega DD^t)^kU^t(UU^t - \omega UDD^tU^t)^0 \\
&= U(I - \omega DD^t)^kU^tI = U(I - \omega DD^t)^kU^t
\end{aligned}$$

Portanto $(I - \omega AA^t)^k = U(I - \omega DD^t)^kU^t$.

Analogamente $(I - \omega A^tA)^k = V(I - \omega D^tD)^kV^t$. (3.15)

De (3.13) temos que $A^+ - Y_k = (A^+ - Y_0)(I - \omega A^t A)^k$, $k = 1,2,\ldots$

Provar que $\|A^+ - Y_k\| \longrightarrow 0$

Então $\|A^+ - Y_k\| \leq \|A^+ - Y_0\| \|I - \omega AA^t\|^k = \|A^+ - Y_0\| \|U(I - \omega DD^t)^k U^t\|$

$$\leq \|A^+ - Y_0\| \|U\| \|I - \omega DD^t\|^k \|U^t\|$$

$$\leq \|A^+ - Y_0\| \|I - \omega DD^t\|^k = \|A^+ - Y_0\| \, |1 - \omega\sigma_1(DD^t)|^k$$

$$\leq \|A^+ - Y_0\| \, |1 - \omega\sigma_1^2(A)|^k = \|A^+ - Y_0\| \beta^k, \beta < 1$$

Como $\beta < 1$, então $\beta^k \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$ e portanto $\|A^+ - Y_k\| \longrightarrow 0$, isto significa que $Y_k \longrightarrow A^+$.

Provar que $\|AA^+ - AY_k\| \longrightarrow 0$.

Agora pré-multiplicando A por (3.13), obtemos

$$AA^+ - AY_k = (AA^+ - AY_0)(I - \omega AA^t)^k$$

$$\|AA^+ - AY_k\| \leq \|AA^+ - AY_0\| \|I - \omega AA^t\|^k = \|AA^+ - AY_0\| \|U(I - \omega DD^t)^k U^t\|$$

$$\leq \|AA^+ - AY_0\| \|U\| \|I - \omega DD^t\|^k \|U^t\| = \|AA^+ - AY_0\| \|I - \omega DD^t\|^k$$

E $AY_k \longrightarrow AA^+$ pelo mesmo raciocício anterior

Para mostrar que $\|A^+A - Y_kA\| \longrightarrow 0$, teremos que usar o dual do algoritmo 2 que é definido pela relação

$$Y_{k+1} = Y_k + \omega A^t(I - AY_k) \quad \text{e}$$

assim $A^+ - Y_k = (I - \omega A^t A)^k (A^+ - Y_0)$ (3.16)

Então pós-multiplicando A, obtemos:

$$\|A^+A - Y_kA\| \leq \|I - \omega A^tA\|^k \|A^+A - Y_0A\|$$

$$\leq \|V(I - \omega D^tD)^k V^t\| \|A^+A - Y_0A\|$$

$$\leq \|V\| \|I - \omega D^tD\|^k \|V^t\| \|A^+A - Y_0\|$$

$$\leq \|I - \omega D^tD\|^k \|A^+A - Y_0\|$$

$$\leq |1 - \omega\sigma_1^2(A)|^k \|A^+A - Y_0\|$$

$$\leq \beta^k \|A^+A - Y_0\|, \qquad \beta < 1$$

Então $\|A^+A - Y_kA\| \longrightarrow 0$, logo $Y_kA \longrightarrow A^+A$.

Note que para haver a convergência da seqüência de matrizes $|1 - \omega\sigma_1^2(A)| = \beta < 1$. Então $|1 - \omega\sigma_1^2(A)| < 1 \Rightarrow 0 < \omega < 2/\sigma_1^2(A)$.

E está provada a convergência do método.

Como na demonstração anterior foi mostrado que:

$$\|A^+ - Y_k\| \leq \beta^k \|A^+ - Y_0\|^1,$$

$$\|A^+A - Y_kA\| \leq \beta^k \|A^+A - Y_0A\|^1 \quad \text{e}$$

$$\|AA^+ - AY_k\| \leq \beta^k \|AA^+ - AY_0\|^1, \qquad \beta < 1$$

Então a seqüência é dita convergente com ordem um e o método tem ordem de convergência um ou linear.

COROLÁRIO 3.6. Quando $Y_0 = \alpha A^t$ e $0 < \omega \leq 1/\sigma_1^2(A)$, no algoritmo 2,

$$tr(AY_k) = tr(Y_kA) \longrightarrow r, \text{ se } \alpha < 1/\sigma_1^2(A), \text{ e}$$

$$tr(AY_k) = tr(Y_kA) \longrightarrow r, \quad \text{se } \alpha > 1/\sigma_1^2(A).$$

DEMONSTRAÇÃO: AA^+ e A^+A são idempotentes, $(AA^+)^2 = AA^+AA^+ = AA^+$ e $(A^+A)^2 = A^+AA^+A = A^+A$ então $tr(AA^+) = P(AA^+)$

$$tr(A^+A) = P(A^+A)$$

De (3.13), temos que $A^+ - Y_k = (A^+ - Y_0)(I - \omega AA^t)^k$, $k = 1,2,\ldots$

$$Y_k = A^+ - (A^+ - Y_0)(I - \omega AA^t)^k$$

Pré-multiplicando por A, obtemos:

$$AY_k = AA^+ - (AA^+ - AY_0)(I - \omega AA^t)^k$$

$$AY_k = AA^+ - (AA^+ - \alpha AA^t)(I - \omega AA^t)^k$$

Então $tr(AY_k) = tr(AA^+) - tr((AA^+ - \alpha AA^t)(I - \omega AA^t)^k)$.

Por (3.14) e pela DVS de A como no teorema 1.1. teremos:

$$tr(AY_k) = P(AA^+) - tr(UDD^+U^t - \alpha UDD^tU^t)U(I - \omega DD^t)^kU^t)$$

$$tr(AY_k) = P(UDD^+U^t) - tr(U(DD^+ - \alpha DD^t)U^tU(I - \omega DD^t)^kU^t)$$

$$tr(AY_k) = P(DD^+) - tr(U(DD^+ - \alpha DD^t)(I - \omega DD^t)^kU^t)$$

$$tr(AY_k) = r - tr(U^tU(DD^+ - \alpha DD^t)(I - \omega DD^t)^k)$$

$$tr(AY_k) = r - tr((DD^+ - \alpha DD^t)(I - \omega DD^t)^k)$$

$$tr(AY_k) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k - \sum_{i=r+1}^{m} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k$$

$$tr(AY_k) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k - \sum_{i=r+1}^{m} (0-0)(1-0)^k \text{ , pois}$$

$\sigma_i^2(A) = 0 \; , \; i = r+1,\ldots,m$

$$tr(AY_k) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k - \sum_{i=r+1}^{m} 0.1^k$$

$$tr(AY_k) = r - \sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\,\sigma_i^2(A))^k$$

De (3.16), temos que $A^+ - Y_k = (I - \omega A^t A)^k (A^+ - Y_0)$, $k = 1,2,\ldots$

$$Y_k = A^+ - (I - \omega A^t A)^k (A^+ - Y_0)$$

Pós-multiplicando por A, obtemos:

$$Y_k A = A^+ A - (I - \omega A^t A)^k (A^+ A - Y_0 A)$$

$$Y_k A = A^+ A - (I - \omega A^t A)^k (A^+ A - \alpha A^t A)$$

Então $tr(Y_k A) = tr(A^+ A) - tr((I - \omega A^t A)^k (A^+ A - \alpha A^t A))$

Por (3.15) e pela DVS de A como no teorema 1.1., teremos:

$$tr(Y_kA) = r - tr(V(I - \omega D^tD)^kV^t(VD^+DV^t - \alpha VD^tDV^t))$$

$$tr(Y_kA) = r - tr(V(I - \omega D^tD)^kV^tV(D^+D - \alpha D^tD)V^t)$$

$$tr(Y_kA) = r - tr(V(I - \omega D^tD)^k(D^+D - \alpha D^tD)V^t)$$

$$tr(Y_kA) = r - tr(V^tV(I - \omega D^tD)^k(D^+D - \alpha D^tD))$$

$$tr(Y_kA) = r - tr((I - \omega D^tD)^k(D^+D - \alpha D^tD))$$

$$tr(Y_kA) = r - tr((D^+D - \alpha D^tD)(I - \omega D^tD)^k)$$

$$tr(Y_kA) = r - \sum_{i=1}^{r}(1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\,\sigma_i^2(A))^k -$$

$$- \sum_{i=r+1}^{n}(0 - 0)(1 - 0)^k, \quad \text{pois } \sigma_i^2(A) = 0\ ,\ i = r+1, \ldots, n$$

$$tr(Y_kA) = r - \sum_{i=1}^{r}(1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k - \sum_{i=r+1}^{n} 0.1^k$$

$$tr(Y_kA) = r - \sum_{i=1}^{r}(1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k$$

Portanto $tr(Y_kA) = tr(AY_k) = r - \sum_{i=1}^{r}(1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k$

1. $0 < \omega \leq 1/\sigma_1^2(A)$ e $\alpha < 1/\sigma_1^2(A)$.

$0 < \alpha < 1/\sigma_1^2(A)$.

$0 < \sigma_1^2(A)\alpha < 1$

$0 > -\sigma_1^2(A)\alpha > -1$

$1 > 1 - \alpha\sigma_1^2(A) > 1 - 1$

$1 > 1 - \alpha\sigma_1^2(A) > 0$

$0 < 1 - \alpha\sigma_1^2(A) < 1$ e $0 \leq 1 - \omega\sigma_1^2(A) < 1$

E desde que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ então $0 < 1 - \alpha\sigma_i^2(A) < 1$ e $0 \leq 1 - \omega\sigma_i^2(A) < 1$, $i = 1,2,\ldots,r$.

Como $0 \leq (1 - \omega\sigma_i^2(A)) < 1$ então $(1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$ e $tr(Y_kA) = tr(AY_k) \longrightarrow r$.

2. $0 < \omega \leq 1/\sigma_1^2(A)$ e $\alpha > 1/\sigma_1^2(A)$.

$\alpha > 1/\sigma_1^2(A) \Rightarrow 1/\sigma_1^2(A) < \alpha < 2/\sigma_1^2(A)$ e $-1 < (1 - \alpha\sigma_i^2(A)) < 0$

Como $0 \leq (1 - \omega\sigma_i^2(A)) < 1$ então $(1 - \alpha\sigma_i^2(A))(1 - \omega\sigma_i^2(A))^k \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$ e $tr(Y_kA) = tr(AY_k) \longrightarrow r$.

E assim é verificada a convergência dos elementos de Y_k por $tr(Y_kA) \longrightarrow r$.

3.2.2. ESTIMATIVAS PARA α E ω.

Para qualquer norma natural de $A_{n\times n}$

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Sejam as desigualdades

$$\sigma_1^2(A) = \rho(A^tA) \leq \|A^tA\|_\infty = \max_i \sum_j \left| \sum_k a_{ki}^t a_{kj} \right|$$

e

$$\sigma_1^2(A) \leq \|A^tA\|_\infty = \max_i \sum_j \left| \sum_k a_{ki}^t a_{kj} \right| \leq \|A\|_E = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2.$$

Assim teremos uma estimativa para $\sigma_1^2(A) = \rho(A^tA)$ pela $\|A^tA\|_\infty, \|A\|_E$ ou então pelos círculos de Gerschgorin de A^tA.

3.3. RELAÇÃO ENTRE O ALGORITMO 1 E O ALGORITMO 2 EM NÚMERO DE ITERAÇÕES

Para estabelecer a relação entre os métodos precisamos do seguinte lema.

LEMA 3.1. Seja S uma matriz quadrada qualquer e $k \geq 0$ um número inteiro. Então $\sum_{j=0}^{k} S(I-S)^j = SS^+[I-(I-S)^{k+1}]$ (3.17)

DEMONSTRAÇÃO: Por indução

a) Mostrar que é verdadeiro para $k = 0,1$

$k = 0$

$$\sum_{j=0}^{0} S(I-S)^j = S(I-S)^0 = S$$

$$SS^+[I-(I-S)] = SS^+[I-I+S] = SS^+S = S$$

$k = 1$

$$\sum_{j=0}^{1} S(I-S)^j = S+S(I-S) = S+S-SS = 2S-SS$$

$$\begin{aligned} SS^+[I-(I-S)^2] &= SS^+-SS^+(I-S)(I-S) \\ &= SS^+-(SS^+-SS^+S)(I-S) \\ &= SS^+-(SS^+-S)(I-S) \\ &= SS^+-[SS^+-SS^+S-S+SS] \\ &= SS^+-SS^++S+S-SS \\ &= 2S-SS \end{aligned}$$

b) Suponhamos que seja verdadeiro para k

Então $\sum_{j=0}^{k} S(I-S)^j = SS^+[I-(I-S)^{k+1}]$

c) Provar que é verdadeiro para $k + 1$

$$\sum_{j=0}^{k+1} S(I-S)^j = \sum_{j=0}^{k} S(I-S)^j + S(I-S)^{k+1}$$

$$= SS^+ [\,I - (I - S)^{k+1}\,] + S(I-S)^{k+1}$$

$$= SS^+ \; [I - (I-S)^{k+2}]$$

Logo $(3.1\cancel{X})$ é verdadeiro $\forall\, k \in Z^+$

3.17

COROLÁRIO 3.7. Se $X_0 = \omega A^t$ no algoritmo 1 e $Y_0 = \omega A^t$ no algoritmo 2 então $X_k = Y_{p^k-1}$.

DEMONSTRAÇÃO:

a) De (3.9) temos que $A^+ - X_k = A^+(I - AX_0)^{p^k}$

$$X_k = A^+ - A^+(I - AX_0)^{p^k}$$

$$= A^+ - A^+(I - A\omega A^t)^{p^k}$$

$$= A^+ - A^+(I - \omega AA^t)^{p^k}$$

b) Reescrevendo (3.12) obtemos:

$$Y_k = \omega \sum_{p=0}^{k} A^t (I - \omega AA^t)^p \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Agora $$Y_{p^k-1} = \omega \sum_{p=0}^{p^k-1} A^t (I - \omega AA^t)^p$$

$$= \omega \sum_{p=0}^{p^k-1} A^+AA^t (I - \omega AA^t)^p$$

$$= A^+ \sum_{p=0}^{p^k-1} (\omega AA^t)(I - \omega AA^t)^p$$

$$= A^+ \sum_{p=0}^{p^k-1} S(I - S)^p = A^+SS^+ [I - (I - S)^{p^k}] \quad \text{por (3.17)}$$

$$= A^+AA^+ [I - (I - S)^{p^k}] = A^+ [I - (I - S)^{p^k}]$$

$$= A^+ - A^+(I - \omega AA^t)^{p^k}$$

Portanto $$X_k = A^+ - A^+(I - \omega AA^t)^{p^k}$$

$$Y_{p^k-1} = A^+ - A^+(I - \omega AA^t)^{p^k}$$

Se usarmos $A^+ - X_k = (I - X_0 A)^{p^k}$ e o dual do algoritmo 2 obteríamos

$$X_k = A^+ - (I - \omega A^t A)^{p^k} A^+$$

$$Y_{p^k-1} = A^+ - (I - \omega A^t A)^{p^k} A^+.$$

Então k iterações do algoritmo 1 correspondem a $p^k - 1$ iterações do algoritmo 2.

CAPÍTULO IV.

MÉTODOS DIRETOS

4.1. INTRODUÇÃO

Consideraremos agora os métodos diretos, nos quais obtemos a solução numérica de um problema por meio de um número finito de operações elementares.

Os métodos diretos para calcular A^+, têm a seguinte classificação:

1) métodos baseados em decomposição de matrizes.
   - Decomposição de matrizes em um produto de duas matrizes de posto completo.
   - Decomposição em valores singulares.

2) Método usando matriz orlada.

3) Outros métodos
   - Método recursivo de Greville
   - Métodos baseados na fórmula $A^{+} = (A^tA)^-_m A^t$
   - Método da projeção do gradiente de Pyle.

4.2. METODOS BASEADOS EM DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES

4.2.1. DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES EM UM PRODUTO DE DUAS MATRIZES DE POSTO COMPLETO.

Os métodos que usaremos para calcular a inversa de Moore-

Penrose, são baseados na decomposição de uma matriz na forma da proposição 2.3.

Para decompor A serão considerados três tipos diferentes de decomposição: Eliminação Gaussiana (decomposição LU), Transformação de Householder e Ortogonalização de Gram-Schmidt.

PROCEDIMENTO. 1.

Eliminação Gaussiana (Decomposição LU)

$$A = LU \quad e \quad A^+ = U^+L^+ = U^t(UU^t)^{-1}(L^tL)^{-1}L^t$$

$L_{m\times r}$, trapezoidal inferior

$U_{r\times n}$, trapezoidal superior

PROCEDIMENTO.2.

Transformação de Householder

$$QA = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{array}{l} Q_{m\times m}, \text{ ortogonal} \\ U_{r\times n}, \text{ trapezoidal superior} \end{array} \tag{4.1}$$

Q_r, constituída das r primeiras linhas de Q.

Agora, $Q^tQA = Q^t \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = Q^t \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = Q_r^tU$ e

$$A^+ = U^+(Q_r^t)^+ = U^t(UU^t)^{-1}(Q_rQ_r^t)^{-1}(Q_r^t)^t = U^t(UU^t)^{-1}I^{-1}Q_r =$$

$$= U^t(UU^t)^{-1}Q_r = U^+Q_r.$$

A transformação ortogonal (4.1) pode também ser obtida pelo método de Givens rápido, que tem o mesmo número de operações do método de Householder e é mais apropriado para matrizes esparsas.

PROCEDIMENTO 3.

Ortogonalização de Gram-Schmidt

$A = QU$ $\quad Q_{m\times r}$, suas colunas formam uma base ortonormal de $\mathcal{R}(A)$.

$U_{r\times n}$, trapezoidal superior

e $A^+ = U^+Q^+ = U^t(UU^t)^{-1}(Q^tQ)^{-1}Q^t = U^t(UU^t)^{-1}I^{-1}Q^t =$

$$= U^t(UU^t)^{-1}I\,Q^t = U^t(UU^t)^{-1}Q^t = U^+Q^t.$$

Por esses três procedimentos o problema inicial é reduzido à obtenção da inversa de Moore-Penrose de matrizes da forma trapezoidal com posto completo.

Os seis procedimentos seguintes são referentes ao cálculo de U^+, onde consideramos $U_{r\times n}$, trapezoidal superior de posto linha completo r.

PROCEDIMENTO. 01.

Decomposição de Cholesky

$U^+ = U^t(UU^t)^{-1}$, para calcular U^+ precisamos inverter (UU^t), mas como UU^t é simétrica e definida positiva, o método adequado para obtenção de sua inversa é a decomposição de Cholesky. Então $(UU^t)^{-1} = (FF^t)^{-1} = X$ e $FF^tX = I$ onde

$$\begin{cases} F^t x_i = y_i \\ F y_i = e_i \end{cases}$$

e_i, a i-ésima coluna de I

PROCEDIMENTO. 02.

Transformação de Householder

$$PU^t = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_{r\times r}, \text{ triangular superior e não singular}$$
$$P_{n\times n}, \text{ ortogonal}$$

P_r, constituída das r primeiras linhas de P.

$$\text{Agora } P^tPU^t = P^t\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow U^t = P^t\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow U^t = P_r^tR$$

Como $U^t = P_r^t R \Rightarrow U = (P_r^t R)^t = R^t P_r$ e

$$U^+ = U^t(UU^t)^{-1} = P_r^t R(R^t P_r P_r^t R)^{-1} = P_r^t R(R^t I\ R)^{-1} = P_r^t R(R^t R)^{-1} =$$

$$= P_r^t\ RR^{-1}(R^t)^{-1} = P_r^t I(R^{-1})^t = P_r^t(R^{-1})^t$$

PROCEDIMENTO. 03.

Ortogonalização de Gram-Schmidt.

$U^t = NR$, $R_{r\times r}$, triangular superior e não singular
$N_{n\times r}$, suas r colunas formam uma base ortonormal de $R(U^t)$.

Como $U^t = NR \Rightarrow U = (NR)^t = R^t N^t$ e

$$U^+ = U^t(UU^t)^{-1} = NR(R^t N^t NR)^{-1} = NR(R^t I\ R)^{-1} = NR(R^t R)^{-1} =$$

$$= NRR^{-1}(R^t)^{-1} = N\ I(R^{-1})^t = N(R^{-1})^t.$$

Combinando os procedimentos .01 - .03 e .1 - .3 o problema de obter A^+ está resolvido.

PROCEDIMENTOS PARA CALCULAR $[I\ ,G\ ]^+$

Correspondendo aos procedimentos .01 - .03, temos os seguintes .04 - .06.

LEMA 4.1 Uma matriz de posto linha completo r, pode ser escrita como um produto de matrizes da forma $S\,[I,G]$ para alguma matriz G de r linhas.

Demonstração [17, pp.23-24].

LEMA 4.2 $I+GG^t$ tem posto completo para qualquer matriz G não nula.

Demonstração [17, p.24].

Podemos então pelo lema 4.1 escrever $U = [S,T] = S\,[I,G]$, onde

$S_{r\times r}$, triangular superior e não singular

$G = S^{-1}T$.

Como $P([I,G]) = r \Rightarrow$ tem posto linha completo, então

$$[I,G]^+ = [I,G]^t\,([I,G]\,[I,G]^t)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} \left([I,G] \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} (I + GG^t)^{-1} \quad \text{e}$$

$$U^+ = U^t(UU^t)^{-1} = (S\,[I,G])^t(S\,[I,G]\,(S\,[I,G])^t)^{-1} =$$

$$= [I,G]^t S^t(S\,[I,G]\,[I,G]^t S^t)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} S^t\left(S\,[I,G] \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} S^t\right)^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} S^t(S(I + GG^t)S^t)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} S^t(S^t)^{-1}(I + GG^t)^{-1}S^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} I(I + GG^t)^{-1}S^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} (I + GG^t)^{-1} S^{-1} = [I,G]^+ S^{-1}.$$

Portanto $U^+ = [I,G]^+ S^{-1}$.

Para calcular U^+, antes precisamos calcular $[I,G]^+$. O cálculo de S^{-1} e G é uma retro substituição e este pequeno trabalho adicional seria compensado pela redução de operações no cálculo de $[I,G]^+$.

PROCEDIMENTO .04.

Decomposição de Cholesky

$[I,G]^+ = \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} (I + GG^t)^{-1}$, como $(I + GG^t)$ é simétrica e definida positiva, usaremos a decomposição de Cholesky $I + GG^t = FF^t$ como no procedimento .01, para computar $(I + GG^t)^{-1}$.

PROCEDIMENTO .05.

Transformação de Householder

$$P \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} P_{m\times m}, \text{ ortogonal} \\ R_{r\times r}, \text{ triangular superior e não singular} \end{array}$$

Então $P^t P \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$$\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}^t = (P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix})^t = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}^t (P^t)^t = [R^t, 0]P \Rightarrow [I,G] = [R^t, 0]P$$

Agora, $[I,G]^+ = [I,G]^t([I,G][I,G]^t)^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}([I,G] \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix})^{-1} =$

$$= P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}([R^t, 0] \; PP^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix})^{-1} = P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}([R^t, 0] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix})^{-1} =$$

$$= P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}([R^t, 0] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix})^{-1} = P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}([R^t R + 0])^{-1} =$$

$$= P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}(R^t R)^{-1} = P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1}(R^t)^{-1} = P^t \begin{bmatrix} RR^{-1}(R^t)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= P^t \begin{bmatrix} I(R^t)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} (R^t)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} (R^{-1})^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $[I,G]^+ = P^t \begin{bmatrix} (R^{-1})^t \\ 0 \end{bmatrix}$.

P_r, constituída das r primeiras linhas de P.

P_{rr}, constituída das r primeiras colunas de P_r.

Temos que $P \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^t P \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} =$

$= P^t \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = P_r^t R$ então $\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = P_r^t R$ mas, $I = P_{rr}^t R \Rightarrow P_{rr}^t = R^{-1}$.

Então $[I,G]^+ = P^t \begin{bmatrix} (R^{-1})^t \\ 0 \end{bmatrix} = P_r^t (R^{-1})^t = P_r^t (P_{rr}^t)^t = P_r^t P_{rr}$.

Portanto $[I,G]^+ = P_r^t P_{rr}$.

PROCEDIMENTO .06.

Ortogonalização de Gram-Schmidt.

Similar ao procedimento .03.

$\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = NR,$ $R_{r\times r}$, triangular superior e não singular

$N_{n\times r}$, suas colunas formam uma base ortonormal de $\mathcal{R}(\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix})$.

e $\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}^t = (NR)^t \Rightarrow [I,G] = R^t N^t.$

Temos então $[I,G]^+ = [I,G]^t \, ([I,G] \, [I,G]^t)^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} ([I,G] \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix})^{-1} = NR(R^t N^t NR)^{-1} =$$

$$= N(R^t I \; R)^{-1} = NR(R^t R)^{-1} = NRR^{-1}(R^t)^{-1} =$$

$$= NI(R^t)^{-1} = N(R^t)^{-1}.$$

N_r, constituída das r primeiras linhas de N.

Temos que $NR = \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} \Rightarrow NRR^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} R^{-1} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} R^{-1} \\ G^t R^{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow N_r = R^{-1}$,

pois $\mathcal{P}(N) = r$ e também $\mathcal{P}(R^{-1}) = r$.

Então $[I,G]^+ = N(R^{-1})^t = NN_r^t$.

Combinando os procedimentos .1-.3 e os procedimentos .01-.06 obtivemos 18 variações possíveis, que são os 18 primeiros métodos da tabela 3 no Apêndice.

4.2.2 DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES (MÉTODO 4.11)

Pela decomposição em valores singulares,

$$A = U^t \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} V. \qquad e \qquad A^+ = V^t \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1/\sigma_r & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} U.$$

$U_{m\times m}$, ortogonal $\qquad \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ valores singulares de A.

$V_{n\times n}$, ortogonal

Para obter a decomposição em valores singulares como acima, primeiro transformamos A em uma matriz bidiagonal pela aplicação da transformação de Householder à esquerda e à direita, isto é,

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = PAQ^t, \quad \text{onde} \quad J = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_r \end{bmatrix}$$

$$PAQ^t = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P^t \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = P^t \bar{J} Q$$

O problema agora é encontrar a decomposição em valores singulares de $\bar{J}$, matriz bidiagonal superior, cujos valores singulares são os mesmos que os de A.

Se a decomposição em valores singulares de $\bar{J} = X^t D Y$, então $A = P^t \bar{J} Q = P^t X^t D Y Q = (XP)^t D Y Q = U^t D V$ onde $U = XP$ e $V = YQ$.

Como $\bar{J} = X^t D Y$ e $A = U^t D V$, então os valores singulares de A, σ_i, $i = 1,2,\dots, r$ são os mesmos que os de $\bar{J}$.

Agora construímos a matriz $K = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^t & 0 \end{bmatrix}_{2r \times 2r}$ e

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ J^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm \sigma \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{Então} \begin{cases} Jy = \pm \sigma x \\ J^t x = \pm \sigma y \end{cases} \qquad (4.2)$$

Concluímos que os autovalores $\pm \sigma_i$, $i = 1,2,\dots, r$ de K são os valores singulares de J e x,y vetores colunas, os autovetores de X e Y respectivamente. Mas, o cálculo dos autovalores de K é simplificado por uma transformação para a forma tridiagonal através de uma permutação.

De (4.2), temos que:

$$\alpha_i y_i + \beta_i y_{i+1} = \sigma x_i, \qquad \alpha_1 x_1 = \sigma y_1$$
$$\alpha_r y_r = \sigma x_r, \qquad \beta_{i-1} x_{i-1} + \alpha_i x_i = \sigma y_i$$

Substituindo $x_i = z_{2i}$ e $y_i = z_{2i-1}$, teremos: $\alpha_i z_{2i-1} + \beta_i z_{2i+1} = \sigma z_{2i}$, $\alpha_1 z_2 = \sigma z_1$, $\alpha_r z_{2r-1} = \sigma z_{2r}$, $\beta_{i-1} z_{2i-2} + \alpha_i z_{2i} = \sigma z_{2i-1}$

e isto leva a equação $Tz = \pm \sigma z$, ao qual T é uma matriz tri-diagonal simétrica $2r \times 2r$.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & & & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \beta_1 & & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \alpha_r \\ & & & & \alpha_r & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Isto significa que permutamos as linhas e as colunas de K, assim como o vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ foi alterado para o vetor z, transformando K em T, uma matriz simétrica tridiagonal. Assim o problema é simplificado para o problema de calcular os autovalores de uma matriz simétrica tridiagonal, que resolvemos pelo método QU e nesse caso o número de operações ficou bem reduzido.

4.3 MÉTODO USANDO MATRIZ ORLADA (MÉTODO 5.11)

Esse método é baseado no seguinte teorema:

TEOREMA 4.1. Seja $V_{m\times(m-r)}$ uma matriz cuja colunas formam uma base de $R(A)^{\perp}$ e $U_{n\times(n-r)}$ uma matriz cuja colunas formam uma base de $R(A^t)^{\perp}$. Então defina $B = \begin{bmatrix} A & V \\ U^t & 0 \end{bmatrix}$, não singular e

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} A^+ & (U^t)^+ \\ V^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

DEMONSTRAÇÃO

Mostrar que $\mathcal{P}(B) = m+n-r$.

Considerando as n primeiras colunas de B, teremos:

$$C = \begin{bmatrix} A \\ U^t \end{bmatrix} \quad , \quad C^+ = [A^+,(U^t)^+] \quad \text{e} \quad C^t = [A^t,U] \;.$$

Desde que $U = \{u_1,u_2,\ldots, u_{n-r}\}$ formam uma base de $R(A^t)^{\perp}$ $\Rightarrow$ os u_i são linearmente independentes $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(U) = n-r$, sendo então posto coluna completo. Agora desde que $\mathcal{P}(A^t) = r$ $\Rightarrow$ as r colunas linearmente independentes de $A^t \in R(A^t)$ e como os vetores que $\in R(A^t) \notin R(A^t)^{\perp}$ $\Rightarrow$ $\{a_1^t,a_2^t,\ldots,a_r^t\} \cap \{u_1,u_2,\ldots,u_{n-r}\} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(C^t) = \mathcal{P}([A^t,U]) = \mathcal{P}(A^t) + \mathcal{P}(U) = r+n-r = n$. E então como $\mathcal{P}(C^t) = \mathcal{P}(C) = n$, onde C tem posto coluna completo.

Considerando agora as m primeiras linhas de B, teremos: $D = [A,V]$, desde que $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_{m-r}\}$ formam uma base de $R(A)^{\perp}$ $\Rightarrow$ os v_i são linearmente independentes $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(V) = m-r$, sendo então posto coluna completo. Agora, desde que $\mathcal{P}(A) = r \Rightarrow$ as r colunas linearmente independentes de $A \in R(A)$ e como os vetores que $\in R(A) \notin R(A)^{\perp}$ $\Rightarrow \{v_1,v_2,\ldots,v_{m-r}\} \cap \{a_1,a_2,\ldots,a_r\} =$

$= \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}([A,V]) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(V) = r + m - r = m$. Desde que $\mathcal{P}\left(\begin{bmatrix} A \\ U^t \end{bmatrix}\right) =$ $= n$ e como A e V têm o mesmo número de linhas m e a interseção de suas colunas linearmente independentes é vazia $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\left(\begin{bmatrix} A & V \\ U^t & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{P}\left(\begin{bmatrix} A \\ U^t \end{bmatrix}\right) + \mathcal{P}\left(\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}\right) = n + m - r$$

e $B = \begin{bmatrix} A & V \\ U^t & 0 \end{bmatrix} = [C,E]$, $C = \begin{bmatrix} A \\ U^t \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$

$$B^+ = \begin{bmatrix} C^+ \\ E^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ & (U^t)^+ \\ V^+ & 0 \end{bmatrix} .$$

<u>Cálculo de V e U.</u>

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m-r}\}$, os v_i formam uma base de $R(A)^\perp \Rightarrow$ $\Rightarrow$ os $v_i \in R(A)^\perp \Rightarrow$ os v_i são ortogonais a todos os vetores que $\in R(A) \Rightarrow A^t V = 0$. (4.4)

$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}\}$, os u_i formam uma base de $R(A^t)^\perp \Rightarrow$ os $u_i \in R(A^t)^\perp \Rightarrow$ os u_i são ortogonais a todos os vetores que $\in R(A^t) \Rightarrow AU = 0$. (4.5)

<u>Determinar V e U</u> tais que $\begin{cases} A^t V = 0 \\ AU = 0 \end{cases}$

Aplicar a transformação de Householder em A, como no procedimento .2.

$$QA = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} Q_1 A = A_1 \\ Q_2 A = 0 \end{matrix}$$

$Q_{m\times m}$, ortogonal
Q_1 $r\times m$
Q_2 $(m-r)\times m$

$Q_2A = 0 \Rightarrow (Q_2A)^t = 0 \Rightarrow A^tQ_2^t = 0$, como Q_2^t satisfaz (4.4), fazemos então $Q_2^t = V$, teremos então $A^tV = 0$.

