Soluções Fracas de Equações Hiperbólicas Semi-Lineares

Maurício Fronza da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Campinas
1998

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Silva, Maurício Fronza da

Si38s Soluções fracas de equações hiperbólicas semi-lineares / Maurício Fronza da Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : José Luiz Boldrini

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equação de onda. 2. Equações de ondas não-lineares. 3. Equações diferenciais hiperbólicas. 4. Equações diferenciais não-lineares. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Soluções Fracas de Equações Hiperbólicas Semi-Lineares

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Maurício Fronza da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 2 de março de 1998.

José Luiz Boldrini

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (UNICAMP), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 02 de março de 1998

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

____

Prof (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

____

Prof (a). Dr (a). JOÃO PAULO LUKASZCZYK

à Neli, Tito, Mariza, Maurem e Eveline

Agradecimentos

Agradeço

ao Professor Boldrini pela dedicação e boa vontade com que me orientou, e pela paciência demonstrada ao responder tantas perguntas repetitivas,

aos funcionários da biblioteca e da secretaria de Pós-graduação pela boa vontade com que me serviram quando precisei,

aos meus pais Tito e Mariza, e minhas irmãs Maurem e Eveline, pelo apoio, carinho e compreensão nos momentos em que mais necessitei,

à Nelizinha, por seu amor,

aos companheiros de república Paschoal, Ribeirão, Valdecir e Suru, pelas brigas e partidas de King,

aos amigos do predinho,

e a todos aqueles que nos brindam com sua existência, nesta fantástica aventura que é viver.

Resumo

Nosso objetivo é estudar aspectos relativos à existência de soluções fracas de equações de onda semi-lineares do tipo

$$\Delta u - u_{tt} = F(x, u)$$

com condições relativamente fracas sobre a não-linearidade F. Neste trabalho estaremos interessados em estudar a equação acima sob as condições impostas por Strauss [5], as quais exigem continuidade de F e $uF(x, u) \geq 0$.

A idéia principal de Strauss [5] é aproximar F por funções lipschitzianas e, então, gerar uma seqüência de aproximações para a solução, na qual cada elemento é a solução de uma equação de onda não-linear cuja não-linearidade é dada por uma função lipschitziana. A passagem ao limite é garantida por um critério de convergência forte em L^1, apresentado no Capítulo 4.

Iniciamos com um estudo sobre soluções fracas de equações de onda lineares, sendo apresentadas as resoluções de tais equações para diferentes tipos de domínio espacial e regularidade dos dados iniciais. Em todos os casos, é utilizado o Método de Galerkin.

Depois apresentamos os resultados que permitem aproximar uma função F contínua e com o mesmo sinal de u, por funções lipschitzianas, bem como, o teorema que resolve a equação de onda não-linear cuja não-linearidade é dada por uma função lipschitziana.

Encerrando o texto, além de apresentar a condição suficiente para convergência em L^1 já citada, resolvemos o problema em que a não-linearidade é dada pela função F mencionada no parágrafo anterior.

Sempre que possível, apresentaremos mais de um caminho para a resolução de uma equação, apontando as vantagens e desvantagens de cada um.

Ressaltamos que, em geral, a parte mais difícil da resolução de cada problema é a obtenção de estimativas a priori (as quais permitem a passagem ao limite) e das desigualdades de energia, que dão estimativas para o crescimento da solução. As demais etapas, como verificação dos dados iniciais, são trabalhosas num primeiro momento. Por serem muitas vezes repetitivas, feitas uma vez, não trazem maiores dificuldades nos próximos problemas.

Sumário

Introdução

Nosso objetivo será estudar alguns aspectos relativos à existência de soluções fracas de equações de onda semi-lineares do tipo

$$\Delta u - u_{tt} = F(x, u)$$

com condições relativamente fracas sobre a não-linearidade F.

Quando se impõe condições de regularidade mais fortes, como por exemplo, no caso em que F é lipschitziana na variável u, é relativamente mais fácil mostrar a existência de soluções.

Neste trabalho, entretanto, estaremos interessados em estudar a equação acima sob as condições impostas por Strauss [6], as quais exigem basicamente apenas continuidade de F (e outra condição envolvendo o sinal de $uF(x, u)$).

A idéia principal de Strauss [6] é aproximar F por funções lipschitzianas e, então, gerar uma seqüência de aproximações para a solução, na qual cada elemento é a solução de uma equação de onda não-linear cuja não-linearidade é dada por uma função lipschitziana. A passagem ao limite será garantida por um critério de convergência forte em L^1, apresentado no Capítulo 4.

O **Capítulo 1** trará as definições e resultados utilizados nos demais capítulos, além da notação adotada.

Trataremos de soluções fracas de equações de onda lineares no **Capítulo 2**, sendo apresentadas as resoluções de tais equações para diferentes tipos de domínio espacial e regularidade dos dados iniciais.

O **Capítulo 3** será preparatório para o seguinte, pois é nele que encontramos os resultados que permitem aproximar uma função $F(x, u)$ contínua e com o mesmo sinal de u, por funções lipschitzianas, bem como, o teorema que resolve a equação de onda não-linear cuja não linearidade é dada por uma função lipschitziana.

Além de uma condição suficiente para convergência em L^1 já mencionada, o **Capítulo 4** encerrará o texto, resolvendo o problema em que a não-linearidade é dada pela função F mencionada no parágrafo anterior.

Sempre que possível, apresentaremos mais de um caminho para a resolução de uma equação, apontando as vantagens e desvantagens de cada um.

Ressaltamos que, em geral, a parte mais difícil da resolução de cada problema é a obtenção de estimativas a priori (as quais permitem a passagem ao limite) e das desigualdades de energia, que dão estimativas para o crescimento da solução. As demais etapas, como verificação dos dados iniciais, são trabalhosas num primeiro momento. Por serem muitas vezes repetitivas, feitas uma vez não apresentarão maiores dificuldades de serem refeitas nos demais problemas.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo apresenta definições e resultados que julgamos importantes para a compreensão dos demais capítulos do texto, bem como introduz a notação utilizada.

Denotamos por $(\cdot,\cdot)$ o produto interno de $L^2(\Omega)$ e $\|\cdot\|$ a norma por ele induzida. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X'X}$ denota a dualidade entre o espaço de Banach X e seu dual X'. O símbolo $\|\cdot\|_X$ denota a norma de X. Se H é um espaço de Hilbert, denotamos por $(\cdot,\cdot)_H$ seu produto interno.

Para $0 < \alpha \leq 1$ indicamos por $C^{0,\alpha}(\Omega)$ a classe de funções que satisfazem a condição de Hölder com expoente α, isto é: $\exists c > 0$ tal que $|u(x) - u(y)| \leq c\|x-y\|^{\alpha}, \forall x, y \in \Omega$. Finalmente, por $C^{k,\alpha}(\Omega)$ indicamos a o conjunto de funções k vezes derivável com derivadas de ordem k em $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

A notação utilizada para indicar seqüência, será a de subíndice, a menos que estejamos lidando com derivadas ou dados iniciais, quando então usamos um superíndice, apenas por comodidade na escrita.

1.1 Os espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Denotamos por $C_0^{\infty}(\Omega)$ ou por $D(\Omega)$ o conjunto das funções escalares indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω.

Indicamos por $i = (i_1, i_2, ..., i_n)$ uma n-upla de números naturais e $|i| = i_1 + i_2 + ... + i_n$. O símbolo $D^i u$ representará qualquer derivada parcial de ordem $|i|$ da função u:

$$D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}}, D^0 u = u$$

Definimos o **Espaço de Sobolev** de ordem m sobre o aberto Ω como o espaço vetorial das funções de $L^2(\Omega)$ as quais têm todas as derivadas (no sentido das distribuições) até a ordem m em $L^2(\Omega)$. Representamos por $H^m(\Omega)$ o Espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω equipado com o seguinte produto interno:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{i=1}^{m} \left(D^{|i|} u, D^{|i|} v \right).$$

$H^m(\Omega)$ é Hilbert (a demonstração do caso unidimensional se encontra em Medeiros-Miranda [5, pág. 22]).

Os espaços de Sobolev mais utilizados neste texto são $H^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$. Por isto, ao leitor menos familiarizado explicitamos os respectivos produtos internos:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = (u, v) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Denotamos por $H_0^m(\Omega)$ o fecho de $D(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. Sendo $D(\Omega)$ denso em $L^2(\Omega)$, segue imediatamente que $H_0^m(\Omega)$ também é denso em $L^2(\Omega)$. O símbolo $H^{-m}(\Omega)$ é usado para denotar o dual de $H_0^m(\Omega)$.

1.2 Resultados de Teoria da Medida

Passemos agora ao enunciado de teoremas clássicos de Teoria da Medida que serão de grande utilidade nos capítulos subseqüentes. A imagem das funções consideradas nesta seção são subconjuntos da reta estendida, salvo menção contrária.

Lema 1 ***(Fatou)*** *Se $\{f_k\}$ é uma seqüência de funções mensuráveis não-negativas, então:* $\int\limits_{\Omega} \liminf f_k(x)\, dx \leq \liminf \int\limits_{\Omega} f_k(x)\, dx.$

Demonstração pode ser encontrada em Bartle [1, pág. 33].

Teorema 1 ***(Convergência Dominada)*** *Seja* $\{f_k\}$ *uma seqüência de funções integráveis (isto é:* $f_k \in L^1(\Omega), \forall k \in \mathbb{N}$*) que convergem q.t.p. para uma função a valores reais mensurável* f*. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_k| \leq g$*, q.t.p.,* $\forall k \in \mathbb{N}$*, então* f *é integrável e* $\int_\Omega f(x)\,dx = \lim \int_\Omega f_k(x)\,dx$*.*

Demonstração em Bartle [1, pág. 44].

Teorema 2 *Seja* (Ω, dx) *um espaço de medida finita e* $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$*, então* $f \in L^r(\Omega)$ *para* $1 \leq r \leq p$*. Em particular:* $L^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$*.*

A demonstração pode ser feita utilizando a Desigualdade de Hölder.

Teorema 3 ***(Egoroff)*** *Suponha que* (Ω, dx) *seja um espaço de medida finita e que* $\{f_k\}$ *seja uma seqüência de funções mensuráveis a valores reais que converge q.t.p. para uma função a valores reais, mensurável,* f*. Então* $\{f_k\}$ *converge quase-uniformemente e em medida para o mesmo limite.*

Demonstração em Bartle [1, pág. 74].

Teorema 4 *Seja* $\{f_k\}$ *uma seqüência que converge para* f *no sentido de* $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$*. Então existe uma subseqüência que converge q.t.p. para* f*.*

A demonstração segue do fato que convergência em L^p implica em convergência em medida e, que por sua vez, implica na existência de uma subseqüência que converge q.t.p.

1.3 Desigualdades úteis

Teorema 5 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto limitado em uma direção. Então existe* $K > 0$ *tal que* $\|f\| \leq K \|\nabla f\|, \forall f \in H_0^1(\Omega)$*.*

Demonstração em Medeiros-Miranda [5, pág. 91]

Normas equivalentes em $H_0^1(\Omega)$ e em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Podemos verificar que quando Ω satisfaz as hipóteses da Desigualdade de Poincaré

$$(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

é um produto interno em $H_0^1(\Omega)$, o qual induz neste espaço, uma norma equivalente à norma de $H^1(\Omega)$. Por este motivo, sempre que supusermos Ω limitado, a norma em $H_0^1(\Omega)$ considerada é a induzida por $(\nabla u, \nabla v)$.

Também é possível provar que quando Ω é limitado e tem fronteira de classe $C^{2,\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$, o espaço $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ equipado com o produto interno

$$(\Delta u, \Delta v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right),$$

é Hilbert.

Teorema 6 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Sejam $k(t)$ e $u(t)$ funções reais, positivas e definidas em $[0,T]$. Suponhamos ainda que u seja absolutamente contínua e k integrável. Se existe $c > 0$ tal que: $u(t) \leq c + \int_0^t k(s) u(s) \, ds, \forall t \in [0,T]$, então:*

$$u(t) \leq c e^{\int_0^t k(s) ds}, \forall t \in [0,T].$$

Demonstração em Medeiros-Miranda [5, pág. 177].

A Desigualdade de Gronwall possui uma generalização que pode ser obtida sem muita dificuldade. Suponhamos que u satisfaça

$$u(t) \leq \int_0^t v(s) \, ds + \int_0^t k(s) u(s) \, ds, \forall t \in [0,T],$$

para alguma função integrável positiva v. Fixando $t \in [0,T]$ e tomando $\tau \in [0,t]$ arbitrário obtemos:

$$u(\tau) \leq \int_0^\tau v(s)\, ds + \int_0^\tau k(s)\, u(s)\, ds.$$

Sendo v uma função positiva:

$$u(\tau) \leq \int_0^t v(s)\, ds + \int_0^\tau k(s)\, u(s)\, ds.$$

Observemos que a primeira parcela do lado direito da espressão acima é constante em relação a τ, de modo que a Desiguldade de Gronwall é válida. Segue que:

$$u(\tau) \leq \left(\int_0^t v(s)\, ds\right) e^{\int_0^\tau k(s) ds}$$

Tomando $\tau = t$, acabamos de provar que:

Teorema 7 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Sejam u, k, v funções escalares positivas definidas em $[0, T]$. Suponhamos que u seja absolutamente contínua e k, v integráveis. Se*

$$u(t) \leq \int_0^t v(s)\, ds + \int_0^t k(s)\, u(s)\, ds, \forall t \in [0, T],$$

então:

$$u(t) \leq \left(\int_0^t v(s)\, ds\right) e^{\int_0^t k(s) ds}, \forall t \in [0, T].$$

A Desigualdade de Gronwall apresentada aqui não é a mais geral conhecida, porém, ao menos para nossos propósitos, é a que melhor combina utilidade e simplicidade.

1.4 Identificação de $L^2(\Omega)$ com seu dual

Lembremos do seguinte teorema:

Teorema 8 ***(Teorema de Representação de Riesz em Espaços de Hilbert)*** *Seja V um espaço de Hilbert e $f \in V'$. Então existe único $\tilde{f} \in V$ tal que: $\langle f, x\rangle_{V'V} = \left(\tilde{f}, x\right)_V, \forall x \in V$.*

Demonstração pode ser encontrada em Kreysig [4, pág. 188].

Sabemos que $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, logo, $(L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega)$. Aplicando o Teorema de Representação de Riesz ao espaço $L^2(\Omega)$ e identificando-o com seu dual (esta identificação é feita via produto interno de $L^2(\Omega)$) obtemos:

$$D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \subset H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega).$$

Isto significa que, por exemplo, que a distribuição definida por um elemento u de $H_0^1(\Omega)$ é:

$$\langle T_1, v\rangle_{D'(\Omega)D(\Omega)} = (u, v), \forall v \in D(\Omega).$$

É conveniente ressaltar que se $u \in H_0^1(\Omega)$ e Ω é limitado:

$$\langle T_2, v\rangle_{D'(\Omega)D(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v), \forall v \in D(\Omega),$$

também é um elemento de $D'(\Omega)$. Assim, um elemento de $H_0^1(\Omega)$ define duas distribuições. Para usarmos o Teorema de Representação de Riesz conforme fizemos acima devemos necessariamente optarmos por identificar u com T_1.

Se tivéssemos aplicado Riesz ao espaço $H_0^1(\Omega)$ e o identificado a $H^{-1}(\Omega)$ (via produto interno de $H_0^1(\Omega)$), teríamos identificado u com T_2 e então:

$$D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \equiv H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega)$$

e "perderíamos" $L^2(\Omega)$.

1.5 Traço de funções de $H^1(\Omega)$

Este texto trata de equações hiperbólicas as quais sempre vem acompanhadas de uma condição de fronteira. No entanto, as soluções obtidas são definidas q.t.p., de modo que precisamos definir o que se entende por restrição de uma função sobre a fronteira. A definição que apresentaremos aqui não se aplica a qualquer conjunto Ω; é necessário que possua fronteira com suficiente regularidade.

Diz-se que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto bem regular quando existe uma família finita de abertos limitados do $\mathbb{R}^n$, representada por $\{\vartheta_0, \vartheta_1, ..., \vartheta_m\}$ tais que $\vartheta_0 \subset \overline{\Omega}, \{\vartheta_0, \vartheta_1, ..., \vartheta_m\}$ é um recobrimento aberto de Ω e $\{\vartheta_1, ..., \vartheta_m\}$ um recobrimento aberto de $\partial\Omega$, satisfazendo as seguintes condições:

- Para cada $j$tem-se:
  $\varphi_j(\vartheta_j \cap \Omega) = Q_+ = \{y \in Q; y_n > 0\}$;
  $\varphi_j\left(\vartheta_j \cap \overline{\Omega}^c\right) = Q_- = \{y \in Q; y_n < 0\}$;
  $\varphi_j(\vartheta_j \cap \partial\Omega) = Q \cap \{y \in Q; y_n = 0\}$.
- Quando $\vartheta_i \cap \vartheta_j \neq \emptyset$,existe um homeomorfismo $J_{ij} : \varphi_i(\vartheta_i \cap \vartheta_j) \to \varphi_j(\vartheta_i \cap \vartheta_j)$indefinidamente diferenciável, com jacobiano positivo, tal que:
  $\varphi_j(x) = J_{ij}(\varphi_i(x)), \forall x \in \vartheta_i \cap \vartheta_j$.

A família $\{\vartheta_j, \varphi_j\}$ chama-se sistema de cartas locais de $\partial\Omega$.

Teorema 9 *Se Ω for aberto, limitado e bem regular então $D\left(\overline{\Omega}\right)$ é denso em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração pode ser encontrada em Medeiros-Miranda [5, pág. 85].

Consideremos a aplicação: $\gamma : D\left(\overline{\Omega}\right) \to L^2(\partial\Omega)$ definida por $\gamma v(x', x_n) = v(x', 0)$. Em outras palavras, γv é a restrição de uma função $v \in D\left(\overline{\Omega}\right)$ à fronteira de Ω.

Teorema 10 *Se Ω for aberto, limitado e bem regular então γ é operador linear limitado.*

Demonstração em Medeiros-Miranda [5, pág. 86].

Sendo $D\left(\overline{\Omega}\right)$ denso em $H^1(\Omega)$, γ se estende a uma aplicação linear contínua γ_0 de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$, denomidada traço. Então, o traço é um operador linear limitado obtido a partir da extensão de um operador de restrição à fronteira de Ω. De posse deste operador, a expressão $u = 0$ em $\partial\Omega$, significa formalmente que $\gamma_0 u = 0$.

Como sempre trabalharemos com condição nula sobre a fronteira, o próximo teorema nos será útil, pois caracteriza as funções que possuem traço nulo.

Teorema 11 *Se Ω for aberto, limitado e bem regular então* $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Demonstração em Medeiros-Miranda [5, pág. 87].

Existem resultados mais gerais a respeito do traço de funções de $H^1(\Omega)$, nos quais as hipóteses sobre $\partial\Omega$ são menos restritivas.

1.6 Imersões de Espaços de Sobolev

Teorema 12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e bem regular. Se $m > \frac{n}{2}$ então a imersão de $H^m(\Omega)$ em $L^\infty(\Omega)$ é contínua.*

Demonstração em Medeiros-Miranda [5, pág. 96].

Teorema 13 ***(Rellich)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e bem regular. Então a imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta.*

Demonstração em Medeiros-Miranda [5, pág. 99]. As demonstrações dos dois teoremas abaixo podem ser encontradas em Medeiros-Miranda [5, pág. 103].

Teorema 14 ***(Corolário do Teorema de Rellich)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e bem regular. Então a imersão de $H^{m+1}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é compacta.*

Teorema 15 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, então a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta.*

Os teoremas de imersões de espaços de Sobolev apresentados aqui não são os mais gerais conhecidos. É possível obter tais resultados com hipóteses menos restritivas sobre a fronteira de Ω.

1.7 Teoria espectral

Considere os espaços de Hilbert V e H e suponha que $V \subset H$. Seja $I : V \to H$ o operador que a cada $v \in V$ associa o próprio vetor v. Não é difícil verificarmos que I é linear. O operador I é chamado operador imersão de V em H ou a imersão de V em H. Diz-se que a imersão de V em H é contínua quando I é um operador linear contínuo, isto é, quando existe $K > 0$ tal que:

$$\|v\|_H \leq K \|v\|_V, \forall v \in V.$$

(A importância deste tipo de imersão é que convergência no espaço "menor" V, implica em convergência no espaço maior, H). O exemplo mais importante para este texto é o caso em que Ω é limitado, $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$. O resultado que garante esta imersão contínua é a Desigualdade de Poincaré.

Diz-se que a imersão de V em H é compacta quando a imagem de conjuntos limitados de V, por I, é relativamente compacta em H. A importância desta imersão para nossos propósitos é que, quando estivermos diante de uma imersão compacta, uma seqüência limitada em V possui uma subseqüência convergente em H. Sabemos que quando Ω limitado, a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta.

