



FELIPE EMANOEL CHAVES

BIFURCAÇÕES GENÉRICAS DE SISTEMAS DINÂMICOS SUAVES  
POR PARTES COM SIMETRIAS

CAMPINAS  
2013





**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA**  
**E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

**FELIPE EMANOEL CHAVES**

**BIFURCAÇÕES GENÉRICAS DE SISTEMAS DINÂMICOS SUAVES**  
**POR PARTES COM SIMETRIAS**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica da Universidade Estadual de  
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a  
obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientador: Marco Antonio Teixeira**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA PELO ALUNO FELIPE EMANOEL CHAVES  
E ORIENTADA PELO PROF.DR. MARCO ANTONIO TEIXEIRA.

**Assinatura do Orientador**

A handwritten signature in blue ink, written over a horizontal line. The signature is stylized and appears to be "M. A. Teixeira".

**CAMPINAS**  
**2013**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C398b Chaves, Felipe Emanuel, 1984-  
Bifurcações genéricas de sistemas dinâmicos suaves por partes com simetrias / Felipe Emanuel Chaves. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marco Antonio Teixeira.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Singularidades (Matemática). 2. Filippov, Sistemas de. 3. Estabilidade estrutural. 4. Simetria. I. Teixeira, Marco Antonio, 1944-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Generic bifurcation of piecewise-non-smooth dynamical system with symmetries

**Palavras-chave em inglês:**

Singularities (Mathematics)

Filippov systems

Structural stability

Symmetry

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Doutor em Matemática

**Banca examinadora:**

Marco Antonio Teixeira [Orientador]

Ricardo Miranda Martins

Claudio Aguinaldo Buzzi

Luiz Fernando de Osório Mello

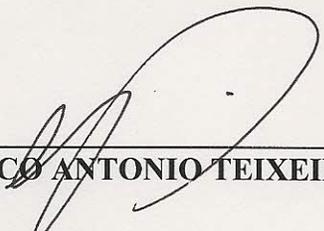
Regilene Delazari dos Santos Oliveira

**Data de defesa:** 17-12-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 17 de dezembro de 2013 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA**



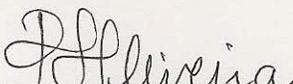
---

**Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS**



---

**Prof(a). Dr(a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI**



---

**Prof(a). Dr(a). REGILENE DELAZARI DOS SANTOS OLIVEIRA**



---

**Prof(a). Dr(a). LUIZ FERNANDO DE OSÓRIO MELLO**



## Abstract

In this work we'll discuss some qualitative/geometric aspects of non-smooth dynamical systems with symmetry. Our goal is to develop a systematic method for the study of local (and global) bifurcation in two classes of non-smooth dynamical systems with symmetry, called reversible Filippov systems and equivariant Filippov systems. The concepts of reversibility and equivariance are linked to a given involution. For a large class of Filippov planar reversible fields and Filippov planar equivariant fields, where, locally, the set of fixed points of the involution is equal to the discontinuity variety of the Filippov field, we present all topological types and normal forms of codimension 0 and 1 singularities, as well as all their respective bifurcation diagrams. Beyond that, we present all topological types and normal forms of codimension 2 singularities for the reversible Filippov fields to this involution, sketching some of their bifurcation diagrams. We also discuss, in these cases, the existing relations between the reversible Filippov fields and the reversible smooth fields. At the end, we propose a classification for the codimension 0 and 1 singularities of the Filippov reversible or equivariant fields, for the case where the dimension of the set of the fixed points of the given involution is zero, finalizing with some proposals for future work.

## Resumo

Neste trabalho discutiremos alguns aspectos qualitativos e geométricos de sistemas dinâmicos não-suaves com simetria. O nosso objetivo é desenvolver um método sistemático para o estudo de bifurcações locais (e globais) em duas classes de sistemas dinâmicos não-suaves com simetria, denominadas sistemas de Filippov reversíveis e sistemas de Filippov equivariantes. O conceito de reversibilidade e equivariância está ligado a uma dada involução.

Para uma extensa classe de campos de Filippov planares reversíveis e campos de Filippov planares equivariantes, onde localmente o conjunto dos pontos fixos da involução é igual à variedade de descontinuidade do campo de Filippov, apresentamos

todos os tipos topológicos e formas normais das singularidades de codimensão 0 e 1, bem como todos os seus respectivos diagramas de bifurcação. Além disso, apresentamos todos os tipos topológicos e formas normais das singularidades de codimensão 2 para os campos de Filippov planares reversíveis, esboçando alguns de seus diagramas de bifurcação. Também discutimos, neste caso, a relação existente entre os campos de Filippov reversíveis e os campos suaves reversíveis.

Por fim, propomos uma classificação das singularidades de codimensão 2 dos campos de Filippov equivariantes e apresentamos uma pré classificação das singularidades de codimensão 0 e 1 dos campos de Filippov reversíveis ou equivariantes, para o caso onde a dimensão do conjunto dos pontos fixos da involução em questão é igual zero, exibindo algumas propostas para trabalhos futuros.

# Sumário

Abstract	vii
Resumo	vii
Agradecimentos	xv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1 Teoria de Contato entre um Campo de Vetores e o Bordo de uma Variedade	7
2.2 Teorema de Bochner-Montgomery . . . . .	12
2.3 Campos de Filippov . . . . .	15
2.3.1 Órbitas e Singularidades . . . . .	15
2.3.2 Separatrizes, órbitas periódicas e ciclos . . . . .	27
2.4 Campos de Filippov com Simetrias . . . . .	30
2.4.1 Campos de Filippov Reversíveis ou Equivariantes . . . . .	31
2.4.2 Equivalência Topológica em Sistemas de Filippov Reversíveis e Equivariante . . . . .	33
<b>3 Configurações Locais dos campos de Filippov em <math>\mathcal{Z}^{rev}</math> ou <math>\mathcal{Z}^{eq}</math></b>	<b>37</b>
3.1 Campos de Filippov $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	38
3.2 Campos de Filippov $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	40
<b>4 Singularidades de codimensão 0 para campos de Filippov reversíveis</b>	

<b>e equivariantes</b>	<b>43</b>
4.1 Singularidades de codimensão 0 para campos em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	43
4.1.1 Pontos Regulares de $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	43
4.1.2 Singularidades Genéricas em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	45
4.2 Singularidades de codimensão 0 para campos em $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	51
4.2.1 Pontos Regulares de $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	51
4.2.2 Singularidades Genéricas em $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	53
<b>5 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Um</b>	<b>59</b>
5.1 Bifurcações de Codimensão $k$ . . . . .	59
5.2 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Um em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	64
5.3 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Um em $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	67
5.3.1 Bifurcação $S$ -Cúspide . . . . .	67
5.3.2 Bifurcação $S$ -Sela-Nó . . . . .	69
5.3.3 $S$ -equilíbrio Hiperbólico . . . . .	70
5.3.4 Bifurcação $S$ -Nó . . . . .	70
5.3.5 Bifurcação $S$ -Sela . . . . .	74
5.3.6 Bifurcação $S$ -Foco . . . . .	78
5.4 Bifurcações Globais de Codimensão Um em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	82
5.4.1 Conexão de Separatrizes entre $S$ -Dobras . . . . .	84
<b>6 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Dois</b>	<b>87</b>
6.1 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Dois em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	87
<b>7 Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>91</b>
7.1 Singularidades Genéricas de baixa codimensão em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	92
7.1.1 $S$ -dobra hiperbólica em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	93
7.1.2 $S$ -dobra elíptica em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . . . . .	93
7.2 Singularidades Genéricas de baixa codimensão em $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	94
7.2.1 $S$ -dobra hiperbólica em $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	95
7.2.2 $S$ -dobra elíptica em $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ . . . . .	95

**Bibliografia**



Um sonho que se sonha só, é só um sonho que se sonha só,  
mas sonho que se sonha junto é realidade.

Raul Seixas



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço as pessoas mais importantes de minha vida que são; meus pais, Raul e Elizabete; meus irmãos, Lucas e Raul e a minha noiva Ana Paula, pelo amor, carinho, apoio e paciência durante toda esta jornada, sem elas eu não estaria completando esta etapa.

Agradeço a todos amigos e professores que tive contato durante minha graduação, mestrado e doutorado. Em especial, agradeço aos professores Baêta e Luis Fernando pelas motivações e ensinamentos dados durante a graduação e mestrado, me incentivando e me preparando, para que eu pudesse chegar até aqui. Agradeço ao meu grande amigo Bráulio, com quem iniciei meus estudos, e ao meu amigo Daniel Guedes, com os quais tive as melhores conversas de minha vida. Agradeço meu amigo Juliano por tornar esta jornada menos tensa.

Agradeço ao Prof. Marco Antonio Teixeira por aceitar me orientar e por sua grande dedicação e paciência durante a orientação deste trabalho. A banca examinadora, pelas sugestões muito pertinentes. Aos amigos do grupo de Sistemas Dinâmicos Descontínuos pelas discussões.

Aos funcionarios do IMECC, em particular, da Secretaria de Pós-Graduação e da Biblioteca do IMECC, sempre muito atenciosos e gentis. Agradeço ao apoio financeiro da FAPESP, que possibilitou a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma estiveram presentes e possibilitaram que este trabalho fosse realizado.



# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho tem como objetivo usar métodos da teoria de bifurcações para Sistemas Suaves apresentada em [22] e em [17], para estudar bifurcações locais e globais de Sistemas Descontínuos Reversíveis ou Sistemas Descontínuos Equivariantes.

Mais especificamente focaremos nossa atenção em uma classe de Sistemas Descontínuos (não-suaves) denominada Sistemas de Filippov estudados inicialmente por [Filippov, 1988], que são sistemas modelados por equações diferenciais com segundos membros descontínuos.

Muitos autores contribuíram para o estudo de Sistemas de Filippov, veja por exemplo as referências [9] e [4]. Uma classificação dos Sistemas Planares de Filippov que são estruturalmente estáveis foi apresentada em [11], por V.S. Kozlova. As singularidades genéricas que aparecem em um sistema deste tipo, até onde sabemos, foram estudadas primeiramente por M.A. Teixeira em [18]. A classificação das bifurcações locais e algumas bifurcações globais de codimensão um para Sistemas Planares de Filippov foi elaborada por Yu A. Kuznetsov et al. em [12]. Em [10] foi estabelecida uma estratégia de classificação das singularidades genéricas de codimensão dois de um Sistema Planar de Filippov e também um estudo dos desdobramentos genéricos de algumas destas singularidades.

Aqui estamos interessados em Sistemas de Filippov Reversíveis ou Sistemas de Filippov Equivariantes.

No caso dos Sistemas Dinâmicos Suaves o estudo dos Campos Reversíveis começou por volta de 1915, quando o matemático George Birkhoff trabalhava num artigo sobre o problema restrito de três corpos [6]. Em 1976, Devaney [7] publicou que sistemas não-Hamiltonianos também admitiam certas simetrias. Classificações de singularidades de baixa codimensão para Sistemas Suaves Reversíveis Planares são apresentadas em [19] e em [21].

As condições de reversibilidade e de equivariância que definem os Sistemas de Filippov Reversíveis e os Sistemas de Filippov Equivariantes, foram apresentadas em [13]. Essas são condições de simetria sempre associadas a um dado difeomorfismo involutivo. Assim, um campo de Filippov  $Z = (X, Y)$  é dito ser reversível se existir um difeomorfismo involutivo  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $Fix(\phi) \subset \Sigma$ , tal que  $X(\phi(p)) = -D\phi(p)Y(p)$ , e diz-se equivariante se existir um difeomorfismo involutivo  $\phi$  com  $Fix(\phi) \subset \Sigma$ , tal que  $X(\phi(p)) = D\phi(p)Y(p)$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}^n$ . Onde  $\Sigma$  é a variedade de descontinuidade do campo  $Z$ .

Aplicações de Sistemas de Filippov Reversíveis ou Equivariantes podem ser encontradas em campos de aplicabilidade de Sistemas de Filippov, onde mesmo tendo o comportamento descontínuo em algumas regiões do espaço, existem simetrias persistentes em torno de subregiões dessas regiões de descontinuidade, conforme apresentado nos exemplos que seguem.

Apesar de estarmos interessados no estudo dos campos de Filippov reversíveis ou equivariante planares apresentamos a seguir um exemplo de um campo de Filippov em  $\mathbb{R}^3$  reversível.

**Exemplo 1.0.1** Seja  $Z_{\alpha\beta} = (X_\alpha, Y_\beta)$  um campo descontínuo no  $\mathbb{R}^3$ , onde  $X_\alpha(x, y, z) = (1, \alpha, -x)$  e  $Y_\beta(x, y, z) = (\beta, 1, y)$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Este sistema é  $\psi$ -reversível com  $\psi(x, y, z) = (-y, -x, -z)$  se  $\alpha = \beta$ , isto é,  $\psi_*X = -Y \circ \psi$  e  $Fix(\psi) = \{y = -x \text{ e } z = 0\} \subset \Sigma$ .

Uma classe de equações diferenciais com segundo membro descontínuo muito importante é modelada a partir de sistemas com chaveamento (“relay system”), veja

[20]. Um sistema com chaveamento a  $n$  variáveis é descrito pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + k_1 \operatorname{sgn} x_1 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + k_2 \operatorname{sgn} x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + k_n \operatorname{sgn} x_1 \end{cases}$$

Onde  $a_{ij}$  e  $k_j$  são escalares e  $\operatorname{sgn} x_1$  é o sinal da coordenada  $x_1$  no  $\mathbb{R}^n$ .

Estes sistemas geralmente apresentam simetrias, e por simplicidade discutiremos no exemplo a seguir um caso particular com  $n = 2$ .

**Exemplo 1.0.2** Uma equação diferencial do tipo

$$\ddot{y} = \operatorname{sgn} y \tag{1.1}$$

pertence a uma classe de equações diferenciais deste tipo. Claramente o campo de Filippov associado a esta equação é reversível pela involução  $\phi_1(x, y) = (x, -y)$  e equivariante pela involução  $\phi_2(x, y) = (-x, -y)$ .

De fato, tomando  $x = \dot{y}$  então  $\dot{x} = \operatorname{sgn} y$  temos que campo de Filippov associado a equação (1.1) é dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, x) \text{ em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (-1, x) \text{ em } \Sigma^- \end{cases} \tag{1.2}$$

Além disso  $X(\phi_1(x, y)) = -D\phi_1(x, y)Y(x, y)$  e  $X(\phi_2(x, y)) = D\phi_2(x, y)Y(x, y)$ , isto é, o campo (1.2) é  $\phi_1$ -reversível e  $\phi_2$ -equivariante.

Notemos que o campo  $Z = (X, Y)$  apresentado em (1.2) possui uma singularidade típica de Sistemas Suaves por partes conhecida como singularidade tipo dobra-dobra hiperbólica (a ser definida na seção 2.3, definição 2.3.6) em  $(0, 0)$ , portanto singularidades deste tipo podem existir para campos pertencentes aos conjuntos dos campos de Filippov  $\phi_1$ -reversível ou  $\phi_2$ -equivariante. Porém, como veremos nos capítulos 5 e 7, esta singularidade possui diferentes codimensões dependendo da simetria do espaço.

Devido à presença de uma superfície de descontinuidade do campo vetorial, os conceitos usuais de órbita, singularidade e equivalência topológica não podem ser simplesmente trasladados para este contexto. Deste modo, quando deseja-se estudar algumas propriedades destes sistemas, devemos decidir como generalizar estas definições a fim de preservar o máximo possível certas características importantes presentes em Sistemas Dinâmicos Suaves, como por exemplo a unicidade de soluções. Já que estamos interessados na classe dos sistemas de Filippov que satisfazem as condições de simetria discutidas acima, um breve estudo dos contatos de um campo de vetores com o bordo de uma variedade é de suma importância. Assim, no Capítulo 2 faremos um breve estudo da teoria do contato entre campos de vetores planares e o bordo de uma variedade, enunciando alguns resultados que serão utilizados nos capítulos que seguem. Ainda no capítulo 2 faremos uma introdução aos Sistemas Planares de Filippov sob um ponto de vista rigoroso, mostrando exemplos que visem justificar nossas escolhas por tais definições. Finalizaremos o capítulo 2 introduzindo os sistemas de Filippov Planares reversíveis e equivariantes, que representaremos por  $\mathcal{Z}^{rev}$  e  $\mathcal{Z}^{eq}$  respectivamente.

No Capítulo 3 apresentamos um estudo local do campos de Filippov em presença de simetria (reversíveis/equivariantes), discutindo algumas de suas propriedades. Estaremos particularmente interessados no caso em que o eixo de simetria é localmente igual a variedade de descontinuidade. Denotaremos os conjuntos desses sistemas de Filippov por  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ .

A questão da estabilidade estrutural é abordada no Capítulo 4. Nele apresentamos uma classificação através de  $\Sigma$ -equivalências para o conjunto  $\Sigma_0^{\ominus rev}$  e  $\Sigma_0^{\ominus eq}$  formado pelos sistemas em que são localmente estruturalmente estáveis, ou seja, persistentes a pequenas perturbações. Apresentaremos também formas normais para cada classe de  $\Sigma^{\ominus rev}$  e  $\Sigma^{\ominus eq}$  e mostraremos como construir os homeomorfismos entre um elemento arbitrário de uma classe e sua forma normal, este sendo um representante “mais simples” para cada classe de equivalência. Demonstraremos ainda que  $\Sigma^{\ominus rev}$  e  $\Sigma^{\ominus eq}$  são conjuntos abertos e densos em  $\mathcal{Z}^{rev}$  e  $\mathcal{Z}^{eq}$ , respectivamente, e portanto a estabilidade estrutural é uma propriedade genérica em cada um destes espaços.

No quinto capítulo estudaremos as bifurcações locais genéricas de codimensão 1 em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , ou seja, os sistemas em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$  que são estruturalmente estáveis com relação ao conjunto  $\mathcal{Z}_1^{\ominus rev} = \mathcal{Z}^{\ominus rev} \setminus \Sigma_0^{\ominus rev}$  e  $\mathcal{Z}_1^{\ominus eq} = \mathcal{Z}^{\ominus eq} \setminus \Sigma_0^{\ominus rev}$ . Denotaremos por  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  e  $\Sigma_1^{\ominus eq}$  o conjunto desses sistemas e estabeleceremos condições genéricas para que um sistema de Filippov pertença a  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  ou  $\Sigma_1^{\ominus eq}$ , e também estudaremos os desdobramentos de formas normais das singularidades de codimensão 1 desses conjuntos.

Muitas vezes, no desdobramento genérico de singularidades de codimensão dois, temos a presença de bifurcações globais de codimensão 1. É necessário portanto um estudo das mesmas, apresentaremos estas bifurcações no final do capítulo 5. No sexto Capítulo, utilizaremos a relação entre  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e os sistemas dinâmicos suaves reversíveis para classificarmos o conjunto das singularidades genéricas de codimensão dois em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . Estudaremos os desdobramentos de algumas formas normais das singularidades de codimensão 2 em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ .

No último Capítulo, propomos uma classificação das singularidades de codimensão 2 dos campos de Filippov equivariantes. Daremos também, para sistemas de Filippov reversíveis ou equivariante onde a dimensão do conjunto dos pontos fixos da involução em questão é igual zero, uma classificação preliminar do conjunto das singularidades genéricas de codimensão 0 e 1. Neste caso, denotaremos o conjunto desses sistemas de Filippov reversíveis e equivariante por  $\mathcal{Z}^{\odot rev}$  e  $\mathcal{Z}^{\odot eq}$ . Além disso, mostramos que uma  $S$ -dobra (dobra-dobra) possui codimensão 1 em  $\mathcal{Z}^{\odot rev}$  e  $\mathcal{Z}^{\odot eq}$ , e que em  $\mathcal{Z}^{\odot eq}$ , próximo a uma singularidade tipo  $S$ -dobra, surge um ciclo limite. Finalizamos o texto com algumas propostas para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1 Teoria de Contato entre um Campo de Vetores e o Bordo de uma Variedade

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados da teoria de contato entre um campo de vetores e o bordo de uma variedade que serão utilizados nos próximos capítulos, para detalhes e demonstrações dos resultados aqui apresentados veja [25], [17] e [19]. Consideraremos germes de campos de vetores em  $(0, 0)$  e não vamos fazer qualquer diferença na terminologia entre o germe de um campo vetorial e quaisquer um de seus representantes.

#### Considerações Gerais: Singularidades na fronteira

Seja  $(u, v)$  qualquer sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^2, 0$ . Considere  $M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 \mid v \geq 0\}$  e seja  $\mathcal{X}^r$  o conjunto de todos os campos  $\mathcal{C}^r$  em  $M(r > 3)$  com a  $\mathcal{C}^r$ -topologia. Denotaremos a fronteira de  $M$  por  $\partial M$ .

**Definição 2.1.1** *Dois campos  $F_1$  e  $F_2$  em  $\mathcal{X}^r$  são  $\mathcal{C}^0$ -equivalentes se existir um homeomorfismo de  $M$  (necessariamente preservando a fronteira  $\partial M$ ) que leva trajetórias de  $F_1$  em trajetórias de  $F_2$ .*

**Definição 2.1.2** Um ponto  $p \in \partial M$  é uma  $\partial M$ -singularidade (ou simplesmente singularidade) de  $F \in \mathcal{X}^r$  se  $F(p)$  é tangente a  $\partial M$  em  $p$ .

Seja  $h : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(u, v) = v$  e  $M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 | h(u, v) \geq 0\}$ . Nestas coordenadas o conjunto das singularidades de  $F$  em  $M$  é determinado pelas equações:

$$h = 0 \text{ e } Fh = 0.$$

**Definição 2.1.3** Diremos que  $p \in \partial M$  é uma singularidade tipo dobra (resp. cúspide) de  $F$  se  $h(p) = Fh(p) = 0$  e  $F^2h(p) \neq 0$  (resp.  $h(p) = Fh(p) = F^2h(p) = 0$  e  $F^3h(p) \neq 0$ ).

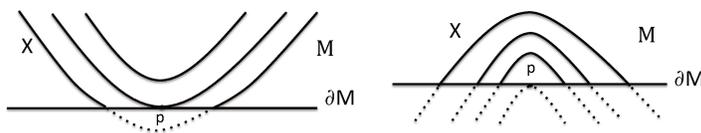


Figura 2.1: Singularidades tipo dobra.

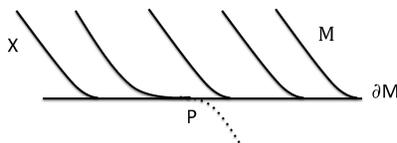


Figura 2.2: Singularidade tipo cúspide.

Em [17] o seguinte resultado é provado.

**Lema 2.1.4**  $F$  é estruturalmente estável em  $p$  se, e somente se,  $p$  ou é um ponto regular ou é uma singularidade do tipo dobra de  $F$ . Além disso suas respectivas formas normais são dadas por

1.  $F(u, v) = (0, 1)$  (caso regular),

2.  $F(u, v) = (1, \epsilon u)$  onde  $\epsilon = \pm 1$ .

Denotaremos por  $\chi_0$  o conjunto de todos os campos que são estruturalmente estáveis, em  $\mathcal{X}^r$ . Sabemos de [17] que  $\chi_0$  é aberto e denso em  $\mathcal{X}^r$ .

**Observação 2.1.5** Mencionamos que se  $p$  é um ponto de dobra de  $F$  então  $F(p) \neq 0$ . Além disso, a condição  $F^2h(p) \neq 0$  nos diz que a trajetória de  $F$  passando por  $p$  é tangente a  $\partial M = \{v = 0\}$  e o contato entre as curvas é quadrático. Esta tangência pode ser interna (visível) quando  $F^2h(p) > 0$  ou externa (invisível) quando  $F^2h(p) < 0$ . Veja figura 2.1.

Em nosso contexto, as singularidades de  $F$  são primeiramente classificadas por:

- (i)  $F(p) \neq 0$ ;
- (ii)  $p$  é um ponto crítico de  $F$ .

No primeiro caso a singularidade cúspide ocorre genericamente para uma família de elementos em  $\mathcal{X}^r$  a um parâmetro. Se  $p$  é uma singularidade do tipo cúspide de  $F$  então a trajetória do campo vetorial passando por  $p$  possui um contato cúbico com  $\partial M$  (em  $p$ ). Quando  $F(p) = 0$  devemos fazer outra reclassificação genérica envolvendo a hiperbolicidade de pontos críticos, e então definimos as singularidades de codimensão um de  $F$ .

Para encontrar os homeomorfismos locais que são  $C^0$ -equivalências entre dois campos de vetores em torno de uma região de fronteira, em  $\mathbb{R}^2$  é necessário a utilização extensiva das técnicas desenvolvidas por Peixoto (veja [17]), no entanto, estas técnicas serão omitidas das preliminares de nosso texto. Para  $C^0$ -equivalência entre duas famílias de tais campos vetoriais não exigimos a continuidade com respeito aos parâmetros.

Primeiramente considere o conjunto  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}^r \setminus \chi_0$  o conjunto das bifurcações a um parâmetro de  $\mathcal{X}$ . Seja  $\chi_1$  o subconjunto de  $\mathcal{X}_1$  constituído pelos elementos que

são estruturalmente estáveis relativos a  $\mathcal{X}_1$ . A classificação desse conjunto é feita nos seguintes lemas que enunciaremos nesta seção, cujas provas são dadas em [17].

Daremos inicialmente uma ideia intuitiva da estratégia que estamos utilizando para classificar as singularidades na fronteira.

Dado  $F = (f, g)$  em  $\mathcal{X}^r$  tal que  $g(0) = 0$ , temos as seguintes possibilidades:

(i)  $f(0) \neq 0$  ou (ii)  $f(0) = 0$ .

No caso (i) todas as formas normais podem ser obtidas do Lema da Forma Normal de Vishik's [25]. No caso (ii) não ocorre codimensão zero. As singularidades de codimensão um são classificadas dentro das seguintes condições:

- (a) 0 é ponto crítico hiperbólico de  $F$ ;
- (b) Os autovalores de  $DF(0)$  são distintos;
- (c) Os autoespaços de  $DF(0)$  são transversais, a  $\partial M$  em 0.

As singularidades de codimensão dois são caracterizadas pela violação genérica de cada uma das condições acima.

**Lema 2.1.6** (*Classificação*).  $\chi_1$  é uma subvariedade de codimensão um de  $\mathcal{X}_1$ . Além disso, os elementos  $\chi_1$  são classificados como se segue:

- (1) *Singularidade cúspide em  $\partial M$  (ou cúspide na fronteira):* Definição 2.1.3 ;
- (2) *Singularidade nó em  $\partial M$  (ou nó na fronteira):*  $F(0,0) = 0$  com autovalores de  $DF(0,0)$  ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) reais distintos e  $\lambda_1\lambda_2 > 0$ , além disso todos os autoespaços são transversais a  $\partial M$  em  $(0,0)$ ;
- (3) *Singularidade sela em  $\partial M$  (ou sela na fronteira):*  $F(0,0) = 0$  com autovalores de  $DF(0,0)$  reais distintos e  $\lambda_1\lambda_2 < 0$ , além disso todos os autoespaços são transversais a  $\partial M$  em  $(0,0)$ ;
- (4) *Singularidade foco em  $\partial M$  (ou foco na fronteira):*  $(0,0)$  é um ponto crítico hiperbólico de  $F$  onde os autovalores de  $DF(0,0)$  são  $\lambda = a \pm bi$  com  $b \neq 0$ .

**Lema 2.1.7** (*Forma Normal*). Qualquer família a um parâmetro  $F$ ,  $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$ , de campos vetoriais em  $\mathcal{X}$ , transversais a  $\chi_1$  em  $F_0$ , tem uma das seguintes formas normais:

- (1)  $F_0$  é uma singularidade cúspide na fronteira:  $F_\alpha(u, v) = (1, \alpha + u^2)$ ;
- (2)  $F_0$  é uma singularidade nó na fronteira:  $F_\alpha(u, v) = (au, u + bv + \alpha)$  com  $a = 1$ ,  $b = 2$  (ou  $a = -1, b = -2$ );
- (3)  $F_0$  é uma singularidade sela na fronteira:  $F_\alpha(u, v) = (u, u - v + \alpha)$ ;
- (4)  $F_0$  é uma singularidade foco na fronteira:  $F_\alpha(u, v) = (u + v, -u + v + \alpha)$ .

Afim de classificarmos as singularidades de codimensão dois procederemos como anteriormente, primeiramente definimos  $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \setminus \chi_1$ , os conjuntos das bifurcações a dois parâmetros. Considere  $\chi_2$  constituído dos elementos  $F$  tais que:

- (1) Singularidade rabo de andorinha em  $\partial M$ :  $F(0) \neq 0$ ,  $Fh(0) = F^2h(0) = F^3h(0) = 0$  e  $F^4h(0) \neq 0$ ;
- (2) Singularidade sela-nó em  $\partial M$ :  $0$  é uma sela-nó de  $F$ , e os autoespaços de  $DF(0)$  são transversais a  $\partial M$  em  $0$ ;
- (3) Singularidade de Hopf em  $\partial M$ :  $F(0) = 0$ , e  $0$  é uma singularidade de Hopf de codimensão um de  $F$ ;
- (4) Singularidade nó degenerado em  $\partial M$ :  $F(0) = 0$ , e os autovalores de  $DF(0)$  são iguais a  $\lambda$ , o posto de  $(Df(0) - \lambda Id) = 1$  possuindo o autoespaço correspondente transversal a  $\partial M$  em  $0$ ;
- (5) Singularidade tangente hiperbólica em  $\partial M$ :  $F(0) = 0$ , e os autovalores de  $DF(0)$  são reais distintos, e há uma variedade invariante (em  $0$ ), tendo um contato quadrático com  $\partial M$  em  $0$ . Além disso, os autovalores não satisfazem a equação  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ .

