



CLÁUDIA ALINE AZEVEDO DOS SANTOS MESQUITA

EXISTÊNCIA E PROPRIEDADES QUALITATIVAS PARA DOIS TIPOS DE EDP'S COM POTENCIAIS SINGULARES

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

CLÁUDIA ALINE AZEVEDO DOS SANTOS MESQUITA

EXISTÊNCIA E PROPRIEDADES QUALITATIVAS PARA DOIS
TIPOS DE EDP'S COM POTENCIAIS SINGULARES

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Univer-
sidade Estadual de Campinas como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de
Doutora em Matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELA ALUNA CLÁUDIA ALINE AZE-
VEDO DOS SANTOS MESQUITA, E ORIENTADA PELO
PROF. DR. LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

M562e Mesquita, Cláudia Aline Azevedo dos Santos, 1984-
Existência e propriedades qualitativas para dois tipos de EDP's com
potenciais singulares / Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita. – Campinas,
SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Equação de calor. 3. Potenciais
singulares. 4. Existência de solução (Equações diferenciais). 5. Simetria. 6.
Autossimilaridade. 7. Comportamento assintótico de soluções. I. Ferreira, Lucas
Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Existence and qualitative properties for two types of PDE's with
singular potential

Palavras-chave em inglês:

Elliptic differential equations

Heat equation

Singular potentials

Existence of solution (Differential equations)

Symmetry

Self-similarity

Asymptotic behavior of solutions

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]

José Luiz Boldrini

Olivaine Santana de Queiroz

Everaldo Souto de Medeiros

Marcelo Fernandes Furtado

Data de defesa: 17-12-2013

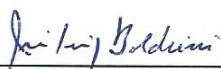
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 17 de dezembro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA



Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof(a). Dr(a). OLIVÂINE SANTANA DE QUEIROZ



Prof(a). Dr(a). EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS



Prof(a). Dr(a). MARCELO FERNANDES FURTADO

Abstract

In this thesis, we study two types of PDEs with critical singular potentials, namely, an elliptic equation with polyharmonic operator and the linear heat equation. For the first, we obtain existence and qualitative properties of solutions in $\mathcal{H}_{k,\tilde{\alpha}}$ -spaces which are a sum of weighted L^∞ -spaces, and seem to be a minimal framework for the potential profile of interest. We investigate a concept of symmetry for solutions which extends radial symmetry and carries out an idea of invariance around singularities. For the second, a strategy based on the Fourier transform is employed to obtain results of global well-posedness and asymptotic behavior of solutions, without smallness hypotheses and without using Hardy inequality. In particular, well-posedness of solutions is obtained for the case of the monopolar potential $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$ with $|\lambda| < \lambda_* = \frac{(n-2)^2}{4}$. This threshold value is the same one obtained for the global well-posedness of L^2 -solutions by means of Hardy inequalities and energy estimates. Since there is no inclusion relation between L^2 and PM^k , our results indicate that λ_* is intrinsic of the PDE and independent of a particular approach.

Keywords: Elliptic equations, heat equations, singular potential, existence, symmetry, self-similarity, asymptotic behavior.

Resumo

Nesta tese, estudamos dois tipos de EDPs com potenciais singulares críticos, a saber, uma equação elíptica com operador poliharmônico e a equação do calor linear. Para a primeira, pesquisamos existência e propriedades qualitativas das soluções no espaço $\mathcal{H}_{k,\tilde{\alpha}}$ que é uma soma de espaços L^∞ com peso, o qual parece ser um espaço mínimo para o tipo de potencial singular considerado. Investigamos um conceito de simetria para soluções que estende o de simetria radial e satisfaz uma ideia de invariância em torno das singularidades. Para a segunda, uma estratégia baseada na transformada de Fourier é empregada para obter resultados de boa-colocação global e comportamento assintótico de soluções, sem hipóteses de pequenez e sem utilizar a desigualdade de Hardy. Em particular, obtemos boa-colocação de soluções para o caso do potencial monopolar $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$ com $|\lambda| < \lambda_* = \frac{(n-2)^2}{4}$. Este valor limiar é o mesmo

obtido em resultados de boa-colocação global em L^2 que utilizam desigualdades de Hardy e estimativas de energia. Desde que não existe uma relação de inclusão entre L^2 e PM^k , nossos resultados indicam que λ_* é intrínseco da EDP e independe de uma particular abordagem.

Palavras-chave: Equações elípticas, equação do calor, potencial singular, existência, simetria, autossimilaridade, comportamento assintótico.

Sumário

Dedicatória	x
Agradecimentos	xi
Introdução	1
1 Espaços funcionais: definições e propriedades	9
1.1 Os espaços $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$	9
1.2 Simetria multipolar	17
1.3 Os espaços PM^k	19
1.4 Alguns resultados básicos	21
2 Existência e simetria para uma equação elíptica com potenciais singulares	26
2.1 Formulação integral	26
2.2 Resultados	28
2.2.1 Existência	28
2.2.2 Regularidade	31
2.2.3 Positividade e simetria	32
2.3 Demonstração dos resultados	33
2.3.1 Estimativas	33
2.3.2 Demonstração do Teorema 2.2.1	37
2.3.3 Demonstração do Teorema 2.2.2	39
2.3.4 Demonstração do Teorema 2.2.13	42
2.3.5 Demonstração do Teorema 2.2.16	43
3 Equação do calor linear com potenciais singulares	45
3.1 Formulação funcional	45
3.2 Resultados	47
3.2.1 Boa-colocação	48
3.2.2 Autossimilaridade, positividade e simetria radial	49
3.2.3 Comportamento assintótico	50
3.2.4 Uma equação parabólica de ordem mais alta	53
3.3 Demonstração dos resultados	55
3.3.1 Demonstração do Teorema 3.2.1	57

3.3.2	Demonstração do Teorema 3.2.4	60
3.3.3	Demonstração do Teorema 3.2.5	62
3.3.4	Demonstração do Teorema 3.2.7	63
Referências bibliográficas		66

Aos meus amados Rafael e Maria Alice Mesquita, família linda que Deus me deu...

Agradecimentos

A Deus por permitir e possibilitar que eu desse tão grande passo em minha vida pessoal e profissional, por me proporcionar tantas experiências, e principalmente, por colocar pessoas tão especiais em meu caminho, sem as quais esta caminhada não teria o mesmo sabor...

A minha família, em especial a meus pais, Alberto dos Santos e Ana dos Santos, a meus irmãos Fábio dos Santos e Cristian Coello, e a meu sobrinho Augusto Geovany dos Santos, por toda ajuda, incentivo e apoio incondicional em todos os momentos e por todo amor e cuidado que a mim dedicaram. Amo todos vocês.

Ao meu esposo Otávio Rafael Mesquita por ter embarcado comigo nessa viagem que nenhum de nós sabíamos onde daria, por ter acreditado em mim, por ser meu braço direito, por todos os momentos inesquecíveis que compartilhamos, e em especial pela minha razão de viver, Maria Alice, um anjinho que caiu do céu direto no nosso colo.

A minha sogra Diana Celi Osmar por tão grande ajuda e por ter renunciado a sua própria dificuldade para estar ao nosso lado nas nossas.

Ao meu orientador, prof. Dr. Lucas Ferreira, por toda sua dedicação, atenção, compreensão e paciência ao longo destes anos. Em especial, por todos os ensinamentos transmitidos, verbais e não-verbais, pois suas atitudes ensinam tanto quanto seu vasto conhecimento matemático. Muito obrigada.

A todos os docentes e funcionários do IMECC/UNICAMP que contribuíram direta ou indiretamente com minha formação. Em especial ao prof. Dr. Paulo Ruffino, pela confiança depositada e grande ajuda em um momento difícil.

A meus amigos irmãos Flávia Nascimento, Rafael Abreu, Ana Paula Mortari, Luciana de Aguiar, Wellington Herbetta, Cícero Alfredo e Pe. Luiz Carlos Araújo, pela grande amizade e companheirismo, vocês são a família que construímos aqui e fizeram parte dos melhores e dos mais difíceis momentos desta jornada.

Ao casal amigo Jaqueline de Freitas e Ricardo Francé, e a seu adorável filho Otávio Francé por todo apoio, por estarem sempre tão disponíveis e por terem cuidado com tanto carinho do meu maior tesouro, minha gratidão é imensurável.

Aos meus queridos compadres Aneci Serra e Denis Figueiredo por toda ajuda e por serem exemplo de dedicação e perseverança, e a minha amada afilhada Iara Figueiredo por ser essa criança tão única e singular para mim e para todos que a cercam.

Aos meus amigos paraenses que mesmo estando longe se fizeram sempre tão presentes, em especial a Amanda Suelen Corrêa, Inez Ferreira, Luciana de Araújo, Andrey Ferreira, Irmã Socorro, Laís Carvalho, vocês são muito especiais para mim.

Aos queridos amigos de curso, em especial Rafael Abreu, Lidiane Lima, Adriana Cintra, Manuela Souza, Maicon Benvenuti Wender Souza, e todos os quais não citei, foi um grande prazer conviver e dividir com vocês os melhores anos estudantis de minha vida.

A UNICAMP, em especial ao SAE e a administração da Moradia Estudantil, que proporcionaram moradia para mim e minha família durante boa parte desta caminhada.

A CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Ninguém escapa ao sonho de voar, de ultrapassar os limites do espaço onde nasceu, de ver novos lugares e novas gentes. Mas saber ver em cada coisa, em cada pessoa, aquele algo que a define como especial, um objeto singular, um amigo - é fundamental. Navegar é preciso, reconhecer o valor das coisas e das pessoas, é mais preciso ainda!

Antoine de Saint-Exupéry

Introdução

Equações diferenciais parciais com potenciais dependendo de potências negativas aparecem em muitos contextos físicos tais como física molecular, mecânica quântica não-relativista, cosmologia quântica, análise linearizada de modelos de combustão, e muitos outros (veja [34],[49],[52],[23],[29] e referências destes). Estes potenciais podem ser classificados de acordo com o número de singularidades (polos), o grau σ da singularidade (ordem dos polos), dependência da direção (anisotrópico) e decaimento no infinito. Para equações elípticas, um dos casos mais desafiadores são os potenciais multipolares anisotrópicos da forma

$$V(x) = \frac{h_1(\frac{x-x_1}{|x-x_1|})}{|x-x_1|^\sigma} + \dots + \frac{h_l(\frac{x-x_l}{|x-x_l|})}{|x-x_l|^\sigma}, \quad (0.0.1)$$

onde $l \geq 1$, $h_i \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ e o parâmetro σ é a ordem dos polos $x_1, \dots, x_l$. Se $l = 1$, V é chamado monopolar, e se $l > 1$, V é chamado multipolar. A situação crítica ocorre, por exemplo, quando σ é igual a ordem da EDP, se esta for elíptica, ou ainda, igual a ordem da parte principal do operador elíptico associado, caso esta seja uma equação de evolução. Este caso apresenta dificuldades a mais em sua análise matemática, visto que no caso crítico (como apontado em [23]), V não pertence a classe de Kato. No que se refere a isotropia, o potencial em (0.0.1) é chamado isotrópico quando as funções h_i são constantes (isto é, independem das direções $\frac{x-x_1}{|x-x_1|}$), caso contrário, V é dito anisotrópico. Potenciais isotrópicos monopolar e multipolar são conhecidos como potenciais de Hardy e potenciais de Hardy multipolar, respectivamente.

Nesta tese estamos interessados em estudar dois tipos de equações diferenciais com potenciais multipolares. O primeiro deles é uma equação elíptica semilinear com o operador poliharmônico $(-\Delta)^m$, e com condições no infinito do tipo Navier homogêneas. Para esta, desenvolvemos uma teoria de existência nos espaços $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ (a ser definido em (0.0.5)) e também analisamos aspectos qualitativos da solução como regularidade, positividade e simetria. O segundo é a equação do calor linear, sobre a qual mostramos resultados de boa-colocação nos espaços PM^k , bem como mostramos autossimilaridade das soluções, positividade e simetria radial. No que segue descrevemos cada um destes problemas e suas motivações.

Uma equação elíptica com potenciais singulares

Equações elípticas com o operador laplaciano e potenciais singulares V , tais como

$$-\Delta u = u|u|^{p-1} + V(x)u \text{ em } \mathbb{R}^n \quad (0.0.2)$$

tem sido muito estudadas na literatura, principalmente usando métodos variacionais combinados com desigualdades do tipo Hardy, o que naturalmente nos leva a restrição $1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$, com soluções pertencendo a espaços de Sobolev. Para esta abordagem, mencionamos os trabalhos [36],[25],[27],[57],[58],[60] para o caso monopolar, e [23], [29], [22],[24],[28] para o multipolar, onde os autores de [22],[24] estudaram o caso multipolar anisotrópico. Em [25] e [26] são empregados métodos variacionais de perturbação, inclusive para valores críticos de p . Para o caso de potenciais suaves, existe uma vasta literatura para (0.0.2) tratando questões como existência, simetria e concentração de soluções (veja por exemplo [5],[6] e suas referências).

Quando tomamos $V = 0$ e $1 \leq p < \infty$, com $p \neq \frac{n+2}{n-2}$, pode-se usar identidades do tipo Pohozaev para mostrar que a equação (0.0.2) não possui soluções positivas em $H^1(\mathbb{R}^n)$ (veja [21] pág. 514). No caso crítico, isto é, $p = \frac{n+2}{n-2}$, existem soluções positivas em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, para $n \geq 3$, as chamadas *instantons*, as quais não pertencem a $H^1(\mathbb{R}^n)$ para $n = 3, 4$. No caso de condição de fronteira de Dirichlet nula em domínios suaves estrelados com relação a origem, soluções positivas em H^1 existem se, e somente se, p é subcrítico. Esses fatos motivam o estudo de versões não-homogêneas de (0.0.2) para valores supercríticos de p .

Em [31] e [32], os autores empregaram uma abordagem não-variacional baseada em funções de Green e em argumentos de ponto fixo com o objetivo de tratar a versão não-homogênea de (0.0.2)

$$-\Delta u = u|u|^{p-1} + V(x)u + f \text{ em } \mathbb{R}^n \quad (0.0.3)$$

para $p > \frac{n}{n-2}$, um intervalo de p que cobre os casos crítico e supercrítico variacional. Em [31], é considerado o caso em que V pertence ao espaço de Lebesgue anisotrópico, e em [32] os autores consideram potenciais monopulares $V(x) = h(\frac{x}{|x|})|x|^{-2}$.

No capítulo 2 desta tese estudamos a equação poliharmônica semilinear

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = u|u|^{p-1} + V(x)u + f, & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ (-\Delta)^j u \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \text{ para } j = 0, \dots, m-1, \end{cases} \quad (0.0.4)$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $n > 2m$, e $p > \frac{n}{n-2m}$. As condições de fronteira no infinito em (0.0.4) são chamadas de Navier homogêneas. Neste trabalho tratamos o caso em que $\sigma = 2m$ para o potencial V em (0.0.1), o que torna este potencial crítico com respeito ao operador poliharmônico $(-\Delta)^m$. Assim, o produto Vu não pode ser tratado como um termo de perturbação de ordem mais baixa dentro do operador elíptico $E_m(u) = (-\Delta)^m u - Vu$. Desde que a potência m pode ser igual a 1, nossos resultados também são novos para (0.0.3), isto é, para o caso do laplaciano.

Equações poliharmônicas semilineares com condição de Navier e com outras condições de fronteira tem atraído a atenção de muitos autores. Podemos citar [10],[11],[37], [39],[38],[40],[64] e suas referências, onde pode-se encontrar resultados de existência, simetria e positividade de soluções por meio de técnicas variacionais, o que requer $1 < p \leq \frac{n+2m}{n-2m}$ e algum tipo de compacidade. O expoente $p_c = \frac{n+2m}{n-2m}$ é chamado crítico variacional para a não-linearidade $u|u|^{p-1}$. Estes trabalhos consideram V não-singular ou $V = 0$, exceto em [64] que estudou o operador biharmônico ($m = 2$) em domínios limitados, considerando valores subcríticos de p e um potencial monopolar isotrópico. Outra abordagem encontrada na literatura é via o Teorema do ponto fixo de Schauder (veja por exemplo [19] e [8]) que requer (para ter uma certa compacidade) soluções e coeficientes em espaços regulares (pelo menos continuidade uniforme). Claramente,

a última condição não permite considerar V como em (0.0.1). Para não-linearidades supercríticas (isto é, $p > p_c$) e $V = 0$, têm sido empregadas técnicas de EDO (para soluções radiais), e o método de sub-super solução para alguns tipos específicos de não-linearidades (por exemplo $(1 + u)^p$) e para alguns domínios limitados (por exemplo, a bola aberta) (veja [37, Capítulo 7] para maiores detalhes). Também mencionamos [47] e [46], onde são considerados potenciais periódicos limitados no estudo do espectro de operadores poliharmônicos lineares.

Nosso objetivo é desenvolver uma teoria de existência para (0.0.4), que permita considerar potenciais multipolares críticos como (0.0.1), e demonstrar propriedades qualitativas das soluções tais como regularidade, positividade e simetrias. A técnica que empregamos para existência é baseada em um argumento de contração, sendo do tipo não-variacional e sem requerer propriedades de compacidade nos espaços funcionais ou domínios. Desde que $\frac{n}{n-2m} < p_c$, note que nossos valores para p cobrem em particular os casos crítico e supercrítico variacional.