Suponhamos agora que $V \subset H$, com imersão contínua e compacta. Suponhamos ainda que V seja denso em H. Seja $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua, simétrica e coerciva. Logo, ela define um produto interno, o qual induz em V uma norma equivalente à norma original. Então existe uma seqüência $\{\lambda_k\}$ de números reais positivos, divergindo para $+\infty$, e uma seqüência $\{e_k\}$ em V tais que:

- $a(e_k, v) = \lambda_k (e_k, v)_H$.

Outras propriedades da seqüência $\{e_k\}$:

- $\{e_k\}$ é ortonormal completa em H;
- $\{e_k\}$ é ortogonal completa em V, com relação ao produto interno definido por $a(\cdot, \cdot)$.

Exemplo importante: Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ e $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$. Estamos sob as condições da teoria espectral acima, logo existe uma seqüência $\{\lambda_k\}$ de números reais positivos e uma seqüência $\{e_k\}$ em $H_0^1(\Omega)$ tais que:

$$(\nabla e_k, \nabla v) = \lambda_k (e_k, v), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando v em $D(\Omega)$, usando a definição de derivada de distribuições e a identificação de $L^2(\Omega)$ com seu dual:

$$\langle -\Delta e_k, v\rangle = \langle \lambda_k e_k, v\rangle, \forall v \in D(\Omega).$$

Segue que:

$$-\Delta e_k = \lambda_k e_k$$

e portanto, $-\Delta e_k$ é um elemento de $H_0^1(\Omega)$. Acabamos de provar que a seqüência de autovetores do operador Δ, quando Ω é aberto e limitado, constitui uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$ e uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$.

Séries de Fourier: Outra propriedade interessante da seqüência $\{e_k\}$ diz respeito às séries de Fourier de um vetor v nos espaços V e H. Sendo $\{e_k\}$ ortonormal em H, todo vetor $v \in V$ pode ser escrito como:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, v)_H \, e_k.$$

Por outro lado, $\{e_k\}$ é ortogonal em V com relação ao produto interno definido por $a(\cdot,\cdot)$. Então:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(e_k, v)}{a(e_k, e_k)} e_k,$$

logo:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k (e_k, v)_H}{\lambda_k (e_k, e_k)_H} e_k.$$

Fazendo as devidas simplificações, acabamos de mostrar que os coeficientes de um vetor $v \in V$ não variam quando consideramos sua série de Fourier em H ou em V (produto interno dado por $a(\cdot,\cdot)$).

1.8 Funções com valores vetoriais

No estudo de soluções fracas de equações de evolução os espaços até aqui citados não são suficientes. É necessário que utilizemos também espaços vetoriais formados por funções definidas num intervalo (a,b) da reta assumindo valores em algum espaço de Banach X. Se X é um espaço de Banach, uma função $u:(a,b)\to X$ é dita **fortemente mensurável** se:

- existe um subconjunto N de (a,b), de medida nula, tal que $u((a,b)-N)$ é um subconjunto separável de X;
- a função escalar $t\mapsto \langle f,u(t)\rangle_{X'X}$ é mensurável, $\forall f\in X'$.

Neste texto sempre consideramos a medida de Lebesgue em (a,b). O espaço $L^p(a,b;X)$ denota o conjunto das funções $u:(a,b)\to X$ fortemente mensuráveis tais que a função escalar $t\mapsto \|u(t)\|_X$ é um elemento de $L^p(a,b)$, $1\le p\le\infty$. Conforme Hille-Phillips [3, pág. 89], $L^p(a,b;X)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)}=\left(\int_a^b\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{se } 1\le p<\infty$$

ou

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)}=\operatorname*{supess}_{t\in(a,b)}\|u(t)\|_X,\ \text{para } p=\infty;$$

é um espaço de Banach. Quando $p=2$ e X é Hilbert, $L^2(a,b;X)$ é Hilbert se considerado com o produto interno:

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)}=\int_a^b(u(t),v(t))_X\,dt.$$

Outro espaço de funções a valores vetoriais de nosso interesse é $C^0(a,b;X)$, o qual consiste do conjunto das funções contínuas definidas em $[a,b]$, com valores em X, equipado com a norma:

$$\|u\|_{C^0(a,b;X)}=\max_{t\in[a,b]}\|u(t)\|_X.$$

$C^0(a,b;X)$ é um espaço de Banach.

Desde que (a,b) tem medida finita, $L^p(a,b;X) \subset L^1(a,b;X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Se X é reflexivo, para cada $f \in (L^p(a,b;X))'$ existe única $\tilde{f} \in L^q(a,b;X')$, sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p < \infty$, tal que:

$$\langle f, u \rangle = \int_a^b \left(\tilde{f}(t), u(t)\right) dt,$$

no qual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre $L^p(a,b;X)$ e seu dual. Identificando f com $\tilde{f}$, escrevemos $(L^p(a,b;X))' \equiv L^q(a,b;X')$. A demonstração do caso mais geral possível pode ser encontrada em Diestel-Uhl [2, pág. 76 e 98].

Observemos que se $X = \mathbb{R}$ equipado com a norma usual, as definições aqui introduzidas coincidem com as definições usuais de Teoria da Medida.

1.9 Distribuições a valores vetoriais e suas derivadas

Para as funções de $L^1(a,b;X)$, a integral

$$\int_a^b u(t)\, dt$$

está definida e é um vetor de X. Esta integral é conhecida como Integral de Bochner da função u e sua definição foge aos nossos propósitos. Entretanto, convém ressaltar que ela estende a Integral de Lebesgue real para os espaços de Banach, mantendo suas propriedades.

Ao espaço formado pelo conjunto de operadores lineares contínuos definidos em $D(a,b)$ assumindo valores em X dá-se o nome de espaço das distribuições vetoriais sobre (a,b) com valores em X. Ele será denotado por $\pounds(D(a,b);X)$. Mostremos agora que $\pounds(D(a,b);X)$ é não-vazio.

Se $v \in L^p(a,b;X)$ e $\varphi \in D(a,b)$, então $\varphi v \in L^p(a,b;X)$, de modo que

$$\int_a^b v(t)\,\varphi(t)\, dt.$$

existe. Não é difícil verificar que esta integral define um elemento de $\pounds(D(a,b);X)$, provando que qualquer função de $L^p(a,b;X)$ define uma distribuição vetorial sobre (a,b) com valores em X.

Dada uma distribuição $T \in \pounds\left(D\left(a,b\right);X\right)$, seu valor em φ representa-se, como de hábito, por $\langle T, \varphi \rangle$ e sua derivada de ordem k é definida por:

$$\left\langle \frac{d^kT}{dt^k}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle T, \frac{d^k\varphi}{dt^k} \right\rangle, \forall \varphi \in D\left(a,b\right).$$

$\frac{d^kT}{dt^k}$ também é uma distribuição vetorial sobre (a,b), fato que não é difícil de ser provado. Identificando $v \in L^p\left(a,b;X\right)$ com a distribuição vetorial que define, conclui-se que todo elemento de $L^p\left(a,b;X\right)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições vetoriais sobre (a,b). Nos demais capítulos deste texto, usaremos com freqüência o símbolo u_t, o qual será entendido como a derivada de u no sentido das distribuições vetoriais.

1.10 Outros resultados

Esta seção é constituída por resultados técnicos que tornam a leitura mais enfadonha, pois o leitor pode não conhecer a utilidade que cada teorema tem para a compreensão dos demais capítulos. Por isto sugerimos que passe imediatamente ao próximo capítulo e só leia os resultados abaixo no momento em que forem mencionados.

Teorema 16 *Suponha que* $f : [a,b] \cup [b,c] \to I\!R$ *satisfaça* $|f(x) - f(y)| \leq c_1 |x-y|, \forall x, y \in [a,b]$ *e* $|f(x) - f(y)| \leq c_2 |x-y|, \forall x, y \in [b,c]$. *Então* f *é uma função lipschitziana em* $[a,c]$, *com constante de Lipschitz igual a* $2\max\{c_1, c_2\}$.

Demonstração:

Dados $x, y \in [a,c]$ arbitrários, só precisamos analisar o caso em que $x \in [a,b)$ e $y \in (b,c]$.

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} \leq \frac{|f(b) - f(x)|}{|y-x|} + \frac{|f(y) - f(b)|}{|y-x|}.$$

Como $|y-x| \geq |x-b|$ e $|y-x| \geq |y-b|$:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} \leq 2\max\{c_1, c_2\}.$$

■

Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $T : X \to X$ é chamada de contração se existe um número real $\beta, 0 \leq \beta < 1$, tal que $d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y), \forall x, y \in X$.

Teorema 17 ***(Teorema de Contração de Banach)*** *Seja $(X, d), X \neq \emptyset$, um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então existe único ponto $x \in X$ tal que $Tx = x$. O ponto x é chamado ponto fixo de T.*

Demonstração em Kreysig [4, pág. 300]

Teorema 18 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e $u \in L^2(a, b; H_0^1(\Omega))$, então $\Delta u \in L^2(a, b; H^{-1}(\Omega))$.*

Demonstração:

Em primeiro lugar, provemos que $f \in L^2(\Omega)$ então $f_{x_i} \in H^{-1}(\Omega), 1 \leq i \leq n$. Tomemos $\varphi \in D(\Omega)$ arbitrária. Da teoria das distribuições:

$$\langle f_{x_i}, \varphi \rangle = -\langle f, \varphi_{x_i} \rangle .$$

Sendo f elemento de $L^2(\Omega)$ e identificando este espaço com seu dual:

$$\langle f_{x_i}, \varphi \rangle = -\int_\Omega f(x)\, \varphi_{x_i}(x)\, dx.$$

Logo:

$$|\langle f_{x_i}, \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |f(x)\, \varphi_{x_i}(x)|\, dx.$$

Por Cauchy-Schwarz:

$$|\langle f_{x_i}, \varphi \rangle| \leq \|f\| \, \|\varphi_{x_i}\| .$$

Como $f \in L^2(\Omega)$, mostramos que f_{x_i} é um funcional linear limitado em $D(\Omega)$. Então f_{x_i} possui uma extensão (a qual ainda denotamos por f_{x_i}) à $H_0^1(\Omega)$. Sabemos ainda que esta extensão é também um funcional linear limitado com a mesma norma do funcional original. Logo:

$$f_{x_i} \in H^{-1}(\Omega), \text{ e } \|f_{x_i}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|, 1 \leq i \leq n.$$

Tomando f igual a $\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}$, segue que Δu assume valores em $H^{-1}(\Omega)$ e

$$\left\| \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x_i^2} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \left\| \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right\|^2, \text{ q.t.p.} \tag{1.1}$$

A prova de que Δu é fortemente mensurável está baseada no seguinte teorema.

Sejam X e Y espaços de Banach e consideremos um operador $T : X \to Y$ linear e contínuo. Então o operador $T^* : L^p(a,b;X) \to L^p(a,b;Y), 1 \leq p < \infty$, definido por $(T^*f)(t) = T(f(t))$, é linear, contínuo e $\|T^*\| = \|T\|$.

A prova de que existe $I \subset (a,b)$, com $med(I) = b - a$, cuja imagem por T^*f é um subconjunto separável de X pode ser feita usando a continuidade de T^*.

Dado $w \in Y'$ arbitrário,

$$\langle w, (T^*f)(t) \rangle = \langle w, T(f(t)) \rangle = \left\langle T^t w, f(t) \right\rangle,$$

no qual $T^t : Y' \to X'$ denota o operador adjunto de T. Sendo $T^t w \in X'$ e $f \in L^p(a,b;X)$, a função $t \mapsto \langle T^t w, f(t) \rangle$ é mensurável, valendo o mesmo para $t \mapsto \langle w, (T^*f)(t) \rangle$, qualquer que seja $w \in Y'$.

Tomando $X = L^2(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega)$ e $T = \Delta$, prova-se que Δu é fortemente mensurável.

Então, $t \mapsto \|\Delta u(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ é mensurável, conforme Hille-Phillips [3, pág. 72]. O fato de que $t \mapsto \|\Delta u(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ é uma função de $L^2(a,b)$ segue de (1.1).

$\blacksquare$

Se X é um espaço cujos elementos são funções escalares definidas (q.t.p.) em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, como por exemplo, $X = L^2(\Omega)$ ou $X = H_0^1(\Omega)$, então $u : (a,b) \to X$ está univocamente associada à função $\hat{u} : \Omega \times (a,b) \to \mathbb{R}$ que associa cada ponto $(x,t) \in \Omega \times (a,b)$ ao valor de $u(t)$ no ponto x.

Fazendo a identificação de u com $\hat{u}$, se F é uma função escalar definida em $\Omega \times \mathbb{R}$, a composição de u com F faz sentido. Quando estivermos interessados na função $t \mapsto F(x, u(x,t))$, escreveremos $F(u(t))$ ou simplesmente, $F(u)$. Os símbolos $F(x, u(x,t))$ e $F(x,u)$ são utilizados quando desejamos explicitar a dependência da variável x.

Teorema 19 *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é limitado e* $u \in L^2\left(a,b;H_0^1(\Omega)\right)$. *Seja* $F:\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mensurável em* x *e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe* $c>0$ *tal que:* $|F(x,v)-F(x,w)| \leq c\,|v-w|, \forall v,w \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega$. *Suponha ainda que* $F(x,0)=0$. *Então* $F(u) \in L^2\left(a,b;H_0^1(\Omega)\right)$.

A demonstração pode ser encontrada em Treves [9, pág. 261].

Teorema 20 *Seja* X *um espaço de Banach e* $u,w \in L^1(a,b;X)$. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i. $u(t) = constante + \int\limits_0^t w(s)\,ds$;

ii. $\int\limits_a^b u(t)\,\varphi(t)\,dt = -\int\limits_a^b w(t)\,\varphi'(t)\,dt, \forall \varphi \in D(a,b)$;

iii. $\frac{d}{dt}\langle u(t),\eta\rangle = \langle w(t),\eta\rangle, \forall \eta \in X'$,
na qual $\frac{d}{dt}$ *denota a derivada no sentido das distribuições escalares sobre* (a,b) *e* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *a dualidade entre* X *e* X'.

A demonstração pode ser encontrada em Teman [8, pág. 250]. Observemos que se alguma das condições (i)-(iii) for satisfeita, de (i) segue que u é q.t.p. igual à uma função contínua em $[a,b]$.

Teorema 21 *Seja* X *espaço de Banach. Se* $u_\nu \to u$ *fraco* em* X', *então* $\|u\|_{X'} \leq \liminf \|u_\nu\|_{X'}$.

Demonstração em Strauss [7, pág. 9].

A razão da importância da topologia fraco* está no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em Hille-Phillips [3, pág. 37].

Teorema 22 *Se* X *é um espaço de Banach separável, então toda seqüência limitada em* X' *possui uma subseqüência convergente fraco*.*

Teorema 23 *Seja* X *é um espaço de Banach reflexivo, então* $u_\nu \to u$ *fraco em* X' *se, e somente se,* $u_\nu \to u$ *fraco*.*

A demonstração segue da identificação usual entre X e X''.

Teorema 24 ***(Aubin-Lions)*** *Sejam X, Y, Z espaços de Banach tais que X esteja contínua e compactamente imerso em Y, e Y esteja continuamente imerso em Z. Então o espaço*

$$W = \{v, v \in L^p(a,b;X) \ \ e \ v_t \in L^q(a,b;Z)\},$$

sendo $1 \leq p \leq \infty$ e $1 < q \leq \infty$, está contínua e compactamente imerso em $L^p(a,b;Y)$.

A demonstração pode ser encontrada em Strauss [7, pág. 34]. A norma considerada em W é

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(a,b;X)} + \|v_t\|_{L^q(a,b;Z)}.$$

Observemos que, para utilizarmos o teorema acima, podemos tomar $Y = Z$, mas não $X = Y$, a menos que Y seja um espaço vetorial de dimensão finita.

Capítulo 2

Equação de Onda Linear

Neste capítulo nos propomos estudar um pouco da equação de onda linear

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = f; \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega; \\ u(0) = u_0; \\ u_t(0) = u_1 \end{cases}$$

(problema de Dirichlet homogêneo), variando a regularidade dos dados iniciais e o tipo de domínio espacial.

Uma das motivações para tal estudo, é que exibe um método de resolução que pode ser adaptado para problemas não-lineares. Outra razão, e mais objetiva, é que nesta dissertação resolvemos problemas não-lineares a partir de soluções de problemas lineares.

Por motivos didáticos, primeiramente consideramos domínio espacial limitado. Os dois primeiros teoremas tratam exatamente do mesmo problema, sendo que no Teorema 2 obtemos solução mais regular do que no Teorema 1. Em ambos é usado o Método de Galerkin, que consiste em aproximar a solução que desejamos alcançar por soluções de problemas semelhantes, porém em dimensão finita.

O Método de Galerkin gera uma seqüência de aproximações e a tarefa mais difícil é mostrar que ela converge. É justamente aí que as demonstrações dos teoremas 1 e 2 diferem.

O primeiro teorema é provado explicitando detalhes que julgamos necessários ao leitor pouco familiarizado com o assunto. Entretanto, em nome da brevidade do texto, nos demais teoremas argumentos repetitivos são omitidos.

Formulação variacional:

A fim de passarmos à busca de soluções fracas para a equação de onda, devemos escolher uma formulação variacional. Suponhamos que todos os cálculos abaixo possam ser efetuados.

Multiplicando $\Delta u - u_{tt} = f$ por uma função teste $v(x)$:

$$\int_{\Omega} \Delta u(x,t)v(x)dx - \int_{\Omega} u_{tt}(x,t)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x,t)v(x)dx$$

Integrando por partes e impondo a condição de contorno sobre as funções teste: ($v = 0$ em $\partial\Omega$)

$$\int_{\Omega} \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx + \int_{\Omega} u_{tt}(x,t)v(x)dx = -\int_{\Omega} f(x,t)v(x)dx.$$

Multiplicando agora por $\varphi(t)$ e integrando no tempo:

$$\int_0^T (u_{tt}(t), v)\,\varphi(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\,\varphi(t)dt = -\int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)dt,$$

e então:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\,\varphi(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\,\varphi(t)dt = -\int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)dt.$$

Vejamos agora os espaços aos quais devem pertencer as funções teste. Para que a fórmula acima faça sentido, devemos ter $v \in H^1(\Omega)$, e impondo a condição de fronteira, escolhemos $v \in H_0^1(\Omega)$.

Já $\varphi(t)$ deve ter ao menos uma derivada integrável, pois precisaremos fazer integração por partes também no tempo. É suficiente escolhermos $\varphi \in C^1([0,T])$. No entanto, escolhemos $\varphi \in D(0,T)$, pois veremos que as escolhas são equivalentes.

Temos então que:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\,\varphi(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\,\varphi(t)dt = -\int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)dt, \forall \varphi \in D(0,T),$$
$\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Esta formulação é mais forte do que:

$$\frac{d}{dt}\left(u_t\left(t\right), v\right) + \left(\nabla u(t), \nabla v\right) = -\left(f(t), v\right), \forall v \in H_0^1\left(\Omega\right),$$

igualdade em $D'\left(0, T\right)$. Não escolhemos esta última pois já sabemos que a formulação mais forte apresentada acima tem solução.

Teorema 1 *Seja $\Omega \subset I\!R^n$ aberto e limitado. Seja ainda $f \in L^2_{loc}(I\!R; L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$ arbitrárias. Então existe única função u tal que:*

- $u \in L^\infty_{loc}(I\!R; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(I\!R; L^2(\Omega))$;
- $u_t \in L^\infty_{loc}(I\!R; L^2(\Omega)) \cap C^0(I\!R; H^{-1}(\Omega))$;
- $u_{tt} \in L^2_{loc}(I\!R; H^{-1}(\Omega))$;
- $\frac{d}{dt}(u_t(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = -(f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$, *igualdade no sentido de* $L^2_{loc}\left(I\!R\right)$;
- $u(0) = u_0$;
- $u_t(0) = u_1$.

Vale a seguinte estimativa:

$$\left\|u_t(t)\right\|^2 + \left\|\nabla u(t)\right\|^2 \le \left(\left\|u_1\right\|^2 + \left\|\nabla u_0\right\|^2 + \int_0^{|t|} \left\|f(s)\right\|^2 ds\right)\left(1 + |t|\right) e^{|t|}, \quad q.t.p.$$

em $I\!R$.

Demonstração:
Seja $\{e_k\}$ seqüência formada pelos autovetores de Δ, isto é:

$$\Delta e_k = -\lambda_k e_k, \forall k \in I\!N,$$

na qual $\{\lambda_k\}$ é uma seqüência não-decrescente de números reais estritamente positivos, divergindo para $+\infty$.