No último caso (5), observamos que encontramos diferentes tipos topológicos de uma singularidade. Depende principalmente da posição relativa das variedades invariantes com respeito à fronteira e a singularidade é uma sela ou um nó. Além disso, no caso de ser um nó, temos de separar quando a variedade invariante forte é tangente a  $\partial M$  ou não.

**Lema 2.1.8** (i)  $\chi_2$  é aberto e denso em  $\mathcal{X}_2$ ; (ii)  $F$  é estruturalmente estável relativo a  $\mathcal{X}_2$  se, e somente se  $F \in \chi_2$ ; (iii)  $\chi_2$  é a subvariedade de codimensão dois de  $\mathcal{X}$ ; (iv) as formas normais de qualquer família a dois parâmetros  $F_{\alpha\beta}$  transversal a  $\chi_2$  em  $F_{00}$  são:

(1) Rabo de andorinha:  $F_{\alpha\beta}(u, v) = (1, bu^3 + \alpha u + \beta)$ .

(2) (a) sela-nó:  $F_{\alpha\beta}(u, v) = (a(u - v) + \beta(u + v), \alpha + (u + v)^2)$  com  $a = \pm 1$ .

(b) sela-nó:  $F_{\alpha\beta}(u, v) = (u - v + \beta(u + v), \alpha + a(u + v)^2)$ , com  $a = \pm 1$ .

(3) bifurcação de Hopf:  $F_{\alpha\beta}(u, v) = (-v + u(\alpha + u^2 + v^2), u - v(\alpha + u^2 + v^2) + \beta)$ .

(4) nó degenerado:  $F_{\alpha\beta}(u, v) = (u + \alpha v, u + v + \beta)$ .

(5) sela tangente:  $F_{\alpha\beta}(u, v) = (u, \alpha u - v + au^2 + \beta)$  com  $a = \pm 1$ .

(6) nó tangente:  $F_{\alpha\beta}(u, v) = (au, \alpha u + bv \pm 3u^2 + \beta)$  com  $a = \pm 1$ .

## 2.2 Teorema de Bochner-Montgomery

O Teorema de Bochner-Montgomery (em [?] p. 206) diz que toda involução na vizinhança de um ponto fixo tal que  $\dim(\text{Fix}(\phi)) = 0$ , é  $\mathcal{C}^\infty$  conjugada a  $\phi(x, y) = (x, -y)$ . Mais precisamente:

**Teorema 2.2.1** *Seja  $G$  um grupo compacto de transformação de uma variedade  $M$  de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 0$ ) ou analítica. Suponha que cada transformação de  $G$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  ou analítica. Então numa vizinhança de um ponto fixo estacionário, coordenadas admissíveis podem ser escolhidas tais que as transformações sejam lineares.*

Usaremos este teorema no caso em que o grupo que atua é  $G = \{Id, \phi\}$ , onde  $\phi$  é uma involução, cuja demonstração é bem mais simples.

**Proposição 2.2.2** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma involução tal que  $\dim(\text{Fix}(\phi)) = k$ , então  $\phi$  é localmente conjugada com a involução linear  $\bar{\phi}(x, y) = (x, -y)$  com  $x \in \mathbb{R}^k$  e  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ .*

**Demonstração:** Provaremos primeiramente que  $\phi$  é localmente conjugada com sua parte linear  $D\phi$ . Para isso considere  $\sigma = I + D\phi \circ \phi$ , observe que  $D\sigma = 2I$ , portanto  $\sigma$  é um difeomorfismo local. Temos que

$$\sigma \circ \phi = \phi + D\phi = D\phi(I + D\phi \circ \phi) = D\phi \circ \sigma.$$

Falta mostrar que  $D\phi$  é conjugada com  $\bar{\phi}$ .

Notamos que se  $\dim(\text{Fix}(\phi)) = k$  e  $D\phi$  é conjugada com  $\phi$ , temos que  $\text{Fix}(D\phi)$  é um espaço vetorial de dimensão  $k$ .

Seja  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  uma base de  $\text{Fix}(D\phi)$  e  $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$  uma base de  $(\text{Fix}(D\phi))^\perp$ . Defina  $u_i = w_i - D\phi(w_i)$  e observe que  $D\phi(u_i) = -u_i$ .

Queremos mostrar que  $\{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k}\}$  é base de  $\mathbb{R}^n$ .

Basta mostrar a independência linear

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} u_1 + \dots + a_n u_{n-k} = 0. \quad (2.1)$$

Aplicando  $D\phi$ ,

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k - a_{k+1} u_1 - \dots - a_n u_{n-k} = 0. \quad (2.2)$$

Somando (2.1) com (2.2) temos

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0.$$

Como

$$\{v_1, \dots, v_k\} \text{ é base, } a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Com isso a equação (2.1) se reduz a

$$a_{k+1} u_1 + \dots + a_n u_{n-k} = 0,$$

ou seja,

$$a_{k+1}(w_1 - D\phi(w_1)) + \dots + a_n(w_{n-k} - D\phi(w_{n-k})) = 0.$$

Pela linearidade de  $D\phi$

$$(a_{k+1} w_1 + \dots + a_n w_{n-k}) - D\phi(a_{k+1}(w_1 + \dots + a_n w_{n-k})) = 0.$$

Como

$$\text{Fix}(D\phi) \cap [\text{Fix}(D\phi)]^\perp = \{0\}$$

segue-se que

$$a_{k+1}w_1 + \cdots + a_n w_{n-k} = 0.$$

Donde temos que

$$\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k}\}$$

é base de  $\mathbb{R}^n$  e concluímos a proposição.



## 2.3 Campos de Filippov

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos da classe de sistemas dinâmicos descontínuos que estamos interessados ao longo de nosso trabalho. Esta classe é constituída dos sistemas dinâmicos que são induzidos pelos campos de Filippov [9], estes são campos suaves por partes. A região de não suavidade desses campos, em nosso contexto, é denominada região de descontinuidade. Nos sistemas dinâmicos de Filippov é possível, com convenções e definições adequadas, estabelecermos uma dinâmica sobre a região de descontinuidade. No presente trabalho estamos interessados em sistemas de Filippov em presença de simetria. Além disso focalizaremos nosso estudo em campos planares, porém, as convenções e definições apresentadas nas subseções seguintes, afim de estabelecermos os conceitos de órbita, trajetória, singularidade, separatriz, órbita periódica, ciclo, podem ser naturalmente estendidos para dimensão  $n > 2$ .

### 2.3.1 Órbitas e Singularidades

Considere  $X$  e  $Y$  campos vetoriais suaves definidos em um aberto  $U \in \mathbb{R}^n$  contendo a origem e  $f$  é um germe de uma função  $\mathcal{C}^r$  com  $r \neq 1$  ( $\mathcal{C}^r$  denota o conjunto das funções continuamente diferenciáveis de ordem  $r$ ) para o qual  $0$  é um valor regular. Então, a curva  $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$  é uma subvariedade diferenciável de codimensão um e divide o conjunto aberto  $U$  em duas regiões abertas

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U : f(x, y) > 0\} \text{ e } \Sigma^- = \{(x, y) : f(x, y) < 0\}.$$

Um sistema Planar de Filippov é um campo vetorial suave por partes definido da seguinte forma:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y(x, y), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases} \quad (2.3)$$

o qual denotaremos  $Z = (X, Y)$  a fim de esclarecer as componentes do campo vetorial.

Ainda mais, assumiremos que  $X$  e  $Y$  são campos definido em  $U$  de classe  $\mathcal{C}^r$  com  $r \geq 1$  em  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$  respectivamente, onde  $\overline{\Sigma^\pm}$  denota o fecho de  $\Sigma^\pm$ . Lembrando que

uma aplicação definida em um domínio não aberto  $D$  é de classe  $\mathcal{C}^r$  quando ela pode ser estendida a uma função de classe  $\mathcal{C}^r$  em um domínio aberto contendo  $D$ , o mesmo se aplica a campos vetoriais.

Chamaremos de  $\mathcal{Z}^r$  o espaço dos campos vetoriais desse tipo. Este pode ser tomado como  $\mathcal{Z} = \mathfrak{X}^r \times \mathfrak{X}^r$ , onde por abuso de notação  $\mathfrak{X}^r$  denota o espaço dos campos de classe  $\mathcal{C}^r$  em  $U \in \mathbb{R}^n$ , munido da topologia  $\mathcal{C}^r$ . Consideraremos  $\mathcal{Z}^r$  com a topologia produto. A fim de estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}$  em  $U$ , precisamos definir a trajetória local por um ponto  $p \in U$ . Para definir rigorosamente o fluxo  $\varphi_Z(t, p)$ , isto é, a solução do campo vetorial (2.3) que passa por um ponto  $p \in U$ . Para isso, precisaremos distinguir se o ponto pertence à  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$  ou  $\Sigma$ .

Nas regiões  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ , a trajetória local de  $p$  é dada pela trajetória local do ponto com relação ao campo  $X$  ou  $Y$  da maneira usual. A fim de estender a definição de trajetória para  $\Sigma$ , dividiremos  $\Sigma$  no fecho de três regiões localmente e abertas em  $\Sigma$ , dependendo para onde o campo vetorial aponta:

$$\Sigma^c = \{p \in \Sigma \text{ e } Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\} \text{ Região de Costura;}$$

$$\Sigma^e = \{p \in \Sigma \text{ e } Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) < 0\} \text{ Região de Escape;}$$

$$\Sigma^s = \{p \in \Sigma \text{ e } Xf(p) < 0 \text{ e } Yf(p) > 0\} \text{ Região de Deslize;}$$

onde  $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$  é a derivada de Lie de  $f$  com respeito ao campo de vetores  $X$  em  $p$ . Estas três regiões são abertas em  $\Sigma$  e podem possuir várias componentes conexas.

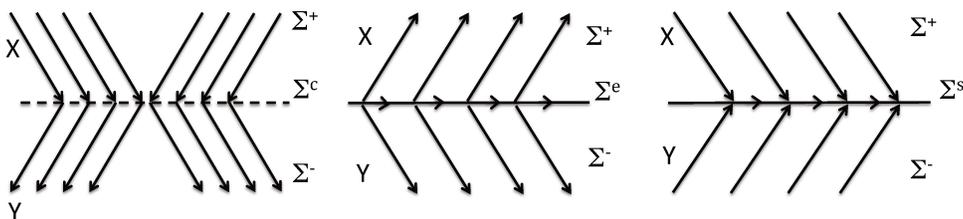


Figura 2.3: Regiões genéricas.

Note que ao definir as regiões acima estamos excluindo os pontos de tangência, ou seja, os pontos  $p \in \Sigma$  para os quais  $Xf(p) = 0$  com  $X(p) \neq 0$  ou  $Yf(p) = 0$  com  $Y(p) \neq 0$  e os pontos  $p \in \Sigma$  para os quais  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$  que são os pontos críticos de  $X$  ou  $Y$  em  $\Sigma$ . Estes pontos aparecem na fronteira das regiões  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ , que denotaremos por  $\partial\Sigma^c$ ,  $\partial\Sigma^s$  e  $\partial\Sigma^e$ , respectivamente.

Como discutimos na seção 2.1 podemos distinguir os tipos de tangência entre um campo suave e uma variedade, dependendo do modo como se dá o contato entre a trajetória do campo e a variedade. Basicamente, trabalharemos com os dois tipos de tangência a seguir.

**Definição 2.3.1** *Um campo vetorial suave  $X$  possui uma dobra ou tangência quadrática com  $\Sigma = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$ .*

**Definição 2.3.2** *Um campo vetorial suave  $X$  possui uma cúspide ou tangência cúbica com  $\Sigma = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $Xf(p) = X^2f(p) = 0$  com  $X^3f(p) \neq 0$ .*

**Observação 2.3.3** Neste trabalho, vamos assumir que os pontos de tangência são isolados em  $\Sigma$ , pois estamos interessados em estudar bifurcações de baixa codimensão em sistemas de Filippov Planares com certas simetrias. Por simplicidade, a definição de órbita que é estabelecida aqui se aplica somente a Sistemas de Filippov com singularidades isoladas.

Definimos agora alguns contatos de trajetórias do campo de Filippov e a variedade  $\Sigma$  que serão importantes posteriormente.

**Definição 2.3.4** *Um campo de Filippov  $Z = (X, Y)$  possui uma dobra-dobra com  $\Sigma$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $X$  e  $Y$  possuem uma dobra em  $p$ .*

**Definição 2.3.5** *Um campo de Filippov  $Z = (X, Y)$  possui uma cúspide-cúspide com  $\Sigma$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $X$  e  $Y$  possuem uma cúspide em  $p$ .*

O caso onde  $Z$  possui uma dobra-dobra com  $\Sigma$  pode ser divididos em três casos, como observado na figura 2.4 e definimos a seguir.

**Definição 2.3.6** Seja  $p \in \Sigma$  uma dobra-dobra de  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^r$ . Diremos que  $p$  é uma dobra-dobra

(i)-(a) e (i)-(b) parabólica se  $X^2 f(p) \cdot Y^2 f(p) > 0$ ,

(ii) elíptica se  $X^2 f(p) < 0$  e  $Y^2 f(p) > 0$ ,

(iii) hiperbólica se  $X^2 f(p) > 0$  e  $Y^2 f(p) < 0$ .

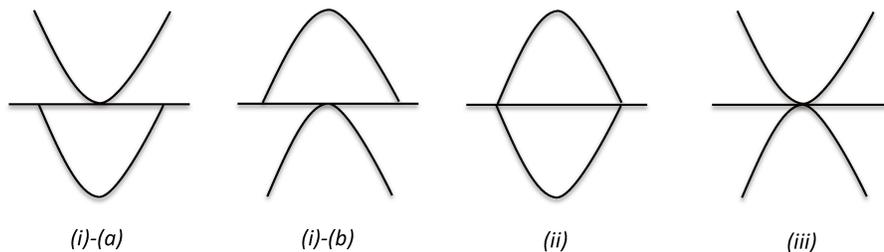


Figura 2.4: Singularidades dobra-dobra.

Definiremos a seguir a trajetória passando por um ponto  $p$  em  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ . Na região de costura, os campos apontam na mesma direção e portanto é suficiente justapor as trajetórias de  $X$  e  $Y$  por aquele ponto.

Nas regiões  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ , a órbita local é dada pela convenção de Filippov. Consideremos o campo vetorial  $Z^s$  que em cada ponto  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  é dado por uma combinação linear convexa de  $X(p)$  e de  $Y(p)$  de modo que  $Z^s(p)$  seja tangente à  $\Sigma$ , como podemos observar na Figura 2.5.

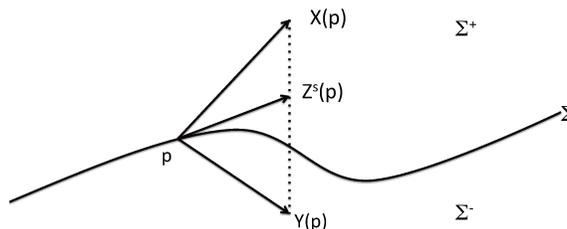


Figura 2.5: Campo deslizante.

Deste modo,  $Z^s$  é dado por

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)).$$

O campo vetorial  $Z^s$  é chamado de campo vetorial deslizante independentemente de estar definido na região de deslize ou de escape e para  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  a trajetória local de  $p$  é dada por este campo vetorial. Recordemos que dado um campo vetorial suave autônomo  $X$  definido em um conjunto aberto  $U$ , denotamos seu fluxo como  $\varphi_X(t, p)$  que possui as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p. \end{cases}$$

O fluxo  $\varphi_X(t, p)$  está definido para  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , onde  $I = I(p)$  é um intervalo que depende de  $p \in U$  e do campo vetorial  $X$ . Para facilitar a notação não iremos escrever essa dependência explicitamente. Como estamos lidando com campos vetoriais autônomos, podemos escolher a origem no tempo  $t = 0$ .

**Definição 2.3.7** *A trajetória local (ou solução orbital) de um Campo Vetorial de Filippov da forma (2.3) por um ponto é definida como segue:*

- Para  $p \in \Sigma^\pm$  tal que  $X(p) \neq 0$  e  $Y(p) \neq 0$  respectivamente, a trajetória é dada por  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$  respectivamente, para  $t \in I \subset \mathbb{R}$ .
- Para  $p \in \Sigma^c$  tal que  $Xf(p), Yf(p) > 0$  e tomando a origem do tempo em  $p$ , a trajetória é definida como  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$  para  $t \in I \cap \{t \leq 0\}$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$  para  $t \in I \cap \{t \geq 0\}$ . Para o caso  $Xf(p), Yf(p) < 0$  a definição é a mesma tomando o tempo com sinal oposto.
- Para  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  tal que  $Z^s(p) \neq 0$ ,  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$  para  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , onde  $Z^s$  é o campo vetorial deslizante.

- Para  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  tal que as definições de trajetórias para pontos em  $\Sigma$  em ambos os lados de  $p$  podem ser estendidas para  $p$  e coincidem, a trajetória por  $p$  é esta trajetória. Chamaremos estes pontos de tangência regulares.
- Para os pontos que não foram contemplados nos itens acima, convencionamos  $\varphi_Z(t, p) = \{p\}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Aqui estão os pontos de tangência não regulares, chamados tangências singulares, os pontos críticos de  $X$  e  $Y$  em  $\Sigma^\pm$  e os pontos críticos do campo deslizando  $Z^s$  em  $\partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s$ .

**Observação 2.3.8** Como estamos interessados na análise qualitativa do espaço de fase de  $Z=(X, Y)$  todas as trajetórias que passam por  $p \in \Sigma$  ou convergem para  $p$  em tempo finito ou infinito devem ser consideradas.

A partir da definição de trajetória, podemos definir uma órbita.

**Definição 2.3.9** A órbita local de um ponto  $p \in U$ , é o conjunto  $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I_p\}$ .

Já que estamos lidando com sistemas autônomos, de agora em diante usaremos os termos trajetória e órbita indistintamente, quando não houver perigo de confusão.

**Observação 2.3.10** No caso que  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ , temos estabelecidas duas definições para  $\varphi_Z(t, p)$  na literatura (veja, por exemplo, [12]), pois além de a trajetória dada por  $Z^s$ , existem duas trajetórias de  $X$  e de  $Y$  que chegam em  $p$  em tempo finito (positivo ou negativo). Definindo a trajetória por esses pontos como  $\varphi_{Z^s}(t, p)$ , seguimos a abordagem dada em [6], já que as principais propriedades dos sistemas dinâmicos suaves são preservadas: cada ponto pertence a uma única órbita e o espaço de fase é decomposto como união disjunta de todas as órbitas. Consideraremos que a órbita  $\varphi_Z(t, p)$  por  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  é a trajetória dada pelo campo vetorial deslizando, e vamos considerar que todas as órbitas de  $X$  e  $Y$  chegam (ou partem) deste ponto são relativamente abertas. Com esta escolha,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$  são curvas localmente invariantes de  $Z$ .

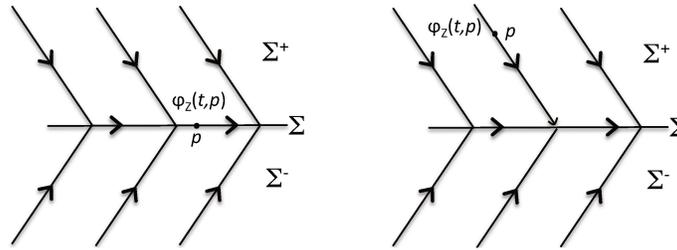


Figura 2.6: Não unicidade e unicidade de órbitas.

**Definição 2.3.11** Os pontos  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  que satisfazem  $Z^s(p) = 0$ , isto é, os pontos críticos do campo vetorial deslizante são chamados de pseudo-equilíbrios de  $Z$ . Decorre diretamente da definição de  $Z^s$  que, neste caso,  $X(p) = cY(p)$  com  $c \in \mathbb{R}$ . Ainda mais, chamaremos de pseudo-nó estável qualquer ponto  $p$  tal que  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) < 0$ , de pseudo-nó instável qualquer ponto  $p \in \Sigma^e$  tal que  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) > 0$  e de pseudo-sela qualquer ponto  $p \in \Sigma^s$  tal que  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) > 0$  ou  $Z^s(p) = 0$  e  $(Z^s)'(p) < 0$ .

A próxima definição, caracteriza as singularidades de um Sistema Planar de Filippov, que podem ser vistas como zeros de determinadas funções.

**Definição 2.3.12** As singularidades do sistema de Filippov (2.3) são

- $p \in \Sigma^\pm$  é um equilíbrio de  $X$  ou de  $Y$ , isto é,  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$  respectivamente.
- $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  tal que  $p$  é um pseudo-equilíbrio, isto é,  $Z^s(p) = 0$ .
- $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ , isto é, os pontos  $p$  tais que  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$  (tangências regulares ou singulares).

Qualquer outro ponto é chamado de ponto regular.

Em sistemas dinâmicos suaves, singularidades, sendo zeros de campos vetoriais, correspondem a pontos críticos e como consequência a trajetória passando por esse ponto é somente o próprio ponto. Apesar disso, em Sistemas de Filippov existem

singularidades (tangências regulares) cuja órbita  $\gamma(p) \neq \{p\}$ , como podemos ver na Definição 2.3.7. Por esta razão, classificaremos as singularidades como:

- Singularidade Distinguida: pontos  $p$  tais que  $\gamma(p) = \{p\}$ . Elas fazem o papel dos pontos críticos nos sistemas dinâmicos suaves.
- Singularidade Não Distinguida: são os pontos  $p \in \Sigma$  que são pontos de tangência regulares, mesmo que eles não sejam pontos regulares, suas órbitas locais são homeomorfas a  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.3.13** *Uma singularidade distinguida é um ponto  $p$  tal que  $\gamma(p) = \{p\}$  e pode ser classificada como:*

- $p \in \Sigma^\pm$  tal que  $p$  é um equilíbrio de  $X$  ou de  $Y$ , isto é,  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$  respectivamente.
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  tal que  $p$  é um pseudo-equilíbrio, isto é,  $Z^s(p) = 0$ .
- $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  tal que  $p$  é um ponto de tangência singular.

As componentes  $X$  e  $Y$  de um sistema de Filippov  $Z = (X, Y)$  são definidas em vizinhanças abertas de  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$  respectivamente. Então, como em campos vetoriais suaves,  $X$  e  $Y$  podem possuir pontos críticos que não pertencem a  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$ , respectivamente. Vamos nos referir a estes pontos críticos como pontos críticos não admissíveis e os pontos que são pontos críticos do Sistema de Filippov chamaremos de pontos críticos admissíveis. Um exemplo de ponto crítico não admissível é dado na Figura 2.7.

Analogamente, objetos invariantes (variedades estáveis e instáveis, órbitas periódicas) dos campos vetoriais  $X$  e  $Y$  que não pertencem a  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$ , respectivamente, e também serão chamados de não admissíveis.

Mesmo que tenhamos escolhido a definição de órbita que nos garanta unicidade, um ponto  $p \in \Sigma$  pode pertencer ao fecho de muitas outras órbitas. Levando em conta este fato, ao longo deste trabalho adotaremos a definição a seguir.

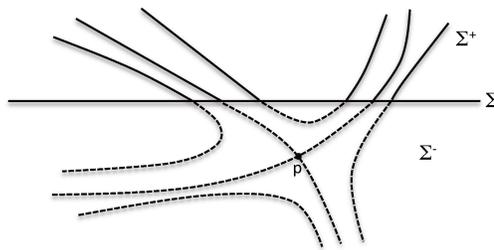


Figura 2.7: Ponto crítico não admissível.

**Definição 2.3.14** *Dados uma trajetória  $\varphi_Z(t, q) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$  e um ponto  $p \in \Sigma$ , dizemos que  $p$  é um ponto de partida de  $\varphi_Z(t, q)$  se existe  $t_0 < 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$  e diremos que é um ponto de chegada de  $\varphi_Z(t, q)$  se existe  $t_0 > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$ .*

De acordo com a Definição 2.3.7, se  $p \in \Sigma^c$  então  $p$  é um ponto de partida de  $\varphi_Z(t, q)$  para qualquer  $q$  pertencendo à órbita  $\gamma^+(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in [0, \infty)\}$  e é um ponto de chegada de  $\varphi_Z(t, q)$  para qualquer  $q$  pertencendo à órbita  $\gamma^-(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap (-\infty, 0]\}$ . Assim, a órbita por um ponto  $p \in \Sigma^c$  é a união do ponto com suas órbitas de partida e chegada, isto é,  $\gamma(p) = \{p\} \cup \gamma^+(p) \cup \gamma^-(p)$ .

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de singularidades discutidas nestas seções.

**Exemplo 2.3.15** Consideremos o sistema

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, 2x) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (2, 5x) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (2.4)$$

e tomemos  $p = (0, 0)$  e  $\Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$ .

O retrato de fase de  $Z$  é exibido na Figura 2.8(a). Neste caso, segundo a Definição 2.3.7, a trajetória por  $p$  é  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ .

**Exemplo 2.3.16** Consideremos o sistema

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, 2x) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (-2, -7x) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (2.5)$$

e tomemos  $p = (0, 0) \in \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  e  $\Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$ .

Neste caso, temos  $\Sigma^s = \{(x; y) : y = 0, x < 0\}$  e  $\Sigma^e = \{(x, y) : y = 0, x > 0\}$ . Em ambos os lados de  $p$ , a órbita é dada pelo campo vetorial deslizante  $Z^s(x, y) = (x/3x, 0)$ , que pode ser estendido para  $p$  como  $Z^s(0, 0) = (1/3, 0)$ , portanto para  $p$  temos que  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{X^s}(t, p) = (t/3, 0)^T$ . Este exemplo é ilustrado na Figura 2.8(b).

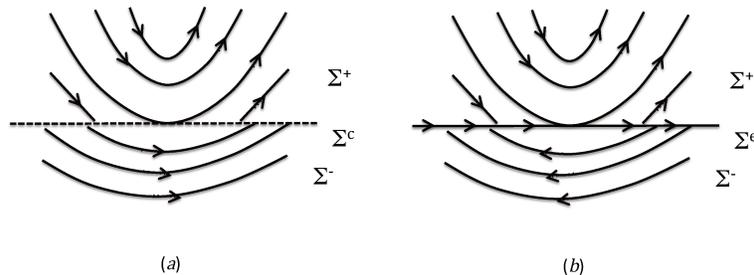


Figura 2.8: Tangências regulares.

Assim, considerando a Definição 2.3.7 e lembrando a dinâmica local, pode se concluir que os pontos de tangência regulares, mesmo sendo singularidades de acordo com a Definição 2.3.12, podem ser tomados como pontos regulares em  $\Sigma$ . Nos próximos exemplos, ilustraremos algumas tangências que são singularidades distinguidas, ou seja, suas órbitas são somente as próprias singularidades, como na Definição 2.3.13. No conjunto dos pontos de tangência singulares distinguidas, aparecem diferentes comportamentos, mas basicamente podemos classificá-los em três grupos.

O primeiro grupo dos pontos de tangência singular é formado por pontos em  $\partial\Sigma^c$  que não são pontos de chegada nem de partida de alguma trajetória, de modo que o retrato de fase local é similar ao caso de um foco clássico. Um exemplo deste comportamento é dado a seguir.

**Exemplo 2.3.17** Consideremos o sistema

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, -2x) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (-1, -x + x^2) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (2.6)$$

com  $p = (0, 0)$  e  $\Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$ .

Como podemos observar na Figura 2.9 (a), as trajetórias de  $Z$  espiralam em torno da origem como acontece em um foco para sistemas dinâmicos suaves.

O próximo exemplo pode ser observado na Figura 2.9 (b), e representa o segundo grupo de tangências singulares e é formado pelos pontos que pertencem a  $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^s$  ou a  $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e$ .

**Exemplo 2.3.18** Consideremos o sistema

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, x) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (0, 1) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (2.7)$$

e tomemos  $p = (0, 0)$  e  $\Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$ .

Para  $Z$ , como  $p \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$ , para pontos de  $\Sigma$  à esquerda de  $p$  suas órbitas são dadas por  $Z^s$ , enquanto para pontos à direita de  $p$  as órbitas são dadas pelas órbitas de chegada e partida do ponto, que são trajetórias de  $X$  e de  $Y$ , pois este ponto pertence a  $\Sigma^c$ . Portanto, a definição de órbita em ambos os lados de  $p$  não coincidem, o que implica que  $p$  é uma tangência singular para o campo  $Z_3$ . Veremos posteriormente que as tangências genéricas pertencem a este conjunto.

A seguir apresentamos um exemplo de um campo pertencente ao terceiro e último conjunto, cujos pontos de tangência singulares em  $\partial\Sigma^c$  são pontos de partida ou chegada de duas trajetórias diferentes de  $X$  e  $Y$ , o retrato de fase desse campo pode ser observado na Figura 2.9 (c). Como diferentes trajetórias de  $X$  e  $Y$  partem (ou chegam) deste ponto, não temos unicidade de soluções e então a única escolha que pode ser feita para manter a unicidade de soluções é considerar o próprio ponto como sua órbita.