Em vista da expressão (0.0.1), é natural analisar o problema (0.0.4) em um espaço cuja norma forneça um controle próximo de cada polo x_i . Nesta direção, definimos o seguinte espaço:

$$\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}} = \{u \text{ mensurável} : u = u_1 + \dots + u_l, \quad u_j \in H_{k,x_j}, \quad j = 1, \dots, l\}, \quad (0.0.5)$$

onde $k \geq 0$, $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l) \in (\mathbb{R}^n)^l$ e, para um fixo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$H_{k,z} = \{u \text{ mensurável} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x - z|^k |u(x)| < \infty\} \quad (0.0.6)$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{k,z} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x - z|^k |u(x)|. \quad (0.0.7)$$

O espaço com uma singularidade (0.0.6) e $z = 0$ foi usado em [32]. Munindo (0.0.5) com a norma natural

$$\|u\|_{k,\vec{\alpha}} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^l \|u_j\|_{k,x_j} : u = u_1 + \dots + u_l \text{ com } u_j \in H_{k,x_j} \right\}, \quad (0.0.8)$$

temos que $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ é um espaço de Banach, conforme será mostrado na Seção 1.1 do Capítulo 1. Segue de (0.0.8) que $V(x)$ como em (0.0.1) com a potência crítica $\sigma = 2m$ pertence a $\mathcal{H}_{2m,\vec{\alpha}}$ e

$$\|V(x)\|_{2m,\vec{\alpha}} \leq \sum_{i=1}^l \|h_i\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}. \quad (0.0.9)$$

Mostramos a existência de solução para (0.0.4) em $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ com $k = \frac{2m}{p-1}$, sob condições de pequenez no potencial $V \in \mathcal{H}_{2m,\vec{\alpha}}$ e no termo não-homogêneo $f \in \mathcal{H}_{kp,\vec{\alpha}}$ (veja Teorema 2.2.1). A taxa $k = \frac{2m}{p-1}$ governa o comportamento da solução próximo ao conjunto de singularidades e no infinito, e esta taxa é ótima para algumas soluções (veja Observação 2.2.6). No entanto, ela pode ser melhorada assumindo mais condições sobre V e f (veja Teorema 2.2.2 e Observação 2.2.3), e então vemos que a taxa exata de u varia de acordo com a de f , e pode ou não ser igual a $k = \frac{2m}{p-1}$. O tamanho de V e f depende de constantes explícitas de estimativas para os operadores integrais que aparecem na formulação integral de (0.0.4) (veja (2.1.6)). De fato, este tamanho pode

variar de acordo com a posição relativa das singularidades $x_1, \dots, x_l$ (veja Observação 2.2.11). Usando que as soluções dependem continuamente de V , obtemos no Corolário 2.2.7 que as soluções são estáveis em $\mathcal{H}_{k,\bar{\alpha}}$ com respeito às componentes angulares h_i dos potenciais. Em geral, não é esperado que uma solução u seja suave em $\mathbb{R}^n$, devido ao perfil singular de V em (0.0.1). Nesta direção, mostramos no Teorema 2.2.13 que $u \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$, que parece ser a regularidade ótima para $V \in \mathcal{H}_{2m,\bar{\alpha}}$ e $f \in \mathcal{H}_{kp,\bar{\alpha}}$ gerais. Assumindo ainda que V e f são suaves fora dos polos (por exemplo V como em (0.0.1) com h_i 's suaves), obtemos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$. Veja a Observação 2.2.15 para uma discussão sobre o resultado de regularidade.

Para alcançar os resultados acima, precisamos desenvolver uma teoria básica para os espaços $\mathcal{H}_{k,\bar{\alpha}}$ (veja Seção 1.1 no capítulo 1), mostrando propriedades como decomposição ótima, desigualdade do tipo Hölder, monotonicidade da norma $\mathcal{H}_{k,\bar{\alpha}}$, entre outras. De fato, até onde sabemos, as propriedades demonstradas para tais espaços na Seção 1.1 (exceto o Lema 1.1.1) são novas na literatura matemática. Cabe mencionar que parece ser a primeira vez que tais espaços são utilizados na área de equações diferenciais parciais, e eles podem ser aplicados em outras situações.

Um exemplo típico de função em $\mathcal{H}_{k,\bar{\alpha}}$ é

$$h(x) = \frac{\lambda_1}{|x - x_1|^k} + \dots + \frac{\lambda_l}{|x - x_l|^k}, \quad (0.0.10)$$

que claramente, somente no caso monopolar $\{x_1, \dots, x_l\} = \{0\}$, é radialmente simétrica. Então, é natural nos questionarmos quanto a um conceito de simetria que estenda o de radialidade e que seja verificado por (0.0.10). Para isto, na Seção 1.2 do Capítulo 1, introduzimos um novo conceito de simetria que chamamos de simetria multipolar com relação ao par $(\sigma, \mathcal{M})$, onde σ é uma permutação de $\{x_1, \dots, x_l\}$ e $\mathcal{M}$ é um subconjunto de transformações lineares ortogonais em $\mathbb{R}^n$ (veja definição 1.2.1). No Teorema 2.2.16, mostramos que as soluções apresentam este tipo de simetria dado que V e f também apresentem. Esta simetria estende um conceito de soluções invariantes por $\mathbb{Z}_l \times O(n-2)$ estudado em [29], o qual é definido para o caso dos polos serem os vértices de um polígono centrado na origem e contido em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (veja Observação 1.2.3 (iii) e (1.2.7)). No Teorema 2.2.16 investigamos também a positividade das soluções.

Uma abordagem para (0.0.4) baseada na transformada de Fourier pode ser encontrada em [33]. Neste trabalho, os autores estudaram (0.0.4) nos espaços PM^a com u^p no lugar de $u|u|^{p-1}$, $p > \frac{n}{n-2m}$ um inteiro positivo, e com alguns tipos de potenciais multipolares pequenos. Por exemplo, para $V(x)$ como em (0.0.1) com h_i 's constantes e com uma condição de pequenez. Além disso, alguns tipos de potenciais anisotrópicos são também considerados mas não um perfil arbitrário $h_i \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$. Também, o uso da transformada de Fourier restringe o estudo de [33] a todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

Desde que nossa estratégia não usa transformada de Fourier, esta pode ser empregada em muitas outras situações. Com efeito, podemos tratar versões de (0.0.4) em um domínio suave, no semi-espaço ou em um domínio exterior Ω de $\mathbb{R}^n$, incluindo casos de condições de fronteira do tipo Dirichlet (veja Observação 2.2.9). Além disto, os resultados podem ser adaptados para tratar uma não-linearidade geral $N(u)$ verificando $N(0) = 0$ e

$$|N(u) - N(v)| \leq C |u - v| \left(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} \right).$$

Na Observação 2.2.10, comentamos como a estratégia pode ser usada para estudar uma EDP com o operador $(-\Delta - V)^m$ em lugar de $E_m = (-\Delta)^m - V$.

Para finalizar, comentamos que os principais resultados deste estudo estão aceitos para publicação em *Indiana University Mathematics Journal* (veja [30]). Um preprint deste trabalho está disponível no seguinte endereço eletrônico:

<http://www.iuj.indiana.edu/IUMJ/Preprints/5131.pdf>

A equação do calor linear com potenciais singulares

No capítulo 3, investigamos o problema de Cauchy para a equação do calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - Vu = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (0.0.11)$$

onde $n \geq 3$ e $V(x)$ é um potencial singular.

Note que o caso crítico para (0.0.11) é quando $\sigma = 2$. Um exemplo é o potencial (Hardy) de quadrado inverso

$$V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (0.0.12)$$

e suas versões multisingulares

$$V(x) = \sum_{j=1}^l \frac{\lambda_j}{|x - x^j|^2} \text{ e } V(x) = \sum_{j=1}^l \frac{(x - x^j) \cdot d^j}{|x - x^j|^3}, \quad (0.0.13)$$

onde $x^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) \in \mathbb{R}^n$ e $d^j = (d_1^j, d_2^j, \dots, d_n^j) \in \mathbb{R}^n$ são vetores constantes para cada $j = 1, \dots, l$. Os potenciais em (0.0.13) são chamados isotrópico e anisotrópico multipolar de quadrado inverso, respectivamente, e são da forma (0.0.1).

Existe um conceito bem conhecido de criticalidade associado ao tamanho do parâmetro λ em (0.0.12) e conectado a melhor constante na desigualdade de Hardy

$$\lambda_* \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (0.0.14)$$

a qual é dada por

$$\lambda_* = \frac{(n-2)^2}{4}. \quad (0.0.15)$$

De fato, um trabalho importante devido a Baras e Goldstein [9] estabelece um valor limiar para a existência (ou não) de solução positiva em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, se $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$ então (0.0.11) é bem colocada em $L^2(\mathbb{R}^n)$, enquanto que ela não é bem colocada para $\lambda > \lambda_*$. No último caso, de fato, não existe solução local (no tempo) fraca não-negativa $u \not\equiv 0$ para $u_0 \geq 0$, enquanto que no primeiro existe solução global fraca positiva quando $u_0 \geq 0$ e $u_0 \not\equiv 0$. Devido a esta dicotomia, os casos $\lambda \in [0, \lambda_*)$, $\lambda = \lambda_*$ e $\lambda > \lambda_*$ são chamados respectivamente valores

sub-críticos, crítico e supercríticos para λ , veja [43] e [63] para uma discussão mais detalhada sobre esta dicotomia.

Nos últimos quinze anos, os resultados de [9] têm motivado muitos trabalhos sobre a equação do calor com potenciais singulares. Bem como em [9], a desigualdade de Hardy (0.0.14) (e suas versões) é uma ferramenta crucial na literatura de (0.0.11). No que segue, sem a pretensão de fazer uma lista completa, iremos relembrar alguns trabalhos importantes. Em um domínio suave Ω e para um potencial singular positivo $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, são demonstrados resultados de existência e não-existência em [14] via condições sobre o ínfimo do espectro do operador $\Delta - V$. Kombe [48] mostrou que o resultado de não-existência de soluções positivas em [14] não é afetado quando o potencial V é perturbado por um potencial singular com uma oscilação rápida que muda de sinal. Uma outra extensão dos resultados de [9] para uma equação parabólica com coeficientes variáveis na parte principal, pode ser encontrada em [43]. Os autores de [63] melhoraram a desigualdade de Hardy-Poincaré em um domínio limitado, e mostraram uma versão com peso desta desigualdade em $\mathbb{R}^n$. Depois, eles mostraram estabilização exponencial para uma dada solução expressada em variáveis separadas em um domínio limitado, e estabilização polinomial para uma solução radialmente simétrica em variáveis autossimilares. Para equações elípticas e parabólicas lineares com $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ positivo, resultados semelhantes são obtidos em [20], usando as desigualdades do tipo Hardy de [63]. Também, usando algumas formas da desigualdade de Hardy-Poincaré e estimativas de Carleman, problemas de fonte inversa para (0.0.11) tem sido estudados com $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$ (veja [62] e suas referências). Motivados por *blowing-up* instantâneo de soluções não-negativas em $H^1_0(\Omega)$ quando $\lambda = \lambda_*$, os autores de [17] encontraram condições em alguns tipos de perturbações de potenciais críticos $\frac{\lambda_*}{|x|^2}$, para obter existência ou não-existência de soluções em $H^1(\Omega)$ (veja [41] para resultados relacionados no caso estacionário). Resultados sobre não-existência de soluções quando $\lambda > \lambda_*$ para uma perturbação de (0.0.11) com

$$-\nabla \sigma \cdot \nabla u + \frac{\lambda}{|x|^2} u \quad (0.0.16)$$

em lugar de Vu , podem ser encontrados em [42]. Resultados sobre existência, não-existência, expoentes do tipo Fujita, autossimilaridade, bifurcações e *blow-up* instantâneo para perturbações (não-lineares) de (0.0.11) por u^p e $|\nabla u|^p$ podem ser encontrados em [4],[3],[2],[61],[45],[54],[56] (veja também [18]). Outros problemas elípticos lineares e semilineares relacionados a (0.0.11) foram considerados em [1],[61],[22],[23],[24],[58], onde os resultados também apresentam uma dicotomia devido a influência de potenciais de Hardy. Aqui, cabe destacar que os resultados do capítulo 2 desta tese também não utilizam desigualdade de Hardy e tratam com equações elípticas semilineares com potenciais singulares como em (0.0.13).

Nos trabalhos citados anteriormente, o uso da desigualdade de Hardy (0.0.14) impõe tanto que u esteja em L^2 , quanto a condição $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, para a boa-colocação de soluções neste espaço. Então, uma questão natural aparece: existe um espaço diferente de L^2 no qual (0.0.11) com (0.0.12) é bem colocada para $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$ ou pelo menos para $0 \leq \lambda < \lambda_*$? Nesta tese, daremos uma resposta positiva para esta questão usando os espaços PM^a e uma estratégia baseada na transformada de Fourier que não utiliza a desigualdade de Hardy (veja Teorema 3.2.1). Desde que não existe nenhuma relação de inclusão entre L^2 e PM^a , e as correspon-

dentes técnicas são de natureza diferentes, nossos resultados indicam que λ_* é intrínseca da EDP (0.0.11) e independe de uma técnica particular. Outro objetivo é obter resultados para potenciais multipolares como (0.0.13), fornecendo condições explícitas sobre os parâmetros do potencial para boa-colocação global de soluções (veja Corolário 3.2.2). Observe que, bem como em [63], também consideramos dados iniciais, soluções e potenciais que mudam de sinal.

Os autores de [35] estudaram a equação parabólica de ordem mais alta

$$u_t + (-\Delta)^m u + \frac{\lambda}{|x|^\sigma} u = 0 \quad (0.0.17)$$

com singularidade crítica $\sigma = 2m$ e $n > 2m$. Em particular, usando a desigualdade de Hardy, eles estenderam os resultados de Baras-Goldstein obtendo um valor limiar explícito λ_m para boa-colocação de soluções em L^2 , o qual é chamado de a melhor constante de Hardy de desigualdades multiplicativas envolvendo $V(x) = \lambda|x|^{-2m}$. Com alguma adaptação nas demonstrações, os resultados obtidos nas Subseções 3.2.1 e 3.2.2 podem ser estendidos para (0.0.17), obtendo-se boa-colocação das soluções em PM^a quando $0 \leq |\lambda| < \lambda_m$ (veja Teorema 3.2.7)

De um outro ponto de vista, regularização parabólica não funciona para soluções não-triviais quando V é singular, e então as soluções não podem ser suaves em $\mathbb{R}^n$. Isto também motiva a análise da boa-colocação de (0.0.11) em um espaço singular como PM^a que contém funções que podem ser muito irregulares e que podem não decair quando $|x| \rightarrow \infty$. De fato, o Teorema 3.2.1 e o Corolário 3.2.2 mostram que o semigrupo formal associado com a equação (0.0.11) pode ser estendido para o espaço PM^a , considerando-se a classe de potenciais singulares $V \in PM^{n-2}$ satisfazendo uma condição de pequenez.

Os autores de [63] mostraram que certas soluções com dado inicial positivo no espaço com peso $L^2(\mathbb{R}^n, \exp(|x|^2/4)dx)$ convergem na norma $t^{1/2} \|\cdot\|_{L^2}$ para uma dada solução não-estacionária explícita (a menos de uma constante) quando $t \rightarrow \infty$. Aqui, obtemos uma partição de PM^a em infinitos subconjuntos disjuntos (induzida por uma relação de equivalência) tal que o comportamento de u em tempos grandes depende do subconjunto que contém o dado inicial u_0 (veja Teorema 3.2.5 e Observação 3.2.6). Em particular, para u_0 pertencendo a subconjuntos especiais, a solução converge para um estado estacionário dado explicitamente. Estes resultados mostram que o comportamento assintótico de soluções no espaço PM^a é mais complexo do que o das soluções em L^2 , pelo menos em uma aproximação de ordem $o(1)$, quando $t \rightarrow \infty$.

O problema (0.0.11) é convertido em uma equação funcional obtida aplicando-se formalmente a transformada de Fourier e usando o princípio de Duhamel. Esta abordagem e os espaços PM^a tem sido usados no contexto de mecânica dos fluidos e equações parabólicas semilineares sem potenciais singulares (ver [13], [15], [16], [50], [55]). Contudo, até aonde sabemos, nossos resultados constituem um primeiro exemplo de uso desta abordagem para tratar um problema de existência global para uma EDP parabólica com um valor limiar ótimo determinado por outra técnica.

Esta tese está organizada em três capítulos. No Capítulo 1, introduzimos definições e demonstramos propriedades dos espaços funcionais usados no estudo de (0.0.4) e (0.0.11). Mais especificamente, na Seção 1.1 definimos o espaço $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ e demonstramos algumas de suas propriedades, e na Seção 1.2 introduzimos o conceito de simetria multipolar. Os resultados de ambas

as seções serão usados no Capítulo 2. Na Seção 1.3, relembramos a definição dos espaços PM^a que serão usados no Capítulo 3. Na Seção 1.4 apresentamos alguns resultados básicos usados no decorrer do trabalho. No Capítulo 2, enunciamos e demonstramos os resultados obtidos para o problema elíptico (0.0.4), e no Capítulo 3 encontram-se os resultados alcançados para a equação do calor linear (0.0.11). Estes estão subdivididos em seções para uma melhor dinâmica e organização do trabalho.