O cálculo de U é obtido similarmente ao cálculo de V. Aplicar a transformação de Householder em A^t, obtemos

$$PA^t = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} A^t = \begin{bmatrix} A_1^t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} P_1A^t = A_1^t \\ P_2A^t = 0 \end{cases} .$$

$P_{n\times n}$ ortogonal, $P_{1\ r\times n}$, $P_{2(n-r)\times n}$.

Então $P_2A^t = 0 \Rightarrow (P_2A^t)^t = 0 \Rightarrow AP_2^t = 0$, como P_2^t satisfaz (4.5), fazemos então $P_2^t = U$, temos então $AU = 0$.

Então calculamos B^{-1} e construímos A^+ cancelando as últimas $(m-r)$ linhas e $(n-r)$ colunas.

4.4 OUTROS MÉTODOS

4.4.1 MÉTODO RECURSIVO DE GREVILLE (MÉTODO 6.11)

Esse método calcula A^+, particionando a matriz A, como segue: $A_k = [A_{k-1}, a_k]$ onde A_{k-1}^+ é conhecida. E nesse caso começamos do primeiro vetor coluna e assim com mais colunas sucessivamente, calculamos A_k^+, ou então de qualquer submatriz tal que A_{k-1}^+ é conhecida.

Decompondo $a_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)}$, $a_k^{(1)} \in R(A_{k-1})$ e
$a_k^{(2)} \in R(A_{k-1})^{\perp}$

$$a_k^{(2)} = a_k - a_k^{(1)} = a_k - A_{k-1}\, A_{k-1}^+ a_k = a_k - A_{k-1} d_k \ . \tag{4.6}$$

$d_k = A^+_{k-1}\, a_k$

Temos $$A_k^+ = \begin{bmatrix} A^+_{k-1} - d_k b_k \\ \\ b_k \end{bmatrix}$$

onde $$b_k = \begin{cases} a_k^{(2)^+}, & \text{se} \quad a_k^{(2)} \neq 0 \\ \\ (1 + d_k^t\, d_k)^{-1}\, d_k^t\, A^+_{k-1}, & \text{se} \quad a_k^{(2)} = 0 \end{cases}$$

4.4.1.1 VERIFICAÇÃO MATEMÁTICA

Sejam $A_k = [\,A_{k-1}, a_k]$ (4.7)

e $A_k^+ = \begin{bmatrix} B_k \\ b_k \end{bmatrix}$. Fazendo a seguinte multiplicação, obtemos

$$A_k A_k^+ = [\,A_{k-1}, a_k] \begin{bmatrix} B_k \\ b_k \end{bmatrix} = A_{k-1} B_k + a_k b_k$$

$$A_k A_k^+ = A_{k-1} B_k + a_k b_k \tag{4.8}$$

Sabemos que $A_k A_k^+ x = x_1 \quad , \quad x_1 \in R(A_k)$

$y^t A_k A_k^+ = y_1^t \quad , \quad y_1^t \in R(A_k^t)$

Agora $A^+_{k-1} A_{k-1} A^+_{k-1} = A^+_{k-1}$, então as linhas de $A^+_{k-1} \in R(A^t_{k-1}) \subset R(A_k^t)$.

Portanto $A_k^+ A_k A_k^+ = A_k^+$

$$A_{k-1}^+ A_k A_k^+ = A_{k-1}^+$$

E $\quad A_{k-1}^+ A_{k-1} z = z_1 \qquad , \qquad z_1 \in R(A_{k-1}^t)$

Desde que A_k^+ tem colunas em $R(A_k^t)$, B_k como submatriz de A_k^+, tem colunas em $R(A_{k-1}^t)$; A_{k-1} é submatriz de A_k. Portanto $A_{k-1}^+ A_{k-1} B_k = B_k$.

Segue que multiplicando A_{k-1}^+ pelo lado esquerdo de (4.8), dará:

$$A_{k-1}^+ A_k A_k^+ = A_{k-1}^+ A_{k-1} B_k + A_{k-1}^+ a_k b_k$$

$$A_{k-1}^+ = B_k + A_{k-1}^+ a_k b_k$$

$$B_k = A_{k-1}^+ - A_{k-1}^+ a_k b_k = A_{k-1}^+ - d_k b_k .$$

$$B_k = A_{k-1}^+ - d_k b_k \quad \text{onde} \quad d_k = A_{k-1}^+ a_k \tag{4.9}$$

Assim podemos escrever:

$$A_k^+ = \begin{bmatrix} B_k \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - d_k b_k \\ b_k \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

DETERMINAÇÃO DE b_k:

De (4.7) e (4.10), obtemos:

$$A_k A_k^+ = \begin{bmatrix} A_{k-1}, a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - d_k b_k \\ b_k \end{bmatrix} = A_{k-1} A_{k-1}^+ - A_{k-1} d_k b_k + a_k b_k =$$

$$= A_{k-1}A_{k-1}^{+} + (a_k - A_{k-1}d_k)b_k = A_{k-1}A_{k-1}^{+} + a_k^{(2)}b_k$$

$$A_kA_k^{+} = A_{k-1}A_{k-1}^{+} + a_k^{(2)}b_k \qquad (4.11)$$

Agora $a_k^{(2)} = a_k - A_{k-1}d_k = a_k - A_{k-1}A_{k-1}^{+}a_k = (I - A_{k-1}A_{k-1}^{+})a_k$.

Então $a_k^{(2)} \in R(A_{k-1})^{\perp} \Rightarrow A_{k-1}^{t}a_k^{(2)} = 0$.

$a_k^{(2)}$ é a projeção ortogonal de a_k em $R(A_{k-1})^{\perp}$.

$a_k^{(2)}$ é ortogonal as colunas de A_{k-1}.

$a_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)}$, $a_k^{(1)} \in R(A_{k-1})$ e $a_k^{(2)} \in R(A_{k-1})^{\perp}$

1) Para $a_k^{(2)} \neq 0$

Considerar a matriz $P_k = A_{k-1}A_{k-1}^{+} + a_k^{(2)}a_k^{(2)^{+}}$ (4.12)

Pré-multiplicando $A_kA_k^{+}$ por (4.6), obtemos:

$$A_kA_k^{+}a_k^{(2)} = A_kA_k^{+}a_k - A_kA_k^{+}A_{k-1}d_k = a_k - A_{k-1}d_k = a_k^{(2)}$$

Então $A_kA_k^{+}a_k^{(2)} = a_k^{(2)} \Rightarrow a_k^{(2)} \in R(A_k)$ e disso segue que $a_k^{(2)^{+}} \in R(A_k^{t})$. Agora $a_k^{(2)} = (a_k^{(2)^{t}}a_k^{(2)})^{-1}a_k^{(2)^{t}} = \alpha^{-1}a_k^{(2)^{t}}$,

$a_k^{(2)^{t}}a_k^{(2)} = \alpha$. Então $a_k^{(2)^{+}}a_k^{(2)} = (a_k^{(2)^{t}}a_k^{(2)})^{-1}(a_k^{(2)^{t}}a_k^{(2)}) =$
α, escalar
$= \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$. Portanto $a_k^{(2)^{+}}a_k^{(2)} = 1$.

Pré-multiplicando $a_k^{(2)^{+}}$ por (4.6), obtemos:

$$a_k^{(2)^{+}}a_k^{(2)} = a_k^{(2)^{+}}a_k - a_k^{(2)^{+}}A_{k-1}A_{k-1}^{+}a_k$$

$$1 = a_k^{(2)^{+}}a_k - 0 \Rightarrow a_k^{(2)^{+}}a_k = 1.$$

$a_k^{(2)^+} A_{k-1} = 0$, pois $a_k^{(2)}$ é ortogonal a $R(A_{k-1})$. De (4.12) segue que:

$P_k a_k = A_{k-1}A_{k-1}^+ a_k + a_k^{(2)} a_k^{(2)^+} a_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)} = a_k$. De (4.6) também observamos que:

$$P_k A_{k-1} = A_{k-1}A_{k-1}^+ A_{k-1} + a_k^{(2)} a_k^{(2)^+} A_{k-1} = A_{k-1} + a_k^{(2)} . 0 = A_{k-1} + 0 = A_{k-1}.$$

(4.7) mostra que $P_k A_k = A_{k-1}A_{k-1}^+ A_k + a_k^{(2)} a_k^{(2)^+} A_k = A_k + a_k^{(2)} . 0 =$

$$= A_k + 0 = A_k.$$

$$\text{E então} \quad P_k = A_k A_k^+ , \tag{4.13}$$

pois é o operador projetor, que projeta sobre $R(A_k) \supset R(A_{k-1})$. De (4.12), (4.13) e (4.11), temos:

$$\begin{aligned}
A_{k-1}A_{k-1}^+ + a_k^{(2)} b_k &= A_{k-1}A_{k-1}^+ + a_k^{(2)} a_k^{(2)^+} \\
a_k^{(2)} b_k &= a_k^{(2)} a_k^{(2)^+} \\
a_k^{(2)^+} a_k^{(2)} b_k &= a_k^{(2)^+} a_k^{(2)} a_k^{(2)^+} \\
1 . b_k &= a_k^{(2)^+} \\
b_k &= a_k^{(2)^+}
\end{aligned}$$

Portanto para $a_k^{(2)} \neq 0$, $b_k = a_k^{(2)^+}$

2) Para $a_k^{(2)} = 0$

$$a_k^{(2)} = a_k - a_k^{(1)} = a_k - A_{k-1}A_{k-1}^+ a_k$$

$0 = a_k - A_{k-1}A_{k-1}^{+}a_k \Rightarrow a_k = A_{k-1}A_{k-1}^{+}a_k \Rightarrow a_k \in R(A_{k-1})$ em outras palavras A_k e A_{k-1} têm o mesmo posto.

$$A_{k-1}A_{k-1}^{+}a_k = a_k \quad \text{e} \quad a_k = A_{k-1}d_k \tag{4.14}$$

Seja G_k, submatriz de $A_k^{+}A_k$ obtida pelo cancelamento das últimas linhas e colunas.

Então segue de (4.7) e (4.10) que:

$$A_k^{+}A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1}^{+} - d_k b_k \\ \\ b_k \end{bmatrix} [A_{k-1}, a_k] = \begin{bmatrix} A_{k-1}^{+}A_{k-1} - d_k b_k A_{k-1} & A_{k-1}^{+}a_k - d_k b_k a_k \\ \\ b_k A_{k-1} & b_k a_k \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$G_k = A_{k-1}^{+}A_{k-1} - d_k b_k A_{k-1}$, o primeiro termo à direita é simétrico por definição; G_k também é simétrica porque é o menor principal da matriz simétrica $A_k^{+}A_k$; segue que $d_k b_k A_{k-1}$ também é simétrica porque adição de duas matrizes simétricas dá sempre como soma uma matriz simétrica.

Desde que $b_k A_{k-1}$ é uma matriz linha, temos então

$$b_k A_{k-1} = v^t.$$

$$(d_k b_k A_{k-1})^t = (d_k v^t)^t = v d_k^t = d_k v^t$$

$v d_k^t = d_k v^t$, pré-multiplicando d_k^t, teremos:

$d_k^t v d_k^t = d_k^t d_k v^t$ onde $d_k^t v = \beta$ e $d_k^t d_k = \sigma$, β e σ escalares, $\sigma \neq 0$ se $d_k \neq 0$, $\beta d_k^t = \sigma v^t \Rightarrow v^t = \frac{\beta}{\sigma} d_k^t = \lambda d_k^t$

$$v^t = \lambda d_k^t \Rightarrow b_k A_{k-1} = \lambda d_k^t \tag{4.16}$$

De (4.15), (4.16) e (4.14), temos:

$$A_k^+ A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ A_{k-1} - d_k \lambda d_k^t & A_{k-1}^+ A_{k-1} d_k - d_k b_k A_{k-1} d_k \\ \\ \lambda d_k^t & b_k A_{k-1} d_k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ A_{k-1} - \lambda d_k d_k^t & d_k - d_k \lambda d_k^t d_k \\ \\ \lambda d_k^t & \lambda d_k^t d_k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ A_{k-1} - \lambda d_k d_k^t & d_k - \lambda d_k d_k^t d_k \\ \\ \lambda d_k^t & \lambda d_k^t d_k \end{bmatrix}$$

(4.9) mostra que d_k está no espaço coluna de A_{k-1}^+, pois é uma combinação linear das colunas de A_{k-1}^+, o qual está no espaço linha de A_{k-1}^t. Isto segue que $A_{k-1}^+ A_{k-1} d_k = d_k, d_k \in R(A_{k-1}^t)$.

Determinação de λ

Em vista da simetria de $A_k^+ A_k$ e o fato de que $d_k^t d_k$

é um escalar, temos:

$$(\lambda d_k^t)^t = \lambda d_k = d_k - \lambda(d_k^t d_k) d_k$$

$$\lambda d_k = d_k - \lambda(d_k^t d_k) d_k = (1 - \lambda(d_k^t d_k)) d_k$$

$$\lambda d_k = (1 - \lambda(d_k^t d_k)) d_k$$

$$\lambda = 1 - \lambda(d_k^t d_k)$$

$$\lambda + \lambda(d_k^t d_k) = 1 \Rightarrow \lambda(1 + d_k^t d_k) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 + d_k^t d_k} = (1 + d_k^t d_k)^{-1} \quad (4.17)$$

Desde que as linhas de A_k^+ estão no espaço coluna de A_k^t, b_k está neste espaço, o qual neste caso é idêntico ao espaço coluna de A_{k-1}^t.

Assim $b_k A_{k-1} A_{k-1}^+ = b_k$ e portanto pós-multiplicando A_{k-1}^+ por (4.16), obtemos: $b_k A_{k-1} A_{k-1}^+ = \lambda d_k^t A_{k-1}^+ \Rightarrow b_k = \lambda d_k^t A_{k-1}^+$.

Substituíndo λ por (4.17) obtemos:

$$b_k = (1 + d_k^t d_k)^{-1} d_k^t A_{k-1}^+$$

Então

$$A_k^+ = \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - d_k b_k \\ \\ b_k \end{bmatrix}$$

onde $a_k^{(2)} = a_k - a_k^{(1)} = a_k - A_{k-1} A_{k-1}^+ a_k = a_k - A_{k-1} d_k$

$$d_k = A_{k-1}^+ a_k$$

$$b_k = \begin{cases} a_k^{(2)^+} & , \text{ se } a_k^{(2)} \neq 0 \\ (1 + d_k^t d_k)^{-1} d_k^t A_{k-1}, & \text{ se } a_k^{(2)} = 0 \end{cases}$$

4.4.2 MÉTODOS BASEADO NA FORMULA $A^+ = (A^tA)_m^- A^t$

4.4.2.1 MÉTODO 6.21

Esse método calcula $A^+ = (A^tA)_m^- A^t$, aplicando a eliminação Gaussiana em A^tA, onde $A^tA = LU$ e $L = \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix}$, onde R é triangular inferior e não singular.

Calcular $(A^tA)_m^-$ ao qual não é única e em geral $(A^tA)_m^- =$ $= U^+L^- = U^+[R^{-1}, 0]$ e $A^+ = (A^tA)_m^- A^t = U^+[R^{-1}, 0]\, A^t$, onde $U^+ = U^t(UU^t)^{-1}$.

4.4.2.2 MÉTODO 6.22

Esse método decompõe A^t pela ortogonalização de Gram-Schmidt como no procedimento.3, para construir $B_{n\times r}$, matriz cuja colunas formam uma base ortonormal de $R(A^t)$.

$A^t = BC^t$ e $(A^t)^+ = (C^t)^+ B^+$

$$(A^t)^+ = (C^t)^+ B^+ = C(C^tC)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t = C(C^tC)^{-1}I^{-1}B^t =$$

$$= C(C^tC)^{-1}B^t.$$

Como $A^t = BC^t \Rightarrow B^tA^t = B^tBC^t \Rightarrow B^tA^t = IC^t \Rightarrow B^tA^t = C^t \Rightarrow C = AB.$

Agora $(A^tA)^+ = A^+(A^t)^+ = A^+C(C^tC)^{-1}B^t = A^+AB(C^tC)^{-1}B^t = B(C^tC)^{-1}B^t$

$$(A^tA)^+ = B(C^tC)^{-1}B^t \tag{4.18}$$

Assim substituindo (4.18) em $(A^tA)_m^-$ em $A^+ = (A^tA)_m^- A^t$, teremos:

$$A^+ = (A^tA)_m^- A^t = B(C^tC)^{-1}B^tA^t = B(C^tC)^{-1}(AB)^t = B(C^tC)^{-1}C^t$$

$A^+AB = B$, pois as colunas de $B \in R(A^t)$.

4.4.3 MÉTODO DA PROJEÇÃO DO GRADIENTE DE PYLE (MÉTODO 6.31)

Esse método é baseado na fórmula $A^+ = A_m^- AA^+$.

Segue o seguinte algoritmo:

1. Aplicar a ortogonalização de Gram-Schmidt em A^t, como no procedimento .3, obtemos:

$$A^t = QU = Q[R,S] \quad e \quad (A^t)^+ = U^+Q^t \Rightarrow (A^+)^t = U^+Q^t \quad e \quad A^+ = Q(U^+)^t.$$

$R_{r\times r}$, triangular superior e não singular.

Desde que $A^+ = Q(U^+)^t$ então $A_m^- = Q(U^-)^t = Q([R,S]^-)^t =$

$$= Q \begin{bmatrix} R^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}^t = Q[(R^{-1})^t, 0]$$

Portanto $A_m^- = Q[(R^{-1})^t, 0]$

2. Aplicar a ortogonalização de Gram-Schmidt em A, obtemos: $A = PV$ e

$$A^+ = V^+P^t \tag{4.19}$$

$P_{m\times r}$, suas colunas formam uma base de $\mathcal{R}(A)$.

3. Pré-multiplicar (4.19) por A, teremos:

$AA^+ = AV^+P^t = PVV^+P^t = PI\,P^t = PP^t$

$VV^+ = I$, pois V tem posto linha completo.

Então a projeção ortogonal sobre $\mathcal{R}(A)$, $AA^+ = PP^t$ e

$A^+ = A_m^-AA^+ = Q[(R^{-1})^t, 0]\,PP^t$.

Nota: Vide tabela 3 no Apêndice.

CAPÍTULO V

ELIMINAÇÃO GAUSSIANA, DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY E DECOMPOSIÇÃO QU.

Esses métodos decompõem $A_{m\times n}$, $P(A) = r$ na forma da proposição 2.3.

5.1. ELIMINAÇÃO GAUSSIANA (decomposição LU).

Por transformações elementares

$A = LU$, $\quad$ L, trapezoidal inferior.
U, trapezoidal superior.
Ambas com elementos diferentes de zero na diagonal.

Através de uma série de transformações elementares a matriz original $A = A_0$ é transformada sucessivamente em A_1, $A_2, \ldots, A_r$.

A_k é $m\times n$ e tem a forma

$$\begin{bmatrix} R_k & V_k \\ O & W_k \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

onde R_k é $k\times k$ triangular superior.

Nas transformações elementares quando em cada passo reordenamos as linhas temos o *pivotamento parcial* e quando além disso reordenamos as colunas, temos o *pivotamento completo;* de modo que o pivô seja o maior elemento em módulo da k-ésima coluna da matriz, no caso de pivotamento parcial e o pivô seja o maior elemento em módulo da submatriz $A_{(m-k)\times(n-k)}$ no caso de pivotamento completo, para diminuir a propagação do erro de arrendondamento.

Como temos que determinar o $P(A)$, e o método de Gauss com pivotamento parcial não é adequado neste caso, descreveremos a seguir o método de Gauss com pivotamento completo, que é o indicado para cálculo de $P(A)$.

Determinamos $\max |w_{ij}|$ com $i,j \geq k+1$. Onde w_{ij} é o (i,j) elemento de W_k. Suponha que este elemento é w_{pq}. Então trocamos a p-ésima com a $(k+1)$-ésima linha em A_k e a q-ésima com a $(k+1)$-ésima coluna, assim que w_{pq} está agora na $(k+1,k+1)$ posição.

E para $i = s+1,\ldots,m$. Onde $s = k+1$.

$$\ell_{is} = w_{is}/w_{ss} \tag{5.2}$$

$$w_{ij} = w_{ij} - \ell_{is}\ell_{sj}, \qquad j = s+1,\ldots,n.$$

Que dará A_s que tem exatamente a mesma forma de A_k.

$$A_s = \begin{bmatrix} R_s & V_s \\ O & W_s \end{bmatrix}$$

onde R_s é $s \times s$, triangular superior.

Com computação exata o processo termina com

$$A_r = \begin{bmatrix} R_r & V_r \\ O & W_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & V_r \\ O & O \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

onde R_r é $r \times r$ triangular superior e não singular e $W_r = 0$ já que $\mathcal{P}(A) = r$ e até aqui temos assumido cálculo exato.

Usaremos P e Q matrizes de permutação para indicar trocas de linhas e colunas respectivamente. E a transformação da forma (5.3) pode ser escrita como

$$M_r M_{r-1} \ldots M_1 PAQ = \begin{bmatrix} U \\ O \end{bmatrix}$$

onde M_k é a matriz I mais ℓ'_{ik}, $i = k+1,\ldots,m$, abaixo da diagonal na k-ésima coluna. (Os ℓ'_{ik} são permutações dos ℓ_{ik} definidos em (5.2)).

Então

$$PAQ = LU$$

onde L trapezoidal inferior com um na diagonal e os elementos ℓ'_{ij} abaixo da diagonal. (L é as primeiras r colunas de $M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_r^{-1}$). U trapezoidal superior, onde $U = [R_r, V_r]$ na notação (5.3).

Na descrição acima foi assumido que o posto é exatamente r, e que foi usada computação exata. Na prática o posto pode não ser conhecido e erros de arredondamento ocorrerão. Temos que decidir na k-ésima fase da redução quando A é reduzida para A_k da forma (5.1), que elementos de W_k devem ser tomados como zero. Na situação prática é suficiente tomar um número menor que um número arbitrário TOL como sendo zero. Então A tem o posto computado igual a r se todos os elementos de W_r computados têm ordem de grandeza menor ou igual a TOL, e no mínimo um elemento de W_{r-1} tem ordem de grandeza maior que TOL.

Algoritmo para a decomposição LU, quando não se tem pivotamento.

Para $p = 1,\ldots,r.$

$q = 1,\ldots,r.$

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{r=1}^{p-1} \ell_{pr} u_{rj}, \qquad j = p, p+1,\ldots,n.$$

$$\ell_{iq} = (a_{iq} - \sum_{r=1}^{q-1} \ell_{ir} u_{rq})/u_{qq}, \qquad i = q+1,\ldots,m.$$

5.2 DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

Se $A_{n\times n}$ simétrica e definida positiva, temos uma simplificação da decomposição LU, pois neste caso, existe a decomposição de Cholesky na forma

$$A = LL^t \qquad L, \text{ triangular inferior e não singular.}$$

TEOREMA 5.1 Se $A_{n\times n}$ simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular inferior L com elementos positivos na diagonal tal que $A = LL^t$.

DEMONSTRAÇÃO [18,140-141]

Algoritmo:

Para $k = 1,2,\ldots,n$

Para $i = 1,2,\ldots,k-1$.

$$\ell_{ki} = (a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij}\ell_{kj})/\ell_{ii}$$

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2}$$

5.3 DECOMPOSIÇÃO QU.

5.3.1 FATORIZAÇÃO ENVOLVENDO MATRIZES ORTOGONAIS

Por transformações ortogonais com matrizes do tipo $I - 2ww^t, \|w\| = 1$ (transformação de Householder) e rotações no plano (método de Givens).

$A = Q_r^t U$, U, trapezoidal superior (5.4)

Q_r, constituída das r primeiras linhas de Q, matriz ortogonal.

5.3.1.1 TRANSFORMAÇÃO DE HOUSEHOLDER

Para transformar um vetor u em outro vetor de mesmo comprimento, $v = \alpha e_1$, um múltiplo de e_1, primeira coluna de I, necessitamos encontrar uma matriz ortogonal P tal que

$$Pu = v.$$

Isto pode ser feito usando uma matriz de transformação de Householder que depende de u e v,

$$P = I - 2ww^t$$

onde $w = \dfrac{v - u}{\| v - u \|}$, $\| w \| = 1$

Como $\| v \| = \| u \| \Rightarrow \alpha = \pm \| u \|$

$\| v \| = \| \alpha e_1 \| = |\alpha| \| e_1 \| = |\alpha| \cdot 1 = |\alpha| = \| u \|$

$|\alpha| = \| u \| \Rightarrow \| u \| = \pm \alpha$ ou $\alpha = \pm \| u \|$

Assim que $v - u = \pm \| u \| e_1 - u$

$$\text{E} \qquad \alpha = \begin{cases} -\| u \| & \text{se } u_1 \geq 0 \\ \| u \| & \text{se } u_1 < 0 \end{cases}$$

u_1, o primeiro elemento de u.

Uma seqüência de transformações de Householder pode ser usada para transformar $A_{m\times n}$, $\rho(A) = r$ em uma trapezoidal superior. Isto é equivalente a achar a decomposição (5.4). A transformação de Householder será dada em termos dos dois seguintes teoremas.

TEOREMA 5.2 Seja $A_{m\times n}$, $\rho(A) = r$. Existem $Q_{m\times m}$ matriz ortogonal e $P_{n\times n}$ matriz permutação tal que

$$QAP = \begin{bmatrix} R & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $R_{r\times r}$ triangular superior e não singular. As matrizes nulas não existem se A é de posto completo.

DEMONSTRAÇÃO:

Escolha P de modo que as primeiras r colunas de A sejam linearmente independentes. Aplique a primeira transformação de Householder Q_1 em AP

$$B = Q_1AP = \begin{bmatrix} r_{11} & V_1 \\ & \\ 0 & W_1 \end{bmatrix}$$

de maneira que a primeira coluna da matriz resultante seja um múltiplo de e_1. Sejam a_1 e b_1 primeiras colunas de A e B respectivamente, nos devemos ter $b_1 = Q_1 a_1, \| a_1 \| = \| b_1 \|$. Esta última condição dará $r_{11} = \pm \| a_1 \|$.

Seja $Q_{2(m-1)\times(m-1)}$ a segunda matriz transformação de Householder que transforma a primeira coluna de W_1 em um múltiplo de $e_{1(m-1)\times 1}$. Então.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \quad Q_1 AP = \begin{bmatrix} R_2 & V_2 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

onde R_2 é 2×2 triangular superior.

Continuando o processo encontraremos uma matriz $Q_{m\times m}$, que é um produto das r transformações de Householder tais que

$$QAP = \begin{bmatrix} R & V \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $R_{r\times r}$ triangular superior e não singular.

Desde que as r primeiras colunas de AP são linearmente independentes, o mesmo deve ser verdadeiro para as colunas de R, isto é, os elementos da diagonal de R devem ser diferentes de zero. A matriz W é zero porque ao contrário o posto de QAP seria maior que r, o qual contradiria o fato de que $P(A) = r$. Portanto $U = [R,V]$ é trapezoidal superior.

TEOREMA 5.3 Seja $A_{m\times n}, P(A) = r$. Existem matrizes ortogonais $Q_{m\times m}$ e $W_{n\times n}$, e uma matriz permutação $P_{n\times n}$ tal que

$$QAPW = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $Z_{r\times r}$ bidiagonal superior com elementos diferentes de zero na diagonal. As matrizes nulas não existem se A é de posto completo.

DEMONSTRAÇÃO: [4,pp. 273 - 274].

5.3.1.2 MÉTODO DE GIVENS.

O método de Givens equivale a transformação de Householder, utilizando a matriz ortogonal

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \gamma & \cdots & \sigma & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -\sigma & \cdots & \gamma & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \end{array} \qquad \gamma^2 + \sigma^2 = 1$$

denominada matriz de rotação de Givens.

MÉTODO DE GIVENS CLÁSSICO:

Requer um maior número de operações do que a transformação de Householder.

$$P_{ij}u = v, \qquad \text{então}$$
$$v_k = u_k \qquad k \neq i,j,$$
$$v_i = \gamma u_i + \sigma u_j,$$
$$v_j = -\sigma u_i + \gamma u_j.$$

Se $A_{m\times n}$ então $B = P_{ij}A$ difere de A somente nas i-ésimas e j-ésimas linhas, cujo elementos são dados por

$$b_{ik} = \gamma a_{ik} + \sigma a_{jk}$$
$$b_{jk} = -\sigma a_{ik} + \gamma a_{jk}$$

Similarmente a matriz AP_{ij} difere de A somente nas i-ésimas e j-ésimas colunas.

Uma rotação de Givens em torno de a_{ij} é a transformação similar

$$P_{ij}AP_{ij}^t = \bar{A}$$

A difere de $\bar{A}$ somente nas i-ésimas e j-ésimas linhas e colu nas, isto é, $\bar{a}_{ij}$ são obtidos dos a_{ij}.

Explicitamente temos para

$$k = 1,2,\ldots,m$$

$$\ell = 1,2,\ldots,n \qquad\qquad \text{mas } k,\ell \neq i,j$$

$$\bar{a}_{\ell i} = \gamma a_{\ell i} + \sigma a_{\ell j}$$

$$\bar{a}_{\ell j} = -\sigma a_{\ell i} + \gamma a_{\ell j}$$

$$\bar{a}_{\ell k} = a_{\ell k}$$

Por uma seqüência de rotação de Givens aplicada a A, obtemos a seqüência de transformações assim definidas

$$A_0 = A \tag{5.5}$$

$$A_k = P_k A_{k-1} P_k^t \qquad\qquad 1 \leq k \leq r$$

Obtemos A_r de A_0 por r transformações P_k, $1 \leq k \leq r$ da forma (5.5)

$$A = A_0$$

$$A_1 = P_1 A_0 P_1^t$$

$$A_2 = P_2 A_1 P_2^t = P_2 P_1 A_0 P_1^t P_2^t$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_r = P_r A_{r-1} P_r^t = P_r \ldots P_2 P_1 A_0 P_1^t P_2^t \ldots P_r^t.$$

$$A_r = P_r \ldots P_2 P_1 A_0 (P_r \ldots P_2 P_1)^t$$

$A_r = QAQ^t$, onde A_r é uma matriz de Hessenberg superior.

Fazendo uma nova aplicação em A_r da seqüência de transformações de Givens, encontraremos a decomposição QU.

$$\begin{bmatrix} U \\ O \end{bmatrix} = A_r Q = QAQ^t Q$$

$$\begin{bmatrix} U \\ O \end{bmatrix} = A_r Q = QA$$

$$Q^t \begin{bmatrix} U \\ O \end{bmatrix} = A \Rightarrow A = Q_r^t U$$

METODO DE GIVENS RÁPIDO [61]

Utiliza o mesmo número de operações que a transformação de Householder, porém é mais eficiente que este para matrizes esparsas, porque pode trabalhar apenas com os elementos direntes de zero.

5.3.2 ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Por processo de ortogonalização

$A = QU$ U, trapezoidal superior

Q, matriz cujas colunas formam uma base ortonormal de $\mathcal{R}(A)$.

Seja $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Determinamos a partir de A, $Q = [q_1, q_2, \ldots, q_r]$, cujas colunas q_i, $1 \le i \le r$ são ortogonais de modo que q_p seja uma combinação linear de a_1, $a_2, \ldots, a_p$.

Então as colunas a_i, $1 \leq i \leq n$ com as colunas q_i, $1 \leq i \leq r$ geram o mesmo espaço. Isto é equivalente a achar $A = QU$, onde Q tem colunas ortogonais e U é trapezoidal superior.

As colunas de Q são obtidas usando o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt.

A matriz $A = A_0$ é transformada sucessivamente para A_1, $A_2, \ldots A_r$.