**Exemplo 2.3.19** Consideremos o sistema

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, x) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (-1, x) & \text{em } \Sigma^-. \end{cases} \quad (2.8)$$

Neste caso, a origem é um ponto de dobra visível para  $X$  e  $Y$ . Assim, teremos um par de órbitas para as quais  $p = (0, 0)$  é um ponto de chegada e outro par para o qual a origem é um ponto de partida.

O último grupo de pontos de tangências singulares corresponde aos pontos  $p \in \Sigma$  tal que  $X(p) = 0$  ou  $Y(p) = 0$ , que podem ser pontos críticos hiperbólicos ou não. Analisaremos o caso em que a origem é um ponto crítico hiperbólico cuidadosamente mais adiante. Uma vez que temos definidas a trajetória e a órbita local por um ponto, podemos estabelecer rigorosamente a definição de órbita maximal. Dependendo do ponto, esta pode ser uma órbita regular, uma órbita deslizando ou uma singularidade distinguida.

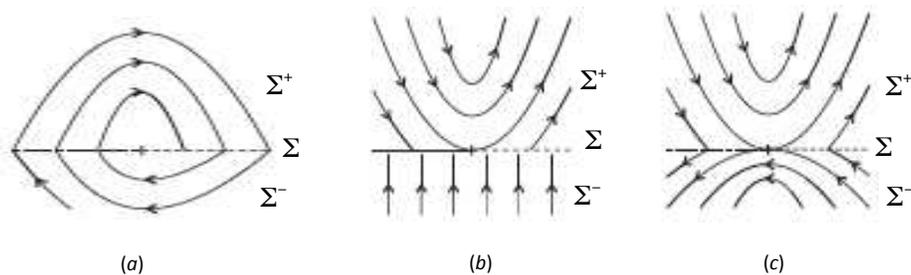


Figura 2.9: Tangências singulares.

**Definição 2.3.20** *Uma órbita regular maximal de  $Z$  é uma curva suave por partes tal que:*

- i)  $\gamma \cap \Sigma^+$  e  $\gamma \cap \Sigma^-$  é uma união de órbitas dos campos contínuos  $X$  e  $Y$ , respectivamente.
- ii) A interseção consiste apenas de pontos de costura e de tangências regulares em  $\partial\Sigma^c$ .
- iii)  $\gamma$  é maximal com respeito a estas condições.

Observemos que uma órbita regular nunca encontra  $\Sigma^s$  ou  $\Sigma^e$

**Definição 2.3.21** *Uma órbita deslizando (ou órbita singular) maximal de  $Z$  é uma curva suave  $\gamma \subset \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^e}$  que é uma órbita maximal do sistema suave  $Z^s$ .*

Como falamos no início desta seção, as definições aqui adotadas levam a duas características que tornam esta abordagem mais apropriada no estudo da estabilidade estrutural e bifurcações genéricas: primeiro, a unicidade de soluções, isto é, qualquer  $p \in U$  pertence a uma única órbita, e segundo, qualquer vizinhança de  $p$  é decomposta na união disjunta de órbitas.

### 2.3.2 Separatrizes, órbitas periódicas e ciclos

Nesta subseção generalizaremos os conceitos de separatriz e órbita periódica para Sistemas de Filippov. Para o caso das separatrizes seguimos [6], [17]. Podemos estender o conceito de separatrizes de um ponto  $p \in U$ , presente em sistemas dinâmicos suaves para o contexto de Sistemas de Filippov. Isto é feito de forma natural, como veremos na definição abaixo.

**Definição 2.3.22** *Seja  $p \in U$  um ponto de sela para  $X$  ou  $Y$  em  $\overline{\Sigma^\pm}$  ou uma singularidade distinguida em  $\Sigma$ .*

- *Se  $p \in \Sigma^+$  é um ponto de sela para  $X$ , então a separatriz instável de  $p$  é a variedade invariante instável, denotada por  $W^u(p)$ , e dada por*

$$W^u(p) = \{q \in U \mid \varphi_Z(t, q) \text{ está definido para } (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t, q) = p\}.$$

*Analogamente para um ponto de sela  $p \in \Sigma^-$ .*

- *Se  $p \in \Sigma$  é uma singularidade distinguida então a separatriz instável é uma órbita regular que possui  $p \in \Sigma$ . Denotaremos esta separatriz por  $W_\pm^u(p)$ , onde o subscrito  $\pm$  significa que a órbita está contida  $\Sigma^\pm$ .*

*As separatrizes estáveis  $W_\pm^s(p)$  são definidas analogamente.*

No primeiro caso, como é sábio em sistemas suaves, a trajetória sobre a separatriz alcança  $p$  em um tempo infinito, enquanto que, no segundo caso, ela pode alcançar a singularidade em tempo finito. Se uma separatriz é simultaneamente estável e instável, ela é uma conexão de separatrizes.

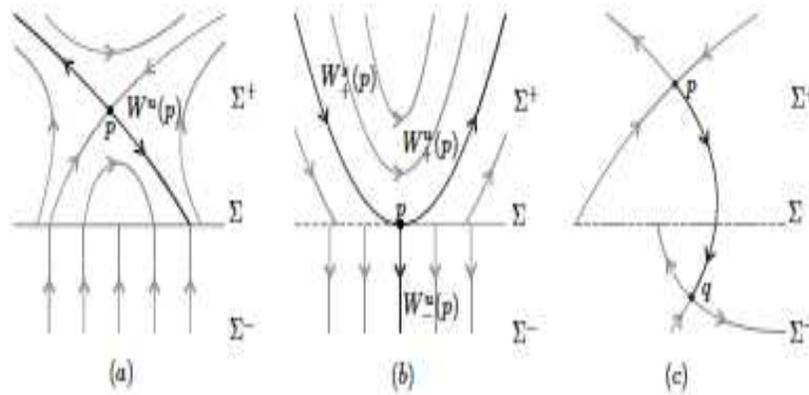


Figura 2.10: Separatrizes.

Observe que, com esta definição, um pseudo-nó  $p \in \Sigma^s$  possui separatrizes que são dadas pelas duas órbitas regulares em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  que possuem  $p$  como ponto de chegada ou partida. Recordemos que estas órbitas alcançam  $p$  em um tempo finito. Em Sistemas de Filippov, além das órbitas periódicas de  $X$  em  $\Sigma^+$  e de  $Y$  em  $\Sigma^-$ , existem outras trajetórias que não estão contidas em  $\Sigma^\pm$ , mas que apresentam comportamento semelhante. As definições a seguir generalizam o conceito de órbita periódica em Sistemas de Filippov. Lidaremos com diferentes casos. O primeiro são as órbitas periódicas regulares.

**Definição 2.3.23** *Uma órbita periódica regular é uma órbita regular  $\varphi(t, p)$ , que pertence a  $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$  e satisfaz  $\varphi(t + T, p) = \varphi(t, p)$  para algum  $T > 0$ .*

O segundo caso é a órbita periódica deslizante, que aparece quando  $\Sigma$  é homeomorfa a  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\Sigma = \Sigma^s$  ou  $\Sigma = \Sigma^e$ , de modo que o campo vetorial deslizante não possui pontos críticos. Neste caso, toda a subvariedade é uma órbita periódica, porém este caso não aparece neste trabalho pois estudamos sistemas de Filippov apenas localmente e então  $\Sigma$  é sempre homeomorfa a um intervalo aberto.

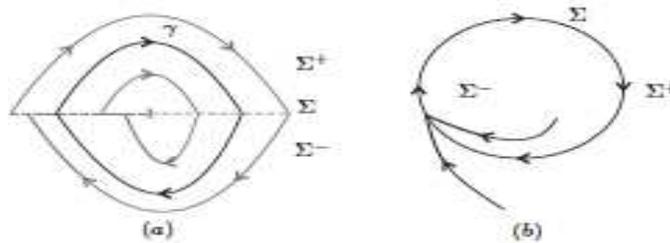


Figura 2.11: Órbita periódica regular e órbita periódica deslizante.

Deve ser claro que, devido às nossas definições de trajetórias e trajetórias maximais (Definições 2.3.20 e 2.3.21), não podem existir órbitas periódicas que sejam combinações de movimentos regulares e deslizantes, pois estas envolveriam, ao mesmo tempo, pontos de  $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$  e pontos em  $\Sigma^s \cup \Sigma^e$  e uma órbita não pode interceptar tais conjuntos. Portanto, para lidar com movimento periódico que envolva ao mesmo tempo movimento deslizante e regular, definiremos os ciclos.

**Definição 2.3.24** *Um ciclo é o fecho de um conjunto finito de pedaços de órbitas,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  tal que  $\gamma_{2k}$  é um pedaço de órbita deslizante e  $\gamma_{2k+1}$  é uma órbita regular maximal e os pontos de chegada e partida de  $\gamma_{2k+1}$  pertencem ao fecho das órbitas  $\gamma_{2k}$  e  $\gamma_{2k+2}$ , respectivamente. Definimos o período do ciclo como sendo a soma dos tempos que são gastos em cada parte da trajetória  $\gamma_i; i = 1, \dots, n$ .*

As órbitas periódicas regulares também são chamadas órbitas periódicas padrão se elas estão em  $\Sigma^+$  ou  $\Sigma^-$  e órbitas periódicas de costura se elas interceptam  $\bar{\Sigma}^c$ . Além dos ciclos e órbitas periódicas, existe um outro objeto geométrico distinguido que é importante quando se estuda equivalências topológicas e bifurcações em Sistemas de Filippov, este é definido abaixo.

**Definição 2.3.25** *Definimos um pseudociclo como o fecho de um conjunto de órbitas regulares  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , tal que uma das extremidades (os pontos de chegada e partida) de qualquer coincide com uma extremidade de  $\gamma_{i-1}$  e a outra, com uma extremidade de  $\gamma_{i+1}$  (e também entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_n$ ) formando uma curva homeomorfa a  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , de modo que, em algum ponto, dois pontos de chegada ou partida coincidem.*

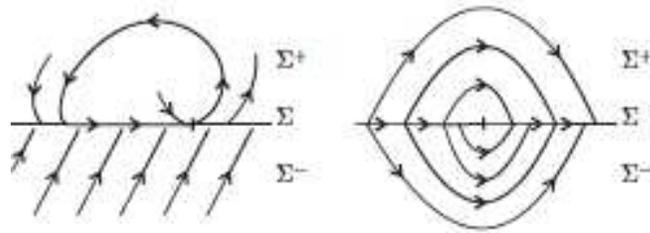


Figura 2.12: Ciclo e pseudociclo.

**Observação 2.3.26** No caso onde a interseção do pseudociclo com  $\Sigma$  se dá numa singularidade do campo  $Z$ , denominamos este pseudociclo por pseudociclo distinguido.

**Definição 2.3.27** *Sejam  $p_1, p_2 \in \Sigma$  singularidades distinguidas de  $Z$ , ou pontos críticos do tipo sela de  $X$  e/ou  $Y$ ,*

- *Um ponto  $q \in W_{\pm}^s(p_1) \cap W_{\mp}^u(p_1)$  é dito ser um ponto homoclínico para  $Z$ , e a órbita através de  $q$  é chamada órbita homoclínica.*
- *Um ponto  $q \in W_{\pm}^s(p_1) \cap W_{\pm}^u(p_2)$  é dito ser um ponto heteroclínico, e a órbita através de  $q$  é chamada de órbita heteroclínica.*

## 2.4 Campos de Filippov com Simetrias

O objetivo principal deste trabalho é estudar as propriedades locais de uma classe de Sistema de Filippov planares em presença de simetria, os denominados Sistemas Reversíveis e Sistemas Equivariantes. Assim como, classificar suas singularidades típicas e verificar quais destas propriedades (por exemplo órbitas típicas fechadas) persistem por perturbações quando a simetria é rompida dentro da mesma estratégia estabelecida no caso regular. No caso regular tais programas sistemáticos envolvendo sistemas reversíveis e/ou equivariantes tem emergido em diversas frentes: na análise da teoria de bifurcação local e global, versões do Teorema do Centro de Lyapunov, tipos topológicos de pontos de equilíbrio, identificação dos diagramas de bifurcação de singularidades de codimensão 1 e 2 nos casos de dimensão 2 e 3, homoclinicidade e ciclos limites.

### 2.4.1 Campos de Filippov Reversíveis ou Equivariantes

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto contendo a origem. Seja  $\phi : U \rightarrow U$  uma involução, isto é, um difeomorfismo de classe  $\mathcal{C}^\infty$  satisfazendo  $(\phi \circ \phi) = Id$ . O conjunto dos pontos fixos  $Fix(\phi) = \{p \in U : \phi(p) = p\}$  será denotado por  $S$ .

Seja  $f$  um germe de uma função  $\mathcal{C}^r$  com  $r > 1$  para a qual 0 é valor regular e  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^r$  um campo de Filippov definido em  $U$  com  $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$ . Definimos a seguir as condições de simetrias para os Campos de Filippov denominadas de reversibilidade e de equivariância do campo.

**Definição 2.4.1** Dizemos que  $Z = (X, Y)$  é  $\phi$ -reversível ou reversível se existir uma involução  $\phi$  tal que,

- i)  $X \circ \phi = -\phi * Y$ , isto é,  $X(\phi(p)) = -D\phi(p)Y(p)$  para  $p \in U \cap \mathbb{R}^2, 0$
- ii)  $S \subset \Sigma$ .

**Definição 2.4.2** Dizemos que  $Z = (X, Y)$  é  $\phi$ -equivariante ou equivariante se existir uma involução  $\phi$  tal que,

- i)  $X \circ \phi = \phi * Y$ , isto é,  $X(\phi(p)) = D\phi(p)Y(p)$  para  $p \in U \cap \mathbb{R}^2, 0$
- i)  $S \subset \Sigma$ .

Denotaremos por  $\mathcal{Z}^{rev}$  e  $\mathcal{Z}^{eq}$  o conjunto dos campos de Filippov planares reversíveis e equivariantes, respectivamente.

**Exemplo 2.4.3** O campo possuindo uma singularidade tipo dobra-dobra hiperbólica em  $\partial\Sigma^c$  dada no Exemplo 1.0.2 e esboçada na Figura 2.13 satisfaz as condições de reversibilidade e equivariância. Veja também o campo de Filippov com simetria apresentado no Exemplo 1.0.1.

Nas referências [1], [5] e [13], encontramos diversos modelos de sistemas descontínuos com simetrias, bem como aplicações na teoria de osciladores não lineares.

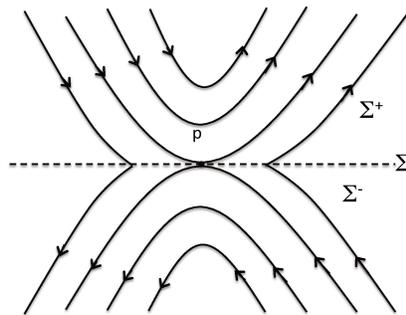


Figura 2.13: Singularidade Dobra-Dobra em  $\partial\Sigma^c$ .

**Definição 2.4.4** Dizemos que  $p$  é uma  $S$ -singularidade de um campo de Filippov  $Z = (X, Y)$  quando  $p$  for uma singularidade de  $Z$  e além disso existir uma involução  $\phi$  tal que  $Z$  seja reversível ou equivariante, com  $p \in S = \text{Fix}(\phi)$ .

Notemos que a origem no Exemplo 1.0.2 é uma  $S$ -singularidade de  $Z$  para as duas involuções citadas. Diz-se, no caso do Exemplo 1.0.2, que a origem é uma  $S$ -dobra do campo  $Z$ .

## 2.4.2 Equivalência Topológica em Sistemas de Filippov Reversíveis e Equivariante

Nesta seção, algumas noções de equivalência topológica de campos vetoriais reversíveis e/ou equivariante são apresentadas. Estas definições levarão ao estudo de bifurcações genéricas locais de codimensão 1 e 2. Para estabelecê-las, consideremos dois campos de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  definidos em abertos  $U$  e  $\tilde{U}$ , possuindo curvas de descontinuidade em  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$ , respectivamente. Primeiramente estabeleceremos o conceito de  $\Sigma$ -equivalência, que é usualmente considerado na literatura de Sistemas de Filippov, para referências pode-se consultar [2] e [6].

**Definição 2.4.5** *Dois campos de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  de  $\mathbb{Z}^r$  definidos em abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  com curvas de descontinuidades  $\Sigma \subset U$  e  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$  respectivamente são  $\Sigma$ -equivalentes se existir um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$ , que preserva a orientação, e leva  $\Sigma$  em  $\tilde{\Sigma}$ , e órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$ .*

Aqui como estamos interessados no estudo dos campos de Filippov na presença de simetria iremos acrescentar na definição anterior a condição de que o homeomorfismo deve preservar o eixo de simetria. Esta exigência é natural visto que estamos discutindo a equivalência entre campos de Filippov com uma simetria fixada a priori. Temos portanto a seguinte definição.

**Definição 2.4.6** *Dois campos de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  de  $\mathbb{Z}^r$   $\phi$ -reversíveis e/ou  $\phi$ -equivariantes definidos em abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  com curvas de descontinuidades  $\Sigma \subset U$  e  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$  respectivamente são  $\Sigma$ -equivalentes se existir um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$ , que preserva a orientação e leva  $\Sigma$  em  $\tilde{\Sigma}$ ,  $S$  em  $\tilde{S}$  e órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$ .*

É fácil ver que qualquer  $\Sigma$ -equivalência manda órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Ainda mais, leva pontos de chegada em pontos de chegada e pontos de partida em pontos de partida. As regiões de  $\Sigma$  também são preservadas e portanto,  $h$  leva órbitas deslizantes em órbitas deslizantes, preserva separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas, ciclos

e pseudociclos. A definição de  $\Sigma$ -equivalência é natural, pois em aplicações algumas vezes é importante preservar a variedade de descontinuidade. Porém, do ponto de vista da teoria de bifurcações, esta definição parece ser muito restrita. De fato, para que  $Z$  e  $\tilde{Z}$  tenham um comportamento qualitativo semelhante do ponto de vista topológico, não é necessário que a região  $\overline{\Sigma^c}$  seja preservada. Do ponto de vista topológico, o comportamento do fluxo é o mesmo perto de um ponto pertencente a região de costura e também em torno de um ponto regular de  $\Sigma^+$  ou de  $\Sigma^-$ , onde o campo vetorial é suave. Assim, para não restringir demais nossa abordagem, além de trabalharmos com a  $\Sigma$ -equivalência, consideraremos também o conceito de equivalência topológica definido abaixo.

**Definição 2.4.7** *Dois campos de Filippov  $Z$  e  $\tilde{Z}$  de  $\mathbb{Z}^r$  definidos em abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  com curvas de descontinuidades  $\Sigma \subset U$  e  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$  respectivamente são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$ , que preservam a orientação, e leva  $S$  em  $\tilde{S}$  e órbitas de  $Z$  em órbitas de  $\tilde{Z}$ .*

Observando as Definições 2.4.6 e 2.4.7, é óbvio que  $\Sigma$ -equivalência implica em equivalência topológica, mas a recíproca não é verdadeira. Analogamente a  $\Sigma$ -equivalência, equivalências topológicas preservam  $\overline{\Sigma^s}$  e  $\overline{\Sigma^e}$ , conseqüentemente também preserva  $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$  e portanto, leva órbitas regulares em órbitas regulares, órbitas deslizantes em órbitas deslizantes e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Ainda mais, também preservam separatrizes, conexões entre separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos. No Capítulo 4 construiremos alguns desses homeomorfismos no caso de pontos regulares e singularidades genéricas. Desta maneira, será necessário obter ferramentas para construir esses homeomorfismos.

Uma delas será baseada na noção de  $C^r$ -conjugação para campos vetoriais suaves. De fato, dois campos vetoriais suaves  $X$  e  $\tilde{X}$ , com seus respectivos fluxos  $\varphi_X(t, p)$  e  $\varphi_{\tilde{X}}(t, p)$  são conjugados se existe um homeomorfismo  $h \in C^r(\mathbb{R}^n)$  tal que  $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))$ .

Se  $h$  é diferenciável, da equação anterior obtemos para todo  $p$  no domínio de  $X$

$$\frac{d}{dt}h(\varphi_X(t, p))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))|_{t=0},$$

$$Dh(\varphi_X(t, p))\frac{d}{dt}\varphi_X(t, p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))|_{t=0},$$

$$Dh(p)X(p) = \tilde{X}(h(p)).$$

Sendo  $h$  bijetiva, podemos escrever para todo  $q$  no domínio de  $\tilde{X}$

$$Dh(h^{-1}(q))X(h^{-1}(q)) = \tilde{X}(q).$$

Deste modo, podemos escrever  $h_*X = \tilde{X}$ , onde  $h_*X(q) = Dh(h^{-1}(q))X(h^{-1}(q))$ . Assim, concluímos que  $h$  é somente uma mudança de coordenadas. Porém, não utilizaremos uma versão análoga para sistemas não-suaves e sim conjugações aplicadas às componentes suaves  $X$  e  $Y$  do Sistema de Filippov  $Z = (X, Y)$ .

**Observação 2.4.8** *Todas as equivalências topológicas definidas usando esta proposição preservam  $\Sigma$  e portanto, são também  $\Sigma$ -equivalências. Deste modo, para construir equivalências topológicas que não preservam  $\Sigma$ , outras técnicas deverão ser utilizadas.*

Considerando  $h$  somente um homeomorfismo podemos ter problemas, o seguinte exemplo mostra a importância de exigirmos a diferenciabilidade de  $h$ . Consideremos os campos

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (-1, -1) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (-1, 1) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \quad \text{e } Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (0, -1) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (0, 1) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}.$$

Notemos que ambos os campos são equivariantes pela involução  $\phi(x, y) = (x, -y)$ , possuindo  $Fix(\phi) = \Sigma$ .

Neste caso,  $\Sigma = \Sigma^s = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$  e o homomorfismo  $h$  é dado por

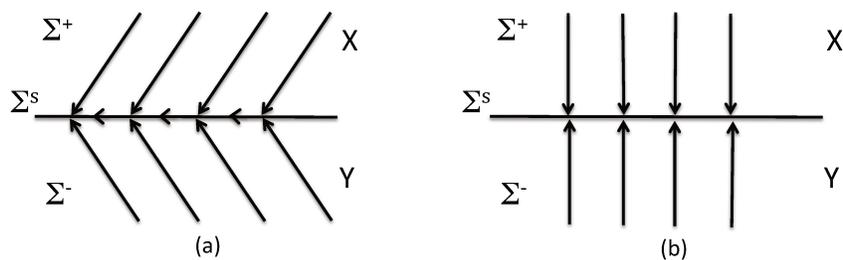


Figura 2.14: Retratos de fase dos campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$ .

$$h(x, y) = \begin{cases} (x - y, y) & \text{em } \Sigma^+ \\ (x, y) & \text{em } \Sigma \\ (x + y, y) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (2.9)$$

É fácil ver que  $h \in \mathcal{C}^0$  mas  $h \notin \mathcal{C}^1$  e que  $h$  conjugua  $X$  com  $\tilde{X}$  para  $y > 0$  e também  $Y$  com  $\tilde{Y}$  para  $y < 0$ . Porém não é uma equivalência topológica entre  $Z$  e  $\tilde{Z}$ , pois os campos vetoriais deslizantes são dados por  $Z^s = 0$  e  $\tilde{Z}^s = -1$ , não podendo ser portanto, topologicamente equivalentes. As definições de  $\Sigma$ -equivalência e equivalência dão origem aos conceitos de  $\Sigma$ -estabilidade estrutural e estabilidade estrutural, que veremos no capítulo 4.

# Capítulo 3

## Configurações Locais dos campos de Filippov em $\mathcal{Z}^{rev}$ ou $\mathcal{Z}^{eq}$

Lidaremos com involuções  $\phi : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ , que são germes de difeomorfismos de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (em 0), com  $\phi \neq Id$ . Sabemos do Teorema de Bochner-Montgomery, seção 2.2, que dado  $p \in Fix(\phi)$  se  $dimS = 1$  então  $\phi$  é  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugada a  $\phi(x, y) = (x, -y)$  em  $p_0 = (0, 0)$  e se  $dimS = 0$  então  $\phi$  é  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugada a  $\phi(x, y) = (-x, -y)$  em  $p_0 = (0, 0)$ . Aqui realizaremos nossa análise em  $\mathbb{R}^2, 0 \cap U$ , e fixaremos  $f(x, y) = y$ ,  $\Sigma = f^{-1}(0)$ .

Notemos que nestas coordenadas temos localmente nas vizinhança da origem,

$$S = \{(x, y) : y = 0\} \text{ com } \phi(x, y) = (x, -y) \text{ e}$$

$$S = \{(0, 0)\} \text{ com } \phi(x, y) = (-x, -y), \text{ respectivamente.}$$

Estamos interessados em classificar as singularidades genéricas e Bifurcações de baixa codimensão dos campos de Filippov pertencentes aos conjuntos

- $\mathcal{Z}^{\ominus rev} = \{Z \in \mathcal{Z}^{rev} : dimS = 1\}$ ,
- $\mathcal{Z}^{\ominus eq} = \{Z \in \mathcal{Z}^{eq} : dimS = 1\}$ .

Faremos a seguir, separadamente, uma construção para analisarmos os campos de Filippov pertencentes a cada um dos conjuntos acima.

### 3.1 Campos de Filippov $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$

Nesta seção estamos considerando os campos de Filippov reversíveis pela involução  $\phi(x, y) = (x, -y)$ , nestecasooretratode fase de  $Z$  é simétrica peladescontinuidade  $\Sigma$ . Pela condição de reversibilidade temos que  $Z$  é dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (-f_1(x, -y), f_2(x, -y)) & \text{em } \Sigma^-. \end{cases} \quad (3.1)$$

No semi-plano  $y > 0$  consideremos  $u = x$  e  $v = y$ . Assim para  $y > 0$ , temos que o campo  $Z^* = (f_1(u, v), f_2(u, v))$  em  $v > 0$ . Segue que para  $y > 0$ ,  $Z$  é topologicamente equivalente a  $F = F(Z)$ , onde  $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$  com  $v > 0$  é um campo do tipo que foi apresentado na seção 2.2.

Observemos que  $F$  pode ser  $\mathcal{C}^\infty$  estendida para toda vizinhança da origem, pois o campo  $X$  está definido em  $U$  e é de classe  $\mathcal{C}^r$  em  $\overline{\Sigma^+}$ , veja seção 2.1. Além disso, devido às propriedades de simetrias de  $Z$ , deduzimos que o comportamento de  $F(Z)$  próximo a  $S$  determina o comportamento de  $Z$  em uma vizinhança  $T$  de  $S$ . Isso nos leva a analisar a estabilidade de  $F$  na região  $F(T)$  com fronteira  $\Sigma \cap \mathbb{R}^2, 0$ . Além disso, no exterior de uma pequena vizinhança  $V$  de  $S$  em  $T \cap \Sigma^+$ ,  $Z$  e  $F(Z)$  são  $\mathcal{C}^r$ -conjugados.

Discutiremos agora algumas propriedades dos campos  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  que decorrem diretamente das definições e das simetrias.

**Propriedade 1** Se  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  então  $\Sigma \cap \mathbb{R}^2, 0 = \overline{\Sigma^c} \cap \mathbb{R}^2, 0$ .

*Demonstração:* É claro que  $\overline{\Sigma^c} \subset \Sigma$ .

Reciprocamente, dado  $p = (x_0, 0) \in \Sigma$ , segue de (3.1), que  $Xf(p) \cdot Yf(p) = [f_2(x_0, 0)]^2 \geq 0$ .

- i) Para  $Xf(p) \cdot Yf(p) > 0$  temos que os campos  $X$  e  $Y$  são transversais a  $p \in \Sigma^c$ .
- ii) Para  $Xf(p) \cdot Yf(p) = 0$ , temos que  $p$  é uma  $S$ -tangência de  $Z$  ou é um  $S$ -ponto crítico de  $Z$ , assim devemos mostrar que  $p \in \partial\Sigma^c$ . De fato, visto que estamos considerando somente pontos de tangência isolados, existe uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $U$  tal que  $X$  e  $Y$  são transversais  $(V_p \cap \Sigma) \setminus \{p\}$ . Neste caso podemos utilizar o item i) para os pontos na região  $(V_p \cap \Sigma) \setminus \{p\}$  e concluir que  $p \in \partial\Sigma^c$ . Portanto  $p \in \overline{\Sigma^c} \cap \mathbb{R}^2, 0$ .



**Observação 3.1.1** *Notemos que  $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$ , portanto,  $(0,0) \in \Sigma$  é um ponto de tangência singular do campo  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ .*

As propriedades 2 e 3 decorrem da definição de reversibilidade juntamente com a observação 3.1.1 e propriedade 1.