Capítulo 1

Espaços funcionais: definições e propriedades

Neste capítulo, construímos uma teoria básica para os espaços $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$, no qual desenvolvemos uma teoria de existência de solução para o problema (0.0.4). Além disso, relembramos a definição e as principais propriedades dos espaços PM^a , no qual mostramos a boa-colocação de soluções do problema (0.0.11). Também enunciamos e demonstramos alguns resultados conhecidos que serão usados ao longo deste trabalho.

1.1 Os espaços $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$

Nesta seção provamos algumas propriedades importantes do espaço $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$, tais como existência de decomposição ótima, monotonicidade da norma, desigualdade do tipo Hölder, entre outras. Tais propriedades são de fundamental importância nas provas dos principais resultados do Capítulo 2. Para conveniência do leitor, relembramos a definição de $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ dada na introdução:

$$\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}} = \{u \text{ mensurável} : u = u_1 + \dots + u_l, \quad u_j \in H_{k,x_j}, \quad j = 1, \dots, l\}, \quad (1.1.1)$$

onde $k \geq 0$, $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l) \in (\mathbb{R}^n)^l$ e, para um fixo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$H_{k,z} = \{u \text{ mensurável} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x - z|^k |u(x)| < \infty\} \quad (1.1.2)$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{k,z} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x - z|^k |u(x)|. \quad (1.1.3)$$

O espaço (1.1.1) munido com a norma soma

$$\|u\|_{k,\vec{\alpha}} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^l \|u_j\|_{k,x_j} : u = u_1 + \dots + u_l \text{ com } u_j \in H_{k,x_j} \right\}, \quad (1.1.4)$$

é um espaço de Banach. Este fato é uma consequência do seguinte resultado mais geral:

Lema 1.1.1. Sejam $X_0, \dots, X_l$ espaços de Banach tais que exista algum espaço vetorial topológico de Hausdorff $\mathcal{W}$ em que todos estejam continuamente imersos. Considere o espaço

$$X = X_0 + \dots + X_l = \{x = x_0 + \dots + x_l; x_j \in X_j, j = 1, \dots, l\}.$$

Então, a quantidade

$$\|x\|_X = \inf \left\{ \sum_{j=0}^l \|x_j\|_{X_j}, \text{ tais que } x = x_0 + \dots + x_l \right\} \quad (1.1.5)$$

define uma norma em X e este espaço munido com esta norma é um espaço de Banach.

Demonstração: Este resultado pode ser encontrado em [12]. É fácil ver que a função em (1.1.5) define uma norma em X . Para mostrar que este, munido de tal norma, é um espaço de Banach, é suficiente mostrar que toda série absolutamente convergente é convergente. Seja $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência em X satisfazendo $\sum_{n=1}^\infty \|x^n\|_X < \infty$. Cada x^n é representável como $x^n = x_0^n + \dots + x_l^n$ e

$$\|x_0^n\|_{X_0} + \dots + \|x_l^n\|_{X_l} < \|x^n\|_X + 2^{-n}.$$

Então, a série

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_0^n\|_{X_0} + \dots + \|x_l^n\|_{X_l}$$

também converge. Logo, desde que os espaços X_j 's são de Banach, $\sum_{n=1}^\infty x_i^n$ converge em X_i para $i = 0, \dots, l$. Assim, existe $y_i \in X_i$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^N x_i^n - y_i \right\|_{X_i} \longrightarrow 0,$$

quando $N \rightarrow \infty$. Desde que

$$\left\| \sum_{n=1}^N x_0^n + \dots + x_l^n - (y_0 + \dots + y_l) \right\|_X \leq \left\| \sum_{n=1}^N x_0^n - y_0 \right\|_{X_0} + \dots + \left\| \sum_{n=1}^N x_l^n - y_l \right\|_{X_l}, \quad (1.1.6)$$

fazendo $N \rightarrow \infty$ em (1.1.6), obtemos que $\sum_{n=1}^\infty x^n$ converge para $y = y_0 + \dots + y_l$ em X . $\square$

Observação 1.1.2. Note que os espaços $H_{k,z}$ estão todos contidos no espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

A seguir damos um exemplo de uma típica função em $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$.

Exemplo 1.1.3. Considere h como em (0.0.10), isto é,

$$h(x) = \frac{\lambda_1}{|x - x_1|^k} + \dots + \frac{\lambda_l}{|x - x_l|^k}. \quad (1.1.7)$$

Por (1.1.2) e (1.1.3), obtemos, para cada $i = 1, \dots, l$, que

$$h_i(x) := \frac{\lambda_i}{|x - x_i|^k} \in H_{k,x_i} \text{ com } \|h_i\|_{k,x_i} = |\lambda_i|.$$

Assim, temos que

$$h \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}} \text{ e } \|h\|_{k,\vec{\alpha}} \leq \sum_{i=1}^l |\lambda_i|. \quad (1.1.8)$$

Nos próximos lemas, mostramos algumas propriedades importantes destes espaços que serão ingredientes chave na prova dos principais resultados do Capítulo 2. O primeiro assegura que para cada $u \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$, existe uma decomposição $u = u_1 + \dots + u_l$ que atinge o ínfimo em (1.1.4).

Lema 1.1.4. Seja $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l)$, $0 \leq k < n$, e $u \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$. Existem $u_1, \dots, u_l$ tais que $u_j \in H_{k,x_j}$, para cada $j = 1, \dots, l$, e

$$u = u_1 + \dots + u_l \text{ com } \|u\|_{k,\vec{\alpha}} = \|u_1\|_{k,x_1} + \dots + \|u_l\|_{k,x_l}. \quad (1.1.9)$$

Uma decomposição como em (1.1.9) é chamada de decomposição ótima para a norma (1.1.4).

Demonstração: Para cada $j = 1, \dots, l$, seja $\{u_{j,s}\}_{s \in \mathbb{N}} \subset H_{k,x_j}$ tal que

$$u = u_{1,s} + \dots + u_{l,s}, \forall s \in \mathbb{N}, \quad (1.1.10)$$

com

$$\sum_{j=1}^l \|u_{j,s}\|_{k,x_j} \rightarrow \|u\|_{k,\vec{\alpha}} \text{ quando } s \rightarrow \infty. \quad (1.1.11)$$

Tal sequência existe pela definição da norma em (1.1.4) e, em particular, as sequências $\{u_{j,s}\}_{s \in \mathbb{N}}$ são limitadas em H_{k,x_j} , para cada $j = 1, \dots, l$ fixo. Desde que, a aplicação $F : H_{k,x_j} \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $F(u(x)) = |x - x_j|^k u(x)$ define um isomorfismo isométrico entre os espaços H_{k,x_j} e $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema de Banach-Alaoglu, passando a uma subsequência, podemos assumir que

$$u_{j,s} \rightharpoonup u_j \text{ fraco-}^* \text{ em } H_{k,x_j}, \quad (1.1.12)$$

Para algum $u_j \in H_{k,x_j}$, e $\|u_{j,s}\|_{k,x_j} \rightarrow a_j$ quando $s \rightarrow \infty$. Note que, de fato $\|u\|_{k,\vec{\alpha}} = \sum_{j=1}^l a_j$. Desde que $k < n$, a convergência (1.1.12) implica que $u_{j,s} \rightarrow u_j$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para cada $j = 1, \dots, l$. Com efeito, dada a aplicação F , temos que a convergência em (1.1.12) implica em

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - x_j|^k u_{j,s}(x) \phi(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_j|^k u_j(x) \phi(x), \text{ para toda } \phi \in L^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.1.13)$$

Agora, como para toda função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a função $\phi(x) = \frac{f(x)}{|x - x_j|^k}$ com $k < n$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$, substituindo tal ϕ em (1.1.13), obtemos a convergência desejada. Além disso,

$$\sum_{j=1}^l u_{j,s} \rightarrow \sum_{j=1}^l u_j \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

e obtemos de (1.1.10) que $u = u_1 + \dots + u_l$. Também, segue de (1.1.12) que

$$\|u_j\|_{k,x_j} \leq \liminf \|u_{j,s}\|_{k,x_j} \text{ quando } s \rightarrow \infty. \quad (1.1.14)$$

A igualdade (1.1.10) e a estimativa (1.1.14) nos dão que

$$\sum_{j=1}^l \|u_j\|_{k,x_j} \leq \sum_{j=1}^l \liminf \|u_{j,s}\|_{k,x_j} = \sum_{j=1}^l a_j = \|u\|_{k,\vec{\alpha}}.$$

Portanto, em vista de (1.1.4), $\|u\|_{k,\vec{\alpha}} = \sum_{j=1}^l \|u_j\|_{k,x_j}$. $\square$

Ainda podemos melhorar o Lema 1.1.4 no sentido de que existe uma decomposição ótima que preserva positividade.

Lema 1.1.5. Seja $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l)$ e $0 \leq k < n$.

- (i) Se $u \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ e $u \geq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, então existe uma decomposição ótima $u = u_1 + \dots + u_l$ tal que $u_j \geq 0$, $j = 1, \dots, l$.
- (ii) Se $u \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ então $u^+, u^-, |u| \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ e existe uma decomposição $u = v_1 + \dots + v_l$ tal que $u^+ = v_1^+ + \dots + v_l^+$ e $u^- = v_1^- + \dots + v_l^-$, onde u^+ e u^- são, respectivamente, as partes positiva e negativa de u . Também temos a estimativa

$$\|u\|_{k,\vec{\alpha}} \leq \| |u| \|_{k,\vec{\alpha}}. \quad (1.1.15)$$

Demonstração:

Parte (i). Provaremos primeiramente o caso $l = 2$. Seja $u = u_1 + u_2$ uma decomposição ótima (existe pelo Lema 1.1.4) e considere o seguinte subconjunto

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : u_1(x) < 0\} \text{ e } A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : u_2(x) < 0\}. \quad (1.1.16)$$

Temos que $u_1 \in H_{k,x_1}$ e $u_2 \in H_{k,x_2}$. Desde que $u \geq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, se $A_1 \cap A_2 = Q$ então $m(Q) = 0$, onde m denota a medida de Lebesgue. Sem perda de generalidade, podemos supor que $Q = \emptyset$. Se $x \in A_1$ então

$$|u_1(x)| = -u_1(x) = u_2(x) - u(x) \leq u_2(x),$$

de onde segue que $u_1|_{A_1} \in H_{k,x_2}$. Da mesma maneira, podemos obter $|u_1(x)| \leq u_1(x)$ para $x \in A_2$, de onde segue que $u_2|_{A_2} \in H_{k,x_1}$. Considere a decomposição

$$u = u_1 + u_2 = (u_1 - u_1|_{A_1} + u_2|_{A_2}) + (u_2 - u_2|_{A_2} + u_1|_{A_1}) := v_1 + v_2.$$

Note que $v_1 \in H_{k,x_1}$, $v_2 \in H_{k,x_2}$ e, desde que $A_2 \subset A_1^c$ e $A_1 \subset A_2^c$, obtemos $v_1, v_2 \geq 0$. De fato, temos que

$$v_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in A_1 \\ u_1(x) + u_2(x), & \text{se } x \in A_2 \\ u_1(x), & \text{se } x \in (A_1 \cap A_2)^c \end{cases} \quad (1.1.17)$$

de onde segue que $v_1 \geq 0$. Da mesma maneira segue para v_2 . Além disso,

$$\|v_1\|_{k,x_1} = \|u_1|_{A_1^c} + u_2|_{A_2}\|_{k,x_1} \leq \|u_1|_{A_1^c}\|_{k,x_1} \leq \|u_1\|_{k,x_1},$$

$$\|v_2\|_{k,x_2} = \|u_2|_{A_2^c} + u_1|_{A_1}\|_{k,x_2} \leq \|u_2|_{A_2^c}\|_{k,x_1} \leq \|u_2\|_{k,x_2}.$$

Logo, $u = v_1 + v_2$ é também uma decomposição ótima.

O caso geral será provado por um argumento de indução. Suponha a existência da decomposição ótima positiva para $\vec{\alpha} \in (\mathbb{R}^n)^{l-1}$ qualquer. Provaremos a existência para o caso em que $\vec{\alpha} \in (\mathbb{R}^n)^l$. Para maior clareza desta demonstração, usaremos a seguinte notação: sendo $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l) \in (\mathbb{R}^n)^l$, então, para cada $k \leq l$, denotaremos por $\vec{\alpha}_k$ o seguinte vetor $\vec{\alpha}_k = (x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$. Claramente, nesta notação $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_l$. Seja $u \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}_l}$ e, sem perda de generalidade, suponha $u \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Considere $u = u_1 + \dots + u_l$ uma decomposição ótima para u , e defina os seguintes subconjuntos

$$A_l = \{x \in \mathbb{R}^n : u_l(x) < 0\} \text{ e } B_{l-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : u_1(x) + \dots + u_{l-1}(x) \geq 0\}.$$

Assim, $U_{l-1} := (u_1 + \dots + u_{l-1})|_{B_{l-1}} \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}_{l-1}}$ e $U_{l-1} \geq 0$. Logo, por hipótese, existe uma decomposição ótima $U_{l-1} = v_1 + \dots + v_{l-1}$ tal que $v_j \in H_{k,x_j}$ e $v_j \geq 0$. Pela definição da U_{l-1} e, desde que $\|u_j|_{B_{l-1}}\|_{k,x_j} \leq \|u_j\|_{k,x_j}$, obtemos

$$\|U_{l-1}\|_{k,\vec{\alpha}_{l-1}} = \|v_1\|_{k,x_1} + \dots + \|v_{l-1}\|_{k,x_{l-1}} \leq \|u_1\|_{k,x_1} + \dots + \|u_{l-1}\|_{k,x_{l-1}}. \quad (1.1.18)$$

Considere a seguinte restrição $u_l|_{A_l}$. Por definição, $A_l \subset B_{l-1}$ e, desde que $u \geq 0$,

$$|u_l|_{A_l}(x) \leq v_1(x) + \dots + v_{l-1}(x).$$

Logo, existem funções $w_1, \dots, w_{l-1}$ tais que $u_l|_{A_l} = w_1 + \dots + w_{l-1}$, com $w_j \leq 0$ e $|w_j(x)| \leq v_j$ para cada $j = 1, \dots, l-1$. Assim, temos que

$$U_{l-1} + u_l|_{A_l} = (v_1 + w_1) + \dots + (v_{l-1} + w_{l-1}) := u'_1 + \dots + u'_{l-1},$$

com $u'_j = v_j + w_j$, é uma decomposição de $U_{l-1} + u_l|_{A_l}$ em $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}_{l-1}}$ tal que $u'_j \geq 0$ e

$$\|U_{l-1} + u_l|_{A_l}\|_{k,\vec{\alpha}_{l-1}} \leq \|u'_1\|_{k,x_1} + \dots + \|u'_{l-1}\|_{k,x_{l-1}} \leq \|v_1\|_{k,x_1} + \dots + \|v_{l-1}\|_{k,x_{l-1}}. \quad (1.1.19)$$

Segue, por (1.1.18) e (1.1.19), que

$$\|U_{l-1} + u_l|_{A_l}\|_{k,\vec{\alpha}_{l-1}} = \|u'_1 + \dots + u'_{l-1}\|_{k,\vec{\alpha}_{l-1}} \leq \|u_1\|_{k,x_1} + \dots + \|u_{l-1}\|_{k,x_{l-1}}. \quad (1.1.20)$$

Além disso, tomando $u'_l := u_l|_{A_l^c} + (u_1 + \dots + u_{l-1})|_{B_{l-1}^c}$, temos que $u'_l \geq 0$, pois $B_{l-1}^c \subset A_l^c$, e ainda

$$|u'_l(x)| \leq |u_l(x)|,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Disto segue que $u'_l \in H_{k,x_l}$ e

$$\|u'_l\|_{k,x_l} \leq \|u_l\|_{k,x_l}. \quad (1.1.21)$$

Assim, como

$$u = (u_1 + \dots + u_{l-1})|_{B_{l-1}} + u_l|_{A_l} + u_l|_{A_l^c} + (u_1 + \dots + u_{l-1})|_{B_{l-1}^c},$$

então $u = u'_1 + \dots + u'_l$ é uma decomposição de u em $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}_l}$ tal que $u'_j \geq 0$, para cada $j = 1, \dots, l$ e, por (1.1.20) e (1.1.21) temos que tal decomposição é ótima.

Parte (ii). Considere $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \leq 0\}$. Desde que $u^+ = u|_{\Omega^+}$, $u^- = u|_{\Omega^-}$ e $|u| = u^+ + u^-$, então podemos ver que $u^+, u^-, |u| \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$. Aplicando a parte (i) para a função não-negativa $|u|$, temos que existe uma decomposição ótima $|u| = w_1 + \dots + w_l$ tal que $w_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, l$. Podemos escrever

$$u = |u|. \text{sign } u = w_1. \text{sign } u + \dots + w_l. \text{sign } u.$$

Denote $v_j = w_j. \text{sign } u$, para cada $j = 1, \dots, l$. Note também, que $u(x) \geq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se $v_j(x) \geq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $j = 1, \dots, l$. Este fato mostra que $u^+ = v_1^+ + \dots + v_l^+$ e $u^- = v_1^- + \dots + v_l^-$. Portanto, segue da definição de v_j , que

$$\|u\|_{k,\vec{\alpha}} \leq \|v_1\|_{k,x_1} + \dots + \|v_l\|_{k,x_l} = \|w_1\|_{k,x_1} + \dots + \|w_l\|_{k,x_l} = \| |u| \|_{k,\vec{\alpha}}, \quad (1.1.22)$$

como queríamos mostrar. $\square$

O próximo lema mostra que a norma $\|\cdot\|_{k,\vec{\alpha}}$ é monótona com respeito a relação " $\leq$ " pontual.