Como Ω limitado, da teoria espectral desenvolvida no Capítulo 1 resulta que $\{e_k\}$ é ortonormal completa em $L^2(\Omega)$ e ortogonal completa em $H_0^1(\Omega)$. Também vimos que as séries de Fourier de u_0 e u_1 são:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, e_k) e_k, \tag{2.1}$$

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(u_1, e_k)e_k. \tag{2.2}$$

Tomemos as seguintes aproximações para os dados iniciais:

$$u_0^m = \sum_{k=1}^{m}(u_0, e_k)e_k,$$

$$u_1^m = \sum_{k=1}^{m}(u_1, e_k)e_k.$$

As aproximações não precisam necessariamente serem tomadas da forma acima, eventualmente tomamos outro tipo, como veremos ainda neste capítulo. Em geral, é suficiente

$$u_0^m \to u_0 \text{ forte em } H_0^1(\Omega),$$

$$u_1^m \to u_1 \text{ forte em } L^2(\Omega).$$

1ª Etapa: Problema aproximado:

Seja m um número natural arbitrário e $V_m = span[e_1, e_2, ..., e_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros autovetores de Δ. Procuremos $u^m : I\!R \to V_m$ que satisfaça o seguinte **problema aproximado**:

$$\frac{d}{dt}(u_t^m(t), v) + (\nabla u^m(t), \nabla v) = -(f(t), v), \forall v \in V_m; \tag{2.3}$$

$$u^m(0) = u_0^m; \tag{2.4}$$

$$u_t^m(0) = u_1^m. \tag{2.5}$$

Como V_m é espaço vetorial, para que (2.3) se verifique é necessário e suficiente que esta igualdade seja válida para os elementos da base, de modo que (2.3) é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}(u_t^m(t), e_k) + (\nabla u^m(t), \nabla e_k) = -(f(t), e_k), 1 \leq k \leq m.$$

Usando a ortogonalidade das $e_k's$ verifica-se que:

$$u^m(t) \in V_m \Leftrightarrow u^m(t) = \sum_{k=1}^{m}(u^m(t), e_k)e_k.$$

Isto permite provarmos que:

$$\frac{d}{dt}(u_t^m(t), e_k) = \frac{d^2}{dt^2}(u^m(t), e_k), 1 \leq k \leq m,$$

e então, a igualdade (2.3) equivale à seguinte:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u^m(t), e_k) + (\nabla u^m(t), \nabla e_k) = -(f(t), e_k), 1 \leq k \leq m.$$

Usando propriedades especiais da base $\{e_k\}$ segue que a igualdade acima é equivalente a:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u^m(t), e_k) + \lambda_k(u^m(t), e_k) = -(f(t), e_k), 1 \leq k \leq m. \tag{2.6}$$

logo, u^m satisfaz (2.3) se, e somente se, satisfaz (2.6).

Escreveremos (2.4) e (2.5) de um modo equivalente e mais adequado aos nossos propósitos. Seja $g_k(t) = (u^m(t), e_k)$. Então:

$$u^m(0) = u_0^m \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} g_k(0)e_k = \sum_{k=1}^{m}(u_0, e_k)e_k.$$

Usando a independência linear dos elementos da base:

$$u^m(0) = u_0^m \Leftrightarrow g_k(0) = (u_0, e_k), 1 \leq k \leq m. \tag{2.7}$$

De modo análogo:

$$u_t^m(0) = u_1^m \Leftrightarrow \frac{d}{dt}g_k(0) = (u_1, e_k), 1 \leq k \leq m. \tag{2.8}$$

Resulta de (2.6), (2.7) e (2.8) que o problema aproximado proposto é equivalente a:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d^2}{dt^2}g_k\left(t\right) + \lambda_k g_k\left(t\right) = -\left(f\left(t\right), e_k\right), 1 \leq k \leq m, \\ &g_k(0) = (u_0, e_k), \\ &\tfrac{d}{dt}g_k(0) = (u_1, e_k). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Interpretando o símbolo $\frac{d^2}{dt^2}$ como derivada no sentido clássico, (2.9) é um sistema $m \times m$ de EDO's, linear e definido q.t.p em $\mathbb{R}$. Como $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, existe única solução definida em toda a reta. Isto implica que vale o mesmo para o problema aproximado. A igualdade (2.9) se dá entre funções $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, logo, é neste sentido que a igualdade do problema aproximado é satisfeita.

2ª Etapa: Estimativas a priori:
Sem muita dificuldade prova-se que:

$$u_t^m(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt} g_k(t) e_k.$$

Isto prova que, para cada t fixado, $u_t^m(t) \in V_m$ e podemos substituir v por $u_t^m(t)$ na equação aproximada, obtendo:

$$\frac{d}{dt}(u_t^m(t), u_t^m(t)) + (\nabla u^m(t), \nabla u_t^m(t)) = -(f(t), u_t^m(t)).$$

Fazendo alguns cálculos mostra-se que esta igualdade é equivalente a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^m(t)\|^2 = -(f(t), u_t^m(t)), \forall t \in \mathbb{R}.$$

As funções escalares envolvidas na igualdade acima são elementos de $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Isto permite que as integremos no intervalo $(0,t)$ a fim de escrever:

$$\frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^m(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|u_1^m\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0^m\|^2 - \int_0^t (f(s), u_s^m(s))\, ds.$$

Aplicando a desigualdade triangular:

$$\frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^m(t)\|^2 \le \frac{1}{2}\|u_1^m\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0^m\|^2 + \int_0^{|t|} |(f(s), u_s^m(s))|\, ds.$$

Por Cauchy-Schwarz:

$$\frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^m(t)\|^2 \le \frac{1}{2}\|u_1^m\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0^m\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|\, \|u_s^m(s)\|\, ds.$$

Mas $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ se $a, b \geq 0$. Então:

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \|u_1^m\|^2 + \|\nabla u_0^m\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2 \, ds + \int_0^{|t|} \|u_s^m(s)\|^2 \, ds. \tag{2.10}$$

Para $t \geq 0$ podemos usar a Desigualdade de Gronwall (Teorema 7 do Capítulo 1):

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(\|u_1^m\|^2 + \|\nabla u_0^m\|^2 + \int_0^{t} \|f(s)\|^2 \, ds \right) e^t, \forall t \geq 0. \tag{2.11}$$

Para $t \leq 0$ não é possível utilizar Gronwall em (2.10), mas usando as estimativas obtidas para $t \geq 0$ temos:

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(\|u_1^m\|^2 + \|\nabla u_0^m\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2 \, ds \right) (1 + |t|) \, e^{|t|}, \forall t \leq 0. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) resulta que:

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(\|u_1^m\|^2 + \|\nabla u_0^m\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2 \, ds \right) (1 + |t|) \, e^{|t|}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De (2.1), (2.2) e da Desigualdade de Bessel:

$$\|u_1^m\|^2 \leq \|u_1\|^2 ;$$

$$\|\nabla u_0^m\|^2 \leq \|\nabla u_0\|^2 .$$

Logo:

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2 \, ds \right) (1 + |t|) \, e^{|t|}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Fixando $T \geq 0$ arbitrário podemos enfim escrever que:

$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \int_0^T \|f(s)\|^2 ds\right)(1+T)\, e^T; \forall t \in [-T, T]$.

Então:

$$\{u^m\} \text{ é limitada em } L^\infty(-T, T; H_0^1(\Omega)); \tag{2.14}$$

$$\{u_t^m\} \text{ é limitada em } L^\infty(-T, T; L^2(\Omega)). \tag{2.15}$$

De (2.14) e do Lema 1, cujo enunciado e demonstração se encontram no final do capítulo, existe uma subseqüência $\{u^{m_k}\}$ e uma função $u \in L^\infty(-T, T; H_0^1(\Omega))$ tal que:

$$u^{m_k} \to u \text{ fraco* em } L^\infty(-T, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e}$$

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u^{m_k}(t), \nabla w(t))dt \to \int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla w(t))dt, \forall w \in L^1(-T, T; H_0^1(\Omega)). \tag{2.16}$$

Em particular, (2.15) é válida para $\{u^{m_k}\}$. Isto permite a extração de uma subseqüência $\{u^\nu\}$ de $\{u^{m_k}\}$ e garante a existência de uma função ω tal que:

$$u_t^\nu \to \omega \text{ fraco* em } L^\infty(-T, T; L^2(\Omega)). \tag{2.17}$$

Como $\{u^\nu\}$ é subseqüência de $\{u^{m_k}\}$, de (2.16) temos:

$$u^\nu \to u \text{ fraco* em } L^\infty(-T, T; H_0^1(\Omega)); \tag{2.18}$$

Provemos que na verdade: $\omega = u_t$. As convergências fracas (2.17) e (2.18) implicam em convergência no sentido de $D'(\Omega \times (-T, T))$. Como a operação de derivação é contínua neste espaço, segue que $\omega = u_t$.

Finalmente, podemos escrever:

$$u_t^\nu \to u_t \text{ fraco* em } L^\infty(-T, T; L^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Sendo um problema linear, as convergências (2.18) e (2.19) são suficientes para garantir que u é a função que procuramos, fato que será mostrado na próxima etapa.

Como $\{u^\nu\}$ é uma subseqüência de $\{u^{m_k}\}$, de (2.16) segue que:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u^\nu(t), \nabla w(t))dt \to \int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla w(t))dt, \forall w \in L^1(-T,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.20}$$

Fizemos a identificação de $L^2(\Omega)$ com seu dual, logo, o dual de $L^1(-T,T;L^2(\Omega))$ é $L^\infty(-T,T;L^2(\Omega))$ (conforme vimos na Seção 1.8) e a convergência (2.19) significa que:

$$\int_{-T}^{T} (u_t^\nu(t), w(t))dt \to \int_{-T}^{T} (u_t(t), w(t))dt, \forall w \in L^1(-T,T;L^2(\Omega)). \tag{2.21}$$

3ª Etapa: Verificação da equação:

Fixemos $m \in \mathbb{N}$ arbitrário. Como a igualdade na equação aproximada (2.3) se dá em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, podemos multiplicá-la por $\varphi \in C_0^\infty(-T,T)$ e integrar no tempo. Fazendo isto:

$$\int_{-T}^{T} \frac{d}{dt}(u_t^m(t), v)\varphi(t)dt + \int_{-T}^{T} (\nabla u^m(t), \nabla v)\varphi(t)dt = -\int_{-T}^{T} (f(t), v)\varphi(t)dt, \forall v \in V_m.$$

Mas $\nu > m \Rightarrow V_m \subset V_\nu$. Então, para $\nu > m$:

$$\int_{-T}^{T} \frac{d}{dt}(u_t^\nu(t), v)\varphi(t)dt + \int_{-T}^{T} (\nabla u^\nu(t), \nabla v)\varphi(t)dt = -\int_{-T}^{T} (f(t), v)\varphi(t)dt, \forall v \in V_m.$$

Fazendo integração por partes na primeira integral:

$$\int_{-T}^{T} (u_t^\nu(t), v)\varphi'(t)dt - \int_{-T}^{T} (\nabla u^\nu(t), \nabla v)\varphi(t)dt = \int_{-T}^{T} (f(t), v)\varphi(t)dt, \forall v \in V_m.$$

As convergências (2.20) e (2.21) são suficientes para garantir que fazendo $\nu \to +\infty$, obtemos:

$$\int_{-T}^{T} (u_t(t), v)\varphi'(t)dt - \int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla v)\varphi(t)dt = \int_{-T}^{T} (f(t), v)\varphi(t)dt, \forall v \in V_m.$$

Como m é arbitrário, por densidade:

$$\int_{-T}^{T}(u_t(t),v)\varphi'(t)dt - \int_{-T}^{T}(\nabla u(t),\nabla v)\varphi(t)dt = \int_{-T}^{T}(f(t),v)\varphi(t)dt, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Sendo $t \mapsto (u_t(t),v)$ elemento de $L^2(-T,T)$, define uma distribuição sobre $(-T,T)$. A primeira integral da igualdade acima é a derivada desta distribuição. Logo:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t),v),\varphi \right\rangle + \int_{-T}^{T}(\nabla u(t),\nabla v)\varphi(t)dt = -\int_{-T}^{T}(f(t),v)\varphi(t)dt.$$

Isto implica que:

$$\frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\nabla u(t),\nabla v) = -(f(t),v), \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

igualdade no sentido de $D'(-T,T)$. Mas as funções $t \mapsto (\nabla u(t),\nabla v)$ e $t \mapsto (f(t),v)$ são elementos do espaço vetorial $L^2(-T,T)$, portanto:

$$\frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\nabla u(t),\nabla v) = -(f(t),v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.22}$$

e a igualdade se dá no sentido de $L^2(-T,T)$.

4ª Etapa:Verificação das condições iniciais:

Como $u_t \in L^2(-T,T;L^2(\Omega))$, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo , obtemos que $u \in C^0(-T,T;L^2(\Omega))$, de modo que faz sentido calcular u no ponto $t=0$.

Tomando $\varphi \in C^1([0,T])$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, de (2.21) resulta que:

$$\int_0^T (u_t^\nu(t),v)\varphi(t)dt \to \int_0^T (u_t(t),v)\varphi(t)dt,$$

ou, equivalentemente

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u^\nu(t),v)\varphi(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v)\varphi(t)dt.$$

O fato de que $(u_t(t), v) = \frac{d}{dt}(u(t), v)$ segue do Teorema 20 do Capítulo 1.

Integrando por partes:

$$(u^\nu(t), v)\varphi(t) \mid_{t=0}^{t=T} - \int_0^T (u^\nu(t), v)\varphi'(t)dt \to (u(t), v)\varphi(t) \mid_{t=0}^{t=T} - \int_0^T (u(t), v)\varphi'(t)dt.$$

Tomando φ tal que $\varphi(T) = 0$ e $\varphi(0) = 1$:

$$(u^\nu(0), v) + \int_0^T (u^\nu(t), v)\varphi'(t)dt \to (u(0), v) + \int_0^T (u(t), v)\varphi'(t)dt. \tag{2.23}$$

A convergência (2.20) garante que

$$\int_0^T (u^\nu(t), v)\varphi'(t)dt \to \int_0^T (u(t), v)\varphi'(t)dt.$$

Logo, de (2.23)

$$(u^\nu(0), v) \to (u(0), v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.24}$$

Por outro lado: $u^\nu(0) = u_0^\nu \to u_0$ forte em $H_0^1(\Omega)$, o que implica que $u^\nu(0) \to u_0$ forte em $L^2(\Omega)$, que por sua vez implica que $u^\nu(0) \to u_0$ fraco em $L^2(\Omega)$; em particular:

$$(u^\nu(0), v) \to (u_0, v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.25}$$

A unicidade do limite, juntamente com (2.24) e (2.25) assegura que:

$$(u(0) - u_0, v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

e a densidade de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ implica:

$$u(0) = u_0.$$

Para provar que $u(0) = u_0$, foi essencial a continuidade de u, e, para conseguir isto, foi suficiente informação sobre a integrabilidade de u_t no tempo.

Para provar que $u_t(0) = u_1$, basta informação sobre integrabilidade de u_{tt}. A idéia é reescrever a equação (2.22) de uma forma equivalente e mais adequada. Sendo u_t função de $L^2(-T,T;L^2(\Omega))$, ela define a seguinte distribuição vetorial: $u_t : C_0^\infty(-T,T) \to L^2(\Omega)$, tal que $\langle u_t, \varphi\rangle = \int_{-T}^{T} u_t(t)\varphi'(t)dt$.

Derivando:

$$\langle u_{tt}, \varphi\rangle = -\langle u_t, \varphi'\rangle .$$

Então, $\langle u_{tt}, \varphi\rangle$ assume valores em $L^2(\Omega)$. Mas $L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$, sendo a identificação entre $L^2(\Omega)$ e seu dual feita via produto interno de $L^2(\Omega)$. Logo:

$$\langle\langle u_{tt}, \varphi\rangle , v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \langle u_{tt}, \varphi\rangle\, v dx.$$

Da definição de derivada no sentido das distribuições vetoriais:

$$\langle\langle u_{tt}, \varphi\rangle , v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \langle u_t, \varphi'\rangle\, v dx = -\int_\Omega \left(\int_{-T}^{T} u_t(t)\varphi'(t)dt\right) v dx.$$

Por Fubini:

$$\langle\langle u_{tt}, \varphi\rangle , v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_{-T}^{T} (u_t(t), v)\, \varphi'(t)dt.$$

Aplicando agora à segunda integral a definição de derivada no sentido de $D'(-T,T)$:

$$\langle\langle u_{tt}, \varphi\rangle , v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t), v), \varphi \right\rangle_{D'(-T,T),D(-T,T)} .$$

Sendo $t \mapsto \frac{d}{dt}(u_t(t), v)$ elemento de $L^2\left(-T,T\right)$, a última igualdade equivale a:

$$\langle\langle u_{tt}, \varphi\rangle , v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_{-T}^{T} \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\varphi(t)dt. \tag{2.26}$$

Como $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, os mesmos argumentos usados para mostrar (2.26) permitem escrever que:

$$\langle \langle f, \varphi \rangle, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{-T}^{T} (f(t), v)\varphi(t)dt. \tag{2.27}$$

Seja $\theta \in D(\Omega)$ arbitrário. Então:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla \theta)\varphi(t)dt = \int_{-T}^{T} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}, \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right] \varphi(t)dt$$

Usando a definição de derivada no sentido de $D'(\Omega)$, é possível reescrever o segundo membro da igualdade acima de forma equivalente:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla \theta)\varphi(t)dt = -\int_{-T}^{T} \left[\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x_i^2}, \theta \right\rangle_{D'(\Omega) D(\Omega)} \right] \varphi(t)dt,$$

ou seja:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla \theta)\varphi(t)dt = -\int_{-T}^{T} \langle \Delta u(t), \theta \rangle_{D'(\Omega) D(\Omega)} \varphi(t)dt. \tag{2.28}$$

No Teorema 18 do Capítulo 1 vimos:

$$u \in L^\infty(-T, T; H_0^1(\Omega)) \Rightarrow \Delta u \in L^2(-T, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Sendo $\Delta u(t)$ elemento de $H^{-1}(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega)$, resulta de (2.28) que:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla \theta)\varphi(t)dt = -\int_{-T}^{T} \langle \Delta u(t), \theta \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi(t)dt.$$

Isto implica que

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla \theta)\varphi(t)dt = -\int_{-T}^{T} \langle \Delta u(t)\varphi(t), \theta \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.$$

e então:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla\theta)\varphi(t)dt = \left\langle \int_{-T}^{T} \Delta u(t)\varphi(t), \theta \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \theta \in D(\Omega).$$

Sendo $D(\Omega)$ denso em $H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla v)\varphi(t)dt = \left\langle \int_{-T}^{T} \Delta u(t)\varphi(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \varphi \in D(-T, T), \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.29}$$

As igualdades (2.26), (2.27) e (2.29) implicam que a formulação variacional (2.22) é equivalente a:

$$\langle\langle \Delta u, \varphi\rangle, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle\langle u_{tt}, \varphi\rangle, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle\langle f, \varphi\rangle, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Em outras palavras:

$$\Delta u - u_{tt} = f,$$

no sentido das distribuições vetoriais com valores em $H^{-1}(\Omega)$. Sendo Δu e f elementos do espaço vetorial $L^2(-T, T; H^{-1}(\Omega))$ resulta que:

$$u_{tt} \in L^2\left(-T, T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

Finalmente, a igualdade (2.22) equivale a:

$$\Delta u - u_{tt} = f, \tag{2.30}$$

igualdade em $L^2(-T, T; H^{-1}(\Omega))$. Do fato de u_{tt} ser elemento de $L^2(-T, T; H^{-1}(\Omega))$ resulta que $u_t \in C^0(-T, T; H^{-1}(\Omega))$, fazendo sentido calcularmos u_t no ponto $t = 0$. Multiplicando a equação aproximada (2.3) por $\varphi \in C^1([0, T])$ e integrando no intervalo $[0, T]$:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t^m(t), v)\varphi(t)dt + \int_0^T (\nabla u^m(t), \nabla v)\varphi(t)\, dt = -\int_0^T (f(t), v)\varphi(t)\, dt, \forall v \in V_m.$$

Integrando por partes a primeira integral e tomando φ tal que $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$:

$$(u_1^m, v) + \int_0^T (u_t^m(t), v)\varphi'(t)dt - \int_0^T (\nabla u^m(t), \nabla v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\varphi(t)\, dt, \forall v \in V_m.$$

Considere somente índices $\nu > m$. Então:

$$(u_1^\nu, v) + \int_0^T (u_t^\nu(t), v)\varphi'(t)dt - \int_0^T (\nabla u^\nu(t), \nabla v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\varphi(t)\, dt, \forall v \in V_m.$$

De (2.3) e das convergências (2.20) e (2.21) resulta que fazendo $\nu \to +\infty$:

$$(u_1, v) + \int_0^T (u_t(t), v)\varphi'(t)dt - \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\varphi(t)\, dt, \forall v \in V_m.$$

Por densidade:

$$(u_1, v) + \int_0^T (u_t(t), v)\varphi'(t)dt - \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\varphi(t)\, dt, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.31}$$

Por outro lado, $\Delta u - u_{tt} = f$ em $L^2(-T, T; H^{-1}(\Omega))$; então:

$$\int_0^T \langle \Delta u(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi(t)dt - \int_0^T \langle u_{tt}(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega) H_0^1(\Omega)} \varphi(t)dt =$$
$$\int_0^T \langle f(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi(t)dt, \forall \varphi \in C^1([0, T]).$$

