UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
IMECC - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Dissertação de Mestrado

Geometria dos Caminhos em Grupos de Lie

Luciano Vianna Félix
Orientador: Pedro Catuogno
luvifelix@yahoo.com.br

Março de 2009

GEOMETRIA DOS CAMINHOS EM GRUPOS DE LIE

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Luciano Vianna Félix e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de MAio de 2009

Prof. Dr: Pedro Catuogno
Orientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr: Pedro Catuogno
2 Prof. Dr Paulo Régis C. Ruffino
3 Prof. Dr Ryuichi Fukuoka

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Félix, Luciano Vianna
F335g Geometria dos caminhos em grupos de Lie / Luciano Vianna Félix -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Pedro Jose Catuogno
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria riemanniana. 2. Análise estocástica. 3. Geometria estocástica. 4. Lie, Grupos de. 5. Calculo de Malliavin. I. Catuogno, Pedro Jose. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Path geometry in Lie groups.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Riemannian geometry. 2. Stochastic analysis. 3. Stochastic geometry. 4. Lie groups. 5. Malliavin calculus.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka (DMA-UEM)

Data da defesa: 28/04/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de abril de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof. (a). Dr (a). RYUICHI FUKUOKA

Agradecimentos

Aos meus pais e minha irmã, que me deram todo o apoio necessário.

Aos professores do IMECC, especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Pedro Catuogno, por tudo que me ensinou nesse tempo que trabalhamos juntos e ao Prof. Dr Paulo Ruffino, que se mostrou sempre muito atencioso e disponível, desde o nosso primeiro contato.

Aos professores do DEMAT-UFRRJ que participaram da construção da minha base matemática.

À Capes pelo apoio financeiro.

À todos os novos amigos que eu adquiri, em particular, Vitor e Marcos, companheiros de estudo, moradia e farra.

E à Georgia, que apesar da distânica me apoiou nos momentos mais críticos, se mostrando mais forte do que aparenta.

Sumário

Abstract

In this work, we study the path geometry in Lie groups using the stochastic exponential and the stochastic logarithm.

We show the geometric constructions of tangent space, one metric and one natural conection of Lie groups valued path.

Finelly we show one situation that this conection is Levi-Civita and another one that is not.

Resumo

Neste trabalho estudamos a geometria dos caminhos em grupos de Lie usando a exponencial estocástica e o logarítmo esocástico.

Apresentamos as construções geométricas do espaço tangente, uma métrica e uma conexão natural as caminhos em grupos de Lie.

Finalmente apresentamos uma situção em que essa conexão é Levi-Civita e outra que não é.

Introdução

Dado um grupo de Lie G, podemos definir o grupo dos caminhos contínuos em G que começam em e. Neste trabalho estudaremos a geometria estocástica desse grupo de caminhos, seguindo o trabalho de Shigekawa [14].

Para tal, no primeiro capítulo fazemos uma revisão bem geral sobre geometria Riemanniana e cálculo estocástico.

No segundo capítulo começamos estendendo os conceitos de cálculo estocástico do $\mathbb{R}^n$ para variedades, e consequentemente, para grupos de Lie. Estudamos duas aplicações que serão fundamentais para o estudo dos caminhos em G: a exponencial estocástica, que é uma aplicação da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ no grupo G e o logaritmo estocástico que faz o caminho contrário. Mostramos que uma é a inversa da outra e verificamos algumas propriedades operatórias. Utilizando-se dessas ferramentas, trazemos os teoremas de Doob-Meyer e de Girsanov-Meyer para o contexto dos grupos de Lie.

No fim do capítulo damos um exemplo de uma equação diferencial estocástica muito importante em mecânica: a equação de Lax, vemos uma aplicação prática dessa equação e encontramos sua solução.

Finalmente no terceiro capítulo estudamos a geometria dos caminhos em grupos de Lie começando por definir o espaço dos caminhos em um grupo de

Lie e o espaço de caminhos em uma álgebra de Lie.

Em seguida começamos com algumas noções de cálculo de Malliavin. Definimos o espaço de Cameron-Martin, espaço esse que será das direções em que poderemos definir a derivada de Malliavin. Veremos o que é uma derivada de Malliavin, conceito fundamental para o estudo da geometria estocástica dos caminhos em grupos de Lie. Utilizamos essa derivada para definir o fibrado tangente e a definição do espaço de Cameron-Martin para introduzir uma métrica nesse espaço. Damos uma expressão para a derivada de Malliavin da exponencial estocástica e utilizando essa expressão, definimos uma conexão no espaço de caminhos. Com essa conexão definimos o que vai ser o colchete de Lie e verificamos um caso em que essa conexão é de Levi-Civita e outro caso em que ela não é de Levi-Civita.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções básicas sobre variedades e grupos de Lie

Ao longo desta seção apresentaremos algumas definições e resultados sobre variedades diferenciáveis e grupos de Lie que serão muito importantes ao longo do trabalho. Esse assunto pode ser visto com maiores detalhes em [3].

Definição 1.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico M de Hausdorff, que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade munido de uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

1. $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$;

2. *Para todo par α, β, com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \bigcap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a aplicação $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ é diferenciável;*

3. A família $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ *é maximal relativa às condições* (1) *e* (2).

Uma família $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M.

Observação: A essa família de aplicações chamamos de *parametrização de* M. A parametrização de M não é necessariamente única.

Queremos agora introduzir uma idéia de espaço tangente a uma variedade diferenciável.

Sejam M *e* N duas variedades diferenciáveis, $p \in M$ e $\varphi : M \to N$. Dizemos que φ é diferenciável em p se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \to N$, de uma vizinhança de $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ em uma vizinhança de p, tal que:

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \to V$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$.

Uma aplicação φ é *diferenciável num aberto de* M se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Uma *curva diferenciável de* M é uma aplicação diferenciável

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M.$$

Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e denotemos por $\mathcal{D}_p$ o conjunto de todas as funções $f : M \to \mathbb{R}$, diferenciáveis em p. O *vetor tangente a curva* α *no* 0 é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

Dizemos que um vetor v é *tangente a* M *em* p, se existe alguma curva diferenciável α em M tal que $\alpha(0) = p$ e v é tangente a α no 0.

A seguir uma proposição que caracteriza o espaço tangente a uma variedade num ponto.

Proposição 1.1.2. *Seja T_pM o conjunto de todos os vetores tangentes a M em p. Com as operações*

$$(u+v)(f) = u(f) + v(f)$$

e

$$(k.u)(f) = k(u(f)),$$

onde $u, v \in T_pM$ e $k \in \mathbb{R}$, T_pM é um espaço vetorial que será chamado de espaço tangente a M em p.

Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável em $p \in M$. Dado $v \in T_pM$, existe uma curva diferenciável α, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Definimos

$$(\varphi)_{*p}v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi \circ \alpha\,(t)$$

Observação: Note que $(\varphi)_{*p}v \in T_{\varphi(p)}N$.

Temos que $(\varphi)_{*p}$ é uma aplicação linear e é chamada de *diferencial de φ no ponto p.*

O *fibrado tangente* de M é definido por:

$$TM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in T_pM\}.$$

O fibrado tangente é uma variedade diferencial de dimensão $2n$. Temos também que existe uma aplicação diferenciável $\pi : TM \to M$ definida por $\pi(p, v) = p$.

Um campo vetorial X sobre uma variedade diferenciável M é uma aplicação que a cada ponto p de M associa um elemento $X(p)$ de T_pM. Podemos ver isso como uma aplicação de M em TM. Dizemos que esse campo é diferenciável, se é diferenciável como aplicação.

Note que se X e Y são campos vetoriais diferenciáveis, podemos considerar o iterado XY, mas isso não é em geral um campo vetorial. No entanto se considerarmos $[X,Y]f = (XY - YX)f$, para $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, temos um campo vetorial. Esse campo será chamado de o *colchete de X por Y*.

Proposição 1.1.3. *O colchete verifica as seguintes propriedades:*

1. $[X,Y] = -[Y,X]$ (*anticomutatividade*);
2. $[aX + bZ, Y] = a[X,Y] + b[Z,Y]$ (*linearidade*);
3. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*).

Vamos introduzir agora uma maneira de se medir comprimentos em variedades.

Definição 1.1.4. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferencial M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ em T_pM tal que dados dois campos X e Y diferenciáveis e um aberto V de M a função $\phi(p) = \langle X, Y\rangle_p$ é diferenciável em V.*

Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica Riemanniana é chamada de *variedade Riemanniana.*

Notação: Denotaremos por $\chi(M)$ o conjunto dos campos de vetores C^∞ em M.

Definição 1.1.5. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M),$$

denotada por $\nabla_X Y$ *que verifica para quaisquer* X, Y *e* $Z \in \chi(M)$*,* f *e* $g \in C^\infty(M)$*:*

(a) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$*;*

(b) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$*;*

(c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$*.*

A partir da definição de conexão Riemanniana, que a primeira vista pode parecer não muito natural, enunciaremos uma proposição que nos permitirá introduzir uma noção de paralelismo nas variedades.

Proposição 1.1.6. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo de uma curva diferenciável* $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* c*, denominado derivada covariante de* V *ao longo de* c*, tal que:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$*;*

2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$*;*

3. *Se* $V = Y(c(t))$ *para algum* $Y \in \chi(M)$*, então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$*.*

Com isso temos um novo elemento no estudo das variedades, a *derivada covariante*. Com esse novo elemento introduziremos uma noção de paralelismo em variedades.

Definição 1.1.7. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva c é chamado de paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$ ao longo de c.*

Agora relacionaremos os dois conceitos vistos acima: a métrica e a conexão.

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. Diremos que a conexão é *compatível* com a métrica se para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores V e W ao longo de c, tivermos:

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Apresentaremos agora uma proposição que nos ajudará a verificar se uma conexão e uma métrica são compatíveis. Uma demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [3].

Proposição 1.1.8. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e somente se:*

$$X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle , \ \forall X, Y, Z \in \chi(M).$$

Definição 1.1.9. *Uma conexão ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica ou sem torção se:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Agora enunciaremos um dos teoremas mais importantes no que diz respeito a conexões.

Teorema 1.1.10. (**Levi-Civita**) *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo:*

(a) ∇ *é simétrica.*

(b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

A esta conexão daremos o nome de conexão de Levi-Civita.

Até agora vimos algumas propriedades das variedades diferenciáveis, porém, observamos também que não existe nenhuma operação interna nesta estrutura. Introduziremos então essa tal operação com algumas propriedades a mais e daremos a essa variedade munida de uma operação interna o nome de *grupo de Lie*.

Definição 1.1.11. *Um grupo de Lie é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação $n : G \times G \to G$ dada por $n(x, y) = xy^{-1}$ é diferenciável.*

Da estrutura diferenciável temos que um grupo de Lie é uma variedade diferenciável e da diferenciabilidade de n que as *translações à direita* R_x e *translações à esquerda* L_x, dadas por $R_x(y) = yx$ e $L_x(y) = xy$ são difeomorfismos.

Dado um grupo de Lie G, chamaremos de *campo invariante à esquerda* os campos X tais que

$$X_p = (L_p)_* X_e,$$

onde $(L_p)_*$ é a diferencial de L_p e X_p é o campo X avaliado no ponto p.

Neste trabalho estamos interessados em estudar apenas os campos diferenciáveis invariantes à esquerda. Para isso, observemos que um campo invariante à esquerda está completamente determinado pela sua avaliação em um único ponto do grupo, tomemos então, o elemento neutro e como esse ponto. Com isso temos uma identificação que associa a cada campo invariante à esquerda um elemento de T_eG. Se munirmos T_eG com a operação colchete, esse espaço é chamado de *álgebra de Lie de* G e será denotado por $\mathcal{G}$.

Uma métrica Riemanniana em G é dita *invariante à esquerda* se para todo x e $y \in G$ tem-se:

$$\langle u, v \rangle_y = \langle (L_x)_{*y} u, (L_x)_{*y} v \rangle_{(L_x)_y}.$$

Analogamente, dizemos que uma métrica Riemanniana é *invariante à direita* se para todo x e $y \in G$

$$\langle u, v \rangle_y = \langle (R_x)_{*y} u, (R_x)_{*y} v \rangle_{(R_x)_y}.$$

Se uma métrica é invariante à esquerda e à direita, diremos que ela é *bi-invariante.*

Considere agora o seguinte caso:

Seja $g \in G$. A *conjugação por* g é a aplicação $C_g : G \to G$ definida por $C_g(x) = (L_g)(R_{g^{-1}})x = gxg^{-1}$. A conjugação é diferenciável e temos a seguinte expressão pra sua diferencial no elemento neutro e.

$$Ad(g) := (C_g)_{*e} = (L_g)_{*g^{-1}}(R_{g^{-1}})_{*e}$$

Definição 1.1.12. *Seja $u \in \mathcal{G}$, a representação adjunta de u é a seguinte* *aplicação:*

$$\begin{aligned} ad(u) : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ v &\rightarrow [u,v] \end{aligned}$$

Agora apresentaremos um resultado que relaciona a aplicação adjunta num grupo G com a representação adjunta em sua álgebra de Lie $\mathcal{G}$. Esse resultado pode ser encontrado com maiores detalhes em [13].