Lema 1.1.6. (Monotonicidade de $\|\cdot\|_{k,\vec{\alpha}}$) Seja $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l)$ e $0 \leq k < n$. Dada uma função mensurável $f(x)$ e $u \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ tal que $|f| \leq u$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, temos que $f \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ e $\|f\|_{k,\vec{\alpha}} \leq \|u\|_{k,\vec{\alpha}}$.

Demonstração: Seja $u = u_1 + \dots + u_l$ uma decomposição ótima tal que $u_j \geq 0$. Desde que, $|f| \leq u_1 + \dots + u_l$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, existem funções $f_1, \dots, f_l$ tais que $|f| = f_1 + \dots + f_l$, $f_j \geq 0$ e $f_j(x) \leq u_j(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, para cada $j = 1, \dots, l$. Logo, $f_j \in \mathcal{H}_{k,x_j}$ e $\|f_j\|_{k,x_j} \leq \|u_j\|_{k,x_j}$. Portanto,

$$\| |f| \|_{k,\vec{\alpha}} \leq \|f_1\|_{k,x_1} + \dots + \|f_l\|_{k,x_l} \leq \|u_1\|_{k,x_1} + \dots + \|u_l\|_{k,x_l} = \|u\|_{k,\vec{\alpha}}.$$

Agora, desde que f pode ser escrita como

$$f = |f|. \text{sign } f = f_1. \text{sign } f + \dots + f_l. \text{sign } f,$$

temos que $f \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ e $\|f\|_{k,\vec{\alpha}} \leq \| |f| \|_{k,\vec{\alpha}} \leq \|u\|_{k,\vec{\alpha}}$. $\square$

Observação 1.1.7. Desde que $|u| \leq |u_1| + \dots + |u_l|$, usando o Lema 1.1.6, obtemos que, se $u \in \mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$, então

$$\| |u| \|_{k,\alpha} \leq \|u\|_{k,\vec{\alpha}}. \quad (1.1.23)$$

Logo, por (1.1.15) e (1.1.23), temos que

$$\| |u| \|_{k,\alpha} = \|u\|_{k,\vec{\alpha}}. \quad (1.1.24)$$

Desde que (0.0.4) tem termos produto, uma desigualdade do tipo Hölder nos espaços $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$ será importante em sua análise. Este é o objetivo do próximo lema.

Lema 1.1.8. (Desigualdade do tipo Hölder) Seja $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l)$ e $0 \leq k, r < n$. Se $u \in \mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$ e $v \in \mathcal{H}_{r, \vec{\alpha}}$, então $uv \in \mathcal{H}_{k+r, \vec{\alpha}}$ e a seguinte estimativa é válida:

$$\|uv\|_{k+r, \vec{\alpha}} \leq C_{\vec{\alpha}} \|u\|_{k, \vec{\alpha}} \|v\|_{r, \vec{\alpha}}, \quad (1.1.25)$$

onde $C_{\vec{\alpha}} = C(\vec{\alpha}, k, r) > 0$ depende somente de $\vec{\alpha}, r, k$.

Demonstração: Sejam $u = u_1 + \dots + u_l$ e $v = v_1 + \dots + v_l$ decomposições ótimas. Então

$$uv = u_1(v_1 + \dots + v_l) + \dots + u_l(v_1 + \dots + v_l) = \sum_{i,j=1}^l u_i v_j.$$

Pela definição da norma em H_{k+r, x_j} e das propriedades elementares de supremo, podemos obter que $u_j v_j \in H_{k+r, x_j}$ com

$$\|u_j v_j\|_{k+r, x_j} \leq \|u_j\|_{k, x_j} \|v_j\|_{r, x_j}, \quad (1.1.26)$$

para todo $j = 1, \dots, l$. Seja $B_j = B(x_j, d_j)$ uma bola aberta de raio d_j centrada em x_j , onde $d_j > 0$ é suficientemente pequeno, de maneira que $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Denotemos por B_j^C o complemento do conjunto B_j . Podemos decompor $u_i v_j$ como

$$u_i v_j = u_i v_j|_{B_i} + u_i v_j|_{B_i^C},$$

onde $u_i v_j|_{B_i} \in H_{k+r, x_i}$ e $u_i v_j|_{B_i^C} \in H_{k+r, x_j}$, para todo $i \neq j$. De fato, usando (1.1.3), temos que

$$\begin{aligned} |x - x_i|^{k+r} |u_i(x)| |v_j(x)| &= \left(|x - x_i|^k |u_i(x)| \right) \left(|x - x_i|^r |v_j(x)| \right) \\ &\leq \frac{|x - x_i|^r}{|x - x_j|^r} \|u_i\|_{k, x_i} \|v_j\|_{r, x_j}, \text{ para todo } x \neq x_j. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

e

$$\begin{aligned} |x - x_j|^{k+r} |u_i(x)| |v_j(x)| &= \left(|x - x_j|^k |u_i(x)| \right) \left(|x - x_j|^r |v_j(x)| \right) \\ &\leq \frac{|x - x_j|^k}{|x - x_i|^k} \|u_i\|_{k, x_i} \|v_j\|_{r, x_j}, \text{ para todo } x \neq x_i. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Fazendo

$$C_{i,j} := \sup_{x \in B_i} \left(\frac{|x - x_i|}{|x - x_j|} \right) \text{ e } E_{i,j} = \sup_{x \in B_i^C} \left(\frac{|x - x_j|}{|x - x_i|} \right), \quad (1.1.29)$$

temos que $C_{i,j} < \infty$, $E_{i,j} < \infty$ e ambos dependem somente de $\vec{\alpha}$, d_i e d_j , para cada $i, j = 1, 2, \dots, l$. Além disso, segue por (1.1.27) e (1.1.28) que

$$\|u_i v_j|_{B_i}\|_{k+r, x_i} \leq (C_{i,j})^r \|u_i\|_{k, x_i} \|v_j\|_{r, x_j}, \quad (1.1.30)$$

e

$$\|u_i v_j|_{B_i^C}\|_{k+r, x_i} \leq (E_{i,j})^k \|u_i\|_{k, x_i} \|v_j\|_{r, x_j}, \quad (1.1.31)$$

para todo $i, j = 1, \dots, l$ com $i \neq j$. Assim $uv \in \mathcal{H}_{k+r, \vec{\alpha}}$ com a seguinte decomposição

$$uv = \left(u_1 v_1 + \sum_{j=2}^l u_1 v_j|_{B_1} + \sum_{j=2}^l u_j v_1|_{B_j^C} \right) + \dots + \left(u_l v_l + \sum_{j=1, j \neq l}^l u_l v_j|_{B_l} + \sum_{j=1, j \neq l}^l u_j v_l|_{B_j^C} \right). \quad (1.1.32)$$

Usando (1.1.26), (1.1.30) e (1.1.31), obtemos

$$\begin{aligned} \|uv\|_{k+r, \vec{\alpha}} &\leq \sum_{i=1}^l \left(\|u_i\|_{k, x_i} \|v_i\|_{r, x_i} + (C_{i,j})^r \sum_{j=1, j \neq i}^l \|u_i\|_{k, x_i} \|v_j\|_{r, x_j} + (E_{i,j})^k \sum_{j=1, j \neq i}^l \|u_j\|_{k, x_j} \|v_i\|_{r, x_i} \right) \\ &\leq \left(\max_{i,j=1, \dots, l} \{1, (C_{i,j})^r, (E_{i,j})^k\} \right) \left(2 \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \|u_i\|_{k, x_i} \|v_j\|_{r, x_j} \right) \\ &= 2 \left(\max_{i,j=1, \dots, l} \{1, (C_{i,j})^r, (E_{i,j})^k\} \right) \left(\sum_{i=1}^l \|u_i\|_{k, x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^l \|v_j\|_{r, x_j} \right). \end{aligned}$$

Desde que $u = u_1 + \dots + u_l$ e $v = v_1 + \dots + v_l$ são decomposições ótimas, obtemos

$$\|uv\|_{k+r, \vec{\alpha}} \leq C_{\vec{\alpha}} \|u\|_{k, \vec{\alpha}} \|v\|_{r, \vec{\alpha}},$$

onde

$$C_{\vec{\alpha}} = 2 \max_{i,j=1, \dots, l} \{1, (C_{i,j})^r, (E_{i,j})^k\}. \quad (1.1.33)$$

□

Observação 1.1.9. Seja $p \geq 1$, $u \in \mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$ e $|u| = v_1 + \dots + v_l$ uma decomposição ótima com $v_i \geq 0$. Note que

$$|u|^{p-1} \leq l^{p-1} (v_1^{p-1} + \dots + v_l^{p-1}).$$

O Lema 1.1.6 implica que

$$\begin{aligned} \| |u|^{p-1} \|_{(p-1)k, \vec{\alpha}} &\leq l^{p-1} (\|v_1^{p-1} + \dots + v_l^{p-1}\|_{(p-1)k, \vec{\alpha}}) \\ &\leq l^{p-1} \sum_{i=1}^l \|v_i^{p-1}\|_{(p-1)k, x_i}. \end{aligned}$$

Pela definição da norma em $H_{(p-1)k, x_i}$, obtemos

$$\begin{aligned} \| |u|^{p-1} \|_{(p-1)k, \vec{\alpha}} &\leq l^{p-1} \sum_{i=1}^l \|v_i\|_{k, x_i}^{p-1} \\ &\leq l^p \left(\sum_{i=1}^l \|v_i\|_{k, x_i} \right)^{p-1} = l^p \| |u| \|_{k, \vec{\alpha}}^{p-1}. \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

Usando a Observação 1.1.7 em (1.1.34), temos que

$$\| |u|^{p-1} \|_{(p-1)k, \vec{\alpha}} \leq l^p \|u\|_{k, \vec{\alpha}}^{p-1}. \quad (1.1.35)$$

Agora, segue do Lema 1.1.8 e (1.1.35) que $u|u|^{p-1} \in \mathcal{H}_{kp, \vec{\alpha}}$ com a estimativa

$$\|u|u|^{p-1}\|_{kp, \vec{\alpha}} \leq C_{\vec{\alpha}} l^p \|u\|_{k, \vec{\alpha}}^p, \quad (1.1.36)$$

onde $C_{\vec{\alpha}} = C(\vec{\alpha}, k, (p-1)k)$.

1.2 Simetria multipolar

Considerando $l = 1$ e $x_1 = 0$ no exemplo (1.1.7) (veja pág. 10), obtemos

$$h(x) = \frac{\lambda_1}{|x|^k},$$

o qual é um exemplo de potencial monopolar. Neste caso, o potencial h é uma função radial. Desde que estamos interessados em estudar equações com potenciais multipolares, é natural investigarmos um conceito de simetria que estenda o de radialidade e que seja verificado por (1.1.7). Motivados por isto, introduzimos o conceito de simetria multipolar.

Antes, fixemos algumas notações. Seja $O = O(n)$ o conjunto das transformações lineares ortogonais em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M} \subset O$. Seja σ uma permutação fixa de $\{1, 2, \dots, l\}$. Para cada $T \in \mathcal{M}$ defina as transformações $T_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$T_j(x) = T(x - x_j) + x_{\sigma(j)}, \text{ para cada } j = 1, \dots, l. \quad (1.2.1)$$

Introduzimos a seguinte definição.

Definição 1.2.1. (Simetria $(\sigma, \mathcal{M})$ -multipolar) Se $u \in \mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$ possui uma decomposição $u = u_1 + \dots + u_l$ tal que

$$u_{\sigma(j)}(T_j(x)) = u_j(x), \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2.2)$$

para todo $T \in \mathcal{M}$ e para cada $j = 1, \dots, l$, com T_j como em (1.2.1), então dizemos que u é multipolar simétrica com respeito ao par $(\sigma, \mathcal{M})$ ou, simplesmente, u é $(\sigma, \mathcal{M})$ -multipolar simétrica.

Um exemplo simples de função que satisfaz tal simetria é a função $h(x)$ como em (1.1.7). De fato, seja σ a permutação identidade e $T \in O$. Por (1.1.8), sabemos que $h \in \mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$ e tomando $h_j(x) = \frac{\lambda_j}{|x - x_j|^k}$ para cada $j = 1, \dots, l$, temos que $h = h_1 + \dots + h_l$ é uma decomposição de h . Agora, desde que

$$|T_j(x) - x_j| = |T(x - x_j)| = |x - x_j|,$$

então $h_j(T_j(x)) = h_j(x)$ para cada $j = 1, \dots, l$ e h é (σ, O) - multipolar simétrica.

Nas observações que seguem, consideramos um subconjunto especial das transformações lineares ortogonais, que será usado para obter propriedades de simetria para soluções u obtidas no Teorema 2.2.1.

Observação 1.2.2. Seja σ uma permutação fixa de $\{1, 2, \dots, l\}$. Para $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l) \in (\mathbb{R}^n)^l$, seja $O_{\vec{\alpha}, \sigma}$ o conjunto de transformações lineares ortogonais $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que

$$T(x_i - x_j) = x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}, \text{ para todo } i, j = 1, \dots, l. \quad (1.2.3)$$

Usando (1.2.3), obtemos que

$$\begin{aligned} T_i(x) &= T(x - x_i) + x_{\sigma(i)} \\ &= T(x - x_j + x_j - x_i) + x_{\sigma(i)} \\ &= T(x - x_j) + x_{\sigma(j)} \\ &= T_j(x), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

para todo $i, j = 1, \dots, l$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Em vista de (1.2.4), definimos $\mathcal{L}_T = T_i$ para cada $T \in O_{\vec{\alpha}, \sigma}$. Podemos ver que

$$\mathcal{L}_T(x) = T_i(x) = T_j(x) \text{ e } |\mathcal{L}_T(x) - x_{\sigma(j)}| = |x - x_j|. \quad (1.2.5)$$

Assim, se u é $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétrica, então

$$u_{\sigma(j)}(T_i(x)) = u_{\sigma(j)}(\mathcal{L}_T(x)) = u_{\sigma(j)}(T_j(x)) = u_j(x), \quad (1.2.6)$$

e

$$u(\mathcal{L}_T(x)) = u(T_j(x)) = u(x), \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2.7)$$

para todo $T \in O_{\vec{\alpha}, \sigma}$ e $j = 1, \dots, l$.

Observação 1.2.3. Claramente o conjunto $O_{\vec{\alpha}, \sigma}$ depende da posição relativa das singularidades e da permutação σ . Aqui, a questão central é saber se o conjunto $O_{\vec{\alpha}, \sigma}$ é não-vazio e quão grande ele pode ser. Exemplos são dados nos itens abaixo

- (i) Seja σ a permutação identidade e seja $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l) \in (\mathbb{R}^n)^l$ com $x_1, \dots, x_l$ pertencentes a uma mesma reta r . Então, rotações ao redor da reta s , paralela a r e passando pela origem, pertencem ao conjunto $O_{\vec{\alpha}, \sigma}$, e a função h em (1.1.7) (veja pág. 10) é multipolar simétrica com respeito a $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$.

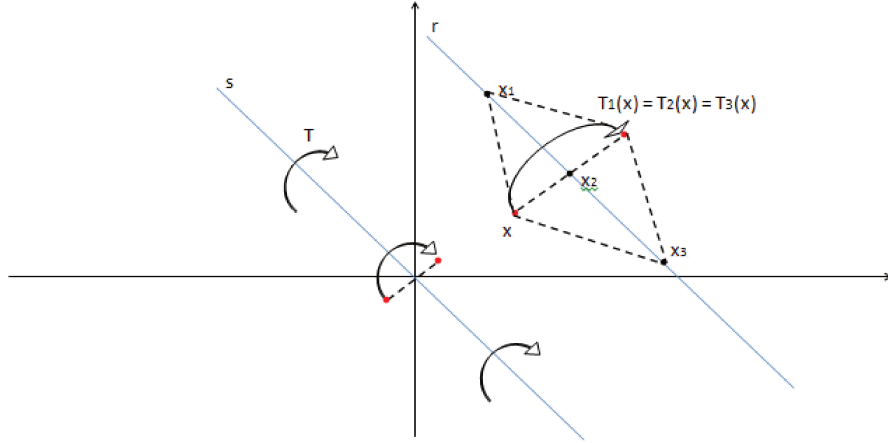


Figura 1 - A figura ilustra o caso em (i) quando $n = 3$, $l = 3$, e T é a rotação em torno da reta s por um ângulo π .

- (ii) Seja σ a permutação identidade. Para $n \geq 2$ existe uma configuração para o conjunto dos polos $\{x_1, \dots, x_l\}$ com $O_{\vec{\alpha}, \sigma}$ não-vazio. Por exemplo, isto ocorre quando $n \geq 4$ e $x_1 = (a_1, b_1, 0, \dots, 0)$, $x_2 = (a_2, b_2, 0, \dots, 0)$, ..., $x_l = (a_l, b_l, 0, \dots, 0)$.
- (iii) Seja $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ os vértices consecutivos (ordenados no sentido horário) de um polígono regular centrado na origem. Seja σ tal que $\sigma(i) = i + 1$, para $i = 1, \dots, l - 1$ e $\sigma(l) = 1$. Dado $T \in \mathbb{Z}_l \times O(n - 2)$, existe $R \in \mathbb{Z}_l$ e $S \in O(n - 2)$ tal que $Tx = (Ry, Sz)$,

onde $x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ e $R = e^{\frac{2\pi}{l}\sqrt{-1}}$ é a rotação do plano em torno da origem por um ângulo $\frac{2\pi}{l}$. Segue que $T(x_j) = (R(x_j), 0) = x_{\sigma(j)}$, $T(x_i - x_j) = x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ e então $T \in O_{\vec{\alpha}, \sigma}$. Neste caso, também temos que $\mathcal{L}_T = T = T_j$, para todo $j = 1, \dots, l$.