**Propriedade 2** *Se  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $Y(p) = 0$  para algum  $p \in \overline{\Sigma}^- \cap \mathbb{R}^2, 0$ , então  $\phi(p) \in \overline{\Sigma}^+ \cap \mathbb{R}^2, 0$  e  $X(\phi(p)) = 0$ .*

**Propriedade 3** *Se  $p \in \Sigma$  é uma tangência de ordem  $n$  do campo  $X$  ( do campo  $Y$ ) então  $p$  é uma tangência de ordem  $n$  do campo  $Y$  ( do campo  $X$ ) e  $X^{n+1}f(p) \cdot Y^{n+1}f(p) < 0$ .*

**Propriedade 4** *As singularidades dos campos de Filippov  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  são:*

- i)  $p \in \Sigma^\pm$  e  $\phi(p) \in \Sigma^\mp$  tal que  $X(p) = Y(\phi(p)) = 0$  e  $Y(p) = X(\phi(p)) = 0$  respectivamente.
- ii) *Pontos de tangência singular  $p \in \partial\Sigma^c$ .*

*Demonstração:* Decorre da propriedade 2 e da observação 3.1.1 juntamente com a propriedade 1, aplicadas à definição de Singularidades de Campos de Filippov apresentada na seção 2.3.

**Observação 3.1.2** *Segue da propriedade anterior que não existem singularidades não distinguidas em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . Além disso, se  $\gamma$  é uma órbita de um campo de Filippov reversível passando por  $p \in \partial\Sigma^c$  então  $\gamma$  não é uma órbita regular de  $Z$ .*

Analogamente, ao que foi apresentado por Devaney em [7] para sistemas dinâmicos suaves reversíveis, temos a seguinte propriedade.

**Propriedade 5** *Se  $\varphi_Z^t$  é o fluxo associado a  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , então  $\varphi_X^t \circ \phi = \phi \circ \varphi_Y^{-t}$ .*

### 3.2 Campos de Filippov $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$

Os campos  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  também possuem retrato de fase simétrico pela descontinuidade  $\Sigma$ . Pela condição de equivariância temos que  $Z$  é dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (f_1(x, -y), -f_2(x, -y)) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (3.2)$$

**Propriedade 6** Se  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  então  $\Sigma \cap \mathbb{R}^2, 0 = \overline{\Sigma^s \cup \Sigma^e} \cap \mathbb{R}^2, 0$ .

*Demonstração:* É claro que  $\overline{\Sigma^s \cup \Sigma^e} \subset \Sigma$ .

Reciprocamente, dado  $p = (x, 0) \in \Sigma$ , segue de (3.2), que  $Xf(p)Yf(p) = -[f_2(x, 0)]^2 \leq 0 \quad \forall p \in \Sigma \cap \mathbb{R}^2, 0$ .

i) Para  $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$  temos que os campos  $X$  e  $Y$  são transversais a  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ .

ii) No caso de  $p$  ser um ponto de tangência, analogamente à demonstração da propriedade 1 mostra-se que  $p \in \overline{\Sigma^e \cup \Sigma^s}$ . Portanto  $\Sigma \cap \mathbb{R}^2, 0 = \overline{\Sigma^s \cup \Sigma^e} \cap \mathbb{R}^2, 0$ .

■

**Observação 3.2.1** Notemos que  $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) > 0$ , portanto,  $(0, 0) \in \Sigma$  é um ponto de tangência regular de  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ .

**Observação 3.2.2** Como na seção anterior, temos que  $Z$  topologicamente equivalente a  $F = F(Z)$  em  $\Sigma^+$  e a discussão feita anteriormente também é válida para  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  (levando em consideração as simetrias devido a equivariância do campo). Apesar do retrato de fase dos campos em  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  e  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  possuírem simetria pela mesma variedade invariante, decorre das propriedades 1 e 7 que estes conjuntos são disjuntos.

Decorre da condição de equivariância imposta sobre a definição de Singularidades de Campos de Filippov apresentada na seção 2.3 que as singularidades dos campos de Filippov  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  são dadas pela seguinte proposição.

**Propriedade 7** As singularidades dos campos de Filippov  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  são:

- $p \in \Sigma^\pm$  e  $\phi(p) \in \Sigma^\mp$  tal que  $X(p) = Y(\phi(p)) = 0$  e  $Y(p) = X(\phi(p)) = 0$ , respectivamente,

- $p \in \overline{\Sigma^s \cup \Sigma^e}$  tal que  $p$  é um pseudo-equilíbrio, isto é,  $Z_s(p) = 0$ ,
- Pontos de tangências regulares  $p \in \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ .

Da definição de campo deslizando e propriedade 6 temos a seguinte propriedade.

**Propriedade 8** *Sejam  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  e  $p \in \Sigma$ ,  $X(p) \perp \Sigma$  se, e somente se,  $p$  é um ponto crítico do campo deslizando  $Z^s$ .*

A propriedade análoga a propriedade 9 para caso equivariante é dada da seguinte forma.

**Propriedade 9** *Se  $\varphi_Z^t$  é o fluxo associado a  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , então  $\varphi_X^t \circ \phi = \phi \circ \varphi_Y^t$ .*



# Capítulo 4

## Singularidades de codimensão 0 para campos de Filippov reversíveis e equivariantes

Este capítulo será dividido em duas partes. Na primeira parte, seção 4.1 consideraremos o caso  $\ominus$ -reversível e caracterizaremos o conjunto  $\Sigma_0^{\ominus rev}$  dos campos de Filippov  $\phi$ -reversíveis planares estruturalmente estáveis. Na seção 4.2 caracterizaremos o conjunto  $\Sigma_0^{\ominus eq}$  dos campos de Filippov  $\phi$ -equivariante planares estruturalmente estáveis.

### 4.1 Singularidades de codimensão 0 para campos em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$

#### 4.1.1 Pontos Regulares de $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$

Em pontos regulares não pertencentes a  $\Sigma$  podemos utilizar o teorema do fluxo tubular, portanto estudaremos somente os pontos pertencentes a curva de descontinuidade. Primeiramente consideraremos os pontos regulares do campo  $Z = (X, Y)$  em  $\Sigma$ , isto é,  $p \in \Sigma$  tal que  $Xf(p) \neq 0$  e  $Yf(p) \neq 0$ . Nestas condições  $p \in \Sigma^c$ . Na proposição a seguir apresentamos uma forma normal para o campo  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  em torno

de um ponto regular  $(0, 0) \in \Sigma$ .

**Proposição 4.1.1** *Seja  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , se  $(0, 0)$  é um ponto regular de  $Z$ , então  $(0, 0) \in \Sigma^c$  e numa vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$ ,  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente a forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (0, b) & \text{em } \Sigma^+ \\ \tilde{Y}(x, y) = (0, b) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \quad (4.1)$$

definida em uma vizinhança de  $\tilde{U}$  de  $(0, 0)$ , onde  $b = \text{sgn}(\pi_2(X(0, 0)))$ , com  $\pi_i$  sendo a projeção na  $i$ -ésima coordenada do campo.

*Demonstração:* Da propriedade 1 na seção 3.1 segue que  $(0, 0) \in \Sigma^c$ . Claramente  $\tilde{Z}$  pertence a  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . Consideremos  $\varphi_X$ ,  $\varphi_Y$ ,  $\varphi_{\tilde{X}}$  e  $\varphi_{\tilde{Y}}$ , os fluxos de  $X$ ,  $Y$ ,  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ , respectivamente. Visto que a origem pertence à região de costura para  $Z$  e  $\tilde{Z}$ , segue do teorema da função implícita que dado  $p \in \Sigma^+$ , existe um único  $t = t(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ , com  $t$  contínua. Analogamente para  $p \in \Sigma^-$ .

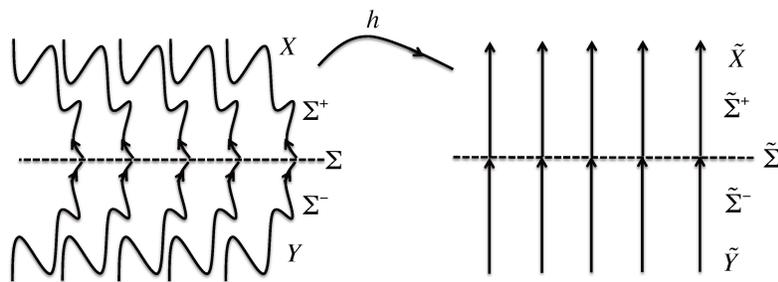


Figura 4.1: Construção do homeomorfismo  $h$  para os campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  da proposição 4.1.1.

Devido à simetria desses sistemas podemos, sem perda de generalidade, construir a  $\Sigma$ -equivalência em termos dos fluxos  $\varphi_X$  e  $\varphi_{\tilde{X}}$ . Deste modo, podemos definir a função  $h : U \rightarrow U$  por

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}^t(p) = \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)) & \text{se } p \in \Sigma^+ \\ p & \text{se } p \in \Sigma \\ \phi \circ \varphi_{\tilde{X}}^{-t} \circ \phi(p) = \phi \circ \varphi_{\tilde{X}}(t(\phi(p)), \varphi_X(-t(\phi(p)), \phi(p))) & \text{se } p \in \Sigma^- \end{cases} \quad (4.2)$$

Pela construção de  $h$  é claro que  $\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)) = h(\varphi_X(t, p))$  e que  $h$  é homeomorfismo preservando  $\Sigma$ , onde neste caso  $\Sigma = \Sigma^c$  na vizinhanças da origem.

É claro que  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$  e também que  $h$  é contínua pois, todas as aplicações envolvidas são contínuas e coincidem em  $\Sigma$ . ■

### 4.1.2 Singularidades Genéricas em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$

Uma vez que já classificamos o comportamento em torno dos pontos regulares de  $Z = (X, Y) \in \Sigma$ , começaremos a estudar as singularidades genéricas. Os primeiros tipos de singularidades são os pontos críticos hiperbólicos de  $X$  e  $Y$  em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  respectivamente. É claro que em torno desses pontos podemos estudar a parte linear dos campos utilizando as formas canônicas, deste modo estudaremos somente as singularidades genéricas em  $\Sigma$ .

**Observação 4.1.2** Lembremos que as singularidades dos campos de Filippov  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  são pontos  $p \in \Sigma^\pm$  e  $\phi(p) \in \Sigma^\mp$  tais que  $X(p) = Y(\phi(p)) = 0$  e  $Y(p) = X(\phi(p)) = 0$ , respectivamente ou são pontos de tangência singular  $p \in \partial\Sigma^c$ , veja Propriedade 3 da Seção 3.1

### Observação 4.1.3

Para o conjunto dos campos de Filippov planares reversíveis  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , existem as seguintes singularidades genéricas em  $\Sigma$ :

- Singularidade  $S$ -dobra elíptica em  $\partial\Sigma^c$ ,
- Singularidade  $S$ -dobra hiperbólica em  $\partial\Sigma^c$ .

Na proposição que segue exibiremos a forma normal das singularidades genéricas de  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ .

**Proposição 4.1.4** *Seja  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , se  $(0, 0)$  é uma singularidade  $S$ -dobra, então  $(0, 0)$  é uma singularidade  $S$ -dobra elíptica ou hiperbólica em  $\partial\Sigma^c$  e numa vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$ ,  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente a forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (a, abx) & \text{em } \Sigma^+ \\ \tilde{Y}(x, y) = (-a, abx) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \quad (4.3)$$

definida em uma vizinhança  $\tilde{U}$  de  $(0, 0)$ , onde  $b = \text{sgn}(X^2 f(0, 0))$ ,  $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0, 0)))$ .

*Demonstração:* O valor de  $b$  definido acima nos diz se  $(0, 0) \in \Sigma$  é um ponto de  $S$ -dobra elíptico ( $b < 0$ ) ou hiperbólico ( $b > 0$ ) para o campo  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $a$  nos dá a direção do fluxo. Sem perda de generalidade, consideraremos o caso onde  $a = 1$  assim, resta construir o homeomorfismo  $h$  para  $b < 0$  e  $b > 0$ . Para garantirmos que as regiões de  $\Sigma$  serão preservadas consideraremos as trajetórias de  $X$  e  $Y$  parametrizadas pelo comprimento de arco.

Para  $b < 0$ , temos que  $(0, 0)$  é um ponto de  $S$ -dobra elíptico  $\overline{\Sigma}^c$  do campo  $Z$ , então, dado  $p \in \Sigma^+$  podemos obter a  $\Sigma$ -equivalência de forma análoga ao caso regular.

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}^t(p) = \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)) & \text{para } p \in \Sigma^+ \\ p & \text{para } p \in \Sigma \\ \phi \circ \varphi_{\tilde{X}}^{-t} \circ \phi(p) & \text{para } p \in \Sigma^-. \end{cases}$$

É claro que  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$  e também que  $h$  é contínua, pois todas as aplicações envolvidas são contínuas e coincidem em  $\Sigma$ .

Para  $b > 0$ , deveremos construir o homeomorfismo  $h$  por partes e não poderemos utilizar argumentos como os anteriores, pois as trajetórias que pertencem à região delimitada pela curva  $W_+^s(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_+^u(0, 0)$  ou à região delimitada pela curva  $W_-^s(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_-^u(0, 0)$  não interceptam  $\Sigma$ . Para resolvermos este problema, vamos considerar seções transversais  $\Pi_+$ ,  $\Pi_-$  e  $\widetilde{\Pi}_+$ ,  $\widetilde{\Pi}_-$ , que são transversais em  $(0, 0)$  aos campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$ , respectivamente. Como essas seções transversais são homeomorfas a  $\mathbb{R}$ , podemos escolher homeomorfismos  $g_1 : \Pi_+ \rightarrow \widetilde{\Pi}_+$  e  $g_2 : \Pi_- \rightarrow \widetilde{\Pi}_-$  para os quais  $g_1(0) = 0$  e  $g_2(0) = 0$ .

Vamos supor que  $U = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$ , onde  $A$  é a região a esquerda da curva  $W_+^s(0,0) \cup (0,0) \cup W_-^u(0,0)$ ,  $B$  é a região a direita da curva  $W_+^u(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_-^s(0,0)$ ,  $C$  a região acima de  $W_+^s(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_+^u(0,0)$  e  $D$  a região abaixo  $W_-^s(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_-^u(0,0)$ .

Para  $p \in C \setminus \{(0,0)\}$ , existe um único  $t = t(p) \in \mathbb{R}$  para o qual  $\varphi_X(t(p), p) \in \Pi_+$ , assim defina

$$h(p) = \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), g(\varphi_X(t(p), p)))$$

Por simetria para  $p \in \overline{D} \setminus \{(0,0)\}$  temos a  $\Sigma$ -equivalência dada por

$$h(p) = \phi \circ \varphi_{\tilde{X}}(t(\phi(p)), g(\varphi_X(-t(\phi(p)), \phi(p))))).$$

Por fim, para pontos das regiões  $A$  e  $B$  procedemos como na proposição 4.1.1. Assim concluímos a construção do homeomorfismo  $h$  que fornece uma  $\Sigma$ -equivalência entre  $Z$  e  $\tilde{Z}$ .

É claro que  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$  e também que  $h$  é contínua pois, todas as aplicações envolvidas são contínuas e coincidem em  $\Sigma$ .

■

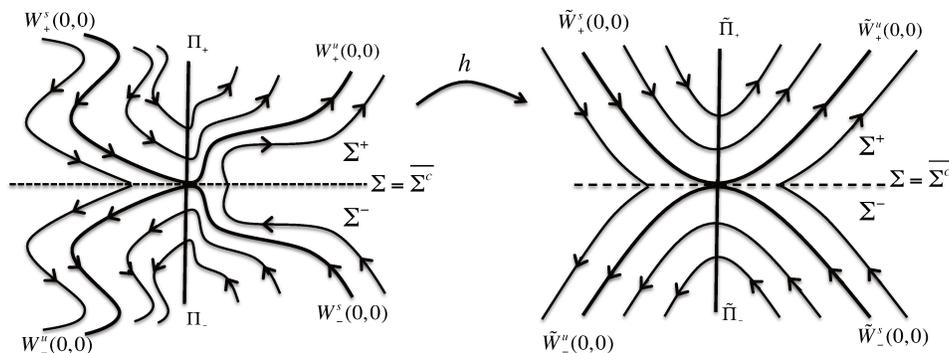


Figura 4.2: Construção do homeomorfismo  $h$  para os campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  da proposição 4.1.4.

Uma vez que já caracterizamos os pontos regulares e singularidades “genéricas” de um campo  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , vamos mostrar que esta é, de fato, uma propriedade

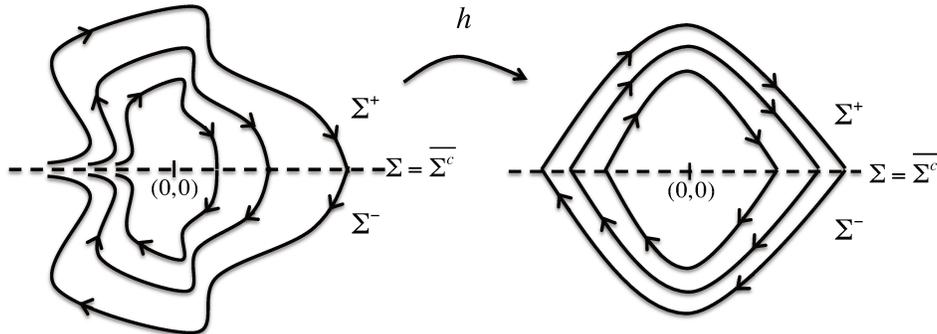


Figura 4.3: Construção do homeomorfismo  $h$  para os campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  da proposição 4.1.4.

genérica em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . Lembramos que uma propriedade  $P$  é dita genérica em um espaço  $C$ , se o conjunto dos pontos que satisfazem a propriedade  $P$  é aberto e denso em  $C$ . Isto significa que dado qualquer elemento de  $C$ , ele pode ser aproximado por elementos satisfazendo  $P$  e ainda mais, para cada elemento que satisfaz  $P$  existe uma vizinhança deste elemento  $U \in C$  tal que  $X \in U$ , então satisfaz a propriedade  $P$ .

**Teorema 4.1.5** *Seja  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  definido em uma vizinhança da origem. Se  $(0, 0) \in \Sigma$  é um ponto regular em  $\Sigma^c$  ou uma singularidade genérica de  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{rev}$  então  $Z_0$  é localmente estruturalmente estável e localmente  $\Sigma$ -estruturalmente estável.*

*Demonstração.* Consideremos primeiramente os pontos regulares de  $Z = (X, Y)$ . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{Z}^{\ominus rev} &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\longmapsto Xf(0, 0).Yf(0, 0) \end{aligned}$$

Observe que  $\xi$  é uma aplicação contínua e portanto, se  $(0, 0) \in \Sigma^c$  temos  $\xi(Z_0) > 0$ , logo existe uma vizinhança  $V_{Z_0} \subset \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  para a qual  $Z \in V_{Z_0}$  então  $\xi(Z) > 0$ , assim  $(0, 0) \in \Sigma^c$ . Deste modo, pela Proposição 4.1.1 temos que  $Z_0$  é  $\Sigma$ -equivalente a  $Z$  para todo  $Z \in V_{Z_0}$ . Logo é  $\Sigma$ -estruturalmente estável.

Suponhamos agora que a origem é um ponto de  $S$ -dobra para  $Z_0 \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . Lembremos que neste caso são pontos de  $S$ -dobra elíptico ou hiperbólico. Assim,  $Xf(0, 0) = 0 = Yf(0, 0)$ ,  $X^2f(0, 0) \neq 0 \neq Y^2f(0, 0)$ . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_X : \mathcal{Z}^{\ominus rev} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (Z, x) &\longmapsto Xf(x, 0) \end{aligned}$$

Temos que  $\psi(Z_0, 0) = 0$  e segue das condições para que a origem seja um ponto de  $S$ -dobra para o campo  $Z_0$  que

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi_X(Z, x)|_{(Z_0, 0)} \neq 0$$

e pelo Teorema da Função Implícita existe uma vizinhança de  $(Z_0, 0)$  dada por  $V_{Z_0}(-\epsilon, \epsilon)$  e uma aplicação  $g : V_{Z_0} \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$  contínua com  $g(Z_0) = 0$  para a qual  $\psi(Z, g(Z)) = Xf(g(Z), 0) = 0$  e portanto  $(g(Z), 0)$  é um ponto de dobra para  $X$ , visto que  $(g(Z), 0) \in \text{Fix}(\phi)$ , temos que  $(g(Z), 0)$  é um ponto de  $S$ -dobra de  $Z$ . Como  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  então pontos de  $S$ -dobra elípticos ou hiperbólicos. Agora, utilizando a continuidade das aplicações  $(Z, x) \mapsto X^2f(g(Z), 0)$  e  $(Z, x) \mapsto Y^2f(g(Z), 0)$  e interceptando todas as vizinhanças de  $Z_0$  obtidas até agora, segue que  $(g(Z), 0) \in \Sigma$  é um ponto de  $S$ -dobra elíptico ou hiperbólico em  $\partial\Sigma^c$  para  $Z$  e portanto, pela Proposição 4.1.4 segue que  $Z_0$  é  $\Sigma$ -estruturalmente estável.

■

É fácil construir contra-exemplos que mostram que, se  $(0, 0) \in \Sigma$  não é destes tipos então não teremos estabilidade estrutural local nem  $\Sigma$ -estabilidade estrutural. Logo, o Teorema toma a forma:

**Teorema 4.1.6** *Seja  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  definido em uma vizinhança da origem. Temos que  $(0, 0) \in \Sigma$  é um ponto regular em  $\Sigma^c$  ou uma singularidade genérica de  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  se, e somente se,  $Z_0$  é localmente estruturalmente estável e localmente  $\Sigma$ -estruturalmente estável.*

Seja  $\Sigma_0^{\ominus rev} \subset \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  o conjunto dos sistemas planares de Filippov reversíveis cujos pontos são todos regulares ou singularidades genéricas. Note que, dado  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , é possível mostrar que podemos aproximá-lo por uma sequência  $Z_n$  para os quais a origem é uma singularidade genérica para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Daí segue que o conjunto  $\Sigma_0^{\ominus rev}$  é denso em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e portanto, como havíamos comentado, a estabilidade estrutural local é uma propriedade genérica em sistemas de Filippov planares reversíveis. Com o Teorema 4.1.6, caracterizamos o conjunto  $\Sigma_0^{\ominus rev}$  dos Sistemas Planares de Filippov reversíveis que são localmente estruturalmente estáveis, isto é, que são persistentes quando sujeitos a pequenas perturbações.

**Observação 4.1.7** Notemos que um campo de Filippov  $Z(x, y)$  possuindo  $(0, 0)$  como uma singularidade  $S$ -dobra elíptica ou hiperbólica em  $\partial\Sigma^c$  é localmente topologicamente equivalente a um campo vetorial suave  $W(x, y)$  possuindo  $(0, 0)$  como sendo um ponto crítico do tipo centro  $W(x, y) = (y, x)$  ou uma sela  $W(x, y) = (y, -x)$ , respectivamente. Como vimos anteriormente o conjunto  $\Sigma_0^{\ominus rev}$  é constituído dos campos de Filippov tendo  $(0, 0)$  como ponto regular ou uma das singularidades acima. É conhecido de [19] que o conjunto  $\Omega_0^{\ominus rev}$  dos campos estruturalmente estáveis no conjunto  $\mathfrak{X}^{\ominus rev}$  dos campos suaves planares reversíveis de classe  $\mathcal{C}^r$  é constituído dos campos suaves possuindo  $(0, 0)$  como ponto regular ou um ponto crítico do tipo centro ou sela. A proposição a seguir nos dá uma relação entre  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $\mathfrak{X}^{\ominus rev}$ .

**Proposição 4.1.8** *Dado  $W \in \mathfrak{X}^{\ominus rev}$ , então existe  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  tal que  $W$  é topologicamente equivalente a  $Z$ . Além disso  $W \in \Omega_0^{\ominus rev}$  se, e somente se  $Z \in \Sigma_0^{\ominus rev}$ .*

*Demonstração:* Seja  $W(u, v) \in \mathfrak{X}^{\ominus rev}$ . Então da condição de reversibilidade para campos suaves temos que  $W$  é da forma

$$W(u, v) = \left( v f_1(u, v^2), \frac{1}{2} f_2(u, v^2) \right).$$

i) Para  $v > 0$  tomemos  $x = u$  e  $y = v^2$ , então  $\dot{x} = \dot{u}$  e  $\dot{y} = 2v\dot{v}$ . Nestas coordenadas temos

$$W'(x, y) = (\sqrt{y}f_1(x, y), \sqrt{y}f_2(x, y)) \text{ em } \Sigma^+$$

que é topologicamente equivalente a

$$(f_1(x, y), f_2(x, y)) \text{ em } \Sigma^+.$$

ii) Para  $v < 0$  tomemos  $x = u$  e  $y = -v^2$ . Nestas coordenadas temos

$$W'(x, y) = (-\sqrt{-y}f_1(x, -y), \sqrt{-y}f_2(x, -y)) \text{ em } \Sigma^-$$

que é topologicamente equivalente a

$$(-f_1(x, -y), f_2(x, -y)) \text{ em } \Sigma^-.$$

Portanto  $W$  é topologicamente equivalente a

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (-f_1(x, -y), f_2(x, -y)) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}$$

O fato de  $W \in \Omega_0^{\ominus rev}$  se, e somente se  $Z \in \Sigma_0^{\ominus rev}$ , decorre da observação anterior. ■

Notemos que não faz sentido falar da  $\Sigma$ -equivalência entre esses espaços, uma vez que nos campos suaves reversíveis não temos uma região de descontinuidade. No entanto, em ambos os casos estamos lidando com uma involução  $\phi$  cujo  $Fix(\phi) = \{(x, 0)\}$  portanto o conjunto  $Fix(\phi)$  no espaço de fase dos campos  $\mathfrak{X}^{\ominus rev}$  é levado pela identidade na região de descontinuidade  $\Sigma$  do espaço de fase dos campos em  $\mathfrak{Z}^{\ominus rev}$ .

## 4.2 Singularidades de codimensão 0 para campos em $\mathfrak{Z}^{\ominus eq}$

### 4.2.1 Pontos Regulares de $Z = (X, Y) \in \mathfrak{Z}^{\ominus eq}$

Em pontos regulares não pertencente a  $\Sigma$  podemos utilizar o teorema do fluxo tubular como no caso anterior. Novamente estudaremos somente os pontos pertencentes à curva de descontinuidade. Primeiramente consideraremos pontos regulares do campo

$Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  em  $\Sigma$ , isto é,  $(0, 0) \in \Sigma$  tal que  $Xf(0, 0) \neq 0$  e  $Yf(0, 0) \neq 0$ . Neste caso, como já foi visto  $(0, 0) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ , devemos impor que  $\pi_1(X(0, 0)) \neq 0$ , pois se  $\pi_1(X(0, 0)) = 0$  então  $(0, 0)$  é um pseudo equilíbrio de  $Z^s$ . Na proposição a seguir apresentamos uma forma normal para o campo  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  em torno de um ponto regular  $(0, 0) \in \Sigma$  com  $\pi_1(X(0, 0)) \neq 0$ .

**Proposição 4.2.1** *Seja  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , se  $(0, 0)$  é um ponto regular de  $Z$  tal que  $\pi_1(X(0, 0)) \neq 0$ , então  $(0, 0) \in \Sigma^e$  ou  $(0, 0) \in \Sigma^s$  e em uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$   $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente as respectivas formas normais,*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (a, 1) & \text{em } \Sigma^+ \\ \tilde{Y}(x, y) = (a, -1) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (a, -1) & \text{em } \Sigma^+ \\ \tilde{Y}(x, y) = (a, 1) & \text{em } \Sigma^- \end{cases},$$

definida em uma vizinhança de  $(0, 0) \in \tilde{U}$ , onde  $a = \text{sgn}(Z^s(0, 0))$ .

*Demonstração:* Consideraremos novamente os fluxos  $\varphi_X$ ,  $\varphi_Y$ ,  $\varphi_{\tilde{X}}$  e  $\varphi_{\tilde{Y}}$  de  $X$ ,  $Y$ ,  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ , respectivamente. Como  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  segue que  $(0, 0) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ , porém como  $\Sigma^e$  e  $\Sigma^s$  são disjuntos,  $(0, 0) \in \Sigma^e$  ou  $(0, 0) \in \Sigma^s$ . A seguir construiremos a  $\Sigma$ -equivalência para  $(0, 0) \in \Sigma^s$ . O caso  $(0, 0) \in \Sigma^e$  pode ser feito de forma análoga.