Proposição 1.1.13. $(Ad)_*(u) = ad(u)$.

Pra encerrar essa seção, um resultado muito importante para variedades: o Teorema do Mergulho de Whitney. Iremos apenas enunciar esse resultado. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrado em [9]. Antes, precisamos definir uma classe especial de aplicações diferenciáveis entre variedades.

Sejam M e N variedades diferenciais. Uma aplicação diferenciável ϕ de M em N é um *mergulho* se:

- $(\phi)_{*p} : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$;
- ϕ é um homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset N$. Ou seja, $\phi : M \rightarrow \phi(M)$ é contínua, invertível e sua inversa é contínua.

Teorema 1.1.14. (**Whitney**) *Dada uma variedade diferenciável M de dimensão n, existe um mergulho $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, tal que a imagem $\phi(M)$ é fechada em $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Com isso temos que toda variedade diferenciável n-dimensional pode ser vista como uma superfície fechada em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Vejamos agora uma estrutura muito interessante que pode ser construida em superfícies: as *vizinhanças tubulares.*

Pela construção da variedade, consideraremos todas superfícies regulares de classe C^∞.

Lembrando que agora estamos no $\mathbb{R}^m$. Seja S uma superfície e p um ponto dessa superfície, dizemos que o segmento de reta que liga os pontos p e a que denotaremos por $[p, a]$, é *normal a S no ponto p*, se $\langle a - p, v\rangle = 0$, para qualquer v, vetor tangente a S no ponto p. A *bola normal* $B^\perp(p; \epsilon)$ é a união dos segmentos normais a S no ponto p de comprimento $< \epsilon$.

Dizemos que um número $\epsilon > 0$ é um *raio normal admissível* para um conjunto $X \subset S$ quando, dados dois segmentos normais $[p, a]$ e $[q, b]$ de comprimento $< \epsilon$ com $p \neq q \in X$, temos que $[p, a] \cap [q, b] = \emptyset$.

Agora enunciaremos um teorema que dada S uma superfície do $\mathbb{R}^{2n+1}$ garante a existência de uma função $\epsilon : S \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ que funcionará como o raio normal admissível. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [9].

Teorema 1.1.15. *Seja $S \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ uma superfície, então:*

1. *Existe $\epsilon : S \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ diferenciável , raio normal admissível para S.*

2. *A união $V_\epsilon(S) = \bigcup_{p\in S} B^\perp(p; \epsilon(p))$ é um aberto do $\mathbb{R}^m$ chamado de vizinhança tubular de S de raio $\epsilon(p)$.*

Temos que $V_\epsilon(S) = \bigcup_{p\in S} B^\perp(p; \epsilon(p))$. Com isso, dado $q \in V_\epsilon(S)$, temos que $q \in B^\perp(p; \epsilon(p))$. Daí, suponha que $|p - q| = r < \epsilon(p)$ utilizemos a seguinte notação: $q = q_p^r$. Observe que essa notação está bem definida, pois cada elemento de $V_\epsilon(S)$ está em apenas um dos conjuntos do tipo $B^\perp(p; \epsilon(p))$.

Com isso podemos acrescentar o seguinte item ao teorema acima:

3. A aplicação $\pi : V_\epsilon(S) \longrightarrow S$ que associa $q = q_p^r$ a p é C^∞.

1.1.1 Equações Diferenciais em Variedades

Aqui estenderemos a idéia de equações diferenciais para variedades.

Seja M uma variedade e X um campo vetorial sobre M, diremos que uma curva diferenciável $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é solução da seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = X(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = p \end{cases} \tag{1.1}$$

Se:

1. $c(0) = p$;

2. $c'(t) = X(c(t))$.
   Isto é. se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então $X_{c(t_1)}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c(t))\Big|_{t=t_1}$.

Para garantir a existência e unicidade de solução para equações diferenciais em variedades utilizaremos o Teorema do Mergulho de Whitney.

Seja $\phi : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ o mergulho garantido pelo teorema 1.1.14. Com isso temos que $\phi(M)$ é uma subconjunto fechado do $\mathbb{R}^{2n+1}$. Denote por $\Phi(M) = S$.

Considere a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = (\phi)_{*\phi^{-1}(\gamma(t))} X(\phi^{-1}(\gamma(t))) \\ \gamma(0) = \phi(p) \end{cases} \tag{1.2}$$

Isso é o campo X que foi transportado de M para S. Denotemos esse campo por Y. Observe que esse campo não está definido num aberto de

$\mathbb{R}^{2n+1}$. Resolveremos esse problema usando as vizinhanças tubulares. Pelo teorema 1.1.15 temos que é possível constuir uma vizinhança tubular $V_\epsilon(S)$ de raio $\epsilon : S \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Definamos em $V_\epsilon(S)$ o seguinte campo:

$$Z(q) = Z(q_p^r) = \frac{\epsilon^2 - r^2}{\epsilon^2} Y(p), \qquad para\ q \in V_\epsilon(S)$$

Agora temos um campo definido num aberto do $\mathbb{R}^{2n+1}$. Então consideremos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = Z(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = \phi(p) \end{cases}$$

É possivel utilizar a teoria de EDO's para determinar as condições de existência e unicidade de solução para essa equação, porém essa solução está no conjunto $V_\epsilon(S)$. Temos que a condição inicial da EDO está em S, a solução é tangente ao campo e S é tangente ao campo. Daí que a soluçao está em S. Assim podemos trazer a solução de volta para M através de ϕ^{-1} obtendo assim uma solução para (1.1).

1.2 Introdução ao Cálculo Estocástico

1.2.1 Noções de Teoria de Probabilidades

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos fundamentais de cálculo estocástico e alguns resultados sobre integração estocástica, como a fórmula de Itô e o teorema de Girsanov-Meyer.

Definição 1.2.1. *Seja Ω um conjunto. Uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de Ω é dita uma σ-álgebra se satisfaz:*

1. $\emptyset, \ \Omega \in \mathcal{U}$;

2. Se $A \in \mathcal{U}$, então $A^c \in \mathcal{U}$ (fechado por complementação);

3. Se $A_1, \ A_2, \dots \in \mathcal{U}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (fechado por união enumerável).

Definição 1.2.2. *Dada uma coleção V de subconjuntos de Ω, diremos que a σ-álgebra gerada por V é a menor σ-álgebra contendo todos os elementos de V. Menor no sentido de que se existe alguma outra σ-álgebra contendo V, então essa σ-álgebra também contém a σ-álgebra gerada por V.*

Definição 1.2.3. *Sejam $\mathcal{U}$ uma σ-álgebra de Ω e $\mathbb{P} : \mathcal{U} \to [0,1]$, diremos que $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade se:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

2. Se $A_1, \ A_2, \dots \in \mathcal{U}$ são dois a dois disjuntos, então $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação: Diremos que uma determinada propriedade de Ω acontece $\mathbb{P}-$*quase certamente* se a probabilidade $\mathbb{P}$ do conjunto em que ela não vale é 0.

Definição 1.2.4. *Chamaremos de espaço de probabilidade a tripla $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto, $\mathcal{U}$ é uma σ-álgebra de Ω e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade.*

Chamaremos de *σ-álgebra de Borel do* $\mathbb{R}^n$ e denotaremos por $Borel(\mathbb{R}^n)$ a σ-álgebra gerada por todos os abertos do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.5. *Sejam $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, diremos que X é uma variável aleatória n-dimensional se $X^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ para todo $B \in Borel(\mathbb{R}^n)$.*

Notação: Denotaremos por $\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega,\ tal\ que\ X(\omega) \in B\}$.

Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{V}$ uma σ-álgebra de Ω, diremos que X é $\mathcal{V}$-mensurável se $\{X \in B\} \in \mathcal{V}$, para todo $B \in Borel(\mathbb{R}^n)$.

Dada uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{U}(X)$ como a menor σ-álgebra de Ω que torna essa função mensurável. $\mathcal{U}(X)$ é a *σ-álgebra gerada por X.*

Seja A um subconjunto de Ω. $1_A(x) := \begin{cases} 1, & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A \end{cases}$

Chamaremos 1_A de *função indicadora de A.*

Diremos que uma variável aleatória X é *simples* se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$, para $a_i \in \mathbb{R}$ e $A_i \in \mathcal{U}$.

Definição 1.2.6. *Uma coleção de variáveis aleatórias $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ com $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ para todo $0 \leq t \leq T$, é dita um processo estocástico.*

Ao fixarmos $\omega \in \Omega$, temos uma função $X(\omega) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ tal que $X(\omega)(t) = X_t(\omega)$. A essa função chamaremos de *trajetória de ω.*

Sejam $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ e $Y = \{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ processos. Dizemos que Y é uma *modificação* de X se $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ para todo $0 \leq t \leq T$

Definição 1.2.7. *Sejam $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $X = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ uma variável aleatória simples e $A \in \mathcal{U}$. Então*

$$\int_A X dP := \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{P}(A_i \cap A).$$

Se X é uma variável aleatória não negativa, então definimos:

$$\int_A X d\mathbb{P} := \sup\Big\{ \int_A Y d\mathbb{P} : Y \leq X,\ Y\ simples \Big\}.$$

E finalmente, se X é uma variável aleatória, definimos:

$$\int_A X d\mathbb{P} := \int_A X^+ d\mathbb{P} - \int_A X^- d\mathbb{P},$$

onde $X^+(\omega) = \max\{0, X(\omega)\}$ *e* $X^-(\omega) = \max\{0, -X(\omega)\}$.

Ainda mais, se $X = (X_1, \cdots, X_n)$ é uma variável aleatória n-dimensional,

$$\int_A X d\mathbb{P} := \Big(\int_A X_1 d\mathbb{P}, \cdots, \int_A X_n d\mathbb{P} \Big).$$

$\int_A X d\mathbb{P}$ *será chamada de a integral de X com relação à medida $\mathbb{P}$ sobre A.*

Definição 1.2.8. *Seja X uma variável aleatória. A esperança de X é definida por:*

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

A seguir enunciaremos um teorema de extrema importância na teoria de processos. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7].

Teorema 1.2.9. (**Kolmogorov**, **Čentsov**) *Sejam $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo estocástico que satisfaz:*

$$\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^\alpha\right) \leq C|t - s|^{1+\beta}, 0 \leq s, t \leq T$$

Para α, β e C constantes positivas. Então existe uma modificação contínua $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t : 0 \leq t \leq T\}$ de X.

O que esse teorema diz é que sob certas condições os processos possuem uma modificação contínua. Ao longo deste trabalho consideraremos sempre as modificações contínuas.

Introduziremos agora os conceitos de independência.

Seja $(\Omega,\mathcal{U},\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, A e $B\in\mathcal{U}$, diremos que A e B são *independentes* se $\mathbb{P}(A\bigcap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Analogamente, diremos que $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{U}$ são independentes se para qualquer escolha $A_{k_1},\cdots,A_{k_p}$ tem-se:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{p}A_{k_i})=\prod_{i=1}^{p}\mathbb{P}(A_{k_i}).$$

No caso de σ-álgebras dizemos que a família $\{\mathcal{U}_i\}$ com $i\in I$ e $\mathcal{U}_i\subset\mathcal{U}$ é independente se para qualquer escolha finita $i_1,\cdots,i_n$, tem-se que $\{B_{i_i},\cdots,B_{i_n}\}$ são independentes, para qualquer $B_{i_j}\in\mathcal{U}_{i_j}$.

Seja $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma família de variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Diremos que $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ são independentes, se $\{\mathcal{U}(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$ o forem.

1.2.2 Esperança condicional

Definição 1.2.10. *Sejam $(\Omega,\mathcal{U},\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{V}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{U}$ e $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ uma variável aleatória integrável. Definiremos $\mathbb{E}(X|\mathcal{V})$, como sendo a variável aleatória que satisfaz:*

1. *$\mathbb{E}(X|\mathcal{V})$ é $\mathcal{V}$-mensurável;*
2. *$\int_A\mathbb{E}(X|\mathcal{V})=\int_A X$, para todo $A\in\mathcal{V}$.*

Demonstra-se pelo teorema de Radon-Nykodim que dada uma variável aleatória integrável X e $\mathcal{V}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{U}$, a esperança condicional $\mathbb{E}(X|\mathcal{V})$ existe e é única, a menos de conjuntos de probabilidade zero.

Propriedades da esperança condicional:

A seguir mostraremos algumas propriedades da esperança condicional. Uma demonstração dessas propriedades pode ser encontrada em [4].