Usando o Teorema 20 do Capítulo 1:

$$\int_0^T \langle \Delta u(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi(t)dt - \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\, \varphi(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\, \varphi(t)dt.$$

Fazendo integração por partes:

$$(u_t(0), v) + \int_0^T (u_t(t), v)\, \varphi(t)dt + \int_0^T \langle \Delta u(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \varphi(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\, \varphi(t)dt.$$

Por densidade, podemos estender (2.29) para funções φ de $C^1([0,T])$, então:

$$(u_t(0),v)+\int_0^T (u_t(t),v)\,\varphi(t)dt-\int_0^T(\nabla u(t),\nabla v)\varphi(t)dt=\int_0^T (f(t),v)\,\varphi(t)dt.$$

As igualdades (2.31) e (2.32) implicam que:

$$u_t(0)=u_1. \tag{2.32}$$

5ª Etapa: Unicidade:

Sejam u e u^* soluções do Teorema 1, definidas em $[-T,T]$. Então $w=u-u^*$ é uma solução de:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(w_t(t),v)+(\nabla w(t),\nabla v)=0,\forall v\in H_0^1(\Omega)\,; \\ w(0)=0; \\ w_t(0)=0. \end{array} \tag{2.33}$$

Seja $s\in[0,T]$ fixo. Multiplicando a equação (2.33) por $\theta\in D(0,s)$ e integrando no intervalo $[0,s]$:

$$\int_0^s \frac{d}{dt}(w_t(t),v)\,\theta(t)dt+\int_0^s(\nabla w(t),\nabla v)\theta(t)dt=0.$$

Integração por partes da primeira integral nos dá:

$$-\int_0^s (w_t(t),v\theta'(t))\,dt+\int_0^s(\nabla w(t),\nabla\theta(t)v)dt=0,\forall\theta\in D(0,s) \text{ e } \forall v\in H_0^1(\Omega)\,.$$

Usando resultados de densidade, pode-se mostrar que:

$$-\int_0^s (w_t(t),z_t(t))\,dt+\int_0^s(\nabla w(t),\nabla z(t))dt=0, \tag{2.34}$$

para todo z tal que $z\in C^0(0,s;H_0^1(\Omega))$ e $z_t\in C^0(0,s;L^2(\Omega))$. Tomemos uma função z especial, da seguinte forma:

$$z(t)=-\int_t^s w(\xi)d\xi,t\in[0,s].$$

Observemos que:

$$constante = \int_0^s w(\xi)d\xi = \int_0^t w(\xi)d\xi + \int_t^s w(\xi)d\xi.$$

Derivando em relação a t e usando o fato de que $w(0) = 0$:

$$0 = w(t) - z_t(t) \Rightarrow z_t(t) = w(t).$$

Usando esta função z na equação (2.34) obtemos:

$$-\int_0^s (w_t(t), w(t))\, dt + \int_0^s (\nabla z_t(t), \nabla z(t))dt = 0.$$

Isto implica que:

$$-\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left\|w(t)\right\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left\|\nabla z(t)\right\|^2 dt = 0.$$

Então:

$$-\left\|w(s)\right\|^2 + \left\|w(0)\right\|^2 + \left\|\nabla z(s)\right\|^2 - \left\|\nabla z(0)\right\|^2 = 0.$$

Como $w(0) = 0$ e $z(s) = 0$, resulta que:

$$\left\|w(s)\right\|^2 + \left\|\nabla z(0)\right\|^2 = 0.$$

Logo $w(s) = 0$. Desde que s pode ser escolhido arbitrário:

$$w(s) = 0, \forall s \in [0, T].$$

A fim de obtermos esta mesma conclusão para valores de s negativos, integramos a equação (2.33) em $[s, 0]$, sendo agora s um ponto arbitrário de $[-T, 0]$. Cálculos análogos mostram:

$$w(s) = 0, \forall s \in [-T, 0].$$

Segue que:

$$u(s) = u^*(s), \forall s \in [-T, T].$$

6ª Etapa: Estimativa a posteriori:

De (2.13) e do Teorema 21 do Capítulo 1 segue que:

$$\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \leq \left(\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2 \, ds \right) (1 + |t|)\, e^{|t|}, \text{ q.t.p.}$$

em $I\!R$.

Última Etapa: Obtenção da Solução Global:

Denotemos por u^T a solução definida no intervalo $[-T, T]$ e definamos a seguinte função: $u(t) = u^T(t)$, para qualquer número T tal que $T \geq |t|$. Mostremos que a função u está bem definida, isto é, que o valor de u no ponto t independe da escolha de T. Tomemos T_1 e T_2 tais que $T_2 \geq T_1 \geq |t|$ e observemos que $u^{T_2}\,|_{[-T_1, T_1]}$ é uma solução em $[-T_1, T_1]$. Mas, já provamos que u^{T_1} é a <u>única</u> solução neste intervalo. Segue que $u^{T_2}\,|_{[-T_1,T_1]} = u^{T_1}$ e, portanto, $u(t)$ é independente da escolha de $T \geq |t|$.

A prova de que u assim definida é uma solução da equação de onda linear não é difícil de ser feita, por isto, é omitida. Também é com certa facilidade que se prova que u tem as demais propriedades enunciadas.

A unicidade de solução decorre da unicidade das u^{T}'s.

■

Teorema 2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1, a função u é tal que:*

- $u \in C^0\left(I\!R; H_0^1(\Omega)\right);$
- $u_t \in C^0\left(I\!R; L^2(\Omega)\right);$
- $u_{tt} \in L^2_{loc}\left(I\!R; H^{-1}(\Omega)\right).$

Demonstração:

Sabemos da teoria das EDO's que a solução do sistema linear (2.9) é:

$$g_k(t) = (u_0, e_k) \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{(u_1, e_k)}{\sqrt{\lambda_k}} sen\sqrt{\lambda_k}t - \frac{\cos\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t sen\sqrt{\lambda_k}s\,(f(s), e_k)\, ds +$$

$$+ \frac{sen\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \cos\sqrt{\lambda_k}s\,(f(s), e_k)\, ds.$$

Seja $T > 0$ arbitrário.

1ª Etapa: Convergência de $\{u^m\}$ em $C^0(-T,T;H_0^1(\Omega))$.

$\{u^m\}$ é Cauchy no espaço de Banach $C^0(-T,T;H_0^1(\Omega))$. De fato. Sejam m,n índices arbitrários (suponhamos $m > n$). Sendo $\{e_k\}$ ortogonal em $H_0^1(\Omega)$ vale o Teorema de Pitágoras. Logo:

$$\|u^m(t) - u^n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} g_k(t) e_k \right\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=n+1}^{m} |g_k(t)|^2 \lambda_k.$$

Usando a desigualdade $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, válida para números positivos:

$$\|u^m(t) - u^n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{m} \left[(u_0, e_k) \cos\sqrt{\lambda_k} t + \tfrac{(u_1, e_k)}{\sqrt{\lambda_k}} sen\sqrt{\lambda_k} t \right]^2 \lambda_k. +$$
$$2 \sum_{k=n+1}^{m} \left[\tfrac{sen\sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \cos\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds - \tfrac{\cos\sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t sen\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds \right]^2 \lambda_k.$$

Usando a mesma desigualdade e o fato de que $\cos^2\sqrt{\lambda_k} t, sen^2\sqrt{\lambda_k} t \leq 1$, obtemos:

$$\|u^m(t) - u^n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 4 \sum_{k=n+1}^{m} |(u_0, e_k)|^2 \lambda_k + 4 \sum_{k=n+1}^{m} |(u_1, e_k)|^2 +$$
$$+4 \sum_{k=n+1}^{m} \left| \int_0^t \cos\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds \right|^2 + 4 \sum_{k=n+1}^{m} \left| \int_0^t sen\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds \right|^2. \tag{2.35}$$

Analisemos agora o comportamento de cada um destes somatórios quando $m, n \to +\infty$.

Por Parseval:

$$\|u_1\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_1, e_k)|^2;$$

e a segunda soma de (2.35) pode ser feita arbitrariamente pequena para m, n suficientemente grandes.

Sabemos que:

$$\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nabla u_0, \nabla e_k)}{(\nabla e_k, \nabla e_k)} e_k \right\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nabla u_0, \frac{\nabla e_k}{\sqrt{e_k}} \right) \frac{e_k}{\sqrt{e_k}} \right\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Como $\left\{\frac{e_k}{\sqrt{e_k}}\right\}$ ortonormal em $H_0^1(\Omega)$, vale a Identidade de Parseval:

$$\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_0, e_k)|^2 \lambda_k$$

Isto prova que o primeiro somatório tende a zero quando $m, n \to +\infty$.

Analisemos agora o terceiro somatório.

$$\left|\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds\right|^2 \leq \left(\int_0^{|t|} \left|\cos\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\right| ds\right)^2, n+1 \leq k \leq m.$$

Por Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds\right|^2 \leq \int_0^{|t|} \left(\cos\sqrt{\lambda_k} s\right)^2 ds \int_0^{|t|} (f(s), e_k)^2\, ds, n+1 \leq k \leq m.$$

Logo:

$$\left|\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds\right|^2 \leq T \int_0^T (f(s), e_k)^2\, ds, n+1 \leq k \leq m,$$

e então:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left|\int_0^t sen\sqrt{\lambda_k} s\, (f(s), e_k)\, ds\right|^2 \leq T \int_0^T \left[\sum_{k=n+1}^{m} (f(s), e_k)^2\right] ds \qquad (2.36)$$

Sendo $f(s)$ elemento de $L^2(\Omega)$:

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(s), e_k)\, e_k;$$

de (2.36) segue que o terceiro somatório de (2.35) também tende a zero quando $m, n \to +\infty$.

Empregando a mesma argumentação à somatória restante, concluímos que $\{u^m\}$ é seqüência de Cauchy em $C^0(-T,T;H_0^1(\Omega))$ e portanto existe $u \in C^0(-T,T;H_0^1(\Omega))$ tal que:

$$u^m \to u \text{ em } C^0\left(-T,T;H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.37}$$

2ª Etapa: Convergência de $\{u_t^m\}$ em $C^0(-T,T;L^2(\Omega))$.

Lembremos que

$$u_t^m(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt} g_k(t)\, e_k,$$

e:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}g_k(t) &= -\sqrt{\lambda_k}\,(u_0,e_k)\, sen\sqrt{\lambda_k}t + (u_1,e_k)\cos\sqrt{\lambda_k}t + \\ & sen\sqrt{\lambda_k}t\int_0^t sen\sqrt{\lambda_k}s\,(f(s),e_k)\,ds + \cos\sqrt{\lambda_k}t\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_k}s\,(f(s),e_k)\,ds.\end{aligned}$$

Sendo $\{e_k\}$ ortonormal em $L^2(\Omega)$, vale o Teorema de Pitágoras:

$$\|u^m(t) - u^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \left|\frac{d}{dt} g_k(t)\right|^2.$$

Procedimento análogo ao da primeira etapa mostra que $\{u_t^m\}$ é seqüência de Cauchy no espaço de Banach $C^0(-T,T;L^2(\Omega))$, e portanto:

$$u_t^m \to u_t \text{ em } C^0\left(-T,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.38}$$

3ª Etapa: Verificação da equação:

A convergência (2.37) implica que $u^m \to u$ forte em $L^2(-T,T;H_0^1(\Omega))$, que por sua vez implica que $u^m \to u$ fraco em $L^2(-T,T;H_0^1(\Omega))$.

A convergência (2.38) implica que $u_t^m \to u_t$ forte em $L^2(-T,T;L^2(\Omega))$. Logo $u_t^m \to u_t$ fraco em $L^2(-T,T;L^2(\Omega))$.

Isto permite a execução dos mesmos cálculos do Teorema 1 e a conclusão de que u satisfaz a equação.

4ª Etapa: Verificação das condições iniciais:

Em particular, de (2.37) resulta que $u^m(0) \to u(0)$ forte em $H_0^1(\Omega)$. Por outro lado $u_0^m \to u_0$.

Sendo $u^m(0) = u_0^m$, da unicidade do limite resulta que:

$$u(0) = u_0.$$

Argumentação análoga permite a prova de que $u_t(0) = u_1$.

As demais etapas são idênticas às da primeira versão.

■

Comparando os enunciados dos teoremas acima, observamos que o 2 tem resultados melhores do que o 1, fato que poderia justificar a exclusão do Teorema 1. A motivação para sua inclusão é que ele exibe um método de demonstrar a convergência que pode ser adaptado para situações mais gerais, como problemas lineares em domínio ilimitado e problemas não-lineares.

O emprego do método de convergência do Teorema 2 fica restrito às situações nas quais é possível obter a solução explícita do sistema de EDO's (2.9). O caso mais importante no qual isto ocorre é quando o sistema de EDO's é linear e, portanto, provém de uma EDP linear.

Outra restrição ao emprego deste método de convergência é a existência de uma base ortogonal nos espaços adequados. Observemos que a ortogonalidade foi fortemente usada na demonstração da convergência no teorema 2.

Para dar um exemplo da utilidade das estimativas a priori, passemos agora ao estudo da equação de onda linear em domínio espacial ilimitado. Neste caso não podemos garantir a existência da base ortogonal a que nos referimos no parágrafo anterior, logo, não é possível adaptarmos a demonstração do Teorema 2. Porém, as estimativas a priori permitem que demonstremos existência de solução para este caso também.

Teorema 3 ***(Domínio ilimitado):*** *Seja $\Omega \subset I\!R^n$ um conjunto aberto. Seja ainda $f \in L^2_{loc}(I\!R; L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$ arbitrárias. Então existe única função u tal que:*

- $u \in L^\infty_{loc}(I\!R; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(I\!R; L^2(\Omega))$;
- $u_t \in L^\infty_{loc}(I\!R; L^2(\Omega)) \cap C^0(I\!R; H^{-1}(\Omega))$;

- $u_{tt} \in L^2_{loc}(I\!R; H^{-1}(\Omega))$;
- $\frac{d}{dt}(u_t(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = -(f(t), v), \forall v \in H^1_0(\Omega)$; *igualdade no sentido de* $L^2_{loc}(I\!R)$;
- $u(0) = u_0$;
- $u_t(0) = u_1$.

Vale a seguinte estimativa:

$$\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \leq \left(\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2 \, ds \right) (1 + |t|) \, e^{|t|}, \quad q.t.p. \ em \ I\!R.$$

Demonstração:
Ao retirarmos a hipótese de limitação feita sobre Ω, devemos tomar alguns cuidados.

A Desigualdade de Poincaré não é válida, de modo que não temos inclusão contínua de $H^1_0(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e, portanto, não estamos sob as hipóteses da teoria espectral do Capítulo 1. Assim sendo, não é possível garantir a existência de uma base de $H^1_0(\Omega)$ e de $L^2(\Omega)$ formada pelos autovetores de Δ. Isto impede que a demontração dos teoremas 1 e 2 seja válida. Felizmente podemos adaptar a prova do Teorema 1 para este caso.

Estamos considerando $H^1_0(\Omega)$ equipado com a norma de $H^1(\Omega)$.

Seja $\{e_k\}$ base ortonormal de $H^1_0(\Omega)$. Então:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} ((u_0, e_k)) \, e_k,$$

no qual $((\cdot, \cdot))$ denota o produto interno de $H^1(\Omega)$.

Seja:

$$u_0^m = \sum_{k=1}^{m} ((u_0, e_k)) \, e_k. \tag{2.39}$$

Na obtenção das estimativas a priori, no Teorema 1, foi utilizada a Desigualdade de Bessel para limitar as seqüências de aproximações dos dados iniciais (ver (2.12) e (2.13)). Mas, lembremos que tal desigualdade é válida se trabalharmos com base ortogonal. Como a base com a qual trabalhamos agora não é ortogonal em $L^2(\Omega)$, precisamos mostrar que as aproximações para u_1 são limitadas.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ denso em $L^2(\Omega)$, existe uma seqüência $\{u_1^m\}$, com $u_1^m \in V_m$, tal que $u_1^m \to u_1$ forte em $L^2(\Omega)$. Da continuidade da norma: $\|u_1^m\| \to \|u_1\|$, e então existe $M_1 > 0$ tal que:

$$\|u_1^m\| \leq M_1, \forall m \in I\!N. \tag{2.40}$$

Como $u_1^m \in V_m$:

$$u_1^m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^m e_k.$$

no qual os $\alpha_k^{m\prime}s$ são os coeficientes de u_1^m na base $\{e_k\}$.

1ª Etapa: Problema Aproximado:

O problema aproximado é o mesmo dos casos anteriores, mas o sistema de EDO's é:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{d^2}{dt^2} g_j^m(t)(e_j, e_k) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_j^m(t)(\nabla e_j, \nabla e_k), 1 \leq k \leq m; \\ g_k^m(0) = ((u_0, e_k)); \\ \frac{d}{dt} g_k^m(0) = \alpha_k^m; \end{array}$$

no qual $g_k^m(t) = ((u^m(t), e_k))$.

Este sistema tem solução única definida em toda a reta.

Observemos que $u^m(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} g_j^m(t) e_j$ e $u^{m+1}(t) = \sum\limits_{j=1}^{m+1} g_j^{m+1}(t) e_j$. Nada garante que os primeiros m coeficientes de u^{m+1} sejam iguais aos coeficientes de u^m (quando trabalhamos com a base de autovetores de Δ, isto acontece).

2ª Etapa: Estimativas a priori:

Procedendo exatamente como na obtenção de estimativas do Teorema 1 temos:

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(\|u_1^m\|^2 + \|\nabla u_0^m\|^2 + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2 ds\right)(1 + |t|) e^{|t|},$$

$\forall t \in I\!R$.

Como $\|\nabla u_0^m\| \leq \|u_0^m\|_{H^1(\Omega)}$,

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(\|u_1^m\|^2 + \|u_0^m\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2\, ds\right)(1+|t|)\, e^{|t|},$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.

Da Desigualdade de Bessel e de (2.40):

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(M_1 + \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^{|t|} \|f(s)\|^2\, ds\right)(1+|t|)\, e^{|t|},$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.

Seja $T > 0$ arbitrário. Logo:

$$\|u_t^m(t)\|^2 + \|\nabla u^m(t)\|^2 \leq \left(M_1 + \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^{T} \|f(s)\|^2\, ds\right)(1+T)\, e^{T}, \forall t \in [-T,T]. \tag{2.41}$$

Como

$$u^m(t) = u^m(0) + \int_0^t u_s^m(s)ds,$$

resulta que:

$$\|u^m(t)\| \leq \|u^m(0)\| + \int_0^t \|u_s^m(s)\|\, ds. \tag{2.42}$$

De (2.41) obtemos que:
$\{u_t^m\}$ limitada em $L^\infty(-T,T;L^2(\Omega))$.
De (2.41) e (2.42) resulta que:
$\{u^m\}$ limitada em $L^\infty(-T,T;H_0^1(\Omega))$.
As demais etapas são semelhantes às respectivas etapas do Teorema 1 e, por isto, serão omitidas. A principal dificuldade (que é mais braçal do que intelectual) na adaptação consiste no fato de que o produto interno de $H_0^1(\Omega)$ considerado naquele teorema ser diferente do produto interno de $H^1(\Omega)$.

$\blacksquare$

Vejamos agora que tipo de mudança ocorre na regularidade da solução quando supomos dados iniciais mais regulares.

Teorema 4 ***(Dados iniciais mais regulares)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado e bem regular. Dados $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega)), u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $u_1 \in H^1_0(\Omega)$ existe única função u tal que:*

- $u \in C^0(\mathbb{R}; H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$;
- $u_t \in C^0(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega))$;
- $u_{tt} \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$;
- $\frac{d}{dt}(u_t(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v), \forall v \in H^1_0(\Omega)$; *a igualdade se dá no sentido de* $L^2_{loc}(\mathbb{R})$;
- $u(0) = u_0$;
- $u_t(0) = u_1$.

Demonstração

As hipóteses sobre Ω garantem que $V = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ equipado com o produto interno dado por $(\Delta u, \Delta v)$ é um espaço de Hilbert e que a seqüência $\{e_k\}$ dos autovetores de Δ é uma base ortogonal de V. Podemos fazer a demonstração usando argumentos análogos aos do Teorema 1, ou podemos escolher um caminho análogo ao do Teorema 2. Adotando o segundo caminho obtemos uma solução que satisfaz o enunciado deste teorema. Se adotarmos o primeiro obtemos uma solução menos regular, como aconteceu no Teorema 1.

$\blacksquare$

Se acrescentarmos às hipóteses dos teoremas 1, 2 e 4 a de que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto com fronteira bem regular, então do Capítulo 1 sabemos que $H^1_0(\Omega)$ é o núcleo do operador traço, de modo que $u = 0$ em $\partial\Omega$ (sendo mais rigoroso, q.t.p. em $\mathbb{R}$ temos que $\gamma_0(u(t)) = 0$).