Como  $\pi_1(X(0, 0)) \neq 0$ , segue que a origem é um ponto regular para o campo deslizante, isto é,  $Z^s(0, 0) \neq 0$ . Observe que  $\tilde{Z}^s(x, y) = (1, 0)$  e portanto, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo  $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  que conjuga os campos  $Z^s$  e  $\tilde{Z}^s$ . Agora, tomando  $p \in \Sigma^+$ , segue pelo Teorema da Função Implícita que existe um único  $t = t(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$  e a aplicação  $p \rightarrow t(p)$  é uma aplicação contínua. Analogamente para  $p \in \Sigma^-$ . Deste modo, construímos a  $\Sigma$ -equivalência da seguinte forma:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}^t(p) = \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))) & \text{se } p \in \Sigma^+ \\ \tilde{h}(p) & \text{se } p \in \Sigma \\ \phi \circ \varphi_{\tilde{X}}^t \circ \phi(p) & \text{se } p \in \Sigma^-. \end{cases}$$

Construída desta maneira,  $h$  é uma aplicação contínua tal que  $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$ . ■

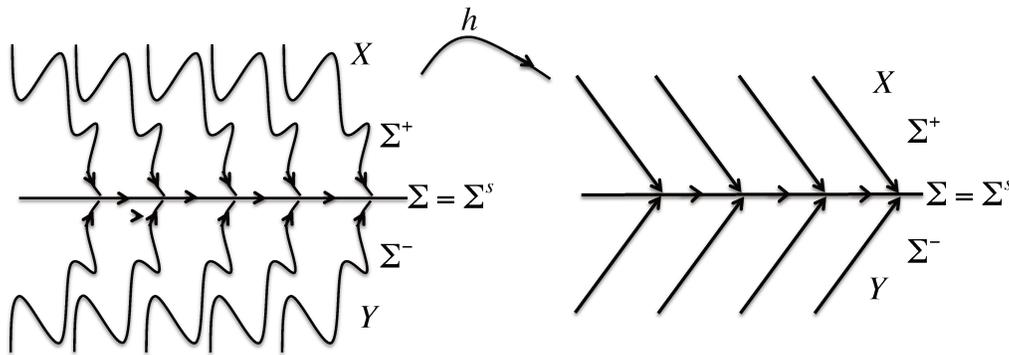


Figura 4.4: Construção do homeomorfismo  $h$  para os campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  da proposição 4.2.1

## 4.2.2 Singularidades Genéricas em $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$

Como no caso reversível, os primeiros tipos de singularidades são os pontos críticos hiperbólicos de  $X$  e  $Y$  em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ , respectivamente. É claro que em torno desses pontos podemos estudar a parte linear dos campos utilizando as formas canônicas, deste modo estudaremos somente as singularidades genéricas em  $\Sigma$ .

**Observação 4.2.2** *Lembremos que as singularidades dos campos de Filippov  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  são pontos  $p \in \Sigma^\pm$  e  $\phi(p) \in \Sigma^\mp$  tais que  $X(p) = Y(\phi(p)) = 0$  e  $Y(p) = X(\phi(p)) = 0$ , respectivamente, ou são pontos de tangência regular  $p \in \partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s$ , veja Propriedade 8 da Seção 3.2.*

Da observação anterior, temos que para o conjunto dos campos de Filippov planares equivariante  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , existem as seguintes singularidades genéricas em  $\Sigma$ , que são todas as singularidades distinguidas:

- Singularidade  $S$ -dobra elíptica em  $\partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^e$ ,
- Singularidade  $S$ -dobra hiperbólica em  $\partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^e$ ,
- Pseudo-equilíbrio hiperbólico de  $Z$ .

Na proposição que segue exibiremos a forma normal das singularidades genéricas de  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ .

**Proposição 4.2.3** *Seja  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , se  $(0, 0)$  é uma singularidade  $S$ -dobra então  $(0, 0)$  é uma singularidade  $S$ -dobra elíptica ou hiperbólica em  $\partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^e$  e em uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$ ,  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente a forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (a, abx) & \text{em } \Sigma^+ \\ \tilde{Y}(x, y) = (a, -abx) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}$$

definida numa vizinhança  $\tilde{U}$  de  $(0, 0)$ , onde  $b = \text{sgn}(X^2 f(0, 0))$ ,  $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0, 0)))$ .

*Demonstração:* Sem perda de generalidade, consideraremos o caso onde  $a = 1$  assim, resta construirmos o homeomorfismo  $h$  para  $b < 0$  e  $b > 0$ . Para garantirmos que as regiões de  $\Sigma$  serão preservadas consideraremos as trajetórias de  $X$  e  $Y$  parametrizadas pelo comprimento de arco.

Para  $b < 0$ , temos que  $(0, 0)$  é um ponto de  $S$ -dobra elíptico regular em  $\overline{\Sigma^e \cup \Sigma^s}$ , isto é,  $Z^s(0, 0) \neq 0$ . Observe que  $\tilde{Z}^s(x, y) = (1, 0)$ , então, podemos obter a  $\Sigma$ -equivalência de forma análoga ao caso dos campos equivariantes regulares.

Para  $b > 0$ , temos que  $(0, 0)$  é um ponto de  $S$ -dobra hiperbólico regular. Novamente construiremos o homeomorfismo  $h$  por partes. Como no caso reversível vamos considerar seções transversais  $\Pi_+, \Pi_-$  e  $\tilde{\Pi}_+, \tilde{\Pi}_-$ , que são transversais em  $(0, 0)$  aos campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$ , respectivamente.

Vamos supor que  $U = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$ , onde  $A$  é a região a esquerda da curva  $W_+^s(0, 0) \cup (0, 0) \cup W_-^u(0, 0)$ ,  $B$  é a região a direita da curva  $W_+^u(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_-^s(0, 0)$ ,  $C$  a região acima de  $W_+^s(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_+^u(0, 0)$  e  $D$  a região abaixo  $W_-^s(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_-^u(0, 0)$ .

Para  $p \in \overline{C} \setminus \{(0, 0)\}$  a construção é análoga a do caso reversível. Pela simetria obtemos a  $\Sigma$ -equivalência para  $p \in \overline{D} \setminus \{(0, 0)\}$ . Notemos que a origem é uma  $S$ -dobra hiperbólica regular, isto é,  $Z^s(0, 0) \neq 0$ , além disso observe que  $\tilde{Z}^s(x, y) = (1, 0)$ , portanto, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo  $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  que conjuga os campos  $Z^s$  e  $\tilde{Z}^s$ , assim para  $p \in \Sigma = \overline{\Sigma^e \cup \Sigma^s}$  definimos a  $\Sigma$  equivalência  $h(p) = \tilde{h}(p)$ . Por fim, para pontos das regiões  $A \cap \Sigma^+$  e  $B \cap \Sigma^+$  procedemos como no caso  $\ominus$ -equivariante regular. Pela simetria obtemos a  $\Sigma$ -equivalência nas regiões

$A \cap \Sigma^-$  e  $B \cap \Sigma^-$ . Assim concluímos a construção do homeomorfismo  $h$  que fornece uma  $\Sigma$ -equivalência entre  $Z$  e  $\tilde{Z}$ . ■

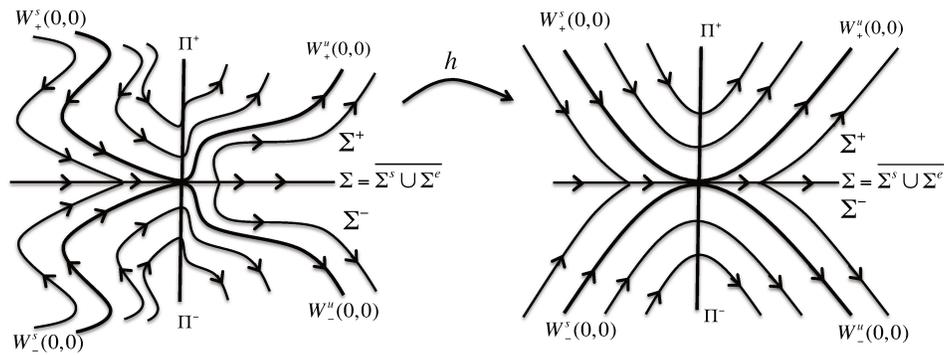


Figura 4.5: Construção do homeomorfismo  $h$  para os campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  da proposição 4.2.3.

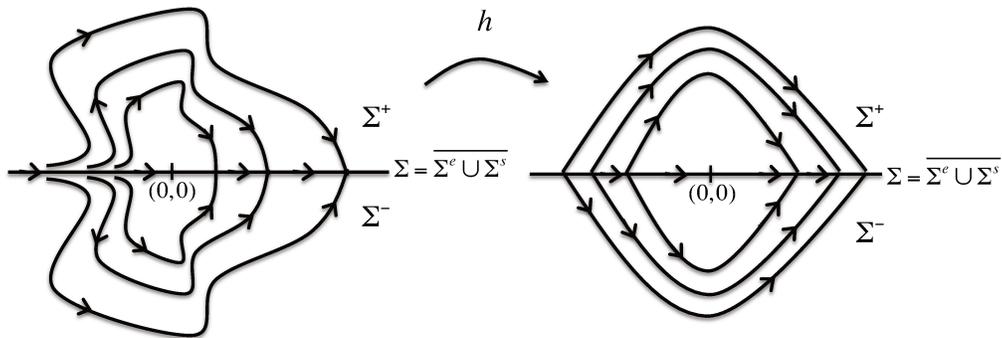


Figura 4.6: Construção do homeomorfismo  $h$  para os campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  da proposição 4.2.3.

**Proposição 4.2.4** *Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , se  $(0, 0)$  é um pseudo-equilíbrio hiperbólico de  $Z$ , então em uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$ ,  $Z$  é  $\Sigma$ -equivalente a forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (ax, b) & \text{em } \Sigma^+, \\ \tilde{Y}(x, y) = (ax, -b) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}$$

definida numa vizinhança  $\tilde{U}$  de  $(0, 0)$ , onde  $b = \text{sgn}(X^f(0, 0))$ ,  $\bar{\text{sgn}}((Z^s)t(0, 0))$ .

*Demonstração:* Observemos primeiramente que  $\tilde{Z}^s(x) = ax$  e portanto a origem é um ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante de  $\tilde{Z}$  e sua estabilidade depende do valor de  $a$ . Deste modo, pelo Teorema de Hartman-Grobman, existe um homeomorfismo  $\tilde{h}$  que conjuga os campos deslizantes  $Z^s$  e  $\tilde{Z}^s$ . Como ambos os campos são transversais a  $\Sigma$  em uma vizinhança da origem, temos que para cada  $p \in \Sigma^+$ , existe um único  $t = t(p) \in \mathbb{R}$  para o qual  $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ . Analogamente para  $p \in \Sigma^-$ . Deste modo, podemos definir a  $\Sigma$ -equivalência  $h$  como já foi feito anteriormente. ■

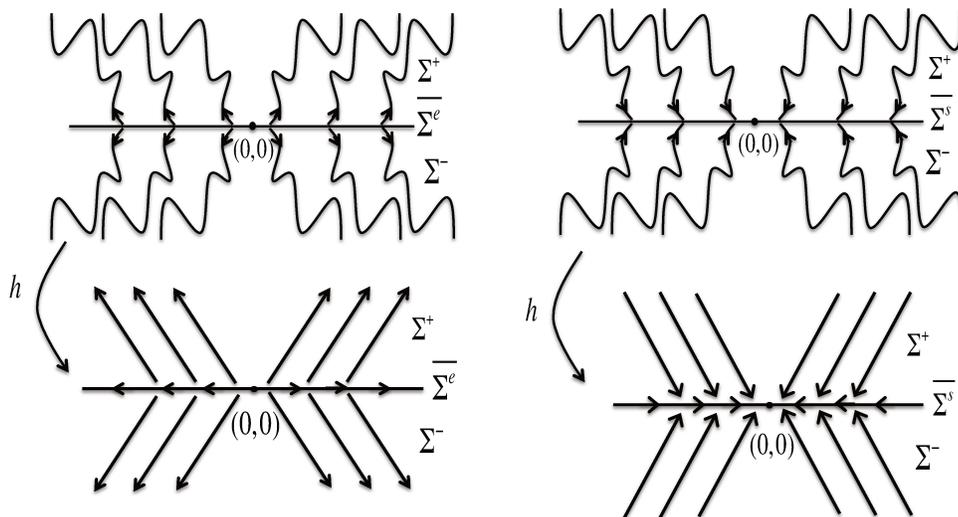


Figura 4.7: Construção do homeomorfismo  $h$  para os campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  da proposição 4.2.4.

Agora que já caracterizamos os pontos regulares e singularidades genéricas de um campo  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , podemos utilizar um raciocínio parecido com o que foi utilizado na seção anterior para obtermos seguinte resultado:

**Teorema 4.2.5** *Seja  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  definido em uma vizinhança da origem. Temos que  $(0, 0) \in \Sigma$  é um ponto regular em  $\Sigma^e \cup \Sigma^s$  ou uma singularidade genérica de  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  se, e somente se,  $Z_0$  é localmente estruturalmente estável e localmente  $\Sigma$ -estruturalmente estável.*

**Observação 4.2.6** No capítulo 7 consideraremos uma involução  $\phi$  tal que  $\dim(\text{Fix}(\phi)) = 0$ . Denotaremos os espaços dos campos de Filippov reversíveis e equivariantes para esta involução por  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , respectivamente. Então, faremos uma pré classificação das singularidades de codimensão 0 e 1 em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  e  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ .



# Capítulo 5

## Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Um

A discussão inicial deste capítulo pode ser feita de forma análoga para os campos de Filippov com as simetrias discutidas no capítulo anterior, sendo assim, por abuso de notação utilizaremos  $\otimes$  representando qualquer uma das simetrias  $\ominus rev$ ,  $\ominus eq$ ,  $\odot rev$  e  $\odot eq$ , fixada a priori. No capítulo anterior descrevemos o conjunto  $\Sigma_0^\otimes \in \mathcal{Z}^\otimes$ , formado pelos campos  $Z \in \mathcal{Z}^\otimes$  que são estruturalmente estáveis, mostramos ainda que este conjunto é aberto e denso em  $\mathcal{Z}^\otimes$ , donde segue que estabilidade estrutural é uma propriedade genérica dos Sistemas Planares de Filippov Reversíveis e de Sistemas Planares de Filippov Equivariantes. Este capítulo tem como objetivo descrever o conjunto de bifurcações genéricas de codimensão um para estes sistemas. Consideremos o conjunto  $\mathcal{Z}_1^\otimes = \mathcal{Z}^\otimes \setminus \Sigma_0^\otimes$ , e seja  $\Sigma_1^\otimes \subset \mathcal{Z}_1^\otimes$  o conjunto de todos os campos estruturalmente estáveis relativo a  $\mathcal{Z}_1^\otimes$ , ou seja, os campos  $Z_0 \in \Sigma_1^\otimes$  para os quais existe uma vizinhança  $V_{Z_0} \subset \Sigma_1^\otimes$  de modo que se  $Z \in V_{Z_0}$  então  $Z_0$  e  $Z$  são “equivalentes”.

### 5.1 Bifurcações de Codimensão $k$

Após obtermos a caracterização do conjunto  $\Sigma_0^\otimes \subset \mathcal{Z}^\otimes$  espera-se idealmente obter uma sequência de subconjuntos de  $\mathcal{Z}^\otimes$  de modo que  $\mathcal{Z}_k^\otimes = \mathcal{Z}_{k-1}^\otimes \setminus \Sigma_{k-1}^\otimes$ , onde  $\mathcal{Z}_0^\otimes = \mathcal{Z}^\otimes$  e  $\Sigma_k$

é o conjunto dos campos estruturalmente estáveis com relação à topologia induzida de  $\mathcal{Z}_k^\otimes$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Para estabelecermos de forma rigorosa a noção de estabilidade estrutural em  $\mathcal{Z}_k^\otimes$  necessitaremos de algumas definições que envolvem desdobramentos de um campo  $Z \in \mathcal{Z}^\otimes$

**Definição 5.1.1** *Dado  $Z_0 \in \mathcal{Z}^\otimes$ , um desdobramento de  $Z_0$  é uma aplicação  $\xi: \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{Z}_1^\otimes$  de classe  $\mathcal{C}^1$  para a qual  $\xi(0) = Z_0$ . Se para todo valor de  $\alpha$  os campos  $Z_\alpha$  são  $\Sigma$ -equivalente à  $Z_0$ , diremos que 0 é um valor regular para o desdobramento, caso contrário diremos que 0 é um valor de bifurcação.*

Observe que  $0 \in \mathbb{R}^d$  é um valor regular para qualquer desdobramento  $\xi$  de  $Z_0$  se, e somente se,  $Z_0 \in \Sigma_0^\otimes$ . Assim, se  $Z_0 \in \mathcal{Z}_1^\otimes$ , existe pelo menos um desdobramento para o qual  $0 \in \mathbb{R}^d$  para algum  $d \in \mathbb{N}$  é um valor de bifurcação. Por este motivo, nas próximas definições, consideraremos somente  $Z_0 \in \mathcal{Z}_1^\otimes$ . Consideraremos  $\mathcal{H}(U)$  o espaço dos homeomorfismos definidos em  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definição 5.1.2** *Dois desdobramentos  $\xi$  e  $\psi$  de  $Z \in \mathcal{Z}_1^\otimes$  são ditos equivalentes se existe um homomorfismo  $h: \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{H}(U)$ , com  $h(0) = 0$ , tal que para cada  $\alpha$  temos que  $h(\alpha)$  é um homeomorfismo que dá uma  $\Sigma$ -equivalência (ou equivalência topológica) entre os campos  $\xi(\alpha)$  e  $\psi(\alpha)$ .*

**Definição 5.1.3** *Um desdobramento  $\psi$  de  $Z \in \mathcal{Z}_1^\otimes$  é dito induzido pelo desdobramento  $\xi$  se existe um germe de aplicação contínua  $\zeta$ , com  $\alpha = \zeta(\mu)$ , tal que  $\psi(\mu) = \xi(\zeta(\mu))$ .*

**Definição 5.1.4** *Um desdobramento é dito universal de  $Z \in \mathcal{Z}_1^\otimes$  se para todo desdobramento de  $\psi$  de  $Z$  temos que  $\xi$  é equivalente à um desdobramento induzido por  $\psi$ .*

Podemos olhar o conjunto  $\mathcal{Z}^\otimes$  como uma variedade modelada em um espaço de Banach visto que o próprio conjunto  $\mathcal{Z}^\otimes$  é um espaço de Banach. Assim, se considerarmos uma subvariedade  $\nu \subset \mathcal{Z}^\otimes$ , dados  $Z_0 \in \nu$  e um desdobramento  $\xi$  de  $Z_0$ , podemos estabelecer a noção de transversalidade entre a subvariedade  $\nu$  e o desdobramento  $\xi$  no ponto  $Z_0$ .

Nestas considerações e notações temos a seguinte definição.

**Definição 5.1.5** Diremos que um desdobramento  $\xi$  é transversal à subvariedade  $\nu \subset \mathcal{Z}^\otimes$  no ponto  $Z_0$  se  $T_{Z_0}\mathcal{Z}^\otimes = D\xi(Z_0) \oplus T_{Z_0}\nu$ .

**Definição 5.1.6** Diremos que um desdobramento  $\xi$  de  $Z_0 \in \nu$  é um desdobramento versal de  $Z_0$  se ele é um desdobramento universal de  $Z_0$  e é transversal a  $\nu$  em  $Z_0$ .

Com esses elementos, estamos aptos a definir o conjunto  $\Sigma_k^\otimes$  formado pelos campos  $Z \in \mathcal{Z}^\otimes$  que são estruturalmente estáveis com relação a topologia induzida de  $\mathcal{Z}^\otimes$  em  $\mathcal{Z}_k^\otimes$ . Diremos que  $\Sigma_k^\otimes$  é o conjunto das bifurcações genéricas de codimensão  $k$  dos sistemas planares de Filippov.

**Definição 5.1.7** Dado  $Z_0 \in \mathcal{Z}_k^\otimes$ , diremos que  $Z_0 \in \Sigma_k^\otimes$  se

1. Existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $Z_0$  em  $\mathcal{Z}^\otimes$  e um desdobramento  $\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{U}$  que é um desdobramento versal para  $Z_0$ .
2. Nenhum outro desdobramento  $\rho : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathcal{U}$  é um desdobramento versal para  $Z_0$ .
3. Dados  $Z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{Z}_k^\otimes$  e um desdobramento versal  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{U}$  para  $Z$ , temos que  $\xi$  e  $\psi$  são  $\mathcal{C}^0$ -equivalentes, isto é, existe um homomorfismo  $h : \mathcal{B}(0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{B}(0, \epsilon)$  com  $h(0) = 0$  e uma família de homeomorfismos  $H : \mathcal{B}(0, \epsilon) \rightarrow H(\mathcal{U})$  para o qual,  $\forall \lambda \in \mathcal{B}(0, \epsilon)$ ,  $H(\lambda)$  é uma  $\Sigma$ -equivalência entre  $\xi(\lambda)$  e  $\psi(h(\lambda))$ .

Podemos escrever  $\Sigma_k^\otimes$  como a união de classes de equivalência e, para cada uma dessas classes, podemos tomar uma “forma normal”  $Z_0$  escolhendo um desdobramento versal  $\xi_0$  mais simples possível para o qual  $\xi_0(0) = Z_0$ . Deste modo, estamos em condições de exibir o diagrama de bifurcação de  $Z_0 \in \Sigma_k^\otimes$ . Assim, variando a escolha de  $Z_0$  e de  $\xi_0$ , podemos descrever todos os comportamentos genéricos que aparecem em  $\Sigma_k^\otimes$ .

É possível mostrar que  $\Sigma_k^\otimes \subset \mathcal{Z}^\otimes$  é de fato, uma subvariedade de codimensão  $k$  de  $\mathcal{Z}^\otimes$ , ou seja, para cada  $Z \in \Sigma_k^\otimes$  existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_Z \subset \mathcal{Z}^\otimes$  e uma aplicação  $L : \mathcal{V}_Z \rightarrow \mathbb{R}^k$  não nula que satisfaz:

- $\mathcal{V}_Z \cap \Sigma_k^\otimes = L^{-1}\{0\}$ ,
- a diferencial  $DL(Z) : \mathcal{Z}^\otimes \longrightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação sobrejetiva.

Graças a Definição 5.1.7, estamos aptos a buscar uma caracterização de  $\Sigma_1^\otimes \subset \mathcal{Z}_1^\otimes$ . Dado  $Z_0 \in \mathcal{Z}_1^\otimes$  é relativamente simples detectar se um desdobramento é um desdobramento versal para  $Z_0$ . A maior dificuldade, porém, situa-se em mostrar que a família de homeomorfismos  $H$  varia continuamente com relação ao parâmetro. Deste modo, nas seções subsequentes faremos uma classificação de  $\Sigma_1^\otimes$ . Entretanto, a Definição 5.1.7 será bastante utilizada quando estivermos buscando alguns contra-exemplos para justificar a necessidade de impor determinadas condições genéricas.

Neste contexto, somente  $\Sigma$ -equivalência ou equivalência topológica entre dois campos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  não são suficientes para garantir que os desdobramentos versais destes campos se comportem de maneira semelhante. Tomemos, por exemplo, as famílias de campos

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (y + \alpha, -x), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (y - \alpha, -x), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (5.1)$$

$$\tilde{Z}_\beta(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_\beta(x, y) = (x + 4y + \beta, -4x + y), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ \tilde{Y}_\beta(x, y) = (-x + 4y - \beta, -4x - y), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}. \quad (5.2)$$

Notemos primeiramente que esses campos são simétricos pela descontinuidade, em particular esses campos são  $\ominus$ -equivariantes. Neste caso, a origem é um ponto crítico do tipo centro para  $Z_0$  e um foco para  $\tilde{Z}_0$  utilizando técnicas semelhantes às do capítulo 4. Porém, quando  $\alpha, \beta < 0$ , estes campos não podem ser  $\Sigma$ -equivalentes, já que não conseguiremos conjugar os campos  $X_\alpha$  e  $\tilde{X}_\beta$ , devido ao tipo dos pontos críticos de cada campo. Ilustramos nas Figuras 5.1 e 5.2 os retratos de fase de  $Z_\alpha$  e  $\tilde{Z}_\beta$  para diferentes valores do parâmetro.

Recordemos que o objetivo inicial deste capítulo é descrever, a menos de classes de equivalência, o conjunto  $\Sigma_1^\otimes$ . Isto é, queremos caracterizar os conjuntos  $\Sigma_1^{\ominus rev}$ ,  $\Sigma_1^{\ominus eq}$ .

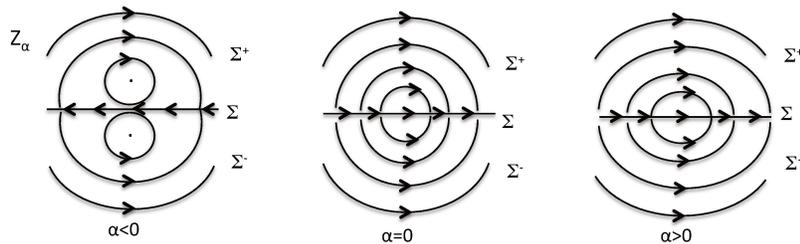


Figura 5.1: Retratos de fase do campo  $Z_\alpha$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

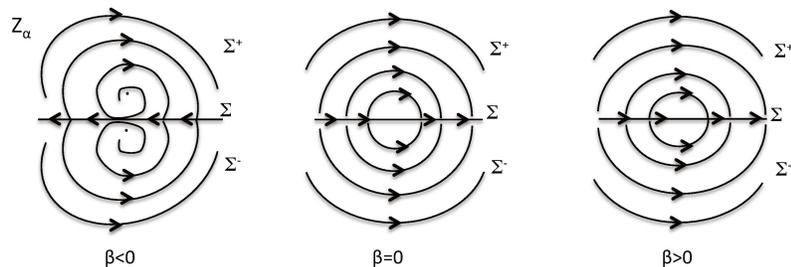


Figura 5.2: Retratos de fase do campo  $Z_\beta$  para diferentes valores de  $\beta$ .

Vamos considerar primeiramente os campos  $Z \in \mathcal{Z}_1^{\ominus rev}$  para os quais:

1.  $(0, 0)$  é uma  $S$ -cúspide para  $Z$  em  $\partial\Sigma^c$ , isto é,  $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = X^2f(0, 0) = Y^2f(0, 0) = 0$  e  $X^3f(0, 0) \neq 0, Y^3f(0, 0) \neq 0$  com  $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) < 0$ ;
2.  $(0, 0)$  é ponto de equilíbrio hiperbólico para  $X$  ou  $Y$  em  $\partial\Sigma^c$ .

Na seção 5.2 estudamos o conjunto  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  via a correlação existente entre  $Z$  e  $F(Z)$  apresentada anteriormente.

Posteriormente consideraremos os campo  $Z \in \mathcal{Z}_1^{\ominus eq}$  para os quais:

1.  $(0, 0)$  é uma  $S$ -cúspide para  $Z$  em  $\overline{\Sigma^e \cup \Sigma^s}$ , isto é,  $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = X^2f(0, 0) = Y^2f(0, 0) = 0$  e  $X^3f(0, 0) \neq 0, Y^3f(0, 0) \neq 0$  com  $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) > 0$ ;

2.  $(0, 0)$  é ponto de equilíbrio hiperbólico para  $X$  ou  $Y$  em  $\overline{\Sigma^e \cup \Sigma^s}$ .
3.  $(0, 0)$  é uma  $S$ -sela-nó em  $\Sigma^e \cup \Sigma^s$  para  $Z^s$ , ou seja  $Xf(0, 0) \neq 0 \neq Yf(0, 0)$  e  $Z^s(0, 0) = (Z^s)'(0, 0) = 0$  e  $(Z^s)''(0, 0) \neq 0$ .

Porém, nem todos campos  $Z \in \mathcal{Z}_1^{\ominus eq}$ , para os quais  $(0, 0) \in \Sigma$  é de algum dos tipos acima, é estruturalmente estável com relação a  $Z \in \mathcal{Z}_1^{\ominus eq}$ , ou seja pertencem à  $\Sigma_1^{\ominus eq}$ . Na seção 5.3 iremos analisar cada um desses itens separadamente para compreender quais condições genéricas devem ser exigidas para que obtenhamos o resultado desejado. O estudo de cada singularidade será dividido em duas etapas, primeiramente analisaremos a necessidade de impor condições genéricas a fim de garantir sua estabilidade estrutural em  $\mathcal{Z}_1^{\ominus eq}$  e posteriormente apresentamos os desdobramentos genéricos que aparecem em cada um dos casos.

## 5.2 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão

### Um em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$

A classificação das singularidades de codimensão um para sistemas de Filippov reversível apresentada nesta seção será desenvolvida seguindo a correlação entre  $Z$  e  $F(Z)$  apresentada anteriormente. Em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  defina o subconjunto  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  da seguinte forma: “ $Z \in \Sigma_1^{\ominus rev}$  se a origem é uma singularidade genérica de codimensão um do correspondente campo  $F = F(Z)$  em  $\mathcal{X}$ ”. Deste modo  $Z \in \Sigma_1^{\ominus rev}$  se, e somente se  $F = F(Z) \in \chi_1$ . O próximo lema decorre da definição de  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  e dos resultados apresentados na seção 2.1.

**Lema 5.2.1**  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  é aberto e denso em  $\mathcal{Z}_1^{\ominus rev}$ . Além disso  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  é uma subvariedade de codimensão um de  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ .

O resultado a seguir descreve o conjunto de bifurcações genéricas de codimensão um para os campos de Filippov reversíveis, este resultado é uma consequência da discussão anterior e da construção apresentada na Seção 3.1, juntamente com as observações e os lemas da Seção 2.1.

**Teorema 5.2.2** (i)  $Z$  (em  $\mathcal{Z}_1^{\ominus rev}$ ) é estruturalmente estável relativo a  $\mathcal{Z}_1^{\ominus rev}$  se, e somente se,  $F(Z)$  é estruturalmente estável relativo a  $\chi_1$ ; (ii)  $Z$  é estruturalmente estável relativo a  $\mathcal{Z}_1^{\ominus rev}$  se, e somente se,  $Z \in \Sigma_1^{\ominus rev}$ ; (iii) As formas normais de qualquer família a um parâmetro de campos de Filippov em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  passando por  $Z_0 \in \Sigma_1^{\ominus rev}$  e transversal a  $\Sigma_1^{\ominus rev}$  são:

(1) Todas formas normais dos campos de Filippov  $\Sigma^{\ominus rev}$ -estruturalmente estável, veja seção 4.1.