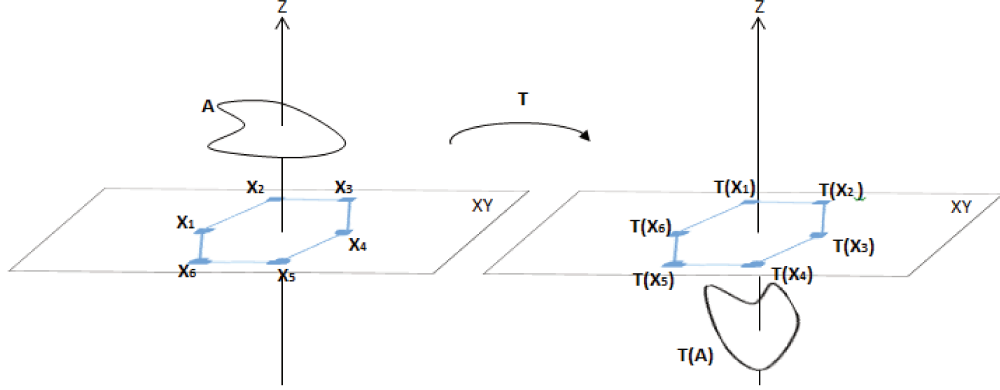


figura 2 - A figura ilustra um exemplo de uma aplicação $T \in \mathbb{Z}_6 \times O(1)$. Tal aplicação faz uma rotação em torno do eixo Z por um ângulo $\frac{2\pi}{6}$, e em torno do eixo X (ou Y) por um ângulo π .

Observação 1.2.4. Note que $u \in \mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$ pode ser $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétrica e pode ter uma decomposição que não satisfaz (1.2.2). Em outras palavras, para ser multipolar simétrica basta que exista uma decomposição satisfazendo (1.2.2).

1.3 Os espaços PM^k

Nesta seção definimos os espaços PM^k , o qual é um espaço de distribuições temperadas que contém funções homogêneas. Também relembramos algumas propriedades destes espaços.

Antes, recordamos a definição da transformada de Fourier. Esta é definida inicialmente no espaço de funções de Schwarz $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e depois estendida para o espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. O rápido decaimento no infinito das funções em $\mathcal{S}$, permite provar muitas propriedades da transformada sem qualquer problema de convergência.

Dada $f \in \mathcal{S}$, definimos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \quad (1.3.1)$$

Dizemos que $\hat{f}$ é a transformada de Fourier da f . Definamos agora a transformada de Fourier inversa. Dada uma função $f \in \mathcal{S}$, definimos

$$\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi), \quad (1.3.2)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. A operação

$$f \rightarrow \check{f}$$

é chamada transformada de Fourier inversa.

Estas definições podem ser estendidas ao espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ da seguinte maneira: dada $u \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier e a transformada de Fourier inversa de u são as distribuições temperadas que satisfazem

$$\langle \hat{u}, f \rangle = \langle u, \hat{f} \rangle, \quad \text{e} \quad \langle \check{u}, f \rangle = \langle u, \check{f} \rangle, \quad (1.3.3)$$

para toda $f \in \mathcal{S}$, respectivamente. O lema abaixo contém algumas das principais propriedades da transformada de Fourier.

Lema 1.3.1. Dadas $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}$ e α um multi-índice, temos que:

- (i) Se $u_j \rightarrow u$ em $\mathcal{S}'$, então $\hat{u}_j \rightarrow \hat{u}$ também em $\mathcal{S}'$;
- (ii) $(\partial^\alpha u)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}$
- (iii) $\widehat{f * u} = \hat{f} \hat{u}$
- (iv) $\widehat{fu} = \hat{f} * \hat{u}$
- (v) $(\hat{u})^\vee = u$

Existe uma interessante relação entre a transformada de Fourier e a composta de uma distribuição com uma homotetia. Esta pode ser definida observando-se o seguinte fato: seja $\lambda \in \mathbb{R}$, u uma função integrável e $f \in \mathcal{S}$. Definindo $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, para $\lambda > 0$, obtemos via mudança de variáveis

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\lambda(x) f(x) dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) f_{\lambda^{-1}}(y) dy, \quad (1.3.4)$$

onde $f_{\lambda^{-1}}(x) = f(\lambda^{-1}x)$. Logo, para $u \in \mathcal{S}'$, a composição de uma distribuição temperada com uma homotetia é definida como

$$\langle u_\lambda, f \rangle = \lambda^{-n} \langle u, f_{\lambda^{-1}} \rangle. \quad (1.3.5)$$

Podemos relacionar a transformada de Fourier e a composta de uma distribuição com uma homotetia através da seguinte relação

$$(\hat{u}_\lambda) = \lambda^{-n} (\hat{u})_{\lambda^{-1}}. \quad (1.3.6)$$

Na sequência, relembramos a definição dos espaços PM^k (Veja e.g. [15] e [50]):

Definição 1.3.2. Para cada $0 \leq k < n$, o espaço PM^k é definido por

$$PM^k \equiv \{u \in \mathcal{S}' : \hat{u} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n), \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^k |\hat{u}(\xi)| < \infty\}. \quad (1.3.7)$$

O espaço PM^k munido com a norma

$$\|u\|_{PM^k} \equiv \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^k |\hat{u}(\xi)| < \infty$$

é um espaço de Banach. Com efeito, é fácil ver que $\|\cdot\|_{PM^k}$ define uma norma. Mostremos que PM^k munido com esta norma é completo. Considere $(u_s)_{s \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em PM^k . Assim,

$$\|u_s - u_l\|_{PM^k} \rightarrow 0, \text{ quando } s, l \rightarrow \infty.$$

Pela definição da norma em PM^k , temos que a sequência $(|\xi|^k \hat{u}_s(\cdot))_{s \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e desde que este é um espaço completo, então existe $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|\xi|^k \hat{u}_s(\cdot) \rightarrow g \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Defina $h(\xi) = \frac{1}{|\xi|^k} g(\xi)$, $\xi \neq 0$, e considere a bola $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Segue que

$$\int_{B(0, R)} \frac{1}{|\xi|^k} g(\xi) d\xi \leq \|g\|_{L^\infty} \int_{B(0, R)} \frac{1}{|\xi|^k} d\xi < +\infty,$$

dado que $k < n$. Segue que $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Também, para $\phi \in \mathcal{S}$, temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) \phi(\xi) d\xi \right| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{B(0, 1)} \frac{1}{|\xi|^k} g(\xi) d\xi + \|g\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^1} < \infty.$$

Logo, $h \in \mathcal{S}'$, e, definindo $u := \check{h}$, no sentido de distribuições, temos que $u \in PM^k$ e $u_s \rightarrow u$ na norma de PM^k , quando $s \rightarrow \infty$.

Em (1.3.6), apresentamos uma relação entre a transformada de Fourier e a composta com uma homotetia. Esta relação nos permite mostrar uma propriedade de invariância da norma $\|\cdot\|_{PM^k}$: Se $\lambda > 0$ então

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_{PM^k} &= \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^k |\hat{u}_\lambda(\xi)| \\ &= \lambda^{k-n} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\lambda^{-1} \xi|^k |\hat{u}(\lambda^{-1} \xi)| \\ &= \lambda^{k-n} \|u\|_{PM^k}, \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

ou seja, a norma é invariante pela aplicação

$$u \mapsto \lambda^{n-k} u_\lambda. \tag{1.3.9}$$

Esta aplicação é chamada o *scaling* da norma $\|\cdot\|_{PM^k}$.

1.4 Alguns resultados básicos

Nesta seção lembramos algumas definições e resultados gerais que serão usados ao longo do trabalho. A saber, relembramos as definições das funções Gamma e Beta, e suas principais propriedades, e também enunciamos e provamos alguns lemas envolvendo operadores singulares e transformada de Fourier, fundamentais na prova de alguns resultados.

As funções Gamma e Beta

No decorrer desta tese, as funções Gamma e Beta aparecem em algumas estimativas. Por isso, para conveniência do leitor relembramos suas definições e principais propriedades:

Definição 1.4.1. Para um número complexo z com $Re(z) > 0$, definimos a função Gamma por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.4.1)$$

Segue da definição que $\Gamma(z)$ é analítica no semi-plano $Re(z) > 0$.

Duas propriedades fundamentais da função Gamma são as seguintes:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ e } \Gamma(n) = (n-1)!, \quad (1.4.2)$$

onde z é um número complexo com parte real positiva e $n \in \mathbb{N}$. Além disso, temos os simples (mas importantes) fatos:

$$\Gamma(1) = 1 \text{ e } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (1.4.3)$$

A seguir, definimos a função Beta.

Definição 1.4.2. Para todo z e w números complexos com parte real positiva, a função Beta $\beta(z, w)$ é definida por

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (1.4.4)$$

A seguinte igualdade nos dá uma relação entre as funções Gamma e Beta:

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (1.4.5)$$

Lemas básicos

Nesta subseção enunciamos dois lemas conhecidos que serão importantes na obtenção de algumas estimativas. Para conveniência do leitor, incluiremos a prova destes resultados. O primeiro é sobre convolução de funções homogêneas. Ele e sua demonstração podem ser encontrados em [53].

Lema 1.4.3. Sejam $0 < \alpha < n, 0 < \beta < n$ tais que $0 < \alpha + \beta < n$. Então

$$(|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{\alpha-n} |y-z|^{\beta-n} dz = K(\alpha, \beta) |y|^{\alpha+\beta-n}, \quad (1.4.6)$$

onde

$$K(\alpha, \beta) = (c_\alpha c_\beta c_{n-\alpha-\beta}) / (c_{\alpha+\beta} c_{n-\alpha} c_{n-\beta}) \text{ e } c_\alpha = \pi^{-\alpha/2} \Gamma(\alpha/2). \quad (1.4.7)$$

Demonstração: Primeiro, lembre que

$$(e^{-\pi a|x|^2})^\wedge(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi \frac{|\xi|^2}{a}}. \quad (1.4.8)$$

Usando a propriedade da transformada de Fourier do produto de convolução, obtemos que

$$\begin{aligned} (e^{-\pi t|x|^2} * e^{-\pi s|x|^2})^\wedge(\xi) &= (e^{-\pi t|x|^2})^\wedge(\xi) (e^{-\pi s|x|^2})^\wedge(\xi) \\ &= (ts)^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi \frac{(s+t)|\xi|^2}{ts}}, \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

para $t, s > 0$. De (1.4.8), da propriedade (v) do Lema 1.3.1, e aplicando a transformada inversa em (1.4.9), segue que

$$(e^{-\pi t|x|^2} * e^{-\pi s|x|^2})(x) = \frac{1}{(s+t)^{-\frac{n}{2}}} e^{-\pi \frac{st}{s+t}|x|^2}. \quad (1.4.10)$$

Agora, por (1.4.7) e pela definição da função Gamma em (1.4.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} c_\alpha |z|^{-\alpha} &= \int_0^\infty (t\pi^{-1}|z|^{-2})^{\frac{\alpha}{2}-1} \pi^{-1} |z|^{-2} dt \\ &= \int_0^\infty s^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s\pi|z|^2} ds, \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

implicando que

$$c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n}) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{n-\alpha}{2}-1} s^{\frac{n-\beta}{2}-1} (e^{-\pi t|x|^2} * e^{-\pi s|x|^2}) dt ds. \quad (1.4.12)$$

Substituindo (1.4.10) em (1.4.12), e fazendo duas mudanças de variáveis, primeiro $t = u^2$ e $s = v^2$, e depois $u = r \cos \theta$ e $v = r \sin \theta$, obtemos

$$c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(x) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\alpha-1} \sin^{n-\beta-1} \int_0^\infty r^{n-\alpha-\beta-2} e^{-\pi r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta |x|^2} r dr d\theta. \quad (1.4.13)$$

Por fim, fazendo $w = \pi r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$ em (1.4.13), verificamos que

$$\begin{aligned} c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(x) &= 2\pi^{-\frac{n-\alpha-\beta}{2}} |x|^{\alpha+\beta-n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \sin^{\alpha-1} \int_0^\infty w^{\frac{n-\alpha-\beta}{2}-1} e^{-w} dw d\theta \\ &= 2\pi^{-\frac{n-\alpha-\beta}{2}} \Gamma\left(\frac{n-\alpha-\beta}{2}\right) |x|^{\alpha+\beta-n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \sin^{\alpha-1} d\theta \\ &= 2c_{n-\alpha-\beta} |x|^{\alpha+\beta-n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \sin^{\alpha-1} d\theta. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Usando a identidade

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1} \theta \sin^{2b-1} \theta d\theta, \quad (1.4.15)$$

obtida da relação (1.4.5) entre as funções Gamma e Beta, podemos concluir que

$$c_{n-\alpha}c_{n-\beta}(|x|^{\alpha-n}*|x|^{\beta-n})(x) = \frac{c_{n-\alpha-\beta}c_{\alpha}c_{\beta}}{c_{\alpha+\beta}}|x|^{\alpha+\beta-n}, \quad (1.4.16)$$

o que nos dá (1.4.6). $\square$

O lema abaixo trata da transformada de Fourier de funções homogêneas e será usado para encontrar estimativas com constantes explícitas nos espaços PM^k . Este lema e sua demonstração podem ser encontrados em [59].

Lema 1.4.4. Suponha que α é um número complexo tal que $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$ e $P_l(x)$ é um polinômio homogêneo harmônico sobre $\mathbb{R}^n$ de grau l . Se $K(x) = \frac{P_l(x)}{|x|^{n+l-\alpha}}$ então $\widehat{K}(\xi) = \gamma_{l,\alpha} \frac{P_l(\xi)}{|\xi|^{l+\alpha}}$, onde

$$\gamma_{l,\alpha} = \frac{i^{-l}\pi^{(n/2)-\alpha}\Gamma\left(\frac{l+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+l-\alpha}{2}\right)}. \quad (1.4.17)$$

Demonstração: Considere a restrição

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x), & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 0, \end{cases}$$

e seja $K_2(x) = K(x) - K_1(x)$. Então, $K_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, se $\operatorname{Re}(\alpha) < \frac{n}{2}$, então $K_2 \in L^2(\mathbb{R})$. Assim, desde que K_1 e K_2 podem ser aproximadas por funções em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, obtemos que $\widehat{K}_1$ e $\widehat{K}_2$ devem ter a forma $\widehat{K}_1(x) = h_1(r)P(x)$ e $\widehat{K}_2(x) = h_2(r)P(x)$, onde $r = |x|$ (veja [59], Lema 2.18). Defina $h = h_1 + h_2$. Mostremos que h é homogênea de grau $-(k + \alpha)$. Por (1.3.3) (veja pág. 20) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{K}(x)\varphi(x)dx. \quad (1.4.18)$$

Tomando $x = \delta y$ no lado esquerdo e $x = \delta^{-1}z$ no lado direito, resulta que

$$\delta^n \int_{\mathbb{R}^n} K(\delta y)\hat{\varphi}(\delta y)dy = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{K}(\delta^{-1}z)\varphi(\delta^{-1}z)dz,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}$. Da homogeneidade de P , obtemos que K é homogênea de grau $\alpha - n$, e segue da igualdade anterior que

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(y)\hat{\varphi}(\delta y)dy = \delta^{-\alpha-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{K}(\delta^{-1}z)\varphi(\delta^{-1}z)dz. \quad (1.4.19)$$

Agora, fazendo $\varphi_\delta(x) = \varphi(\delta^{-1}x)$, temos que $\hat{\varphi}_\delta(y) = \delta^n \hat{\varphi}(\delta x)$. Usando esta notação em (1.4.19), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{K}(\delta^{-1}z)\varphi(\delta^{-1}z) &= \delta^{\alpha+n} \int_{\mathbb{R}^n} K(y)\hat{\varphi}(\delta y)dy \\ &= \delta^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} K(y)\hat{\varphi}_\delta(y)dy \\ &= \delta^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{K}(z)\varphi(\delta^{-1}z)dz, \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

para toda função teste $\varphi \in \mathcal{S}$. Isto nos diz que $\hat{K}(\delta x) = \delta^{-\alpha} \hat{K}(x)$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, desde que $\hat{K}(x) = h(r)P(x)$ e P é homogênea de grau k , temos as seguintes igualdades

$$\delta^k h(\delta r)P(x) = h(\delta r)P(\delta x) = \delta^{-\alpha} h(r)P(x).$$

A primeira e a terceira expressão na igualdade anterior implicam que

$$h(\delta r) = \delta^{-\alpha-k} h(r). \quad (1.4.21)$$

Considere $H(r)$ tal que $h(r) = H'(r)$. De (1.4.21), segue que

$$H(s) = \int_0^s h(r)dr = \int_0^1 h(st)sdt = s^{1-k-\alpha} \int_0^1 h(t)dt = s^{1-k-\alpha} H(1), \quad (1.4.22)$$

para todo $s > 0$. Logo, $h(r) = H'(r) = \gamma r^{-k-\alpha}$ e

$$\hat{K}(y) = h(r)P(y) = \gamma \frac{P(y)}{|y|^{k+\alpha}}, \text{ q.t.p. } y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4.23)$$

para α tal que $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < \frac{n}{2}$. Agora, vamos estender este resultado para todo α tal que $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$. Substituindo $\hat{K}(y)$ em (1.4.18), obtemos que a equação

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{P(x)}{|x|^{k+n-\alpha}} \right] \hat{\varphi}(x) dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{P(x)}{|x|^{k+\alpha}} \right] \varphi(x) dx \quad (1.4.24)$$

é satisfeita para $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < \frac{n}{2}$. Note que as duas integrais na equação (1.4.24) definem funções analíticas de α para $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$. Caso γ defina também uma função analítica de α neste intervalo, então podemos concluir que a equação (1.4.24) é satisfeita para $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$, isto é, a expressão em (1.4.23) é válida para todo α tal que $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$.