Sob esta hipótese adicional, provamos que existe única função u tal que:

$$
\begin{cases}
\Delta u - u_{tt} = f; \\
u = 0 \text{ em } \partial\Omega; \\
u(0) = u_0; \\
u_t(0) = u_1.
\end{cases}
$$

sendo que nos teoremas 1 e 2 a equação se verifica no sentido de $L^2_{loc}(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega))$, enquanto que no Teorema 4, com dados iniciais mais regulares, a igualdade se dá entre funções de $L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

As equações do tipo onda tem a propriedade de manter a regularidade dos dados iniciais, fato que não acontece, por exemplo, em equações do tipo calor, nas quais se ganha regularidade. Este fato pode ser comprovado observando os enunciados dos teoremas deste capítulo. Nos três primeiros, a posição inicial está em $H^1_0(\Omega)$ e a solução, q.t.p. no tempo, é uma função de $H^1_0(\Omega)$. No último teorema, a posição inicial u_0é um elemento de $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e a solução assume valores neste espaço.

Mesmo para problemas do tipo onda não-lineares este fato ocorre, como podemos comprovar, observando o enunciado do Teorema 2 do próximo capítulo ou os teoremas 2 e 3 do Capítulo 4.

Mostremos agora a continuidade da solução em relação aos dados iniciais. Seja $W = \{v; v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega)) \text{ e } v_t \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))\}$no qual consideramos a norma

$$
\|v\|_W = \|v\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega))} + \|v_t\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}.
$$

Wé Banach. Consideremos a família de equações à um parâmetro ε

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}(u_{t\varepsilon}(t), v) + (\nabla u_\varepsilon(t), \nabla v) = -(f(t), v), \forall v \in H^1_0(\Omega); \\
u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}; \\
u_{\varepsilon t}(0) = u_{1\varepsilon};
\end{cases}
$$

sendo $u_{0\varepsilon} \in H^1_0(\Omega)$, $u_{1\varepsilon} \in L^2(\Omega)$. O símbolo $u_{t\varepsilon}$denota a derivada de $u_\varepsilon$no sentido das distribuições vetoriais. Como o problema é linear, $w_\varepsilon = u - u_\varepsilon$é a solução de

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}(u_{t\varepsilon}(t), v) + (\nabla u_\varepsilon(t), \nabla v) = 0, \forall v \in H^1_0(\Omega); \\
w_\varepsilon(0) = u_0 - u_{0\varepsilon}; \\
w_{\varepsilon t}(0) = u_1 - u_{1\varepsilon}.
\end{cases}
$$

Da estimativa a posteriori

$$\|w_{t\varepsilon}(t)\|^2+\|\nabla w_\varepsilon(t)\|^2 \leq \left(\|u_1 - u_{1\varepsilon}\|^2 + \|\nabla(u_0 - u_{0\varepsilon})\|^2\right)(1+T)e^T, \forall t \in [-T,T],$$

sendo $T > 0$ arbitrário. Podemos então, fazer u_ε suficientemente próximo de u (no sentido de W), bastando para isto tomarmos $u_{0\varepsilon}$ e $u_{1\varepsilon}$ suficientemente próximos de u_0 e u_1, respectivamente.

Isto significa que pequenas modificações nos dados iniciais, não acarretam grandes mudanças na solução da equação de onda linear.

Vejamos agora o lema utilizado na demonstração do Teorema 1.

Lema 1 *Se $\{u^m\}$ limitada em $L^\infty(-T,T;H_0^1(\Omega))$ então existe uma subseqüência $\{u^{m_k}\}$ e uma função $u \in L^\infty(-T,T;H_0^1(\Omega))$ tal que:*

$u^{m_k} \to u$ *fraco* em* $L^\infty(-T,T;H_0^1(\Omega))$ *e*
$\int_{-T}^{T}(\nabla u^{m_k}(t), \nabla w(t))\,dt \to \int_{-T}^{T}(\nabla u(t), \nabla w(t))\,dt, \forall w \in L^1(-T,T;H_0^1(\Omega)).$

Demonstração:

Sendo $\{u^m\}$ limitada em $L^\infty(-T,T;H_0^1(\Omega))$, do Teorema 22 do Capítulo 1 segue que existe uma subseqüência, que continuamos denotando por $\{u^m\}$ tal que:

$$u^m \to u \text{ fraco* em } L^\infty\left(-T,T;H_0^1(\Omega)\right).$$

Mas $\{u^m\}$ limitada em $L^\infty(-T,T;H_0^1(\Omega))$ implica que, para cada $i = 1,2,...,n$, a seqüência $\left\{\frac{\partial u^m}{\partial x_i}\right\}$ é limitada em $L^\infty(-T,T;L^2(\Omega))$. Sendo assim, existe uma subseqüência $\left\{\frac{\partial u^{m_k}}{\partial x_1}\right\}$ convergente fraco* neste espaço. Em particular, para cada $w \in L^1(-T,T;H_0^1(\Omega))$:

$$\int_{-T}^{T}\left(\frac{\partial u^{m_k}(t)}{\partial x_1}, \frac{\partial w(t)}{\partial x_1}\right)dt \to \int_{-T}^{T}\left(v_1, \frac{\partial w(t)}{\partial x_1}\right)dt,$$

para alguma função v_1 de $L^1(-T,T;L^2(\Omega))$. Esta convergência e a convergência fraca* obtida anteriormente implicam em convergência no sentido de $D'(\Omega \times (-T,T))$. Como a operação de derivação é contínua no espaço das distribuições, segue que $v_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}u(t)$ e então, $\forall w \in L^1(-T,T;H_0^1(\Omega))$:

$$\int_{-T}^{T} \left(\frac{\partial u^{m_k}(t)}{\partial x_1}, \frac{\partial w(t)}{\partial x_1} \right) dt \to \int_{-T}^{T} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_1}, \frac{\partial w(t)}{\partial x_1} \right) dt.$$

Por procedimento análogo, da subseqüência $\left\{ \frac{\partial u^{m_k}}{\partial x_2} \right\}$ extraímos uma subseqüência (ainda denotada por $\left\{ \frac{\partial u^{m_k}}{\partial x_2} \right\}$) tal que, $\forall w \in L^1(-T, T; H_0^1(\Omega))$:

$$\int_{-T}^{T} \left(\frac{\partial u^{m_k}(t)}{\partial x_2}, \frac{\partial w(t)}{\partial x_2} \right) dt \to \int_{-T}^{T} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_2}, \frac{\partial w(t)}{\partial x_2} \right) dt.$$

E assim, sucessivamente, podemos provar que existe uma subseqüência $\{u^{m_k}\}$ tal que:

$$\int_{-T}^{T} (\nabla u^{m_k}(t), \nabla w(t))\, dt \to \int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \nabla w(t))\, dt, \forall w \in L^1\left(-T, T; H_0^1(\Omega)\right).$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

O Problema com Não-linearidade Lipschitziana

Este capítulo trata da resolução da equação não-linear:

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = F(x, u); \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega; \\ u(0) = u_0; \\ u_t(0) = u_1; \end{cases}$$

na qual F é uma função lipschitziana na segunda variável. Chamaremos esta equação de **Problema Lipschitz**.

O estudo do Problema Lipschitz se justifica pois introduz um método de resolução de EDP's não-lineares que consiste em olhar para equação como um problema de ponto fixo. No caso aqui apresentado, a natureza da não-linearidade permite que utilizemos o Teorema de Contração de Banach para garantir existência e unicidade do ponto fixo.

O teorema abaixo permite que aproximemos uma função contínua $F(x, u)$, F com o mesmo sinal de u, por funções lipschitzianas, enquanto que o Teorema 2 resolve o Problema Lipschitz. Estes dois teoremas são a base da resolução de outro problema não-linear, que é apresentado no próximo capítulo.

Teorema 1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto limitado e* $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua tal que* $uF(x, u) \geq 0, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall u \in \mathbb{R}$. *Então existe uma seqüência* $\{F_k\}$ *de funções contínuas definidas em* $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, *assumindo valores em* $\mathbb{R}$ *tais que:*

- $F_k \to F$ *pontualmente em* $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$;

- $F_k \to F$ *uniformemente nos compactos de* $\overline{\Omega} \times I\!R$;
- F_k *é localmente lipschitziana, isto é, para cada* k *existe uma função* $c_k \in L^\infty(\Omega)$ *que satisfaz:*
$|F_k(x,u) - F_k(x,v)| \leq c_k(x)|u-v|, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall u,v \in I\!R$;
- $uF_k(x,u) \geq 0, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall u \in I\!R, \forall k \in I\!N$.

Demonstração:

Como $G(x,u) = \int\limits_0^u F(x,s)\,ds$, da definição de derivada e do Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$F(x,u) = \frac{\partial G}{\partial u}(x,u) = \lim_{k\to+\infty} \frac{G\left(x, u+\frac{S}{k}\right) - G(x,u)}{\frac{s}{k}}, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall u \in I\!R,$$

no qual $S = \text{sinal}(u)$ e $\text{sinal}(u) = \begin{cases} 1, \text{ se } u > 0; \\ 0, \text{ se } u = 0; \\ -1, \text{ se } u < 0. \end{cases}$

Se tomarmos $F_k(x,u) = \frac{G\left(x,u+\frac{S}{k}\right) - G(x,u)}{\frac{s}{k}}, u \neq 0$, e $F_k(x,0) = 0$, garantimos que $F_k \to F$ pontualmente e $uF_k(x,u) \geq 0$, no entanto nada garante que F_k seja contínua em $u = 0$ e, sendo F_k descontínua perdemos qualquer esperança de que seja lipschitziana. Para dar um exemplo no qual F_k é realmente descontínua na origem, tomemos $F(u) = u$. Neste caso, $F_k(x,u) = u + \frac{S}{k}$, que é descontínua em $u = 0$. Com o objetivo de contornar este problema, definamos:

$$F_k(x,u) = \begin{cases} Sk\left[G\left(x, u+\frac{S}{k}\right) - G(x,u)\right], \text{ se } \frac{1}{k} \leq |u| \leq k; \\ k^2\left[G\left(x, \frac{2S}{k}\right) - G\left(x, \frac{S}{k}\right)\right]u, \text{ se } 0 \leq |u| < \frac{1}{k}; \\ F_k(x, Sk), \text{ se } |u| > k. \end{cases}$$

Não é difícil verificar que F_k é contínua e $uF_k(x,u) \geq 0$. Passemos agora a demonstração de que F_k é lipschitziana. Pelo Teorema 16 do Capítulo 1 basta que verifiquemos que F_k é lipschitziana em cada intervalo $\left[0, \frac{1}{k}\right]$, $\left[\frac{1}{k}, k\right]$, $[k, +\infty)$, $\left[-\frac{1}{k}, 0\right]$, $\left[-k, -\frac{1}{k}\right]$ e $(-\infty, -k]$.

Se $\frac{1}{k} \leq u < v \leq k$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi \in (u,v)$ tal que:

$$\left|\frac{F_k(x,u) - F_k(x,v)}{u-v}\right| = \left|\frac{\partial F_k}{\partial \xi}(x,\xi)\right|.$$

Da definição de F_k

$$\left|\frac{F_k(x,u)-F_k(x,v)}{u-v}\right| = k\left|F(x,\xi+\frac{1}{k})-F(x,\xi)\right|.$$

Logo

$$\left|\frac{F_k(x,u)-F_k(x,v)}{u-v}\right| \leq \max_{t,s\in[-k-1,k+1]} k\left|F(x,t)-F(x,s)\right|; u,v\in\left[\frac{1}{k},k\right]. \tag{3.1}$$

O mesmo tipo de argumentação mostra que a desigualdade acima é válida para $u,v\in\left[-k,-\frac{1}{k}\right]$.

Como F_k é linear nos intervalos $\left[-\frac{1}{k},0\right]$, $\left[0,\frac{1}{k}\right]$, $(-\infty,-k]$ e $[k,+\infty)$, é uma função lipschitziana cuja constante de Lipschitz, em cada intervalo, pode ser tomada como o valor absoluto da inclinação da reta. Neste caso:

$$\left|\frac{F_k(x,u)-F_k(x,v)}{u-v}\right| = k^2\left[G\left(x,\frac{2}{k}\right)-G\left(x,\frac{1}{k}\right)\right], \text{ se } u,v\in\left[0,\frac{1}{k}\right].$$

Usando a definição de G :

$$\left|\frac{F_k(x,u)-F_k(x,v)}{u-v}\right| \leq k\max_{s\in\left[\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right]}\left|F(x,s)\right|.$$

Sendo $F(x,0)=0, \left|F(x,s)\right| = \left|F(x,s)-F(x,0)\right|$ e então:

$$\left|\frac{F_k(x,u)-F_k(x,v)}{u-v}\right| \leq k\max_{t,s\in\left[\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right]}\left|F(x,s)-F(x,t)\right|, \forall u,v\in\left[0,\frac{1}{k}\right]. \tag{3.2}$$

Cálculos análogos mostram que:

$$\left|\frac{F_k(x,u)-F_k(x,v)}{u-v}\right| \leq k\max_{t,s\in\left[-\frac{2}{k},-\frac{1}{k}\right]}\left|F(x,s)-F(x,t)\right|, \forall u,v\in\left[-\frac{1}{k},0\right]. \tag{3.3}$$

Como fora do intervalo $[-k, k]$ a função F_k é lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 0, de (3.1), (3.2) e (3.3) segue que:

$$\left|\frac{F_k(x,u) - F_k(x,v)}{u-v}\right| \leq k \max_{t,s\in[-k-1,k+1]} |F(x,t) - F(x,s)|, u, v \in I\!R. \quad (3.4)$$

e podemos tomar: $c_k(x) = k \max\limits_{t,s\in[-k-1,k+1]} |F(x,t) - F(x,s)|$. Sendo F contínua em $\overline{\Omega}$, segue que c_k é limitada.

Da definição de F_k pode-se verificar que $F_k \to F$ pontualmente. Provemos agora que esta convergência é uniforme sobre os compactos. Seja Ω_1 um subconjunto compacto de $\overline{\Omega} \times I\!R$. Então ele está contido em algum compacto da forma $\Omega_2 \times [-T, T]$, sendo Ω_2 um compacto de $\overline{\Omega}$. Tomemos índices tais $k \geq T$. Para $u \in \left[\frac{1}{k}, k\right]$ ou $u \in \left[-k, -\frac{1}{k}\right]$:

$$|F_k(x,u) - F(x,u)| = \left|Sk\left[G\left(x, u+\frac{s}{k}\right) - G(x,u)\right] - F(x,u)\right|.$$

Da definição de G :

$$|F_k(x,u) - F(x,u)| = \left|Sk\int_u^{u+\frac{S}{k}} F(x,v)\,dv - F(x,u)\right|.$$

Reescrevendo $F(x,u)$ de uma forma mais adequada:

$$|F_k(x,u) - F(x,u)| = \left|Sk\int_u^{u+\frac{S}{k}} F(x,v)\,dv - Sk\int_u^{u+\frac{S}{k}} F(x,u)\,dv\right|.$$

Daí:

$$|F_k(x,u) - F(x,u)| = \left|Sk\int_u^{u+\frac{S}{k}} F(x,v) - F(x,u)\,dv\right|.$$

Segue que:

$$|F_k(x,u) - F(x,u)| \leq Sk \int_u^{u+\frac{S}{k}} |F(x,v) - F(x,u)|\, dv.$$

Então:

$$|F_k(x,u) - F(x,u)| \leq Sk \int_u^{u+\frac{S}{k}} \max_{x\in\Omega_2} |F(x,v) - F(x,u)|\, dv. \tag{3.5}$$

Sendo F contínua no compacto $\Omega_2 \times [-T,T]$, é uniformemente contínua. Logo, $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ (independente de x e u) tal que:

$$\|(y,v) - (x,u)\|_{\mathbb{R}^{n+1}} < \delta_1 \Rightarrow |F(x,s) - F(x,u)| < \varepsilon.$$

Em particular, para $y = x$ obtemos:

$$|v - u| < \delta_1 \Rightarrow |F(x,s) - F(x,u)| < \varepsilon.$$

Como esta implicação é válida para todo $x \in \Omega_2$:

$$|v - u| < \delta_1 \Rightarrow \max_{x\in\Omega_2} |F(x,s) - F(x,u)| \leq \varepsilon. \tag{3.6}$$

Tomando $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 > \max\left\{T, \frac{1}{\delta_1}\right\}$, de (3.6) resulta que:

$$k > k_1 \Rightarrow Sk \int_u^{u+\frac{S}{k}} \max_{x\in\Omega_2} |F(x,v) - F(x,u)|\, dv \leq Sk \int_u^{u+\frac{S}{k}} \varepsilon = \varepsilon.$$

Usando (3.5):

$$k > k_1 \Rightarrow |F_k(x,v) - F(x,u)| \leq \varepsilon, \forall x \in \Omega_2, \forall u \in \left[-k, \frac{1}{k}\right] \cup \left[\frac{1}{k}, k\right]. \tag{3.7}$$

Observemos que k_1 depende somente de T e δ_1, que por sua vez é independente de x e u. Analisemos agora $u \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$. Neste caso, $|F_k(u,s) - F(x,u)| = \left|SkG\left(x, \frac{S}{k}\right) - F(x,u)\right|$ e, procedendo como no caso anterior obtemos:

$$|F_k(x,u) - F(x,u)| \leq Sk \int_0^{\frac{S}{k}} \max_{x \in \Omega_2} |F(x,v) - F(x,u)| \, dv \tag{3.8}$$

A continuidade uniforme de F no compacto $\Omega_2 \times [-T, T]$ garante a existência de $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|s-u| < \delta_2 \Rightarrow \max_{x \in \Omega_2} |F(x,v) - F(x,u)| \leq \varepsilon.$$

Tomando $k_2 > \frac{1}{\delta_2}$:

$$k > k_2 \Rightarrow Sk \int_0^{\frac{S}{k}} \max_{x \in \Omega_2} |F(x,v) - F(x,u)| \, dv \leq \varepsilon.$$

Usando agora a desigualdade (3.8):

$$k > k_2 \Rightarrow \max_{x \in \Omega_2} |F_k(x,u) - F(x,u)| \leq \varepsilon, \forall u \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]. \tag{3.9}$$

Basta agora tomar $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ e observar (3.7) e (3.9) para afirmar que:

$$k > k_0 \Rightarrow \max_{x \in \Omega_2} |F_k(x,u) - F(x,u)| \leq \varepsilon, \forall u \in [-T, T].$$

$\blacksquare$

Passemos agora à resolução do Problema Lipschitz.

Teorema 2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e bem regular. Seja $F(x,u)$ uma função escalar, definida em $\Omega \times \mathbb{R}$, mensurável em x e satisfazendo a seguinte condição de Lipschitz: existe $c > 0$ tal que $|F(x,u) - F(x,v)| \leq c|u-v|, \forall x \in \Omega, \forall u, v \in \mathbb{R}$. Suponha ainda que $F(x,0) = 0, \forall x \in \Omega$. Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$, então existe única solução u para o problema:*

$$\begin{aligned} &\Delta u - u_{tt} = F(x,u); \\ &u = 0 \ em \ \partial\Omega; \\ &u(0) = u_0; \\ &u_t(0) = u_1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A equação é satisfeita no sentido de $L^2_{loc}(I\!R, H^{-1}(\Omega))$; $u \in C^0(I\!R; H^1_0(\Omega))$ *e* $u_t \in C^0(I\!R; L^2(\Omega))$. *Se* $G(x,v) = \int_0^v F(x,s)\,ds$, *vale a seguinte* ***igualdade de energia***:

$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|u_t(x,t)|^2 + G(x,u(x,t))dx = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_0(x)|^2 + \frac{1}{2}|u_1(x)|^2 + G(x,u_0(x))dx, \forall t \in I\!R.$

Demonstração:

A solução para a equação (3.10) pode ser encontrada olhando-a como um problema de ponto fixo e usando o Teorema de Contração de Banach (Teorema 17 do Capítulo 1). Seja K a constante enunciada na Desigualdade de Poincaré, isto é:

$$\|f\| \leq K\|\nabla f\|, \forall f \in H^1_0(\Omega).$$

Definamos:

$$\beta(\tau) = \tau(1+\tau)e^\tau c^2 K^2,$$

e tomemos $\tau > 0$ fixo tal que $0 \leq \beta(\tau) < 1$. Em breve as escolhas de β e de τ serão justificadas.

Consideremos o operador $S : C^0(-\tau,\tau; H^1_0(\Omega)) \to C^0(-\tau,\tau; H^1_0(\Omega))$ que associa cada v deste espaço à solução do problema linear:

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi - \varphi_{tt} = F(x,v); \\ &\varphi = 0 \text{ em } \partial\Omega; \\ &\varphi(0) = u_0; \\ &\varphi_t(0) = u_1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

As hipóteses feitas sobre F e o fato de $v \in C^0(-\tau,\tau; H^1_0(\Omega))$ implicam que $F(v) \in L^\infty(-\tau,\tau; L^2(\Omega))$, conforme demonstramos no Teorema 19 do Capítulo 1. Além disso, $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$. Vimos no Teorema 2 do

Capítulo 2 que sob estas condições, o problema (3.11) tem solução única e que, de fato, esta solução é um elemento de $C^0(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))$ (poderíamos usar o Teorema 1 do Capítulo 1, obtendo neste caso que S atua em $L^\infty(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))$). Provamos que S está bem definido em $C^0(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))$ e que assume valores neste espaço.