(2)  $Z_0$  possui uma  $S$ -cúspide em  $\partial\Sigma^c$ ;

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, \alpha + x^2), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (-1, \alpha + x^2), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (5.3)$$

(3)  $Z_0$  possui um  $S$ -nó em  $\partial\Sigma^c$ ;

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (ax, x + by + \alpha), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (-ax, x - by + \alpha), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (5.4)$$

com  $a = 1, b = 2$  (ou  $a = -1, b = -2$ ).

(4)  $Z_0$  possui uma  $S$ -sela em  $\partial\Sigma^c$ ;

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (x, x - y + \alpha), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (-x, x + y + \alpha), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (5.5)$$

(5)  $Z_0$  possui um  $S$ -foco em  $\partial\Sigma^c$ ;

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (x + y, -x + y + \alpha), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (-x + y, -x - y + \alpha), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}. \quad (5.6)$$

Agora que já estabelecemos uma proposição que classifica os campos  $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{\ominus rev}$  para os quais  $(0, 0) \in \partial\Sigma^c$  é uma singularidade genérica, é interessante estudar os desdobramentos genéricos destes campos. A seguir apresentamos estes desdobramentos.

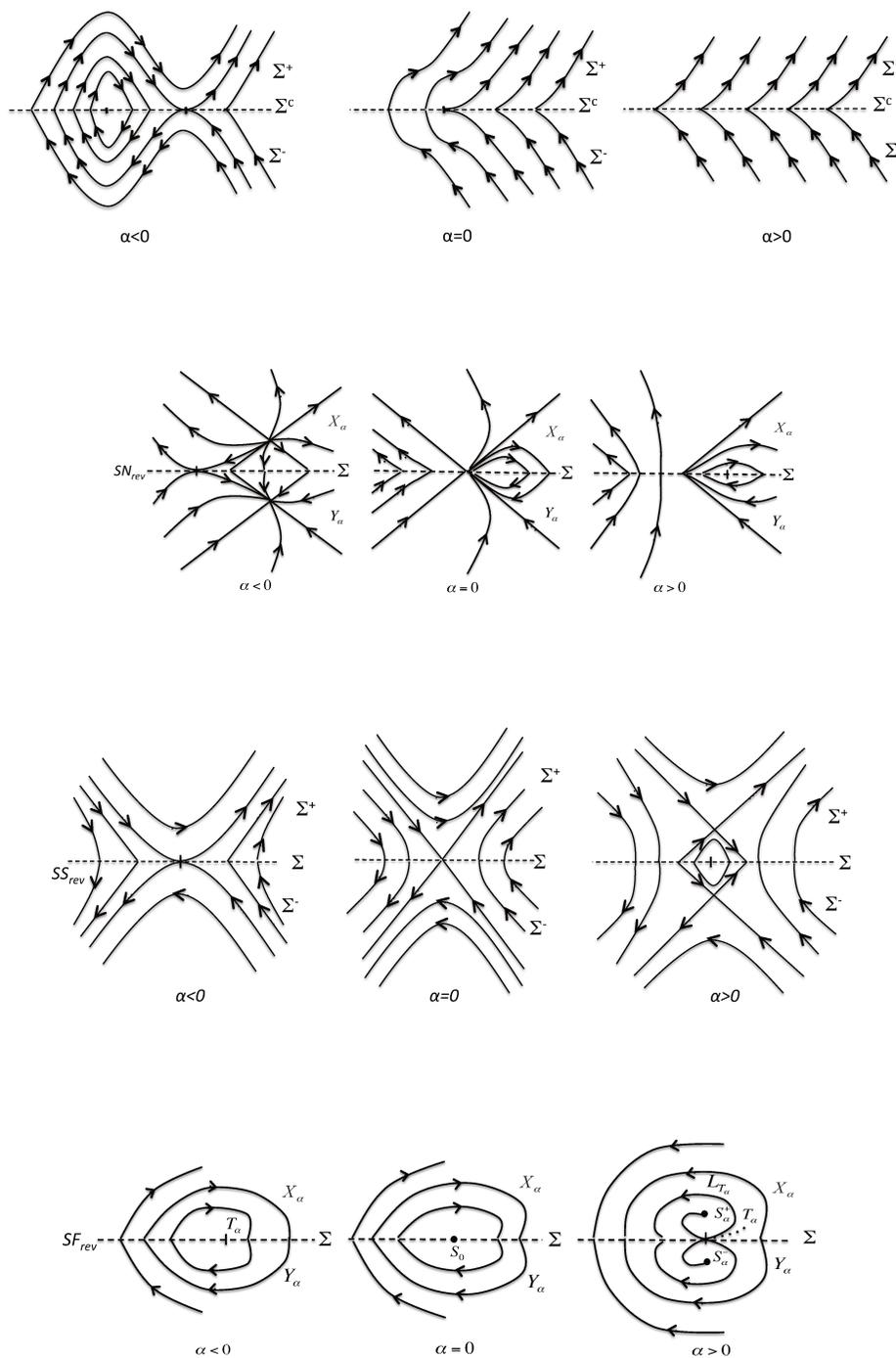


Figura 5.3: Desdobramentos genéricos das singularidades de codimensão um em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$

## 5.3 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão

### Um em $Z^{\ominus eq}$

Neste caso, o fato de  $\Sigma = \overline{\Sigma^e \cup \Sigma^s}$  além de possibilitar a existência de pseudo-equilíbrio de  $Z$ , possibilita a existência de bifurcações de codimensão um do tipo  $S$ -sela-nó, bem como algumas bifurcações globais de codimensão um que devem ser evitadas para obtermos as bifurcações locais de codimensão um.

Sendo assim nesta seção estudaremos separadamente as bifurcações de codimensão um.

#### 5.3.1 Bifurcação $S$ -Cúspide

Seja  $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{\ominus eq}$  e suponhamos que  $(0, 0) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  seja uma  $S$ -cúspide para  $Z$ , isto é,  $Xf(0, 0) = X^2f(0, 0) = Yf(0, 0) = Y^2f(0, 0) = 0$  e  $X^3f(0, 0) \neq 0 \neq Y^3f(0, 0)$  e  $\pi_1(X(0, 0)) \cdot \pi_1(Y(0, 0)) > 0$ .

Tomemos a expansão de Taylor do campo  $X$  até ordem  $k$ ,

$$X(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left( \sum a_{ij}^X x^i y^j, \sum b_{ij}^X x^i y^j \right).$$

Utilizando as condições para que a origem seja uma cúspide para  $X$  obtemos:

1.  $Xf(0, 0) = \langle X(0, 0), \nabla f(0, 0) \rangle = 0 \longrightarrow b_{00} = 0$ ,
2.  $X^2f(0, 0) = \langle X(0, 0), \nabla Xf(0, 0) \rangle = 0 \longrightarrow a_{00}b_{10} = 0$ ,
3.  $X^3f(0, 0) = \langle X(0, 0), \nabla X^2f(0, 0) \rangle \neq 0 \longrightarrow a_{00}b_{20} \neq 0$ .

assim concluímos que os termos  $b_{00} = b_{10} = 0$  e  $a_{00} \neq 0 \neq b_{20}$ , logo podemos supor, sem perda de generalidade, que o campo  $X$  é da forma

$$X(x, y) = (a_{00}, b_{20}x^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^3)).$$

Como  $a_{00} \neq 0$  podemos simplificar ainda mais o campo  $X$  reescalando o tempo em  $X$ . Da construção apresentada na Seção 3.1, segue que

$$Z = \begin{cases} X = (a, bx^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^3)) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y = (a, -bx^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^3)) & \text{em } \Sigma^-, \end{cases}$$

onde  $a = \pm 1$  e  $b \neq 0$ .

Assim temos o campo deslizando dado por,

$$Z^s(x, y) = a + \mathcal{O}(|(x, y)|^3)$$

Podemos então enunciar o seguinte resultado.

**Proposição 5.3.1** *Seja  $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{\ominus eq}$  para o qual  $(0, 0) \in \Sigma$  é uma cúspide de  $X$ , então  $(0, 0)$  é uma  $S$ -cúspide em  $\partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s$  e o desdobramento versal de  $Z$  é  $C^0$ -equivalente ao desdobramento versal do campo  $Z_0$  dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (a, bx^2 + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (a, -bx^2 - \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}$$

onde  $a = \text{sgn}(a_{00})$ ,  $b = \text{sgn}(b_{20})$  e com  $a_{00}$  e  $b_{20}$  os coeficientes da expansão de Taylor em torno da origem de  $X$ .

Agora que já estabelecemos uma proposição que classifica os campos  $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{\ominus eq}$  para os quais  $(0, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  é uma  $S$ -cúspide, estudaremos os desdobramentos genéricos destes campos.

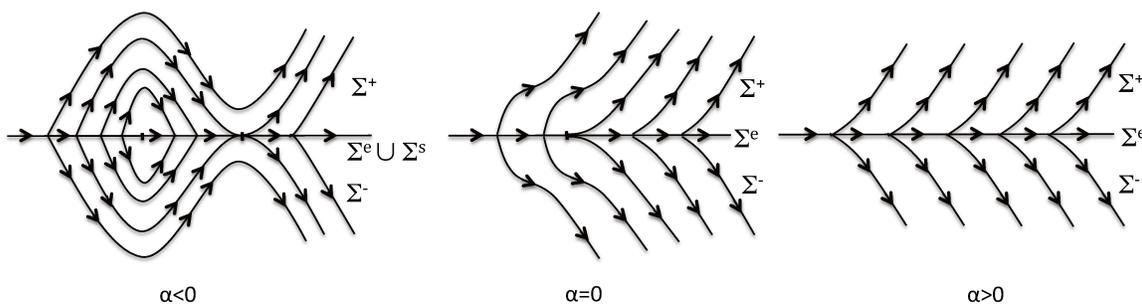


Figura 5.4: Desdobramento genérico de uma  $S$ -cúspide de  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ .

Como podemos observar na figura 5.4, para  $\alpha < 0$  temos o surgimento de duas singularidade do tipo  $S$ -dobra, sendo uma hiperbólica e a outra elíptica, separadas

por uma região de deslize. Como visto anteriormente singularidades do tipo  $S$ -dobra hiperbólica ou elíptica em  $\overline{\Sigma^e \cup \Sigma^s}$  são de codimensão 0. À medida que aumentamos o valor parâmetro  $\alpha$  a  $S$ -dobra hiperbólica aproxima-se da  $S$ -dobra elíptica, colapsando em  $\alpha = 0$  em um único ponto do tipo  $S$ -cúspide pertencente a uma região de escape e para  $\alpha > 0$ , estas tangências desaparecem e todas trajetórias de  $X$  e  $Y$  interceptam  $\Sigma$  transversalmente e temos somente pontos regulares para campo deslizante e  $\Sigma = \Sigma^e$ .

### 5.3.2 Bifurcação $S$ -Sela-Nó

Seja  $Z = (X, Y) \in \Sigma$  para o qual  $Xf(0, 0) \neq 0 \neq Yf(0, 0)$  e  $Z^s(0, 0) = (Z^s)'(0, 0) = 0$  mas  $(Z^s)''(0, 0) \neq 0$ , ou seja, em uma vizinhança da origem não existem tangências mas  $(0, 0) \in \Sigma$  é uma sela-nó para o campo deslizante. Para esta bifurcação, temos duas possibilidades:  $\Sigma = \Sigma^e$  e  $\Sigma = \Sigma^s$ , porém, ambas apresentam o mesmo comportamento genérico, a colisão de dois pontos de equilíbrio hiperbólicos, como visto anteriormente este pontos são singularidades de codimensão 0, formando um ponto de equilíbrio não hiperbólico. Podemos classificar este comportamento através da proposição abaixo.

**Proposição 5.3.2** *Seja  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  para o qual a origem é uma singularidade do tipo  $S$ -sela-nó para o campo deslizante  $Z^s$ . Então o desdobramento versal de  $Z$  é  $C^0$ -equivalente ao desdobramento versal do campo  $Z_0$  dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (ax^2 + \alpha, b) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y_\alpha(x, y) = (ax^2 + \alpha, -b) & \text{em } \Sigma^-, \end{cases}$$

onde  $a = \text{sgn}(Z^s)''(0)$  e  $b = \text{sgn}(Xf(0, 0))$ .

Neste caso, temos somente um comportamento genérico, que é ilustrado na Figura 5.5, tomando  $a = b = 1$ .

Consideremos  $Z = (X, Y) \in \Sigma$  e suponhamos que  $(0, 0) \in \Sigma$  seja um ponto de equilíbrio hiperbólico para  $X$ , ou seja, se  $\lambda_1$  é um autovalor de  $DX(0, 0)$  então  $\text{Re}\lambda_1 \neq 0$ . Como já foi discutido temos que  $(0, 0)$  também é um ponto de equilíbrio hiperbólico

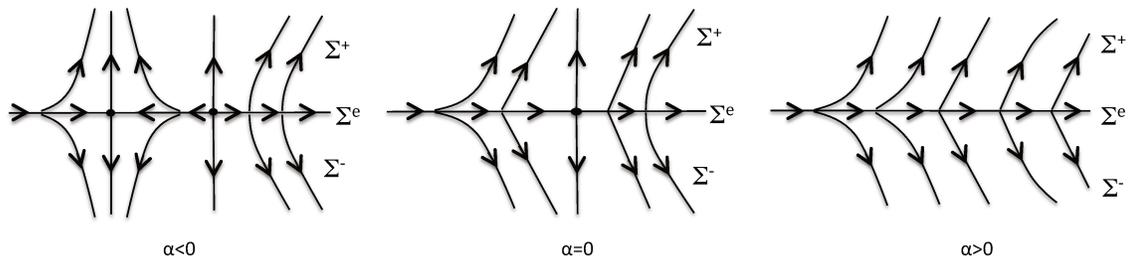


Figura 5.5: Bifurcação  $S$ -Sela-Nó.

de  $Y$ , isto é, se  $\lambda_2$  é um autovalor de  $DY(0,0)$  então  $Re\lambda_2 \neq 0$ . Com isso origem pode ser uma singularidade do tipo  $S$ -nó,  $S$ -sela ou  $S$ -foco em  $\overline{\Sigma^s \cup \Sigma^e}$ . Estudaremos cada uma destas situações separadamente. Posteriormente estudaremos as bifurcações globais de codimensão um que ocorrem para campos em  $Z^{\ominus eq}$ .

### 5.3.3 S-equilíbrio Hiperbólico

Considere  $Z = (X, Y)$  e suponhamos que  $(0,0) \in \Sigma$  seja um ponto de equilíbrio hiperbólico para  $X$ , ou seja, se  $\lambda$  é um autovalor de  $DX(0,0)$ , então  $Re(\lambda) \neq 0$ . Assim, a origem pode ser um nó, uma singularidade tipo sela ou foco. Estudaremos cada uma destas situações separadamente. Podemos estudar o caso em que a origem é um ponto de equilíbrio hiperbólico para  $Y$  de maneira análoga.

### 5.3.4 Bifurcação S-Nó

Nesta situação, devemos impor condições genéricas muito parecidas com o caso anterior, como exigir que a constante  $\beta$  do campo deslizante  $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$  seja não nula, então sempre teremos o campo deslizante definido. Porém, devemos evitar o aparecimento de nós degenerados, isto é, casos em que as matrizes  $DX(0,0)$  e  $DY(0,0)$  possuam apenas um autovalor, pois esta situação acarretará bifurcações mais degeneradas. Ilustremos esta situação através de um exemplo.

**Exemplo 5.3.3** Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , onde  $X(x, y) = (x, x + y)$  e  $Y(x, y) = (x, -x + y)$ . Tomemos  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$  e  $\tilde{Z} = (\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha)$  desdobramentos de  $Z$ , dados por

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = ((1 + \alpha)x, x + y) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (1 + \alpha)x, -x + y & \text{em } \Sigma^- \end{cases} .$$

$$\tilde{Z}_\alpha(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_\alpha(x, y) = (x, x + y - \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ \tilde{Y}_\alpha(x, y) = (x, -x + y + \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} .$$

Na Figura 5.6, podemos ver os retratos de fase destes desdobramentos para os diferentes valores de  $\alpha$ . Quando  $\alpha \neq 0$ , temos que  $(0, 0) \in \Sigma$  é um nó hiperbólico para o campo  $Z_\alpha$ , possuindo dois autovalores distintos. Quando  $\alpha < 0$ , os nós hiperbólicos  $(0, -\alpha) \in \Sigma^-$  e  $(0, \alpha) \in \Sigma^+$  são singularidades não admissíveis dos campos  $\tilde{X}_\alpha$  e  $\tilde{Y}_\alpha$  respectivamente, isto é, são singularidades não admissíveis do campo  $\tilde{Z}_\alpha$ . Para  $\alpha > 0$ , temos um ponto crítico admissível em  $\Sigma^+$ , e um outro ponto crítico admissível em  $\Sigma^-$ . Além disso a origem é um ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante  $\tilde{Z}_\alpha^s$ . Deste modo, é fácil concluir que estes desdobramentos não podem ser  $\mathcal{C}^0$ -equivalentes e portanto temos uma bifurcação de codimensão maior que um.

Uma das condições genéricas que deve ser imposta é que  $DX(0, 0)$  (consequentemente  $DY(0, 0)$ ) possua dois autovalores distintos. Como consequência, a origem como ponto crítico de  $X$  terá dois auto-espacos que são tangentes a suas variedades fracas e fortes. É importante observar que, em sistemas dinâmicos suaves, tais variedades não precisam ser preservadas por  $\mathcal{C}^0$ -equivalências, porém em Sistemas de Filippov reversíveis e equivariantes deverão ser preservadas, pois  $\Sigma$ -equivalências e equivalências topológicas devem preservar as regiões de  $\Sigma$ .

Uma última questão que deve ser observada é que, se  $\pi_1(X(0, 0)) = 0$  então  $\pi_1(Y(0, 0)) = 0$  e consequentemente teremos a conexão de duas singularidades admissíveis do tipo nó com o pseudo-equilíbrio hiperbólico do campo deslizante (pseudo-sela não hiperbólica), acontecendo uma bifurcação de codimensão maior que um.

Exemplificaremos esta situação a seguir.

**Exemplo 5.3.4** Consideremos a família a um parâmetro  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  dada por

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} (x, -x + 4y - 4\alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ (x, x + 4y + 4\alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}.$$

Para  $\alpha = 0$ , a origem é um  $S$ -Nó instável para o campo  $Z$  e é fácil ver que o auto-espaço forte associado ao ponto crítico de  $X$  é paralelo ao auto-espaço forte associado ao ponto crítico de  $Y$ . Observe que, para valores de  $\alpha > 0$ ,  $(0, 0) \in \Sigma$  é uma pseudo-sela para o campo deslizante  $Z_\alpha^s$  e  $(0, \alpha) \in \Sigma^+$ ,  $(0, -\alpha) \in \Sigma^-$  são nós instáveis para os campos  $X$  e  $Y$  respectivamente. Como podemos ver na figura ..... as singularidades  $(0, 0) \in \Sigma$  e  $(0, \alpha) \in \Sigma^+$  ( $(0, 0) \in \Sigma$  e  $(0, -\alpha) \in \Sigma^-$ ) são ligados por um arco de trajetória contido no auto-espaço forte do ponto crítico em  $\Sigma^+$  ( $\Sigma^-$ ). Logo  $Z_0 \notin \Sigma_1$ , pois podemos destruir facilmente tal conexão dando origem a uma bifurcação de codimensão maior que um. Assim, a última condição genérica que deve ser exigida é que  $\pi_1(X(0, 0)) \neq 0$  ( $\pi_1(Y(0, 0)) \neq 0$ ) Portanto, afim de que  $Z \in \Sigma_1$ , devemos impor as seguintes condições genéricas:

1.  $\pi_1(X(0, 0)) \neq 0$ ,
2.  $W_+^{u,s}(0, 0) \pitchfork \Sigma$ ,
3.  $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$  com  $\beta \neq 0$ ,
4. os autovalores de  $DX(0, 0)$  são distintos.

Como estamos interessados nos campos  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  temos que o campo  $Y$  também deve satisfazer as condições 1,2 e 4 citadas acima.

Uma vez que estudamos as condições genéricas necessárias para que um campo  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , para o qual a origem é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo nó dos campos  $X$  e  $Y$  colidindo com a descontinuidade  $\Sigma$ , isto é, a origem é um  $S$ -Nó de  $Z$ , seja estruturalmente estável com relação a  $\Sigma_1^{\ominus eq}$ , apresentaremos agora alguns desdobramentos genéricos para este tipo de singularidade. Estes comportamentos genéricos serão determinados pela estabilidade do nó e também pela posição das variedades lenta e rápida associadas a este ponto crítico. Sem perda de generalidade, consideraremos que a origem é um nó estável para o campo  $X$  consequentemente de-

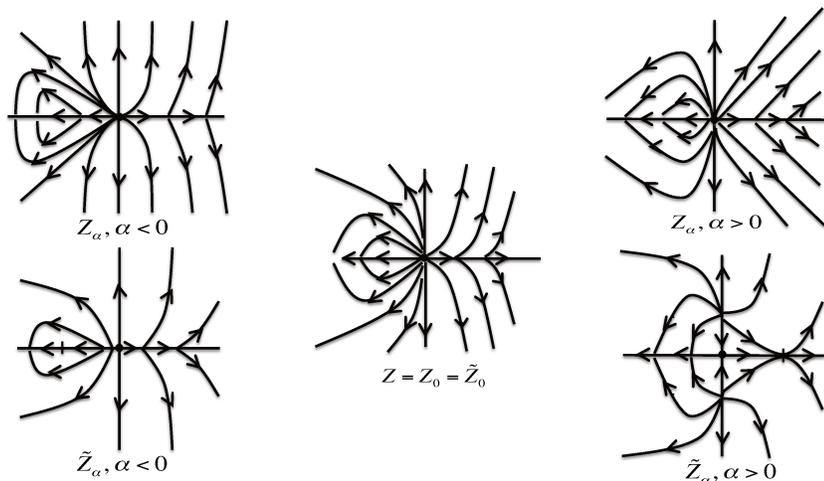


Figura 5.6: Desdobramentos do campo  $Z$  apresentado no Exemplo 5.3.3.

vido a simetria a origem também será um nó estável para o campo  $Y$ . Como já foi mencionado anteriormente, teremos sempre definido o campo deslizante  $Z^s$  e os pontos críticos no desdobramento aparecem na interseção da reta isóclina  $\dot{x} = 0$  com a subvariedade de descontinuidade  $\Sigma$ .

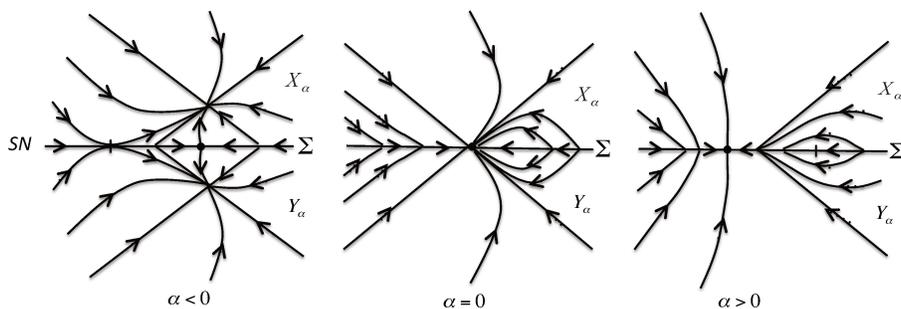


Figura 5.7: Desdobramentos genéricos de uma singularidade do tipo  $S$ -Nó estável.

Neste caso,  $SN$ , temos que a região de descontinuidade é decomposta como  $\Sigma = \overline{\Sigma^e} \cup \overline{\Sigma^s}$ . Para valores  $\alpha < 0$  dois pontos críticos admissíveis em  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  de  $X$  e  $Y$  respectivamente coexistem com uma pseudo-sela hiperbólica para o campo deslizante  $Z^s$ . Para valores de  $\beta > 0$ , o campo  $X$  tem um ponto crítico não-admissível em  $\Sigma^-$

e temos o aparecimento de um pseudo-nó hiperbólico para o campo deslizante  $Z^s$ . As formas normais topológicas para  $SN$  com são dadas por

$$Z_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = \begin{cases} (-3x + y + \alpha, x - 3y - 3\alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ (-3x - y + \alpha, -x - 3y + 3\alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}.$$

A situação em que a origem é um nó instável pode ser estudada de maneira análoga, sempre analisando as interseções entre as curvas  $\dot{y} = 0$  e  $\dot{x} = 0$ , que indicam onde ocorrem os pontos de tangência em  $\Sigma$  e onde surgirão os pontos críticos de  $Z^s$  no desdobramento genérico de  $Z$ , respectivamente. Outras posições relativas para as curvas isóclinas podem ser facilmente estudadas, porém a abordagem deste trabalho não requer que examinemos todos estes casos separadamente, pois além de ser uma tarefa exaustiva, torna-se também muito repetitiva.

### 5.3.5 Bifurcação S-Sela

Considere  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  e suponha que  $(0, 0) \in \Sigma$  é tal que  $X(0, 0) = (0, 0)$  e  $DX(0, 0)$  tem autovalores  $\lambda_1^X < 0 < \lambda_2^X$ . Sejam  $W_\pm^{u,s}(0)$  as variedades instáveis e estáveis de  $(0, 0)$  em  $\Sigma^\pm$ , respectivamente. Neste caso devemos impor três condições genéricas para que  $Z$  pertença a  $\Sigma_1^{\ominus eq}$ , estudaremos por que tais condições devem ser impostas através de exemplos.

**Exemplo 5.3.5** Consideremos

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (x, -y + x^2) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y(x, y) = (x, -y - x^2) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}.$$

Observe que  $W_+^u(0, 0)$  e  $W_-^u(0, 0)$  são tangentes à subvariedade de descontinuidade  $\Sigma$ , como podemos ver na Figura 4.1. Consideremos então, duas famílias de campos  $Z_\mu = (X_\mu, Y_\mu)$  e  $\tilde{Z}_\mu = (\tilde{X}_\mu, \tilde{Y}_\mu)$ , onde

$$Z_\mu(x, y) = \begin{cases} X_\mu(x, y) = (x, \mu x - y + x^2) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\mu(x, y) = (x, -\mu x - y - x^2) & \text{em } \Sigma^- \end{cases};$$

$$\tilde{Z}_\mu(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_\mu(x, y) = (x, \mu - y + x^2) & \text{em } \Sigma^+ \\ \tilde{Y}_\mu(x, y) = (x, -\mu - y - x^2) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}$$

Obviamente  $Z = Z_0 = \tilde{Z}_0$ . Assim, podemos fazer  $\|Z - Z_\mu\|, \|Z - \tilde{Z}_\mu\| < \epsilon$  para  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno. Logo, para qualquer  $\epsilon$ -vizinhança de  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , teremos campos do tipo  $Z_\mu$  e  $\tilde{Z}_\mu$ . Entre outros fatores, a decomposição da região de descontinuidade  $\Sigma$  nos impede de construir uma  $\mathcal{C}^0$ -conjugação entre  $Z_\mu$  e  $\tilde{Z}_\mu$ . Então, neste caso, temos uma bifurcação de codimensão maior do que um. De maneira análoga, podemos construir facilmente um exemplo no qual  $W_+^s(0, 0)$  e  $W_-^s(0, 0)$  é tangente à  $\Sigma$ .

Deste modo, concluímos que, quando  $W_+^u(0, 0)$  e  $W_-^u(0, 0)$  ou  $W_+^s(0, 0)$  e  $W_-^s(0, 0)$  são tangentes à subvariedade, teremos uma bifurcação de codimensão maior que um e assim devemos impor a condição genérica de que  $W_+^{u,s}(0, 0)$  e  $W_-^{u,s}(0, 0)$  sejam transversais à  $\Sigma$ .

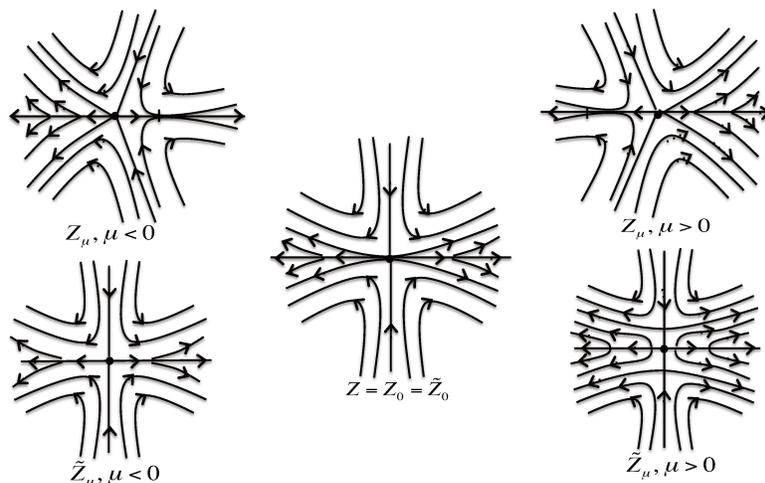


Figura 5.8: Desdobramentos do Sistema de Filippov apresentado no Exemplo 5.3.5.