Onde:

<u>Gram-Schmidt clássico</u>:

$$A_p = [q_1, \ldots, q_p, a_{p+1}, \ldots, a_n],$$

$$q_k^t q_s = 0, \qquad k \neq s,$$

$$q_p = a_p - \sum_{j=1}^{p-1} u_{jp} q_j,$$

$$u_{ip} = (q_j^t a_p)/q_j^t a_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, p-1$$

Este procedimento não é muito numericamente estável. É então recomendado usar uma versão modificada deste procedimento conhecido como procedimento de Gram-Schmidt modificado, sendo equivalente matematicamente mas superior computacionalmente.

<u>Gram-Schmidt modificado</u>

$$A_p = [q_1, \ldots, q_p, a_{p+1}^{(p)}, \ldots, a_n^{(p)}],$$

$$a_j^{(p)} = a_j^{(p-1)} - u_{p-1,j}\, q_{p-1}, \qquad q_p = a_p^{(p)},$$

$$u_{p-1,j} = q_{p-1}^t a_j^{(p-1)} / q_{p-1}^t q_{p-1}, \qquad p \leq j \leq n.$$

$q_1,\ldots,q_p$ são vetores ortonormais e $a_{p+1}^{(p)},\ldots,a_n^{(p)}$ são versões modificadas das correspondentes colunas originais $a_{p+1}^{(1)},\ldots,a_n^{(1)}$ de A.

CAPÍTULO VI

COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

6.1. INTRODUÇÃO

Levando em consideração o formato e o posto das matrizes foram classificados, tendo como critério o menor número de operação, doze métodos diretos para serem implementados juntamente com os métodos iterativos, linear e de ordem $p = 3$.

Os métodos escolhidos estão na tabela 6.1. Vide também tabelas 3,4,5,6 e 7 no Apêndice.

Os algoritmos foram implementados em Fortran IV. Utilizamos as rotinas da NAG - Numerical Algoritms Group-Oxford, nas sub-rotinas de eliminação Gaussiana (pivotamento parcial), decomposição de Cholesky e transformação de Householder.

TABELA 6.1

MÉTODO	CASO 1 $m = n = r$	CASO 2 $m = n > r$	CASO 3 $m > n \geq r$	CASO 4 $n > m \geq r$
1.11				X
1.14		X		
1.15			X	
3.31	X			
3.32			X	
3.33	X		X	
3.34	X		X	
3.35			X	
3.36			X	
6.11			X	
6.21			X	
6.22	X			X

6.2. MATRIZES TESTES

Para testar os algoritmos usamos matrizes com número de condição diferentes sendo dos tipos seguintes:

1. Cheias, selecionadas em vários artigos:

   [3,5,6,8,9,10,15,24,36,39,40,41]

2. $A = uv^t$, u e v vetores colunas diferentes de zero.

3. $A = [a_{ij}] = 1, \qquad 1 \leq i \leq m$

   $\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq j \leq n$

4. Matriz de Hilbert

   $A = [a_{ij}] = 1/(i + j - 1) \qquad 1 \leq i \leq n$

   $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq j \leq n$

5. $$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

As ordens das matrizes testadas variam de 4 a 20. Os testes foram feitos no PDP-10, cuja mantissa em ponto flutuante tem 23 unidades binárias (bit).

No Apêndice encontram-se as tabelas mostrando os resultados obtidos nos testes.

6.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

A convergência dos algoritmos iterativos depende do valor de α ou (α e ω). Para cuja obtenção se necessita do conhecimento dos valores singulares de A. Por economia do tempo de máquina, o ideal seria fazer uma estimativa dos valores singulares indicada na seção 3.2.2 , mas os computamos utilizando a sub-rotina da decomposição em valores singulares da NAG.

Como era de se esperar após estudo teórico, o método que apresenta melhores resultados é o do algoritmo 1. O método linear, algoritmo 2, apresenta convergência bastante lenta, o que não o recomenda. A demonstração do teorema 3.3, corolário 3.6, mostra que os elementos de Y_k convergem com o $tr(Y_kA)$ e que a convergência do $tr(Y_kA)$ é determinada pela condição $(1-\omega\sigma_r^2)^k \geq (1-\sigma_r^2/\sigma_1^2)^k$.

Assim a convergência é muito lenta a menos que $C(A)$ seja bastante pequeno, isto é, se A for muito bem condicionada.

6.3.1. ESTABILIDADE

A precisão dos algoritmos é verificada através dos resíduos, utilizando as quatros condições de Moore-Penrose. Eles foram computados pelas normas um e infinita com precisão dupla.

Nos métodos iterativos teremos que verificar se a iteração tem a propriedade auto-corretora, isto é, se não existe uma propagação de erros de uma iteração para outra (da k-ésima para a (k + 1)-ésima).

Verificaremos essa propriedade somente para o algoritmo 1. Tomando $X_k = A^+ + Z$, onde Z é um erro de aproximação. Aplicando um passo no algoritmo 1, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{k+1} = {} & A^+ + Z(I - AA^+) + (I - A^+A)Z \\ & + (p - 2)(I - A^+A)Z\,(I - AA^+) + \mathcal{O}(Z). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Quando $A_{n\times n}$, $\mathcal{P}(A) = n$ Z desaparece. Nesse caso o algoritmo é auto-corretor. Quando $A_{n\times n}$, $\mathcal{P}(A) < n$, ou $A_{m\times n}$, $m \neq n$ o algoritmo não é auto-corretor, ocorrendo então um acúmulo de erros de arredondamento no subespaço ortogonal a A^+AXAA^+. A menos que

$$Z \in \mathcal{R}(A^t) \Rightarrow A^+AZ = Z \tag{6.2}$$

$$\text{e} \quad Z^t \in \mathcal{R}(A) \Rightarrow \begin{cases} AA^+Z^t = Z^t \\ Z(AA^+)^t = Z \\ ZAA^+ = Z \end{cases} \tag{6.3}$$

Desenvolvendo (6.1), obtemos:

$$X_{k+1} = A^{+} + Z - ZAA^{+} + Z - A^{+}AZ$$

$$+ (p - 2)(Z - A^{+}AZ)(I - AA^{+}) + O(Z).$$

$$= A^{+} + Z - ZAA^{+} + Z - A^{+}AZ$$

$$+ (p - 2)(Z - ZAA^{+} - A^{+}AZ + A^{+}AZAA^{+}) + O(Z)$$

Fazendo substituição por (6.2) e (6.3), teremos:

$$X_{k+1} = A^{+} + Z - Z + Z - Z + (p - 2)(Z - Z - Z + Z) + O(Z) = A^{+} + O(Z).$$

Dentre os métodos diretos a eliminação Gaussiana, métodos 1.14 e 1.15, se apresentam mais estáveis, obtendo-se então uma melhor precisão nas matrizes mal condicionadas, isto para o caso 1.

Para os casos 3 e 4 o método que deu melhores resultados foi o recursivo de Greville (6.11). Esse método apresenta uma vantagem em relação aos demais, de sempre obter um resultado final, mais ou menos preciso dependendo da condição da matriz, pois não requer a determinação explícita do posto.

Os melhores resultados dos métodos utilizando Gram-Schmidt modificado foram obtidos com as matrizes do tipo 2. Se destacando o método 3.31 e em seguida 3.33 e 3.36.

O método 6.21 aplica a eliminação Gaussiana em A^tA, cujo $C(A^tA) = C^2(A)$, quando $P(A) = n$, sendo então um método instável numericamente.

Para o caso 2 ficou difícil determinar qual é o melhor método, uma vez que todos métodos apresentam resultados parecidos, se destacando entre eles 1.11 e 1.14.

6.3.2. MEMÓRIA

Não existe um método mais econômico; todos os algoritmos utilizam 3K de memória principal.

6.3.3. TEMPO REAL

O tempo real de execução foi medido em segundos através de uma sub-rotina especial. Mas como o sistema DEC-10 funciona em tempo compartilhado, esse tempo na realidade ainda está deturpado.

Nos métodos iterativos o de ordem $p = 3$ requer menor tempo de execução, uma vez que esse método converge mais rapidamente.

Nos métodos diretos 1.15 é o que menos tempo gasta para sua execução, em seguida vem o método recursivo de Greville (6.11). Os demais métodos gastam mais ou menos o mesmo tempo para sua execução.

6.4. CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

6.4.1. O PROBLEMA DE COMPUTAR A^+.

A maior dificuldade prática encontrada é na determinação do posto, isto porque na computação em ponto flutuante devido aos erros de arredondamento não é facil determinar se algum número muito pequeno seria zero ou não. Tornando isto, então um problema ao se computar A^+, pois todos os métodos, exceto o recursivo de Greville e os iterativos requerem a determinação explícita do posto.

O cálculo do posto apresenta dificuldade quando os elementos de A variam muito suas ordens de grandeza.

6.4.2. DETERMINAÇÃO DO POSTO

O método de Gram-Schmidt modificado determina melhor o posto com uma tolerância de 10^{-6}. Já o método de Gauss por ser mais estável apresenta resultado quase idêntico com as duas tolerâncias, 10^{-6} e $0{,}7450581.10^{-8}$, sendo que com a segunda tolerância se obteve melhores resultados com as matrizes do tipo 4, matriz de Hilbert.

Os melhores métodos para determinar o posto, entre os classificados para calcular A^+, são os que usam eliminação Gaussiana em A. O método que aplica Gauss em A^tA, como já foi dito anteriormente é numericamente instável, tornando-o não indicado para se determinar o posto de uma matriz.

Um dos melhores métodos para calcular posto é a decomposição em valores singulares, que não foi selecionado para cálculo da inversa generalizada pelo seu alto número de operações.

6.5. CONCLUSÃO

Os métodos iterativos apresentam bons resultados apenas para matrizes bem condicionadas. Mesmo assim, o que apresenta melhor resultado é o de ordem $p = 3$, que converge com menor número de iterações, menor tempo de execução e melhor precisão. Vide tabelas 2,9 e 10 no Apêndice.

Os métodos iterativos não são numericamente superiores aos métodos diretos.

Nos métodos diretos, eliminação Gaussiana (1.15, 1.14 e 1.11), recursivo de Greville (6.11) e Gram-Schmidt modificado (3.31, 3.33 e 3.36) são os preferíveis por apresentarem melhor precisão.

APÊNDICE

NOTAS ADICIONAIS E TABELAS

(a) Quando terminamos de testar os algoritmos é que observamos que as sub-rotinas da NAG utiliza para efeito do zero uma tolerância de $0,7450581.10^{-8}$. Essa tolerância é o menor número positivo tal que $1,0 + 0,7450581.10^{-8} > 1,0$. Nos métodos Gram-Schmidt modificado, Greville e nos métodos iterativos utilizamos uma tolerância de 10^{-6}. Essa discrepância não tem importância na comparação da precisão dos métodos.

Mas para verificar que método determina melhor o posto, tivemos que fazer testes à parte com as mesmas tolerâncias, não necessariamente com todos os métodos, uma vez que se necessita a determinação do posto nos métodos aplicados em A, A^t ou A^tA, nesse caso Gauss e Gram-Schmidt modificado; e os métodos escolhidos para esse fim foram 1.15, 3.31, 6.21 e 6.22.

(b) A seguir listamos as sub-rotinas da NAG utilizadas nos métodos diretos e para cálculo dos valores singulares de A. Antes fizemos modificações para que as matrizes que compõem as decomposições do Capítulo V, pudessem ser chamadas separadamente pelo programa principal.

FØ1BXF - Fatorização de Cholesky de uma matriz $A_{n\times n}$ simétrica e definida positiva.

FØ1BKF - Determina o posto e os fatores da transformação de

Householder de uma matriz $A_{m\times n}$ $m \geq n$.

FØ1BTF - Determina o posto e decompõe uma matriz $A_{m\times n}$ em um produto de matrizes trapezoidais pela eliminação Gaussiana com pivotamento parcial.

FØ2WCF - Computa os valores singulares e os vetores singulares à esquerda e à direita de uma matriz $A_{m\times n}$.

TABELA A.1

Rotina	IFAIL	Erros dectados pela rotina
FØ1BXF	1	$n < 1$ ou $IA < n$
	2	A matriz não é definida positiva
FØ1BKF	1	$m < n$
	2	Tolerância T é negativa , IRANK = -1
		Tolerância T é muito grande, IRANK = 0
		Tolerância T é muito pequena, IRANK > 0
FØ1BTF	1	A matriz tem uma linha nula
	2	A matriz é singular
	3	$n < 1$ ou $IA < n$.

IRANK - variável inteira contendo $\rho(A)$, usando a tolerância T.

IA - variável inteira, que especifica a primeira dimensão dos arranjos. IA $\geq$ n.

(c) Os números das tabelas 9-22 que têm asterisco estão com seu valor exato. Os demais são multiplicados pelo fator 10^{-6}.

(d) As contagens dos números de operações dos métodos diretos foram feitas utilizando $\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + r^2(m-r)$ operações ou $\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + r^2(n-r)$ operações, para o produto de uma matriz trapezoidal superior pela sua transporta.

(e) Foram as seguintes matrizes testadas e suas respectivas inversa de Moore-Penrose.

1. Cheias

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_1^+ = A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_1^+ = B_1^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 9 & -5 & -1 \\ -1 & -5 & 9 & -1 \\ -1 & -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad C_1^+ = C_1^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 10 \\ -12 & 11 & -5 & 10 \\ -12 & 8 & -2 & 10 \\ -12 & 8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & -10 \\ 1 & 3 & 5 & -10 \\ 1 & 4 & 4 & -10 \\ 1 & 4 & 3 & -9 \end{bmatrix} \qquad D_1^+ = D_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 15 & -10 \\ 1 & -7 & 15 & -10 \\ 1 & -6 & 14 & -10 \\ 1 & -6 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -6 \\ 4 & 3 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad E_1^+ = E_1^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 6 \\ -4 & -1 & 0 & 6 \\ -4 & -2 & 1 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & -15 \\ 3 & 4 & 7 & -15 \\ 3 & 5 & 6 & -15 \\ 3 & 5 & 7 & -16 \end{bmatrix} \qquad F_1^+ = F_1^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -7 & 15 \\ -3 & -6 & -7 & 15 \\ -3 & -5 & -8 & 15 \\ -3 & -5 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad G_1^+ = G_1^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 2 & -4 \\ -4 & 7 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 7 & -4 \\ -4 & 2 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_1^+ = H_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 1{,}2 & -1{,}6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^+ = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_3^+ = \frac{1}{102} \begin{bmatrix} -15 & -18 & 3 & -3 & 18 & 15 \\ 8 & 13 & -5 & 5 & -13 & -8 \\ 7 & 5 & 2 & -2 & -5 & -7 \\ 6 & -3 & 9 & -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_3^+ = \frac{1}{66} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & -11 & 0 & 22 \\ 12 & 7 & -12 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 2 & 7 & 12 \\ 3 & 8 & 13 \\ 4 & 9 & 14 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$C_3^+ = \begin{bmatrix} -0{,}247 & -0{,}133 & -0{,}020 & 0{,}093 & 0{,}207 \\ -0{,}067 & -0{,}033 & 0{,}000 & 0{,}033 & 0{,}067 \\ 0{,}113 & 0{,}067 & 0{,}020 & -0{,}027 & -0{,}073 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D_3^+ = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 3 & 11 & 7 & -1 \\ 0 & -10 & -5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^+ = \frac{1}{102} \begin{bmatrix} -15 & 8 & 7 & 6 \\ -18 & 13 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & 2 & 9 \\ -3 & 5 & -2 & -9 \\ 18 & -13 & -5 & 3 \\ 15 & -8 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_4^+ = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -1 & -3 \\ 2 & 13 & -9 & -5 \end{bmatrix} \qquad C_4^+ = \frac{1}{6398} \begin{bmatrix} 608 & -362 & 130 \\ -197 & 212 & 242 \\ -431 & 204 & -250 \\ 324 & -235 & -57 \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_4^+ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $A = uv^t$, $\qquad A^+ = \dfrac{A^t}{(v^t v)(u^t u)}$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0,91 \\ 0,077 \\ 0,32 \\ 1,0 \\ 0,8 \end{bmatrix} [0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0 \quad 5,2]$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 2,1 \\ 0,009 \\ 0,07 \\ 0,05 \\ 0,05 \\ 0,08 \\ 0,05 \\ 0,006 \\ 0,01 \end{bmatrix} [1,2 \quad 0,3 \quad 0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0 \quad 5,2]$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,7 \\ 0,6 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,66 \\ 0,3 \\ 0,1 \\ 2,9 \\ 2,8 \\ 2,1 \\ 0,009 \\ 0,07 \end{bmatrix} [0,05 \quad 0,05 \quad 0,08 \quad 0,05 \quad 0,006 \quad 0,01 \quad 1,2 \quad 0,3 \quad 0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0]$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,002 \\ 0,2 \\ 0,6 \\ 0,9 \\ 0,3 \\ 0,005 \\ 0,006 \\ 0,09 \\ 1,2 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ 3,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 0,1 \end{bmatrix} [0,1 \quad 2,9 \quad 2,8 \quad 2,1 \quad 1,0 \quad 9,0 \quad 7,0 \quad 8,0 \quad 5,0 \quad 4,0 \quad 3,0 \quad 1,2 \quad 0,3 \quad 0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0]$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}3 \\ 2{,}0 \\ 9{,}0 \\ 1{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}9 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} [0{,}8 \quad 0{,}1 \quad 4{,}0 \quad 0{,}4 \quad 8{,}0 \quad 5{,}2]$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}8 \\ 0{,}1 \\ 4{,}0 \end{bmatrix} [0{,}4 \quad 8{,}0 \quad 5{,}2]$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}7 \\ 1{,}0 \\ 0{,}3 \\ 2{,}0 \\ 9{,}0 \\ 1{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}9 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} [0{,}8 \quad 0{,}1 \quad 4{,}0 \quad 0{,}4 \quad 8{,}0 \quad 5{,}2]$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \\ 0{,}1 \\ 2{,}9 \\ 2{,}8 \\ 2{,}1 \\ 1{,}0 \\ 9{,}0 \\ 7{,}0 \\ 8{,}0 \\ 5{,}0 \\ 4{,}0 \\ 3{,}0 \end{bmatrix} [1{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}9 \quad 0{,}7 \quad 0{,}8 \quad 0{,}1 \quad 4{,}0 \quad 0{,}4 \quad 8{,}0 \quad 5{,}2]$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 3{,}0 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \\ 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \\ 0{,}1 \\ 2{,}9 \\ 2{,}8 \\ 2{,}1 \\ 1{,}0 \\ 9{,}0 \\ 7{,}0 \\ 8{,}0 \\ 5{,}0 \\ 4{,}0 \\ 3{,}0 \end{bmatrix} [1{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}9 \quad 0{,}7 \quad 0{,}8 \quad 0{,}1 \quad 4{,}0 \quad 0{,}4 \quad 8{,}0 \quad 5{,}2]$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}005 \\ 0{,}006 \\ 0{,}09 \\ 1{,}2 \\ 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 3{,}0 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \\ 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \\ 0{,}1 \\ 2{,}9 \\ 2{,}8 \\ 2{,}1 \\ 1{,}0 \\ 9{,}0 \end{bmatrix} [7{,}0 \quad 8{,}0 \quad 5{,}0 \quad 4{,}0 \quad 3{,}0 \quad 1{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}9 \quad 0{,}7 \quad 0{,}8 \quad 0{,}1 \quad 4{,}0 \quad 0{,}4 \quad 8{,}0 \quad 5{,}2]$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,3 \\ 2,0 \\ 9,0 \\ 1,2 \\ 0,3 \end{bmatrix} \quad [0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0 \quad 5,2]$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,8 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad [4,0 \quad 0,4 \quad 8,0 \quad 5,2]$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 9,0 \\ 7,0 \\ 8,0 \\ 5,0 \\ 4,0 \\ 3,0 \end{bmatrix} \quad [1,2 \quad 0,3 \quad 0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0 \quad 5,2]$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 0,1 \\ 2,9 \\ 2,8 \\ 2,1 \\ 1,0 \\ 9,0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [7,0 \quad 8,0 \quad 5,0 \quad 4,0 \quad 3,0 \quad 1,2 \quad 0,3 \quad 0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \\ 0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0 \quad 5,2] \end{matrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 3,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [2,9 \quad 2,8 \quad 2,1 \quad 1,0 \quad 9,0 \quad 7,0 \quad 8,0 \quad 5,0 \quad 4,0 \quad 3,0 \\ 1,2 \quad 0,3 \quad 0,9 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,1 \quad 4,0 \quad 0,4 \quad 8,0 \quad 5,2] \end{matrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,005 \\ 0,006 \\ 0,09 \\ 1,2 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ 3,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \begin{matrix} [\,2,9 & 2,8 & 2,1 & 1,0 & 9,0 & 7,0 & 8,0 & 5,0 & 4,0 \\ 3,0 & 1,2 & 0,3 & 0,9 & 0,7 & 0,8 & 0,1 & 4,0 & 0,4 \\ 8,0 & 5,2\,] \end{matrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,7 \\ 0,6 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,66 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{bmatrix} \begin{matrix} [\,2,9 & 2,8 & 2,1 & 0,009 & 0,07 & 0,05 & 0,05 & 0,08 \\ 0,05 & 0,006 & 0,01 & 1,2 & 0,3 & 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,1 & 4,0 & 0,4 & 8,0\,] \end{matrix}$$

3. $A = [a_{ij}] = 1 \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \qquad A^+ = \dfrac{A^t}{mn}$

4. Matriz de Hilbert

$$A = [a_{ij}] = 1/(i + j - 1) \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

Se $A^+ = A^{-1} = [b_{ij}]$, então $\quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}(n+i-1)!\,(n+j-1)!}{(i+j-1)[(i-1)!(j-1)!]^2(n-i)!(n-j)!}$$

5. $$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$A^+ = A^{-1} = \frac{1}{b_n}\,[d_{ij}]$ é a matriz $n \times n$ definida por:

$$d_{ij} = \begin{cases} b_{i-1}b_{n-i}, & \text{se } i = j \\ (-1)^{i+j}b_{i-1}b_{n-j}, & \text{se } j > i \\ d_{ji}, & \text{se } j < i \end{cases}$$

onde $b_0 = 1$

$b_1 = a$

$b_k = ab_{k-1} - b_{k-2}, \qquad k = 2,3,\dots,n.$

(f) Nas tabelas 9-22 L_1, L_2, L_3, L_4 apresentam os resíduos pela norma um e R_1, R_2, R_3, R_4 pela norma infinita.

(g) Os métodos diretos 1.11, 1.12,...,1.16, 2.21,2.22,..., 2.26, 3.31, 3.32,..., 3.36 têm os nomes na seguinte forma e significado:

a.ab

procedimento.a

procedimento.0b

EXEMPLO: Algoritmo para o método 3.36

1. Aplicar a ortogonalização de Gram-Schmidt em A(procedimento.3)

$$\boxed{A = QU} \qquad e \qquad \boxed{A^+ = U^+Q^t}$$

$$U = [S,T] = S[I,G] \text{ onde } G = S^{-1}T \text{ e } \boxed{U^+ = [I,G]^+S^{-1}}.$$

2. Calcular S^{-1}

3. Calcular $G = S^{-1}T$

4. Aplicar a ortogonalização de Gram-Schmidt em $\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}$ (procedimento.06)

$$\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix} = NR \quad e \quad [I,G]^+ = N(R^{-1})^t = NN_r^t$$

5. $A^+ = U^+Q^t = [I,G]^+S^{-1}Q^t = NN_r^tS^{-1}Q^t.$

TABELA 1

NÚMERO DE OPERAÇÕES

MÉTODO	Eliminação Gaussiana	$r(mn-\frac{1}{2}(m+n)r+\frac{1}{3}r^2)$
	Transformação de Householder	$2r(mn-\frac{1}{2}(m+n)+\frac{1}{3}r^2)$
	Ortogonalização de Gram-Schimidt	$2rm(n-\frac{1}{2}r)$
	Decomposição de Cholesky	$\frac{n^3}{6}$
	Inversa de Matriz	n^3
	Inversa de Matriz Triangular	$\frac{n^3}{6}$
PRODUTO DE MATRIZES	Trapezoidal superior rxn por sua transposta	$r(\frac{1}{2}n(r+1)+\frac{1}{3}(1-r^2))$
	Trapezoidal rxn por cheia rxr	$r^2((n-r)+(r+1)\frac{1}{2})$
	Cheia nxr por Trapezoidal rxm	$mr((n-r)+(r+1)\frac{1}{2})$
	Triangular rxr por cheia rxn	$\frac{1}{2}nr(r+1)$
	Cheia nxr por Triangular	$\frac{1}{2}nr(r+1)$
	Cheia nxm por sua transposta	$\frac{1}{2}mn(n+1)$
	Cheia rx(n-r) por sua transposta	$\frac{1}{2}(n-r)r(r+1)$
	Cheia nxr por cheia rxr	nr^2
	Cheia nxr por cheia rxn	mnr
	Cheia rxn por cheia nxr	r^2n

TABELA 2

MÉTODOS ITERATIVOS

MÉTODO		Número de operações por iteração
LINEAR		$2n^2m+nm$
De Ordem P=3	$m \geq n$	$(p-1)n^3+mn^2$
	$n \geq m$	$(p-1)m^3+nm^2$

TABELA 3

MÉTODOS DIRETOS

MÉTODO	A	A^+	NÚMERO DE OPERAÇÕES
1.11	LU	$U^t(UU^t)^{-1}(L^tL)^{-1}L$	$r(2mn+\frac{3}{2}r(m+n)+\frac{1}{3}(1-r^2+6r))$
1.12	LU	$P_r^t(R^{-1})^tS^{-1}Q_r$	$\frac{r}{2}(6mn-2m+r(3m+5n+4r-4))$
1.13	LU	$N(R^{-1})^tS^{-1}M^t$	$r(2mn+\frac{1}{2}r(m+3n)+\frac{2}{3}r^2+n)$
1.14	LU	$\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}(I+GG^t)^{-1}S^{-1}R^{-1}(I+H^tH)^{-1}[I,H^t]$	$r(mn+(2m+4n)r+\frac{1}{2}(m+3n)+\frac{1}{3}(3-8r)r)$
1.15	LU	$P_r^tP_{rr}S^{-1}R^{-1}Q_{rr}^tQ_r$	$r(2mn+\frac{1}{2}(3n+m)+\frac{r}{3}(9n-r-3))$
1.16	LU	$NN_r^tS^{-1}Y^{-1}B_rB^t$	$r(2mn+\frac{1}{2}(3m+10n)r+\frac{1}{2}(3n+2m)-\frac{1}{3}(2r-3)r)$
2.21	Q_r^tU	$U^t(UU^t)^{-1}Q_r$	$3r(mn-\frac{1}{3}(m+n)+\frac{2}{3}nr+\frac{1}{9}(r^2+3r+\frac{1}{2}))$
2.22	Q_r^tU	$P_r^t(R^{-1})^tQ_r$	$\frac{r}{2}(6mn-(2m+3n)+r(3r+5n-2))$
2.23	Q_r^tU	$N(R^{-1})^tQ_r$	$r(3mn-\frac{1}{2}(n-2m)+r(\frac{5}{6}r+\frac{3}{2}n))$
2.24	Q_r^tU	$\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}(I+GG^t)^{-1}S^{-1}Q_r$	$3r(mn-\frac{1}{3}m+nr+\frac{1}{18}(3-5r)r)$
2.25	Q_r^tU	$P_r^tP_{rr}S^{-1}Q_r$	$r(3mn-(m+n)+r(\frac{7}{6}r+4n-\frac{3}{2}))$
2.26	Q_r^tU	$NN_r^tS^{-1}Q_r$	$3r(mn+(nr-\frac{1}{3}n)+r(\frac{1}{3}r-\frac{1}{2}))$
3.31	QU	$U^t(UU^t)^{-1}Q^t$	$3r(mn-\frac{1}{3}(m-2n+\frac{1}{3}r-1)r+\frac{1}{18})$
3.32	QU	$P_r^t(R^{-1})^tQ^t$	$r(3mn+\frac{1}{2}n(5r-1)+r(\frac{5}{6}r-m-1))$
3.33	QU	$N(R^{-1})^tQ^t$	$r(3mn+\frac{1}{2}(3n-2m)r+\frac{nr}{2})$
3.34	QU	$\begin{bmatrix} I \\ G^t \end{bmatrix}(I+GG^t)^{-1}S^{-1}Q^t$	$3r((m+\frac{1}{3})n-(\frac{1}{3}m-n+\frac{5}{9}r-\frac{1}{6})r)$
3.35	QU	$P_r^tP_{rr}S^{-1}Q^t$	$r(3mn+(4n-m)r+\frac{1}{2}(r-3)r)$
3.36	QU	$NN_r^tS^{-1}Q^t$	$r(3mn+r(3n-m)-r(\frac{1}{3}r+\frac{1}{2})+n)$
4.11	U^tDV	V^tD^+U	$4r(mn-\frac{1}{2}(m+n)+\frac{1}{3}r^2)+(n+m)\quad(n^2+m^2)$
5.11	$B=\begin{bmatrix} A & V \\ U^t & O \end{bmatrix}$	$B^{-1}=\begin{bmatrix} A^+ & (U^t)^+ \\ V^+ & O \end{bmatrix}$	$4r(mn-\frac{1}{2}(m+n)+\frac{1}{3}r^2)+(n+m-r)^3$
6.11	$A_k=[A_{k-1},a_k]$	$\begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - d_k b_k \\ b_k \end{bmatrix}$	$(4m+1)\frac{n(n+1)}{2}-3nm$
6.21	$A^tA=LU$	$U^t(UU^t)^{-1}[R^{-1},0]A^t$	$n^2m+r((m+n+\frac{3}{2}r+\frac{1}{2})n+\frac{1}{6}(r^2+6r+1))$
6.22	$A^t=BC^t$	$B(C^tC)^{-1}C^t$	$r(\frac{1}{2}(6n+r+1)m+\frac{1}{6}(r^2+3r+1))$
6.31	PV	$Q[(R^{-1})^t,0]PP^t$	$r(5mn+\frac{1}{2}((r+1)n-2mr)+\frac{r^2}{6})$

NOTA: Os métodos diretos 1.11, 1.12,..., 1.16, 2,21, 2.22,..., 2.26, 3.31, 3.32,..., 3.36 têm os nomes na seguinte forma e significado:

a.ab

procedimento.a

procedimento.0b

TABELA 4

CASO 1 (m=n=r)

MÉTODO	NÚMERO DE OPERAÇÕES
1.11	$\frac{14}{3}n^3+2n^2+\frac{1}{3}n$
1.12	$9n^3-3n^2$
1.13	$\frac{14}{3}n^3+n^2$
1.14	$\frac{13}{3}n^3+3n^2$
1.15	$\frac{14}{3}n^3+n^2$
1.16	$\frac{47}{6}n^3+\frac{7}{2}n^2$
2.21	$\frac{14}{3}n^3-n^2+\frac{n}{6}$
2.22	$7n^3-\frac{7}{2}n^2$
2.23	$\frac{32}{6}n^3+\frac{n^2}{2}$
2.24	$\frac{31}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2$
2.25	$\frac{49}{6}n^3-\frac{7}{2}n^2$
2.26	$7n^3-\frac{5}{2}n^2$
*3.31	$\frac{11}{3}n^3+n^2+\frac{1}{6}n$
3.32	$\frac{32}{6}n^3-\frac{3}{2}n^2$
*3.33	$4n^3$
*3.34	$\frac{10}{3}n^3+4n^2$
3.35	$\frac{13}{2}n^3-\frac{3}{2}n^2$
3.36	$\frac{14}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2$
4.11	$\frac{28}{3}n^3-4n^2$
5.11	$\frac{19}{3}n^3-4n^2$
6.11	$2n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$
6.21	$\frac{19}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{6}$
*6.22	$\frac{11}{3}n^3+n^2+\frac{n}{6}$
6.31	$\frac{14}{3}n^3+\frac{n^2}{2}$