Sejam $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ sub-σ-álgebras de $\mathcal{U}$ com $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, X e Y variáveis aleatórias, então:

(a) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{V})) = \mathbb{E}(X)$;

(b) Se X é $\mathcal{V}$-mensurável, então $\mathbb{E}(X|\mathcal{V}) = X$;

(c) $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{V}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{V}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{V})$;

(d) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{V})|\mathcal{W}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{W})$;

(e) Se Z é uma variável aleatória limitada $\mathcal{V}$-mensurável, então

$$\mathbb{E}(XZ|\mathcal{V}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{V});$$

(f) Se X é independente de $\mathcal{V}$, então $\mathbb{E}(X|\mathcal{V}) = \mathbb{E}(X)$.

1.2.3 Martingales

Nesta seção trabalharemos com um tipo particular de processos estocásticos: os martingales.

Definição 1.2.11. *Seja $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo estocástico tal que $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, para todo $0 \leq t \leq T$. Diremos que X é um martingale se:*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{U}(X_s)) = X_s,$$

para $s \leq t$.

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e uma família $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Diremos que $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ é uma filtração se for uma família não-decrescente, isto é, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t,\ se\ s \leq t$. Neste caso teremos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T})$ é um *espaço de probabilidade filtrado.*

Diremos que um processo $A = \{A_t : 0 \leq t \leq T\}$ é *adaptado* em relação à uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, se A_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável para todo $0 \leq t \leq T$.

Ainda no espaço de probabilidade filtrado, uma função $\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é dita um *tempo de parada* se $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \leq T$.

Seja $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo adaptado, diremos que X é um *martingale local* se existe uma sequência não-decrescente de tempos de parada $\{\tau_n\}$, tal que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ e os processos $X^{\tau_n} = \{X_t^{\tau_n} = X_{\tau_n \wedge t} : 0 \leq t \leq T\}$ são martingales.

Notação: Uma *partição* do intervalo $[0, T]$ é um conjunto do tipo:

$$\pi = \{0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T\}.$$

Chamaremos de *mesh de* π, e denotaremos por $|\pi|$ como sendo:

$$|\pi| := \max_{1\leq i\leq n}\{t_i - t_{i-1}\}.$$

Seja $\Pi_t = \{\pi_n(t)\}$ uma sequência de partições de $[0, t]$ tal que $\pi_n(t) \subset \pi_m(t)$, se $n < m$, $\lim_{n\to\infty} mesh\,(\pi_n(t)) = 0$ e $f : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ contínua. Definimos então

$$\langle f \rangle_{\Pi_t} := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \pi_n(t)} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Se esse limite acima existir e independer da escolha de Π_t, o denotaremos por $\langle f \rangle_t$ e o chamaremos de variação de f . Se $\langle f \rangle_t$ for finita, diremos que f possui variação finita.

Definição 1.2.12. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T})$ *um espaço de probabilidade filtrado e* $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ *um processo adaptado, diremos que ele é um semimartingale se existem* $M = \{M_t : 0 \leq t \leq T\}$ *e* $A = \{A_t : 0 \leq t \leq T\}$ *tais que* $X = M + A$ *onde* M *é uma martingale local e* A *é um processo adaptado com trajetórias de variação finita e* $A_0 = 0$.

1.2.4 Movimento Browniano

Definição 1.2.13. ($Movimento Browniano no $\mathbb{R}$*) *Seja* $B = \{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ *um processo estocástico. Diremos que ele é um movimento Browniano ou um processo de Wiener se:*

1. $B_0 = 0$ *quase certamente;*

2. *Para* $s \leq t$, $B_t - B_s$ *tem distribuição normal, com média* 0 *e variância* $t - s$*;*

3. *Sejam* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. *As variáveis aleatórias* B_1, $B_2 - B_1, \cdots$, $B_n - B_{n-1}$ *são independentes.* (*incremento independente*).

Definição 1.2.14. (*Movimento Browniano no* $\mathbb{R}^n$) *Seja* $B = (B^1, \cdots, B^n)$ *um processo estocástico n-dimensional. Diremos que ele é um movimento Browniano ou processo de Wiener n-dimensional se* $\{B^i\}_{i=1}^n$ *são movimentos Brownianos independentes.*

1.2.5 Integração estocástica

Nessa seção queremos dar um significado para a seguinte expressão:

$$\int_0^T X_s dS_s,$$

onde $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um processo estocástico e $S = \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$ um semimartingale. Para isso, usaremos uma idéia parecida com a da integral de Riemann, porém, devido a algumas propriedades dos semimartingales teremos alguns resultados diferentes dos obtidos na teoria de integração clássica.

Agora faremos uma construção análoga à de funções simples.

Considere ao longo desta seção $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{0\leq t\leq T})$ um espaço de probabilidade filtrado.

Definição 1.2.15. *Diremos que um processo $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um processo escada, se existe uma partição $\pi = \{0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T\}$ e variáveis aleatórias $\{X^{ti}\}_{i=1,\cdots,n}$ onde cada X^{ti} é $\mathcal{F}_{t_i}$-mensurável , tal que:*

$$X_t = \sum_{i=0}^{n} 1_{[t_i,t_{i+1})} X^{ti}.$$

Definição 1.2.16. *Seja $X = \sum_{i=0}^{n} 1_{[t_i,t_{i+1})} X^{ti}$ um processo escada e S um semimartingale, então*

$$\int_0^T X_s dS_s := \sum_{i=1}^{n} X^{ti} \left(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}\right).$$

Observação: A integral acima pode ser definida para qualquer $t \in [0, T]$. Para isso, basta considerar as partições do intervalo $[0, t]$.

Denotemos por $\mathbb{L}_n^i[0, T],\ i = 1, 2$, como o espaço dos processos estocásticos X com valores em $\mathbb{R}^n$ tais que:

- Para todo $0 \leq t \leq T$ a aplicação $X : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ definido por $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ é $Borel[0, t] \times \mathcal{F}_t$-mensurável;
- $\mathbb{E}\left(\int_0^T |X|^i dt\right) < \infty,\ i = 1, 2.$

Temos que processos em $\mathbb{L}^2[0,T]$ podem ser aproximados por processos escada, daí, podemos estender a integral estocástica segundo um semimartingale a uma classe maior de processos.

Definição 1.2.17. (*Integral Estocástica de Itô*) *Seja* $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$, $X = \lim_{n\to\infty} X^n$, X^n *processo escada para todo* n *e* S *um semimartingale. Então*

$$\int_0^T X_s dS_s := \lim_{n\to\infty} \int_0^T X_s^n dS_s.$$

$\int_0^T X_s dS_s$ *será chamada de a integral de Itô de* X *no intervalo* $[0,T]$.

Observação: Essa definição não depende da escolha da sequência $\{X^m\}$.

Corolário 1.2.18 (Propriedades da Integral de Itô)**.** *Sejam* a *e* $b \in \mathbb{R}$, X *e* $Y \in \mathbb{L}^2[0,T]$, S *e* S' *semimartingales e* B *um movimento Browniano, então temos:*

(a) $\int_0^T aX_s + bY_s dS_s = a\int_0^T X_s dS_s + b\int_0^T Y_s dS_s$ *(linearidade);*

(b) $\mathbb{E}\left(\int_0^T X_s dB_s\right) = 0$*;*

(c) $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T X_s dB_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s^2 dB_s\right)$ *(Isometria de Itô);*

(d) $\int_0^T X_s dS_s$ *é um semimartingale. Se* S *for um martingale, então* $\int_0^T X_s dS_s$ *também é um martingale.*

Variação quadrática e fórmula de Itô

Nesta seção apresentaremos a variação quadrática, que é um processo que servirá para definir uma nova integral estocástica e uma ferramenta muito útil para o estudo de problemas de integração estocástica de Itô: a fórmula de Itô.

Sejam X e Y dois semimartingales. Definimos a *covariação quadrática de X e Y* por:

$$\langle X, Y \rangle_t := X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$$

Observe que podemos calcular também $\langle X, X \rangle_t$, mas vamos denotá-lo por $\langle X \rangle_t^2$ e o chamaremos de *variação quadrática de X*.

Observação 1: Podemos calcular $\langle X, Y \rangle_t$ de outra maneira também. Temos que se $\langle X, Y \rangle_t$ existir, então ela também pode ser obtida através do seguinte limite:

Seja $\Pi_t = \{\pi_n(t)\}$, uma sequência de partições de $[0, t]$ como definido acima

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{t_i \in \pi_n(t)} (X_{t_i} - X_{t_i - 1})(Y_{t_i} - Y_{t_i - 1}).$$

Da mesma forma,

$$\langle X \rangle_t^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{t_i \in \pi_n(t)} (X_{t_i} - X_{t_i - 1})^2.$$

Observação 2: Observe que $\langle X, Y \rangle = \{\langle X, Y \rangle_t, 0 \leq t \leq T\}$ é um processo estocástico de variação limitada.

Agora, alguns resultados relacionando integral estocástica e variação quadrática.

Corolário 1.2.19. *Sejam X, Y, M e M' semimartingales .*

(a) $\left\langle \int_0^t X_s dM_s \int_0^t Y_s dM_s \right\rangle^2 = \int_0^t X_s Y_s d\left\langle M\right\rangle_s^2$

(b) $\left\langle \int_0^t X_s dM_s, \int_0^t Y_s dM'_s \right\rangle = \int_0^t X_s Y_s d\left\langle M, M'\right\rangle_s$

Apresentaremos agora a fórmula de Itô n-dimensional. Esta fórmula é de grande importância no estudo do cálculo estocástico, pois a partir dela é possível se obter uma nova formulação para uma grande quantidade de processos. Uma demonstração dessa fórmula pode ser obtida em [6].

Teorema 1.2.20 (Fórmula de Itô n-dimensional). *Sejam $X = (X^1, \cdots, X^n)$ um semimartingale contínuo n-dimensional, tal que $\left\langle X^i, X^j\right\rangle_t < \infty$, para $t \in [0, T]$, $1 \leq i, j \leq n$ e $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Então vale a seguinte fórmula:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s)\, d\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s .$$

A seguir enunciaremos o teorema de Girsanov-Meyer no $\mathbb{R}^n$ para mais adiante levarmos esse resultado para grupos de Lie. Uma demonstração desse teorema pode ser vista em [12].

Teorema 1.2.21. (Girsanov-Meyer) *Sejam $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ medidas de probabilidade definidas num mesmo espaço filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T})$ mutuamente absolutamente contínuas (equivalentes) e X um semimartingale com relação à $\mathbb{P}$ tal que $X = M + Z$, onde M é um martingale local com relação à $\mathbb{P}$ e Z é um processo de variação finita. Então, X também é um semimartingale com relação à $\mathbb{Q}$ e $X = L + C$, onde*

$$L_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{A_s} d\langle A, M\rangle_s$$

e $A_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)$. *L é um martingale local com relação à* $\mathbb{Q}$ *e* $C = X - L$ *é um processo de variação finita.*

Equações Diferenciais Estocásticas (EDE)

Vamos definir agora o que é uma equação diferencial estocástica e que condições um processo deve cumprir para ser a solução dessa equação.

Definição 1.2.22. *Sejam* $b : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n \in \mathbb{L}^1_n[0,T]$ *e* $A : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$, *B um movimento Browniano m-dimensional. Considere a seguinte equação diferencial estocástica de Itô:*

$$\begin{cases} dZ_t = b(Z_t,t)\,dt + A(Z_t,t)\,dB_t \\ Z_0 = z^0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Diremos que o processo $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ *é solução dessa equação diferencial estocástica de Itô, se:*

1. *Se* $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s,s)\,ds + \int_0^t A(X_s,s)\,dB_s$
2. $X_0 = z^0$.

A seguir enunciaremos o teorema que nos dá condições para a existência e unicidade de soluções de EDE. Uma demonstração desse teorema pode ser vista em [11].

Teorema 1.2.23 (Existência e Unicidade de solução para EDE). *Suponha que* $b : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *e* $A : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$, *tal que:*

1. *$b(x,t)$ e $A(x,t)$ são Lipschitz com relação à variável $x \in \mathbb{R}^n$ para todo $0 \leq t \leq T$*

2. $|b(x,t)| + |A(x,t)| \leq L(1+|x|)$ *, para todo $0 \leq t \leq T$*

Então, existe uma única solução $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\} \in \mathbb{L}^2_n[0,T]$ para a seguinte EDE:

$$\begin{cases} dZ_t = b(Z_t,t)\,dt + A(Z_t,t)\,dB_t \\ Z_0 = z^0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Observação: A unicidade acima é no sentido de que se X_t e $\hat{X}_t$ são soluções da EDE acima, então

$$\mathbb{P}\left(\{X_t = \hat{X}_t, \forall\ 0 \leq t \leq T\}\right) = 1.$$

A essa igualdade, damos nome de igualdade em probabilidade.

1.2.6 Integral de Stratonovich

Existe um outro tipo de integral na teoria de integração estocástica, a integral de Stratonovich.