Com o objetivo de calcular o valor da constante γ considere a seguinte função teste $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2} P(x)$. Usando o fato que $\hat{\varphi}(y) = i^{-k} \varphi(y)$ (veja [59], Teorema 3.4), verificamos

$$i^{-k} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2} P(y) \left\{ \frac{P(y)}{|y|^{k+n-\alpha}} \right\} dy = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2} P(y) \left\{ \frac{P(y)}{|y|^{k+\alpha}} \right\} dy. \quad (1.4.25)$$

Usando coordenadas polares em (1.4.25), ficaremos com

$$i^{-k} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{k+\alpha-1} \int_{S^{n-1}} [P(y')]^2 dy' dr = \gamma \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{k+n-\alpha-1} \int_{S^{n-1}} [P(y')]^2 dy' dr, \quad (1.4.26)$$

seguindo que

$$i^{-k} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{k+\alpha-1} dr = \gamma \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{k+n-\alpha-1} dr. \quad (1.4.27)$$

Usando a relação

$$\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \pi^{-\frac{(\beta+1)}{2}} = 2 \int_0^\infty e^{-\pi t^2} t^\beta dt, \quad (1.4.28)$$

podemos obter de (1.4.27) que

$$\gamma = i^{-k} \pi^{\frac{n}{2}-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right)} = \gamma_{k,\alpha}. \quad (1.4.29)$$

Desde que $\Gamma(z)$ é uma função analítica para $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\gamma_{k,\alpha}$ define uma função analítica de α para $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$ e a prova está concluída. $\square$

Capítulo 2

Existência e simetria para uma equação elíptica com potenciais singulares

Neste capítulo, apresentamos uma teoria de existência para (0.0.4), além de mostrar propriedades qualitativas da solução como regularidade, positividade e simetria. A técnica empregada para mostrar existência é baseada em um argumento de contração, sendo do tipo não-variacional e sem requerer propriedades de compacidade nos espaços funcionais ou no domínio. Mostramos também uma propriedade de simetria, mais especificamente, damos condições para que as soluções sejam $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétricas, onde $O_{\vec{\alpha}, \sigma}$ é como definido na Observação 1.2.2 (veja pág. 17).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 relembramos o problema a ser estudado e definimos o tipo de solução que estamos interessados. Na Seção 2.2, apresentamos os resultados obtidos para o problema (0.0.4). Para melhor organização dividimos esta em três subseções para tratar existência, regularidade, positividade e simetria. Na Seção 2.3, são provados os resultados enunciados na Seção 2.2.

2.1 Formulação integral

Para conveniência do leitor relembramos o problema que estamos interessados:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = u|u|^{p-1} + V(x)u + f, & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ (-\Delta)^j u \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \text{ para } j = 0, \dots, m-1, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $n > 2m$, $p > \frac{n}{n-2m}$ e V é um potencial multipolar da forma

$$V(x) = \frac{h_1\left(\frac{x-x_1}{|x-x_1|}\right)}{|x-x_1|^{2m}} + \dots + \frac{h_l\left(\frac{x-x_l}{|x-x_l|}\right)}{|x-x_l|^{2m}}, \quad (2.1.2)$$

podendo este ser anisotrópico ou isotrópico (dependendo das funções h_i), monopolar ou multipolar (dependendo do número de polos l).

Primeiramente apresentamos a noção de solução que consideraremos para (2.1.1). Sejam $n > 2m$ e $\Gamma(x, y)$ a solução fundamental para o operador poliharmônico $(-\Delta)^m$ em $\mathbb{R}^n$, isto é

$$\Gamma(x, y) = Q_{n,m} \frac{1}{|x - y|^{n-2m}}, \quad (2.1.3)$$

onde a constante $Q_{n,m}$ é dada por

$$Q_{n,m} = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2} - m)}{2^{2m}(m-1)!\Gamma(\frac{n}{2})\omega_n} \quad (2.1.4)$$

e $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ é o volume da esfera unitária $(n-1)$ -dimensional. Então, o problema (2.1.1) pode ser convertido para a seguinte equação integral

$$u(x) = Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{n-2m}} (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy. \quad (2.1.5)$$

Estudaremos existência e propriedades qualitativas de soluções da equação (2.1.5). Em particular, também obteremos resultados para (2.1.1) no sentido de distribuições e no sentido clássico fora dos polos.

Para melhor manusear a equação (2.1.5), dividimos-a em três partes:

$$u = \mathcal{N}(u) + \mathcal{T}(u) + \mathcal{F}(f), \quad (2.1.6)$$

onde

$$\mathcal{N}(u) \equiv Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{n-2m}} u|u|^{p-1}(y) dy, \quad (2.1.7)$$

$$\mathcal{T}(u) \equiv Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{n-2m}} Vu(y) dy, \quad (2.1.8)$$

$$\mathcal{F}(f) \equiv Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{n-2m}} f(y) dy. \quad (2.1.9)$$

Note que, se u é solução de (2.1.5), definindo

$$u_\delta(x) = \delta^{\frac{2m}{p-1}} u(\delta x), \delta > 0, \quad (2.1.10)$$

temos que se V é homogênea de grau $-2m$ e f é homogênea de grau $-\frac{2mp}{p-1}$, então u_δ também satisfaz (2.1.5). De fato, sendo u solução de (2.1.5), obtemos pela definição de u_δ que

$$\begin{aligned} u(\delta x) &= Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\delta x - y|^{n-2m}} (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy \\ &= \delta^{2m-n} Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - \frac{y}{\delta}|^{n-2m}} (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy \\ &= \delta^{2m-n} Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - \frac{y}{\delta}|^{n-2m}} (\delta^{-\frac{2mp}{p-1}+n} u_\delta |u_\delta|^{p-1} + Vu_\delta + f) \left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \delta^{-\frac{2m}{p-1}} Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - z|^{n-2m}} (u_\delta |u_\delta|^{p-1} + Vu_\delta + f)(z) dz. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Assim, temos o seguinte *scaling* para (2.1.5) (e também para (2.1.1))

$$u \rightarrow u_\delta. \quad (2.1.12)$$

Observação 2.1.1. Note que uma solução invariante pelo *scaling* (2.1.12) deve necessariamente ser uma função homogênea de grau $-\frac{2m}{p-1}$.

2.2 Resultados

No que segue, enunciamos os resultados obtidos para (2.1.1). Antes disto, fixemos algumas notações. Para cada $0 < d < n - 2m$ e $0 < \tau < 1$, seja

$$L_d = Q_{n,m} K(n - d - 2m, 2m) \text{ e } \varepsilon_\tau = (1 - \tau)^{\frac{p}{p-1}} (2^p p l^p C_{\vec{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}})^{-\frac{1}{p-1}}, \quad (2.2.1)$$

onde $K(\alpha, \beta)$ é como no Lema 1.4.3 (veja pág. 22) e $C_{\vec{\alpha}} = C(\vec{\alpha}, \frac{2m}{p-1}, 2m)$ como no Lema 1.1.8 (veja pág. 14).

2.2.1 Existência

O próximo resultado estabelece a existência de soluções para (2.1.5) no espaço $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$.

Teorema 2.2.1. Sejam $n > 2m$, $p > \frac{n}{n-2m}$ e $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, \dots, x_l) \in (\mathbb{R}^n)^l$. Suponha que $f \in \mathcal{H}_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}}$ e $V \in \mathcal{H}_{2m, \vec{\alpha}}$.

- (i) Sejam $d = \frac{2m}{p-1}$, $\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < \frac{1}{L_d C_{\vec{\alpha}}}$, $\tau = L_d C_{\vec{\alpha}} \|V\|_{2m, \vec{\alpha}}$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_\tau$, onde $L_d, C_{\vec{\alpha}}, \varepsilon_\tau$ são como em (2.2.1). Se $\|f\|_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{L_{\frac{2m}{p-1}}}$, então a equação integral (2.1.5) tem uma única solução $u \in \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ satisfazendo $\|u\|_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}} \leq \frac{2\varepsilon}{1-\tau}$.
- (ii) A solução u depende continuamente dos dados iniciais V e f .

Desde que $u \in \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$, então em geral, a taxa de singularidade e decaimento no infinito que governa u é $k = \frac{2m}{p-1}$. O próximo teorema mostra que u pode ter outras taxas de singularidade e decaimento.

Teorema 2.2.2. Sejam $0 < a < n - 2m$, $f \in \mathcal{H}_{a+2m, \vec{\alpha}} \cap \mathcal{H}_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}}$ e $\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < \frac{1}{L_a C_{\vec{\alpha}}}$. Seja u a solução obtida no Teorema 2.2.1. Existe $0 < \delta_a \leq \varepsilon$, tal que se $\|f\|_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}} \leq \frac{\delta_a}{L_{\frac{2m}{p-1}}}$, então $u \in \mathcal{H}_{a, \vec{\alpha}} \cap \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$.

Observação 2.2.3. No Teorema (2.2.2) é assumida uma outra taxa de singularidade somente para o dado f , e não é requerida nenhuma condição de pequenez da norma $\|f\|_{a+2m, \vec{\alpha}}$. Note que, em geral, uma função $h \in \mathcal{H}_{a, \vec{\alpha}} \cap \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ com $0 < a < \frac{2m}{p-1}$ (respectivamente $\frac{2m}{p-1} < a < n - 2m$) comporta-se como $|x - x_i|^{-a}$ (respectivamente $|x - x_i|^{-\frac{2m}{p-1}}$) próximo da singularidade x_i , e como $|x|^{-\frac{2m}{p-1}}$ (respectivamente $|x|^{-a}$) quando $|x| \rightarrow \infty$.

Observação 2.2.4. Seja V como em (2.1.2) com $h_i(z) = a_i \cdot z$, onde $a_i \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$V(x) = \sum_{i=1}^l \frac{a_i(x - x_i)}{|x - x_i|^{2m+1}};$$

ou ainda, com $h_i(z) = \lambda_i$,

$$V(x) = \sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{|x - x_i|^{2m}}.$$

Estes correspondem aos casos de potenciais com dipolos múltiplos e potenciais isotrópicos multipolares, respectivamente. Em vista de (0.0.8) e (0.0.9) (veja pág. 3), um cálculo simples mostra que $\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} \leq \sum_{i=1}^l |a_i|$ ou $\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} \leq \sum_{i=1}^l |\lambda_i|$, de acordo com o respectivo caso precedente. Portanto, V satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.1, desde que a correspondente soma seja menor que $(L^{\frac{2m}{p-1}} \cdot C_{\vec{\alpha}})^{-1}$.

No caso em que $\vec{\alpha} = 0 \in \mathbb{R}^n$, as funções V e f no Teorema 2.2.1 podem ser homogêneas. O próximo resultado garante que, assumindo certa homogeneidade sobre estes dados, então a solução u obtida também será homogênea.

Teorema 2.2.5. No Teorema 2.2.1, assuma $l = 1$ e $x_1 = 0$, isto é, $\vec{\alpha} = 0 \in \mathbb{R}^n$, e as hipóteses do item (i). Além disso, assuma que V e f são homogêneas de grau $-2m$ e $-\frac{2mp}{p-1}$, respectivamente. Então, a solução u é homogênea de grau $-\frac{2m}{p-1}$.

Observação 2.2.6. (Otimalidade da taxa $k = \frac{2m}{p-1}$) A Observação 2.2.3 mostra que existem soluções com taxa de singularidade menor que $\frac{2m}{p-1}$ próximo a singularidade x_i , e com decaimento mais rápido que $|x|^{-\frac{2m}{p-1}}$ no infinito. Por outro lado, algumas soluções tem taxa de singularidade (ou decaimento no infinito) exatamente igual a $k = \frac{2m}{p-1}$. Para melhor explicar, um exemplo pode ser dado quando consideramos o caso simples $\vec{\alpha} = 0$: se $V(x) = \delta|x|^{-2m}$ com $0 < \delta < \frac{1}{L^{\frac{2m}{p-1}} \cdot C_{\vec{\alpha}}}$, e $f(x) = \frac{\varepsilon}{L^{\frac{2m}{p-1}}} |x|^{-\frac{2m}{p-1}}$, então a solução é precisamente

$$u(x) = C|x|^{-\frac{2m}{p-1}}, \quad (2.2.2)$$

onde $C > 0$ é uma constante. De fato, pelo Teorema 2.2.5, a solução obtida u será homogênea, e além disso, pela radialidade de V e f , esta também será radial, e portanto u deve ter a forma (2.2.2) (ver Teorema 1.7 e Teorema 1.8 em [32] para o caso $m = 1$). Disto segue que, para $V \in \mathcal{H}_{2m, \vec{\alpha}}$ geral e $f \in \mathcal{H}_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}}$ como no Teorema 2.2.1, soluções $u \in \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ podem (ou não) ter taxa igual a $k = \frac{2m}{p-1}$. Assim, podemos dizer que $k = \frac{2m}{p-1}$ é ótimo para o conjunto de soluções (obtidas variando V, f) no sentido que esta taxa governa soluções $u \in \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ e é atingida por algumas delas.

Corolário 2.2.7. (Estabilidade angular) Considere

$$V_k = \frac{h_{1,k}(\frac{x-x_1}{|x-x_1|})}{|x-x_1|^{2m}} + \dots + \frac{h_{l,k}(\frac{x-x_l}{|x-x_l|})}{|x-x_l|^{2m}} \text{ e } V = \frac{h_1(\frac{x-x_1}{|x-x_1|})}{|x-x_1|^{2m}} + \dots + \frac{h_l(\frac{x-x_l}{|x-x_l|})}{|x-x_l|^{2m}}, \quad (2.2.3)$$

com

$$\sup_k \left(\sum_{i=1}^l \|h_{i,k}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \right) < \frac{1}{L_{\frac{2m}{p-1}} \cdot C_{\vec{\alpha}}}. \quad (2.2.4)$$

Sejam $f \in \mathcal{H}_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}}$, τ e ε como no Teorema 2.2.1, e u_k e u as soluções correspondentes a V_k, f e V, f , respectivamente. Se $h_{i,k} \rightarrow h_i$ em $L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ para cada $i = 1, \dots, n$, então $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$, quando $k \rightarrow \infty$.

Observação 2.2.8. No corolário anterior, um caso físico interessante corresponde a $h_{i,k}(z) = a_{i,k} \cdot z$ e $h_i(z) = a_i \cdot z$ com $a_{i,k} \rightarrow a_i$, onde $a_{i,k}, a_i$ são vetores em $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.2.9. O método empregado para mostrar o Teorema 2.2.1 parte (i) pode ser usado para tratar versões de (2.1.1) em um domínio limitado suave, no semi-espaço $\mathbb{R}_+^n$, ou em um domínio exterior Ω do $\mathbb{R}^n$, com condições de fronteira de Navier homogêneas. Para isto devemos usar a função de Green Γ_Ω correspondente a cada problema de valor na fronteira e estimativas pontuais tais como

$$\left| \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \Gamma_\Omega(x, y) \right| \leq C \frac{1}{|x - y|^{n-2m+|\alpha_1|+|\alpha_2|}}, \text{ para } |\alpha_1| + |\alpha_2| < 2m < n. \quad (2.2.5)$$

Além disso, algumas modificações na definição do espaço e suas propriedades seriam necessárias, a fim de levar em conta $x \in \Omega$. Também, condições de fronteira de Dirichlet homogêneas podem ser tratadas, caso tenhamos uma estimativa como (2.2.5). Por exemplo, este é o caso de domínios suaves limitados, do semi-espaço $\mathbb{R}_+^n$ e exterior de uma bola (veja [37, Capítulo 4], [8, Proposição 2.4], [7, Proposição 2.1], para os respectivos casos).

Observação 2.2.10. Usando a técnica empregada no Teorema 2.2.1, podemos tratar a equação (2.1.1) com o operador $\mathcal{L} = (-\Delta - V)^m$ em lugar de $(-\Delta)^m - V$, onde V é um potencial em $\mathcal{H}_{2, \vec{\alpha}}$ (como por exemplo o potencial de Hardy $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$). Com efeito, abrindo a potência, podemos escrever $\mathcal{L} = (-\Delta)^m + \mathcal{L}'$, onde o operador $\mathcal{L}'$ contém as derivadas de ordem mais baixa. Passando o operador $\mathcal{L}'$ para o lado direito da equação, e usando a função de Green do operador $(-\Delta)^m$, podemos obter uma formulação integral para o problema. Note que, para tratar esta formulação integral seria necessário utilizar espaços funcionais onde as derivadas também estejam em espaços do tipo $\mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$.

De acordo com a prova do Lema 1.1.8 (veja (1.1.29) e (1.1.33), pág. 15 e 16), a constante $C_{\vec{\alpha}}$ (e também o tamanho do potencial $V(x)$ no Teorema 2.2.1) dependem da posição relativa das singularidades $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}^n$. No que segue, damos exemplos de configurações para as singularidades e suas respectivas estimativas.