* - Método escolhido

TABELA 5

CASO 2 $(m=n>r)$

MÉTODO	NÚMERO DE OPERAÇÕES
1.11	$2n^2r+3nr^2+\frac{1}{3}r+2r^2-\frac{r^3}{3}$
1.12	$3n^2r+4nr^2-nr+2r^3-2r^2$
1.13	$2n^2r+2nr^2+\frac{2}{3}r^3+nr$
* 1.14	$n^2r+6nr^2+2nr+r^2-\frac{8}{3}r^3$
1.15	$2n^2r+3nr^2+2nr-\frac{r^3}{3}-r^2$
1.16	$2n^2r+\frac{13}{2}nr^2+\frac{5}{2}nr-\frac{2}{3}r^3+r^2$
2.21	$3n^2r+2nr^2-2nr+\frac{1}{3}r^3+r^2+\frac{1}{6}r$
2.22	$3n^2r+\frac{5}{2}nr^2-\frac{5}{2}nr+\frac{3}{2}r^3-r^2$
2.23	$3n^2r+\frac{3}{2}nr^2+\frac{1}{2}nr+\frac{5}{6}r^3$
2.24	$3n^2r+3nr^2-nr+\frac{1}{2}r^2-\frac{5}{6}r^3$
2.25	$3n^2r+4nr^2-2nr+\frac{7}{6}r^3-\frac{3}{2}r^2$
2.26	$3n^2r+3nr^2-nr+r^3-\frac{3}{2}r^2$
3.31	$3n^2r+nr^2-\frac{1}{3}r^3+r^2+\frac{1}{6}r$
3.32	$3n^2r+\frac{3}{2}nr^2-\frac{1}{2}nr+\frac{5}{6}r^3-r^2$
3.33	$3n^2r+nr^2$
3.34	$3n^2r+nr-4nr^2+\frac{5}{3}r^3-\frac{1}{2}r^2$
3.35	$3n^2r+3nr^2+\frac{1}{2}r^3-\frac{3}{2}r^2$
3.36	$3n^2r+2nr^2+nr-\frac{1}{3}r^3-\frac{r^2}{2}$
4.11	$4n^3+4n^2r-4rn+\frac{4}{3}r^3$
5.11	$8n^3-8n^2r-4nr+6nr^2+\frac{1}{3}r^3$
6.11	$2n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$
6.21	$n^3+2n^2r+\frac{3}{2}r^2n+\frac{1}{2}nr+\frac{1}{6}r^3+r^2+\frac{1}{6}r$
6.22	$3n^2r+\frac{1}{2}r^2n+\frac{1}{2}nr+\frac{1}{6}r^3+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{6}r$
6.31	$5rn^2+\frac{1}{2}nr-\frac{1}{2}r^2n+\frac{r^3}{6}$

* - Método escolhido

TABELA 6

CASO 3 $(m>n\geq r)$

MÉTODO	NÚMERO DE OPERAÇÕES
1.11	$\frac{7}{2}mr^2+\frac{7}{6}r^3+\frac{1}{3}r+2r^2$
1.12	$\frac{9}{2}mr^2-mr+\frac{9}{2}r^3-2r^2$
1.13	$\frac{5}{2}mr^2+\frac{13}{6}r^3+r^2$
1.14	$3mr^2+\frac{mr}{2}+\frac{5}{2}r^2+\frac{4}{3}r^3$
* 1.15	$2mr^2+\frac{1}{2}mr+\frac{8}{3}r^3+\frac{1}{2}r^2$
1.16	$3mr^2-mr+4r^3-\frac{3}{2}r^2$
2.21	$3mr^2-mr+\frac{7}{3}r^3+\frac{1}{6}r$
2.22	$3mr^2-mr+4r^3-\frac{5}{2}r^2$
2.23	$3mr^2+mr+\frac{14}{6}r^3-\frac{1}{2}r^2$
2.24	$3mr^2-mr+\frac{13}{6}r^3+\frac{1}{2}r^2$
2.25	$3mr^2-mr+\frac{31}{6}r^3-\frac{5}{2}r^2$
2.26	$3mr^2-mr+4r^3-\frac{3}{2}r^2$
3.31	$3rm^2+\frac{5}{3}r^3+r^2+\frac{1}{6}r$
* 3.32	$2mr^2+\frac{10}{3}r^3-\frac{3}{2}r^2$
* 3.33	$2mr^2+2r^3$
* 3.34	$2mr^2+\frac{4}{3}r^3+\frac{3}{2}r^2$
* 3.35	$2mr^2+\frac{9}{2}r^3-\frac{3}{2}r^2$
* 3.36	$2mr^2+\frac{8}{3}r^3+\frac{1}{2}r^2$
4.11	$m^3+5mr^2+rm^2-2mr+\frac{7}{3}r^3-2r^2$
5.11	$m^3+4mr^2-2mr-2r^2+\frac{4}{3}r^3$
* 6.11	$2mr^2-mr+\frac{r^2}{2}+\frac{r}{2}$
* 6.21	$2mr^2+\frac{8}{3}r^3+\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{6}r$
6.22	$\frac{7}{2}mr^2+\frac{1}{2}mr+\frac{1}{6}r^3+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{6}r$
6.31	$3mr^2+\frac{2}{3}r^3+\frac{1}{2}r^2$

* - Método escolhido

TABELA 7

CASO 4 $(n>m\geq r)$

MÉTODO	NÚMERO DE OPERAÇÕES
* 1.11	$\frac{7}{2}r^2n+\frac{7}{6}r^3+\frac{1}{3}r+2r^2$
1.12	$\frac{11}{2}nr^2+\frac{7}{2}r^3-3r^2$
1.13	$\frac{9}{2}r^2n+nr+\frac{7}{6}r^3$
1.14	$5r^2n+\frac{3}{2}nr-\frac{2}{3}r^3+\frac{3}{2}r^2$
1.15	$5r^2n+\frac{3}{2}nr-\frac{r^3}{3}-\frac{1}{2}r^2$
1.16	$7r^2n+\frac{3}{2}nr+\frac{5}{6}r^3+2r^2$
2.21	$5nr^2-nr+\frac{1}{3}r^3+8r^2+\frac{3}{2}r$
2.22	$\frac{11}{2}r^2n-\frac{3}{2}nr+\frac{3}{2}r^3-2r^2$
2.23	$\frac{9}{2}r^2n-\frac{1}{2}rn+\frac{5}{6}r^3+r^2$
2.24	$6nr^2-\frac{5}{6}r^3-\frac{1}{2}r^2$
2.25	$7r^2n-nr+\frac{7}{6}r^3-\frac{5}{2}r^2$
2.26	$6r^2n+r^3-\frac{5}{2}r^2$
3.31	$5nr^2-\frac{4}{3}r^3+r^2+\frac{1}{6}r$
3.32	$\frac{11}{2}r^2n-\frac{1}{2}nr-\frac{1}{6}r^3-r^2$
3.33	$5r^2n-r^3$
3.34	$6nr^2+nr-\frac{8}{3}r^3+\frac{1}{6}r^2$
3.35	$7nr^2-\frac{1}{2}r^3-\frac{3}{2}r^2$
3.36	$6r^2n+nr-\frac{4}{3}r^3-\frac{r^2}{2}$
4.11	$n^3+5r^2n+rn^2-2nr+\frac{7}{3}r^3-2r^2$
5.11	$n^3+4nr^2-2nr+\frac{4}{3}r^3-2r^2$
6.11	$2n^2r-nr+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$
6.21	$2n^2r+\frac{5}{2}nr^2+\frac{1}{2}nr+\frac{1}{6}r^3+r^2+\frac{1}{6}r$
* 6.22	$3nr^2+\frac{2}{3}r^3+r^2+\frac{1}{6}r$
6.31	$\frac{11}{2}nr^2+\frac{1}{2}nr-\frac{5}{6}r^3$

* - Método escolhido

TABELA 8

MATRIZES TESTES - POSTO COMPUTADO

A	P(A)	TIPO De A	m	n	C(A)	TOL = 10^{-6} P(A) 1.15	P(A) 3.31	P(A^tA) 6.21	P(A^t) 6.22	TOL = $0,7450581.10^{-8}$ P(A) 1.15	P(A) 3.31	P(A^tA) 6.21	P(A^t) 6.22
A_1	4	1	4	4	1,0	4	4	4	4	4	4	4	4
B_1	4	1	4	4	8,0971886	4	4	4	4	4	4	4	4
C_1	4	1	4	4	38,112999	4	4	4	4	4	4	4	4
D_1	4	1	4	4	834,26253	4	4	4	4	4	4	4	4
E_1	4	1	4	4	225,99579	4	4	4	4	4	4	4	4
F_1	4	1	4	4	1234,0014	4	4	4	4	4	4	4	4
G_1	4	1	4	4	18,413638	4	4	4	4	4	4	4	4
H_1	3	1	3	3	13,341452	3	3	3	3	3	3	3	3
I_1	7	5	7	7	2,7170558	7	7	7	7	7	7	7	7
J_1	10	5	10	10	2,5540469	10	10	10	10	10	10	10	10
K_1	15	5	15	15	2,9245909	15	15	15	15	15	15	15	15
L_1	19	5	19	19	2,9513524	19	19	19	19	19	19	19	19
M_1	20	5	20	20	2,9558174	20	20	20	20	20	20	20	20
N_1	4	4	4	4	15514,105	4	4	4	4	4	4	4	4
O_1	5	4	5	5	489703,43	5	5	5	5	5	5	5	5
P_1	6	4	6	6	14808425	6	5	4	5	6	6	6	6 *
Q_1	10	4	10	10	6251507600	9	7	7	7	10	9	10	9
A_2	3	1	4	4	1,4142131	3	3	4	3	3	4	4	4
B_2	1	3	10	10	1,0	1	1	1	1	1	2	1	2
C_2	1	3	15	15	1,0	1	1	1	1	1	1	1	1
D_2	1	3	20	20	1,0	1	1	1	1	1	2	1	2
E_2	1	2	5	5	1,0	5	1	2	1	5	3	2	3
F_2	1	2	10	10	1,0	1	1	4	1	1	4	3	2
G_2	1	2	15	15	1,0	1	1	1	1	1	6	3	6
H_2	1	2	20	20	1,0	2	2	6	2	2	7	2	8
A_3	2	1	6	4	2,3805157	2	2	2	2	2	3	1	3
B_3	2	1	4	3	1,3540063	2	2	3	2	2	3	1	2
C_3	2	1	5	3	14,248098	5	2	3	2	5	3	6	4
D_3	2	1	4	3	2,7324091	2	2	2	2	2	2	2	3
E_3	1	3	10	5	1,0	1	1	1	1	1	2	4	1
F_3	1	3	20	10	1,0	1	1	1	1	1	2	2	2
G_3	1	2	8	6	1,0	7	1	6	2	7	4	1	3
H_3	1	2	4	3	1,0	2	1	2	1	2	2	1	2
I_3	1	2	10	6	1,0	9	1	3	2	9	4	2	2
J_3	1	2	15	10	1,0	1	2	1	2	1	7	4	7
K_3	1	2	20	10	1,0	1	3	1	2	1	7	0	7
L_3	1	2	20	15	1,0	18	2	10	1	4	8	6	3
A_4	2	1	4	6	2,3804759	2	2	6	2	2	3	6	3
B_4	2	1	3	4	1,2909896	2	2	2	2	2	4	2	3
C_4	2	1	3	4	2,7069792	2	2	4	2	2	3	3	3
D_4	2	1	2	3	1,732051	2	2	2	2	2	2	2	2
E_4	1	3	6	10	1,0	1	1	1	1	1	1	1	2
F_4	1	3	10	20	1,0	1	1	1	1	1	2	8	2
G_4	1	2	6	8	1,0	4	1	8	1	4	4	8	3
H_4	1	2	3	4	1,0	1	1	2	1	1	3	2	1
I_4	1	2	6	10	1,0	1	1	3	1	1	6	3	5
J_4	1	2	10	15	1,0	7	1	10	3	7	7	5	7
K_4	1	2	10	20	1,0	5	2	3	2	5	4	3	4
L_4	1	2	15	20	1,0	2	2	2	2	2	6	11	6
M_4	1	2	10	20	1,0	2	1	9	1	3	3	9	5

TABELA 9

MÉTODO DE ORDEM P = 3

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4	α	ITERAÇÕES
A_1	0.36	0.009	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1	1
B_1	0.40	0.078	0,11	0,017	0,022	0,060	0,13	0,014	0,022	0,060	0,001	10
C_1	0.46	0.108	0,92	0,094	0,099	1,09	0,85	0,075	0,099	1,09	0,01	10
D_1	0.53	0.176	61,5	78,0	2,7	1059,8	44,8	32,0	2,7	1059,8	0,001	17
E_1	0.45	0.139	6,8	6,6	1,2	29,2	5,7	2,5	1,2	29,2	0,001	16
F_1	0.44	0.139	59,2	56,1	4,8	939,2	44,7	26,2	4,8	939,2	0,001	17
G_1	0.41	0.093	1,3	0,022	0,24	0,13	1,03	0,022	2,4	0,13	0,001	10
H_1	0.30	0.037	0,089	0,048	0,0037	0,19	0,075	0,045	0,0037	0,19	0,01	10
I_1	1.04	0.328	0,076	0,0062	0,0050	0,012	0,092	0,0043	0,0050	0,012	0,01	7
J_1	2.44	0.875	0,071	0,0050	0,0031	0,016	0,091	0,0053	0,0031	0,016	0,01	7
K_1	7.21	2.717	0,091	0,0053	0,0058	0,016	0,11	0,0062	0,0058	0,016	0,01	7
L_1	14.63	5.872	0,095	0,0063	0,0050	0,016	0,11	0,0071	0,0050	0,016	0,01	7
M_1	17.14	6.862	0,095	0,0065	0,0050	0,016	0,11	0,0074	0,0050	0,016	0,01	7
N_1	9.87	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	-
O_1	18.65	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	-
P_1	31.05	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	-
Q_1	1.30.80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	-
A_2	0.37	0.057	0,035	0,024	0,034	0,028	0,045	0,022	0,034	0,028	0,1	5
B_2	1.86	0.143	0,15	0,0012	0,025	0,0	0,15	0,0012	0,025	0,0	0,01	1
C_2	6.96	2.098	0,34	0,00087	0,16	0,0	0,35	0,00087	0,16	0,0	0,001	5
D_2	13.85	3.912	0,89	0,0017	0,13	0,0	0,89	0,0017	0,13	0,0	0,001	4
E_2	0.50	0.102	0,34	0,018	0,060	0,011	0,24	0,022	0,060	0,011	0,001	5
F_2	1.72	0.416	0,25	0,021	0,016	0,026	0,61	0,014	0,016	0,026	0,001	4
G_2	5.81	1.649	2,17	0,0010	0,031	0,012	5,0	0,00095	0,031	0,012	0,001	4
H_2	12.17	3.282	0,50	0,0015	0,049	0,013	0,39	0,0018	0,049	0,013	0,0001	4
A_3	0.47	0.062	0,045	0,086	0,015	0,032	0,030	0,22	0,015	0,032	0,01	5
B_3	0.28	0.016	0,056	0,0088	0,0075	0,019	0,052	0,0086	0,0075	0,019	0,1	4
C_3	0.35	0.047	0,48	0,61	0,061	0,11	0,27	0,83	0,061	0,11	0,001	8
D_3	0.31	0.047	0,0056	0,048	0,042	0,026	0,0056	0,062	0,042	0,026	0,01	7
E_3	0.89	0.128	0,30	0,0023	0,0	0,047	0,15	0,0047	0,0	0,047	0,01	4
F_3	4.99	1.028	0,30	0,00047	0,0	0,12	0,15	0,0012	0,0	0,12	0,001	5
G_3	0.76	0.083	1,73	0,0031	0,0070	0,038	2,0	0,00027	0,0070	0,038	0,0001	2
H_3	0.28	0.029	0,73	0,0052	0,0070	0,028	0,98	0,0040	0,0070	0,028	0,001	4
I_3	0.84	0.092	0,79	0,00016	0,0034	0,042	0,57	0,00026	0,0034	0,042	0,0001	2
J_3	3.07	0.628	0,15	0,00089	0,021	0,025	0,25	0,0014	0,021	0,025	0,00001	4
K_3	4.21	0.761	0,060	0,0010	0,022	0,083	0,037	0,0013	0,022	0,083	0,00001	4
L_3	7.49	1.355	1,9	0,00044	0,060	0,031	1,3	0,00068	0,060	0,031	0,0001	3
A_4	0.51	0.079	0,027	0,21	0,032	0,015	0,047	0,086	0,032	0,015	0,01	6
B_4	0.35	0.016	0,022	0,013	0,011	0,0075	0,030	0,013	0,011	0,0075	0,1	5
C_4	0.33	0.044	0,24	0,072	0,067	0,030	0,30	0,049	0,067	0,030	0,001	7
D_4	0.23	0.015	0,0	0,0	0,0	0,030	0,0	0,0	0,0	0,030	0,1	5
E_4	1.05	0.139	0,089	0,0023	0,11	0,0	0,15	0,0014	0,11	0,0	0,01	4
F_4	5.22	1.107	0,075	0,0012	0,12	0,0	0,15	0,00058	0,12	0,0	0,001	5
G_4	0.73	0.076	1,1	0,00018	0,013	0,0068	2,2	0,00017	0,013	0,0068	0,0001	2
H_4	0.92	0.162	5,2	0,00087	0,035	0,0074	4,4	0,00095	0,035	0,0074	0,00001	4
I_4	3.09	0.731	0,72	0,0048	0,060	0,013	1,7	0,0042	0,060	0,013	0,00001	5
J_4	4.84	0.77	0,42	0,0016	0,076	0,022	0,31	0,00093	0,076	0,022	0,00001	4
K_4	8.93	2.013	6,3	0,0031	0,062	0,017	7,7	0,0019	0,062	0,017	0,0001	4
L_4	5.53	1.171	0,33	0,0029	0,047	0,042	0,56	0,0016	0,047	0,042	0,0001	2
M_4	0.29	0.041	0.0	0,0092	0,040	0,011	0,0	0,0079	0,040	0,011	0,01	5

- - ... - O método não convergiu.

TABELA 10

MÉTODO LINEAR

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4	α e ω	ITERA-ÇÃO
A_1	0.43	0.008	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1	1
B_1	6.42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	-
C_1	6.23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-
D_1	0.82	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	-
E_1	0.83	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	-
F_1	7.17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	-
G_1	6.27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	-
H_1	3.35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-
I_1	6.55	5.881	460,0	99,2	0,021	0,013	460,0	99,2	0,021	0,0113	0,01	182
J_1	17.85	16.324	660,4	152,5	0,020	0,015	660,4	152,5	0,020	0,015	0,01	186
K_1	53.26	48.729	861,6	208,7	0,022	0,010	861,6	208,7	0,022	0,010	0,01	187
L_1	1.47.68	98.69	915,2	225,9	0,026	0,014	915,2	225,9	0,026	0,014	0,01	187
M_1	1.59.39	1.09.67	919,6	227,6	0,026	0,014	919,6	227,6	0,026	0,014	0,01	187
N_1	7.22	-	-	-	-	-	-	- -	-	-	0,1	-
O_1	13.16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	-
P_1	21.65	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	-
Q_1	1.21.91	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	-
A_2	0.59	0.296	28,5	14,3	0,0	0,0	28,5	14,3	0,0	0,0	0,1	49
B_2	1.82	0.077	0,0	0,00058	0,0	0,0093	0,0	0,0012	0,0	0,0093	0,01	1
C_2	12.30	7.546	9243,6	41,1	0,0	0,0	9243,6	41,1	0,0	0,0	0,001	28
D_2	19.04	8.879	9403,7	23,5	0,0	0,023	9403,7	23,5	0,0	0,023	0,001	14
E_2	0.75	0.375	2108,9	5,4	0,0095	0,0037	1501,8	7,6	0,0095	0,0037	0,001	28
F_2	2.28	0.827	516,1	0,55	0,0086	0,0091	746,8	0,38	0,0086	0,0091	0,001	10
G_2	9.39	5.1	*0,14	12,02	0,018	0,017	*0,35	4,9	0,018	0,017	0,00001	20
H_2	15.30	6.79	0,25	7,5	0,0080	0,0081	0,30	6,4	0,0080	0,0081	0,0001	13
A_3	1.83	0.1408	375,2	31,3	0,041	0,0051	187,6	62,5	0,041	0,0051	0,01	150
B_3	0.31	0.061	3,2	0,57	0,011	0,0075	3,4	0,54	0,011	0,0075	0,1	14
C_3	0.65	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	-
D_3	1.49	0.1221	193,3	68,2	0,067	0,0075	193,3	68,2	0,067	0,0075	0,01	322
E_3	1.08	0.333	305,3	3,1	0,0	0,0056	152,7	6,1	0,0	0,0056	0,01	14
F_3	9.24	5.121	15845,6	39,6	0,0	0,015	7922,8	79,2	0,0	0,015	0,001	31
G_3	0.65	0.062	349,0	0,049	0,0028	0,0026	471,8	0,036	0,0028	0,0026	0,0001	3
H_3	0.38	0.105	883,7	0,63	0,0023	0,0042	1018,4	0,55	0,0023	0,0042	0,001	21
I_3	0.85	0.090	209,1	0,028	0,0038	0,012	268,7	0,022	0,0038	0,012	0,0001	3
J_3	4.10	1.793	*0,34	4,2	0,011	0,00021	*0,15	9,9	0,011	0,00021	0,00001	16
K_3	5.95	2.08	0,39	3,3	0,017	0,0022	0,13	9,7	0,017	0,0022	0,00001	13
L_3	9.19	2.565	0,22	4,7	0,017	0,013	0,26	4,0	0,017	0,013	0,0001	8
A_4	2.37	0.1931	187,7	62,5	0,021	0,0075	375,3	31,3	0,021	0,0075	0,01	150
B_4	0.45	0.174	10,8	3,6	0,0075	0,0037	10,8	3,6	0,0075	0,0037	0,1	33
C_4	0.66	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	-
D_4	0.46	0.06	0,035	0,024	0,034	0,028	0,045	0,022	0,034	0,028	0,1	5
E_4	1.55	0.533	100,7	2,8	0,0	0,0	167,8	1,7	0,0	0,0	0,01	11
F_4	13.81	9.63	7922,8	79,2	0,0	0,020	15845,6	39,6	0,0	0,020	0,001	31
G_4	0.77	0.117	399,3	0,068	0,0042	0,0068	654.3	0,042	0,0042	0,0068	0,001	3
H_4	1.61	0.892	282958,3	7,1	0,0065	0,0073	190996,8	10,5	0,0065	0,0073	0,00001	21
I_4	4.25	2.004	*0,16	7,2	0,0094	0,0095	0,29	3,9	0,0094	0,0095	0,00001	13
J_4	7.67	3.841	0,30	10,8	0,000029	0,0091	0,41	7,9	0,000029	0,0091	0,00001	13
K_4	11.92	5.501	0,28	9,3	0,0076	0,0100	0,36	7,2	0,0076	0,0100	0,0001	13
L_4	3.97	0.545	0,33	0,00085	0,0019	0,011	0,50	0,00049	0,0019	0,011	0,001	2
M_4	0.49	0.239	143,6	0,94	0,029	0,019	166,3	0,81	0,029	0,019	0,01	43

- - ... - O método não convergiu.

(*) resíduo alto (número com seu valor exato).

NOTA: Os outros números são multiplicado pelo fator 10^{-6}.

TABELA 11

MÉTODO 1.11

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.44	0.038	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.47	0.054	0,28	0,037	0,14	0,23	0,33	0,035	0,14	0,23
C_1	0.39	0.038	2,4	0,14	0,46	0,46	2,6	0,12	0,46	0,46
D_1	0.42	0.036	141,5	9,5	20,01	12,4	70,9	6,2	20,01	12,4
E_1	0.44	0.047	4,4	1,4	2,3	4,5	3,3	0,97	2,3	4,5
F_1	0.42	0.044	104,7	21,6	147,3	23,5	55,7	23,1	147,3	23,5
G_1	0.37	0.031	5,03	0,10	0,69	0,36	4,6	0,16	0,69	0,36
H_1	0.29	0.031	0,31	0,14	0,071	0,48	0,34	0,10	0,071	0,48
I_1	0.77	0.151	0,15	0,012	0,045	0,041	0,15	0,019	0,045	0,041
J_1	1.60	0.325	0,34	0,017	0,055	0,044	0,33	0,017	0,055	0,044
K_1	4.99	0.994	0,43	0,018	0,058	0,044	0,37	0,021	0,058	0,044
L_1	9.50	1.922	0,45	0,018	0,058	0,044	0,41	0,021	0,058	0,044
M_1	11.52	2.240	*3,8	50240,5	*0,50	0,029	*3,0	68629,7	*0,50	0,029
N_1	0.30	0.030	164,6	24984,3	171,8	347,4	153,2	25421,1	171,8	347,4
O_1	0.38	0.060	3878,9	*26,1	5267,2	8431,7	3211,5	*26,1	5267,1	8431,7
P_1	0.56	0.091	*0,29	*0,51.10^{8}	*0,75	*0,12.10^{7}	*0,33	*0,11.10^{8}	*0,75	*0,12.10^{7}
Q_1	1.78	0.354	*0,93.10^{3}	*0,13.10^{12}	*0,10.10^{4}	*0,29.10^{9}	*0,86.10^{3}	*0,11.10^{12}	*0,10.10^{4}	*0,29.10^{9}
A_2	0.35	0.026	0,097	0,029	0,019	0,030	0,10	0,034	0,019	0,030
B_2	1.35	0.031	0,22	0,0023	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
C_2	4.07	0.08	0,45	0,0017	0,0	0,0	0,45	0,0017	0,0	0,0
D_2	8.93	0.108	0,30	0,00058	0,0	0,0	0,30	0,00058	0,0	0,0
E_2			NÃO	EXECUTOU		FØ1BXF		IFAIL	= 2	
F_2	1.41	0.031	0,033	0,00017	5705,5	0,0069	0,037	0,00013	5705,5	0,0069
G_2	4.68	0.09	0,62	0,00061	4758,5	0,0037	0,31	0,0011	4758,5	0,0037
H_2	9.35	0.156	$*10^{2}$	10^{3}	10	10	10^{2}	10^{3}	10	10
A_3	0.47	0.031	0,12	0,0088	0,015	0,041	0,078	0,017	0,015	0,041
B_3	0.29	0.015	0,22	0,018	0,041	0,019	0,12	0,020	0,041	0,018
C_3		NÃO	EXECUTOU		FØ1BXF		IFAIL = 2			
D_3	0.32	0.016	0,15	0,013	0,0084	0,048	0,13	0,014	0,0083	0,048
E_3	0.64	0.013	0,22	0,0023	0,0	0,0	0,11	0,0047	0,0	0,0
F_3	3.72	0.077	0,45	0,0012	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
G_3			NÃO	EXECUTOU	FØ1BXF		IFAIL = 2			
H_3	0.29	0.028	$*10^{2}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	*10	$*10^{3}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	*10
I_3		NÃO		EXECUTOU		FØ1BXF		IFAIL = 2		
J_3	2.27	0.045	6,2	0,000090	0,019	0,0061	2,8	0,00013	0,019	0,0061
K_3	3.66	0.08	2,3	0,000040	0,0081	0,00070	0,96	0,00015	0,0081	0,00070
L_3			NÃO	EXECUTOU		FØ1BXF	IFAIL = 2			
A_4	0.53	0.030	0,19	0,017	0,0019	0,033	0,37	0,0098	0,0019	0,033
B_4	0.30	0.016	0,056	0,019	0,0075	0,011	0,089	0,015	0,0075	0,011
C_4	0.30	0.015	0,23	0,0021	0,0019	0,018	0,21	0,0016	0,0019	0,018
D_4	0.23	0.014	0,015	0,015	0,0075	0,0	0,030	0,011	0,0075	0,0
E_4	0.67	0.015	0,11	0,0047	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
F_4	3.72	0.066	0,22	0,0023	0,0	0,0	0,45	0,0012	0,0	0,0
G_4		NÃO	EXECUTOU		FØ1BXF		IFAIL = 2			
H_4	0.26	0.125	$*10^{3}$	$*10^{7}$	*10	$*10^{3}$	$*10^{3}$	$*10^{3}$	*10	$*10^{3}$
I_4	0.79	0.107	$*10^{2}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	$*10^{2}$	$*10^{2}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	$*10^{2}$
J_4			NÃO	EXECUTOU	FØ1BXF		IFAIL = 2			
K_4			NÃO		EXECUTOU	FØ1BXF		IFAIL	= 2	
L_4	6.27	0.125	$*10^{3}$	$*10^{7}$	*10	$*10^{8}$	$*10^{3}$	$*10^{8}$	*10	$*10^{8}$
M_4	3.50	0.107	$*10^{2}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	$*10^{2}$	$*10^{2}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	$*10^{2}$

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o F(A) incorretamente

TABELA 12

TABELA 1.14

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.37	0.046	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.32	0.031	0,045	0,019	0,029	0,013	0,037	0,027	0,029	0,013
C_1	0.31	0.046	0,089	0,089	0,093	0,061	0,12	0,10	0,093	0,061
D_1	0.32	0.047	23,2	7,9	1,2	1,9	12,2	4,8	1,2	1,9
E_1	0.31	0.046	3,9	1,7	0,27	1,1	2,6	0,91	0,27	1,1
F_1	0.35	0.047	17,8	16,1	3,6	4,2	9,2	9,5	3,6	4,2
G_1	0.32	0.046	0,21	0,015	0,032	0,080	0,18	0,013	0,032	0,080
H_1	0.23	0.031	0,045	0,022	0,015	0,030	0,060	0,015	0,015	0,030
I_1	0.87	0.163	0,079	0,0065	0,012	0,010	0,077	0,0071	0,012	0,010
J_1	1.72	0.335	0,081	0,0064	0,014	0,013	0,090	0,0071	0,014	0,013
K_1	4.66	0.989	0,079	0,0066	0,012	0,011	0,10	0,0074	0,012	0,011
L_1	9,50	1.878	0,10	0,0071	0,0012	0,011	0,10	0,0082	0,012	0,011
M_1	10.61	2.229	$*10^{38}$	$*10^{38}$	$*10^{38}$	$*10^{38}$	$*10^{38}$	$*10^{38}$	$*10^{38}$	$*10^{38}$
N_1	0.36	0.043	4,8	24444,6	30,0	21,4	4,3	24355,0	30,0	21,4
O_1	0.46	0.077	15,6	*26,1	301,7	317,1	14,0	*26,1	301,7	317,1
P_1	0.57	0.105	*0,17	$*0,15.10^{8}$	27452,1	$*0,12.10^{7}$	*0,23	$*0,11.10^{8}$	27452,1	$*0,12.10^{7}$
Q_1	1.74	0.36	*1,4	$*0,49.10^{10}$	*7,5	$*0,29.10^{9}$	*1,8	$*0,30.10^{10}$	*7,5	$*0,29.10^{9}$
A_2	0.33	0.030	0,10	0,028	0,039	0,028	0,067	0,023	0,039	0,028
B_2	1.33	0.044	0,22	0,0023	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
C_2	3.89	0.08	0,45	0,0017	0,0	0,0	0,45	0,0017	0,0	0,0
D_2	8.63	0.139	0,30	0,00058	0,0	0,0	0,30	0,00058	0,0	0,0
E_2	0.71	0.146	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
F_2	1.58	0.047	0,52	0,00072	5705,5	0,0073	0,74	0,00050	5705,5	0,0073
G_2	4.04	0.077	0,54	0,00054	4758,5	0,0024	0,27	0,0011	4758,5	0,0024
H_2	9.30	0.175	*44,8	*102,2	*1,19	*8,6	*52,5	*59,0	*1,19	*8,6
A_3	0.44	0.027	0,94	0,014	0,011	0,043	0,41	0,027	0,011	0,043
B_3	0.27	0.015	0,23	0,023	0,048	0,022	0,13	0,023	0,048	0,022
C_3	0.49	0.138	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
D_3	0.30	0.030	0,065	0,0061	0,019	0,015	0,045	0,0084	0,019	0,015
E_3	0.63	0.015	0,22	0,0023	0,0	0,0	0,11	0,0047	0,0	0,0
F_3	3.82	0.077	0,45	0,0012	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
G_3	1.11	0.202	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
H_3	0.30	0.028	*13,0	$*10^{8}$	*9,8	*0,18	*15,0	$*10^{8}$	*9,8	*0,18
I_3	1.46	0.31	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
J_3	2.18	0.047	6,7	0,000097	0,014	0,0056	2,8	0,00020	0,014	0,0056
K_3	3.71	0.076	3,8	0,000043	0,013	0,0013	2,06	0,00015	0,013	0,0013
L_3	10.59	0.266	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
A_4	0.48	0.027	0,24	0,015	0,015	0,0075	0,57	0,0088	0,015	0,0075
B_4	0.30	0.017	0,056	0,019	0,0075	0,011	0,089	0,015	0,0075	0,011
C_4	0,47	0.118	0,23	0,0051	0,0056	0,0075	0,30	0,011	0,0075	0,0
D_4	0.26	0.028	0,015	0,015	0,0075	0,0	0,030	0,011	0,0075	0,0
E_4	0.72	0.028	0,11	0,0047	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
F_4	3.60	0.077	0,22	0,0023	0,0	0,0	0,45	0,0012	0,0	0,0
G_4	1.25	0.158	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
H_4	0.27	0.016	0,0	0,00025	0,0042	0,0023	0,0	0,00049	0,0042	0,0023
I_4	0.79	0.030	0,72	0,000047	0,0056	0,0087	1,02	0,000051	0,0056	0,0087
J_4	5.21	0.321	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
K_4	7.21	0.231	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
L_4	6.79	0.136	$*10^{3}$	$*10^{7}$	*4,3	$*10^{8}$	$*10^{3}$	$*10^{8}$	*4,3	$*10^{8}$
M_4	3.66	0.124	$*10^{2}$	$*10^{8}$	*10	*10	$*10^{2}$	$*10^{8}$	*10	*10