**Exemplo 5.3.6** Considere a família de campos  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dada por

$$X_\alpha = (x, 2x - y + \alpha), Y_\alpha = (x, -2x - y - \alpha).$$

Em  $\alpha = 0$ , temos  $W_Y^s(0, 0) \parallel W_X^s(0, 0)$ , além disso  $(0, 0) \in \Sigma$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo nó (instável) para o campo deslizante  $Z^s$ . Para valores positivos

de  $\alpha$ , temos três singularidades para o campo  $Z_\alpha$ ;  $(0, 0) \in \Sigma$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo nó (instável) para o campo deslizante  $Z^s$ ,  $(0, \alpha) \in \Sigma^+$  e  $(0, -\alpha) \in \Sigma^-$  são pontos críticos do tipo sela hiperbólica para  $X_\alpha$  e  $Y_\alpha$ , respectivamente.

Observemos que  $W_+^u(0, 0) \cap W_+^s(0, \alpha) \neq \emptyset$  e  $W_-^u(0, 0) \cap W_-^s(0, -\alpha) \neq \emptyset$ , portanto temos uma ligação heteroclínica entre tais singularidades. É fácil ver que com pequenas rotações podemos “destruir” a conexão dos dois pontos críticos tipo sela com o pseudo-equilíbrio hiperbólico do campo deslizante, de modo que, teremos uma bifurcação de codimensão maior que um, veja figura 5.9. Assim, para evitar que ocorram conexões de separatrizes de sela no desdobramento genérico de  $Z$ , devemos adicionar a condição de que  $Y_0$  possua as suas variedades estáveis e instáveis em  $(0, 0) \in \Sigma$  transversais às variedades estáveis e instáveis de  $X_0$  em  $(0, 0) \in \Sigma$ .

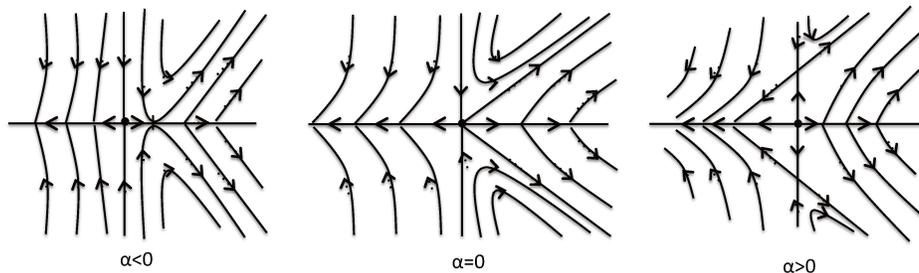


Figura 5.9: Desdobramentos do Sistema de Filippov apresentado no Exemplo 5.3.6.

A última observação que deve ser feita é que, quando a origem é uma  $S$ -sela hiperbólica para o campo  $Z$ , a curva de descontinuidade pode ser escrita como  $\Sigma = \bar{\Sigma}^e \cup \bar{\Sigma}^s$ , de modo que sempre temos definido o campo deslizante  $Z^s$ . Em uma vizinhança da origem, este pode ser escrito na forma  $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$  e pode ser estendido para  $(0, 0) \in \partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s$  de modo que  $Z^s(0, 0) = 0$ . Assim, devemos exigir que  $\beta \neq 0$  para que a origem seja um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $Z^s$ , evitando bifurcações de codimensão maior que um.

Deste modo, devemos impor três condições genéricas para que um campo  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  para o qual a origem é  $S$ -sela hiperbólica de  $Z$  pertença ao conjunto  $\Sigma_1^{\ominus eq}$ .

Sumarizamos abaixo tais condições:

1.  $W_-^{u,s}(0,0) \cap W_+^{u,s}(0,0)$ ,
2.  $W_-^{u,s}(0,0) \cap \Sigma$  e  $W_+^{u,s}(0,0) \cap \Sigma$ ,
3.  $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$  com  $\beta \neq 0$ .

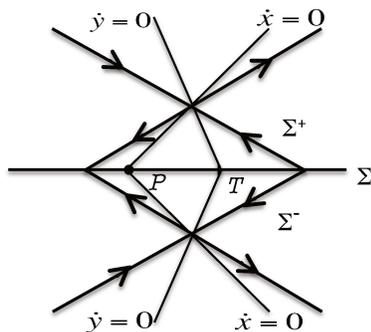


Figura 5.10: O ponto  $T$  e  $P$  indicam onde ocorrem uma  $S$ -tangência de  $Z$  e um ponto crítico de  $Z^s$ , respectivamente.

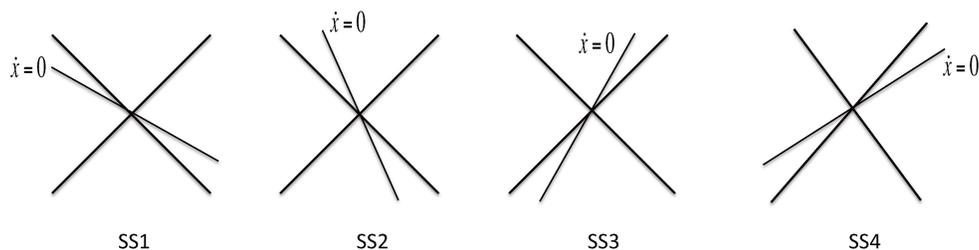


Figura 5.11: Posição das retas isóclinas com relação aos auto-espacos.

Agora que já estabelecemos as condições genéricas necessárias para obtermos uma bifurcação de codimensão um, vamos estudar os desdobramentos genéricos para este tipo de singularidade. Como a origem é um ponto de sela hiperbólico para o campo  $X$  e para  $Y$ , segue que a região de descontinuidade  $\Sigma$  é decomposta como  $\Sigma = \bar{\Sigma}^s \cup \bar{\Sigma}^e$  de modo que sempre teremos o campo deslizante  $Z^s$  definido na região. Observemos que  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$  é um ponto de equilíbrio para o campo deslizante  $Z^s$  se, e somente se,

$X(p) = \lambda Y(p)$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Da propriedade 9 apresentada na seção 3.2, isto equivale a dizer que  $p$  é tal que  $Xf(p) \neq 0 \neq Yf(p)$  e  $\pi_1(X(p)) = \pi_1(Y(p)) = 0$ .

Na Figura 5.11, mostramos a posição, relativa aos auto-espacos, das retas isóclinas em cada uma das formas normais que serão apresentadas. O caso em que  $\dot{x} = 0$  coincide com um dos auto-espacos não precisa ser considerado devido a primeira condição genérica imposta. Para ilustrar estes comportamentos genéricos, notemos pela observação acima, os pontos críticos do campo deslizando  $Z^s$  surgirão na interseção da curva isóclina  $\dot{x} = 0$  com a curva de descontinuidade  $\Sigma$ , pois sobre a curva  $\dot{x} = 0$  o campo  $X$  é vertical, como podemos observar na Figura 5.10. Ainda mais, a interseção das curvas  $\dot{y} = 0$  e  $\Sigma$  nos indica o ponto  $T$  onde o campo  $X$  é tangente à  $\Sigma$ . Teremos basicamente quatro casos genéricos, denotados por  $SS_i$  e ilustrados na Figura 5.12.

As formas normais para  $SS_i$  são dadas por  $Z_\alpha^i = (X_\alpha^i, Y_\alpha^i)$  definidos por

$$\begin{aligned} Z_\alpha^1(x, y) &= \begin{cases} X_\alpha^1(x, y) = (-x - 3y + 3\alpha, -3x - y + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha^1(x, y) = (-x + 3y + 3\alpha, 3x - y - \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \\ Z_\alpha^2(x, y) &= \begin{cases} X_\alpha^2(x, y) = (-2x - y + \alpha, x + y - \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha^2(x, y) = (-2x + y + \alpha, -x + y + \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \\ Z_\alpha^3(x, y) &= \begin{cases} X_\alpha^3(x, y) = (2x - y + \frac{\alpha}{2}, x - 2y + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha^3(x, y) = (2x + y + \frac{\alpha}{2}, -x - 2y - \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \\ Z_\alpha^4(x, y) &= \begin{cases} X_\alpha^4(x, y) = (x - 3y + 3\alpha, -3x + y - \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha^4(x, y) = (x + 3y + 3\alpha, 3x + y + \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}. \end{aligned}$$

### 5.3.6 Bifurcação S-Foco

Consideremos  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\ominus eq}$  e suponhamos que a origem seja uma singularidade do tipo  $S$ -foco para  $Z$ . Desta maneira, temos sempre definido o campo deslizando, ao passo que  $(0, 0) \in \Sigma$  pertence a  $\partial\Sigma^e \cap \partial\Sigma^s$ .

É possível mostrar que, neste caso, o campo deslizando definido em  $\Sigma^e$  ou  $\Sigma^s$ , tomando-se uma carta local, é da forma  $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$ , onde  $\beta$  depende das

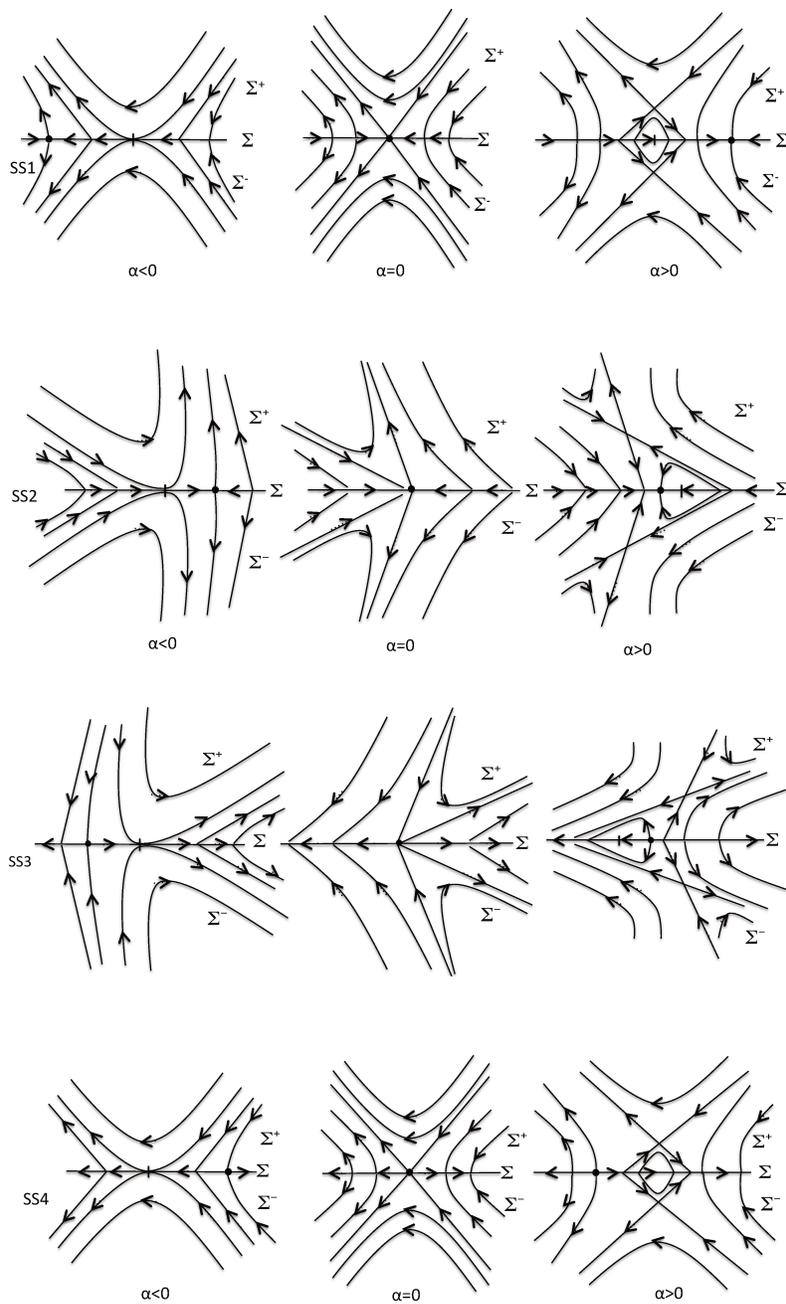


Figura 5.12: Bifurcação S-Sela em  $\mathcal{Z}^{\ominus eq}$ .

constantes da expansão de Taylor de  $X$ . Portanto, devemos exigir que  $\beta \neq 0$ , ou seja,

que a origem seja uma singularidade hiperbólica do campo deslizando  $Z^s$ .

A fim de obter uma bifurcação de codimensão um, outra questão deve ser observada no desdobramento genérico de  $Z = (X, Y)$ . Seja  $Z_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$  um desdobramento de  $Z$ . Suponhamos que para  $\alpha > 0$  tenhamos pontos críticos  $S_\alpha^+ \in \Sigma^+$  e  $S_\alpha^- \in \Sigma^-$  de  $X_\alpha$  e  $Y_\alpha$ , respectivamente. Sabemos que o ponto  $T_\alpha$  onde alguma trajetória de  $Z_\alpha$  possui uma  $S$ -dobra é dado pela interseção entre a curva  $\dot{y} = 0$  e  $\Sigma$  e também que o ponto crítico  $P_\alpha$  do campo deslizando  $Z^s$  ocorre no ponto em que  $\dot{x} = 0$  e  $\Sigma$  se interceptam. Deste modo, devemos observar as trajetórias de  $Z_\alpha$  por  $T_\alpha$ , e dependendo da interseção entre  $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha)$ ,  $\varphi_{Y_\alpha}(t, T_\alpha)$  e  $\Sigma$  (veja Figura 5.13), teremos três casos genéricos. Devido a reversibilidade estudaremos as condições somente sobre o campo  $X$ , um estudo acerca das condições sobre o campo  $Y$  pode ser feito de maneira análoga.

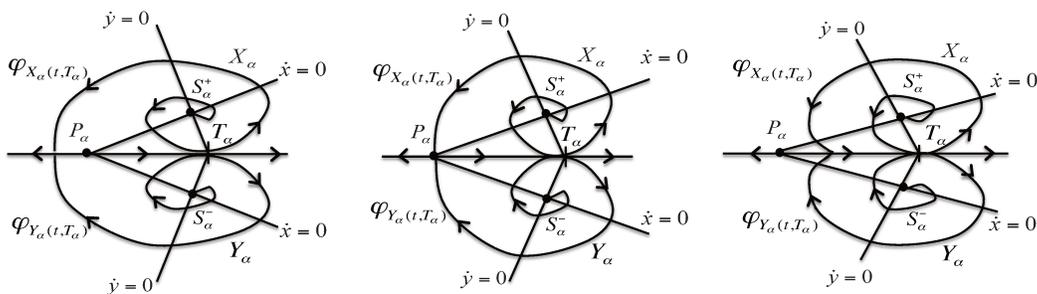


Figura 5.13: Possíveis interseções entre  $\gamma_+ = \{\varphi_{X_\alpha}(t, T), t > 0\}$  e  $\Sigma$ , e  $\gamma_- = \{\varphi_{Y_\alpha}(t, T), t > 0\}$  e  $\Sigma$ .

Quando  $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha) \cap \Sigma \neq \{P_\alpha\}$  (Figura 5.13 (a) e (c)), teremos bifurcações genéricas de codimensão um cujos desdobramentos genéricos serão estudados a seguir. Porém, se  $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha) \cap \Sigma = \{P_\alpha\}$ , teremos uma bifurcação de codimensão dois, chamada  $S$ -foco degenerado. No  $S$ -foco degenerado, para  $\alpha < 0$ , temos o surgimento de um pseudo-ciclo deslizando  $L_\alpha$  e uma conexão entre a  $S$ -dobra  $T_\alpha$  e o ponto crítico do campo deslizando  $P_\alpha$ . Assim, devemos exigir que, no desdobramento genérico de  $Z_\alpha$ , tenhamos  $\{\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha), t > 0\} \cap \Sigma \neq \{P_\alpha\}$ .

Para melhor ilustrar os comportamentos genéricos que aparecem para este tipo

de singularidade, consideraremos que a origem é um  $S$ -foco instável e possui rotação no sentido anti-horário. Os outros casos podem ser estudados facilmente invertendo a orientação das órbitas e/ou reflexão das figuras com relação ao eixo vertical. Deste modo, teremos três casos genéricos, denotados por  $SF_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), que estão ilustrados na Figura 5.14.

Em todos os casos, para  $\alpha \neq 0$ , teremos um ponto de  $S$ -dobra  $T_\alpha$ , que será invisível para  $\alpha < 0$  e visível para  $\alpha > 0$ . Além disso para  $\alpha > 0$  teremos em todos os casos o aparecimento de dois pontos críticos admissíveis  $S_\alpha^+ \in \Sigma^+$  e  $S_\alpha^- \in \Sigma^-$  de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Como já mencionamos, os casos genéricos são distinguidos pela posição relativa das curvas isóclinas do foco e pelo comportamento da órbita  $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha)$ . Em todos os desdobramentos  $SF_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), temos  $\Sigma = \overline{\Sigma^e} \cup \overline{\Sigma^s}$ . Em  $SF_1$ , para  $\alpha > 0$ , temos o aparecimento de uma  $S$ -dobra visível e de uma pseudo-sela do campo deslizando, além disso surge uma região de pseudo-ciclos estáveis do campo deslizando, limitada entre o pseudo-ciclo distinguido estável  $L_{P_\alpha}$ , dado pela curva  $W_+^s(P_\alpha) \cup \{P_\alpha\} \cup W_-^s(P_\alpha)$  e pelo pseudo-ciclo distinguido estável que passa pelo ponto  $T_\alpha$ , além disso os dois pontos críticos admissíveis  $S_\alpha^+ \in \Sigma^+$  e  $S_\alpha^- \in \Sigma^-$  que aparecem estão no interior de todos os pseudo-ciclos deslizantes. Enquanto que, para  $\alpha < 0$ , temos uma  $S$ -dobra invisível  $T_\alpha$ , e de um pseudo-nó  $P_\alpha$  do campo deslizando  $Z^s$ , neste caso temos o aparecimento de uma região de pseudo-ciclos estruturalmente estáveis, delimitada pelo pseudo-ciclo distinguido estruturalmente estável  $L_{P_\alpha}$  que passa por  $P_\alpha$ .

O segundo caso genérico,  $SF_2$ , difere de  $SF_1$  pela posição onde  $\varphi_{X_\alpha}$  intersepta  $\Sigma$ , correspondendo  $SF_2$  ao caso mostrado na Figura 5.13 (a), e  $SF_1$  a situação descrita em (c). Então para  $\alpha > 0$  não temos a formação de pseudo-ciclo deslizando, mas os pontos de  $S$ -dobra visível  $T_\alpha$  e a pseudo-sela do campo deslizando  $P_\alpha$  persistem. Já para  $\alpha < 0$  novamente temos uma região de pseudo-ciclos deslizantes estruturalmente estáveis delimitada pelo pseudo-ciclo distinguido estruturalmente estável  $L_{P_\alpha}$  que passa pelo ponto  $P_\alpha$ .

Como podemos ver na Figura 5.14, em  $SF_3$  a curva isóclina  $\dot{x} = 0$  intercepta  $\Sigma^s$ , para valores de  $\alpha$  negativos, dando origem a um pseudo-nó  $P_\alpha$  para o campo deslizando

$Z^s$  e novamente temos uma região de pseudo-ciclos estáveis delimitada pelo pseudo-ciclo distinguido estável  $L_{P_\alpha}$  que passa pelo pseudo-nó  $P_\alpha$ . Para  $\alpha > 0$ , também temos a formação de uma região pseudo-ciclos deslizante estáveis delimitada pelos pseudociclos distinguidos estáveis  $L_{P_\alpha}$ ,  $L_{T_\alpha}$ , como já foi discutido em  $SF_1$ . Novamente os dois pontos críticos admissíveis  $S_\alpha^+ \in \Sigma^+$  e  $S_\alpha^- \in \Sigma^-$  que aparecem estão no interior de todos os pseudo-ciclos deslizantes.

As formas normais para os desdobramento genéricos  $SF_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) apresentados na figura 5.14 são dadas por  $Z_\alpha^i = (X_\alpha, Y_\alpha)$ , onde

$$Z_\alpha^1(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (x - 2y + \alpha, 4x) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (x + 2y + \alpha, -4x) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} .$$

$$Z_\alpha^2(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (x - 2y + \alpha, 3x) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (x + 2y + \alpha, -3x) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} .$$

$$Z_\alpha^3(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (-x - 2y + 2\alpha, 4x + 2y - 2\alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (x + 2y + 2\alpha, -4x + 2y + 2\alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} .$$

## 5.4 Bifurcações Globais de Codimensão Um em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$

De maneira análoga ao que ocorre em Sistemas Dinâmicos Suaves, nos desdobramentos genéricos de bifurcações locais de codimensão dois, aparecem bifurcações globais de codimensão um. Portanto, é necessário que façamos um estudo apropriado de alguma destas bifurcações globais. Como exemplos de bifurcações globais em Sistemas Planares de Filippov com simetrias, podemos citar as bifurcações globais que ocorrem em  $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ , como bifurcações envolvendo conexões de separatrizes de sela, órbitas periódicas e ciclos, entre outros. Porém, precisamos estudar as bifurcações globais que envolvem pontos de  $\Sigma$ , por exemplo, bifurcações de ciclos deslizantes e de costura. Estudaremos neste capítulo os casos que apresentam em seu desdobramento, no nosso ponto de vista, um comportamento rico e interessante. É importante lembrar que em Sistema Planares de Filippov podem existir separatrizes ou variedades estáveis (instáveis) que alcançam os respectivos pontos em um tempo finito, como, por exemplo, as variedades estáveis

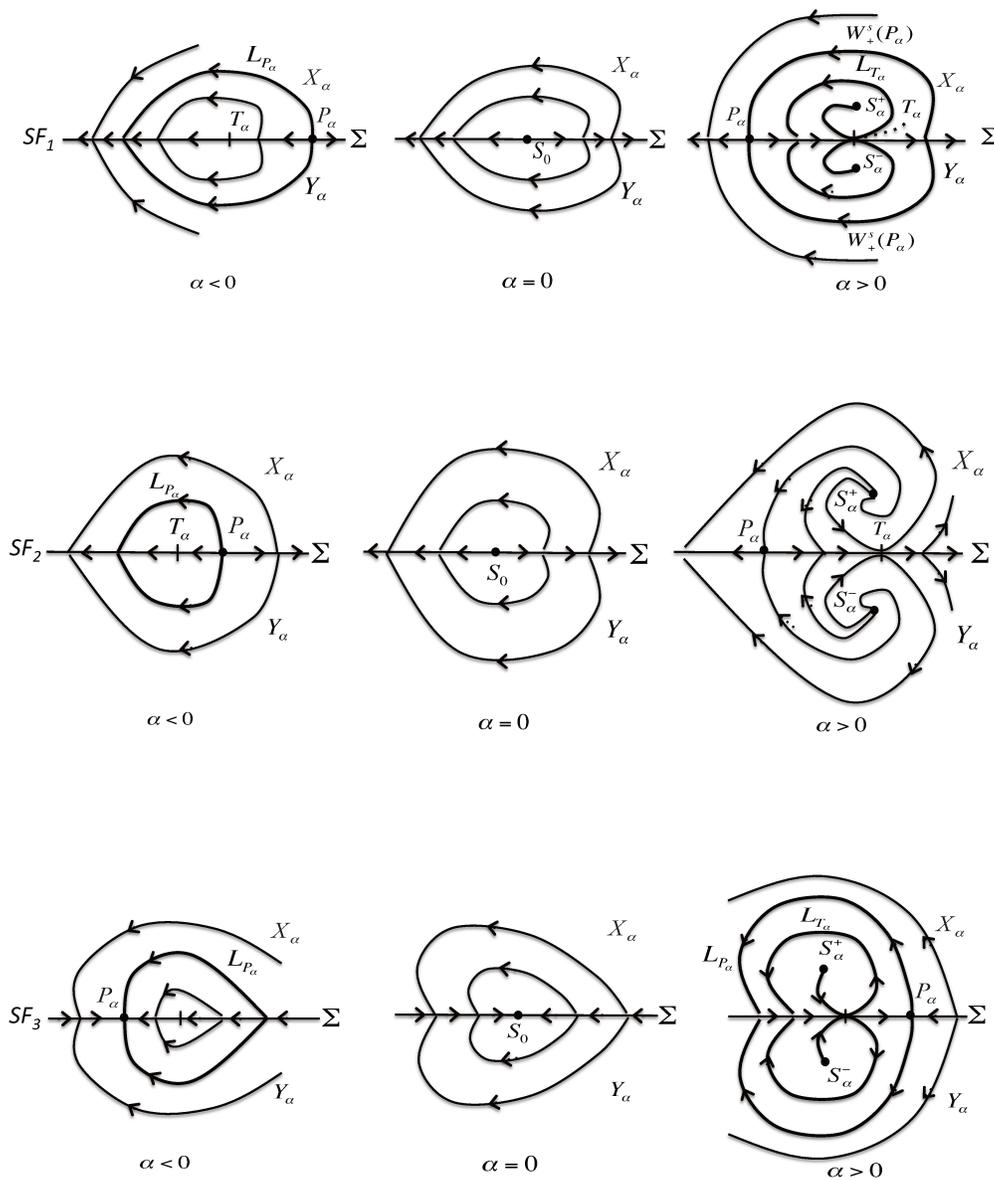


Figura 5.14: Desdobramentos genéricos de uma singularidade do tipo  $S$ -Foco em  $Z^{\ominus eq}$ .

(instáveis) de um ponto de dobra-regular. De fato, a maior parte das bifurcações globais de codimensão um podem ser vistas como conexões de separatrizes entre dobras-regulares.

### 5.4.1 Conexão de Separatrizes entre $S$ -Dobras

#### Conexão Homoclínica

Consideremos  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . Seja  $T_0$  um ponto  $S$ -dobra para  $Z_0$ . Suponhamos primeiramente que  $W_{\pm}^u(T_0) = W_{\pm}^s(T_0)$ , de modo que as órbita de  $X_0$  e  $Y_0$  passando por  $T_0$  são órbitas fechadas hiperbólicas que tangenciam a curva de descontinuidade  $\Sigma$  em  $T_0$ . Teremos um caso genérico que depende da estabilidade das órbitas periódicas. Este é ilustrados na Figura 5.15 e denotados por  $SCB$ . Podemos considerar, sem perda de generalidade, que a órbita periódica de  $X_0$  está orientada no sentido anti-horário, conseqüentemente a órbita periódica de  $Y_0$  também está orientada no sentido anti-horário, pois,  $T_0 \in \overline{\Sigma}^c$ . Os outros casos podem ser estudados analogamente.

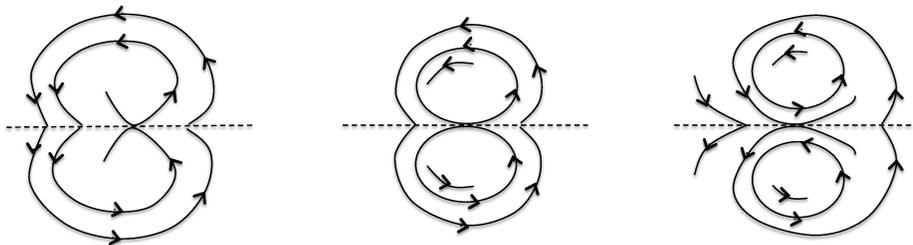


Figura 5.15: Bifurcação de Ciclos Limites.

Em  $SCB$ , sem perda de generalidade, consideramos que a órbita periódica  $L_0$  é um ciclo limite atrator. Para valores negativos de  $\alpha$ , alguma órbita contida no interior do ciclo  $L_0^+ \cup L_0^-$  tangência  $\Sigma$  em uma singularidade do tipo  $S$ -dobra singular  $T_\alpha$  e, devido a estabilidade de  $L_0$  temos o surgimento de uma órbita periódica de costura distinguida passando por  $T_\alpha$ . Para  $\alpha > 0$ , temos um ciclo limite estável (atrator)  $L_\alpha^+ \subset \Sigma^+$  e um ciclo limite repulsor  $L_\alpha^- \subset \Sigma^-$  alguma órbita fora das regiões delimitadas por  $L_\alpha^+$  e por  $L_\alpha^-$  tangência  $\Sigma$  em uma singularidade do tipo  $S$ -dobra singular  $T_\alpha$  dando origem a uma órbita periódica distinguida que passa por  $T_\alpha$ .

### Conexão Heteroclínica

Suponhamos agora que  $T_0$  e  $\widetilde{T}_0$  são pontos do tipo  $S$ -dobras hiperbólicas para  $X_0$  e  $Y_0$ , com  $W_{\pm}^u(T_0) = W_{\pm}^s(\widetilde{T}_0)$  desta forma  $W_+^u(T_0) \cup T_0 \cup W_-^s(\widetilde{T}_0) \cup \widetilde{T}_0$  é uma órbita periódica de costura distinguida. Assumimos que  $W_+^u(T_0)$  intercepte transversalmente em uma região de costura situada a esquerda de  $T_0$ , dando origem a uma órbita periódica de costura distinguida que passa por  $\widetilde{T}_0$ , e portanto  $\widetilde{T}_0$  é uma conexão de duas órbitas periódicas de costura distinguida como é mostrado na Figura 5.16

Para valores pequenos do parâmetro  $\alpha$ , temos o desaparecimento da conexão das órbitas periódicas de costura, tanto para  $\alpha$  negativo quanto positivo. Quando  $\alpha < 0$ , a conexão entre as órbitas periódicas de costura distinguidas se desfaz dando origem a duas órbitas periódicas de costura distinguidas passando pelos pontos  $T_\alpha$  e  $\widetilde{T}_\alpha$ , além disso, temos que a órbita periódica de costura passando pela  $S$ -dobra hiperbólica  $T_\alpha$  está contida na região delimitada pela órbita periódica de costura distinguida passando pela  $S$ -dobra hiperbólica  $\widetilde{T}_\alpha$ . Para  $\alpha > 0$ , a conexão entre as órbitas periódicas de costura distinguidas se desfaz dando origem a duas órbitas periódicas de costura distinguidas passando pelos pontos  $T_\alpha$  e  $\widetilde{T}_\alpha$  com seus interiores disjuntos.