Corolário 2.2.11. (i) (Duas singularidades) Se tomarmos $l = 2$, então a estimativa para V no Teorema 2.2.1 é dada por

$$\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < \frac{2^{2m-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{p-1}\right) \Gamma\left(\frac{mp}{p-1}\right)}{3^s \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{mp}{p-1}\right) \Gamma\left(\frac{m}{p-1}\right)}, \quad (2.2.6)$$

onde $s = \min\{\frac{2m}{p-1}, 2m\}$.

- (ii) (Vértices de um polígono regular) Sejam $l > 2$ e $x_1, \dots, x_l$ vértices de um polígono regular. A estimativa para V no Teorema 2.2.1 torna-se

$$\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < \frac{2^{2m-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{p-1}\right) \Gamma\left(\frac{mp}{p-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{mp}{p-1}\right) \Gamma\left(\frac{m}{p-1}\right) \left(1 + \frac{2}{\sin(\pi/l)}\right)^s}, \quad (2.2.7)$$

para l é par; e para l ímpar, temos

$$\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < \frac{2^{2m-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{p-1}\right) \Gamma\left(\frac{mp}{p-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{mp}{p-1}\right) \Gamma\left(\frac{m}{p-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sin(\pi/2l)}\right)^s}. \quad (2.2.8)$$

Nas desigualdades acima $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma e $s = \min\{\frac{2m}{p-1}, 2m\}$.

Observação 2.2.12. Tomando $m = 1$ no Corolário 2.2.11, obtemos as seguintes estimativas para V . Para $l = 2$, obtemos

$$\|V\|_{2, \vec{\alpha}} < \frac{2}{3^s} \left(\frac{n}{2} - \frac{p}{p-1}\right) \left(\frac{1}{p-1}\right).$$

Se $l > 2$, e $x_1, \dots, x_l$ são vértices de um polígono regular, então

$$\|V\|_{2, \vec{\alpha}} < \left(\frac{n}{2} - \frac{p}{p-1}\right) \left(\frac{1}{p-1}\right) \frac{2}{\left(1 + \frac{2}{\sin(\pi/l)}\right)^s},$$

se l é par, e

$$\|V\|_{2, \vec{\alpha}} < \left(\frac{n}{2} - \frac{p}{p-1}\right) \left(\frac{1}{p-1}\right) \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sin(\pi/2l)}\right)^s},$$

se $l > 2$ é ímpar.

2.2.2 Regularidade

Desde que elementos de $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ podem apresentar l singularidades, é natural estudar propriedades de diferenciabilidade para soluções fora do conjunto de polos $\{x_1, \dots, x_l\}$. No que segue, investigamos estas propriedades e garantimos que, dependendo da regularidade de f e V , a solução obtida no Teorema 2.2.1 é uma solução clássica do problema (2.1.1) em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$.

Teorema 2.2.13. Assuma as hipóteses do Teorema 2.2.1 e seja β um multi-índice tal que $0 < |\beta| < 2m$.

- (i) A solução u do Teorema 2.2.1 (i) satisfaz $\partial^\beta u \in \mathcal{H}_{b, \vec{\alpha}}$, onde $b = \frac{2m}{p-1} + |\beta|$. Consequentemente, as condições de fronteira no infinito em (2.1.1) são verificadas por u . Além disso, $u \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$ e u é uma solução de (2.1.1) no sentido de distribuições.

- (ii) Temos que u pertence a $H_{loc}^{2m}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$ e verifica (2.1.1) q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) Se $f, V \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$ então $(-\Delta)^m u \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$ e u satisfaz a equação (2.1.1), no sentido clássico em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$.

Observação 2.2.14. Observe que a norma em $\mathcal{H}_{b,\vec{\alpha}}$ de $\partial^\beta u$, pode ser estimada usando as normas do potencial V e de f . De fato, lembrando que $u = \mathcal{F}(u|u|^{p-1} + Vu + f)$, as estimativas em (2.3.6) e (2.3.7) na prova do Lema 2.3.1 (veja pág. 33), implicam que existe $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\partial^\beta u\|_{\frac{2m}{p-1}+|\beta|,\vec{\alpha}} &\leq M \|u|u|^{p-1} + Vu + f\|_{\frac{2mp}{p-1},\vec{\alpha}} \\ &\leq M \left(\|u\|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}}^p + \|V\|_{2m,\vec{\alpha}} \|u\|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} + \|f\|_{\frac{2mp}{p-1},\vec{\alpha}} \right) \\ &\leq M \left(\left(\frac{2\varepsilon}{1 - L_{\frac{2m}{p-1}} \cdot C_{\vec{\alpha}} \cdot \|V\|_{2m,\vec{\alpha}}} \right)^p + \frac{2\varepsilon}{1 - L_{\frac{2m}{p-1}} \cdot C_{\vec{\alpha}} \cdot \|V\|_{2m,\vec{\alpha}}} \|V\|_{2m,\vec{\alpha}} + \frac{\varepsilon}{L_{\frac{2m}{p-1}}} \right), \end{aligned}$$

onde ε , $L_{\frac{2m}{p-1}}$ e $C_{\vec{\alpha}}$ são como no Teorema 2.2.1.

Observação 2.2.15. (Regularidade ótima) Para o laplaciano (isto é, quando $m = 1$), são conhecidos resultados de regularidade C^∞ , fora do conjunto de polos, para soluções positivas e no caso de potenciais singulares como em (2.1.2), com as funções h_i 's suaves (veja por exemplo [22],[23],[24],[29],[28]). No Teorema 2.2.13, a regularidade C^{2m-1} parece ser ótima para $f \in \mathcal{H}_{\frac{2mp}{p-1},\vec{\alpha}}$ e $V \in \mathcal{H}_{2m,\vec{\alpha}}$ gerais. Note que as h_i 's em (2.1.2) (e então V) podem não ser suaves. Entretanto, assumindo ainda que f e V são suaves em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ (por exemplo, quando $h_i \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ em (2.1.2)), usando regularidade elíptica padrão e um argumento de *bootstrap*, é possível mostrar que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$. Por exemplo, V é suave em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ nos casos físicos $h_i(z) = a_i \cdot z$ e $h_i(z) = \lambda_i$, mencionados na Observação 2.2.8. Por outro lado, também temos que se u e f são suaves em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ com $u > 0$ então $V = \frac{1}{u} [(-\Delta)^m u - u|u|^{p-1} - f]$ deve ser suave em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$.

2.2.3 Positividade e simetria

No próximo resultado deste capítulo, damos condições para garantir a positividade da solução u , e mostramos uma propriedade de simetria das soluções, dependendo de f e V (simetria multipolar).

Teorema 2.2.16. Sejam $\vec{\alpha} = (x_1, \dots, x_l) \in (\mathbb{R}^n)^l$ tal que $O_{\vec{\alpha},\sigma}$ é não-vazio, f, V como no Teorema 2.2.1 e u a correspondente solução.

- (i) Se $f, V \geq 0$ e $f \neq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, então u é positiva.
- (ii) Se f, V são $(\sigma, O_{\vec{\alpha},\sigma})$ -multipolar simétricas, então a correspondente solução u também possui esta propriedade, isto é, u é também multipolar simétrica com respeito a $(\sigma, O_{\vec{\alpha},\sigma})$.

2.3 Demonstração dos resultados

Nesta seção demonstramos os teoremas que foram enunciados na seção anterior. Para melhor organização do trabalho mostramos primeiramente algumas estimativas, colocando-as na forma de lemas.

2.3.1 Estimativas

No próximo lema demonstramos propriedades de diferenciabilidade para o operador $\mathcal{F}(\cdot)$ definido em (2.1.9) (veja pág. 27) nos espaços $\mathcal{H}_{k,\vec{\alpha}}$.

Lema 2.3.1. Sejam $0 < d < n - 2m$, $g \in \mathcal{H}_{d+2m,\vec{\alpha}}$ e $L_d = Q_{n,m} \cdot K(n - 2m - d, 2m)$, onde $K(\cdot, \cdot)$ e $Q_{n,m}$ são como em (1.4.7) e (2.1.4), respectivamente (veja pág. 22 e 27).

(i) Então $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{H}_{d,\vec{\alpha}}$ e

$$\|\mathcal{F}(g)\|_{d,\vec{\alpha}} \leq L_d \|g\|_{d+2m,\vec{\alpha}}. \quad (2.3.1)$$

(ii) Temos que $\partial_x^\beta \mathcal{F}(g) \in \mathcal{H}_{d+|\beta|,\vec{\alpha}}$, para todo β multi-índice tal que $0 \leq |\beta| < 2m$, e

$$\mathcal{F}(g) \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}). \quad (2.3.2)$$

Demonstração: Seja $g = g_1 + \dots + g_l$ uma decomposição de g em $\mathcal{H}_{d+2m,\vec{\alpha}}$. Pela definição da norma (1.1.3), e empregando o Lema 1.4.3 (veja pág. 22) obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(g_j)(x)| &\leq Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{n-2m}} |g_j(y)| dy \\ &\leq Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - x_j - (y - x_j)|^{n-2m}} \frac{1}{|y - x_j|^{d+2m}} dy \|g_j\|_{d+2m,x_j} \\ &\leq L_d \frac{1}{|x - x_j|^d} \|g_j\|_{d+2m,x_j}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

para cada $j = 1, \dots, l$, onde L_d é como no Lema 2.3.1 (veja pág. 33). Segue de (2.3.3) que $\mathcal{F}(g_j) \in \mathcal{H}_{d,x_j}$, e $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(g_1) + \dots + \mathcal{F}(g_l)$ é uma decomposição para $\mathcal{F}(g)$ no espaço soma $\mathcal{H}_{d,\vec{\alpha}}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(g)\|_{d,\vec{\alpha}} &\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^l \|v_j\|_{d,x_j} : \mathcal{F}(g) = v_1 + \dots + v_l \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^l \|F(g_j)\|_{d,x_j} : g = g_1 + \dots + g_l \right\} \\ &\leq L_d \inf \left\{ \sum_{j=1}^l \|g_j\|_{d+2m,x_j} : g = g_1 + \dots + g_l \right\} \\ &= L_d \|g\|_{d+2m,\vec{\alpha}}, \end{aligned}$$

que resulta em (2.3.1).

Agora, mostremos o item (ii). Para $x \notin \{x_1, \dots, x_l\}$, usando-se o Lema 1.4.3 (veja pág. 22) e a condição $0 < |\beta| < 2m$, obtemos que

$$\partial_x^\beta \mathcal{F}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\beta \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2m}} \right) g(y) dy, \quad (2.3.4)$$

em vista da estimativa

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^\beta \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2m}} \right) g(y) \right| &\leq \tilde{C}_\beta \frac{1}{|x-y|^{n-(2m-|\beta|)}} (|g_1(y)| + \dots + |g_l(y)|) \\ &\leq \tilde{C}_\beta \frac{1}{|x-y|^{n-(2m-|\beta|)}} \left(\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|y-x_1|^{d+2m}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|y-x_l|^{d+2m}} \right) \\ &= \tilde{C}_\beta \mathcal{G}(x, y), \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

onde $\mathcal{G}(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n, dy)$, para cada $x \notin \{x_1, \dots, x_l\}$ fixo. Empregando o Lema 1.4.3 l -vezes na soma em (2.3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x, y) dy &= \left(\sum_{j=1}^l \|g_j\|_{d+2m, x_j} \frac{1}{|x|^{n-(2m-|\beta|)}} * \frac{1}{|x-x_j|^{d+2m}} \right) \\ &= K(n-d-2m, 2m-|\beta|) \left(\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|x-x_1|^{d+|\beta|}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|x-x_l|^{d+|\beta|}} \right). \end{aligned}$$

Logo, por (2.3.4) e pela igualdade anterior

$$\left| \partial_x^\beta \mathcal{F}(g)(x) \right| \leq \tilde{C}_\beta K(n-d-2m, 2m-|\beta|) \left(\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|x-x_1|^{d+|\beta|}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|x-x_l|^{d+|\beta|}} \right), \quad (2.3.6)$$

para cada $x \notin \{x_1, \dots, x_l\}$. Desde que

$$\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|x-x_1|^{d+|\beta|}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|x-x_l|^{d+|\beta|}} \in \mathcal{H}_{d+|\beta|, \tilde{\alpha}}, \quad (2.3.7)$$

a desigualdade (2.3.6) e o Lema 1.1.6 (veja pág. 14) implicam $\partial_x^\beta \mathcal{F}(g) \in \mathcal{H}_{d+|\beta|, \tilde{\alpha}}$.

Note que, se $x, x_0 \notin \{x_1, \dots, x_l\}$ então

$$\begin{aligned} \partial_x^\beta \mathcal{F}(g)(x) - \partial_x^\beta \mathcal{F}(g)(x_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\partial_z^\beta \left(\frac{1}{|z-y|^{n-2m}} \right) (x) - \partial_z^\beta \left(\frac{1}{|z-y|^{n-2m}} \right) (x_0) \right] g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mathcal{G}}(x, y) dy, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

onde, por (2.3.5),

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{G}}(x, y)| &\leq \tilde{C}_\beta \left(\frac{1}{|x-y|^{n-(2m-|\beta|)}} + \frac{1}{|x_0-y|^{n-(2m-|\beta|)}} \right) \left(\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|y-x_1|^{d+2m}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|y-x_l|^{d+2m}} \right) \\ &= \mathcal{H}(x, y). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Pelo Lema 1.4.3, temos que $\mathcal{H}(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n, dy)$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}(x, y) dy &= \tilde{C}_\beta \cdot K(n - d - 2m, 2m - |\beta|) \left(\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|x - x_1|^{d+|\beta|}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|x - x_l|^{d+|\beta|}} \right) \\ &\quad + \tilde{C}_\beta \cdot K(n - d - 2m, 2m - |\beta|) \left(\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|x_0 - x_1|^{d+|\beta|}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|x_0 - x_l|^{d+|\beta|}} \right), \end{aligned}$$

que converge (quando $x \rightarrow x_0$) para

$$\tilde{C}_\beta \cdot K(n - d - 2m, 2m - |\beta|) \cdot 2 \left(\frac{\|g_1\|_{d+2m, x_1}}{|x_0 - x_1|^{d+|\beta|}} + \dots + \frac{\|g_l\|_{d+2m, x_l}}{|x_0 - x_l|^{d+|\beta|}} \right) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}(x_0, y) dy. \quad (2.3.10)$$

Desde que $\tilde{\mathcal{G}}(x, y) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x_0$, as relações (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10), e o teorema da convergência dominada, implicam que $\partial_x^\beta \mathcal{F}(g) \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$, para todo $0 \leq |\beta| < 2m$. Segue que $\mathcal{F}(g) \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$. $\square$

O objetivo do lema abaixo é mostrar que operadores produto e potências de funções preservam simetria multipolar. Este será usado na demonstração do Teorema 2.2.16.

Lema 2.3.2. Se $u \in \mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$, $V \in \mathcal{H}_{r, \vec{\alpha}}$ então $Vu \in \mathcal{H}_{k+r, \vec{\alpha}}$ e $u|u|^{p-1} \in \mathcal{H}_{kp, \vec{\alpha}}$. Além disso, assumindo ainda que u e V são $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétricas, temos que Vu e $u|u|^{p-1}$ são também $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétricas.

Demonstração: Do Lema 1.1.8 e da Observação 1.1.9 (veja pág. 14 e 16) sabemos que $u|u|^{p-1} \in \mathcal{H}_{kp, \vec{\alpha}}$ e $Vu \in \mathcal{H}_{k+r, \vec{\alpha}}$, desde que $u \in \mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$ e $V \in \mathcal{H}_{r, \vec{\alpha}}$. De (1.2.1) (veja pág. 17), temos que

$$T_j(B_j) = B_{\sigma(j)}, \quad (2.3.11)$$

onde B_j é uma bola centrada em x_j . Desde que Vu tem uma decomposição similar a (1.1.32), isto é, sendo $V = V_1 + \dots + V_l$ e $u = u_1 + \dots + u_l$ decomposições ótimas, temos que

$$Vu = \left(V_1 u_1 + \sum_{j=2}^l V_1 u_j|_{B_1} + \sum_{j=2}^l V_j u_1|_{B_j^C} \right) + \dots + \left(V_l u_l + \sum_{j=1, j \neq l}^l V_l u_j|_{B_l} + \sum_{j=1, j \neq l}^l V_j u_l|_{B_j^C} \right).$$

é uma decomposição para Vu . Para facilitar a notação, escreva

$$W_j(x) = V_j u_j + \sum_{i=1, i \neq j}^l V_j u_i|_{B_j} + \sum_{i=1, i \neq l}^l V_i u_j|_{B_i^C},$$

para cada $j = 1, \dots, l$. Assim, devemos mostrar que

$$W_{\sigma(j)}(T_j(x)) = W_j(x). \quad (2.3.12)$$

Desde que V e u são $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétricas, temos que

$$V_{\sigma(j)} u_{\sigma(j)}(T_j(x)) = V_j u_j(x). \quad (2.3.13)$$

Usando (2.3.11) e a Observação 1.2.2 (veja pág. 17), obtemos

$$V_{\sigma(j)}u_i|_{B_{\sigma(j)}}(T_j(x)) = V_{\sigma(j)}(T_j)u_i(T_j)|_{B_j}(x) = V_{\sigma(j)}(T_j)u_i(T_{\sigma^{-1}(i)})|_{B_j}(x) = V_ju_{\sigma^{-1}(i)}|_{B_j}(x). \quad (2.3.14)$$

Como T é bijetiva, também segue de (2.3.11) que $T_j(B_j^c) = B_{\sigma(j)}^c$, e novamente usando a Observação 1.2.2, verificamos a igualdade

$$V_iu_{\sigma(j)}|_{B_i^c}(T_j(x)) = V_i(T_{\sigma^{-1}(i)}u_{\sigma(j)}(T_j)|_{B_{\sigma^{-1}(i)}^c}(x) = V_{\sigma^{-1}(i)}u_j|_{B_{\sigma^{-1}(i)}^c}(x). \quad (2.3.15)$$

Note que, para $i \neq \sigma(j)$, temos que $j \neq \sigma^{-1}(i)$. Assim, de (2.3.13), (2.3.14) e (2.3.15), obtemos (2.3.12), demonstrando que Vu é $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétrica.