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o P(A) incorretamente

TABELA 13

MÉTODO 1.15

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.36	0.0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.38	0.0	0,045	0,019	0,037	0,013	0,037	0,027	0,029	0,013
C_1	0.39	0.0	0,089	0,089	0,12	0,060	0,12	0,10	0,093	0,06[illegible]
D_1	0.37	0.0	23,2	7,9	2,1	1,9	12,2	4,8	1,2	1,9
E_1	0.38	0.0	3,9	1,7	0,75	1,07	2,6	0,91	0,27	1,07
F_1	0.37	0.0	17,8	16,1	5,2	4,2	9,2	9,5	3,6	4,2
G_1	0.35	0.0	0,21	0,015	0,035	0,080	0,18	0,013	0,032	0,08[illegible]
H_1	0.31	0.0	0,045	0,022	0,030	0,030	0,060	0,015	0,015	0,03[illegible]
I_1	0.79	0.0	0,079	0,0065	0,012	0,010	0,077	0,0071	0,012	0,01[illegible]
J_1	2.31	0.0	0,081	0,0064	0,014	0,013	0,090	0,0071	0,014	0,013
K_1	6.77	0.0	0,079	0,0066	0,012	0,011	0,10	0,0074	0,012	0,01[illegible]
L_1	12.29	0.0	0,10	0,0071	0,012	0,0011	0,10	0,0082	0,012	0,01[illegible]
M_1	14.94	0.0	0,10	0,0072	0,012	0,011	0,10	0,0082	0,012	0,01[illegible]
N_1	0.40	0.0	4,3	24444,6	30,0	21,4	4,3	24354,9	30,0	21,4
O_1	0.42	0.0	15,6	$*0,26.10^{2}$	301,7	317,1	14,0	$*0,26.10^{2}$	301,7	317,1
P_1	0.60	0.0	*0,17	$*0,15.10^{8}$	27452,1	$*0,12.10^{7}$	*0,22	$*0,11.10^{8}$	27452,1	*0,1[illegible]
Q_1	2.08	0.0	*1,4	$*0,48.10^{10}$	*7,5	$*0,29.10^{9}$	*1,8	$*0,30.10^{10}$	*7,5	*0,2[illegible]
A_2	0.36	0.0	0,12	0,048	0,030	0,017	0,13	0,052	0,020	0,01[illegible]
B_2	1.41	0.0	0,89	0,0081	0,042	0,042	0,89	0,0081	0,042	0,04[illegible]
C_2	4.22	0.0	0,67	0,0026	0,0	0,0	0,67	0,0026	0,0	0,0
D_2	9.15	0.0	0,45	0,0012	0,0088	0,0088	0,45	0,0012	0,0088	0,00[illegible]
E_2	0.76	0.0	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{[illegible]}$
F_2	1.42	0.0	5,3	0,0057	5705,5	0,016	7,8	0,0038	5705,5	0,01[illegible]
G_2	4.87	0.0	15,7	0,017	4758,5	0,0072	8,0	0,034	4758,5	0,00[illegible]
H_2	10.25	0.0	$*10^{2}$	$*10^{3}$	*10	$*10^{2}$	$*10^{2}$	$*10^{3}$	*10	$*10^{2}$
A_3	0.42	0.0	0,34	0,0090	0,076	0,10	0,15	0,016	0,067	0,1[illegible]
B_3	0.35	0.0	0,12	0,012	0,040	0,032	0,12	0,019	0,028	0,0[illegible]
C_3		NÃO	EXECUTOU		FØ1BKF		IFAIL = 1			
D_3	0.36	0.0	0,12	0,012	0,078	0,030	0,12	0,015	0,054	0,03[illegible]
E_3	0.70	0.0	0,60	0,0059	0,042	0,022	0,30	0,012	0,042	0,02[illegible]
F_3	3.94	0.0	0,60	0,0012	0,018	0,042	0,30	0,0023	0,018	0,04[illegible]
G_3		NÃO	EXECUTOU		FØ1BKF	IFAIL = 1				
H_3	0.29	0.0	$*10^{2}$	$*10^{8}$	*10	$*10^{2}$	$*10^{2}$	$*10^{8}$	*10	$*10^{[illegible]}$
I_3			NÃO	EXECUTOU		FØ1BKF			IFAIL = 1	
J_3	2.34	0.0	69,7	0,00085	0,042	0,014	30,4	0,0020	0,042	0,01[illegible]
K_3	3.80	0.0	82,4	0,00069	0,013	0,012	28,3	0,0021	0,013	0,01[illegible]
L_3	10,88	0.0	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{[illegible]}$
A_4	0.57	0.0	0,20	0,030	0,14	0,030	0,46	0,014	0,12	0,03[illegible]
B_4	0.34	0.0	0,034	0,013	0,0075	0,015	0,037	0,011	0,0037	0,01[illegible]
C_4	0.55	0.0	0,22	0,0042	0,026	0,013	0,24	0,0024	0,026	0,01[illegible]
D_4	0.28	0.0	0,030	0,022	0,022	0,0037	0,030	0,011	0,011	0,00[illegible]
E_4	0.66	0.0	0,30	0,012	0,022	0,042	0,60	0,0058	0,022	0,04[illegible]
F_4	3.77	0.0	0,30	0,0034	0,042	0,018	0,60	0,0017	0,042	0,01[illegible]
G_4	1.33	0.0	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{[illegible]}$
H_4	0.26	0.0	0,75	0,0052	0,0042	0,019	0,88	0,0044	0,0042	0,01[illegible]
I_4	0.78	0.0	2,1	0,000072	0,024	0,014	2,3	0,000095	0,024	0,01[illegible]
J_4	4.88	0.0	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{[illegible]}$
K_4	8.21	0.0	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{[illegible]}$
L_4	6.68	0.0	$*10^{2}$	$*10^{7}$	$*10^{2}$	$*10^{8}$	$*10^{3}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	$*10^{[illegible]}$
M_4	4.04	0.0	$*10^{2}$	$*10^{8}$	$*10^{2}$	$*10^{2}$	*10	$*10^{8}$	$*10^{2}$	$*10^{[illegible]}$

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o P(A) incorretamente

TABELA 14

MÉTODO 3.31

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.38	0.029	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.36	0.037	0,53	0,075	0,17	0,21	0,18	0,085	0,17	0,21
C_1	0.38	0.031	3,9	0,36	0,85	13,3	4,4	0,82	0,85	13,3
D_1	0.32	0.016	27,8	23,9	35,2	464,1	22,5	26,8	35,2	464,1
E_1	0.35	0.026	2,5	5,5	3,6	40,8	2,4	3,2	3,6	40,8
F_1	0.37	0.026	145,3	165,8	177,2	7368,5	235,3	125,0	177,2	7368,5
G_1	0.35	0.015	0,76	0,19	0,82	0,56	0,83	0,23	0,82	0,56
H_1	0.24	0.015	0,27	0,097	0,12	0,32	0,20	0,078	0,12	0,32
I_1	0.93	0.102	0,15	0,019	0,038	0,042	0,16	0,020	0,038	0,042
J_1	1.52	0.23	0,27	0,031	0,047	0,044	0,24	0,031	0,047	0,044
K_1	4.41	0.701	0,29	0,030	0,060	0,042	0,28	0,028	0,060	0,042
L_1	8.69	1.341	0,29	0,030	0,061	0,040	0,28	0,028	0,061	0,040
M_1	10.36	1.592	0,29	0,030	0,061	0,040	0,28	0,028	0,061	0,040
N_1	0.30	0.015	23,7	*0,24	118,3	*0,24	23,1	*0,17	118,3	*0,25
O_1	0.38	0.038	961,3	*0,13.10^3	14349,2	*0,21.10^3	1231,3	*0,18.10^3	14349,2	*0,21.10^3
P_1	0.53	0.066	1982,8	*0,10.10^3	21436,3	*0,16.10^3	1601,7	*0,74.10^2	21436,3	*0,15.10^3
Q_1	1.52	0.168	7754,8	*0,15.10^7	*0,13	*0,11.10^6	10503,9	*0,22.10^7	*0,13	*0,11.10^6
A_2	0.31	0.031	0,050	0,024	0,020	0,039	0,056	0,024	0,020	0,039
B_2	1.55	0.037	0,15	0,0010	0,0	0,017	0,15	0,0012	0,0	0,017
C_2	4.38	0.072	0,45	0,0017	0,0	0,0	0,45	0,0017	0,0	0,0
D_2	11.09	0.147	0,30	0,00058	0,0	0,0088	0,30	0,00058	0,0	0,0088
E_2	0.41	0.015	0,28	0,00095	0,0084	0,011	0,25	0,0011	0,0084	0,011
F_2	1.34	0.045	0,030	0,000029	0,0042	0,0094	0,030	0,000029	0,0042	0,0094
G_2	4.33	0.101	0,51	0,00053	0,0032	0,0099	0,29	0,0011	0,0032	0,0099
H_2	9.27	0.186	*10^4	*10^7	*10	*10^9	*10^4	*10^6	*10	*10^9
A_3	0.41	0.031	0,12	0,0065	0,019	0,024	0,060	0,0093	0,19	0,024
B_3	0.27	0.016	0,11	0,0086	0,019	0,011	0,056	0,0077	0,019	0,011
C_3	0.32	0.015	6,4	0,14	1,7	0,33	3,2	0,25	1,7	0,33
D_3	0.27	0.0	0,25	0,035	0,086	0,026	0,13	0,041	0,086	0,026
E_3	0.71	0.014	0,0	0,00093	0,0	0,0075	0,0	0,0023	0,0	0,0075
F_3	4.88	0.066	0,0	0,0	0,0	0,025	0,0	0,0	0,0	0,025
G_3	0.61	0.016	1,7	0,00026	0,0023	0,0059	2,6	0,00020	0,0023	0,0059
H_3	0.24	0.0	0,36	0,000033	0,0	0,0042	0,49	0,00033	0,0	0,0042
I_3	0.77	0.015	0,45	0,000092	0,00058	0,0012	0,30	0,00012	0,00058	0,0012
J_3	2.37	0.066	*10^4	*10^8	*10^2	*10^9	*10^4	*10^8	*10^2	*10^9
K_3	3.60	0.106	*10^3	*10^7	*10	*10^9	*10^3	*10^7	*10	*10^9
L_3	6.35	0.170	*10^3	*10^6	*0,46	*10^9	*10^3	*10^7	*0,46	*10^9
A_4	0.51	0.027	0,065	0,012	0,012	0,022	0,15	0,0070	0,012	0,022
B_4	0.29	0.017	0,030	0,015	0,019	0,028	0,048	0,015	0,019	0,028
C_4	0.27	0.0	0,66	0,0084	0,037	0,0075	0,75	0,0051	0,037	0,075
D_4	0.21	0.0	0,015	0,015	0,0075	0,0	0,030	0,011	0,0075	0,0
E_4	0.74	0.015	0,075	0,0023	0,0	0,0	0,15	0,0012	0,0	0,0
F_4	4.09	0.072	0,0	0,0011	0,0	0,0088	0,0	0,00058	0,0	0,0088
G_4	0.63	0.030	0,18	0,000016	0,0014	0,0071	0,12	0,000022	0,0014	0,0071
H_4	0.29	0.012	0,067	0,00070	0,0	0,0075	0,15	0,00099	0,0	0,0075
I_4	0.79	0.031	2,9	0,000028	0,0084	0,0072	2,3	0,000051	0,0084	0,0072
J_4	2.26	0.046	0,60	0,0000095	0,0037	0,018	1,3	0,000011	0,0038	0,018
K_4	3.43	0.093	*10^3	*10^6	*0,304	*10^9	*10^3	*10^5	*0,30	*10^9
L_4	6.08	0.15	*10^4	*10^7	*10	*10^9	*10^4	*10^7	*10	*10^9
M_4	3.69	0.06	0,022	0,00018	0,0065	0,013	0,024	0,00017	0,00065	0,013

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o F(A) incorretamente

TABELA 15

MÉTODO 3.32

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.33	0.046	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.37	0.031	0,17	0,063	0,11	0,17	0,20	0,064	0,10	0,17
C_1	0.38	0.029	3,6	0,71	0,51	13,1	3,2	0,86	0,33	13,1
D_1	0.43	0.044	18,8	22,7	3,9	465,9	19,6	18,4	3,2	465,9
E_1	0.39	0.044	2,7	4,9	1,7	40,0	3,5	3,5	1,2	40,0
F_1	0.41	0.031	233,9	165,7	37,2	7360,8	132,7	190,1	15,8	7360,8
G_1	0.40	0.045	0,54	0,056	0,21	0,58	0,95	0,060	0,17	0,58
H_1	0.27	0.027	0,27	0,061	0,065	0,23	0,24	0,075	0,065	0,23
I_1	4.34	0.085	0,16	0,018	0,051	0,16	0,020	0,029	0,039	0,044
J_1	9.15	0.265	0,30	0,034	0,063	0,24	0,031	0,028	0,048	0,046
K_1	4.21	0.804	0,32	0,030	0,064	0,28	0,028	0,029	0,060	0,044
L_1	9.24	1.407	0,32	0,030	0,064	0,28	0,028	0,028	0,061	0,042
M_1	10.58	1.605	0,32	0,030	0,063	0,28	0,028	0,029	0,061	0,042
N_1	0.28	0.020	25,8	*0,24	95,9	*0,25	28,0	*0,17	95,9	*0,25
O_1	0.42	0.061	709,2	$*0,13.10^3$	3310,8	$*0,21.10^3$	712,9	$*0,19.10^3$	3310,8	$*0,21.10^3$
P_1	0.53	0.077	1999,8	$*0,10.10^3$	21537,7	$*0,16.10^3$	1534,2	$*0,74.10^2$	21537,7	$*0,16.10^3$
Q_1	2.39	0.373	$*0,13.10^{30}$	$*0,17.10^{39}$	$*0,93.10^{30}$	$*0,15.10^{38}$	$*0,12.10^{30}$	$*0,17.10^{39}$	$*0,93.10^{30}$	$*0,15.10^{38}$
A_2	0.37	0.032	0,084	0,031	0,022	0,022	0,086	0,044	0,022	0,022
B_2	1.31	0.046	0,0	0,0010	0,0	0,025	0,0	0,0012	0,0	0,025
C_2	3.93	0.93	0,45	0,0017	0,0	0,013	0,45	0,0017	0,0	0,013
D_2	8.83	0.167	0,30	0,00061	0,0	0,035	0,30	0,0012	0,0	0,035
E_2	0.42	0.016	0,28	0,00095	0,017	0,0070	0,25	0,0013	0,017	0,0070
F_2	1.40	0.44	0,030	0,000015	0,0041	0,013	0,037	0,000015	0,0041	0,013
G_2	4.87	0.135	1,03	0,0011	0,010	0,013	0,45	0,0019	0,010	0,013
H_2	15.05	0.287	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
A_3	0.52	0.039	0,11	0,0047	0,0056	0,022	0,060	0,0093	0,0037	0,022
B_3	0.31	0.022	0,12	0,0093	0,037	0,030	0,052	0,011	0,037	0,030
C_3	0.35	0.016	1,2	0,017	0,33	0,27	1,0	0,026	0,30	0,27
D_3	0.32	0.016	0,12	0,024	0,033	0,011	0,060	0,023	0,033	0,011
E_3	0.71	0.015	0,0	0,00093	0,0	0,022	0,0	0,0023	0,0	0,022
F_3	3.76	0.076	0,0	0,0	0,0	0,017	0,0	0,0	0,0	0,017
G_3	0.62	0.016	2,7	0,00025	0,0051	0,0063	4,0	0,00021	0,0051	0,0063
H_3	0.28	0.014	0,37	0,000033	0,0	0,0040	0,49	0,000033	0,0	0,0040
I_3	0.75	0.031	0,45	0,000095	0,0015	0,025	0,30	0,00010	0,0015	0,025
J_3	3.26	0.146	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
K_3	5.37	0.196	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
L_3	6.51	0.218	$*10^3$	$*10^{39}$	*0,38	$*10^9$	$*10^3$	$*10^7$	*0,38	$*10^{39}$
A_4	0.53	0.030	0,050	0,0044	0,015	0,037	0,089	0,0012	0,014	0,037
B_4	0.34	0.029	0,041	0,014	0,034	0,034	0,067	0,014	0,022	0,034
C_4	0.31	0.015	0,22	0,0026	0,026	0,029	0,33	0,0019	0,026	0,029
D_4	0.24	0.013	0,0037	0,0075	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037
E_4	0.67	0.030	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
F_4	3.65	0.104	0,15	0,0012	0,0	0,0	0,30	0,00058	0,0	0,0
G_4	0.63	0.030	0,18	0,000073	0,013	0,012	0,31	0,000011	0,013	0,012
H_4	0.26	0.015	0,0042	0,00025	0,0042	0,0058	0,0037	0,00026	0,0042	0,0058
I_4	0.86	0.031	2,9	0,00012	0,0084	0,014	2,6	0,00017	0,0084	0,014
J_4	2.46	0.088	3,1	0,00015	0,013	0,011	5,0	0,000095	0,013	0,011
K_4	3.67	0.211	$*10^3$	$*10^6$	*0,32	$*10^9$	$*10^3$	$*10^6$	*0,32	$*10^3$
L_4	6.43	0.261	$*10^3$	$*10^7$	*0,71	$*10^9$	$*10^3$	$*10^7$	*0,71	$*10^3$
M_4	3.67	0.11	0,73	0,0057	0,0083	0,091	0,63	0,0068	0,0084	0,051

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o P(A) incorretamente

TABELA 16
MÉTODO 3.33

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.34	0.025	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.35	0.030	0,28	0,061	0,16	0,17	0,26	0,056	0,13	0,17
C_1	0.41	0.041	3,8	0,73	1,03	13,2	3,8	0,83	0,73	13,2
D_1	0.42	0.041	18,4	22,6	5,6	464,7	16,3	13,0	6,9	464,7
E_1	0.41	0.030	1,7	5,0	2,1	39,2	2,9	3,0	1,8	39,2
F_1	0.36	0.031	218,6	165,9	131,8	7360,3	139,2	124,8	96,7	7360,2
G_1	0.41	0.030	0,33	0,041	0,28	0,54	0,55	0,045	0,20	0,54
H_1	0.27	0.030	0,19	0,063	0,15	0,19	0,13	0,075	0,15	0,19
I_1	0.68	0.095	0,14	0,016	0,033	0,038	0,13	0,011	0,033	0,038
J_1	1.60	0.254	0,20	0,014	0,061	0,037	0,19	0,023	0,061	0,037
K_1	4.34	0.80	0,31	0,014	0,052	0,037	0,26	0,021	0,052	0,037
L_1	9.22	1.501	0,33	0,015	0,051	0,040	0,27	0,020	0,051	0,40
M_1	10.43	1.787	0,33	0,014	0,051	0,040	0,27	0,020	0,051	0,040
N_1	0.29	0.025	25,9	0,24	418,9	*0,25	32,1	*0,17	418,9	0,25
O_1	0.42	0.046	572,5	*0,13. 10^3	7249,5	*0,21 .10^3	722,8	*0,19. 10^3	7249,5	*0,21 .10^3
P_1	0.56	0.055	1982,9	*0,10. .10^3	21192,1	*0,16 .10^3	1643,9	0,74.10^2	21992,1	*0,16 .10^3
Q_1	1.68	0.252	2487,6	*0,59 .10^3	*0,17	0,64.10^3	2958,8	*0,67 .10^3	*0,17	*0,65 .10^3
A_2	0.36	0.014	0,061	0,026	0,024	0,041	0,071	0,026	0,034	0,041
B_2	1.34	0.041	0,15	0,0010	0,0	0,017	0,15	0,0012	0,0	0,017
C_2	4.36	0.094	0,45	0,0017	0,0	0,0	0,45	0,0017	0,0	0,0
D_2	9.00	0.144	0,30	0,00058	0,0	0,0088	0,30	0,00058	0,0	0,0063
E_2	0.43	0.012	0,28	0,00095	0,017	0,058	0,25	0,0013	0,017	0,0058
F_2	1.30	0.031	0,030	0,000038	0,0041	0,011	0,037	0,000015	0,0041	0,011
G_2	4.61	0.092	0,51	0,00061	0,0032	0,014	0,29	0,0011	0,0032	0,014
H_2	9.64	0.276	3,3	0,00010	0,0078	0,016	3,8	0,000071	0,0078	0,016
A_3	0.53	0.027	0,037	0,0056	0,013	0,0093	0,16	0,012	0,011	0,0093
B_3	0.29	0.016	0,048	0,0070	0,017	0,017	0,039	0,0079	0,017	0,017
C_3	0.33	0.015	1,9	0,012	0,57	0,31	0,95	0,021	0,57	0,31
D_3	0.28	0.016	0,080	0,0075	0 027	0,022	0,060	0,010	0,027	0,022
E_3	0.62	0.016	0,0	0,00993	0,0	0,015	0,0	0,0023	0,0	0,015
F_3	3.54	0.074	0,0	0,0	0,0	0,017	0,0	0,0	0,0	0,017
G_3	0.58	0.015	2,7	0,00026	0,0042	0,0059	4,0	0,00021	0,0042	0,0059
H_3	0.26	0.015	0,37	0,000031	0,0	0,0040	0,49	0,000033	0,0	0,0040
I_3	0.75	0.016	0,45	0,000095	0,0015	0,0013	0,30	0,00010	0,0015	0,0013
J_3	2.39	0.133	0,19	0,000025	0,033	0,0038	0,16	0,000036	0,033	0,0033
K_3	4.43	0.197	*10^3	*10^6	*0,47	*10^9	*10^2	*10^7	*0,47	*10^9
L_3	7.36	0.196	*808,0	*10^7	*0,622	*10^9	*10^4	*10^7	*0,62	*10^9
A_4	0.47	0.030	0,051	0,0083	0,012	0,011	0,10	0,0046	0,013	0,011
B_4	0.35	0.015	0,030	0,012	0,026	0,028	0,048	0,011	0,019	0,028
C_4	0.36	0.030	0,18	0,0023	0,030	0,011	0,33	0,0019	0,030	0,011
D_4	0.23	0.012	0,019	0,019	0,015	0,0075	0,026	0,015	0,015	0,0075
E_4	0.61	0.011	0,075	0,0023	0,0	0,0	0,15	0,0012	0,0	0,0
F_4	3.51	0.074	0,15	0,0011	0,0	0,018	0,30	0,00058	0,0	0,018
G_4	0.76	0.027	0,045	0,00000091	0,011	0,0020	0,039	0,0000014	0,011	0,0020
H_4	0.26	0.015	0,0042	0,0	0,0042	0,0077	0,0037	0,0	0,0042	0,0077
I_4	0.74	0.031	0,83	0,0000064	0,0061	0,0074	1,3	0,0000064	0,0061	0,0074
J_4	2.44	0.077	1,9	0,000065	0,011	0,013	4,8	0,000048	0,011	0,013
K_4	3.94	0.109	*10^2	*10^6	*0,23	*10^9	*10^3	*10^6	*0,23	*10^9
L_4	6.23	0.154	*10^3	*10^6	*10	*10^9	*10^3	*10^6	*10	*10^9
M_4	3.62	0.063	0,089	0,00052	0,0065	0,0087	0,073	0,00047	0,0065	0,0087

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o P(A) incorretamente

TABELA 17

MÉTODO 3.34

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.33	0.030	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.34	0.031	0,25	0,067	0,037	0,21	0,22	0,056	0,028	0,21
C_1	0.33	0.031	3,6	0,74	0,31	13,04	3,3	0,81	0,13	13,04
D_1	0.37	0.046	26,7	22,6	4,9	463,1	20,0	12,9	5,8	463,1
E_1	0.30	0.031	3,04	5,24	1,45	40,16	3,8	3,0	0,61	40,16
F_1	0.35	0.030	204,6	166,2	35,3	7365,3	153,8	125,0	2,3	7365,3
G_1	0.33	0.030	0,69	0,060	0,12	0,56	0,99	0,073	0,11	0,56
H_1	0.31	0.016	0,16	0,050	0,063	0,34	0,11	0,075	0,050	0,34
I_1	0.71	0.099	0,13	0,011	0,014	0,024	0,071	0,0086	0,014	0,024
J_1	1.65	0.29	0,088	0,0085	0,017	0,033	0,083	0,0095	0,017	0,033
K_1	4.52	0.776	0,18	0,0079	0,015	0,028	0,19	0,0085	0,015	0,028
L_1	10.36	1.407	0,22	0,0078	0,014	0,028	0,20	0,0085	0,014	0,028
M_1	10.59	1.814	*5,0	0,0078	0,014	*0,53	*6,1	0,0086	0,014	*0,53
N_1	0.32	0.026	36,1	*0,24	50,1	*0,25	28,0	*0,17	50,8	*0,25
O_1	0.42	0.046	707,7	*$0,13.10^3$	1168,3	*$0,21.10^3$	949,4	*$0,19.10^3$	1168,3	*$0,21.10^3$
P_1	0.56	0.076	1980,1	*$0,10.10^3$	21062,1	*$0,16.10^3$	1608,1	*$0,74.10^2$	21062,1	*$0,16.10^3$
Q_1	2.63	0.315	*$0,14.10^{37}$	*$0,17.10^{39}$	*$0,37.10^{38}$	*$0,19.10^3$	*$0,16.10^{37}$	*$0,17.10^{39}$	*$0,37.10^{38}$	*$0,19.10^{38}$
A_2	0.45	0.043	0,045	0,016	0,043	0,037	0,052	0,018	0,030	0,037
B_2	1.32	0.030	0,15	0,0010	0,0	0,017	0,15	0,0012	0,0	0,017
C_2	4.44	0.075	0,45	0,0017	0,0	0,0	0,45	0,0017	0,0	0,0
D_2	9.24	0.151	0,30	0,00058	0,0	0,0088	0,30	0,00058	0,0	0,0088
E_2	0.41	0.007	0,22	0,00060	0,0086	0,0056	0,15	0,00084	0,0086	0,0056
F_2	1.38	0.043	0,031	0,000038	0,00047	0,0094	0,037	0,000029	0,00047	0,0094
G_2	4.56	0.089	0,70	0,00060	0,0075	0,027	0,43	0,0011	0,0075	0,027
H_2	10.81	0.278	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
A_3	0.39	0.016	0,21	0,011	0,0093	0,027	0,10	0,019	0,0075	0,027
B_3	0.39	0.017	0,18	0,019	0,084	0,041	0,075	0,018	0,060	0,041
C_3	0.43	0.015	0,60	0,0065	0,065	0,21	0,51	0,010	0,058	0,21
D_3	0.32	0.015	0,060	0,0056	0,020	0,0075	0,037	0,0088	0,018	0,0075
E_3	0.65	0.021	0,0	0,00093	0,0	0,0075	0,0	0,0023	0,0	0,0075
F_3	3.66	0.058	0,45	0,0012	0,0	0,017	0,22	0,0023	0,0	0,017
G_3	0.58	0.012	0,18	0,00000074	0,0042	0,0056	0,060	0,00000045	0,0042	0,0056
H_3	0.27	0.0	0,73	0,00046	0,0	0,00023	0,75	0,00036	0,0	0,00023
I_3	0.77	0.015	2,04	0,00026	0,0029	0,0062	2,6	0,00023	0,0029	0,0062
J_3	3.08	0.142	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
K_3	5.64	0.18	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
L_3	7.01	0.182	*10^3	*10^6	*0,44	*10^9	*10^3	*10^6	*0,44	*10^9
M_3	0.63	0.014	0,48	0,000015	0,0028	0,0068	0,63	0,00033	0,0028	0,0068
N_3	0.28	0.016	0,13	0,00096	0,0	0,0040	0,15	0,00099	0,0	0,0040
A_4	0.44	0.023	0,11	0,017	0,042	0,019	0,22	0,0077	0,039	0,019
B_4	0.31	0.006	0,071	0,025	0,045	0,041	0,11	0,019	0,030	0,041
C_4	0.34	0.026	0,31	0,0030	0,0075	0,0075	0,46	0,0023	0,0037	0,0075
D_4	0.29	0.016	0,015	0,015	0,015	0,0	0,030	0,011	0,0075	0,0
E_4	0.66	0.015	0,11	0,0046	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
F_4	3.85	0.077	0,0	0,0011	0,0	0,0088	0,0	0,00058	0,0	0,0086
I_4	0.74	0.015	2,9	0,000030	0,0084	0,0072	2,3	0,000051	0,0084	0,0072
J_4	2.38	0.061	0,60	0,000015	0,0051	0,014	0,96	0,0000073	0,0051	0,014
K_4	4.80	0.21	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
L_4	7.60	0.228	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
M_4	3.68	0.077	0,12	0,0011	0,0084	0,011	0,14	0,00081	0,0084	0,011

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o $F(A)$ incorretamente

TABELA 18

MÉTODO 3.35

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.34	0.047	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.34	0.042	0,25	0,067	0,037	0,21	0,22	0,056	0,028	0,21
C_1	0.35	0.045	3,6	0,74	0,31	13,04	3,3	0,80	0,13	13,04
D_1	0.38	0.041	26,7	22,6	4,9	463,1	20,0	12,9	5,8	463,1
E_1	0.35	0.031	3,04	5,25	1,5	40,2	3,78	3,0	0,61	40,16
F_1	0.34	0.046	204,6	166,2	35,3	7365,3	153,8	135,0	2,3	7365,3
G_1	0.34	0.031	0,69	0,060	0,12	0,56	0,99	0,073	0,11	0,56
H_1	0.29	0.029	0,16	0,050	0,063	0,34	0,12	0,075	0,050	0,34
I_1	1.0	0.232	0,13	0,011	0,014	0,024	0,071	0,0086	0,014	0,024
J_1	1.77	0.452	0,088	0,0085	0,017	0,033	0,083	0,0095	0,017	0,033
K_1	5.04	1.368	0,18	0,0079	0,015	0,028	0,19	0,0085	0,015	0,028
L_1	10.69	2.88	0,22	0,0078	0,014	0,028	0,201	0,0085	0,014	0,028
M_1	11.92	3.348	0,22	0,0078	0,014	0,028	0,201	0,0085	0,014	0,028
N_1	0.33	0.046	0,36	*0,24	50,8	*0,25	28,0	*0,17	50,8	*0,25
O_1	0.47	0.081	707,7	$*0,13.10^{3}$	1168,3	$*0,21.10^{3}$	949,4	$*0,19.10^{3}$	1168,3	$*0,21.10^{3}$
P_1	0.55	0.090	1982,0	$*0,10.10^{3}$	22195,3	$*0,16.10^{3}$	1611,5	$*0,74.10^{2}$	22195,4	$*0,16.10^{3}$
Q_1	1.62	0.29	2,9	0,0	0,0	0,0	2,9	0,0	0,0	0,0
A_2	0.41	0.038	0,063	0,030	0,017	0,039	0,067	0,022	0,013	0,039
B_2	1.46	0.045	0,30	0,0035	0,0	0,0	0,30	0,0035	0,0	0,0
C_2	4.31	0.104	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
D_2	9.48	0.20	1,5	0,0035	0,0	0,026	1,5	0,0041	0,0	0,027
E_2	0.43	0.014	32,1	0,083	0,013	0,021	22,9	0,12	0,013	0,021
F_2	1.42	0.046	4,1	0,0042	0,00086	0,024	5,7	0,0030	0.00086	0,024
G_2	4.46	0.106	50,2	0,055	0,0061	0,046	25,5	0,11	0,0061	0,046
H_2	11.03	0.462	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
A_3	0.52	0.041	0,39	0,0079	0,019	0,043	0,18	0,014	0,015	0,043
B_3	0.27	0.016	0,16	0,012	0,017	0,019	0,097	0,017	0,017	0,019
C_3	0.43	0.027	1,5	0,0093	0,26	0,25	0,89	0,013	0,29	0,25
D_3	0.31	0.029	0,12	0,0075	0,050	0,0075	0,12	0,010	0,041	0,0075
E_3	0.68	0.015	0,30	0,0035	0,0	0,0	0,15	0,0070	0,0	0,0
F_3	3.74	0.133	1,9	0,0047	0,0	0,075	0,89	0,0093	0,0	0,075
G_3	0.59	0.015	1,6	0,00026	0,0023	0,0010	2,1	0,00020	0,0023	0,0010
H_3	0.26	0.014	0,37	0,000033	0,0	0,0040	0,49	0,000033	0,0	0,0040
I_3	0.75	0.030	2,04	0,00031	0,0043	0,0061	2,6	0,00023	0,0043	0,0061
J_3	2.98	0.186	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
K_3	5.57	0.283	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
L_3	6.36	0.237	$*10^{3}$	$*10^{7}$	*0,36	$*10^{9}$	$*10^{3}$	$*10^{7}$	*0,36	$*10^{9}$
A_4	0.55	0.030	0,099	0,018	0,034	0,017	0,13	0,012	0,030	0,017
B_4	0.31	0.015	0,045	0,015	0,034	0,034	0,067	0,014	0,022	0,034
C_4	0.32	0.015	0,70	0,0031	0,030	0,026	1,01	0,0030	0,022	0,026
D_4	0.27	0.018	0,030	0,022	0,022	0,0037	0,030	0,011	0,011	0,0037
E_4	0.63	0.030	0.15	0,0047	0,0	0,042	0,30	0,0023	0,0	0,042
F_4	3.72	0.109	0,30	0,0035	0,0	0,0	0,60	0,0017	0,0	0,0
G_4	0.76	0.046	13,4	0,0024	0,0056	0,014	21,8	0,0014	0,0056	0,014
H_4	0.29	0.015	0,38	0,0029	0,0042	0,015	0,40	0,0024	0,0042	0,015
I_4	0.79	0.031	25,5	0,00063	0,011	0,014	17,3	0,00092	0,011	0,014
J_4	2.68	0.104	19,1	0,00087	0,0028	0,033	34,2	0,00047	0,0028	0,033
K_4	4.51	0.401	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
L_4	7.60	0.415	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$	$*10^{39}$
M_4	3.79	0.115	2,9	0,023	0,010	0,073	2,5	0,028	0,010	0,073