Mostremos agora que S é uma contração. Dados $v_1, v_2 \in C^0(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))$ arbitrários, sejam $u_1 = Sv_1$ e $u_2 = Sv_2$. Como (3.11) é linear, resulta que $w = u_1 - u_2$ é a única solução de:

$$\begin{aligned}
&\Delta w - w_{tt} = F(x,v_1) - F(x,v_2);\\
&w = 0 \text{ em } \partial\Omega;\\
&w(0) = 0\\
&w_t(0) = 0
\end{aligned}$$

No Teorema 1 do Capítulo 2 obtivemos a seguinte estimativa:

$$\|\nabla w(t)\|^2 \le (1+\tau)e^\tau \int_0^\tau \|F(v_1(s)) - F(v_2(s))\|^2 ds.$$

Como F é lipschitziana:

$$\|\nabla w(t)\|^2 \le (1+\tau)e^\tau \int_0^\tau c^2 \|v_1(s) - v_2(s)\|^2 ds, \forall s \in [-\tau,\tau].$$

Da Desigualdade de Poincaré:

$$\|\nabla w(t)\|^2 \le (1+\tau)e^\tau c^2 K^2 \int_0^\tau \|\nabla (v_1(s) - v_2(s))\|^2 ds.$$

Logo:

$$\|\nabla w(t)\|^2 \le (1+\tau)\, e^\tau c^2 K^2 \int_0^\tau \|v_1 - v_2\|^2_{C^0(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))} ds, \forall t \in [-\tau,\tau]$$

Então:

$$\|Sv_1 - Sv_2\|_{C^0(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))} \le \beta(\tau)\, \|v_1 - v_2\|_{C^0(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))},$$

e S é uma contração pois $0 \leq \beta(\tau) < 1$ (aqui ficam justificadas as escolhas de β e τ). Pelo Teorema de Contração de Banach existe única função $u^\tau \in C^0(-\tau,\tau;H_0^1(\Omega))$ tal que $Su^\tau = u^\tau$, ou seja, u^τ é a única solução de (3.11) no intervalo $[-\tau,\tau]$.

Mostremos agora que esta solução pode ser estendida para um intervalo limitado qualquer da reta. Seja $T > 0$ arbitrário. Fazendo cálculos análogos aos acima (a diferença é que a integração no tempo é feita em outro intervalo, porém, cada um com comprimento τ), podemos usar o Teorema de Contração de Banach para garantir que existem únicas funções $v \in C^0(0,2\tau;H_0^1(\Omega))$ e $w \in C^0(-2\tau,0;H_0^1(\Omega))$tais que:

$$\begin{cases} \Delta v - v_{tt} = F(x,v); \\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega; \\ v(\tau) = u^\tau(\tau); \\ v_t(\tau) = u_t^\tau(\tau). \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta w - w_{tt} = F(x,w); \\ w = 0 \text{ em } \partial\Omega; \\ w(-\tau) = u^\tau(-\tau); \\ w_t(-\tau) = u_t^\tau(-\tau). \end{cases}$$

Observemos que τ está fixado. A unicidade de solução do problema (3.10) garante que $v|_{[0,\tau]} = u^\tau|_{[0,\tau]}$ e $w|_{[-\tau,0]} = u^\tau|_{[-\tau,0]}$. Então, definindo:

$$u^{2\tau}(t) = \begin{cases} u^\tau(t), t \in [-\tau,\tau]; \\ v(t), t \in [\tau,2\tau]; \\ w(t), t \in [-2\tau,-\tau]; \end{cases}$$

obtemos que $u^{2\tau}$ satisfaz (3.10) no intervalo $[-2\tau,2\tau]$. A aplicação deste argumento repetidas vezes (um número finito de repetições é suficiente) mostra que existe única função $u^T \in C^0(-T,T;H_0^1(\Omega))$ que é solução de (3.10) em $[-T,T]$.

Procedendo como no Teorema 1 do Capítulo 2 (problema linear) estendemos u^T para uma função $u \in C^0(\mathbb{R};H_0^1(\Omega))$ que é solução de (3.10) em toda a reta. Observemos que a igualdade se dá no sentido de $L_{loc}^2(\mathbb{R};H^{-1}(\Omega))$ pois a igualdade do problema linear (3.11) se dá neste sentido. A unicidade da solução decorre da unicidade das u^T's.

Igualdade de energia:

A equação (3.10) é equivalente a seguinte formulação variacional, conforme cálculos análogos aos feitos no Teorema 1 do Capítulo 2:

$$\frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\nabla u(t),\nabla v) = -(F(u(t)),v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.12}$$

O caminho que nos parece mais natural para obter a igualdade de energia é substituir v por $u_t(t)$ em (3.12), integrar em $[0,t]$ a fim de escrever

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2=\frac{1}{2}\|u_1\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2-\int_0^t(F(u(s)),u_s(s))\,ds,$$

e então, utilizar a Regra da Cadeia para obter a igualdade de energia.

Porém, devemos observar que $u_t(t)\in L^2(\Omega)$ e a igualdade (3.12) é válida para v em $H_0^1(\Omega)$, o que torna impossível a substituição de v por $u_t(t)$. Para contornarmos este problema é suficiente aproximar u por funções mais regulares, provar que a igualdade vale para as aproximações e, então, obter convergências que permitam a passagem ao limite. Sejam u_0^m e u_1^m seqüências em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente, tais que:

$$u_0^m\to u_0 \text{ forte em } H_0^1(\Omega) \tag{3.13}$$

$$u_1^m\to u_1 \text{ forte em } L^2(\Omega) \tag{3.14}$$

Estas seqüências existem pois as restrições feitas sobre Ω garantem que $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert denso em $H_0^1(\Omega)$. Seja u^m a solução do seguinte problema linear:

$$\begin{array}{l}\frac{d}{dt}(u_t^m(t),v)+(\nabla u^m(t),\nabla v)=-(F(u(t)),v),\forall v\in H_0^1(\Omega);\\ u^m(0)=u_0^m;\\ u_t^m(0)=u_1^m.\end{array} \tag{3.15}$$

Do Teorema 19 do Capítulo 1 segue que $F(u)\in L^2(-T,T;H_0^1(\Omega))$, e então, estamos sob as hipóteses do Teorema 4 do Capítulo 2. Ele garante existência e unicidade de solução para o problema (3.15), de modo que $\{u^m\}$ está bem definida. Provemos que $\{u^m\}$ é seqüência de Cauchy em $C^0(\mathbb{R};H_0^1(\Omega))$ e que $\{u_t^m\}$ é Cauchy em $C^0(\mathbb{R};L^2(\Omega))$. Para isto tomemos $m,n\in N$ quaisquer. Subtraindo as equações que definem u^m e u^n obtemos:

$$\frac{d}{dt}(u_t^m(t)-u_t^n(t),v)+(\nabla(u^m(t)-u^n(t)),\nabla v)=0,\forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{3.16}$$

O mesmo teorema assegura que u_t^m e u_t^n assumem valores em $H_0^1(\Omega)$ e podemos então, substituir v por $u_t^m(t)-u_t^n(t)$ em (3.16). Fazendo isto chegamos a:

$$\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)-u_t^n(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla(u^m(t)-u^n(t))\|^2=0.$$

Integrando em $[0, t]$:

$\|u_t^m(t) - u_t^n(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla(u^m(t) - u^n(t))\|^2 = \|u_1^m - u_1^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla(u_0^m - u_0^n)\|^2$,
$\forall t \in I\!R$.

As convergências (3.13) e (3.14) implicam que u^m é Cauchy em $C^0(I\!R; H_0^1(\Omega))$ e u_t^m é Cauchy em $C^0(I\!R; L^2(\Omega))$. Logo, existe w tal que: $u^m \to w$ em $C^0(I\!R; H_0^1(\Omega))$ e $u_t^m \to w_t$ em $C^0(I\!R; L^2(\Omega))$. Estas duas últimas convergências garantem que fazendo $m \to +\infty$ em (3.15), w é uma solução de:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}(w_t(t), v) + (\nabla w(t), \nabla v) = -(F(u(t)), v), \forall v \in H_0^1(\Omega); \\ &w(0) = u_0; \\ &w_t(0) = u_1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Mas u também satisfaz (3.17). Da unicidade de solução segue que $u = w$. Logo,

$$u^m \to u \text{ forte em } C^0\left(I\!R; H_0^1(\Omega)\right) \tag{3.18}$$

$$u_t^m \to u_t \text{ forte em } C^0\left(I\!R; L^2(\Omega)\right). \tag{3.19}$$

As convergências (3.18) e (3.19) são suficientes para provarmos a igualdade de energia. De fato. Substituindo v por $u_t^m(t)$ em (3.15) resulta que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|^2 = -(F(u(t)), u_t^m(t)).$$

Integrando em $[0, t]$:

$$\frac{1}{2}\|\nabla u^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0^m\|^2 + \frac{1}{2}\|u_1^m\|^2 - \int_0^t (F(u(s)), u_s^m(s))\, ds. \tag{3.20}$$

A convergência (3.19) garante que $u_s^m \to u_s$ forte em $L^2_{loc}(I\!R; L^2(\Omega))$, conseqüentemente, $u_s^m \to u_s$ fraco em $L^2_{loc}(I\!R; L^2(\Omega))$. Como $F(u) \in L^2_{loc}(I\!R; L^2(\Omega))$:

$$\int_0^t (F(u), u_s^m(s))\, ds \to \int_0^t (F(u(s)), u_s(s))\, ds.$$

Esta convergência, juntamente com (3.13), (3.14), (3.18) e (3.19) garantem que fazendo $m \to +\infty$ em (3.20):

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 + \frac{1}{2}\|u_1\|^2 - \int_0^t (F(u(s)), u_s(s))\, ds.$$

Usando Fubini e a Regra da Cadeia

$$\int_0^t \int_\Omega F(x, u(x,s))\, u_s(x,s)\, ds = \int_\Omega \int_0^t F(x, u(x,s))\, u_s(x,s)\, ds dx =$$
$$= \int_\Omega \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} G(x, u(x,s)) ds dx.$$

Portanto:

$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|u_t(x,t)|^2 + G(x, u(x,t))dx = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_0(x)|^2 + \frac{1}{2}|u_1(x)|^2 +$
$G(x, u_0(x))dx, \forall t \in \mathbb{R}$, no qual $|\nabla u_0(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\right|^2$.

■

A prova do teorema anterior também pode ser feita pelo Método das Aproximações Sucessivas. Para que o texto não fique demasiado extenso, apresentaremos apenas um esboço dela. Paralelamente, faremos uma breve comparação entre embos os métodos.

Definamos $u^0 \equiv 0$ e, para $m \geq 1$, u^m como a solução do problema linear

$$\begin{aligned}
&\Delta u^m - u_{tt}^m = F(x, u^{m-1});\\
&u = 0 \text{ em } \partial\Omega;\\
&u^m(0) = u_0^m;\\
&u_t^m(0) = u_1.
\end{aligned}$$

Subtraindo as equações que definem u^m e u^{m-1}, temos que $w^m = u^m - u^{m-1}$ é a solução de

$$
\begin{aligned}
&\Delta w^m - w^m_{tt} = F(x, u^m) - F(x, u^{m-1});\\
&w = 0 \text{ em } \partial\Omega;\\
&w^m(0) = 0;\\
&w^m_t(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Usando a estimativa obtida no Teorema 1 do Capítulo 2 (problema linear) e o fato de F ser lipschitziana podemos provar, com relativa facilidade que

$$
e^m(t) \leq e^t K^2 c^2 \int_0^t e^{m-1}(s)\, ds,
$$

no qual $e^m(t) = \|w^m_t(t)\|^2 + \|\nabla w^m_t(t)\|^2$. Esta estimativa permite que provemos que $\{u^m\}$ e $\{u^m_t\}$ são seqüências de Cauchy em espaços de Banach adequados, portanto, $u^m \to u$ e $u^m_t \to u_t$. Esta prova é mais trabalhosa do que a demonstração de que o operador S definido no último teorema é uma contração. Resta ainda provar que u satisfaz a equação e os dados iniciais, dois fatos que requerem algum esforço. Notemos ainda que na demonstração via Teorema de Contração de Banach a função u satisfaz imediatamente a equação e os dados iniciais, poupando trabalho.

A igualdade de energia pode ser obtida como na demonstração do Teorema 2.

Fica evidenciado que para provar existência e unicidade de solução do Problema Lipschitz, a utilização do Teorema de Contração de Banach exige um esforço menor do que o Método das Aproximações Sucessivas.

No entanto, ressaltamos que esta vantagem se restringe às situções nas quais estamos interessados somente em garantir existência e unicidade de solução. Na prática, para construirmos a solução podemos usar um método iterativo, como o das aproximações sucessivas.

Mostremos agora a continuidade da solução em relação aos dados iniciais, para isto tomemos a família de problemas Lipschitz

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\left(u_{t\varepsilon}(t), v\right) + \left(\nabla u_\varepsilon(t), \nabla v\right) = -\left(F\left(u_\varepsilon(t)\right), v\right), \forall v \in H^1_0(\Omega);\\
u_\varepsilon(0) = u_{\varepsilon 0};\\
u_{\varepsilon t}(0) = u_{\varepsilon 1};
\end{cases}
$$

sendo $u_{0\varepsilon} \in H^1_0(\Omega)$ e $u_{1\varepsilon} \in L^2(\Omega)$. Como na obtenção da igualdade de energia do teorema anterior, aproximemos u e u_ε por funções mais regulares. Fixado ε, sejam $\{u_{0\varepsilon}^m\}$ e $\{u_{1\varepsilon}^m\}$ seqüências em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)$, respectivamente, tais que:

$$\begin{array}{l} u_{0\varepsilon}^m \to u_{0\varepsilon} \text{ forte em } H_0^1(\Omega); \\ u_{1\varepsilon}^m \to u_{1\varepsilon} \text{ forte em } L^2(\Omega). \end{array} \tag{3.21}$$

Sejam $\{u_0^m\}, \{u_1^m\}$ e $\{u^m\}$ as seqüências enunciadas na demonstração da igualdade de energia. Definamos u_ε^m como a solução de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(u_{t\varepsilon}^m(t), v\right) + \left(\nabla u_\varepsilon^m(t), \nabla v\right) = -\left(F\left(u_\varepsilon^m(t)\right), v\right), \forall v \in H_0^1(\Omega); \\ u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}^m - u_{0\varepsilon}; \\ u_{\varepsilon t}(0) = u_{1\varepsilon}^m - u_{1\varepsilon}. \end{cases}$$

Então, $w_\varepsilon^m = u^m - u_\varepsilon^m$ é a solução do seguinte problema linear

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(w_{t\varepsilon}^m(t), v\right) + \left(\nabla w_\varepsilon^m(t), \nabla v\right) = \left(F\left(u_\varepsilon^m(t)\right) - F\left(u^m(t)\right), v\right), \forall v \in H_0^1(\Omega); \\ w_\varepsilon^m(0) = u_0^m - u_{0\varepsilon}^m, \\ w_{t\varepsilon}^m(0) = u_1^m - u_{1\varepsilon}^m. \end{cases}$$

Como $w_{\varepsilon t}^m \in C^0\left(R; H_0^1(\Omega)\right)$, podemos substituir v por $w_{\varepsilon t}^m(t)$ na equação acima. De (2.10) segue que:

$$\left\|w_{\varepsilon t}^m(t)\right\|^2 + \left\|\nabla w_\varepsilon^m(t)\right\|^2 \leq \left\|w_{\varepsilon t}^m(0)\right\|^2 + \left\|\nabla w_\varepsilon^m(0)\right\|^2 + \int_0^{|t|} \left\|F\left(u_\varepsilon^m(s)\right) - F\left(u^m(s)\right)\right\|^2 ds + \int_0^{|t|} \left\|w_{\varepsilon s}^m(s)\right\|^2 ds.$$

Sendo F lipschitziana e usando a Desigualdade de Poincaré:

$$\left\|w_{t\varepsilon}^m(t)\right\|^2 + \left\|\nabla w_\varepsilon^m(t)\right\|^2 \leq \left\|w_{t\varepsilon}^m(0)\right\|^2 + \left\|\nabla w_\varepsilon^m(0)\right\|^2 + c^2K^2 \int_0^{|t|} \left\|\nabla w_\varepsilon^m(s)\right\|^2 ds + \int_0^{|t|} \left\|w_{s\varepsilon}^m(s)\right\|^2 ds.$$

Seja $M = \max\{1, c^2K^2\}$. Então:

$$\left\|w_{\varepsilon t}^m(t)\right\|^2 + \left\|\nabla w_\varepsilon^m(t)\right\|^2 \leq \left\|w_{\varepsilon t}^m(0)\right\|^2 + \left\|\nabla w_\varepsilon^m(0)\right\|^2 + M \int_0^{|t|} \left\|\nabla w_\varepsilon^m(s)\right\|^2 + \left\|w_{s\varepsilon}^m(s)\right\|^2 ds.$$

Da Desigualdade de Gronwall

$$\left\|w_{t\varepsilon}^{m}(t)\right\|^{2}+\left\|\nabla w_{\varepsilon}^{m}(t)\right\|^{2} \leq \left(\left\|w_{t\varepsilon}^{m}(0)\right\|^{2}+\left\|\nabla w_{\varepsilon}^{m}(0)\right\|^{2}\right)(1+T)e^{MT}, \forall t \in [-T,T]. \tag{3.22}$$

De (3.18) e (3.19) segue que

$$\begin{aligned} &w_{\varepsilon}^{m} \rightarrow w_{\varepsilon}=u-u_{\varepsilon} \text{ em } C^{0}\left(-T,T;H_{0}^{1}(\Omega)\right); \\ &w_{t\varepsilon}^{m} \rightarrow w_{t\varepsilon}=u_{t}-u_{t\varepsilon} \text{ em } C^{0}\left(-T,T;L^{2}(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Juntamente com (3.21), estas convergências garantem que fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.22)

$$\left\|w_{t\varepsilon}(t)\right\|^{2}+\left\|\nabla w_{\varepsilon}(t)\right\|^{2} \leq \left(\left\|w_{t\varepsilon}(0)\right\|^{2}+\left\|\nabla w_{\varepsilon}(0)\right\|^{2}\right)(1+T)e^{MT}, \forall t \in [-T,T].$$

Isto prova a continuidade de u em relação aos dados iniciais no espaço W definido no capítulo anterior.

Capítulo 4

O Problema com Não-linearidade Contínua

Vejamos agora um critério de convergência em L^1 que será útil nos teoremas 2 e 3.

Teorema 1 *Seja (Ω, dx) um espaço de medida finita, e X, Y espaços de Banach. Seja $\{u_k\}$ seqüência de funções fortemente mensuráveis definidas em Ω assumindo valores em X, e $v{:}\Omega \to Y$ uma função fortemente mensurável. Seja ainda $\{F_k\}$ uma seqüência de funções definidas em $\Omega \times X$ cuja imagem está contida em Y. Se:*

(a) $\{F_k\}$ é uniformemente limitada em $\Omega \times B$, para todo subconjunto limitado B de X;

(b) $F_k(x, u_k(x))$ é fortemente mensurável e existe $c > 0$ tal que: $\int\limits_\Omega \|u_k(x)\|_X \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq c < +\infty, \forall k \in I\!N$;

(c) $\|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \to 0$ q.t.p. em Ω.

Então:

$$v \in L^1(\Omega, Y) \ \text{ e } \int\limits_\Omega \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx \to 0.$$

Demonstração:

Primeiramente mostremos que $v \in L^1(\Omega, Y)$. Fixado $k \in I\!N$ arbitrário, seja $A_k = \{x \in \Omega; \|u_k(x)\|_X \geq 1\}$, então:

$$x \in A_k \Rightarrow \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \leq \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \|u_k(x)\|_X . \tag{4.1}$$

e

$$x \in A_k^C \Rightarrow \|u_k(x)\|_X < 1.$$

Por *(a)* existe $K > 0$ (independente de k e x) tal que:

$$x \in A_k^c \Rightarrow \|F_k(x, u_k(x))\|_Y < K. \tag{4.2}$$

Como $x \mapsto \|u_k(x)\|_X$ é uma função escalar mensurável (Hille-Phillips [3, pág. 72], A_k é um elemento da $\sigma-$álgebra. Então:

$$\int_\Omega \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx = \int_{A_k} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx + \int_{A_k^c} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx.$$

De (4.1) e (4.2) segue que:

$$\int_\Omega \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq \int_{A_k} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \|u_k(x)\|_X \, dx + \int_{A_k^c} K dx.$$

Por *(b)*:

$$\int_\Omega \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq c + \int_{A_k^c} K dx.$$

Mas $A_k^c \subset \Omega$,então:

$$\int_\Omega \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq c + \int_\Omega K dx.$$

Como Ω tem medida finita:

$$\int_\Omega \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq c + K med(\Omega). \tag{4.3}$$

no qual $med(\Omega)$ denota a medida de Ω. Acabamos de provar que a seqüência de funções compostas $\{F_k(\cdot, u_k(\cdot))\}$ é limitada em $L^1(\Omega, Y)$. Mas:

$$\left| \|F_k(x, u_k(x))\|_Y - \|v(x)\|_Y \right| \leq \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por *(c)*:

$$\|F_k(x, u_k(x))\|_Y \to \|v(x)\|_Y, \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{4.4}$$

Como v é fortemente mensurável faz sentido calcularmos $\int_{\Omega} \|v(x)\|_Y \, dx$. De (4.4) resulta que:

$$\int_{\Omega} \|v(x)\|_Y \, dx = \int_{\Omega} \lim_{k \to +\infty} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx = \int_{\Omega} \liminf \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx.$$

Pelo Lema de Fatou (Lema 1 do Capítulo 1):

$$\int_{\Omega} \|v(x)\|_Y \, dx \leq \liminf \int_{\Omega} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx.$$

De (4.3) segue que $v \in L^1(\Omega, Y)$.