Definição 1.2.24. *Sejam X e S semimartingales. Definimos a integral de Stratonovich de X em relação à S pela seguinte fórmula:*

$$\int_0^t X_s \circ dS_s := \int_0^t X_s dS_s + \frac{1}{2}\langle X, S\rangle_t$$

Estudemos agora as equações diferenciais estocásticas de Stratonovich. Considere $b : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ e $A : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$.

$$\begin{cases} \circ dZ_t = b(Z_t,t)dt + A(Z_t,t) \circ dB_t \\ Z_0 = z^0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Um processo $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ é solução de (1.5) se:

1. $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s,s)ds + \int_0^t A(X_s,s) \circ dB_s$

2. $X_0 = z^0$

Note que a condição (1) é equivalente à:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t b(X_s,s)ds + \int_0^t A(X_s,s)dB_s + \frac{1}{2}\left\langle A(X_t,t), B_t\right\rangle_t \\ &= X_0 + \int_0^t b(X_s,s)ds + \int_0^t A(X_s,s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\left\langle A(X_s,s), B_s\right\rangle_s ds \\ &= X_0 + \int_0^t \left(b(X_s,s) + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\langle A(X_s,s), B_s\right\rangle_s\right) ds + \int_0^t A(X_s,s)dB_s \end{aligned}$$

Ou seja, dizer que X é solução de (1.5) é equivalente a dizer que X é solução da seguinte equação diferencial estocástica de Itô:

$$\begin{cases} dZ_t = \left(b(Z_t,t) + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\langle A(X_t,t), B_t\right\rangle_t\right) dt + A(X_t,t)dB_t \\ Z_0 = z^0 \end{cases}$$

Com isso, mostramos que existe uma relação entre as soluções de equações diferencias estocásticas de Itô e as soluções de equações diferenciais estocásticas de Stratonovich. Daí usamos o teorema 1.2.23 para justificar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais estocásticas de Stratonovich.

Capítulo 2

Cálculo estocástico em grupos de Lie

Neste capítulo estudaremos algumas noções de cálculo estocástico para grupos de Lie e álgebras de Lie. Os assuntos tratados nesse capítulo podem ser encontrados em [5], [2] e [8].

2.1 Cálculo estocástico em variedades

Equações diferenciais estocásticas em variedades

Para introduzir as equações diferencias estocásticas em variedades usaremos uma idéia análoga à utilizada para definir equações diferenciais ordinárias em variedades.

Definição 2.1.1. *Seja* $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ *um processo com valores em* M*. Diremos que* X *é um semimartingale, se* $f(X) = \{f(X_t), 0 \leq t \leq T\}$ *é um semimartingale em* $\mathbb{R}$*, para toda* $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$*.*

Definição 2.1.2. *Sejam* $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T})$ *um espaço de probabilidade filtrado,* H_i *campos de vetores sobre* M *para* $i = 1, \cdots, n$*,* $S = \{S_t = (S_t^1, \cdots, S_t^n), 0 \leq t \leq T\}$ *um semimartingale* n*-dimensional e* y^0 *uma variável aleatória* $\mathcal{F}_0$*-mensurável. Considere a seguinte equação diferencial estocástica de Stratonovich em* M*:*

$$\begin{cases} \circ dY_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i(Y_t) \circ dS_t^i \\ Y_0 = y^0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Então, diremos que X*, um semimartingale com valores em* M *é solução de* (2.1) *se para toda* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *e* $0 \leq t \leq T$ *temos:*

- $X_0 = y^0$
- $f(X_t) = f(X_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_0^t H_i(Y_s) f \circ dS_s^i$

Exponencial estocástica

Nesta seção definiremos duas aplicações muito importantes para o estudo de cálculo estocástico em grupos de Lie: a *exponencial estocástica* e o *logaritmo estocástico* que nos permitirão trasportar os conceitos estocásticos definidos no $\mathbb{R}^n$ para os grupos de Lie.

Para isso, usaremos o fato de que a álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial n-dimensional e usaremos a exponencial estocástica para levar processos de $\mathcal{G}$ para G.

Uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial, digamos, n-dimensional com base $\{b_1, \cdots, b_n\}$, então temos um isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi(a_1e_1 + \cdots, a_ne_n) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$, onde $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n$ e $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$

é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Portanto, diremos que um processo Z com valores em $\mathcal{G}$ é um semimartingale , se $Z = \varphi(Y)$, para Y um semimartingale no $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.3. *Seja Z um semimartingale local na álgebra de Lie $\mathcal{G}$. Dizemos que a exponencial estocástica (à esquerda) $\epsilon(Z)$ de Z, é a solução da seguinte equação diferencial estocástica:*

$$\begin{cases} \circ d\epsilon(Z_t) = (L_{\epsilon(Z_t)})_* \circ dZ_t \\ \epsilon(Z_0) = e \end{cases} \tag{2.2}$$

Definição 2.1.4. *A forma de Maurer-Cartan de G ω, é a 1-forma diferencial definida por:*

$$\omega_g(v) = (L_{g^{-1}})_* v, \ \ v \in T_g G.$$

Estudemos agora alguns pull-backs importantes da forma de Maurer-Cartan.

Lema 2.1.5. *Seja $m : G \times G \to G$ definida por $m(x, y) = xy$, $i : G \to G$, tal que $i(x) = x^{-1}$, $\pi_1 : G \times G \to G$ com $\pi_1(g, h) = g$ e $\pi_2 : G \times G \to G$ com $\pi_2(g, h) = h$. Então:*

(a) $m^*\omega = Ad^{-1}(\pi_2)(\pi_1^*\omega) + \pi_2^*\omega$;

(b) $i^*\omega = -Ad\omega$.

Onde $m^*\omega$ e $i^*\omega$ são os pull-backs de ω pelas aplicações m e i, respectivamente.

Demonstração:

(a) Seja $(u, v) \in T_gG \times T_hG$,

$$\begin{aligned}
m^*\omega_{(g,h)}(u,v) &= \omega_{(gh)}(m)_*(u,v)\\
&= (L_{(gh)^{-1}})_*(m)_*(u,v) = (L_{h^{-1}g^{-1}})\big((R_h)_*u, (L_g)_*v\big)\\
&= (L_{h^{-1}})_*(L_{g^{-1}})_*(R_h)_*u + (L_{h^{-1}})_*(L_{g^{-1}})_*(L_g)_*v\\
&= Ad^{-1}(h)(L_{g^{-1}})_*u + (L_{h^{-1}})_*v\\
&= Ad^{-1}(h)(\omega_g)u + \omega_h v\\
&= Ad^{-1}(h)(\omega_g)(\pi_1)_*(u,v) + \omega_h(\pi_2)_*(u,v)\\
&= Ad^{-1}(h)(\pi_1^*\omega_{(g,h)})(u,v) + (\pi_2^*\omega_{(g,h)})(u,v)\\
&= \Big(Ad^{-1}\big(\pi_2(g,h)\big)(\pi_1^*\omega_{(g,h)}) + (\pi_2^*\omega_{(g,h)})\Big)(u,v)
\end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade decorre da definição de pull-back e a segunda da definição da forma de Maurer-Cartan.

(b) Considere a seguinte aplicação: $B : G \to G \times G$, onde $B(g) = (g, g)$. Então temos que

$$m \circ (Id_G \times i) \circ B(g) = e,$$

para todo $g \in G$. Daí temos que $\big(m \circ (Id_G \times i) \circ B\big)^*\omega = 0$.

$$\begin{aligned}
\big(m \circ (Id_G \times i) \circ B\big)^*\omega(v) &= \omega\big(m \circ (Id_G \times i) \circ B\big)_*(v)\\
&= \omega\big(m\big)_*\big(Id_G \times i\big)_*\big(B\big)_*(v)\\
&= \big(m\big)^*\omega\big(Id_G \times i\big)_*(v,v)\\
&= \Big(Ad^{-1}(\pi_2)\Big)(\pi_1^*)\omega\Big(v,(i)_*v\Big) + \Big(\pi_2^*\omega\Big)\Big(v,(i)_*v\Big)\\
&= \Big(Ad^{-1}(g)\Big)\omega(\pi_1)_*\Big(v,(i)_*v\Big) + \omega(\pi_2)_*\Big(v,(i)_*v\Big)\\
&= \Big(Ad^{-1}(g)\Big)\omega(v) + \omega(i)_*v\\
&= \Big(Ad^{-1}(g)\Big)\omega(v) + (i)^*\omega(v) = 0
\end{aligned}$$

Para todo $v \in T_gG$. Daí que $(i)^*\omega_g = -\Big(Ad^{-1}(g)\Big)\omega_g$. ■

Utilizaremos a forma de Maurer-Cartan para fazer a seguinte definição:

Definição 2.1.6. *Seja X um processo estocástico em G, definimos como o logaritmo de X, $\log(X) = \{(\log X)_t : 0 \leq t \leq T\}$, o seguinte semimartingale em $\mathcal{G}$:*

$$(\log X)_t = \int_0^t \omega \circ dX_s \tag{2.3}$$

Agora veremos duas proposições que relacionam a exponencial estocástica e o logaritmo estocástico.

Proposição 2.1.7. $\log \circ \epsilon = Id$

Demonstração: Pela igualdade (2.3), temos que

$$\log \epsilon(M_t) = \int_0^t \omega \circ d\epsilon(M_s),$$

e pela igualdade (2.2) temos,

$$\circ d\epsilon(M_t) = (L_{\epsilon(M_t)})_* \circ dM_t.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \log \epsilon(M_t) = \int_0^t \omega(L_{\epsilon(M_t)})_* \circ dM_t &= \int_0^t (L_{\epsilon(M_t)^{-1}})_*(L_{\epsilon(M_t)})_* \circ dM_t \\ &= \int_0^t 1 \circ dM_s = M_t \end{aligned}$$

■

Proposição 2.1.8. $\epsilon \circ \log = Id$

Demonstração: Temos que

$Id_{PG} = \epsilon \circ \log$ se e somente se $\log = \log \circ \epsilon \circ \log$, mas

$$\log \circ \epsilon \circ \log = (\log \circ \epsilon) \circ \log = \log .$$

Onde a última igualdade decorre da proposição 2.1.7 ■

Das proposições 2.1.7 e 2.1.8 temos que a exponencial estocástica e o logaritmo estocástico são funções invertíveis e que uma é a inversa da outra. Vejamos agora umas ferramentas que nos permitirão trabalhar com essas duas funções.

Proposição 2.1.9. Propriedades operatórias:

Sejam X e Y semimartingales em G, M e N semimartingales em $\mathcal{G}$. Então:

(a) $\log(XY)_t = \int_0^t Ad(Y_s^{-1}) \circ d(\log X_s) + \log Y_t$;

(b) $\log(X^{-1})_t = -\int_0^t Ad(X_s) \circ d(\log X_s)$;

(c) $\epsilon(M_t + N_t) = \epsilon\Big(\int_0^t Ad(\epsilon(N_s)) \circ dM_s\Big)\epsilon(N_t)$;

(d) $\epsilon(M_t)^{-1} = \epsilon\Big(-\int_0^t Ad(\epsilon(M_s)) \circ dM_s\Big)$.

Demonstração: (a)

$$\begin{aligned}
\log(XY)_t = \log(m(X_t, Y_t)) &= \int_0^t \omega \circ dm(X_s, Y_s) \\
&= \int_0^t m^*\omega \circ d(X_s, Y_s) \\
&= \int_0^t \Big(Ad^{-1}(\pi_2)(\pi_1^*\omega) + \pi_2^*\omega\Big) \circ d(X_s, Y_s) \\
&= \int_0^t Ad^{-1}(Y_s)\omega \circ dX_s + \int_0^t \omega \circ dY_s \\
&= \int_0^t Ad(Y_s^{-1}) \circ d\log X_s + \log Y_t
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(\log X^{-1})_t = \log i(X)_t &= \int_0^t \omega \circ di(X_s) \\
&= \int_0^t i^*\omega \circ dX_s \\
&= \int_0^t -Ad(X_s)\omega \circ dX_s \\
&= -\int_0^t Ad(X_s) \circ d\log(X)_s
\end{aligned}$$

(c)

$$\log\Bigg(\bigg(\epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(N_s)\big) \circ dM_s\Big)\bigg)\epsilon(N_s)\Bigg)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \Big(Ad\big(\epsilon(N_s)^{-1}\big)\Big) \circ d\log\bigg(\epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(N_s)\big) \circ dM_s\Big)\bigg) + \log\big(\epsilon(N_s)\big) \\
&= \int_0^t \Big(Ad\big(\epsilon(N_s)^{-1}\big)\Big) \circ d\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(N_s)\big) \circ dM_s\Big) + N_t \\
&= \int_0^t \Big(Ad\big(\epsilon(N_s)^{-1}\big)\Big)\Big(Ad\big(\epsilon(N_s)\big)\Big) \circ dM_s + N_t \\
&= \int_0^t \circ dM_s + N_t = M_t + N_t = \log\big(\epsilon(M_t + N_t)\big)
\end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade segue do item (a) desta proposição.