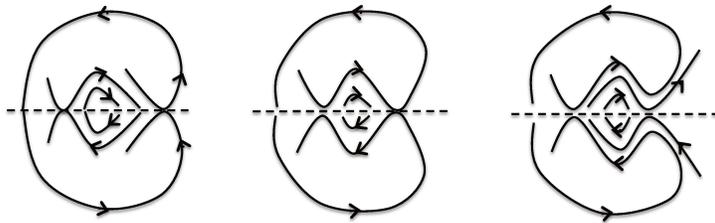


Figura 5.16: Desdobramento genérico de um ponto de conexão de duas órbitas periódicas de costura distinguidas.

Considere o campo  $Z_0 \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  possuindo dois pontos de  $S$ -dobra visíveis,  $T_0$  e  $\widetilde{T}_0$ , conectados por duas ligação heteroclínica  $W_{\pm}^u(T_0) \equiv W_{\pm}^s(\widetilde{T}_0)$ , mas de modo que a variedade instável de  $\widetilde{T}_0$  não intercepte  $\Sigma$  próximo a  $T_0$ , como no desdobramento

genérico mostrado na Figura 5.17. Apesar de termos um retrato de fase com algumas características em comum ao apresentado em 5.16, temos uma bifurcação mais simples e, para pequenas perturbações de  $Z_0$ , sempre temos o surgimento de uma única órbita periódica de costura distinguida, isso ocorre devido a quebra das conexões heteroclínica entre as  $S$ -dobras hiperbólicas.

Dado  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$ , suponha que  $T_0 \in \partial\Sigma^c$  e  $\tilde{T}_0 \in \partial\Sigma^c$  são pontos do tipo  $S$ -dobra hiperbólica de  $Z$ , que existam as conexões  $L_+ \equiv_+^u(T_0) \equiv W_+^s(\tilde{T}_0)$  e  $W_-^u(T_0) \equiv W_-^s(\tilde{T}_0)$ . Conforme ilustrado na Figura 5.17

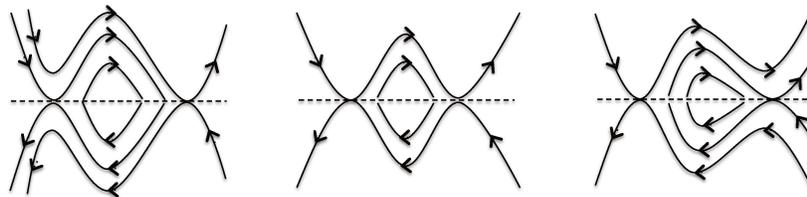


Figura 5.17: Conexão entre duas  $S$ -dobras singulares visíveis.

Esta bifurcação global de codimensão um aparece em diversas bifurcações locais de codimensão dois, como por exemplo, no desdobramento da singularidade do tipo rabo de andorinha de codimensão dois, apresentada no Teorema 6.1.1. Vale ressaltar que as bifurcações globais de codimensão um em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  aqui apresentadas não todas as globais de codimensão um em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ .

# Capítulo 6

## Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Dois

### 6.1 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão Dois em $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$

Como antes utilizaremos as formas normais das singularidades de codimensão dois de campos de vetores definidos em variedades com bordo, apresentadas na seção 2.1, para deduzirmos os tipos topológicos de famílias genéricas a dois parâmetros de campos de Filippov em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ . Recordemos que se  $Z$  está em  $\mathcal{Z}_2^{\ominus rev} = \mathcal{Z}_1^{\ominus rev} \setminus \Sigma_1^{\ominus rev}$ , então o correspondente  $F = F(Z)$  está em  $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \setminus \chi_1$  e vice-versa.

Considere agora os conjuntos:  $\mathcal{Z}_2^{\ominus rev} = \mathcal{Z}_1^{\ominus rev} \setminus \Sigma_1^{\ominus rev}$  e  $\Sigma_2^{\ominus rev}$  o conjunto dos elementos  $Z \in \mathcal{Z}^{\ominus rev}$  tal que  $(0, 0)$  é uma singularidade de codimensão dois de  $F = F(Z)$ . Utilizando considerações análogas às considerações feitas na seção anterior o seguinte teorema é consequência do lema 2.1.8.

**Teorema 6.1.1** (*Classificação das singularidades de codimensão dois em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$* )

**A)** *No espaço das Famílias de Campos de Filippov em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$  a dois parâmetros um conjunto aberto e denso é formado pela famílias genéricas  $\Sigma$ -equivalente as seguintes formas normais:*

(1) *Todas as formas normais listadas no teorema 5.2.2;*

(2)  $Z_{00}$  *possui uma S-rabo de andorinha em  $\partial\Sigma^c$ ;*

$$Z_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} (1, bx^3 + \alpha x + \beta), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ (-1, bx^3 + \alpha x + \beta), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}$$

(3)  $Z_{00}$  *possui uma S-sela-nó em  $\partial\Sigma^c$ ;*

$$(3a) \ Z_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} (a(x - y) + \beta(x + y), \alpha + (x + y)^2), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ (-a(x + y) + \beta(y - x), \alpha + (x - y)^2), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}$$

$$(3b) \ Z_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} (x - y + \beta(x + y), \alpha + a(x + y)^2), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ (-(x + y) + \beta(y - x), \alpha + a(x - y)^2), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}$$

com  $a = \pm 1$ .

(4)  $Z_{00}$  *possui uma S-Bifurcação Hopf em  $\partial\Sigma^c$ ;*

$$Z_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} (-y + x(\alpha + x^2 + y^2), x - y(\alpha + x^2 + y^2) + \beta), & \Sigma^+ \\ (-y + x(\alpha + x^2 + y^2), x + y(\alpha + x^2 + y^2) + \beta), & \Sigma^- \end{cases}$$

(5)  $Z_{00}$  *possui uma S-Nó Degenerado em  $\partial\Sigma^c$ ;*

$$Z_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} (x + \alpha y, x + y + \beta), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ (-x + \alpha y, x - y + \beta), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}$$

(6)  $Z_{00}$  *possui uma S-Sela Tangente em  $\partial\Sigma^c$ ;*

$$Z_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} (x, \alpha x - y + ax^2 + \beta), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ (-x, \alpha x + y + ax^2 + \beta), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}$$

(7)  $Z_{00}$  *possui uma S-Nó Tangente em  $\partial\Sigma^c$ ;*

$$Z_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} (ax, \alpha x + by \pm 3x^2 + \beta), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ (-ax, \alpha x - by \pm 3x^2 + \beta), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}$$

A fim de ilustrar um desdobramento dessas formas normais estudaremos agora o desdobramento genérico de uma singularidade  $S$ -rabo de andorinha em  $\partial\Sigma^c$ . Notemos que neste caso temos que  $X$  e  $Y$  não possuem pontos críticos.

Estudaremos então a possível existência de singularidades do tipo dobra-dobra para o campo  $Z_{\alpha\beta}$ . Notemos que

$$X_{\alpha\beta}f(x, y) = Y_{\alpha\beta}f(x, y) = x^3 + \alpha x + \beta$$

Portanto, caso existam singularidades dobra-dobra para o campo estas devem acontecer no ponto  $(x, 0)$  com  $x$  satisfazendo a equação

$$x^3 + \alpha x + \beta = 0. \tag{6.1}$$

Se  $x = u + v$  então a equação toma a forma

$$(u^3 + v^3 + \beta) + (3uv + \alpha)(u + v) = 0.$$

Uma solução desta equação é dada pelo sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -\beta, \\ u^3 v^3 = \frac{-\alpha^3}{27}. \end{cases}$$

Somos conduzidos ao problema de achar dois números  $u^3, v^3$  dos quais a soma  $S = u^3 + v^3 = -\beta$  e o produto  $P = u^3 v^3 = \frac{-\alpha^3}{27}$ . Como é sabido esses números são as duas soluções  $\Upsilon_+$  e  $\Upsilon_-$  da equação auxiliar do 2 grau

$$\Upsilon^2 - S\Upsilon + P = 0,$$

a qual possui discriminante dado por  $D(\alpha, \beta) = \beta^2 + \frac{4\alpha^3}{27}$ .

Temos as seguintes condições para equação 6.1

1.  $D(\alpha, \beta) = 0$ , a equação 6.1 possui 3 raízes reais, onde duas são repetidas,
2.  $D(\alpha, \beta) > 0$ , a equação 6.1 possui 1 raiz real e 2 complexas,
3.  $D(\alpha, \beta) < 0$ , a equação 6.1 possui 3 raízes reais distintas.

Observe que para  $\beta = 0$  temos solução para equação 6.1 somente se  $\alpha < 0$ . Notemos que  $X_{\alpha\beta}^2 f(x, y) = 3x^2 + \alpha$  e  $Y_{\alpha\beta}^2 f(x, y) = -3x^2 - \alpha$ .

No espaço de parâmetros  $\alpha\beta$ , a curva dada pela união das curvas  $D(\alpha, \beta) = 0$ ,  $\{(\alpha, 0) : \alpha < 0\}$  e a origem  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  divide uma vizinhança de  $(0, 0)$  em três regiões abertas, onde em cada uma dessas regiões o retrato de fase de  $Z$  apresenta comportamentos distintos, como é representado na figura 6.1.

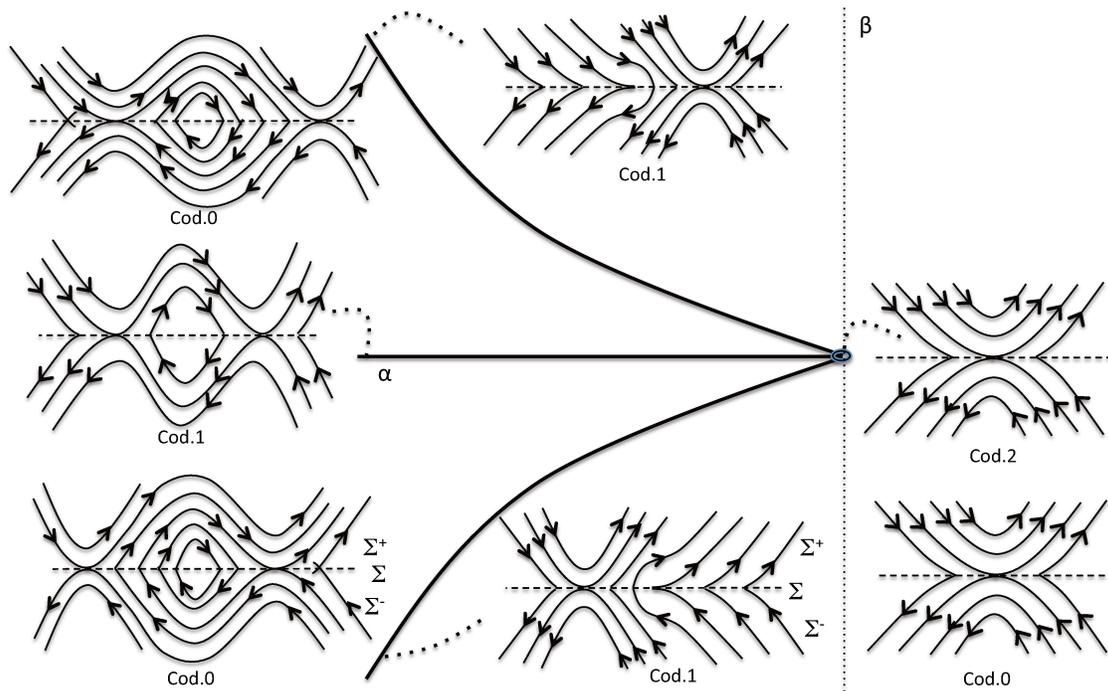


Figura 6.1: Desdobramento genérico de uma singularidade  $S$ -rabo de andorinha de um campo de Filippov em  $\mathcal{Z}^{\ominus rev}$ .

# Capítulo 7

## Conclusões e Trabalhos Futuros

No decorrer de nosso trabalho apresentamos os sistemas de Filippov Reversíveis e Equivariantes, discutimos a relação desses sistemas com os sistemas dinâmicos induzidos por campos de vetores suaves definidos em variedade com bordo, bem como a relação com os campos suaves reversíveis. Classificamos as singularidades de codimensão 0, 1 e 2 para os Sistemas de Filppov planares Reversíveis e as singularidades de codimensão 0, 1 para os Sistemas de Filppov planares Equivariante, ambas as classificações foram feitas para uma involução cujo eixo de simetria é dado pela variedade de descontinuidade. Poderíamos prosseguir com nosso trabalho esboçando todos os desdobramentos das formas normais dadas no teorema 6.1.1. Na mesma linha de raciocínio da seção 5.4, porém com um pouco mais de trabalho, podemos estudar as bifurcações globais de codimensão um para sistemas de Filippov planares Equivariante e posteriormente utilizar esta classificação para obter as singularidades genéricas de codimensão dois sistemas de Filippov planares Equivariante.

Também podemos assumir outra involução que satisfaça as condições de reversibilidade ou equivariância, e para esta involução, perguntar sobre a classificação das singularidades dos sistemas de Filippov planares Revesíveis e dos sistemas de Filippov planares Equivariante.

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma pré classificação das singularidades genéricas de baixa codimensão para uma involução  $\phi : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ , que são germes

de difeomorfismos de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (em 0), onde  $S = \text{Fix}(\phi)$  e  $\dim S = 0$  com  $\phi \neq \text{Id}$ . Sabemos do Teorema de Bochner-Montgomery, seção 2.2, que neste caso dado  $p \in S = \text{Fix}(\phi)$  então  $\phi$  é  $\mathcal{C}^\infty$ -conjugada a  $\phi(x, y) = (-x, -y)$  em  $p_0 = (0, 0)$ . Realizaremos nossa análise em  $\mathbb{R}^2, 0 \cap U$ , e fixaremos  $f(x, y) = y$ .

Notemos que nestas coordenadas temos localmente nas vizinhança da origem,

$$S = \{(0, 0)\} \text{ com } \phi(x, y) = (-x, -y), \text{ respectivamente.}$$

Estamos interessados em classificar as singularidades genéricas e Bifurcações de baixa codimensão dos campos de Filippov pertencentes aos conjuntos

- $\mathcal{Z}^{\odot rev} = \{Z \in \mathcal{Z}^{rev} : \dim S = 0\}$
- $\mathcal{Z}^{\odot eq} = \{Z \in \mathcal{Z}^{eq} : \dim S = 0\}$

Faremos a seguir, separadamente, um breve estudo sobre as propriedades desses campos, apresentamos suas singularidades de codimensão 0, e algumas de suas singularidades de codimensão um, além disso, indicaremos algumas direções para trabalhos futuros.

## 7.1 Singularidades Genéricas de baixa codimensão em $\mathcal{Z}^{\odot rev}$

Neste caso o retrato de fase de  $Z$  é simétrico pela origem. Pela condição de reversibilidade temos que  $Z = (X, Y)$  é dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (f_1(-x, -y), f_2(-x, -y)) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (7.1)$$

Notemos que se  $(0, 0)$  é um ponto regular  $X$  temos que  $(0, 0)$  é um ponto regular  $Z$  pertencente a  $\Sigma^c$ , de fato,  $Yf(0, 0) = Xf(0, 0) \neq 0$  e  $Yf(0, 0)Xf(0, 0) > 0$ . Se  $(0, 0)$  é um ponto de tangência de  $X$  então  $(0, 0)$  é uma  $S$ -tangência regular de  $Z$ , de fato,  $Yf(0, 0) = Xf(0, 0) = 0$  e  $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) > 0$ . Como consequência temos

que toda trajetória passando por  $(0,0)$  é hoemomorfa a  $\mathbb{R}$ . Neste caso, é fácil ver que qualquer  $S$ -singularidade do campo  $Z$  possui codimensão maior que zero, isto é, temos que um campo  $Z \in \mathcal{Z}^{\odot rev}$  definido nas vizinhanças da origem é estruturalmente estável se, e somente se,  $(0,0) \in \Sigma^c$ . A seguir apresentamos os desdobramentos das singularidades do tipo  $S$ -dobra e para campos  $Z \in \mathcal{Z}^{\odot rev}$ .

### 7.1.1 $S$ -dobra hiperbólica em $\mathcal{Z}^{\odot rev}$

Seja  $(0,0) \in \Sigma$  uma dobra do campo  $X$ , isto é,  $Xf(0,0) = 0$  e  $Xf^2(0,0) > 0$ . Sem perda de generalidade suponhamos que  $\pi_1(X(0,0)) > 0$ . Da expressão 7.4 segue que  $Yf(0,0) = 0$ ,  $Yf^2(0,0) < 0$  e  $\pi_1(Y(0,0)) > 0$ , portanto  $(0,0)$  é uma  $S$ -dobra hiperbólica pertencente a  $\partial\Sigma^e \cap \partial\Sigma^s$ .

**Proposição 7.1.1** *Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\odot rev}$ . Suponhamos que  $(0,0)$  é uma  $S$ -dobra hiperbólica de  $Z$ . Então o desdobramento versal de  $Z$  é  $C^0$ -equivalente ao desdobramento versal do campo  $Z_0$  dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (a, ax + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (a, -ax + \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \quad (7.2)$$

onde  $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0,0)))$ .

Denotamos esta bifurcação por  $SDH$ , para uma análise de seu comportamento tomamos  $a = 1$  na proposição 7.2. Como podemos observar em  $SDH$  para valores de  $\alpha \neq 0$ , temos surgimento de uma região de costura entre dois pontos de dobra-regular.

### 7.1.2 $S$ -dobra elíptica em $\mathcal{Z}^{\odot rev}$

A proposição abaixo classifica as singularidades  $S$ -dobras elípticas em  $\mathcal{Z}^{\odot rev}$ .

**Proposição 7.1.2** *Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\odot rev}$ . Suponha que  $Xf(0,0) = 0$ ,  $Xf^2(0,0) < 0$  e  $\pi_1(X(0,0)) > 0$ . Então  $Yf(0,0) = 0$ ,  $Yf^2(0,0) > 0$  e  $\pi_1(Y(0,0)) > 0$ , isto é,  $(0,0)$  é uma  $S$ -dobra elíptica pertencente a  $\partial\Sigma^e \cap \partial\Sigma^s$ , cujo desdobramento versal de  $Z$  é  $C^0$ -equivalente ao desdobramento versal do campo  $Z_0$  dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (x + a, -ax + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (-x + a, ax + \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \quad (7.3)$$

onde  $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0, 0)))$ .

Denotaremos esta singularidade por *SDE*. Notemos que assim como no caso da *S*-dobra hiperbólica, aqui também temos o surgimento de uma região de costura entre dois pontos de dobra-regular.

## 7.2 Singularidades Genéricas de baixa codimensão em $\mathcal{Z}^{\odot eq}$

Neste caso o retrato de fase de  $Z$  é simétrico pela origem. Pela condição de reversibilidade temos que  $Z = (X, Y)$  é dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) & \text{em } \Sigma^+, \\ Y(x, y) = (-f_1(-x, -y), -f_2(-x, -y)) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (7.4)$$

Notemos que se  $(0, 0)$  é um ponto regular  $X$  temos que  $(0, 0) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  é um pseudo-equilíbrio de  $Z(x, y)$ , de fato,  $Yf(0, 0) = -Xf(0, 0) \neq 0 \therefore Yf(0, 0)Xf(0, 0) = -(Xf(0, 0))^2 < 0$  e  $(0, 0) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ , além disso  $X(0, 0) // Y(0, 0) \therefore Z^s(0, 0) = 0$ . Se  $(0, 0)$  é um ponto de tangência de  $X$  então  $(0, 0)$  é uma *S*-tangência singular de  $Z(x, y)$ , de fato,  $Yf(0, 0) = -Xf(0, 0) = 0$  e  $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) < 0$ . Como consequência temos que toda trajetória passando por  $(0, 0)$  é o próprio ponto  $(0, 0)$ . Neste caso, é fácil ver que qualquer *S*-singularidade do campo  $Z$  possui codimensão maior que zero, isto é, temos que um campo  $Z \in \mathcal{Z}^{\odot rev}$  definido nas vizinhanças da origem é estruturalmente estável se, e somente se,  $(0, 0) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  é um pseudo-equilíbrio hiperbólico de  $Z(x, y)$ . A seguir apresentamos os desdobramentos das singularidade do tipo *S*-dobra para campos  $Z \in \mathcal{Z}^{\odot eq}$ .

### 7.2.1 $S$ -dobra hiperbólica em $\mathcal{Z}^{\odot eq}$

Seja  $(0, 0) \in \Sigma$  uma dobra do campo  $X$ , isto é,  $Xf(0, 0) = 0$  e  $Xf^2(0, 0) > 0$ . Sem perda de generalidade suponhamos que  $\pi_1(X(0, 0)) > 0$ . Da expressão 7.4 segue que  $Yf(0, 0) = 0$ ,  $Yf^2(0, 0) < 0$  e  $\pi_1(Y(0, 0)) < 0$ , portanto  $(0, 0)$  é uma  $S$ -dobra hiperbólica pertencente a  $\partial\Sigma^c$ .

**Proposição 7.2.1** *Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\odot eq}$ . Suponhamos que  $(0, 0)$  é uma  $S$ -dobra hiperbólica de  $Z$ . Então o desdobramento versal de  $Z$  é  $C^0$ -equivalente ao desdobramento versal do campo  $Z_0$  dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (a, ax + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (-a, ax - \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases} \quad (7.5)$$

onde  $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0, 0)))$ .

O caso genérico desta bifurcação é denotado por  $SDH$ , para uma análise de seu comportamento tomamos  $a = 1$  na proposição 7.5. Como podemos observar em  $SDH$  para valores de  $\alpha \neq 0$ , temos surgimento de uma região  $\overline{\Sigma^e} \text{ou} \overline{\Sigma^s}$  entre dois pontos de dobra-regular. Além disso, temos o aparecimento de um pseudo-equilíbrio hiperbólico de  $Z$  na origem.

### 7.2.2 $S$ -dobra elíptica em $\mathcal{Z}^{\odot eq}$

A proposição abaixo classifica as singularidades  $S$ -dobras elípticas em  $\mathcal{Z}^{\odot eq}$ .

**Proposição 7.2.2** *Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^{\odot eq}$ . Suponha que  $Xf(0, 0) = 0$ ,  $Xf^2(0, 0) < 0$  e  $\pi_1(X(0, 0)) > 0$ . Então  $Yf(0, 0) = 0$ ,  $Yf^2(0, 0) > 0$  e  $\pi_1(Y(0, 0)) < 0$ , isto é,  $(0, 0)$  é uma  $S$ -dobra elíptica pertencente a  $\partial\Sigma^c$ , cujo desdobramento versal de  $Z$  é  $C^0$ -equivalente ao desdobramento versal do campo  $Z_0$  dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (x + a, -ax + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (x - a, -ax - \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \quad (7.6)$$

quando tivermos um foco repulsor ou o desdobramento versal de  $Z$  é  $\mathcal{C}^0$ -equivalente ao desdobramento versal de  $Z_0$  definido como

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (a, -ax + \alpha) & \text{em } \Sigma^+ \\ Y_\alpha(x, y) = (-a, -ax - \alpha) & \text{em } \Sigma^- \end{cases}, \quad (7.7)$$

quando a origem for um foco atrator. Em ambos os casos  $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0, 0)))$ .

Para analisarmos este caso genérico, assumimos que a origem é um foco atrator e tomamos  $a = 1$  na Proposição 7.2.2, esta talvez seja bifurcação local de codimensão um menos trivial em Sistemas Planares de Filippov com simetria. Para valores negativos de  $\alpha$  temos a abertura de um segmento de escape entre os dois pontos de dobra regular e o aparecimento de uma pseudo-sela de  $Z$ . Para  $\alpha$  negativo, também temos a abertura de um segmento deslizante que contém uma pseudo-sela como ponto crítico do campo deslizante  $Z^s$ . Analisando a aplicação de primeiro retorno de  $Z$  para  $\alpha < 0$ , observamos o aparecimento de uma órbita periódica de costura repulsora  $L_\alpha$ . Por esta razão, esta bifurcação também é chamada de Bifurcação Pseudo-Hopf.

Encerramos aqui nossa pré classificação das estudo das singularidades de codimensão um para os campos de Filippov em  $\mathcal{Z}^{\text{rev}}$  e  $\mathcal{Z}^{\text{eq}}$ . Como trabalho futuro pretende-se continuar a classificação das singularidades de codimensão um desses conjuntos, obter e classificar as suas singularidades de codimensão dois, bem como esboçar os desdobramentos de todas estas singularidades.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANDRONOV A. A.; VITT A. A.; KHAIKIN S. E., *Theory of oscillators*, Dover, New York, (1966).
- [2] ALEXANDER J. C. AND SEIDMAN T. I., *Sliding modes in intersecting switching surfaces I: Blending*, Houston J. Math., **24** (1998), 545–569.
- [3] ALEXANDER J. C. AND SEIDMAN T. I., *Sliding modes in intersecting switching surfaces II: Hysteresis*, Houston J. Math., **25** (1999), 185–211.
- [4] BAUTIN N. N. AND LEONTOVICH E. A., *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti*, Izdat. "Nauka", Moscow, Spravochnaya Matematicheskaya Biblioteka. [Mathematical Reference Library], 1976.
- [5] BERNARDO M. DI; BUDD C. J.; CHAMPNEYS A. R.; KOWALCZYK P., *Piecewise-non-smooth dynamical system—Theory and applications*, vol. **163** of Applied Mathematical Sciences. Springer–Verlag London Ltd., London 2008.
- [6] Birkhof G. D, *The restricted problem of three bodies*, Rend. Circ. Mat. Palermo **39**, 265–334.
- [7] Devaney R., *Reversible Diffeomorphisms and Flows*, Transactions of the American Mathematical Society **218** (1976), 89–113.
- [8] DA SILVA P. R. AND TEIXEIRA M. A., *Singular perturbation for discontinuous ordinary differential equations*, Proceedings of SPT 2007-Symmetry and Perturbation Theory- 2 - 9 June 2007, Otranto (Italy), (2007) World Scientific, 180-198.

- [9] FILIPPOV A. F., *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. **18** of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [10] GUARDIA M. A.; TEIXEIRA M. A.; SEARA T. M., *Generic bifurcation low codimension of planar Filippov System*, J. Differential Equation, **250** (2011), 1967-2023
- [11] KOZLOVA V.S., *Roughness of a discontinuous system*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika **5** (1984), 16–20
- [12] KUZNETSOV YU. A. ET AL., *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, Int. J. Bifurcation Chaos, **13** (2003), 2157-2188.
- [13] JACQUEMARD A. AND TEIXEIRA M. A., *Invariant varieties of discontinuous vector fields*, Nonlinearity, **18** (2005), 21-43.
- [14] LLIBRE J.; DA SILVA P. R.; TEIXEIRA M. A., *Sliding vector fields via slow-fast systems*, (Proceedings of the congress Dynamics in Perturbations- University of Hasselt, 2007, on the occasion of Freddy Dumortier's 60th birthday), Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **15** (2008), 851–869
- [15] LUO C. J., *Singularity and dynamics on discontinuous vector fields*, Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity, Elsevier Sc., (2006), i+310 pp.
- [16] MONTGOMERY D.; ZIPPIN L., *Topological Transformations Groups*, Interscience, 1995.
- [17] TEIXEIRA M. A., *Generic bifurcation in manifolds with boundary*, J. Differential Equations, **25** (1977), 65-89.
- [18] TEIXEIRA M. A., *Generic Singularities of Discontinuous Vector Fields*, An. Ac. Bras. Cienc., **53** (2) (1991), 257–260.
- [19] TEIXEIRA M. A., *Singularities of reversible vector field*, Physica D **100** (1997), 101–118.

- [20] TEIXEIRA M. A., *Estabilidade de Posições de Equilíbrio em Sistemas com Chaveamento*, Matemática Universitária **16** (1994), 37–45.
- [21] BUZZI C. A., *Generic one-parameter families of reversible vector fields*, Real and complex singularities São Carlos 1998(2000), 201–214.
- [22] SOTOMAJOR J., *Generic One-Parameter Families of Vector Fields on Two-Dimensional Manifolds*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math, 43 (1974) 5-46.
- [23] SOTOMAJOR J., *Introducción al estudio de las bifurcaciones de los sistemas dinámicos*. VII ELAM, Universidad Simon Bolívar, Fondo Editorial, 1984.
- [24] JACOB PALIS JR.; WELINGTON DE MELO, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides; 1ST edition (1978).
- [25] VISHIK S. M., *Vector fields near the boundary of a manifold*, Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika, **27** (1) (1972), 21-28.
- [26] ZELIKIN M. I. AND BORISOV V. F., *Theory of chattering control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering*, (1994), Birkhäuser.