Passemos agora à demonstração da convergência enunciada no presente teorema. Pelo Teorema de Egoroff (Teorema 3 do Capítulo 1) a convergência *(c)* implica em convergência quase-uniforme em Ω, ou seja, $\forall \delta > 0$ existe um conjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ pertencente a σ-álgebra considerada em Ω tal que:

$$med(\Omega_0) < \delta \text{ e } \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \to \|v(x)\|_Y \text{ uniformemente em } \Omega_0^c.$$

Então:

$$\int_{\Omega_0^c} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx \to 0 \tag{4.5}$$

Observemos que temos liberdade de escolha do número δ, no momento adequado a usaremos. Seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrário. A hipótese *(a)* diz que $\|z\|_X$ é grande se $\|F_k(x, z)\|_Y$ for grande, para algum $x \in \Omega$ e algum $k \in \mathbb{N}$. Formalmente, existe $K_1 > 0$ com a propriedade de que:

$$\|F_k(x, u_k(x))\|_Y > K_1 \text{ para algum } x \in \Omega, \text{ e algum } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \|z\|_X > \frac{6c}{\varepsilon}.$$

Definamos o seguinte conjunto:

$$\Omega' = \{x \in \Omega_0; \|F_k(x, u_k(x))\|_Y > K_1\}.$$

e denotamos por Ω" seu complementar em Ω_0. Então, $\forall k \in \mathbb{N}$ nós temos:

$$\int_{\Omega"} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq \int_{\Omega"} K_1 dx \leq K_1 med(\Omega") \leq K_1 med(\Omega_0) \leq K_1 \delta.$$

Usando a liberdade de escolha para δ, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{6K_1}$. Segue que:

$$\int\limits_{\Omega"} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq \frac{\varepsilon}{6}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Da definição de Ω' :

$$x \in \Omega' \Rightarrow \|F_k(x, u_k(x))\|_Y > K_1.$$

Mas:

$$\|F_k(x, u_k(x))\|_Y > K_1 \Rightarrow \|u_k(x)\|_X > \frac{6c}{\varepsilon},$$

logo:

$$x \in \Omega' \Rightarrow \|u_k(x)\|_X > \frac{6c}{\varepsilon}.$$

Então:

$$x \in \Omega' \Rightarrow \frac{\varepsilon}{6c} \|u_k(x)\|_X \|F_k(x, u_k(x))\|_Y > \|F_k(x, u_k(x))\|_Y.$$

Isto nos permite escrever que:

$$\int\limits_{\Omega'} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq \frac{\varepsilon}{6c} \int\limits_{\Omega'} \|u_k(x)\|_X \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx.$$

Da hipótese *(b)* segue:

$$\int\limits_{\Omega'} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq \frac{\varepsilon}{6}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Juntamente com (4.6), isto prova que:

$$\int\limits_{\Omega_0} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Então:

$$\int\limits_{\Omega} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx = \int\limits_{\Omega_0} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx +$$
$$\int\limits_{\Omega_0^c} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx.$$

Aplicando a desigualdade triangular à primeira parcela da direita obtemos:

$$\int_{\Omega} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx \leq \int_{\Omega_0} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx + \int_{\Omega_0} \|v(x)\|_Y \, dx +$$
$$\int_{\Omega_0^c} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx$$

De (4.7):

$$\int_{\Omega} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} + \int_{\Omega_0} \|v(x)\|_Y \, dx + \int_{\Omega_0^c} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx$$

Pelo Lema de Fatou:

$$\int_{\Omega_0} \|v(x)\|_Y \, dx \leq \liminf \int_{\Omega_0} \|F_k(x, u_k(x))\|_Y \, dx.$$

Esta desiguladade, juntamente com (4.7), implica que:

$$\int_{\Omega_0} \|v(x)\|_Y \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo:

$$\int_{\Omega} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \int_{\Omega_0^c} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx. \tag{4.8}$$

A convergência (4.5) garante a existência de $k_0 \in I\!N$ tal que:

$$k > k_0 \Rightarrow \int_{\Omega_0^c} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De (4.8) segue que para tal k_0 :

$$k > k_0 \Rightarrow \int_{\Omega} \|F_k(x, u_k(x)) - v(x)\|_Y \, dx \leq \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, o teorema fica provado .

■

Este capítulo apresenta a solução de outro problema do tipo onda não-linear:

$$\Delta u - u_{tt} = F(x, u)$$

sendo que as exigências feitas sobre F são continuidade e possuir o mesmo sinal de u.

A idéia principal é aproximar F por uma seqüência $\{F_k\}$ de funções lipschitzianas (esta seqüência é gerada pelo Teorema 1 do Capítulo 3). A partir dela definimos uma seqüência $\left\{u^k\right\}$ tal que:

$$\Delta u^k - u_{tt}^k = F_k(x, u^k)$$

(a existência desta seqüência é assegurada pelo Teorema 2 do Capítulo 3).

Convergências fracas bastam para a passagem ao limite dos termos do lado esquerdo da equação, mas não são suficientes para garantir que $F_k\left(u^k\right)$ converge para $F(u)$. Para esta passagem ao limite é necessário que busquemos convergência em norma, e o resultado mais importante na demonstração desta convergência é o Teorema 1. Ressaltamos que em geral, a passagem ao limite de termos não-lineares só é possível mediante a obtenção de convergência forte. Convergências fracas não são suficientes.

Teorema 2 *Seja $\Omega \subset I\!R^n$ aberto, limitado e bem regular. Seja $F(x, u) = u^p, p$ um natural ímpar. Denotamos por G a função tal que $\frac{\partial G}{\partial u} = F$ e $G(x, 0) = 0$. Suponhamos que $G(\cdot, u_0(\cdot))$ seja integrável em Ω. Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$ então existe única função u tal que:*

- $u \in L^\infty\left(I\!R; H_0^1(\Omega)\right);$
- $u_t \in L^\infty\left(I\!R; L^2(\Omega)\right);$
- $\Delta u - u_{tt} = F(x, u);$
- $u = 0$ *em* $\partial\Omega;$
- $u(0) = u_0;$
- $u_t(0) = u_1.$

A equação se verifica no sentido de $L^1_{loc}\left(I\!R; H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)\right)$, *no qual* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *denota a parte inteira de* $\frac{n}{2}$. *Além disso* $uF(u)$ *é integrável em* $\Omega \times (-T,T)$ *para todo* T *finito, e a solução satisfaz a seguinte desigualdade de energia:*

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\left|\nabla u(x,t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u(x,t)\right|^2 + G(x,u(x,t))dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}\left|\nabla u_0(x)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u_1(x)\right|^2 + G(x,u_0(x))dx, \text{ q.t.p. em } I\!R.$$

Demonstração:

1ª Etapa: Problema aproximado:

Seja $\left\{u_0^j\right\}$ a seqüência das truncadas de u_0, isto é:

$$u_0^j = \begin{cases} u_0, \text{se } |u_0| \leq j; \\ j, \text{se } u_0 > j; \\ -j, \text{se } u_0 < j. \end{cases}$$

É claro que:

$$\left|u_0^j\right| \leq j, \text{ e } \left|u_0^j\right| \leq |u_0| \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como $\left\{u_0^j\right\}$ é a seqüência das truncadas de u_0, sabe-se da Teoria de Medida que:

$$u_0^j \to u_0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Mostremos agora que esta convergência se dá também no sentido de $H_0^1(\Omega)$. Mas

$$\nabla u_0^j = \begin{cases} \nabla u_0, \text{ no conjunto dos pontos tais que } |u_0| \leq j; \\ 0, \text{ nos demais pontos.} \end{cases}$$

Da afirmação acima resulta que:

$$\frac{\partial u_0^j}{\partial x_i} \to \frac{\partial u_0}{\partial x_i}, \text{ q.t.p. em } \Omega, 1 \leq i \leq n;$$

$$\left|\frac{\partial u_0^j}{\partial x_i}\right| \leq \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right|, \text{ q.t.p. em } \Omega, \forall j \in I\!N, 1 \leq i \leq n.$$

Como u_0 é elemento de $H_0^1(\Omega)$, sendo $\left\{u_0^k\right\}$ a seqüência de suas truncadas, do Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1 do Capítulo 1):

$$u_0^j \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega). \tag{4.9}$$

Seja $\{F_j\}$ a seqüência enunciada no Teorema 1 do Capítulo 3. Definamos o seguinte problema aproximado:

$$\begin{aligned} &\Delta u^j - u^j_{tt} = F_j\left(x, u^j\right);\\ &u = 0 \text{ em } \partial\Omega;\\ &u^j\left(0\right) = u^j_0;\\ &u^j_t\left(0\right) = u_1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tomando no Teorema 2 do Capítulo 3, (teorema que resolve o Problema Lipschitz) a constante de Lipschitz igual a $\|c_j\|_{L^\infty(\Omega)}$, existe única solução u^j do problema acima, e a equação é satisfeita no sentido de $L^2_{loc}\left(I\!R; H^{-1}\left(\Omega\right)\right)$. Observemos que do Teorema 1 do Capítulo 3 segue que $c_j \in L^\infty\left(\Omega\right)$.

2ª Etapa: Estimativas a priori:

Seja $G_j\left(x, u\right) = \int\limits_0^u F_j(x, s)ds$. Do Lema 2:

$$G_j\left(u^j_0\right) \to G\left(u_0\right) \text{ em } L^1\left(\Omega\right). \tag{4.11}$$

A prova dos lemas aqui mencinados se encontram no final do capítulo.

Seja:

$$E_j\left[u^j\left(t\right)\right] = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\left|\nabla u^j\left(x,t\right)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u^j_t\left(x,t\right)\right|^2 + G_j(x, u^j\left(x,t\right))dx.$$

Então:

$$E_j\left[u^j\left(0\right)\right] = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\left|\nabla u^j_0\left(x\right)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u_1\left(x\right)\right|^2 + G_j(x, u^j_0\left(x\right))dx.$$

Nesta notação, a igualdade de energia obtida no Problema Lipschitz pode ser escrita da forma:

$$E_j\left[u^j\left(t\right)\right] = E_j\left[u^j\left(0\right)\right], \forall t \in I\!R.$$

Devido às convergências (4.9) e (4.11):

$$E_j\left[u^j\left(0\right)\right] \to E_0 = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\left|\nabla u_0\left(x\right)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u_1\left(x\right)\right|^2 + G(x, u_0\left(x\right))dx. \tag{4.12}$$

Nesta notação, a igualdade de energia obtida no Teorema 2 do Capítulo 3 se expressa como:

$$E_j\left[u^j(t)\right] = E_j\left[u^j(0)\right], \forall t \in I\!R. \tag{4.13}$$

De (4.12) e (4.13) resulta que $E_j[u^j(t)] \to E_0$ uniformemente. Fixado $x \in \overline{\Omega}, u \mapsto G(x,u)$ é não decrescente em $[0,+\infty)$ e não-cresente em $(-\infty, 0]$. Como $G_j(x,0) = 0$, da continuidade de G_j segue que $G_j(x,u) \geq 0$. Portanto, cada parcela de $E_j[u^j(t)]$ é limitada. Então

$\{u^j\}$ limitada em $L^\infty(I\!R; H_0^1(\Omega))$,

$\left\{u_t^j\right\}$ limitada em $L^\infty(I\!R; L^2(\Omega))$.

Isto permite a extração de uma subseqüência (a qual continuamos a denotar com o índice j) e garante a existência de uma função u tal que:

$$u^j \to u \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty\left(I\!R; H_0^1(\Omega)\right), \tag{4.14}$$

$$u_t^j \to u_t \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty\left(I\!R; L^2(\Omega)\right). \tag{4.15}$$

Como a função u assume valores em $H_0^1(\Omega)$ e Ω é bem regular, segue que $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Busquemos agora estimativas que permitam a passagem ao limite do termo não-linear.

Fixemos $T > 0$ arbitrário. Desde que $L^\infty(-T,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(-T,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^\infty(-T,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(-T,T;L^2(\Omega))$, pelo Teorema de Aubin-Lions (Teorema 24 do Capítulo 1), existe uma subseqüência $\{u^\nu\}$ que converge forte para u em $L^2(-T,T;L^2(\Omega))$. Como $L^2(-T,T;L^2(\Omega)) = L^2(\Omega \times (-T,T))$, extraímos de $\{u^\nu\}$ uma subseqüência (a qual continuamos a denotar por $\{u^\nu\}$) tal que:

$$u^\nu \to u \text{ q.t.p. em } \Omega \times (-T,T). \tag{4.16}$$

(A existência de tal subseqüência e grantida pelo Teorema 4 do Capítulo 1). Esta convergência permite provar que:

$$F_\nu(x, u^\nu(x,t)) \to F(x, u(x,t)) \text{ q.t.p. em } \Omega \times (-T,T), \tag{4.17}$$

conforme o Lema 3.

Para fortalecermos a convergência (4.17), usamos o Teorema 1. Conforme cálculos feitos para o caso linear (Teorema 1 do Capítulo 2), a equação (4.10) é equivalente à seguinte formulação variacional:

$$\int_{-T}^{T} \langle u_{tt}^{\nu}(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)H_0^1(\Omega)} \varphi(t)\, dt + \int_{-T}^{T} (\nabla u^{\nu}(t), v)\, \varphi(t)\, dt = - \int_{-T}^{T} (F_{\nu}(u^{\nu}(t)), v)\, \varphi(t)\, dt,$$
$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall \varphi \in D(-T,T). \tag{4.18}$$

Esta igualdade é equivalente a (ver Teorema 20 do Capítulo 1):

$$\int_{-T}^{T} \frac{d}{dt}(u_t^{\nu}(t), v)\, \varphi(t)\, dt + \int_{-T}^{T} (\nabla u^{\nu}(t), v)\, \varphi(t)\, dt = - \int_{-T}^{T} (F_{\nu}(u^{\nu}(t)), v)\, \varphi(t)\, dt.$$

Integrando por partes a primeira integral:

$$\int_{-T}^{T} (u_t^{\nu}(t), v)\, \varphi'(t)\, dt + \int_{-T}^{T} (\nabla u^{\nu}(t), v)\, \varphi(t)\, dt = - \int_{-T}^{T} (F_{\nu}(u^{\nu}(t)), v)\, \varphi(t)\, dt.$$

Por densidade:

$$- \int_{-T}^{T} (u_t^{\nu}(t), \theta_t(t))\, dt + \int_{-T}^{T} (\nabla u^{\nu}(t), \theta(t))\, dt = - \int_{-T}^{T} (F_{\nu}(u^{\nu}(t)), \theta(t))\, dt, \forall \theta$$
$$\text{tal que } \theta \in C^0(-T,T; H_0^1(\Omega)) \text{ e } \theta_t \in C^0(-T,T; L^2(\Omega)). \tag{4.19}$$

Substituindo θ por u^{ν} em (4.19):

$$- \int_{-T}^{T} \|u_t^{\nu}(t)\|^2\, dt + \int_{-T}^{T} \|\nabla u^{\nu}(t)\|^2\, dt = - \int_{-T}^{T} (F_{\nu}(u^{\nu}(t)), u^{\nu}(t))\, dt.$$

Da desigualdade triangular:

$$\int_{-T}^{T} (F_{\nu}(u^{\nu}(t)), u^{\nu}(t))\, dt \leq \int_{-T}^{T} \|u_t^{\nu}(t)\|^2\, dt + \int_{-T}^{T} \|\nabla u^{\nu}(t)\|^2\, dt,$$

e usando a igualdade de energia (4.13):

$$\int_{-T}^{T} (F_{\nu}(u^{\nu}(t)), u^{\nu}(t))\, dt \leq \int_{-T}^{T} E_{\nu}[u^{\nu}(0)]\, dt, \forall \nu \in I\!N.$$

Sendo $E_\nu[u^\nu(0)]$ seqüência numérica que converge para E_0, é limitada. Então, existe $M_1 > 0$ tal que:

$$\int_{-T}^{T} (F_\nu(u^\nu(t)), u^\nu(t))\, dt \leq M_1, \forall \nu \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

Apliquemos agora o Teorema 1 ao conjunto $\Omega \times (-T, T)$, com $X = Y = \mathbb{R}$. (a estimativa acima verifica a hipótese (b) do referido teorema). Então $F(u) \in L^1(\Omega \times (-T, T))$ e

$$F_\nu(u^\nu) \to F(u) \text{ em } L^1(\Omega \times (-T, T)). \tag{4.21}$$

A passagem ao limite se processa de modo relativamente fácil.

3ª Etapa: Verificação da equação:
Notemos que:

$$\left| \int_{-T}^{T} (F_\nu(u^\nu), \theta(t))\, dt - \int_{-T}^{T} (F(u), \theta(t))\, dt \right| \leq$$
$$\|\theta\|_{L^\infty(\Omega \times (-T,T))} \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |F_\nu(u^\nu(t)) - F(u(t))|\, dx dt$$

e a convergência (4.21) assegura que:

$$\int_{-T}^{T} (F_\nu(u^\nu(t)), \theta(t))\, dt \to \int_{-T}^{T} (F(u(t)), \theta(t))\, dt. \tag{4.22}$$

Fazendo $\nu \to +\infty$ em (4.19), as convergências (4.14), (4.15) e (4.22) garantem que:

$$- \int_{-T}^{T} (u_t(t), \theta_t(t))\, dt + \int_{-T}^{T} (\nabla u(t), \theta(t))\, dt = - \int_{-T}^{T} (F(u(t)), \theta(t))\, dt, \forall \theta$$
$$\text{tal que } \theta \in C^0(-T, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e } \theta_t \in C^0(-T, T; L^2(\Omega)) \tag{4.23}$$

Tomando θ em $D(\Omega \times (-T, T))$ e usando a definição de derivada no sentido das distribuições:

$$\Delta u - u_{tt} = F(x, u), \tag{4.24}$$

igualdade no sentido de $D'(\Omega \times (-T,T))$.

4ª Etapa: Verificação das condições iniciais:

Sendo u elemento de $C^0(-T,T;L^2(\Omega))$, as verificação de que $u(0) = u_0$ pode ser feita analogamente ao problema linear (Teorema 1 do Capítulo 2). Como no problema linear, a demonstração de que $u_t(0) = u_1$ requer que obtenhamos a igualdade (4.24) em algum sentido mais forte do que simplesmente no sentido das distribuições. Sabemos do Teorema 1 que $F(u) \in L^1(\Omega \times (-T,T))$, logo $F(u) \in L^1(-T,T;L^1(\Omega))$. Do Teorema 12 do Capítulo 1 segue que $L^1(\Omega) \subset H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)$. Então:

$$F(u) \in L^1\left(-T,T;H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)\right). \tag{4.25}$$

Como $H_0^{([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, segue que $H^{-1}(\Omega) \subset H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)$. Usando isto e o Teorema 18 do Capítulo 1 resulta que

$$\Delta u \in L^1\left(-T,T;H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)\right). \tag{4.26}$$

Reescrevendo (4.24) da forma $u_{tt} = \Delta u - F(x,u)$ e observando que $L^1\left(-T,T;H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)\right)$ é um espaço vetorial, (4.25) e (4.26) implicam que u_{tt} é um elemento de $L^1\left(-T,T;H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)\right)$. Isto nos dá imediatamente que $u_t \in C^0\left(-T,T;H^{-([\frac{n}{2}]+1)}(\Omega)\right)$, fazendo sentido avaliarmos u_t no ponto $t = 0$. A demonstração de que $u_t(0) = u_1$ pode ser adaptada do problema linear (Teorema 1 do Capítulo2).