(d)

$$\begin{aligned}
\log\Big(\epsilon\Big(-\int_0^t Ad\big(\epsilon(M_s)\big)\circ dM_s\Big)\Big) &= -\int_0^t Ad\big(\epsilon(M_s)\big)\circ dM_s \overset{2.1.7}{=} \\
&= -\int_0^t Ad\big(\epsilon(M_s)\big)\circ d\log\big(\epsilon(M_s)\big) \overset{(b)}{=} \\
&= \log(\epsilon(M_t)^{-1})
\end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade decorre da proposição 2.1.7 ∎

Definição 2.1.10. *Um processo X em G é um martingale se:*

$$X = X_0\epsilon(M),$$

onde M um martingale em $\mathcal{G}$.

Teorema 2.1.11. (**Doob-Meyer em grupos de Lie**) *Seja $X = X_0\epsilon(M)$ um semimartingale em G onde $M = N + A$ com N um martingale local e A um processo de variação finita em $\mathcal{G}$. Então X possui as seguintes decomposições:*

$$X = X_0YZ = X_0\tilde{Z}\tilde{Y},$$

onde Y e $\tilde{Y}$ são martingales, Z e $\tilde{Z}$ são processos de variação finita. Ainda mais, temos as seguintes fórmulas para $Y, \tilde{Y}, Z$ e $\tilde{Z}$:

$$Y_t = \epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(A)\big)\circ dN\Big),$$

$$\tilde{Y}_t = \epsilon(N)_t,$$

$$Z_t = \epsilon(A)_t.$$

e

$$\tilde{Z}_t = \epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(N)\big) \circ dA\Big)$$

À fórmula $X = X_0 Y Z$ damos o nome de decomposição multiplicativa à esquerda de Doob-Meyer, e à fórmula $X = X_0 \tilde{Z} \tilde{Y}$ damos o nome de decomposição multiplicativa à direita de Doob-Meyer.

Demonstração: Temos que $M = N + A$, daí que

$$\begin{aligned} \epsilon(M)_t &= \epsilon(N + A)_t \\ &= \epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(A)\big) \circ dN\Big)\epsilon(A)_t \end{aligned}$$

Tomando $Y_t = \epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(A)\big) \circ dN\Big)$ e $Z_t = \epsilon(A)_t$, temos:

$$\epsilon(M)_t = Y_t Z_t.$$

com isso, temos que $\epsilon(M) = YZ$ e segue daí que $X = X_0 Y Z$.

Para obtermos a decomposição multiplicativa à direita de Doob-Meyer, fazemos os mesmos cálculos com $\epsilon(A + N)$.

■

Agora, com o auxílio da exponencial estocástica e do logaritmo estocástico, estenderemos o Teorema de Girsanov-Meyer para grupos de Lie.

Teorema 2.1.12. (**Teorema de Girsanov-Meyer em grupos de Lie**)

Sejam $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ medidas de probabilidade num mesmo espaço filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T})$ mutuamente absolutamente contínuas (equivalentes) e X um semimartingale em G com a decomposição multiplicativa à esquerda de

Doob-Meyer X_0YZ com respeito a $\mathbb{P}$. Então X possui a decomposição multiplicativa à esquerda de Doob-Meyer X_0VW com respeito a $\mathbb{Q}$, onde

$$V_t = \epsilon\Big(\int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(\log Z_s + \int_0^s \frac{1}{A_r} d\left\langle A, B\right\rangle_r\big)\Big) \circ d\big(B_s - \int_0^s \frac{1}{A_r} d\left\langle A, B\right\rangle_r\big)\Big)$$

e

$$W_t = \epsilon\Big(\log Z_t + \int_0^t \frac{1}{A_s} d\left\langle A, B\right\rangle_s\Big),$$

sendo $A_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)$ e $B_t = \log(YZ)_t - \log(Z)_t$.

Demonstração: Seja $X = X_0YZ$ a decomposição multiplicativa à esquerda de Doob-Meyer relativa a $\mathbb{P}$. Temos então que Y é um martingale local e Z_t um processo de variação limitada. Pela proposição 2.1.9 temos:

$$\log(YZ)_t = \int_0^t Ad(Z_s^{-1}) \circ d\log(Y)_s + \log Z_t.$$

Denotemos por $B_t = \int_0^t Ad(Z_s^{-1}) \circ d\log(Y)_s$.

Temos que

$$\int_0^t Ad(Z_s^{-1}) \circ d\log(Y)_s = \int_0^t Ad(Z_s^{-1}) d\log(Y)_s + \big\langle Ad(Z^{-1}), \log(Y)\big\rangle_t .$$

Como Z é um processo de variação finita, temos que $\log Z$ também é um processo de variação finita, daí

$$\big\langle Ad(Z^{-1}), \log(Y)\big\rangle_t = 0.$$

Com isso, temos

$$B_t = \int_0^t Ad(Z_s^{-1}) \circ d\log(Y)_s = \int_0^t Ad(Z_s^{-1}) d\log(Y)_s.$$

Como Y é um martingale local em G, $\log(Y)$ é um martingale local em $\mathcal{G}$, temos então que $\{\int_0^t Ad(Z_s^{-1})d\log(Y)_s : 0 \leq t \leq T\}$ também é um martingale local. Segue daí que B é um martingale local.

Então temos $\log(YZ) = B + \log Z$, com B um martingale local e $\log Z$ um processo de variação finita, temos então, pelo teorema 1.2.21 que $\log(YZ) = L + C$ onde

$$L_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{A_s} d\left\langle A, B \right\rangle_s$$

e

$$C_t = \log(YZ)_t - L_t = \log(Z)_t + \int_0^t \frac{1}{A_s} d\left\langle A, B \right\rangle_s$$

Daí que

$$\log(YZ)_t = L_t + C_t \tag{2.4}$$

Aplicando ϵ na igualdade (2.4), temos:

$$Y_t Z_t = \epsilon\Big(L_t + C_t\Big) = \epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(C_s)\big) \circ dL_s\Big)\epsilon(C_t)$$

Tomando $W_t = \epsilon(C_t)$ e $V_t = \epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(C_s)\big) \circ dL_s\Big)$ temos:

$$W_t = \epsilon\Big(log(Z)_t + \int_0^t \frac{1}{A_s} d\left\langle A, B \right\rangle_s\Big)$$

e

$$V_t = \epsilon\bigg(\int_0^t Ad\Big(\epsilon(log(Z)_s + \int_0^s \frac{1}{A_r} d\left\langle A, B \right\rangle_r)\Big) \circ d\big(B_s - \int_0^s \frac{1}{A_r} d\left\langle A, B \right\rangle_r\big)\bigg)$$

Daí que X possui $X = X_0 V W$ como decomposição multiplicativa à esquerda de Doob-Meyer relativa a $\mathbb{Q}$. ∎

2.2 Equação de Lax

Nesta seção trabalharemos com uma equação diferencial estocástica em grupos de Lie em particular, a *equação de Lax*.

Seja $M = \{M_t : 0 \leq t \leq T\}$ um semimartingale em $\mathcal{G}$ com $M_0 = 0$ Considere a seguinte equação diferencial em $\mathcal{G}$:

$$\begin{cases} \circ dX_t = [X_t, \circ dM_t] \\ X_0 = X^0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Esta equação será chamada de *equação de Lax estocástica.*

A equação estocástica de Lax tem uma motivação física que falaremos um pouco agora, maiores detalhes podem ser encontrados em [8] e [2].

Movimento aleatório de um corpo rígido

Imagine um corpo rígido no $\mathbb{R}^3$. Qualquer movimento rígido dele, (isto é, sem deformá-lo) que mantenha fixo o centro, pode ser representado por uma curva g_t em $SO(3)$ tal que $g_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$. Lembrando que $SO(3)$ é um grupo de Lie, considere $\omega(t)$ a velocidade angular no espaço e $\Omega(t)$ a velocidade angular no corpo como sendo elementos de $\mathcal{G}$ que são definidos pela seguinte equação:

$$\frac{dg_t}{dt} = \omega g_t = g_t \Omega$$

Com isso temos que $\omega = Ad(\Omega)$.

Denotemos também por m, o momento angular no espaço e M o momento angular no corpo que também são relacionados da seguinte maneira:

$$m = Ad(g_t)M.$$

Se o corpo é simétrico com relação ao eixo de rotação, temos que M e Ω estão na mesma direção. Fixando-se o centro, m é constante, mas M satisfaz a seguinte equação de Euler:

$$\frac{dM}{dt} = [M, \Omega]$$

A equação de Euler apresentada acima é uma equação diferencial ordinária, mas suponha agora que o corpo sofra uma pertubação aleatória, ou seja, a sua posição varia aleatoriamente, com isso, temos que a sua velocidade angular é um processo estocástico, então devemos substituir a derivada ordinária pela "derivada"estocástica de Stratonovich e Ω por $\circ d\Omega$. Com essas alterações, temos:

$$\circ dM = [M, \circ d\Omega]$$

Com isso temos a equação diferencial estocástica de Lax.

Equação de Lax em grupos de matrizes

Aqui trabalharemos o caso em que G é um grupo de matrizes.

Proposição 2.2.1. *A solução de* (2.5) *é dada por :*

$$X_t = Ad(\epsilon(-\int_0^t Ad(\epsilon(M)) \circ dM))X^0$$

Demonstração: Tome $u = \epsilon(M)$ e considere X um processo na álgebra definido da seguinte maneira:

$$X_t = Ad(u_t^{-1})X_0.$$

Mostremos que $\circ dX_t = [X_t, \circ d \log u_t]$.

No grupo de matrizes, podemos escrever $Ad(u_t^{-1})X_0 = u_t^{-1}X_0u_t$. Com isso temos:

$$
\begin{aligned}
\circ dX_t &= \circ du_t^{-1}X_0u_t \\
&= \circ du_t^{-1}(X_0u_t) + u_t^{-1}X_0 \circ du_t \\
&= -u_t^{-1} \circ du_t(u_t^{-1}X_0u_t) + u_t^{-1}X_0u_tu_t^{-1} \circ du_t \\
&= [Ad(u_t^{-1}), u_t^{-1} \circ du_t] \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

onde a terceira igualdade segue do fato que $u_t^{-1}u_t = e$ e da regra do produto. Lembrando que pela definição 2.3, temos que $\log(u)_t = \int_0^t \omega \circ du_t$. Com isso temos que

$$
\begin{aligned}
\circ d\log(u)_t &= \omega_{u_t} \circ du_t \\
&= (L_{u_t^{-1}})_* \circ du_t \\
&= u_t^{-1} \circ du_t
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$\circ d\log(u)_t = u_t^{-1} \circ du_t. \qquad (2.7)$$

Utilizando a equação (2.7) e a definição de X_t em (2.6), temos que:

$$
\begin{aligned}
\circ dX_t &= [Ad(u_t^{-1}), u_t^{-1} \circ du_t] \\
&= [X_t, \circ d\log(u)_t].
\end{aligned}
$$

Como $u = \epsilon(M)$, temos $\log(u) = \log \epsilon(M) = M$.

Onde a última igualdade segue da proposição 2.1.7. Daí, temos que

$$\circ dX_t = [X_t, \circ d \log u_t] = [X_t, \circ dM_t].$$

Ou seja, X é solução da equação diferencial (2.5).

$$\begin{aligned} X_t &= Ad(u_t^{-1})X_0 \\ &= Ad\Big(\epsilon(M)_t^{-1}\Big)X_0 \\ &= Ad\Big(\epsilon\big(-\int_0^t Ad(\epsilon(M))\big) \circ dM\Big)X_0. \end{aligned}$$

Onde a última igualdade segue da proposição 2.1.9. ■

Capítulo 3

Geometria dos caminhos de um grupo de Lie

Faremos agora algumas considerações de geometria estocástica. Devido às diferenças existentes entre a teoria de integração estocástica e a teoria de integração ordinária teremos vários aspectos diferentes nas duas geometrias que iremos ressaltando conforme eles forem aparecendo. Os assuntos tratados nesse capítulo podem ser vistos com maiores detalhes em [10], [14] e [15].

3.1 Espaço de trajetórias

Sejam G um grupo de Lie e $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie. Considere os seguintes espaços:

$$PG = \{\gamma : [0, T] \to G,\ \gamma \text{ contínua e } \gamma_0 = e\}$$

PG é o *espaço de trajetórias contínuas começando em e de* G. Note que dados $\gamma, \delta \in PG$, se definirmos a seguinte operação

$$\gamma\delta = \{(\gamma\delta)_t = \gamma_t\delta_t : t \in [0, T]\},$$

temos que PG é um grupo.