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o P(A) incorretamente

TABELA 22

MÉTODO 6.22

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.31	0.015	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.41	0.042	0,32	0,035	0,078	0,13	0,28	0,036	0,078	0,13
C_1	0.37	0.030	2,5	0,66	3,6	0,42	2,6	0,68	3,6	0,42
D_1	0.40	0.035	85,9	38,7	93,6	23,7	53,8	42,7	93,6	23,7
E_1	0.34	0.031	18,3	19,1	332,3	2,7	15,0	17,4	332,3	2,7
F_1	0.35	0.023	188,7	200,6	7039,3	11,3	124,2	140,0	7039,3	11,3
G_1	0.38	0.029	0,30	0,11	0,25	0,16	0,42	0,14	0,25	0,16
H_1	0.26	0.012	0,27	0,31	0,50	0,37	0,31	0,28	0,50	0,37
I_1	0.66	0.100	0,22	0,025	0,044	0,054	0,24	0,023	0,044	0,054
J_1	1.50	0.231	0,33	0,034	0,039	0,064	0,26	0,024	0,039	0,054
K_1	4.52	0.715	0,28	0,032	0,055	0,12	0,34	0,024	0,055	0,12
L_1	9.25	1.496	0,29	0,030	0,055	0,11	0,34	0,024	0,055	0,11
M_1	10.69	1.645	0,29	0,030	0,055	0,11	0,34	0,024	0,055	0,11
N_1	0.29	0.016	130,0	0,17*	0,25*	137,3	133,1	0,24*	0,25*	137,3
O_1	0.46	0.043	5653,7	$*0,19.10^3$	$*0,21.10^3$	19595,3	6031,4	$*0,13.10^3$	$*0,21.10^3$	19595,3
P_1	0.53	0.055	2035,2	$*0,73.10^2$	$*0,15.10^3$	27290,9	2616,1	$*0,10.10^3$	$*0,16.10^3$	27290,9
Q_1	1.54	0.164	48722,9	$*0,22.10^7$	$*0,11.10^6$	*0,69	56545,7	$*0,16.10^7$	$*0,11.10^5$	*0,69
A_2	0.31	0.031	0,047	0,021	0,035	0,030	0,047	0,017	0,035	0,030
B_2	1.39	0.038	0,15	0,0012	0,0	0,0	0,15	0,0012	0,0	0,0
C_2	3.85	0.087	0,45	0,0017	0,0	0,0	0,45	0,0017	0,0	0,0
D_2	8.45	0.138	0,0	0,0	0,018	0,0	0,0	0,0	0,018	0,0
E_2	0.46	0.016	0,55	0,0013	0,0093	0,0056	0,40	0,0019	0,0093	0,0056
F_2	1.40	0.047	0,76	0,00076	0,0087	0,0065	1,2	0,00049	0,0087	0,0065
G_2	4.14	0.072	0,81	0,00084	0,0070	0,0040	0,46	0,0014	0,0070	0,0040
H_2	9.02	0.198	$*10^3$	$*10^6$	$*10^9$	*0,32	$*10^3$	$*10^6$	$*10^9$	*0,32
A_3	0.40	0.016	0,36	0,012	0,030	0,095	0,16	0,020	0,030	0,095
B_3	0.26	0.015	0,041	0,0028	0,0056	0,0037	0,035	0,0053	0,0056	0,0037
C_3	0.31	0.014	2,9	0,044	0,68	0,56	2,5	0,056	0,68	0,56
D_3	0.26	0.015	0,069	0,0084	0,0075	0,011	0,045	0,0098	0,0075	0,011
E_3	0.65	0.020	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
F_3	3.43	0.062	0,0	0,0	0,0088	0,0	0,0	0,0	0,0089	0,0
G_3	0.64	0.031	$*10^3$	$*10^8$	$*10^9$	*10	$*10^3$	$*10^8$	$*10^9$	*10
H_3	0.26	0.0	0,0	0,000031	0,0042	0,0042	0,0	0,000033	0,0042	0,0042
I_3	0.79	0.046	$*10^4$	$*10^8$	$*10^9$	*10	$*10^4$	$*10^8$	$*10^9$	*10
J_3	3.09	0.097	$*10^3$	$*10^7$	$*10^9$	*1,4	$*10^3$	$*10^7$	$*10^9$	*1,4
K_3	3.88	0.115	$*10^3$	$*10^6$	$*10^9$	*0,96	$*10^3$	$*10^7$	$*10^9$	*0,96
L_3	6.95	0.152	$*10^3$	$*10^7$	$*10^9$	*1,2	$*10^3$	$*10^7$	$*10^9$	*1,2
A_4	0.46	0.016	0,058	0,0086	0,024	0,019	0,10	0,0056	0,024	0,018
B_4	0.28	0.015	0,037	0,013	0,0075	0,011	0,037	0,015	0,0075	0,011
C_4	0.27	0.016	0,097	0,0033	0,0056	0,011	0,15	0,0019	0,0056	0,011
D_4	0.20	0.014	0,041	0,030	0,011	0,022	0,060	0,022	0,011	0,022
E_4	0.66	0.014	0,075	0,0	0,0075	0,0	0,15	0,0	0,0075	0,0
F_4	3.42	0.062	0,0	0,0	0,017	0,0	0,0	0,0	0,017	0,0
G_4	0.66	0.029	0,089	0,000085	0,0033	0,0012	0,079	0,000091	0,0033	0,0012
H_4	0.28	0.0	0,0	0,0	0,0042	0,0056	0,0	0,0	0,0042	0,0056
I_4	0.80	0.031	3,6	0,000095	0,0028	0,0048	2,6	0,00013	0,0028	0,0048
J_4	2.40	0.103	$*10^4$	$*10^8$	$*10^9$	$*10^2$	$*10^4$	$*10^8$	$*10^9$	$*10^2$
K_4	3.74	0.093	$*10^3$	$*10^6$	$*10^8$	0,26	$*10^3$	$*10^6$	$*10^8$	*0,26
L_4	5.93	0.143	$*10^3$	$*10^7$	$*10^9$	10	$*10^3$	$*10^7$	$*10^9$	*10
M_4	3.67	0.073	0,19	0,0018	0,014	0,0081	0,15	0,0021	0,014	0,0081

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o $P(A^t)$ incorretamente

TABELA 19

MÉTODO 3.36

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.30	0.031	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.36	0.030	0,25	0,067	0,037	0,21	0,21	0,055	0,027	0,21
C_1	0.41	0.037	3,5	0,74	0,31	13,0	3,2	0,80	0,12	13,0
D_1	0.39	0.031	26,7	22,6	4,9	463,0	20,0	12,9	5,8	463,0
E_1	0.39	0.033	3,0	5,2	1,5	40,1	3,8	3,0	0,61	40,1
F_1	0.44	0.045	204,6	166,2	35,3	7365,3	153,8	125,0	22,9	7365,3
G_1	0.36	0.030	0,69	0,060	0,12	0,56	0,99	0,072	0,11	0,56
H_1	0.28	0.015	0,16	0,050	0,050	0,34	0,12	0,075	0,050	0,34
I_1	0.64	0.107	0,13	0,011	0,014	0,024	0,071	0,0086	0,014	0,024
J_1	1.57	0.300	0,088	0,0085	0,017	0,033	0,083	0,0095	0,017	0,033
K_1	4.94	0.895	0,18	0,0079	0,015	0,028	0,19	0,0085	0,015	0,028
L_1	8.91	1.62	0,22	0,0078	0,014	0,028	0,201	0,0085	0,014	0,028
M_1	10.33	2.022	0,22	0,0078	0,014	0,028	0,201	0,0085	0,014	0,028
N_1	0.28	0.031	36,1	*0,24	50,8	*0,25	28,0	*0,17	50,8	0,25
O_1	0.43	0.043	707,7	*$0,13.10^{3}$	1168,3	*$0,21.10^{3}$	949,4	*$0,19.10^{3}$	1168,2	*$0,21.10^{3}$
P_1	0.56	0.062	1985,3	*$0,10.10^{3}$	20975,6	*$0,16.10^{3}$	1615,5	*$0,73.10^{2}$	20975,6	*$0,16.10^{3}$
Q_1	2.37	0.38	*$0,36.10^{36}$	*$0,17.10^{39}$	*$0,13.10^{38}$	*$0,19.10^{38}$	*$0,58.10^{36}$	*$0,17.10^{39}$	*$0,13.10^{38}$	*$0,19.10^{38}$
A_2	0.36	0.030	0,048	0,016	0,030	0,037	0,045	0,017	0,028	0,037
B_2	1.51	0.048	0,15	0,0010	0,0	0,017	0,15	0,0012	0,0	0,017
C_2	4.46	0.092	0,45	0,0017	0,0	0,0	0,45	0,0017	0,0	0,0
D_2	9.24	0.144	0,15	0,0012	0,0	0,0	0,45	0,0012	0,0	0,0
E_2	0.41	0.015	0,34	0,00095	0,0084	0,011	0,25	0,0013	0,0084	0,011
F_2	1.35	0.031	0,24	0,00023	0,0038	0,011	0,52	0,00012	0,0038	0,011
G_2	4.85	0.09	0,59	0,00054	0,0043	0,021	0,29	0,0011	0,0043	0,021
H_2	11.21	0.293	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
A_3	0.47	0.031	0,11	0,0098	0,019	0,023	0,075	0,016	0,015	0,023
B_3	0.33	0.028	0,15	0,016	0,045	0,033	0,076	0,015	0,045	0,034
C_3	0.33	0.005	0,83	0,0093	0,15	0,24	0,60	0,013	0,15	0,24
D_3	0.30	0.016	0,060	0,0056	0,018	0,0075	0,037	0,0088	0,018	0,0075
E_3	0.68	0.016	0,0	0,00093	0,0	0,0075	0,0	0,0023	0,0	0,0075
F_3	3.94	0.072	0,45	0,0012	0,0	0,017	0,22	0,0023	0,0	0,017
G_3	0.57	0.016	0,24	0,00000074	0,0051	0,012	0,19	0,00000045	0,0051	0,012
H_3	0.26	0.013	0,66	0,00036	0,0	0,0077	0,73	0,00035	0,0	0,0077
I_3	0.77	0.032	2,04	0,00026	0,0029	0,0059	2,6	0,00023	0,0029	0,0059
J_3	3.12	0.139	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
K_3	5.74	0.218	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
L_3	7.19	0.203	*10^{3}	*10^{6}	*0,47	*10^{9}	*10^{3}	*10^{7}	*0,47	*10^{9}
A_4	0.49	0.031	0,046	0,0093	0,017	0,0074	0,089	0,0051	0,013	0,0074
B_4	0.33	0.015	0,071	0,022	0,0037	0,017	0,11	0,015	0,0	0,017
C_4	0.42	0.016	0,48	0,0030	0,0075	0,016	0,79	0,0026	0,0075	0,015
D_4	0.24	0.015	0,015	0,015	0,011	0,0037	0,026	0,015	0,011	0,0037
E_4	0.75	0.025	0,11	0,0047	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
F_4	3.82	0.091	0,0	0,0011	0,0	0,0088	0,0	0,00058	0,0	0,0088
G_4	0.68	0.030	0,48	0,000015	0,0042	0,012	0,63	0,000023	0,0042	0,012
H_4	0.28	0.024	0,13	0,00096	0,0	0,0040	0,15	0,00099	0,0	0,0040
I_4	0.77	0.31	2,9	0,000030	0,0084	0,0072	2,3	0,000051	0,0084	0,0072
J_4	2.43	0.061	0,060	0,000018	0,0038	0,016	1,34	0,000018	0,0038	0,016
K_4	4.66	0.211	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
L_4	7.36	0.264	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
M_4	3.57	0.077	0,12	0,0011	0,0084	0,011	0,14	0,00081	0,0084	0,011

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o P(A) incorretamente

TABELA 20

MÉTODO 6.11

MÉTODO RECURSIVO DE GREVILLE

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.32	0.014	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.30	0.015	0,30	0,091	0,029	0,27	0,39	0,047	0,031	0,27
C_1	0.30	0.0	9,03	3,3	0,13	31,3	8,3	1,9	0,073	31,3
D_1	0.32	0.0	83,4	359,7	52,0	3603,1	71,9	218,2	4,8	3603,1
E_1	0.31	0.0	27,9	83,4	5,3	556,7	32,3	39,2	0.78	556,7
F_1	0.32	0.015	2328,2	1156,9	29,9	9727,8	240,2	565,1	2,5	9727,8
G_1	0.29	0.0	2,8	68,9	0,14	5,04	3,8	0,83	0,061	5,04
H_1	0.28	0.0	0,16	0,034	0,015	0,24	0,13	0,045	0,0056	0,24
I_1	0.60	0.015	0,092	0,0087	0,018	0,027	0,10	0,0071	0,018	0,027
J_1	1.48	0.057	0,11	0,0088	0,016	0,033	0,12	0,0081	0,016	0,033
K_1	4.18	0.191	0,19	0,011	0,020	0,028	0,19	0,011	0,020	0,028
L_1	7.60	0.389	0,19	0,0097	0,023	0,029	0,19	0,011	0,023	0,029
M_1	8.79	0.44	0,19	0,0097	0,022	0,029	0,19	0,011	0,022	0,029
N_1	0.27	0.0	881,9	*56,6	24,5	*11,3	1086,0	*69,3	24,5	*11,3
O_1	0.41	0.007	9650,2	$*0,53.10^5$	129.2	$*0,36.10^3$	8866,8	$*0,57.10^5$	129,2	$*0,36.10^3$
P_1	0.48	0.0070	48162,1	*135911,5	143.2	*1759.7	43101,4	*209172,7	143,3	*1759,7
Q_1	1.45	0.065	57490,4	$*0,16.10^7$	1208,9	*5706,3	*0,13	$*0,24.10^7$	1208,9	*5706,4
A_2	0.29	0.013	0,017	0,0065	0,0075	0,0093	0,017	0,011	0,0037	0,0093
B_2	1.36	0.085	0,0	0,00070	0,0	0,028	0,0	0,0012	0,0	0,028
C_2	4.10	0.238	0,0	0,0	0,0	0,031	0,0	0,0	0,0	0,031
D_2	9.41	0.543	0,30	0,00058	0,0	0,056	0,30	0,00058	0,0	0,056
E_2	0.41	0.0	0,078	0,0075	0,0049	0,085	0,060	0,018	0,0049	[illegible]
F_2	1.45	0.086	0,25	0,0018	0,0043	0,035	0,61	0,00095	0,0043	0,035
G_2	4.26	0.252	0,048	0,017	0,023	0,063	0,037	0,026	0,023	0,063
H_2	10.05	0.552	0,27	0,00015	0,010	0,035	0,16	0,00023	0,010	0,035
A_3	0.41	0.015	0,060	0,0033	0,0037	0,019	0,037	0,0084	0,0037	0,019
B_3	0.35	0.0	0,019	0,0023	0,0047	0,030	0,026	0,0040	0,0037	0,030
C_3	0.41	0.008	0,72	0,034	0,028	0,19	0,66	0,060	0,039	0,19
D_3	0.38	0.015	0,032	0,0047	0,0056	0,015	0,030	0,0051	0,0047	0,015
E_3	0.72	0.015	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
F_3	3.64	0.163	0,0	0,00047	0,0	0,024	0,0	0,0012	0,0	0,024
G_3	0.57	0.016	0,30	0,00027	0,0047	0,018	0,25	0,00076	0,0047	0,018
H_3	0.23	0.015	0,66	0,00042	0,0047	0,00093	0,73	0,00050	0,0047	0,00093
I_3	0.84	0.034	0,48	0,00060	0,0052	0,014	0,57	0,0013	0,0052	0,014
J_3	2.54	0.108	2,63	0,00031	0,027	0,042	1,8	0,00037	0,027	0,042
K_3	3.97	0.154	3,3	0,00025	0,0080	0,039	1,0	0,00046	0,0080	0,039
L_3	7.44	0.316	$*10^4$	$*10^8$	$*10^2$	$*10^{10}$	$*10^4$	$*10^9$	$*10^2$	$*10^{10}$
A_4	0.47	0.0	0,039	0,0079	0,014	0,028	0,089	0,0049	0,013	0,028
B_4	0.33	0.014	0,0037	0,0028	0,0037	0,0093	0,0037	0,0019	0,0037	0,0093
C_4	0.31	0.0	0,0075	0,0023	0,0037	0,035	0,0075	0,0014	0,0019	0,035
D_4	0.26	0.0	0,0	0,0	0,0	0,015	0,0	0,0	0,0	0,015
E_4	0.71	0.030	0,0	0,0018	0,0	0,015	0,0	0,0012	0,0	0,015
F_4	4.01	0.285	0,0	0,000058	0,0	0,036	0,0	0,0058	0,0	0,036
G_4	0.69	0.035	0,022	0,00024	0,0028	0,031	0,015	0,00042	0,0028	0,031
H_4	0.28	0.0	0,0	0,00023	0,0	0,0093	0,0	0,00026	0,0	0,0093
I_4	0.80	0.051	0,24	0,00038	0,0047	0,019	0,25	0,00045	0,0047	[illegible]
J_4	3.05	0.246	0,24	0,00013	0,010	0,018	0,34	0,000091	0,010	0,018
K_4	3.94	0.301	0,42	0,00021	0,0066	0,029	0,20	0,00034	0,0066	0,029
L_4	6.51	0.438	0,83	0,00024	0,0033	0,016	1,3	0,00044	0,0033	0,016
M_4	3.64	0.277	0,0075	0,0026	0,015	0,021	0,0068	0,0031	0,015	0,021

(*) resíduo alto (número com seu valor exato).

NOTA: Os outros números são multiplicado pelo fator 10^{-6}.

TABELA 21

MÉTODO 6.21

A	TEMPO CPU	TEMPO REAL	L_1	L_2	L_3	L_4	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	0.34	0.034	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
B_1	0.43	0.043	0,83	0.078	0,17	0,37	0,85	0,055	0,17	0,37
C_1	0.36	0.029	0,74	0,051	0,86	0,15	0,76	0,043	0,86	0,15
D_1	0.33	0.033	8667,0	15956,1	610,4	1342,8	4852,3	9366,2	610,4	1342,8
E_1	0.35	0.028	133,5	1567,8	45,8	171,7	179,3	808,7	45,8	171,7
F_1	0.37	0.044	21423,3	33550,0	610,4	14221,1	13000,4	17934,1	610,4	14221,2
G_1	0.36	0.031	16,9	0,39	0,76	1,5	17,3	0,37	0,76	1,5
H_1	0.24	0.010	0,89	0,090	0,70	0,20	0,59	0,60	0,70	0,20
I_1	0.68	0.107	0,17	0,017	0,047	0,076	0,20	0,016	0,047	0,076
J_1	1.64	0.272	0,35	0,028	0,043	0,088	0,40	0,024	0,043	0,088
K_1	4.71	0.823	0,32	0,032	0,061	0,088	0,44	0,038	0,061	0,088
L_1	9.32	1.493	0,36	0,028	0,061	0,079	0,44	0,033	0,061	0,079
M_1	11.32	1.587	0,37	0,030	0,072	0,080	0,44	0,039	0,063	0,080
N_1	0.30	0.055	*0,55.10^{4}	*0,88.10^{8}	*0,40.10^{4}	*0,63.10^{8}	*0,60.10^{4}	*0,95.10^{8}	*0,40.10^{4}	*0,63.10^{8}
O_1	0.46	0.045	*0,54.10^{4}	*0,47.10^{8}	*0,37.10^{4}	*0,99.10^{8}	*0,51.10^{4}	*0,71.10^{8}	*0,36.10^{4}	*0,99.10^{8}
P_1	0.56	0.076	*0,13.10^{4}	*0,44.10^{9}	*0,80.10^{3}	*0,21.10^{9}	*0,98.10^{3}	*0,48.10^{9}	*0,80.10^{3}	*0,21.10^{9}
Q_1	1.52	0.249	*0,27.10^{4}	*0,29.10^{10}	*0,19.10^{4}	*0,66.10^{9}	*0,19.10^{4}	*0,20.10^{10}	*0,19.10^{4}	*0,66.10^{9}
A_2	0.32	0.029	*4,0	*0,75	*2,0	*4,5	*6,0	*1,0	*2,0	*4,5
B_2	1.39	0.046	0,22	0,0023	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
C_2	4.14	0.137	0,22	0,00087	0,0	0,0	0,22	0,00087	0,0	0,0
D_2	8.75	0.246	0,30	0,00058	0,0	0,0	0,30	0,00058	0,0	0,0
E_2	0.41	0.016	*10^{2}	*10^{10}	*10	*10^{11}	*10^{2}	*10^{10}	*10	*10^{11}
F_2	1.91	0.151	*10^{39}	*10^{38}	*10^{30}	*10^{38}	*10^{39}	*10^{38}	*10^{30}	*10^{38}
G_2		NÃO	EXECUTOU		F01BXF		IFAIL	= 1		
H_2	20.56	0.598	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
A_3	0.41	0.030	0,060	0,0033	0,0075	0,012	0,045	0,0088	0,0075	0,012
B_3	0.25	0.016	*12,75	*2,06	*1,25	*5,5	*9,0	*5,25	*1,25	*5,5
C_3	0.31	0.016	*10^{4}	*10^{10}	*48,75	*10^{10}	*10^{4}	*10^{11}	*48,75	*10^{10}
D_3	0.28	0.016	0,39	0,023	0,084	0,015	0,31	0,034	0,083	0,015
E_3	0.65	0.015	0,15	0,0012	0,0	0,0	0,075	0,0023	0,0	0,0
F_3	3.59	0.072	0,45	0,0012	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
G_3	1.28	0.179	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
H_3	0.32	0.015	*10^{2}	*0,27	*0,38	*4,9	*10^{3}	*0,38	*0,38	*4,9
I_3	1.42	0.109	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
J_3	2.41	0.061	2,4	0,000058	0,011	0,014	1,6	0,00013	0,011	0,014
K_3	3.74	0.089	2,6	0,0000082	0,017	0,0021	1,8	0,000018	0,017	0,0021
L_3	12.78	0.541	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
A_4	0.63	0.15	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
B_4	0.29	0.016	0,030	0,012	0,0	0,0037	0,044	0,0084	0,0	0,0037
C_4	0.36	0.092	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
D_4	0.21	0.016	0,015	0,015	0,0075	0,0	0,030	0,011	0,0075	0,0
E_4	0.69	0.049	0,11	0,0047	0,0	0,0	0,22	0,0023	0,0	0,0
F_4	3.62	0.183	0,15	0,0012	0,0	0,0	0,30	0,00058	0,0	0,0
G_4	1.38	0.245	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
H_4	0.27	0.013	*1,9	*0,13	*0,11	*10^{2}	*2,2	*0,27	0,11	*10^{2}
I_4	1.55	0.124	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
J_4	5.38	0.32	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}
K_4	3.95	0.241	*10^{4}	*10^{8}	*0,90	*10^{10}	*10^{4}	*10^{8}	0,90	*10^{10}
L_4	6.50	0.614	*10^{5}	*10^{3}	*10^{2}	*10^{4}	*10^{5}	*10^{4}	*10^{2}	*10^{4}
M_4	7.56	0.814	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}	*10^{39}

(*) resíduo alto; ocorrendo quando o método calcula o $r(A^tA)$ incorretamente

BIBLIOGRAFIA

[1] Shinozaki, Nobuo, Sibuya, Massaki and Tanabe, Kunio. Numerical Algorithms for the Moore-Penrose inverse of a matrix: direct methods. *Ann. Inst. Statist. Math.* 24: 193-203, 1972.

[2] Shinozaki, Nobuo, Sibuya, Massaki and Tanabe, Kunio. Numerical Algorithms for the Moore-Penrose inverse of a matrix: iterative methods. *Ann. Inst. Statist. Math.* 24(3): 621-629, 1972.

[3] Noble, Ben and Daniel, James W. *Applied Linear Algebra.* Englewood cliffs, Prentice-Hall, 1977.

[4] Noble, Ben. Methods for computing the Moore-Penrose generalized inverse and related matters, generalized inverses and Applications. *Publication nº32 of the matematics Research Center.* The University of Winconsin--Madison, Academic Press, 1976.

[5] Noble, Ben. A Method for computing the generalized inverse of a matrix. *SIAM Journal Numerical Analysis* 3(4): 582-584, 1966.

[6] Ben-Israel, A. An Iterative method for computing the generalized inverse of an arbitrary matrix. *Math. Comp.* , 19: 452-455, 1965.

[7] Ben-Israel, A. On error bounds for generalized inverses. *SIAM Journal Numerical Analysis*, 3(4):585-592, 1966.

[8] Ben-Israel, A.and Charnes, A. Contributions to the theory of generalized inverses. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11(3):667-699, 1963.

[9] Ben-Israel, A. and Cohen, D. On iterative computation of generalized inverses and associated projections. *SIAM Jour- Numer. Anal.*, 3(3):410-419, 1966.

[10] Ben-Israel, A. and Wersan, S.J.. An elimination method for computing the generalized inverse of an arbitrary complex matrix. *Jour. ACM* 10:532-537, 1963.

[11] Boullion,Thomas L. and Odell, Petrick L.. *Generalized inverse Matrices*. New York, Wiley-Interscience, 1971.

[12] Pringle, R.M. and Rayner A.A.. *Generalized Inverse Matrices with Applications to Statistics*. London,Charles Griffin, 1972.

[13] Rao, C.R. and Mitra, S.K.. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. New York, John Wiley e Sons, Inc., 1971.

[14] Forsythe, George E. and Moler, Cleve B. *Computer Solution of Linear Algebric Systems*. New Jersey, Prentice-Hall, 1967.

[15] Forsythe, George E., Moler, Cleve B. and Malcolm, Michael A.. *Computer Methods for Mathematical Computations*.New Jersey, Prentice-Hall, 1977.

[16] Mardia, K.V., Kent, J.T. and Bibly, J.M.. *Multivariate Analysis*. London, Academic Press, 1979.

[17] Searle, S.R.. *Linear Models*. New York, John Wiley e Sons, Inc., 1971.

[18] Stewart, G.W.. *Introduction to matrix computations*. New

York, Academic Press, 1973.

[19] Soderstrom, T. and Stewart, G.W.. On the Numerical Properties of an iterative method for computing the Moore-Penrose Generalized Inverse. *SIAM J. Numer. Anal.* 11(1): 61-74, 1974.

[20] Dahlquist, Germund and Bjorch, Are. *Numerical Methods*. New Jersey, Prentice-Hall, 1979.

[21] Ralston, Anthony. *A First Course in Numerical Analysis*. New York, McGraw Hill Book Co., 1965.

[22] Lawson, C. L. and Hanson, R. J.. *Solving Least Squares Problems*. Englewood cliffs, Prentice-Hall, 1974.

[23] Issacson, Eugene and Keller, Bishop Herbert. *Analysis of Numerical Methods*. New York, John Willey and Sons, Inc., 1966.

[24] Linhares, Odelar Leite. Classes de Matrizes quadradas para testes de algoritmos computacionais. *Notas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP*, (14): 1985.

[25] Linhares, Odelar Leite. *Racionalização da Método de Givens*. Campinas, IMECC/UNICAMP, 1971.

[26] Hammarling, Sven. A note on modifications to the Givens Plane Rotation. *J. Inst. Maths. Apllcs.* 13:215-218, 1974.

[27] Householder, Alston S.. *Lectures on Numerical Algebra*. Washington, Mathematical Association of América, 1972.

[28] Householder, Alston S.. *The Theory of matrices in Numerical Analysis*. New York, Blaisdell, 1965.

[29] Martinez, José Mário. A bound for the Moore-Penrose pseudoinverse a matrix. *Comment. Math. Univ. Carolinae* 20 (2): 357-360, 1978.

[30] Martinez, José Mário. *Notas sobre transformações de Householder*. Campinas, IMECC/UNICAMP, 1983.

[31] Trao, Nai-Kuan. A note on Implementing the, Householder transformation. *SIAM J. Numer. Anal.* 12(1):53-58,1975.

[32] Penrose, R. A Generalized inverse for matrices. *Proc.Cambridge Philos. Soc.* 51 : 406-413, 1955.

[33] Penrose, R. On best approximate solutions of linear matrix equations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 52:17-19, 1956.

[34] Deuflhard, P and Santter, W. On Rank.Deficient Pseudoinverses. *Linear Algebra and its Applications* 29:91-111, 1980.

[35] Tewarson, R.P.. A computational method for evaluating generalized inverses. *The computer journal* 10:411-413, 1968.

[36] Tewarson, R.P.. A direct method for generalized matrix inversion. *SIAM J. Numer. Anal.* 4(4):499-507, 1967.

[37] Tewarson, R.P.. On computing generalized inverses. *Computing*, 4:139-151, 1969.

[38] Peters, G. and Wilkinson, J.H. The Least Squares. Problem and Pseudo-inverses. *The computer journal* 13(3): 309--316, 1970.

[39] Cho, C.Y., Clive, R.E., Greville, T.N.E., Noble, Ben, Pyle, L.D., Rosen, J.B. and Steward, D.V. *Talks on Generalized inverses and solutions of Large, Approximately singular Linear Systems.* (Mathematics Research Center, The University of Wisconsin, 1966).

[40] Pyle, L.D.. Generalized inverse computations using the gradient projection method. *Jour.* ACM. 11(4):422-428, 1964.

[41] Greville, T.N.E.. The pseudoinverse of a rectangular or singular matrix and its application to the solution of systems of linear equations. *SIAM Review.* 1(1): 38--43, 1959.

[42] Greville, T.N.E.. Some applications of the pseudoinverse of a matrix. *SIAM Review* 2(1):15-22, 1960.

[43] Gregory, R.T. and Karney, D.L.. A *collection of matrices for testing computational algorithms.* New York, John Wiley, 1969.

[44] Rice, John R.. Experiments on Gram-Schmidt Orthogonalization. *Math. Comp.* 20:325-328, 1966.

[45] Bjorck, Are. Solving Linear Least Squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization. *BIT* 7:1 - 21, 1967.

[46] Altman, M. An Optimum Cubically convergent iterative method of inverting a linear bounded operator in Hilbert

Space. *Pacific J. Math.* 10 : 1107 - 1113, 1960.

[47] Petryshyn, W.V.. On generalized inverses and on the uniform convergence of $(1-\beta k)^n$ with application to iterative methods, *Jour. Math. Anal. Appl.* 18 : 417-439 , 1967.