5ª Etapa: Desigualdade de Energia:

Para cada $t \in (-T,T)$ (a menos de um conjunto de medida nula), (4.16) implica que: $u^\nu(t) \to u(t)$ q.t.p. em Ω. Esta convergência nos permite provar que:

$$G_\nu(\cdot,u^\nu(\cdot,t)) \to G(\cdot,u(\cdot,t)) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{4.27}$$

De fato. Fixemos $x \in \Omega$ tal que $u^\nu(x,t) \to u(x,t)$, então:

$$\begin{aligned} |G_\nu(x,u^\nu(x,t)) - G(x,u(x,t))| &\le |G_\nu(x,u^\nu(x,t)) - \\ -G(x,u^\nu(x,t))| &+ |G(x,u^\nu(x,t)) - G(x,u(x,t))| \end{aligned} \tag{4.28}$$

Como G é contínua:

$$G\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)\to G\left(x,u\left(x,t\right)\right). \tag{4.29}$$

Analisemos agora a primeira parcela do lado direito de (4.28). Usando a definição de G e de G_{ν} não é difícil verificarmos que:

$$\left|G_{\nu}\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)-G\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)\right|\leq\int\limits_{0}^{\left|u^{\nu}\left(x,t\right)\right|}\left|F_{\nu}\left(x,s\right)-F\left(x,s\right)\right|ds.$$

Sendo $\{u^{\nu}\left(x,t\right)\}$ uma seqüência numérica limitada, pois é convergente, existe $M>0$ tal que $\left|u^{\nu}\left(x,t\right)\right|\leq M, \forall\nu\in\mathbb{N}$. Então:

$$\left|G_{\nu}\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)-G\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)\right|\leq\int\limits_{0}^{M}\left|F_{\nu}\left(x,s\right)-F\left(x,s\right)\right|ds.$$

Como o Teorema 1 do Capítulo 3 garante que $\{F_{\nu}\}$ converge uniformemente para F no compacto $\{x\}\times[0,M]$, segue que: $\int\limits_{0}^{M}\left|F_{\nu}\left(x,s\right)-F\left(x,s\right)\right|ds\to 0$, e então $G_{\nu}\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)\to G\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)$. Juntamente com (4.28) e (4.29), esta convergência prova (4.27).

Pelo Lema de Fatou, q.t.p. em $(-T,T)$ temos:

$$\int\limits_{\Omega}G\left(x,u\left(x,t\right)\right)dx\leq\liminf\int\limits_{\Omega}G\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)dx. \tag{4.30}$$

Do Teorema 2 do Capítulo 3 (resolução do Problema Lipschitz) $E_{\nu}\left[u^{\nu}\left(t\right)\right]=E_{\nu}\left[u^{\nu}\left(0\right)\right]$, ou seja:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega}\tfrac{1}{2}\left|u_{t}^{\nu}\left(x,t\right)\right|^{2}+\tfrac{1}{2}\left|\nabla u^{\nu}\left(x,t\right)\right|^{2}+G\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)dx=\\&=\int\limits_{\Omega}\tfrac{1}{2}\left|u_{1}\left(x\right)\right|^{2}+\tfrac{1}{2}\left|\nabla u_{0}^{\nu}\left(x\right)\right|^{2}+G\left(x,u_{0}^{\nu}\left(x\right)\right)dx, \forall\nu\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned}&\liminf\int\limits_{\Omega}\tfrac{1}{2}\left|u_{t}^{\nu}\left(x,t\right)\right|^{2}+\tfrac{1}{2}\left|\nabla u^{\nu}\left(x,t\right)\right|^{2}+G\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)dx=\\&=\liminf\int\limits_{\Omega}\tfrac{1}{2}\left|u_{1}\left(x\right)\right|^{2}+\tfrac{1}{2}\left|\nabla u_{0}^{\nu}\left(x\right)\right|^{2}+G\left(x,u_{0}^{\nu}\left(x\right)\right)dx.\end{aligned}$$

e como $\liminf (a_k + b_k) \geq \liminf (a_k) + \liminf (b_k)$:

$$\liminf \int_\Omega \tfrac{1}{2} \left| u_t^\nu (x,t) \right|^2 + \tfrac{1}{2} \left| \nabla u^\nu (x,t) \right|^2 dx + \liminf \int_\Omega G(x, u^\nu (x,t))\, dx \leq$$
$$\leq \liminf \int_\Omega \tfrac{1}{2} \left| u_1 (x) \right|^2 + \tfrac{1}{2} \left| \nabla u_0^\nu (x) \right|^2 + G(x, u_0^\nu (x))\, dx.$$

Usando (4.30):

$$\begin{aligned} &\liminf \int_\Omega \tfrac{1}{2} \left| u_t^\nu (x,t) \right|^2 + \int_\Omega \tfrac{1}{2} \left| \nabla u^\nu (x,t) \right|^2 dx + \int_\Omega G(x, u(x,t))\, dx \leq \\ &\leq \liminf \int_\Omega \tfrac{1}{2} \left| u_1 (x) \right|^2 + \tfrac{1}{2} \left| \nabla u_0^\nu (x) \right|^2 + G(x, u_0^\nu (x))\, dx. \end{aligned} \tag{4.31}$$

A semicontinuidade inferior da norma na topologia fraco* (Teorema 21 do Capítulo 1), e as convergências fracas (4.14) e (4.15) implicam respectivamente, que q.t.p. em $\mathbb{R}$ temos

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \left| u_t (x,t) \right|^2 dx \leq \liminf \int_\Omega \frac{1}{2} \left| u_t^\nu (x,t) \right|^2 dx, \tag{4.32}$$

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \left| \nabla u (x,t) \right|^2 dx \leq \liminf \int_\Omega \frac{1}{2} \left| \nabla u^\nu (x,t) \right|^2 dx. \tag{4.33}$$

enquanto que o Lema 2 assegura a seguinte convergência:

$$\int_\Omega G(x, u_0^\nu (x))\, dx \to \int_\Omega G(x, u_0 (x))\, dx. \tag{4.34}$$

Como $\liminf (a_\nu) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} a_\nu$ quando $\lim\limits_{\nu \to +\infty} a_\nu$ existe, de (4.31), (4.32), (4.33), e das convergências (4.34) e (4.35) segue que:

$$\int_\Omega \tfrac{1}{2} \left| u_t (x,t) \right|^2 + \tfrac{1}{2} \left| \nabla u (x,t) \right|^2 dx + \int_\Omega G(x, u(x,t))\, dx \leq \int_\Omega \tfrac{1}{2} \left| u_1 (x) \right|^2 +$$
$$\tfrac{1}{2} \left| \nabla u_0 (x) \right|^2 + G(x, u_0 (x))\, dx; \text{ q.t.p. em } (-T, T).$$

Como $T > 0$ é arbitrário, a desigualdade de energia acima é válida q.t.p. em $\mathbb{R}$.

Última Etapa: $uF(u)$ **é integrável em** $\Omega\times(-T,T)$**:**

As convergências (4.16) e (4.17), juntamente com o Lema de Fatou garantem que:

$$\int_{-T}^{T}\left(u\left(x,t\right),F\left(x,u\left(x,t\right)\right)\right)dt\leq\liminf\int_{-T}^{T}\left(u^{\nu}\left(x,t\right),F_{\nu}\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)\right)dt.$$

De (4.20):

$$\int_{-T}^{T}\left(u^{\nu}\left(x,t\right),F_{\nu}\left(x,u^{\nu}\left(x,t\right)\right)\right)dt\leq M_1,\forall\nu\in I\!N.$$

■

Observemos que no Teorema 2, só usamos a forma explícita da função F para demonstrarmos o Lema 1. Os demais cálculos se basearam apenas na sua continuidade e no fato de que F possui o mesmo sinal de u.

Explorando este fato, formulamos uma variação: o Teorema 3, no qual se exige de F apenas continuidade e que $uF\left(x,u\right)\geq0$. Mas, para adaptarmos a demonstração do Teorema 2 precisamos adicionar a hipótese de limitação q.t.p. sobre a posição inicial da onda.

Este foi o motivo que nos levou a considerar, no Teorema 2, a função F tendo como domínio o conjunto $\overline{\Omega}\times I\!R$

Teorema 3 *Seja* $\Omega\subset I\!R^n$ *aberto, limitado e bem regular. Seja* $F:\overline{\Omega}\times I\!R\to I\!R$ *uma função contínua e tal que* $uF\left(x,u\right)\geq0$*. Denotamos por* G *a função definida em* $\overline{\Omega}\times I\!R$ *com valores em* $I\!R$ *tal que* $G_u=F$ *e* $G\left(x,0\right)=0$*. Suponhamos que* $G\left(\cdot,u_0\left(\cdot\right)\right)$ *seja integrável em* Ω*. Se* $u_0\in H_0^1\left(\Omega\right)\cap L^\infty\left(\Omega\right)$ *e* $u_1\in L^2\left(\Omega\right)$ *então existe única função* u *tal que:*

- $u\in L^\infty\left(I\!R;H_0^1\left(\Omega\right)\right);$
- $u_t\in L^\infty\left(I\!R;L^2\left(\Omega\right)\right);$
- $\Delta u-u_{tt}=F\left(x,u\right);$
- $u=0$ *em* $\partial\Omega;$
- $u\left(0\right)=u_0;$

- $u_t(0) = u_1$.

As demais propriedades de u são idênticas às do Teorema 2.

Demonstração:

Como u_0 é essencialmente limitada, não é necessário tomarmos suas truncadas, como foi feito no teorema anterior. Seja $\{F_j\}$ a seqüência enunciada no Teorema 1 do Capítulo 3 e $G_j(x,u) = \int_0^u F_j(x,s)ds$. Afirmamos que:

$$G_j(\cdot, u_0(\cdot)) \to G(\cdot, u_0(\cdot)) \text{ em } L^1(\Omega). \tag{4.35}$$

De fato, q.t.p. em Ω temos:

$$|G_j(x,u_0(x)) - G(x,u_0(x))| = \left| \int_0^{u_0(x)} F_j(x,s) - F(x,s)\, ds \right|.$$

Então:

$$|G_j(x,u_0(x)) - G(x,u_0(x))| \leq \int_0^{|u_0(x)|} |F_j(x,s) - F(x,s)|\, ds.$$

Sendo u_0 elemento de $L^\infty(\Omega)$:

$$|G_j(x,u_0(x)) - G(x,u_0(x))| \leq \int_0^{\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}} |F_j(x,s) - F(x,s)|\, ds, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Isto implica que:

$$|G_j(x,u_0(x)) - G(x,u_0(x))| \leq \int_0^{\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}} \max_{x\in\overline{\Omega}, s\in\left[0,\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right]} |F_j(x,s) - F(x,s)|\, dt.$$

E então q.t.p. em Ω:

$$|G_j(x,u_0(x)) - G(x,u_0(x))| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \max_{x\in\overline{\Omega}, s\in\left[0,\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right]} |F_j(x,s) - F(x,s)|.$$

Como $F_j \to F$ uniformemente nos compactos de $\overline{\Omega} \times I\!R$ (conforme Teorema 1 do Capítulo 3), da desiguladade acima resulta que: $G_j(u_0) \to G(u_0)$ uniformemente em Ω (a menos de um conjunto de medida nula). Sendo Ω limitado, fica demonstrada a convergência (4.36). As demais etapas são idênticas ao Teorema 2 deste capítulo, tomando $u_0^j = u_0$.

■

Sem muita dificuldade podemos obter mais algumas informações sobre u. Observemos que se retirarmos um subconjunto I de medida nula de $I\!R$, todos os pontos de $I\!R - I$ são de acumulação. Isto garante que se f é uma função escalar definida em $I\!R - I$, faz sentido calcularmos $\lim_{t \to a} f(t), \forall a \in I\!R - I$.

Como $u \in L^\infty(I\!R; H_0^1(\Omega))$, a menos de um conjunto I de medida nula, u assume valores em $H_0^1(\Omega)$. Seja t ponto arbitrário de $I\!R - I$. Consideremos uma seqüência $t_j \to t$ qualquer, da qual extraímos uma subseqüência arbitrária $\{t_{j_k}\}$.

Desde que $\{u(t_{j_k})\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, possui uma subseqüência fracamente convergente, a qual continuamos a denotar por $\{u(t_{j_k})\}$. O fato de que $u \in C^0(I\!R; L^2(\Omega))$ implica que só pode ser

$$\langle w, u(t_{j_k}) \rangle \to \langle w, u(t) \rangle, \forall w \in H^{-1}(\Omega).$$

Isto prova que toda subseqüência de $\{u(t_j)\}$ possui uma subseqüência que converge fraco para $u(t)$. Desde que $\{u(t_j)\}$ é arbitrária, provamos que, a menos de um conjunto de medida nula, u é uma função fracamente contínua com valores em $H_0^1(\Omega)$.

Analogamente se prova que u_t é q.t.p. fracamante contínua com valores em $L^2(\Omega)$.

Passemos agora à demonstração dos lemas utilizados na prova do Teorema 2.

Lema 1 $G_j\left(u_0^j\right) \to G\left(u_0^j\right)$ *em* $L^1(\Omega)$.

Demonstração:

Da definição de G_j :

$$G_j(u) = \begin{cases} \frac{1}{p+1}\left[\binom{p+1}{1}\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{j}\binom{p+1}{2}\frac{|u|^p}{p} + \frac{1}{j^2}\binom{p+1}{3}\frac{u^{p-1}}{p-1} + \ldots\right] \\ \text{se } \frac{1}{j} \le |u| \le j; \\ \frac{1}{(p+1)j}|u|, \text{ se } -\frac{1}{j} \le u \le \frac{1}{j}; \\ \frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{2}{j}\right)^{p+1} - \left(\frac{1}{j}\right)^{p+1}\right]u, \text{ se } |u| > j. \end{cases}$$

Sendo $\left\{u_0^j\right\}$ a seqüência das truncadas de u_0 :

$$G_j\left(u_0^j\right)-G\left(u_0^j\right)=\begin{cases}\frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{j}\binom{p+1}{2}\frac{\left|u_0^j\right|^p}{p}+\frac{1}{j^2}\binom{p+1}{3}\frac{\left(u_0^j\right)^{p-1}}{p-1}+\ldots\right]\\ \text{se } \frac{1}{j}\leq\left|u_0^j\right|\leq j;\\ \frac{1}{(p+1)j}\left|u_0^j\right|-\frac{1}{(p+1)}\left(u_0^j\right)^{p+1}, \text{ se } -\frac{1}{j}\leq u_0^j\leq\frac{1}{j}.\end{cases}$$

Logo, para cada j fixado, definindo $\Omega_1=\{x\in\Omega;|u_0(x)|\leq j\}$ temos:

$$(p+1)\int_\Omega\left|G_j\left(u_0^j\right)-G\left(u_0^j\right)\right|dx=\frac{1}{j}\binom{p+1}{2}\frac{1}{p}\int_{\Omega_1}\left|u_0^j\right|^p dx+$$
$$+\frac{1}{j^2}\binom{p+1}{3}\frac{1}{p-1}\int_{\Omega_1}\left|u_0^j\right|^{p-1}dx+\ldots+\frac{1}{j}\int_{\Omega_1^c}\left|u_0^j\right|dx+\int_{\Omega_1^c}\left|u_0^j\right|^{p+1}dx.$$

Então:

$$(p+1)\int_\Omega\left|G_j\left(u_0^j\right)-G\left(u_0^j\right)\right|dx\leq\frac{1}{j}\binom{p+1}{2}\frac{1}{p}\int_\Omega|u_0|^p dx+$$
$$+\frac{1}{j^2}\binom{p+1}{3}\frac{1}{p-1}\int_\Omega|u_0|^{p-1}dx+\ldots+\frac{1}{j}\int_\Omega|u_0|\,dx+\int_{\Omega_1^c}|u_0|^{p+1}dx.$$

Por hipótese, $u_0\in L^{p+1}(\Omega)$. Do Teorema 2 do Capítulo 1, segue que $u_0\in L^r(\Omega), 1\leq r\leq p+1$. Isto prova que todas as integrais acima são finitas e, como $u_0^j\to u_0$ q.t.p., a medida de Ω_1^c tende a zero quando $j\to\infty$.

■

Lema 2 $G_j\left(u_0^j\right)\to G(u_0)$ *em* $L^1(\Omega)$.

Demonstração:

A escolha adequada de $\left\{u_0^j\right\}$ assegura que $\left|G\left(u_0^j\right)\right|\leq|G(u_0)|$, q.t.p. De fato. $uF(x,u)\geq 0\Leftrightarrow uG_u(x,u)\geq 0$. Isto implica que G é não-decrescente com relação a u se $u\geq 0$, e G é não-crescente com relação a u se $u\leq 0$. Sendo G é contínua na variável u e $G(x,0)=0$, segue que

$$\begin{aligned}&0\leq u\leq v\Rightarrow 0\leq G(x,u)\leq G(x,v);\\ &u\leq v\leq 0\Rightarrow 0\leq G(x,v)\leq G(x,u).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Mas $\left\{u_0^j\right\}$ é a seqüência das truncadas de u_0, de (4.37) resulta que

$$\left|G\left(u_0^j\right)\right| \leq |G(u_0)|, \text{ q.t.p.} \tag{4.37}$$

Como $u_0^j \to u_0$ q.t.p. em Ω e G é uma função contínua, $G\left(u_0^j\right) \to G(u_0)$ q.t.p. Por hipótese, $G(u_0) \in L^1(\Omega)$. De (4.38) e do Teorema da Convergência Dominada segue:

$$G\left(u_0^j\right) \to G(u_0) \text{ em } L^1(\Omega). \tag{4.38}$$

Então:

$$\left\|G_j\left(u_0^j\right) - G(u_0)\right\|_{L^1(\Omega)} \leq \left\|G_j\left(u_0^j\right) - G\left(u_0^j\right)\right\|_{L^1(\Omega)} + \left\|G\left(u_0^j\right) - G(u_0)\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Esta desigualdade, juntamente com (4.39) e o Lema 1 concluem a demonstração.

■

Lema 3 *$F_\nu(x, u^\nu(x,t)) \to F(x, u(x,t))$ q.t.p. em $\Omega \times \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Fixemos um ponto arbitrário de $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ no qual $u^\nu(x,t) \to u(x,t)$. Para simplificar a notação, escrevamos $u^\nu = u^\nu(x,t)$ e $u = u(x,t)$.

Se $u \neq 0$, consideremos somente os índices suficientemente grandes tais que $u^\nu \neq 0$. Da definição de F_ν :

$$|F_\nu(x, u^\nu) - F(x,u)| = \left| \frac{G\left(x, u^\nu + \frac{S}{\nu}\right) - G(x, u^\nu)}{\frac{S}{\nu}} - F(x,u) \right|$$

ou, reescrevendo de uma forma mais interessante:

$$|F_\nu(x, u^\nu) - F(x,u)| = \left| \frac{G\left(x, u^\nu + \frac{S}{\nu}\right) - G(x, u^\nu)}{\left(u^\nu + \frac{S}{\nu}\right) - u^\nu} - F(x,u) \right|.$$

Do Teorema do Valor Médio:

$$|F_\nu(x, u^\nu) - F(x,u)| = |F(x, \xi_\nu) - F(x,u)|,$$

sendo ξ_ν um ponto de $\left(u^\nu, u^\nu + \frac{1}{\nu}\right)$ ou $\left(u^\nu - \frac{1}{\nu}, u^\nu\right)$, conforme $u^\nu > 0$ ou $u^\nu < 0$, respectivamente. Como $u^\nu \to u$, segue que $u^\nu + \frac{S}{\nu} \to u$. Logo, $\xi_\nu \to u$. A continuidade de F conclui a demonstração do caso $u \neq 0$.

Se $u = 0$ então $F(x,u) = 0$ e, portanto:

$$|F_\nu(x,u^\nu) - F(x,u)| = |F_\nu(x,u^\nu)|.$$

Para os índices tais que $u^\nu \geq 0$:

$$|F_\nu(x,u^\nu)| \leq \nu \int_{u^\nu}^{u^\nu + \frac{1}{\nu}} |F(x,s)|\, ds.$$

Logo, da continuidade de F:

$$|F_\nu(x,u^\nu)| \leq \max_{s \in \left[0, u^\nu + \frac{1}{\nu}\right]} |F(x,s)|. \tag{4.39}$$

Para os índices tais que $u^\nu < 0$, cálculos análogos mostram que:

$$|F_\nu(x,u^\nu)| \leq \max_{s \in \left[u^\nu - \frac{1}{\nu}, 0\right]} |F(x,s)|. \tag{4.40}$$

Como $u^\nu \to 0$, da continuidade de F, de (4.40) e (4.41) resulta que $F_\nu(x,u^\nu) \to 0$.

■

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G.; *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, (1966).

[2] Diestel J. e Uhl Jr., J.J.; *Vector Measures,* mathemathical Surveys n$^{\underline{o}}$ 15, American Mathematical Society, (1977).

[3] Hille, E. e Phillips, R.S.; *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, (1957).

[4] Kreysig, E.; *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, (1978).

[5] Medeiros, L.A. e Miranda, M. M.; *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, notas de aula, Rio de Janeiro, (1989).

[6] Strauss, W. A.; *On Weak Soluctions of Semi-Linear Hyperbolic Equations*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 42, (4), 645-651, (1970).

[7] Strauss, W.A.; *The Energy Methods in Nonlinear Partial Differential Equations*, IMPA, (1969).

[8] Teman, R.; *Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, (1979).

[9] Treves, F.; *Basic Linear Partial Differential Equations,* Academic Press, New York, (1975).