Da mesma maneira construiremos o *espaço das trajetórias contínuas começando em* 0 de $\mathcal{G}$.

$$P\mathcal{G} = \{x : [0, T] \to \mathcal{G};\ x \ \textit{contínua e} \ \ x_0 = 0\}.$$

3.1.1 Cálculo de Malliavin

A seguir utilizaremos as idéias de P. Malliavin para derivar funções definidas nos espaços das trajetórias contínuas em grupos de Lie e na álgebra de Lie. Nesta teoria temos o espaço de Cameron-Martin, que desempenha um papel fundamental: é neste espaço que estão as direções nas quais realizaremos as nossas derivadas.

Definição 3.1.1. *Chamaremos de espaço de Cameron-Martin, e denotaremos por* $\mathcal{H}$ *o seguinte subconjunto de* $P\mathcal{G}$.

$$\mathcal{H} = \{h \in P\mathcal{G}\text{: } h \textit{ é absolutamente contínua e } \dot{h} \in L^2([0, T], \mathcal{G})\}$$

Observação: *Note que falamos que* $\dot{h} \in L^2([0, T], \mathcal{G})$*, não de* $\mathbb{L}^2[0.T]$

Consideremos o espaço das funções $f : PG \to \mathbb{R}$ tais que dado uma partição $0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T$ e $\gamma \in PG$, temos que $f(\gamma) = F(\gamma_{t_1}, \cdots, \gamma_{t_n}),\ F \in C^\infty(G^n)$. Denotaremos esse espaço por $\mathcal{FC}(PG)^\infty$ e o chamaremos de *o espaço das funções cilíndricas.*

Neste capítulo trabalharemos com a *derivada de Malliavin*, que é definida da seguinte maneira: Sejam $h \in \mathcal{H}$, F definida em $P\mathcal{G}$ e $x \in P\mathcal{G}$

$$D_h F(x) = \frac{d}{d\lambda} F(x + \lambda h)\Big|_{\lambda=0}$$

Com isso definimos o espaço tangente em $P\mathcal{G}$ a x da seguinte maneira:

$$T_x(P\mathcal{G}) = \{h : h \in \mathcal{H}\}$$

e

$$h_x(F) = \frac{d}{du}\left(F(x + uh)\right)\Big|_{u=0}$$

Com isso temos:

$$T(P\mathcal{G}) \cong P\mathcal{G} \times \mathcal{H}.$$

Como $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial n-dimensional, portanto fixe $\xi_1, \cdots \xi_n$ uma base de $\mathcal{G}$. Definimos um produto interno em $\mathcal{G}$ da seguinte maneira:

Sejam u e $v \in \mathcal{G}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i$, com a_i e $b_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \cdots, n$.

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Introduzimos um produto interno em $\mathcal{H}$ da seguinte maneira:

$$\langle h, k \rangle := \int_0^T \left\langle \dot{h}(s), \dot{k}(s) \right\rangle ds.$$

Onde tendo que $\dot{h} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i(t)$ e $\dot{k} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i(t)$. Com isso temos

$$\left\langle \dot{h}(t), \dot{k}(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(t)$$

Agora, dado $h \in \mathcal{H}$ definamos o campo $\mathbf{X}^h$ sobre PG da seguinte maneira:

$$\mathbf{X}^h_\gamma f = \frac{d}{du} f\Big(\epsilon\big(uh\big)\gamma\Big)\Big|_{u=0}, \qquad f \in \mathcal{FC}(PG)^\infty.$$

Agora definimos um espaço tangente a PG em γ de maneira parecida a que foi feita em $P\mathcal{G}$.

$$T_\gamma(PG) := \{\mathbf{X}^h_\gamma : h \in \mathcal{H}\}.$$

O *fibrado tangente* é dado por:

$$T(PG) = \bigcup_{\gamma \in PG} T_\gamma(PG).$$

Um resultado importante é que $T_\gamma(PG)$ é isomorfo à $\mathcal{H}$.

Lema 3.1.2. *Seja $\Psi_\gamma : \mathcal{H} \to \mathbf{X}^h_\gamma$ definido da seguinte maneira:*

$$\Psi_\gamma(h) = \mathbf{X}^h_\gamma.$$

Então Ψ_γ é um isomorfismo entre $\mathcal{H}$ e $T_\gamma(PG)$.

Demonstração:

Ψ_γ é linear: Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, h e $k \in \mathcal{H}$ e $f \in \mathcal{FC}(PG)^\infty$

$$\begin{aligned}
f\left[\epsilon\big(u(ah+bk)\big)\gamma\right] &= f\left[\epsilon\big(uah+ubk\big)\gamma\right] \\
&= f\left[\epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(ubk)\big) \circ duah\Big)\epsilon(ubk)\gamma\right] \\
&= f\left[\epsilon\Big(ua\int_0^t Ad\big(\epsilon(ubk)\big)\dot{h}ds\Big)\epsilon(ubk)\gamma\right]
\end{aligned}$$

a segunda igualdade segue da proposição 2.1.9. Ou seja

$$f\left[\epsilon\big(u(ah+bk)\big)\gamma\right] = f\left[\epsilon\Big(ua\int_0^t Ad\big(\epsilon(ubk)\big)\dot{h}ds\Big)\epsilon(ubk)\gamma\right]. \qquad (3.1)$$

Observemos pela definição de ϵ que $\circ d\epsilon(Y_t) = (L_{\epsilon(Y_t)})_* \circ dY_t$. Com isso temos

$$
\begin{aligned}
\Psi_\gamma(ah+bk)f &= \mathbf{X}_\gamma^{ah+bk} f \\
&= \frac{d}{du}\left(f\left[\epsilon\big(u(ah+bk)\big)\gamma\right]\right)\Big|_{u=0} \\
&= \frac{d}{du}\left(f\left[\epsilon\Big(ua\int_0^t Ad\big(\epsilon(ubk)\big)\dot{h}ds\Big)\epsilon(ubk)\gamma\right]\right)\Big|_{u=0} \\
&= Df \circ \left[(L_{\epsilon(0)})_*\Big(a\int_0^t Ad(\epsilon(0))\dot{h}ds\Big)\epsilon(0) + \epsilon(0)(L_{\epsilon(0)})_* bk\right]\gamma \\
&= Df \circ \left[a\int_0^t \dot{h}ds + bk\right]\gamma \\
&= Df \circ [ah+bk]\,\gamma.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Psi_\gamma(h)f &= \mathbf{X}_\gamma^{h} f \\
&= \frac{d}{du}\left(f\big(\epsilon(uh)\gamma\big)\right)\Big|_{u=0} \\
&= Df \circ ((L_\epsilon(0))_* h)\gamma \\
&= Df \circ (h)\gamma.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\left(a\Psi_\gamma(h) + b\Psi_\gamma(k)\right) f &= a\Psi_\gamma(h)f + b\Psi_\gamma(k)f \\
&= aDf \circ (h)\gamma + bDf \circ (k)\gamma \\
&= Df \circ [ah+bk]\,\gamma \\
&= \Psi_\gamma(ah+bk)f.
\end{aligned}
$$

A injetividade e a sobrejetividade seguem direto da definição de $\mathbf{X}^h$. ■

Resulta que $T_\gamma(PG)$ é isomorfo a $\mathcal{H}$. Logo, temos que $T(PG)$ é isomorfo a $PG \times \mathcal{H}$. Usando o isomorfismo entre $\mathcal{H}$ e $T_\gamma(PG)$ podemos definir um produto interno em $T_\gamma(PG)$ da seguinte maneira: Sejam $\mathbf{X}_\gamma^h$ e $\mathbf{X}_\gamma^k \in T_\gamma(PG)$, então

$$\left\langle \mathbf{X}_\gamma^h, \mathbf{X}_\gamma^k \right\rangle := \langle h, k\rangle .$$

Dada uma F definida em $P\mathcal{G}$ podemos definir sua diferencial no sentido de Malliavin da seguinte maneira:

$$DF_x : T_x P\mathcal{G} = \mathcal{H} \to T_{F(x)} PG = \mathcal{H},$$

$$DF_x(h) = D_h F(x).$$

Seja $\gamma \in PG$ e $h \in \mathcal{H}$, denotemos por $\gamma \cdot h_t := \displaystyle\int_0^t Ad(\gamma_s)\dot{h} ds.$

De agora em diante, fixemos $\gamma = \epsilon(x)$. Utilizaremos as duas notações, escolhendo entre uma ou outra quando isso ajudar na compreensão das idéias expostas.

Teorema 3.1.3. *Seja $h \in \mathcal{H}$. Então temos que*

$$D\epsilon_x(h) = (R_\gamma)_* \left(\gamma \cdot h\right).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \epsilon(x + \lambda h) &= \epsilon\Big(\int_0^t Ad\Big(\epsilon(x_s)\Big) \circ d\lambda h\Big)\epsilon(x) \\ &= R_\gamma \circ \epsilon\Big(\lambda \int_0^t Ad\Big(\epsilon(x_s)\Big)\dot{h} ds\Big) \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue da proposição 2.1.9(a). Daí, temos que

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{d\lambda}\epsilon\Big(\lambda\int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(x_s\big)\Big)\dot{h}ds\Big)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{dt}\epsilon\Big(\lambda\int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(x_s\big)\Big)\dot{h}ds\Big)\Big|_{\lambda=0}.$$

Seja agora, $Y_\lambda^t = \lambda\displaystyle\int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(x_s\big)\Big)\dot{h}ds$ e $Z_\lambda^t = \epsilon(Y_\lambda^t)$, então

$$\frac{d}{dt}Y_\lambda^t = \lambda Ad\Big(\epsilon\big(x_t\big)\Big)\dot{h}.$$

Pela definição de exponencial, temos que

$$dZ_\lambda^t = (L_{\epsilon(Y_\lambda^t)})_* dY_\lambda^t.$$

Com isso temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{dt}\epsilon\Big(\lambda\int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(x_s\big)\Big)\dot{h}ds\Big)\Big|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{dt}Z_\lambda^t\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\Big(\big(L_{\epsilon(Y_\lambda^t)}\big)_*\frac{d}{dt}Y_\lambda^t\Big)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\Big(\Big(L_{\epsilon\big(Y_\lambda^t\big)}\Big)_*\lambda Ad\Big(\epsilon\big(x_t\big)\Big)\dot{h}\Big)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \Big(\frac{d}{d\lambda}\Big((L_{\epsilon(Y_\lambda^t)})_*\Big)\lambda Ad\Big(\epsilon\big(x_t\big)\Big)\dot{h}\Big)|_{\lambda=0} \\
&\quad +\Big(L_{\epsilon(Y_\lambda^t)}\Big)_* Ad\Big(\epsilon\big(x_t\big)\Big)\dot{h}\Big|_{\lambda=0} \\
&= Ad\Big(\epsilon\big(x_t\big)\Big)\dot{h}.
\end{aligned}$$

Onde a última igualdade segue do fato que $\epsilon(Y_0^t) = \epsilon(0) = e$. Com isso temos que:

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{d\lambda}\epsilon\Big(\lambda\int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(x_s\big)\Big)\dot{h}ds\Big)\Big|_{\lambda=0} = Ad\Big(\epsilon\big(x_t\big)\Big)\dot{h}.$$

Portanto, temos que

$$\frac{d}{d\lambda}\epsilon\Big(\lambda\int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(x_s\big)\Big)\dot{h}ds\Big)\Big|_{\lambda=0} = \int_0^t Ad\Big(\epsilon\big(x_s\big)\Big)\dot{h}ds = (\gamma\cdot h)_t$$

Com isso, podemos calcular $D_h\epsilon\big(x\big)$.

$$\begin{aligned} D_h\epsilon\big(x\big) &= \frac{d}{d\lambda}\epsilon\Big(x+\lambda h\Big)\Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\left((R_\gamma)\circ\epsilon\left(\lambda\int_0^t Ad\big(\gamma_s\big)\dot{h}ds\right)\right)\Big|_{\lambda=0} \\ &= (R_\gamma)_*\circ\frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^t Ad\big(\gamma_s\big)\dot{h}ds\right)\Big|_{\lambda=0} \\ &= (R_\gamma)_*\,(\gamma\cdot h)\,. \end{aligned}$$

■

Com isso, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}\times P\mathcal{G}\cong T(P\mathcal{G}) & \xrightarrow{D\epsilon} & T(PG)\cong\mathcal{H}\times PG \\ (h,x) & \longrightarrow & D\epsilon_x(h) \\ \Big\downarrow\pi & & \Big\downarrow\pi \\ P\mathcal{G} & \xrightarrow{\epsilon} & PG \\ x & \longrightarrow & \epsilon(x). \end{array}$$

Lema 3.1.4. *Seja $f\in\mathcal{FC}(PG)^\infty$, então*

$$D(f\circ\epsilon)_x(h) = \mathbf{X}_\gamma^{\gamma\cdot h}f.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
D(f \circ \epsilon_x)(h) &= \frac{d}{du}\Big(f \circ \epsilon(uh + x_t)\Big)\Big|_{u=0} \\
&= \frac{d}{du}\Bigg(f\left[\epsilon\Big(\int_0^t Ad\big(\epsilon(x_s)\big) \circ duh\Big)\epsilon(x_t)\right]\Bigg)\Big|_{u=0} \\
&= \frac{d}{du}\left(f\left[\epsilon\Big(\int_0^t uAd(\gamma_s)\dot{h}ds\Big)\gamma_t\right]\right)\Big|_{u=0} \\
&= \frac{d}{du}\left(f\left[\epsilon\Big(u\gamma \cdot h_t\Big)\gamma_t\right]\right)\Big|_{u=0} \\
&= \mathbf{X}_\gamma^{\gamma \cdot h} f.
\end{aligned}$$

A segunda igualdade segue da proposição 2.1.9 e a última da definição de $\mathbf{X}_\gamma^h$.