[48] Petryshyn, W.V.. On the inversion of matrices and Linear Operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 : 893-901, 1965.

[49] Hestenes, M.R.. Inversion of matrices by bionthogonalition and related results. *J. SIAM* 6(1):51-90,1958.

[50] Rust, B., Burrus, W.R. and Schneeberger, C.. A simple algorithm for computing the generalized inverse of a matrix. *Comm. ACM* 9(5) : 381-387, 1966.

[51] Germain-Bonne, G.. Calcul de pseudoinverses. *R.F.I.R.O.* 3 (2) : 3-13, 1969.

[52] Kublanovskaya, V.N.. Evalution of a generalized inverse matrix and projector. *Comp. Math. and Math. Phys.* 179--188, 1966.

[53] Whitney, T.M. and Meany, R.K.. Two algorithms related to the method of steepest descent. *SIAM J. Numer. Anal.* 4(1) : 109-118, 1967.

[54] Golub, G.. Numerical Methods for Solving Linear Least Squares Problems. *Numerische Mathematik.* 7 : 206-216 , 1965.

[55] Golub, G. and Reinsch, C.. Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions. *Numer. Math.* 14:403-420 ,

1970.

[56] Golub, G. and Kahan, W.. Calculating the Singular Values and Pseudo-inverses of a matrix. *J. SIAM Numer. Anal.* 2(2):205-224, 1965.

[57] Newman, Morris and Todd, John. The evaluation of matrix inversion Programs. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 6(4): 466-476, 1958.

[58] Garnett III, M. James, Ben-Israel, Adi and Yau, Stephen S.. A Hyperpower iterative method for computing matrix products involving the generalized inverse. *SIAM Jour. Numer. Anal.* 8(1) : 104-109, 1971.

[59] Albrecht, Peter. *Análise Numérica um Curso Moderno.* Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, Editora S. A., 1973.

[60] Conte, S.D.. *Elementos de Análise Numérica.* Porto Alegre, Editora Globo, 1977.

[61] Gentleman, W. Morven. Least Squares Computations by Givens Transformations without Square Roots. *J. Inst. Maths. Applics.* 12:329-336, 1973.

[62] Rath, Wolfgang. Fast Givens Rotations for Orthogonal Similarity Transformations. *Numer. Math.* 40:47-56,1982.

```
C       METODO 1.11
C       ARQUIVO IMP111.FOR

        REAL DP,B,SOMA,AA(20,20),TEMP
        REAL A(20,20),Y(20,20),P(20),L(20,20),U(20,20),X(20,20),E(20,20)
        REAL H(20,20),W(20,20),WT(20,20),G(20,20)
        REAL IMP(20,20),F(20,20),FT(20,20),D(20,20),DT(20,20),C(20,20)
        REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
        INTEGER M,N,R,I,J,K,IA,NIN,NOUT,IFAIL,ITEMP,IL
        DATA NIN,NOUT/20,24/

C       LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA

        READ(NIN,8)M,N
8       FORMAT(2G)
        READ(NIN,9)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
9       FORMAT(4G)

        DO 71 I=1,M
        DO 71 J=1,N
71      AA(I,J)=A(I,J)

        IA=20
        IFAIL=1

C       DECOMPOR A=L*U PELA ELIMINACAO GAUSSIANA

        CALL SETRUN(0)
        CALL F01BTF(N,AA,IA,P,DP,IFAIL,M,L,U,R)


C       CALCULAR O PRODUTO DE L**T*L=H

        DO 140 I=1,R
        DO 140 K=I,R
        SOMA=0.0
        DO 150 J=K,M
150     SOMA=SOMA+L(J,I)*L(J,K)
        H(I,K)=SOMA
140     H(K,I)=SOMA

C       DECOMPOR H PELA DECOMPOSICAO DE CHOLESKY

        CALL F01BXF(R,H,IA,P,IFAIL,F,FT)


C       CALCULAR A INVERSA DE F*F**T

        CALL SIST(R,N,IA,F,FT,Y,E)

C       CALCULAR O PRODUTO DE U*U**T, ONDE U**T E A TRANSPOSTA DE U

        DO 70 I=1,R
        DO 70 K=I,R
        SOMA=0.0
        DO 80 J=K,N
80      SOMA=SOMA+U(I,J)*U(K,J)
        C(I,K)=SOMA
70      C(K,I)=SOMA
```

```
C     METODO 1.14
C     ARQUIVO IMP114.FOR

      REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      REAL AA(20,20)

      REAL L(20,20),V(20,20)
      REAL TEMP,SI(20,20),LI(20,20)
      REAL A(20,20),P(20),IMP(20,20),T(20,20),L(20,20),U(20,20)
      REAL LW(20,20),S(20,20),G(20,20),D(20,20)
      REAL VT(20,20),GT(20,20)
      REAL H(20,20),X(20,20),F(20,20),FI(20,20),Z(20,20),Y(20,20)
      REAL W(20,20),WT(20,20),IB(20,20)
      REAL DP,B,SOMA
      INTEGER I,J,M,N,R,K,NIN,NOUT,IA,IFAIL,ITEMP

      DATA NIN,NOUT/20,23/

C     LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA

      READ(NIN,8)M,N
8     FORMAT(2G)
      READ(NIN,9)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
9     FORMAT(4G)
      IA=20
      DO 71 I=1,M
      DO 71 J=1,N
71    AA(I,J)=A(I,J)

      IFAIL=1


C     DECOMPOR A=LU PELA ELIMINACAO GAUSSIANA


      CALL SETRUN(0)
      CALL F01BTF(N,AA,IA,P,DP,IFAIL,M,L,U,R)


C     CALCULAR T, ONDE U=(S,T)

      DO 20 I=1,R
      K=R
      DO 20 J=1,N-R
      K=K+1
20    T(I,J)=U(I,K)

C     CALCULAR A INVERSA DE S

      CALL RINV(R,N,IA,U,SI)


C     CALCULAR G=SI*T

      DO 440 I=1,R
      DO 440 J=1,N-R
      SOMA=0.0
      DO 550 K=1,R
550   SOMA=SOMA+SI(I,K)*T(K,J)
```

```
440     G(I,J)=SOMA

C       CALCULAR I+GG(T)

        DO 70 I=1,R
        DO 2000 J=I,R
        SOMA=0.0
        DO 80 K=1,N-R
80      SOMA=SOMA+G(I,K)*G(J,K)
        D(I,J)=SOMA
2000    D(J,I)=SOMA
70      D(I,I)=1.0+D(I,I)



C       APLICAR A DECOMPOSICAO DE CHOLESKY EM D

        CALL F01BAF(R,D,IA,P,IFAIL,F,FT)

C       CALCULAR A INVERSA DE F*F**T

        CALL SIST(R,M,IA,F,FT,Z,Y)

        DO 500 J=1,R
        K=R
        DO 500 I=1,M-R
        K=K+1
500     V(I,J)=W(K,J)



C       CALCULAR A INVERSA DE L(R,R)

        DO 1000 J=1,R
        DO 1000 I=J,R
        SOMA=0.0
        DO 1020 K=J,I-1
1020    SOMA=SOMA+L(I,K)*LI(K,J)
        LI(I,J)=-SOMA/L(I,I)
        LI(J,J)=1.0/L(J,J)
1000    CONTINUE

C       CALCULAR H=V*LI

        DO 100 I=1,M-R
        DO 100 J=1,R
        SOMA=0.0
        DO 400 K=J,R
400     SOMA=SOMA+V(I,K)*LI(K,J)
100     H(I,J)=SOMA

C       CALCULAR (I+H(T)H)

        DO 120 I=1,R
        DO 2020 J=I,R
        SOMA=0.0
        DO 130 K=1,M-R
130     SOMA=SOMA+H(K,I)*H(K,J)
```

```
      E(I,J)=SOMA
2020  E(J,I)=SOMA
120   E(I,I)=1.0+E(I,I)

C     APLICAR A DECOMPOSICAO DE CHOLESKY EM E

      CALL F01BXF(R,E,IA,P,IFAIL,W,WT)

C     CALCULAR A INVERSA DE W*W**T

      CALL SIST(R,N,IA,W,WT,IB,X)

C     CALCULAR IMP

      DO 240 J=1,R
      DO 240 I=1,R
      SOMA=0.0
      DO 250 K=1,J
250   SOMA=SOMA+Y(I,K)*SI(K,J)
240   VI(I,J)=SOMA



      DO 260 I=1,R
      DO 260 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 270 K=1,I
270   SOMA=SOMA+GI(I,K)*X(K,J)
260   GI(I,J)=SOMA

      DO 210 I=1,R
      DO 210 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 220 K=1,R
220   SOMA=SOMA+VI(I,K)*GI(K,J)
210   IMP(I,J)=SOMA

      DO 40 I=1,R
      DO 40 J=1,M-R
      SOMA=0.0
      DO 50 K=1,R
50    SOMA=SOMA+IMP(I,K)*H(J,K)
40    S(I,J)=SOMA

      DO 410 I=1,R
      J=R
      DO 410 K=1,M-R
      J=J+1
410   IMP(I,J)=S(I,K)
C     CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE


      DO 290 I=1,N-R
      DO 290 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 300 K=1,R
300   SOMA=SOMA+G(K,I)*IMP(K,J)
290   BW(I,J)=SOMA

      DO 310 J=1,M
```

UNICAMP

```
C       DECOMPOR C PELA DECOMPOSICAO DE CHOLESKY

        CALL F01BAF(R,C,IA,P,IFAIL,W,WT)

C       CALCULAR A INVERSA DE W*W**T

        CALL SYST(P,N,IA,W,WT,X,DT)

C       CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

        DO 210 I=1,R
        DO 210 J=1,R
        SOMA=0.0
        DO 210 K=1,R
        SOMA=SOMA+DT(I,K)*E(K,J)
210     H(I,J)=SOMA
        DO 160 I=1,N
        IL=I
        DO 160 J=1,R
        SOMA=0.0
        IF(I.GT.P) IL=R
        DO 170 K=1,IL
170     SOMA=SOMA+D(K,I)*H(K,J)
160     C(I,J)=SOMA

        DO 180 I=1,N
        DO 180 J=1,M
        IL=J
        SOMA=0.0
        IF(J.GT.R) IL=R
        DO 190 K=1,IL
190     SOMA=SOMA+C(I,K)*L(J,K)
180     IMP(I,J)=SOMA
        CALL RUNTIM(ITEMP)
        TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3

C       CALCULO DOS RESIDUOS PELA NORMA UM

        CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C       CALCULO DOS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

        CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)


C       IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE

        WRITE(NOUT,1111)R
1111    FORMAT(' POSTO DE A=',G)
        WRITE(NOUT,111)TEMP
111     FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
        WRITE(NOUT,14)
14      FORMAT('    METODO 1.11')
        WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4
21      FORMAT(' L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,' L4=',G)
        WRITE(NOUT,22)R1,R2,R3,R4
22      FORMAT(' R1=',G,' R2=',G,' R3=',G,' R4=',G)
        STOP
```

UNICAMP

END

UNICAMP

```
      I=R
      DO 310 K=1,N-R
      I=I+1
310   IMP(I,J)=LW(K,J)
      CALL RUNTIM(ITEMP)
      TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3

C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

      CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,E,D,F,G)


C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

      CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,T,U,W,X)

C     IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE

      WRITE(NOUT,111)TEMP
111   FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS= ',E15.7)
      WRITE(NOUT,11)R
11    FORMAT(' METODO 1.14'//' POSTO DE A=',G)
      WRITE(NOUT,13)L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
13    FORMAT('L1=',G,'L2=',G,'L3=',G,'L4=',G,
     1 'R1=',G,'R2=',G,'R3=',G,'R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C       METODO 1.15
C       ARQUIVO IMP115.FOR

        INTEGER INC(20),IRANK,TEMP
        REAL A(20,20),IMP(20,20),AIJMAX(20),D(20),Z
        REAL AA(20,20)
        REAL E(20,20),L(20,20),X(20,20),LI(20,20)
        REAL CXIX,X02AAF,U(20,20),HC(20),V(20,20),C(20)
        REAL EPS,T(20,20),SI(20,20),Y(20,20),G(20,20),S(20,20)
        REAL H(20,20),W(20,20),DP,B,SOMA,P(20),Q(20,20),QT(20,20)
        REAL*8 R1,R2,R3,R4,L1,L2,L3,L4
        REAL DI(20,20),F(20,20),FT(20,20)
        INTEGER IA,IFAIL,NIN,NOUT,I,J,K,R,M,N,ITEMP

        DATA NIN,NOUT,CXIX/20,22,119.0/

C       LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA

        READ(NIN,8)M,N
8       FORMAT(2G)
        READ(NIN,26)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
26      FORMAT(4G)

        IA=20
        IFAIL=1
        EPS=X02AAF(XXXX)
        Z=CXIX*EPS
        DO 71 I=1,M
        DO 71 J=1,N
71      AA(I,J)=A(I,J)

C       APLICAR A ELIMINACAO GAUSSIANA EM A=L*U

        CALL SETRUN(R)
        CALL F01BIF(N,AA,IA,P,DP,IFAIL,M,L,U,R)

C       CALCULAR T, ONDE U=[P,T]

        DO 20 I=1,R
        K=R
        DO 20 J=1,N-R
        K=K+1
20      T(I,J)=U(I,K)

C       CALCULAR A INVERSA DE P=SI

        CALL RINV(R,N,IA,U,SI)

C       CALCULAR G=SI*T

        DO 170 I=1,R
        DO 170 J=1,N-R
        SOMA=0.0
        DO 180 K=1,R
180     SOMA=SOMA+SI(I,K)*T(K,J)
170     G(I,J)=SOMA

C       CALCULAR Y, ONDE Y**T=[I,G]

        DO 90 I=1,R
```

```
      DO 90 J=1,R
      Y(I,J)=0.0
90    Y(I,I)=1.0

      DO 100 J=1,R
      K=R
      DO 100 I=1,N-R
      K=K+1
100   Y(K,J)=G(J,I)

C     APLICAR A TRANSFORMACAO DE HOUSEHOLDER EM Y=S*U

      CALL F01BKF(N,R,Z,Y,IA,D,AIJMAX,INC,IRANK,IFAIL,HC,V,C,U,S)

C     CALCULAR L

      DO 200 I=1,N
      DO 200 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 300 K=1,R
300   SOMA=SOMA+S(I,K)*S(J,K)
200   L(I,J)=SOMA

C     CALCULAR X

      DO 500 J=1,R
      K=R
      DO 500 I=1,N-R
      K=K+1
500   X(I,J)=L(K,J)

C     CALCULAR A INVERSA DE L(R,R)

      DO 1000 J=1,R
      DO 1000 I=J,R
      SOMA=0.0
      DO 1100 K=J,I-1
1100  SOMA=SOMA+L(I,K)*LI(K,J)
      LI(I,J)=-SOMA/L(I,I)
      LI(J,J)=1.0/L(J,J)
1000  CONTINUE

C     CALCULAR H=X*LI

      DO 1020 I=1,N-R
      DO 1020 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 1030 K=J,R
1030  SOMA=SOMA+X(I,K)*LI(K,J)
1020  H(I,J)=SOMA

C     CALCULAR W

      DO 70 I=1,R
      DO 70 J=1,R
      W(I,J)=0.0
70    W(I,I)=1.0

      DO 80 J=1,R
      K=R
```

```
      DO 80 I=1,M-P
      K=K+1
80    W(K,J)=H(I,J)
C     APLICAR A TRANSFORMACAO DE HOUSEHOLDER EM W=Q*U
      CALL F01BKF(M,R,Z,W,IA,D,AIJMAX,INC,IRANK,IFAIL,HC,V,C,U,Q)
C     CALCULAR A TRANSPOSTA DE Q
      DO 35 I=1,M
      DO 35 J=1,R
35    QT(J,I)=Q(I,J)
C     CALCULAR DI
      DO 45 I=1,R
      DO 45 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 46 K=1,R
46    SOMA=SOMA+W(I,K)*QT(K,J)
45    DI(I,J)=SOMA
C     CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE
      DO 470 I=1,N
      DO 470 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 480 K=1,J
480   SOMA=SOMA+E(I,K)*SI(K,J)
470   F(I,J)=SOMA
      DO 41 I=1,R
      DO 41 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 42 K=1,I
42    SOMA=SOMA+LI(I,K)*DI(K,J)
41    FI(I,J)=SOMA
      DO 43 I=1,N
      DO 43 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 44 K=1,R
44    SOMA=SOMA+F(I,K)*FI(K,J)
43    IMP(I,J)=SOMA
      CALL RONTIM(ITEMP)
      TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3
C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM
      CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,T,U,V,E)
C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA
      CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,E,F,G,H)
C     IMPRIMIR OS RESULTADOS
      WRITE(NOUT,111)TEMP
111   FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
      WRITE(NOUT,11)R
```

```
11    FORMAT(' METODO 1.15'//'POSIÇÃO DE A=',G)
      WRITE(NOUT,12)L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
12    FORMAT('L1=',G,'L2=',G,'L3=',G,'L4=',G,
     1 'R1=',G,'R2=',G,'R3=',G,'R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C     METODO 3.31
C     ARQUIVO IMP331.FOR

      REAL P(20),W(20,20),X(20,20)
      REAL G(20,20),D(20,20),TEMP
      REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      INTEGER ITEMP,L IK,R
      REAL A(20,20),Q(20,20),U(20,20),C(20,20)
      REAL F(20,20),FT(20,20),Y(20,20)
      REAL IMP(20,20),SOMA
      INTEGER M,N,K,J,I,NIN,NOUT,IA,IFAIL

      DATA NIN,NOUT/20,22/


C     LEITURA EIMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA
      READ(NIN,8)M,N
8     FORMAT(2G)
      READ(NIN,26)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
26    FORMAT(4G)
      IA=20
      IFAIL=1

C     APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM A=Q*U


      CALL SETRUN(0)
      CALL GSM(M,N,IA,A,W,X,Q,U,R)


C     CALCULAR U*U**T


      DO 20 I=1,R
      DO 20 K=I,R
      SOMA=0.0
      DO 30 J=K,N
30    SOMA=SOMA+U(I,J)*U(K,J)
      C(I,K)=SOMA
20    C(K,I)=SOMA




C     APLICAR A DECOMPOSICAO DE CHOLESKY EM C=F*F**T


      CALL F01BAF(R,C,IA,P,IFAIL,F,FT)

C     CALCULAR A INVERSA DE F*F**T=G

      CALL SIST(R,N,IA,F,FT,Y,G)

C     CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE
      DO 330 I=1,N
      L=I
      DO 330 J=1,R
      SOMA=0.0
      IF(I.GT.R)L=R
      DO 130 K=1,L
```

```
330     SOMA=SOMA+U(K,I)*G(K,J)
330     D(I,J)=SOMA


        DO 310 I=1,N
        DO 310 J=1,M
        SOMA=0.0
        DO 320 K=1,R
320     SOMA=SOMA+D(I,K)*U(J,K)
310     IMP(I,J)=SOMA
        CALL RUNTIM(ITEMP)
        TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

        CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

        CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)

C       IMPRIMIR A INVERSA DE MOORE-PENROSE


        WRITE(NOUT,111)TEMP
111     FORMAT('TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
        WRITE(NOUT,13)R
13      FORMAT('    METODO 3.31'//' POSTO DE A= ',G)
        WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4
21      FORMAT('L1=',G,'L2=',G,'L3=',G,'L4=',G)
        WRITE(NOUT,22)R1,R2,R3,R4
22      FORMAT('R1=',G,'R2=',G,'R3=',G,'R4=',G)
        STOP
        END
```

```
C       METODO 3.32
C       ARQUIVO INP332.FOR

        REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
        REAL P(20,20),TEMP
        REAL A(20,20),INP(20,20),AIJMAX(20),D(20)
        REAL CXIX,X02AAF,U(20,20),HC(20),V(20,20)
        REAL C(20),S(20,20),W(20,20),X(20,20),Q(20,20)
        REAL DI(20,20),CI(20,20),PI(20,20),Z(20,20),T
        REAL B(20,20),E(20,20),F(20,20),G(20,20)
        INTEGER R,I,J,K,IA,IFAIL,IRANK,M,N,INC(20),ITEMP

        DATA NIN,NOUT,CXIX/20,23,119.0/

C       LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA

        READ(NIN,8)M,N
8       FORMAT(2G)
        READ(NIN,20)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
20      FORMAT(4G)

        IA=20
        IFAIL=1
        EPS=X02AAF(XXXX)
        T=CXIX*EPS

C       APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM A=Q*U
        CALL SETRUN(0)
        CALL GSM(M,N,IA,A,W,X,Q,U,R)
C       CALCULAR A TRANSPOSTA DE U

        DO 20 I=1,R
        DO 20 J=1,N
20      Z(J,I)=U(I,J)

C       APLICAR A TRANSFORMACAO DE HOUSEHOLDER EM Z=S*P
        CALL F01BKF(N,R,T,Z,IA,D,AIJMAX,INC,IRANK,IFAIL,HC,V,C,P,S)

C       CALCULAR A INVERSA DE P=PI


        CALL RINV(R,N,IA,P,PI)


C       CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

        DO 70 I=1,M
        DO 70 J=1,R
        SOMA=0.0
        DO 80 K=1,J
80      SOMA=SOMA+Q(I,K)*PI(K,J)
70      CI(I,J)=SOMA

        DO 90 I=1,M
        DO 90 J=1,R
90      DI(J,I)=CI(I,J)

        DO 200 I=1,N
        DO 200 J=1,M
        SOMA=0.0
```

```
      DO 300 K=1,R
300   SOMA=SOMA+S(I,K)*DI(K,J)
200   IMP(I,J)=SOMA
      CALL RUNTIM(ITEMP)
      TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3

C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

      CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,B,E,F,G)

C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

      CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,B,E,F,G)

C     IMPRIMIR OS RESULTADOS

      WRITE(NOUT,111)TEMP
111   FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
      WRITE(NOUT,12)R
12    FORMAT(' METODO 3.32'/' POSTO DE A=',G)
      WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
21    FORMAT('L1=',G,'L2=',G,'L3=',G,'L4=',G,
     1 'R1=',G,'R2=',G,'R3=',G,'R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C       METODO 3.33
C       ARQUIVO IMP333.FOR

        REAL A(20,20),T(20,20),U(20,20),Q(20,20)
        REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
        REAL C(20,20),G(20,20),F(20,20)
        REAL DT(20,20),Z(20,20),V(20,20),D(20,20)
        REAL W(20,20),X(20,20)
        REAL IMP(20,20),SOMA,TEMP,SI(20,20)
        INTEGER  R,M,N,I,J,K,IK,NIN,NOUT,IA,ITEMP


        DATA NIN,NOUT/20,21/

C       LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA

        READ(NIN,8)M,N
8       FORMAT(2G)
        READ(NIN,20)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
20      FORMAT(3G)


        IA=20
C       APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM A=Q*U
        CALL SETRUN(0)
        CALL GSM(M,N,IA,A,W,X,Q,U,R)

C       CALCULAR A TRANSPOSTA DE U

        DO 20 I=1,R
        DO 20 J=1,N
20      T(J,I)=U(I,J)



C       CALCULAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM A=Q*U
        CALL GSM(N,R,IA,T,W,X,Z,V,IK)

C       CALCULAR A INVERSA DE V=SI

        CALL RINV(R,R,IA,V,SI)

C       CALCULAR D=Q*SI

        DO 100 I=1,M
        DO 100 J=1,R
        SOMA=0.0
        DO 110 K=1,J
110     SOMA=SOMA+Q(I,K)*SI(K,J)
100     D(I,J)=SOMA

C       CALCULAR A TRANSPOSTA DE D

        DO 30 I=1,M
        DO 30 J=1,R
30      DT(J,I)=D(I,J)

C       CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

        DO 200 I=1,N
```