■

Temos que $\log : PG \to P\mathcal{G}$, portanto $D\log_\gamma : T_\gamma(PG) \to T_x(P\mathcal{G})$. E mais, temos que $\epsilon \circ \log = Id$, portanto temos

$$D\epsilon \circ D\log = Id \tag{3.2}$$

Lema 3.1.5. $D\log_\gamma(\mathbf{X}_\gamma^k) = \gamma^{-1} \cdot k$

Demonstração: Temos pela equação (3.2) que ter $D\log_\gamma(\mathbf{X}_\gamma^k) = \gamma^{-1} \cdot k$ é equivalente a termos $\mathbf{X}_\gamma^k = D\epsilon_x(\gamma^{-1} \cdot k_t)$.

$$\begin{aligned}
D\epsilon_x(\gamma^{-1} \cdot k_t) &= (R_\gamma)_* \left(\gamma \cdot (\gamma^{-1} \cdot k_t)\right)_t \\
&= (R_\gamma)_* \int_0^t Ad(\gamma_s)\ (\gamma^{-1} \dot{\cdot} k_s)\ ds \\
&= (R_\gamma)_* \int_0^t Ad(\gamma_s) Ad(\gamma_r^{-1})\dot{k} ds \\
&= (R_\gamma)_* \left(\int_0^t \dot{k} ds\right) \\
&= (R_\gamma)_* k(t) = \mathbf{X}_\gamma^k.
\end{aligned}$$

A segunda igualdade segue do teorema 3.1.3. ■

Ou seja, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} \times PG \cong T(PG) & \stackrel{D\log}{\longrightarrow} & T(P\mathcal{G}) \cong \mathcal{H} \times P\mathcal{G} \\ \mathbf{X}^h_\gamma \cong (h, \gamma) & \longrightarrow & \gamma^{-1} \cdot h. \end{array}$$

Temos que $P\mathcal{G}$ é uma variedade Riemanniana e temos que $\epsilon : P\mathcal{G} \longrightarrow PG$ relaciona as duas variedades diferenciavelmente, então utilizaremos ϵ para definir uma conexão em PG.

Dado $k \in \mathcal{H}$, consideremos $\Theta_k : PG \to P\mathcal{G}$ da seguinte maneira: Seja $\sigma \in PG$.

$$\Theta_k(\sigma)_t = \int_0^t Ad(\sigma_s^{-1})\dot{k}ds.$$

Consideremos agora $\Phi : T(PG) \times T(PG) \to T(PG)$ definida da seguinte maneira:

$$\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k) = D\epsilon[D\Theta_k \circ \epsilon(D\log \mathbf{X}^h)]$$

ou seja,

$$\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k)_\gamma = D\epsilon_x[D\Theta_k \circ \epsilon_x(D\log_\gamma \mathbf{X}^h_\gamma)].$$

Proposição 3.1.6. $\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k) = \mathbf{X}^l$, *onde*

$$l(t) = -\int_0^t [h(s), \dot{k}(s)]ds.$$

Demonstração:

Pelo lema 3.1.5, temos que $D\log_\gamma(\mathbf{X}^h_\gamma) = \gamma^{-1}\cdot h$.

Calculemos agora $D\Theta_k \circ \epsilon(D\log \mathbf{X}^h) = D\Theta_h \circ \epsilon(\gamma^{-1}\cdot h)$. Pelo lema 3.1.4, temos que

$$D\Theta_k \circ \epsilon(\gamma^{-1}\cdot h) = \mathbf{X}^{\gamma\cdot(\gamma^{-1}\cdot h)}_\gamma \Theta_k. \tag{3.3}$$

Mas temos que $\gamma\cdot(\gamma^{-1}\cdot h) = \gamma\cdot(\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})\dot{h}ds) = \int_0^t Ad(\gamma_s)Ad(\gamma_s^{-1})\dot{h}ds = h$. Daí, aplicando esse resultado na equação (3.3)

$$\begin{aligned} D\Theta_k \circ \epsilon(\gamma^{-1}\cdot h) &= \mathbf{X}^h_\gamma \Theta_k \\ &= \frac{d}{du}\Big(\Theta_k\big(\epsilon(uh)\gamma\big)\Big)\Big|_{u=0} \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \Theta_k\left(\epsilon(uh)\gamma_t\right) &= \int_0^t Ad\Big(\gamma_s^{-1}\epsilon^{-1}(uh)\Big)\dot{k}ds \\ &= \int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})Ad\left(\epsilon\Big(-\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\circ duh\Big)\right)\dot{k}ds \\ &= \int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})Ad\left(\epsilon\Big(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr\Big)\right)\dot{k}ds \end{aligned}$$

a segunda igualdade segue da proposição 2.1.9.

Ou seja

$$\Theta_k\left(\epsilon(uh)\gamma_t\right) = \int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})Ad\left(\epsilon\Big(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr\Big)\right)\dot{k}ds \tag{3.4}$$

denotemos por $\iota(u,t) = \epsilon(-u\int_0^t Ad(\epsilon(uh))\dot{h}ds)$. Note que $\iota(0,t) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left[Ad\Big(\epsilon\big(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr\big)\Big)\right]\Big|_{u=0} &= ad \circ \Big(L_{\iota(u,s)}\Big)_* \circ \Big[-\int_0^s Ad\big(\epsilon(uh)\big)\dot{h}dr \\
&\quad -u\frac{d}{du}\Big(\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr\Big)\Big]\Big|_{u=0} \\
&= ad\Big((L_e)_* \circ \Big(-\int_0^t Ad(e)\dot{h}dr\Big)\Big) \\
&= ad(-h).
\end{aligned}$$

A primeira igualdade segue da proposição 1.1.13, da regra da cadeia e do produto. Ou seja

$$\frac{d}{du}\left[Ad\Big(\epsilon\big(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr\big)\Big)\right]\Big|_{u=0} = ad(-h). \tag{3.5}$$

Daí que

$$\begin{aligned}
D\Theta_k \circ \epsilon(\gamma^{-1}\cdot h) &= \frac{d}{du}\Big(\Theta_k\big(\epsilon\,(uh(t))\,\gamma_t\big)\Big)\Big|_{u=0} \\
&= \frac{d}{du}\left(\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})Ad\Big(\epsilon\big(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr\big)\Big)\dot{k}ds\right)\Big|_{u=0} \\
&= \left(\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})\frac{d}{du}\left[Ad\Big(\epsilon\big(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr\big)\Big)\right]\dot{k}ds\right)\Big|_{u=0} \\
&= \int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})ad(-h)(\dot{k})ds \\
&= -\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})[h,\dot{k}]ds
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da equação (3.4) e a quarta vem da equação (3.5).

Com isso temos que

$$D\Theta_k \circ \epsilon(\gamma^{-1}.h) = -\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})[h,\dot{k}]ds \tag{3.6}$$

Então

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k)_\gamma &= D\epsilon_x \left(-\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})[h, \dot{k}]ds \right) \\
&= (R_{\gamma_t})_*(\gamma_t. \left(-\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})[h, \dot{k}]ds \right)) \\
&= (R_{\gamma_t})_* \left(-\int_0^t Ad(\gamma_s)Ad(\gamma_s^{-1})[h, \dot{k}]ds \right) \\
&= (R_{\gamma_t})_* \left(-\int_0^t [h, \dot{k}]ds \right) \\
&= (R_{\gamma_t})_* \, l_t = \mathbf{X}^l_\gamma
\end{aligned}$$

onde $l_t = -\displaystyle\int_0^t [h(s), \dot{k}(s)]ds$ e a segunda igualdade vem do teorema 3.1.3.

■

Essa função definida acima na verdade é uma conexão em PG.

Teorema 3.1.7. *A aplicação Φ é uma conexão.*

Demonstração: Verifiquemos que Φ satisfaz as três condições para ser uma conexão:

$(a)\Phi(f\mathbf{X}^h + g\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r) = f\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^r) + g\Phi(\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r)$.

Pela definição de Φ, temos que

$$
\begin{aligned}
\Phi(f\mathbf{X}^h + g\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r)_\gamma &= D\epsilon_x[D\Theta_r \circ \epsilon_x(D\log_\gamma(f(\gamma)\mathbf{X}^h_\gamma + g(\gamma)\mathbf{X}^k_\gamma))] \\
&= D\epsilon_x[D\Theta_r \circ \epsilon_x\Big(f(\gamma)D\log_\gamma \mathbf{X}^h_\gamma + g(\gamma)D\log_\gamma \mathbf{X}^k_\gamma\Big)] \\
&= D\epsilon_x[f(\gamma)D\Theta_r \circ \epsilon_x\Big(D\log_\gamma \mathbf{X}^h_\gamma\Big) + g(\gamma)D\Theta_r \circ \epsilon_x\Big(D\log_\gamma \mathbf{X}^k_\gamma\Big)] \\
&= f(\gamma)D\epsilon_x[D\Theta_r \circ \epsilon_x\Big(D\log_\gamma \mathbf{X}^h_\gamma\Big)] \\
&\quad +g(\gamma)D\epsilon_x[D\Theta_r \circ \epsilon_x\Big(D\log_\gamma \mathbf{X}^k_\gamma\Big)] \\
&= f(\gamma)\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^r)_\gamma + g(\gamma)\Phi(\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r)_\gamma,
\end{aligned}
$$

onde a segunda igualdade segue do fato que $f(\gamma)$ e $g(\gamma) \in \mathbb{R}$ e da linearidade de $D\log_\gamma$, a terceira da linearidade de $D\Theta_r \circ \epsilon$, a quarta da linearidade de $D\epsilon_x$. Ou seja, temos

$$\Phi(f\mathbf{X}^h + g\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r) = f\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^r) + g\Phi(\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r)$$

$(b)\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k + \mathbf{X}^r) = \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k) + \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^r)_\gamma$

Pelo lema 3.1.2, temos que $\mathbf{X}^k + \mathbf{X}^r = \mathbf{X}^{k+r}$, daí temos

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k + \mathbf{X}^r) &= \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^{k+r}) \\
&= \mathbf{X}^{l(t)}
\end{aligned}
$$

Sendo

$$
\begin{aligned}
l(t) &= -\int_0^t [h, (k \dot{+} r)] \\
&= -\int_0^t [h, \dot{k}] - \int_0^t [h, \dot{r}]
\end{aligned}
$$

Sejam $l_1(t) = -\int_0^t [h, \dot{k}]$ e $l_2(t) = -\int_0^t [h, \dot{r}]$. Com isso temos

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k + \mathbf{X}^r) &= \mathbf{X}^{l_1+l_2} \\ &= \mathbf{X}^{l_1} + \mathbf{X}^{l_2} \end{aligned}$$

a segunda igualdade segue do lema 3.1.2. Pela proposição 3.1.6 temos que $\mathbf{X}^{l_1} = \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k)$ e $\mathbf{X}^{l_2} = \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^r)$

Então temos que

$$\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k + \mathbf{X}^r) = \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k) + \Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^r)$$

$(c)\Phi(\mathbf{X}^h, f\mathbf{X}^k) = f\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k) + \mathbf{X}^h(f)\mathbf{X}^k$

Note que

$$f(\gamma)\mathbf{X}^h_\gamma = f(\gamma)\Psi_\gamma(h) = \Psi_\gamma(f(\gamma)h) = \mathbf{X}^{f(\gamma)h}_\gamma.$$

Com isso temos que $f\mathbf{X}^h = \mathbf{X}^{fh}$

Calculemos $\Phi(\mathbf{X}^h, f\mathbf{X}^k)$ pela definição.

$$\Phi(\mathbf{X}^h, f\mathbf{X}^k)_\gamma \quad = \quad D\epsilon_x\big(D\Theta_{fk} \circ \epsilon_x(\gamma^{-1} \cdot h)\big)$$

Calculemos inicialmente $D\Theta_{fk} \circ \epsilon_x(\gamma^{-1} \cdot h)$.

$$\begin{aligned} D\Theta_{fk} \circ \epsilon_x(\gamma^{-1} \cdot h) &= \mathbf{X}^{\gamma\cdot(\gamma^{-1}\cdot h)}_\gamma \Theta_{fk} \\ &= \mathbf{X}^h_\gamma \Theta_{fk} \\ &= \frac{d}{du}\Big(\Theta_{fk}\big(\epsilon(uh)\gamma\big)\Big)\Big|_{u=0} \end{aligned}$$

A primeira igualdade segue do lema 3.1.4. Então temos que

$$\begin{aligned}
\Theta_{fk}\big(\epsilon(uh)\gamma\big) &= \int_0^t Ad\big((\epsilon(uh)\gamma)^{-1}\big)(f(\epsilon(u\dot{h})\gamma)k)ds \\
&= \int_0^t Ad\big(\gamma^{-1}\big)f(\epsilon(uh)\gamma)Ad\big(\epsilon(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr)\big)(\dot{k})ds
\end{aligned}$$

Pela linearidade de $Ad(\sigma)$, pelo fato de $f(\sigma) \in \mathbb{R}$ para todo $\sigma \in PG$ e pela proposição 2.1.9 temos a segunda igualdade, com isso, temos

$$\begin{aligned}
D\Theta_{fk} \circ \epsilon_x(\gamma^{-1} \cdot h) &= \frac{d}{du}\Big(\int_0^t Ad\big(\gamma^{-1}\big)f(\epsilon(uh)\gamma)Ad\big(\epsilon(-u\int_0^s Ad(\epsilon(uh))\dot{h}dr)\big)(\dot{k})ds\Big)\Big|_{u=0} \\
&= \int_0^t Ad\big(\gamma^{-1}\big)\Big[\mathbf{X}^h_\gamma(f)\dot{k} + f(\gamma)ad(-\int_0^s \dot{h}dr)(\dot{k})\Big]ds \\
&= \int_0^t Ad\big(\gamma^{-1}\big)\Big[\mathbf{X}^h_\gamma(f)\dot{k} - f(\gamma)[h,\dot{k}]\Big]ds
\end{aligned}$$

e finalmente, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{X}^h, f\mathbf{X}^k)_\gamma &= D\epsilon_x\Big(D\Theta_{fk} \circ \epsilon_x(\gamma^{-1} \cdot h)\Big) \\
&= D\epsilon_x\Big(\int_0^t Ad\big(\gamma^{-1}\big)\Big[\mathbf{X}^h_\gamma(f)\dot{k} - f(\gamma)[h,\dot{k}]\Big]ds\Big) \\
&= (R_\gamma)_*\Big(\gamma \cdot \Big(\int_0^t Ad\big(\gamma^{-1}\big)\Big[\mathbf{X}^h_\gamma(f)\dot{k} - f(\gamma)[h,\dot{k}]\Big]ds\Big)\Big) \\
&= (R_\gamma)_*\Big(\int_0^t \mathbf{X}^h_\gamma(f)\dot{k} - f(\gamma)[h,\dot{k}]\Big]ds\Big) \\
&= (R_\gamma)_*\Big(\mathbf{X}^h_\gamma(f)k\Big) + (R_\gamma)_*\Big(-f(\gamma)\int_0^t [h,\dot{k}]ds\Big) \\
&= \mathbf{X}_\gamma^{\mathbf{X}^h_\gamma(f)k} + \mathbf{X}_\gamma^{-f(\gamma)\int_0^t [h,\dot{k}]ds} \\
&= \mathbf{X}^h_\gamma(f)\mathbf{X}^k_\gamma + f(\gamma)\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k)_\gamma
\end{aligned}$$

Onde a terceira igualdade segue do teorema 3.1.3.

Com isso temos que

$$\Phi(\mathbf{X}^h, f\mathbf{X}^k) = \mathbf{X}^h(f)\mathbf{X}^k + f\Phi(\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k)$$

■

Para concluir a construção de PG como uma variedade Riemanniana, definiremos o colchete em seus espaço tangente de forma que a conexão seja simétrica, ou seja:

$$[\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k]_\gamma := \nabla_{\mathbf{X}^h_\gamma}\mathbf{X}^k_\gamma - \nabla_{\mathbf{X}^k}\mathbf{X}^h_\gamma.$$

E agora uma proposição para caracterizar a conexão em PG.

Proposição 3.1.8. $[\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k] = -\mathbf{X}^{[h,k]}$

Demonstração: Pela definição de conexão e pela proposição 3.1.6 temos que $D\log_\gamma \nabla_{\mathbf{X}^h_\gamma}\mathbf{X}^k_\gamma = -\int_0^t [k(s), \dot{h}(s)]ds$

$$\begin{aligned}
D\log_\gamma[\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k]_\gamma &= D\log_\gamma\Big(\nabla_{\mathbf{X}^h_\gamma}\mathbf{X}^k_\gamma - \nabla_{\mathbf{X}^k_\gamma}\mathbf{X}^h_\gamma\Big)\\
&= D\log_\gamma \nabla_{\mathbf{X}^h_\gamma}\mathbf{X}^k_\gamma - D\log_\gamma \nabla_{\mathbf{X}^k_\gamma}\mathbf{X}^h_\gamma\\
&= D\left(\gamma^{-1}\cdot k\right)\left(\gamma^{-1}\cdot h\right) - D\left(\gamma^{-1}\cdot h\right)\left(\gamma^{-1}\cdot k\right)\\
&= -\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})[h_s, \dot{k}_s]ds + \int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})[k_s, \dot{h}_s]ds\\
&= -\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})\Big([h_s, \dot{k}_s] + [\dot{h}_s, k_s]\Big)ds\\
&= -\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})\frac{d}{ds}\Big([h_s, k_s]\Big)ds.
\end{aligned}$$

a terceira igualdade segue das contas feitas na demonstração da proposição 3.1.6 e a quarta da equação (3.6).

Então,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k]_\gamma &= D\epsilon\left(-\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})\frac{d}{ds}\Big([h_s, k_s]\Big)ds\right)\\
&= (R_\gamma)_*\left(\gamma.\Big(-\int_0^t Ad(\gamma_s^{-1})\frac{d}{ds}\Big([h_s, k_s]\Big)ds\Big)\right)\\
&= (R_\gamma)_*\left(-\int_0^t Ad(\gamma_s)Ad(\gamma_s^{-1})\frac{d}{ds}\Big([h_s, k_s]\Big)ds\right)\\
&= (R_\gamma)_*\Big(-[h_t, k_t]\Big) = \mathbf{X}_\gamma^{-[h,k]}
\end{aligned}$$

a segunda igualdade vem do teorema 3.1.3.

Daí que $[\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k] = \mathbf{X}^{-[h_t, k_t]}$.

■

Então temos uma métrica, uma conexão e um colchete definidos em $T(PG)$, uma pergunta natural é: Será que essa conexão é a de Levi-Civita? Não é possível dar uma resposta definitiva para essa pergunta, pois há casos em que ela é de Levi-Civita e outros que ela não é. Ilustremos esses casos.

Pela própria maneira que definimos o colchete, temos que a conexão é simétrica, verifiquemos então a sua compatibilidade com a métrica. Pela proposição 1.1.8 a conexão e a métrica têm que verificar a seguinte igualdade:

$$\mathbf{X}^h \left\langle \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle = \left\langle \nabla_{\mathbf{X}^h}\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle + \left\langle \mathbf{X}^k, \nabla_{\mathbf{X}^h}\mathbf{X}^r \right\rangle,$$

para $\mathbf{X}^h, \mathbf{X}^k$ e $\mathbf{X}^r \in T(PG)$.

Calculemos então $\mathbf{X}^h \left\langle \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle$.

Temos que $\left\langle \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle = \langle k, r\rangle = \displaystyle\int_0^T \left\langle \dot{k}, \dot{r} \right\rangle ds$. Ou seja $\left\langle \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle$ independe do ponto de PG que está sendo avaliada, portanto, temos $\mathbf{X}^h \left\langle \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle = 0$. Para calcular o segundo termo da igualdade, lembremos que havíamos fixado $\xi_1, \cdots, \xi_n$ uma base de $\mathcal{G}$. Escreveremos o segundo termo da igualdade em função dessa base.

Tomando $h(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i(t)$, $\dot{k}(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j k_j(t)$ e $\dot{r}(t) = \sum_{l=1}^{n} \xi_l r_l(t)$ teremos:

$$\left\langle \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle = \sum_{i,j,l=1}^{n} \langle [\xi_j, \xi_i], \xi_l \rangle \int_0^T k_j(s) h_i(s) r_l(s) ds$$

e

$$\left\langle \mathbf{X}^k, \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^r \right\rangle = \sum_{i,j,l=1}^{n} - \langle \xi_j, [\xi_i, \xi_l] \rangle \int_0^T k_j(s) h_i(s) r_l(s) ds$$

Com isso, temos

$$\left\langle \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle + \left\langle \mathbf{X}^k, \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^r \right\rangle = \sum_{i,j,l=1}^{n} \Big(\langle [\xi_j, \xi_i], \xi_l \rangle - \langle \xi_j, [\xi_i, \xi_l] \rangle \Big) I_{ijk}, \quad (3.7)$$

onde $I_{ijl} = \int_0^T k_j(s) h_i(s) r_l(s) ds$

Veja que no caso da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ ser comutativa, teremos que a conexão é compatível com a métrica, pois daí teremos que $[\xi_i, \xi_j] = 0$ para $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, e com isso teremos que

$$\sum_{i,j,l=1}^{n} \Big(\langle [\xi_j, \xi_i], \xi_l \rangle - \langle \xi_j, [\xi_i, \xi_l] \rangle \Big) I_{ijk} = 0$$

Qualquer que seja o valor de I_{ijk}. ou seja

$$\mathbf{X}^h \left\langle \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle = 0 = \left\langle \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle + \left\langle \mathbf{X}^k, \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^r \right\rangle.$$

No entanto, se a álgebra de Lie $\mathcal{G}$ possui a propriedade de $[\xi_p, \xi_1] = \xi_1$ para algum $p \in \{1, \cdots, n\}$ considere o seguinte caso:

Defina $\delta(t) = \begin{cases} t, \ se \ 0 \leq t \leq T \\ 0, \ se \ T \leq t \end{cases}$, $h(t) = \delta(t)\xi_1$, $r(t) = \frac{1}{2}\delta^2(t)\xi_1$ e $k(t) = \delta^3(t)\xi_p$. Com isso temos que $I_{ijl} = \int_0^T 3s^2 ds = T^3$ se $i = l = 1$, $j = p$ e 0 nos outros casos. Ou seja,

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle + \left\langle \mathbf{X}^k, \nabla_{\mathbf{X}^h} \mathbf{X}^r \right\rangle &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\langle [\xi_j, \xi_1], \xi_1 \rangle - \langle \xi_j, [\xi_1, \xi_1] \rangle \Big) I_{1j1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\langle [\xi_j, \xi_1], \xi_1 \rangle \Big) I_{1j1} \\ &= I_{1p1} = T^3 \neq 0 = \mathbf{X}^h \left\langle \mathbf{X}^k, \mathbf{X}^r \right\rangle \end{aligned}$$

Ou seja, nesse caso, a conexão e a métrica não são compatíveis.

Referências Bibliográficas

[1] Aida, Shigeki. Stochastic analysis on loop spaces [trasnlation of Sügaku 50 (1998), no3, 256-281, MR1652019(99i:58155)]. Sugaku Expositions. *Sugaku Expositions* 13 (2000) no. 2, 197–214.

[2] Arnold, V,I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York-1978.

[3] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. IMPA-1988.

[4] Catuogno, P. *Notas de aula do curso de Cálculo Estocástico*. 2008.

[5] Catuogno, P; Ruffino, Paulo R.C. Product of harmonic maps is harmonic: a stochastic approach. *Séminaire de Probabilités XL*, 227-233, Lecture Notes in Math, 1899.*Springer, Berlin*, 2007.

[6] Evans, L. *An Introduction to Stochastic Differential Equations Version 1.2*.

Texto Eletrônico em http://math.berkeley.edu/ evans/SDE.course.pdf

[7] Karatzas, I; Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag-1988.

[8] Liao, M. *Random motion of a rigid body.* Journal of Theoretical Probability. Vol.10 Nº1,1997.

[9] Lima, E. *Variedades Diferenciáveis.* Monografias de Matemática do IMPA, 15, 19873.

[10] Oksendal, B. *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics.* Maio 1997.

[11] Oksendal, B. *Stochastic Differential Equations 5º ed.* Springer-Verlag-2000.

[12] Protter, P. *Stochastic Integration and Differential Equations 2º ed.* Springer-2003.

[13] San Martin, L. *Notas de aula do curso de Grupos de Lie.* Texto Eletrônico em

http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2006/Grupos%20de%20Lie.pdf

[14] Shigekawa, Ichiro. Differential calculus on a based loop group. *New trends in stochastic analysis (Charingworth,* 1994*),* 375 − −398*, World Sci. Publ. River Edge, NJ,*1997*.*

[15] Ustünel, A.*An Introduction To Analysis On Wiener Space.* Texto Eletrônico em

http://www.finance-research.net/docs/6840/FR0511511.pdf