UNICAMP

```
      DO 200 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 300 K=1,R
300   SOMA=SOMA+Z(I,K)*DT(K,J)
200   IMP(I,J)=SOMA
      CALL RONTIM(ITEMP)
      TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3




C     CALCULO DOS RESIDUOS PELA NORMA UM

      CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C     CALCULO DOS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

      CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)

C     IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE

      WRITE(NOUT,111)TEMP
111   FORMAT('TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
      WRITE(NOUT,11)R
11    FORMAT('   METODO 3.33 '//'POSTO DE A=',G)
      WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4
21    FORMAT(' L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,' L4=',G)
      WRITE(NOUT,22)R1,R2,R3,R4
22    FORMAT(' R1=',G,' R2=',G,' R3=',G,' R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C     METODO 3.34
C     ARQUIVO IMP334.FOR
C
      REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      REAL A(20,20),IMP(20,20),Q(20,20),U(20,20),T(20,20)
      REAL G(20,20),Z(20,20),E(20,20),D(20,20),Y(20,20)
      REAL F(20,20),FI(20,20),H(20,20),QT(20,20)
      REAL SOMA,W(20,20),X(20,20),P(20),C(20,20)
      REAL SI(20,20),TEMP
      INTEGER M,N,I,J,K,R,IK,IA,NIN,NOUT,IFAIL,ITEMP


      DATA NIN,NOUT/20,21/

C     LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADAS


      READ(NIN,8)M,N
8     FORMAT(2G)
      READ(NIN,26)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
26    FORMAT(4G)

      IA=20
      IFAIL=1


C     APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM A=Q*U


      CALL SETRUN(0)
      CALL GSM(M,N,IA,A,W,X,Q,U,R)



C     CALCULAR Q**T

      DO 200 I=1,M
      DO 200 J=1,R
200   QT(J,I)=Q(I,J)


C     CALCULAR T, ONDE U=[S,T]

      DO 20 I=1,R
      K=R
      DO 20 J=1,N-R
      K=K+1
20    T(I,J)=U(I,K)

C     CALCULAR A INVERSA DE S=S1


      CALL RINV(R,U,IA,U,SI)




C     CALCULAR G=SI*T

      DO 160 I=1,R
```

```
      DO 160 J=1,N-R
      SOMA=0.0
      DO 170 K=1,R
170   SOMA=SOMA+SI(I,K)*I(K,J)
160   G(I,J)=SOMA


C     CALCULAR (I+G*G**T)

      DO 70 I=1,R
      DO 1000 J=I,R
      SOMA=0.0
      DO 80 K=1,N-R
80    SOMA=SOMA+G(I,K)*G(J,K)
      E(I,J)=SOMA
1000  E(J,I)=SOMA
70    E(I,I)=1.0+E(I,I)


C     APLICAR A DECOMPOSICAO DE CHOLESKY EM E=F*F**T


      CALL F01BXF(R,E,IA,P,IFAIL,F,FT)


C     CALCULAR A INVERSA DE F*F**T

      CALL SIST(R,N,IA,F,FT,H,Z)




C     CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

      DO 450 I=1,R
      DO 450 J=1,R
450   C(I,J)=Z(I,J)


      IL=R
      DO 290 I=1,N-R
      IL=IL+1
      DO 290 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 300 K=1,R
300   SOMA=SOMA+G(K,I)*Z(K,J)
290   C(IL,J)=SOMA

      DO 240 I=1,N
      DO 240 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 250 K=1,J
250   SOMA=SOMA+C(I,K)*SI(K,J)
240   D(I,J)=SOMA

      DO 260 I=1,N
      DO 260 J=1,M
```

```
      SOMA=0.0
      DO 270 K=1,R
270   SOMA=SOMA+D(I,K)*QT(K,J)
260   IMP(I,J)=SOMA
      CALL RUNTIM(ITEMP)
      TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3

C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

      CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

      CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)

C     IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE


      WRITE(NOUT,111)TEMP
111   FORMAT(//' TEMPO EM SEGUNDOS = 'E15.7)
      WRITE(NOUT,11)R
11    FORMAT('    METODO 3.34 ',//,'POSTO DE A=',G)
      WRITE(NOUT,14)L1,L2,L3,L4
14    FORMAT(' L1=',G,'L2=',G,'L3=',G,'L4='G)
      WRITE(NOUT,15)R1,R2,R3,R4
15    FORMAT('R1=',G,'R2=',G,'R3=',G,'R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C     METODO 3.35
C     ARQUIVO IMP335.FOR

      REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      REAL A(20,20),IMP(20,20),AIJMAX(20),D(20)
      REAL CXIX,X02AAF,U(20,20),HC(20),V(20,20),C(20)
      REAL QT(20,20),TEMP
      REAL S(20,20),W(20,20),X(20,20),Q(20,20)
      REAL T(20,20),G(20,20),Y(20,20),E(20,20),VI(20,20)
      REAL CI(20,20),H(20,20),Z
      INTEGER R,I,J,K,IA,IFAIL,IRANK,M,N,INC(20),ITEMP

      DATA NIN,NOUT,CXIX/20,23,119.0/

C     LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA

      READ(NIN,8)M,N
8     FORMAT(2G)

      READ(NIN,26)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
26    FORMAT(4G)
      IA=20
      IFAIL=1
      EPS=X02AAF(XXXX)
      Z=CXIX*EPS

C     APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM A=Q*U

      CALL SETRUN(0)
      CALL GSM(M,N,IA,A,W,X,Q,U,R)

C     CALCULAR Q**T

      DO 35 I=1,M
      DO 35 J=1,R
35    QT(J,I)=Q(I,J)

C     CALCULAR T, ONDE U=[P,T]

      DO 20 I=1,R
      K=R
      DO 20 J=1,N-R
      K=K+1
20    T(I,J)=U(I,K)

C     CALCULAR P**(-1)=VI

      CALL RINV(R,N,IA,U,VI)
C     CALCULAR G=P**(-1)*T

      DO 70 I=1,R
      DO 70 J=1,N-R
      SOMA=0.0
      DO 80 K=I,R
80    SOMA=SOMA+VI(I,K)*T(K,J)
70    G(I,J)=SOMA
```

```
C       CALCULAR Y, ONDE Y**T=[I,G]

        DO 90 I=1,R
        DO 90 J=1,R
        Y(I,J)=0.0
90      Y(I,I)=1.0

        DO 100 J=1,R
        K=R
        DO 100 I=1,N-R
        K=K+1
100     Y(K,J)=G(J,I)

C       APLICAR A TRANSFORMACAO DE HOUSEHOLDER EM Y=S*U

        CALL F01BKF(N,R,Z,Y,IA,D,AIJMAX,INC,IRANK,IFAIL,HC,V,C,U,S)

C       CALCULAR E

        DO 200 I=1,N
        DO 200 J=1,R
        SOMA=0.0
        DO 300 K=1,R
300     SOMA=SOMA+S(I,K)*U(J,K)
200     E(I,J)=SOMA


C       CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

        DO 400 I=1,N
        DO 400 J=1,R
        SOMA=0.0
        DO 410 K=1,J
410     SOMA=SOMA+E(I,K)*VI(K,J)
400     CI(I,J)=SOMA

        DO 420 I=1,N
        DO 420 J=1,M
        SOMA=0.0
        DO 430 K=1,R
430     SOMA=SOMA+CI(I,K)*QI(K,J)
420     IMP(I,J)=SOMA
        CALL RUNTIM(ITEMP)
        TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3


C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

        CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,B,E,I,G)

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

        CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,B,E,I,G)

C       IMPRIMIR OS RESULTADOS

        WRITE(NOUT,111)TEMP
111     FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
```

```
      WRITE(NOUT,12)R
12    FORMAT(' METODO 3.35 '//'POSTO DE A=',G)
      WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
21    FORMAT('L1=',G,'L2=',G,'L3=',G,'L4=',G,
     1 'R1=',G,'R2=',G,'R3=',G,'R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C       METODO 3.36
C       ARQUIVO IMP336.FOR

        REAL W(20,20),X(20,20),ITEMP,SI(20,20)
        REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
        REAL QT(20,20),C(20,20)
        REAL A(20,20),IMP(20,20),Q(20,20),U(20,20)
        REAL SOMA,T(20,20),G(20,20),D(20,20)
        REAL Y(20,20),E(20,20),F(20,20),V(20,20)
        INTEGER M,N,R,I,J,K,IA,NIN,NOUT,IK,ITEMP

        DATA NIN,NOUT/20,24/

C       LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA

        READ(NIN,8)M,N
8       FORMAT(2G)

        READ(NIN,26)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
26      FORMAT(4G)
        IA=20



C       APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM A=Q*U


        CALL SETRUN(0)
        CALL GSM(M,N,IA,A,W,X,Q,U,R)



C       CALCULAR Q**T


        DO 200 I=1,M
        DO 200 J=1,R
200     QT(J,I)=Q(I,J)


C       CALCULAR T, ONDE U=[S,T]


        DO 20 I=1,R
        K=R
        DO 20 J=1,N-R
        K=K+1
20      T(I,J)=U(I,K)

C       CALCULAR A INVERSA DE S=SI

        CALL RINV(R,N,IA,U,SI)


C       CALCULAR G, ONDE G=S(-1)*T


        DO 40 I=1,R
        DO 40 J=1,N-R
```

```
      SOMA=0.0
      DO 60 K=1,R
60    SOMA=SOMA+SI(I,K)*T(K,J)
40    G(I,J)=SOMA

C     CALCULAR Y, ONDE Y**T=[I,G]

      DO 70 I=1,R
      DO 70 J=1,R
      Y(I,J)=0.0
70    Y(I,I)=1.0

      DO 80 J=1,R
      K=R
      DO 80 I=1,N-R
      K=K+1
80    Y(K,J)=G(J,I)



C     APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM Y=F*V

      CALL GSM(N,R,IA,Y,W,X,F,V,IK)



C     CALCULAR E

      DO 90 I=1,N
      DO 90 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 100 K=1,R
100   SOMA=SOMA+F(I,K)*F(J,K)
90    E(I,J)=SOMA

C     CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

      DO 190 I=1,N
      DO 190 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 130 K=1,J
130   SOMA=SOMA+E(I,K)*SI(K,J)
190   D(I,J)=SOMA

      DO 110 I=1,N
      DO 110 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 120 K=1,R
120   SOMA=SOMA+D(I,K)*UT(K,J)
110   IMP(I,J)=SOMA
      CALL RUNTIM(ITEMP)
      TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3
```

```
C
C      METODO 5.11
C      ARQUIVO IMP011.FOR

C      METODO RECURSIVO DE GREVILLE
C      ESSE METODO CALCULA A INVERSA DE MOORE-PENROSE
C      DE UMA MATRIZ REAL QUALQUER
C
       REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
       REAL L(100,100),H(100,100),F(100,100),G(100,100)
       REAL SOMA,EPS,TEMP
       REAL A(100,100),IMP(100,100),IMPV(100,100),C(100),D(100),B(100)
       INTEGER M,N,I,J,K,L,IR,IW,ITEMP
       DATA IR,IW/20,22/
       DATA TOL/0.000001/


C      LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA

       READ(IR,5)M,N
5      FORMAT(2G)

       READ(IR,555)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
555    FORMAT(4G)
       IA=100


C      IMPRESSAO DA MATRIZ ORIGINAL

C      CALCULO DE A(1)+

       CALL SETRUN(0)
       SOMA=0.0
       DO 30 K=1,M
30     SOMA=SOMA+A(K,1)*A(K,1)
       XK=1./SOMA
       DO 40 K=1,M
40     IMP(1,K)=XK*A(K,1)



       L=0
       DO 50 I=2,N

C      CALCULO DE D(I)=A(I-1)+*A(I)

       L=L+1
       DO 60 J=1,L
       SOMA=0.0
       DO 70 K=1,M
70     SOMA=SOMA+IMP(J,K)*A(K,I)
60     D(J)=SOMA



C      CALCULO DE C(I)=A(I)-A(I-1)D(I)

       DO 80 K=1,M
       SOMA=0.0
       DO 90 J=1,L
```

```
C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

      CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

      CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)


C     IMPRIMIR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

      WRITE(NOUT,111)TEMP
111   FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
      WRITE(NOUT,11)
11    FORMAT( '     METODO 3.35')
      WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4
21    FORMAT(  'L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,' L4=',G)
      WRITE(NOUT,22)R1,R2,R3,R4
22    FORMAT(' R1=',G,' R2=',G,' R3=',G,' R4=',G)
      STOP
      END
```

```
90        SOMA=SOMA+A(K,J)*D(J)
80        C(K)=A(K,I)-SOMA


C         TESTAR C(I) E CALCULAR B(I)

          DO 100 K=1,M
          IF(ABS(C(K)).GT.TOL)GOTO 110
100       CONTINUE

C         CALCULAR B(K) PARA C(K) IGUAL A ZERO

          SOMA=0.0
          DO 200 J=1,L
200       SOMA=SOMA+D(J)*D(J)
          XX=1./(SOMA+1.0)
          DO 205 K=1,M
          SOMA=0.0
          DO 210 J=1,L
210       SOMA=SOMA+D(J)*IMP(J,K)
205       B(K)=XX*SOMA
          GOTO 131

C         CALCULAR B(K) PARA C(K) DIFERENTE DE ZERO

110       SOMA=0.0
          DO 120 K=1,M
120       SOMA=SOMA+C(K)*C(K)
          XX=1./SOMA
          DO 130 K=1,M
130       B(K)=XX*C(K)

C         CALCULO DE A(I)+

131       DO 140 J=1,L
          DO 140 K=1,M
140       IMPV(J,K)=IMP(J,K)-(D(J)*B(K))


          DO 150 K=1,M
150       IMPV(I,K)=B(K)
          DO 300 J=1,I
          DO 300 K=1,M
300       IMP(J,K)=IMPV(J,K)
50        CONTINUE

          CALL RUNTIM(ITEMP)
          TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3
C         CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

          CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,E,H,F,G)

C         CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

          CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,E,H,F,G)
```

```
      WRITE(IW,111)TEMP
111   FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS = ',E15.7)
      WRITE(IW,8)
8     FORMAT(' METODO RECURSIVO DE GRENVILLE (6.11)')
      WRITE(IW,21)L1,L2,L3,L4
21    FORMAT(' L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,' L4=',G)
      WRITE(IW,22)R1,R2,R3,R4
22    FORMAT(' R1=',G,' R2=',G,'R3=',G,' R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C       METODO 6.21
C       ARQUIVO IMP621.FOR


        REAL A(20,20),P(20),F(20,20),U(20,20),C(20,20)
        REAL IMP(20,20),D(20,20)
        REAL E(20,20),Y(20,20),FT(20,20),G(20,20),L(20,20)
        REAL DP,B,SOMA,TEMP
        REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
        INTEGER I,J,M,N,R,K,NIN,NOUT,IA,IFAIL,IL,ITEMP

        DATA NIN,NOUT/20,22/

C       LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA


        READ(NIN,8)M,N
8       FORMAT(2G)
        READ(NIN,9)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
9       FORMAT(4G)


        IA=20
        IFAIL=1

C       CALCULAR A**T*A=C


        CALL SETRUN(0)
        DO 20 I=1,N
        DO 20 J=I,N
        SOMA=0.0
        DO 30 K=1,M
30      SOMA=SOMA+A(K,I)*A(K,J)
        C(I,J)=SOMA
20      C(J,I)=SOMA


C       APLICAR A ELIMINACAO GAUSSIANA EM C=L*U

        CALL F01BPF(N,C,IA,P,DP,IFAIL,N,L,U,R)

C       CALCULAR A INVERSA DE L(R,R)

        DO 80 J=1,R
        DO 80 I=J,R
        SOMA=0.0
        DO 90 K=J,I-1
90      SOMA=SOMA+L(I,K)*E(K,J)
        E(I,J)=-SOMA/L(I,I)
        E(J,J)=1.0/L(J,J)
80      CONTINUE


C       CALCULAR U*U**T=G

        DO 140 I=1,R
        DO 140 K=I,R
        SOMA=0.0
        DO 150 J=K,N
```

```
150     SOMA=SOMA+U(I,J)*U(K,J)
        G(I,K)=SOMA
140     G(K,I)=SOMA

C       APLICAR A DECOMPISICAO DE CHOLESKY EM G=F*F**T

        CALL F01BXF(R,G,IA,P,IFAIL,F,FT)

C       CALCULAR A INVERSA DE F*F**T

        CALL SIST(R,N,IA,F,FT,Y,0)


C       CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE
        DO 100 I=1,N
        IL=I
        DO 100 J=1,R
        SOMA=0.0
        IF(I.GT.R)IL=R
        DO 110 K=1,IL
110     SOMA=SOMA+U(K,I)*D(K,J)
100     G(I,J)=SOMA

        DO 300 I=1,N
        DO 300 J=1,R
        SOMA=0.0
        DO 120 K=1,R
120     SOMA=SOMA+G(I,K)*E(K,J)
300     Y(I,J)=SOMA


        DO 170 I=1,N
        DO 170 J=1,M
        SOMA=0.0
        DO 180 K=1,R
180     SOMA=SOMA+Y(I,K)*A(J,K)
170     IMP(I,J)=SOMA
        CALL RUNTIM(ITEMP)
        TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3


C
C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM
C
        CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)
C
C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

        CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)
C       IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE

        WRITE(NOUT,111)TEMP
111     FORMAT('TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
        WRITE(NOUT,13)
13      FORMAT('  METODO 6.21  ',//)
        WRITE(NOUT,11)R
11      FORMAT(' POSTO DE A =',G)
        WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4
21      FORMAT('L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,' L4=',G)
        WRITE(NOUT,22)R1,R2,R3,R4
```

```
72    FORMAT('R1=',G,' R2=',G,' R3=',G,' R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C     METODO 6.22
C     ARQUIVO IMP622.FOR

      REAL A(20,20),D(20,20),IMP(20,20),J(20,20),C(20,20)
      REAL G(20,20),TEMP
      REAL W(20,20),X(20,20)
      REAL Q(20,20),F(20,20),FT(20,20),Y(20,20),E(20,20),P(20)
      REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      INTEGER M,N,K,I,J,NIN,NOUT,IA,IFAIL,IK,R,L,ITEMP

      DATA NIN,NOUT/20,21/

C     LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA


      READ(NIN,8)M,N
8     FORMAT(2G)
      READ(NIN,9)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
9     FORMAT(1G)

      IA=20
      IFAIL=1


C     CALCULAR A**T=D


      CALL SZERO(D)
      DO 101 I=1,N
      DO 101 J=1,N
101   D(J,I)=A(I,J)


C     APLICAR A ORTOGONALIZACAO DE GRAM-SCHMIDT EM D=Q*U


      CALL GSM(N,M,IA,D,W,X,Q,U,R)

C     CALCULAR U*U**T=C


      DO 20 I=1,R
      DO 20 K=I,R
      SOMA=0.0
      DO 30 J=K,M
30    SOMA=SOMA+U(I,J)*U(K,J)
      C(I,K)=SOMA
20    C(K,I)=SOMA



C     APLICAR A DECOMPOSICAO DE CHOLESKY EM C=F*F**T


      CALL F01BXF(R,C,IA,P,IFAIL,F,FT)

C     CALCULAR A INVERSA DE F*F**T

      CALL SIST(R,N,IA,F,FT,Y,E)
```

```
      CALCULAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

      DO 40 I=1,M
      DO 40 J=1,R
      SOMA=0.0
      DO 50 K=1,R
50    SOMA=SOMA+Q(I,K)*B(K,J)
40    Y(I,J)=SOMA

      DO 100 I=1,N
      DO 100 J=1,M
      L=J
      IF(J.GT.R)L=P
      SOMA=0.0
      DO 110 K=1,L
110   SOMA=SOMA+Y(I,K)*U(K,J)
100   IMP(I,J)=SOMA
      CALL RUNTIM(ITEMP)
      TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3



C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

      CALL NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)


C     CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA
      CALL NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)

C     IMPRIMIR A INVERSA DE MOORE-PENROSE

      WRITE(NOUT,111)TEMP
111   FORMAT('TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
      WRITE(NOUT,13)R
13    FORMAT('   METODO 6.22'//'POSTO DE A=',G)
      WRITE(NOUT,21)L1,L2,L3,L4
21    FORMAT(' L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,'L4=',G)
      WRITE(NOUT,22)R1,R2,R3,R4
22    FORMAT('R1=',G,'R2=',G,'R3=',G,'R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C     ARQUIVO INGE.FOR
C     METODO ITERATIVO LINEAR
C     ESSE METODO COMPUTA A INVERSA DE MOORE-PENROSE DE UMA MATRIZ
C     REAL A, DE M LINHAS E N COLUNAS
      INTEGER IA,IR,IW,I,J,K,M,N,NIT,L,ITEMP
      REAL TOL,ALFA,SOMA,DIF,DIFS
      REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      REAL C(20,20),D(20,20),F(20,20),G(20,20)
      REAL A(20,20),YK(20,20),TN(20,20),YKS(20,20)
      DATA IR,IW,NIT,TOL,ALFA/20,22,1000,0.000001,0.001/

C     LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
      READ(IR,5)M,N
    5 FORMAT(2G)
      READ(IR,1)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
    1 FORMAT(1G)


      IA=20


C     IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA
      WRITE(IW,8)
    8 FORMAT(10X,'MATRIZ ORIGINAL',//)
C     CALCULO DA MATRIZ INICIAL Y0(PRIMEIRA ITERACAO)
      CALL SETRUN(0)
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,N
      YK(J,I)=ALFA*A(I,J)
   10 CONTINUE
C     CALCULO DA MATRIZ ITERACAO YKS
      DO 70 L=1,NIT
      DO 50 I=1,N
      DO 90 J=1,N
      SOMA=0.0
      DO 80 K=1,M
   80 SOMA=SOMA+YK(I,K)*A(K,J)
   90 TN(I,J)=-SOMA
      TN(I,I)=1.0+TN(I,I)
   50 CONTINUE
      DO 190 I=1,N
      DO 190 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 180 K=1,N
  180 SOMA=SOMA+TN(I,K)*A(J,K)
      YKS(I,J)=YK(I,J)+SOMA*ALFA
  190 CONTINUE
C     COMPARACAO DA MATRIZ YKS COM A MATRIZ ITERACAO ANTERIOR YK,
C     PARA ENCONTRAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE
      DIF=0.0
      DO 300 I=1,N
      DO 300 J=1,M
      DIFS=ABS(YKS(I,J)-YK(I,J))
      IF(DIFS.GE.DIF)DIF=DIFS
  300 CONTINUE
      IF(DIF.LE.TOL)GOTO 560
      DO 400 I=1,N
      DO 400 J=1,M
      YK(I,J)=YKS(I,J)
  400 CONTINUE
```

```
   70 CONTINUE
C        NAO CONVERGIU EM L ITERACOES
      WRITE(IW,9)L
    9 FORMAT(17HNAO CONVERGIU EM,I4,10H,ITERACOES)
        STOP
  500   CALL RUNTIM(ITEMP)
        TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

        CALL NORMA1(M,N,IA,A,YKS,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

        CALL NORMAI(M,N,IA,A,YKS,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)

C       IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE DA MATRIZ ORIGINAL A
        WRITE(IW,111)TEMP
  111   FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.8)
      WRITE(IW,15)L,TOL,ALFA
   15 FORMAT(//,20X,'INVERSA DE MOORE-PENROSE APOS',I4,2X,'ITERACOES COM
     *  TOLERANCIA DE',G,' E ALFA= ',G)
        WRITE(IW,21)L1,L2,L3,L4
   21   FORMAT(' L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,'L4=',G)
        WRITE(IW,22)R1,R2,R3,R4
   22   FORMAT(' R1=',G,' R2=',G,' R3=',G,' R4=',G)
      STOP
      END
```

```
C     ARQUIVO INGE1.FOR
C     METODO ITERATIVO DE ORDEM 3
C     ESSE METODO COMPUTA A INVERSA DE MOORE-PENROSE DE UMA MATRIZ
C     REAL A(MXN), M MENOR OU IGUAL A N
C
      REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      REAL C(20,20),D(20,20),F(20,20),G(20,20)
      INTEGER M,N,I,J,K,L,NIT,IW,IR,IA,ITEMP
      REAL TOL,ALFA,SOMA,DIF,DIFS
      REAL A(20,20),TN(20,20),XK(20,20),AUX(20,20),XKS(20,20)
      DATA IR,IW,NIT,TOL,ALFA/20,21,1000,1.E-6,0.1/
C
C     LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
      READ(IR,8)M,N
8     FORMAT(2G)
      READ(IR,1)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
1     FORMAT(4G)
      IA=20
C
C     IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADA
      WRITE(IW,100)
100   FORMAT(5X,'MATRIZ ORIGINAL',//)
C
C     CALCULO DA MATRIZ INICIAL X0 ( PRIMEIRA ITERACAO)
      CALL SETRUN(0)
      DO 30 I=1,M
      DO 30 J=1,N
      XK(J,I)=ALFA*A(I,J)
30    CONTINUE
C
C
C     CALCULO DA MATRIZ ITERACAO XKS
C
      DO 500 L=1,NIT
      DO 80 I=1,M
      DO 60 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 50 K=1,N
50    SOMA=SOMA+A(I,K)*XK(K,J)
60    TN(I,J)=-SOMA
      TN(I,I)=1.0+TN(I,I)
80    CONTINUE
      DO 150 I=1,M
      DO 140 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 130 K=1,M
130   SOMA=SOMA+TN(I,K)*TN(K,J)
140   AUX(I,J)=TN(I,J)+SOMA
      AUX(I,I)=AUX(I,I)+1.0
150   CONTINUE
      DO 210 I=1,N
      DO 210 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 200 K=1,M
200   SOMA=SOMA+XK(I,K)*AUX(K,J)
      XKS(I,J)=SOMA
210   CONTINUE
C
C
C     COMPARACAO DA MATRIZ XKS COM A MATRIZ ITERACAO ANTERIOR XK,
```

```
C       PARA ENCONTRAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE
        DIF=0.0
        DO 300 I=1,N
        DO 300 J=1,M
        DIFS=ABS(XKS(I,J)-XK(I,J))
        IF(DIFS.GE.DIF)DIF=DIFS
300     CONTINUE
        IF(DIF.LE.TOL)GOTO 560
        DO 400 I=1,N
        DO 400 J=1,M
400     XK(I,J)=XKS(I,J)
500     CONTINUE
C
C       NAO CONVERGIU EM L ITERACOES
        WRITE(IW,10)L
10      FORMAT(17HNAO CONVERGIU EM,I4,10H,ITERACOES)
        STOP
560     CALL RUNTIM(ITEMP)
        TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3


C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

        CALL NORMA1(M,N,IA,A,XKS,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

        CALL NORMAI(M,N,IA,A,XKS,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)

C
C       IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE DA MATRIZ ORIGINAL A
        WRITE(IW,111)TEMP
111     FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.8)
        WRITE(IW,15)L,TOL,ALFA
15      FORMAT(//,20X,'INVERSA DE MOORE-PENROSE APOS',I4,2X,
     *'ITERACOES COM TOLERANCIA DE ',G,' E ALFA= ',G)
        WRITE(IW,21)L1,L2,L3,L4
21      FORMAT(' L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,' L4=',G)
        WRITE(IW,22)R1,R2,R3,R4
22      FORMAT(' R1=',G,' R2=',G,' R3=',G,' R4=',G)
        STOP
        END
```

UNICAMP

```
C       ARQUIVO INGE2.FOR
C       METODO ITERATIVO DE ORDEM 3
C       ESSE METODO COMPUTA A INVERSA DE MOORE-PENROSE DE UMA MATRIZ
C       REAL A(M,N), M MAIOR OU IGUAL A N
      REAL TOL,ALFA,SOMA,DIF,DIFS
        REAL*8 L1,L2,L3,L4,R1,R2,R3,R4
      REAL A(20,20),TN(20,20),XK(20,20),AUX(20,20),XKS(20,20)
        REAL C(20,20),D(20,20),F(20,20),G(20,20)
        INTEGER M,N,I,J,L,K,IR,IA,IW,NIT,ITEMP
        DATA IR,IW,NIT,TOL,ALFA/20,21,1000,0.000001,0.001/
C       LEITURA DOS DADOS DE ENTRADAS
        READ(IR,8)M,N
    8 FORMAT(2G)
        READ(IR,1)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
1       FORMAT(4G)
        IA=20
C       IMPRESSAO DOS DADOS DE ENTRADAS
      WRITE(IW,100)
  100 FORMAT(5X,'MATRIZ ORIGINAL',//)
C       CALCULO DA MATRIZ INICIAL X0
        CALL SETRON(0)
      DO 30 I=1,M
      DO 30 J=1,N
      XK(J,I)=ALFA*A(I,J)
   30 CONTINUE
C       CALCULO DA MATRIZ ITERACAO XKS
      DO 500 L=1,NIT
      DO 80 I=1,N
      DO 60 J=1,N
      SOMA=0.0
      DO 50 K=1,M
   50 SOMA=SOMA+XK(I,K)*A(K,J)
   60 TN(I,J)=-SOMA
      TN(I,I)=1.0+TN(I,I)
   80 CONTINUE
      DO 150 I=1,N
      DO 140 J=1,N
      SOMA=0.0
      DO 130 K=1,N
  130 SOMA=SOMA+TN(I,K)*TN(K,J)
  140 AUX(I,J)=TN(I,J)+SOMA
      AUX(I,I)=AUX(I,I)+1.0
  150 CONTINUE
      DO 210 I=1,N
      DO 210 J=1,M
      SOMA=0.0
      DO 200 K=1,N
  200 SOMA=SOMA+AUX(I,K)*XK(K,J)
      XKS(I,J)=SOMA
  210 CONTINUE
C       COMPARACAO DA MATRIZ XKS COM A MATRIZ ITERACAO ANTERIOR
C       XK, PARA ENCONTRAR A INVERSA DE MOORE-PENROSE
      DIF=0.0
      DO 300 I=1,N
      DO 300 J=1,M
      DIFS=ABS(XKS(I,J)-XK(I,J))
      IF(DIFS.GE.DIF)DIF=DIFS
  300 CONTINUE
      IF(DIF.LE.TOL)GOTO 560
      DO 400 I=1,N
```

```
      DO 400 J=1,N
  400 XK(I,J)=XKS(I,J)
  500 CONTINUE
C        NAO CONVERGIU EM L ITERACOES
      WRITE(IW,10)L
   10 FORMAT(17HNAO CONVERGIU EM,I3,10H,ITERACOES)
      STOP
560     CALL RUNTIM(ITEMP)
        TEMP=FLOAT(ITEMP)*1.E-3

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA UM

        CALL NORMA1(M,N,IA,A,XKS,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C       CALCULAR OS RESIDUOS PELA NORMA INFINITA

        CALL NORMAI(M,N,IA,A,XKS,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)

C       IMPRESSAO DA INVERSA DE MOORE-PENROSE DA MATRIZ ORIGINAL A
        WRITE(IW,111)TEMP
111     FORMAT(' TEMPO EM SEGUNDOS=',E15.7)
      WRITE(IW,15)L,TOL
   15 FORMAT(//,20X,'INVERSA DE MOORE-PENROSE APOS',I4,2X,'ITERACOES COM
     *  TOLERANCIA DE ',G)
        WRITE(IW,21)L1,L2,L3,L4
21      FORMAT(' L1=',G,' L2=',G,' L3=',G,' L4=',G)
        WRITE(IW,22)R1,R2,R3,R4
22      FORMAT(' R1=',G,' R2=',G,' R3=',G,' R4=',G)
      STOP
      END
```

UNICAMP

```
      SUBROUTINE NORMAI(M,N,IA,A,IMP,R1,R2,R3,R4,C,D,F,G)
C
C     ESSA SUB-ROTINA CALCULA OS RESIDUOS
C     UTILIZANDO AS QUATRO PROPRIEDADES DA DEFINICAO
C     DE MOORE-PENROSE PELA NORMA INFINITA
C
      INTEGER I,J,K,IA,M,N
      REAL F(IA,N),G(IA,N)
      REAL*8 SOMA,R1,R2,R3,R4,X,AUX1,AUX2
      REAL A(IA,N),IMP(IA,N),C(IA,N),D(IA,N)
C
C     CALCULO DE A*IMP*A
      CALL PROD(M,N,IA,A,IMP,C)
C
      DO 50 I=1,M
      DO 50 J=1,N
      SOMA=0.D+00
      DO 40 K=1,M
      AUX1=C(I,K)
      AUX2=A(K,J)
40    SOMA=SOMA+AUX1*AUX2
50    D(I,J)=SOMA
C
C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
C     DAS LINHAS DE A*IMP*A-A
C
      R1=0.D+00
      DO 70 I=1,M
      SOMA=0.D+00
      DO 80 J=1,N
      AUX1=D(I,J)
      AUX2=A(I,J)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
80    SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.R1)R1=SOMA
70    CONTINUE
C
C     CALCULO DE IMP*A*IMP
C
      CALL PROD(N,M,IA,IMP,A,F)
C
      DO 60 I=1,N
      DO 60 J=1,M
      SOMA=0.D+00
      DO 20 K=1,N
      AUX1=F(I,K)
      AUX2=IMP(K,J)
20    SOMA=SOMA+AUX1*AUX2
60    G(I,J)=SOMA
C
C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
C     DAS LINHAS DE IMP*A*IMP-IMP
C
      R2=0.D+00
      DO 90 I=1,N
```

```
      SOMA=0.0D+00
      DO 110 J=1,M
      AUX1=G(I,J)
      AUX2=IMP(I,J)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
110   SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.R2)R2=SOMA
90    CONTINUE
C     CALCULO DE A*IMP
C
      CALL PROD(M,M,IA,A,IMP,C)


C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
C     DAS LINHAS DE A*IMP-(A*IMP)**T
C
      R3=0.0D+00
      DO 120 I=1,M
      SOMA=0.0D+00
      DO 130 J=1,M
      AUX1=C(I,J)
      AUX2=C(J,I)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
130   SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.R3)R3=SOMA
120   CONTINUE
C
C     CALCULO DE IMP*A
C
      CALL PROD(M,M,IA,IMP,A,F)


C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
C     DAS LINHAS DE IMP*A-(IMP*A)**T
C
      R4=0.0D+00
      DO 140 I=1,M
      SOMA=0.0D+00
      DO 160 J=1,M
      AUX1=F(I,J)
      AUX2=F(J,I)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
160   SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.R4)R4=SOMA
140   CONTINUE
      RETURN
      END
```

UNICAMP

```
      SUBROUTINE NORMA1(M,N,IA,A,IMP,L1,L2,L3,L4,C,D,F,G)

C     ESSA SUB-ROTINA CALCULA OS RESIDUOS
C     UTILIZANDO AS QUATROS PROPIEDADES DA DEFINICAO
C     DE MOORE-PENROSE, PELA NORMA UM

      INTEGER I,J,K,IA,M,N
      REAL F(IA,N),G(IA,N)
      REAL A(IA,N),IMP(IA,N),C(IA,N),D(IA,N)
      REAL*8 X,L1,L2,L3,L4,SOMA,AUX1,AUX2



C     CALCULO DE A*IMP*A


      CALL PROD(M,N,IA,A,IMP,C)

      DO 50 I=1,M
      DO 50 J=1,N
      SOMA=0.D+00
      DO 40 K=1,M
      AUX1=C(I,K)
      AUX2=A(K,J)
40    SOMA=SOMA+AUX1*AUX2
50    D(I,J)=SOMA

C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
C     DAS COLUNAS DE A*IMP*A-A

      L1=0.D+00
      DO 70 J=1,N
      SOMA=0.D+00
      DO 80 I=1,M
      AUX1=D(I,J)
      AUX2=A(I,J)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
80    SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.L1)L1=SOMA
70    CONTINUE
C     CALCULO DE IMP*A*IMP


      CALL PROD(N,M,IA,IMP,A,F)

      DO 60 I=1,N
      DO 60 J=1,M
      SOMA=0.D+00
      DO 20 K=1,N
      AUX1=F(I,K)
      AUX2=IMP(K,J)
20    SOMA=SOMA+AUX1*AUX2
60    G(I,J)=SOMA


C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
```

```
C     DAS COLUNAS DE IMP*A*IMI-IMP

      L2=0.0D+00
      DO 90 J=1,M
      SOMA=0.0D+00
      DO 110 I=1,N
      AUX1=G(I,J)
      AUX2=IMP(I,J)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
110   SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.L2)L2=SOMA
90    CONTINUE
C     CALCULO DE A*IMP

      CALL PROD(M,N,IA,A,IMP,C)


C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
C     DAS COLUNAS DE A*IMP-(A*IMP)**T

      L3=0.0D+00
      DO 120 J=1,M
      SOMA=0.0D+00
      DO 130 I=1,M
      AUX1=C(I,J)
      AUX2=C(J,I)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
130   SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.L3)L3=SOMA
120   CONTINUE

C     CALCULO DE IMP*A

      CALL PROD(N,M,IA,IMP,A,F)
C
C     CALCULO DO MAXIMO ABSOLUTO DA SOMA
C     DAS COLUNAS DE IMP*A-(IMP*A)**T
C
      L4=0.0D+00
      DO 140 J=1,N
      SOMA=0.0D+00
      DO 160 I=1,N
      AUX1=F(I,J)
      AUX2=F(J,I)
      X=DABS(AUX1-AUX2)
160   SOMA=SOMA+X
      IF(SOMA.GE.L4)L4=SOMA
140   CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PROD(M,N,IA,A,B,C)
C     ESSA SUB-ROTINA CALCULA O PRODUTO
C     DE DUAS MATRIZES

      REAL*8 AUX1,AUX2,SOMA
      INTEGER M,N,I,J,K,IA
      REAL A(IA,N),B(IA,N),C(IA,N)


      DO 20 I=1,M
      DO 20 J=1,M
      SOMA=0.0D+00
      DO 30 K=1,N
      AUX1=A(I,K)
      AUX2=B(K,J)
30    SOMA=SOMA+AUX1*AUX2
20    C(I,J)=SOMA
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SIST(R,N,IA,F,FT,H,X)
C     ESSA SUB-ROTINA CALCULA A INVERSA DE F*F**T,
C     RESOLVENDO SISTEMA, ONDE F(R,R) E TRINGULAR
C     INFERIOR E NAO SINGULAR

      REAL F(IA,N),FT(IA,N),H(IA,N),X(IA,N),SOMA
      INTEGER R,I,J,K,N

      DO 240 J=1,R
      DO 240  I=J,R
      SOMA=0.0
      DO 250 K=J,I-1
250   SOMA=SOMA+F(I,K)*H(K,J)
      H(I,J)=-SOMA/F(I,I)
      H(J,J)=1.0/F(J,J)
240   CONTINUE

      DO 260 J=1,R
      I=R+1
280   I=I-1
      IF(I.LT.1)GOTO 260
      SOMA=0.0
      DO 270 K=I+1,R
270   SOMA=SOMA+FT(I,K)*X(K,J)
      X(I,J)=(H(I,J)-SOMA)/FT(I,I)
      GOTO 280
260   CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RINV(P,N,IA,R,PI)
C     ESSA SUB-ROTINA CALCULA A INVERSA DE UMA
C     MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR
      REAL P(IA,N),PI(IA,N),SOMA
      INTEGER R,IA,N,I,J,K
      DO 120 J=1,R
      I=J+1
500   I=I-1
      IF(I.LT.1)GOTO 120
      SOMA=0.0
      DO 130 K=I+1,J
130   SOMA=SOMA+P(I,K)*PI(K,J)
      PI(I,J)=-SOMA/P(I,I)
      PI(J,J)=1.0/P(J,J)
      GOTO 500
120   CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE GSM(M,N,IA,A,W,X,Q,U,IK)
C     ESSA SUBROTINA DECOMPOE UMA MATRIZ QUALQUER
C     REAL A(M,N), DE POSTO IK, PELA ORTOGONALI -
C     ZACAO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO, A=Q*U, ON-
C     DE Q(M,IK) TEM COLUNAS ORTONORMAIS E U(IK,N) E
C     TRAPEZOIDAL SUPERIOR.

      INTEGER I,K,J,IK,L
      REAL TOL,X(IA,N)
      REAL A(IA,N),Q(IA,N),U(IA,N),W(IA,N)


      DATA TOL/1.0E-6/
      DO 10 K=1,N
      DO 10 I=1,M
10    W(I,K)=A(I,K)


      IK=0
      DO 20 K=1,N
      SOMA=0.0
      DO 30 I=1,M
30    SOMA=SOMA+W(I,K)**2
      X(K,K)=SQRT(SOMA)
      IF(ABS(X(K,K)).LT.TOL)GOTO 20
      IK=IK+1

      DO 40 I=1,M
      W(I,K)=W(I,K)/X(K,K)
40    Q(I,IK)=W(I,K)

      L=K+1

      DO 50 J=L,N
      SOMA=0.0
      DO 60 I=1,M
60    SOMA=SOMA+W(I,K)*W(I,J)
50    X(K,J)=SOMA


      DO 100 J=1,N
100   U(IK,J)=X(K,J)


      DO 70 J=L,N
      DO 70 I=1,M
70    W(I,J)=W(I,J)-X(K,J)*W(I,K)
20    CONTINUE
      RETURN
      END
```