Agora, mostremos que $u|u|^{p-1}$ é $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétrica. Primeiramente, demonstraremos que $|u|$ também satisfaz tal simetria. Seja $u = u_1 + \dots + u_l$ uma decomposição verificando (1.2.2) (veja pág. 17), e seja $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \leq 0\}$. Considere a decomposição $|u| = u^+ + u^- = u|_{\Omega^+} + u|_{\Omega^-} = \tilde{u}_1 + \dots + \tilde{u}_l$, onde

$$\tilde{u}_j = u_j|_{\Omega^+} + u_j|_{\Omega^-}. \quad (2.3.16)$$

Relembrando que $\mathcal{L}_T$ é bijetiva, e usando (1.2.6) e (1.2.7), temos que $\mathcal{L}_T(\Omega^+) = \Omega^+$, $\mathcal{L}_T(\Omega^-) = \Omega^-$ e $u_{\sigma(j)}(\mathcal{L}_T(x)) = u_j(x)$. Segue que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\sigma(j)}(T_j(x)) &= u_{\sigma(j)}|_{\Omega^+}(T_j(x)) + u_{\sigma(j)}|_{\Omega^-}(T_j(x)) \\ &= u_{\sigma(j)}|_{\mathcal{L}_T(\Omega^+)}(\mathcal{L}_T(x)) + u_{\sigma(j)}|_{\mathcal{L}_T(\Omega^-)}(\mathcal{L}_T(x)) \\ &= u_{\sigma(j)}(\mathcal{L}_T)|_{\Omega^+}(x) + u_{\sigma(j)}(\mathcal{L}_T)|_{\Omega^-}(x) \\ &= u_j|_{\Omega^+} + u_j|_{\Omega^-}(x) \\ &= \tilde{u}_j(x), \end{aligned}$$

q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, (2.3.16) verifica (1.2.2).

Agora, defina os conjuntos

$$A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{u}_j(x) \geq \tilde{u}_i(x), \forall i \neq j, i = 1, \dots, l\}$$

para todo $j = 1, \dots, l$. Note que $\cup_{j=1}^l A_j = \mathbb{R}^n$. Agora seja $D_j \subseteq A_j$ tal que $\cup_{j=1}^l D_j = \mathbb{R}^n$ e $D_j \cap D_i = \emptyset$, para todo $j \neq i$. Com efeito, podemos tomar $D_1 = A_1$, $D_2 = A_2 \cap \{\tilde{u}_2(x) = \tilde{u}_1(x)\}^c$, $D_3 = A_3 \cap \{\tilde{u}_3(x) = \tilde{u}_i(x), i = 1, 2\}^c, \dots, D_l = A_l \cap \{\tilde{u}_l(x) = \tilde{u}_i(x), i = 1, 2, \dots, l-1\}^c$. Segue de (1.2.7) (veja pág. 18) que $\tilde{u}_{\sigma(j)}(\mathcal{L}_T(x)) = \tilde{u}_j(x)$, e então

$$T_i(D_j) = \mathcal{L}_T(D_j) = D_{\sigma(j)}, \text{ para todo } i, j. \quad (2.3.17)$$

Tome a decomposição $|u| = w_1 + \dots + w_l$ com $w_j = (|u|)|_{D_j}$. De (1.2.7) e (2.3.17), obtemos

$$w_{\sigma(j)}(T_j(x)) = |u(T_j(x))| \cdot 1_{D_{\sigma(j)}}(T_j(x)) = |u(x)| \cdot 1_{D_{\sigma(j)}}(\mathcal{L}_T(x)) = |u| \cdot 1_{D_j}(x) = w_j(x).$$

Lembrando que $D_j \cap D_i = \emptyset$, para $j \neq i$, então $|u|^{p-1} = w_1^{p-1} + \dots + w_l^{p-1}$ é uma decomposição para $|u|^{p-1}$ tal que $w_{\sigma(j)}^{p-1}(T_j(x)) = w_j^{p-1}(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $T \in O_{\vec{\alpha}, \sigma}$ e $j = 1, \dots, l$. Portanto, temos que $|u|^{p-1}$ é $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétrica. Procedendo como na demonstração para Vu , segue que $u \cdot |u|^{p-1}$ é multipolar simétrica com respeito a $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$. $\square$

2.3.2 Demonstração do Teorema 2.2.1

Parte (i) Em vista da desigualdade pontual

$$|u|u|^{p-1}-v|v|^{p-1}|\leq p|u-v|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}), \quad (2.3.18)$$

obtemos do Lema 1.1.6, Lema 1.1.8, e da estimativa (1.1.35) (veja pág. 14 e 16) que

$$\begin{aligned} \| |u|u|^{p-1}-v|v|^{p-1} \|_{d+2m,\vec{\alpha}} &\leq \| p |u-v|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}) \|_{d+2m,\vec{\alpha}} \\ &\leq p C_{\vec{\alpha}} \| |u-v| \|_{d,\vec{\alpha}} \| |u|^{p-1}+|v|^{p-1} \|_{2m,\vec{\alpha}} \\ &\leq p l^p C_{\vec{\alpha}} \| |u-v| \|_{d,\vec{\alpha}} \left(\| |u|^{\frac{p-1}{2m}} \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} + \| |v|^{\frac{p-1}{2m}} \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \right), \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

onde $C_{\vec{\alpha}} = C(\vec{\alpha}, d, 2m)$. Para empregar um argumento de contração, derivamos estimativas para os operadores $\mathcal{N}, \mathcal{T}$ definidos em (2.1.7) e (2.1.8) (veja pág. 27). Aplicando o Lema 2.3.1 (veja pág. 33) com $d = \frac{2m}{p-1}$ e usando (2.3.19), obtemos

$$\begin{aligned} \| \mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v) \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} &= \| \mathcal{F}(|u|u|^{p-1}-v|v|^{p-1}) \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \\ &\leq L_{\frac{2m}{p-1}} \| |u|u|^{p-1}-v|v|^{p-1} \|_{\frac{2mp}{p-1},\vec{\alpha}} \\ &\leq p l^p C_{\vec{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \| |u-v| \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \left(\| |u|^{\frac{p-1}{2m}} \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} + \| |v|^{\frac{p-1}{2m}} \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Desde que $\mathcal{T}(u) = \mathcal{F}(Vu)$ é linear, novamente podemos usar o Lema 1.1.8 e o Lema 2.3.1 com $d = \frac{2m}{p-1}$ para obter

$$\begin{aligned} \| \mathcal{T}(u) - \mathcal{T}(v) \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} &= \| \mathcal{F}[V(u-v)] \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \\ &\leq C_{\vec{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \| V \|_{2m,\vec{\alpha}} \| u-v \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Considere a aplicação Φ definida por

$$\Phi(u) = \mathcal{N}(u) + \mathcal{T}(u) + \mathcal{F}(f) \quad (2.3.22)$$

e seja $\mathcal{B}_\varepsilon = \{u \in \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}}; \|u\|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \leq \frac{2\varepsilon}{1-\tau}\}$, onde $\tau = L_{\frac{2m}{p-1}} C_{\vec{\alpha}} \|V\|_{2m,\vec{\alpha}}$. Segue de (2.3.20) e (2.3.21) que

$$\begin{aligned} \| \Phi(u) - \Phi(v) \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} &= \| \mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v) \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} + \| \mathcal{T}(u) - \mathcal{T}(v) \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \\ &\leq p l^p C_{\vec{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \| u-v \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \left(\| |u|^{\frac{p-1}{2m}} \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} + \| |v|^{\frac{p-1}{2m}} \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \right) \\ &\quad + C_{\vec{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \| V \|_{2m,\vec{\alpha}} \| u-v \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}} \\ &\leq C_{\vec{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2^p \varepsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} p l^p + \| V \|_{2m,\vec{\alpha}} \right) \| u-v \|_{\frac{2m}{p-1},\vec{\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

para todo $u, v \in \mathcal{B}_\varepsilon$. Também temos que

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \leq L_{\frac{2m}{p-1}} \|f\|_{\frac{2mp}{p-1}, \tilde{\alpha}} \leq \varepsilon.$$

Notando que $\Phi(0) = \mathcal{F}(f)$ e tomando $v = 0$ em (2.3.23), obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} &\leq \|\mathcal{F}(f)\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} + \|\Phi(u) - \Phi(0)\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \\ &\leq \varepsilon + C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(p l^p \|u\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}^p + \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \|u\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Para $u \in \mathcal{B}_\varepsilon$, e desde que $\varepsilon_\tau = (1 - \tau)^{\frac{p}{p-1}} (2^p p l^p C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}})^{-\frac{1}{p-1}}$, e $0 < \varepsilon < \varepsilon_\tau$, obtemos por (2.3.24) que

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} &\leq \varepsilon + C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2^p \varepsilon^p}{(1 - \tau)^p} p l^p + \frac{2\varepsilon}{1 - \tau} \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \right) \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon \cdot \tau}{1 - \tau} = \frac{2\varepsilon}{1 - \tau}. \end{aligned}$$

A condição $0 < \varepsilon < \varepsilon_\tau$ também implica que

$$C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2^p \varepsilon^{p-1}}{(1 - \tau)^{p-1}} p l^p + \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \right) < (1 - \tau) + \tau = 1. \quad (2.3.25)$$

Segue que a aplicação $\Phi : \mathcal{B}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon$ é uma contração, e o teorema do ponto fixo de Banach implica que existe uma única solução $u \in \mathcal{B}_\varepsilon$ para (2.1.5).

Parte (ii) Sejam u e $\tilde{u}$ duas soluções como no item (i) e correspondentes a V, f, τ, ε e $\tilde{V}, \tilde{f}, \tilde{\tau}, \tilde{\varepsilon}$, respectivamente. Temos que

$$\|u\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \leq \frac{2\varepsilon}{1 - \tau} \text{ e } \|\tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \leq \frac{2\tilde{\varepsilon}}{1 - \tilde{\tau}} \quad (2.3.26)$$

com

$$u = \mathcal{N}(u) + \mathcal{F}(Vu) + \mathcal{F}(f) \text{ e } \tilde{u} = \mathcal{N}(\tilde{u}) + \mathcal{F}(\tilde{V}\tilde{u}) + \mathcal{F}(\tilde{f}).$$

Subtraindo as equações integrais acima, usando (2.3.20) e o Lema 2.3.1 (veja pág. 33), segue que

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} &\leq p l^p C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} (\|u\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}^{p-1} + \|\tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}^{p-1}) \\ &\quad + L_{\frac{2m}{p-1}} \|Vu - \tilde{V}\tilde{u}\|_{\frac{2mp}{p-1}, \tilde{\alpha}} + L_{\frac{2m}{p-1}} \|f - \tilde{f}\|_{\frac{2mp}{p-1}, \tilde{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Inserindo a igualdade $Vu - \tilde{V}\tilde{u} = (V - \tilde{V})\tilde{u} + V(u - \tilde{u})$ em (2.3.27) e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} &\leq \left(C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2^{p-1} \varepsilon^{p-1}}{(1 - \tau)^{p-1}} + \frac{2^{p-1} \tilde{\varepsilon}^{p-1}}{(1 - \tilde{\tau})^{p-1}} \right) p l^p \right) \|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \\ &\quad + C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} (\|V - \tilde{V}\|_{2m, \tilde{\alpha}} \|\tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} + \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}) \\ &\quad + L_{\frac{2m}{p-1}} \|f - \tilde{f}\|_{\frac{2mp}{p-1}, \tilde{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Assumindo, sem perda de generalidade que

$$\frac{2^{p-1}\tilde{\varepsilon}^{p-1}}{(1-\tilde{\tau})^{p-1}} \leq \frac{2^{p-1}\varepsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}}$$

e usando a condição (2.3.26), segue de (2.3.28) que

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} &\leq C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2^p \varepsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} p l^p + \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \right) \|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \\ &\quad + L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2\tilde{\varepsilon} C_{\tilde{\alpha}}}{1-\tilde{\tau}} \|V - \tilde{V}\|_{2m, \tilde{\alpha}} + \|f - \tilde{f}\|_{\frac{2mp}{p-1}, \tilde{\alpha}} \right), \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

e então

$$\|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \leq \frac{L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2\tilde{\varepsilon} C_{\tilde{\alpha}}}{1-\tilde{\tau}} \|V - \tilde{V}\|_{2m, \tilde{\alpha}} + \|f - \tilde{f}\|_{\frac{2mp}{p-1}, \tilde{\alpha}} \right)}{\left(1 - C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2^p \varepsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} p l^p + \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \right) \right)}.$$

Fazendo $c = 1 - C_{\tilde{\alpha}} L_{\frac{2m}{p-1}} \left(\frac{2^p \varepsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} p l^p + \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \right)$ temos por (2.3.25) que $0 < c < 1$, e assim

$$\|u - \tilde{u}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}} \leq \frac{L_{\frac{2m}{p-1}}}{c} \left(\frac{2\tilde{\varepsilon} C_{\tilde{\alpha}}}{1-\tilde{\tau}} \|V - \tilde{V}\|_{2m, \tilde{\alpha}} + \|f - \tilde{f}\|_{\frac{2mp}{p-1}, \tilde{\alpha}} \right). \quad (2.3.30)$$

o que mostra a continuidade desejada. $\square$

2.3.3 Demonstração do Teorema 2.2.2

Desde que, na demonstração da parte (i) do Teorema 2.2.1 aplicamos o Teorema do ponto fixo de Banach, a solução u pode ser obtida como limite da seguinte sequência de Picard:

$$u^1 = \mathcal{F}(f) \text{ e } u^{s+1} = u^1 + \mathcal{N}(u^s) + \mathcal{T}(u^s), \quad (2.3.31)$$

para $s \in \mathbb{N}$. Agora, considere a sequência $\{w^s\}_{s \geq 2}$ dada por $w^{s+1} = u^{s+1} - u^s$. Assim,

$$\|w^{s+1}\|_{a, \tilde{\alpha}} = \|u^{s+1} - u^s\|_{a, \tilde{\alpha}} \leq \|\mathcal{N}(u^s) - \mathcal{N}(u^{s-1})\|_{a, \tilde{\alpha}} + \|\mathcal{T}(u^s) - \mathcal{T}(u^{s-1})\|_{a, \tilde{\alpha}}. \quad (2.3.32)$$

Usando (2.3.20) e os Lemas 1.1.8 e 2.3.1 (veja pág. 14 e 33) na desigualdade em (2.3.32), obtemos

$$\begin{aligned} \|w^{s+1}\|_{a, \tilde{\alpha}} &\leq p l^p C_{\tilde{\alpha}} L_a \|u^s - u^{s-1}\|_{a, \tilde{\alpha}} \left(\|u^s\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}^{p-1} + \|u^{s+1}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}^{p-1} \right) \\ &\quad + C_{\tilde{\alpha}} L_a \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \|u^s - u^{s-1}\|_{a, \tilde{\alpha}} \\ &\leq p l^p C_{\tilde{\alpha}} L_a \|w^s\|_{a, \tilde{\alpha}} \left(\|u^s\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}^{p-1} + \|u^{s+1}\|_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}^{p-1} \right) \\ &\quad + C_{\tilde{\alpha}} L_a \|V\|_{2m, \tilde{\alpha}} \|w^s\|_{a, \tilde{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Sabemos por hipótese que $\tau_a := C_{\vec{\alpha}} L_a \|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < 1$. Escolha $0 < \delta_a \leq \varepsilon$ tal que

$$p l^p C_{\vec{\alpha}} L_a \frac{2^p \delta_a^{p-1}}{(1 - \tau_a)^{p-1}} + \tau_a < 1.$$

Se $\|f\|_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}} \leq \frac{\delta_a}{L \frac{2m}{p-1}}$, a demonstração da parte (i) mostra que $\|u^s\|_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}} \leq \frac{2\delta_a}{1 - \tau_a}$, para todo $s \in \mathbb{N}$, e assim, a estimativa (2.3.33) implica que

$$\|w^{s+1}\|_{a, \vec{\alpha}} \leq \left(p l^p C_{\vec{\alpha}} L_a \frac{2^p \delta_a^{p-1}}{(1 - \tau_a)^{p-1}} + \tau_a \right) \|w^s\|_{a, \vec{\alpha}}. \quad (2.3.34)$$

Pela escolha de δ_a , (2.3.34) mostra que $\{u^s\}$ é uma sequência contrativa em $\mathcal{H}_{a, \vec{\alpha}}$, e portanto converge neste espaço para uma $\bar{u} \in \mathcal{H}_{a, \vec{\alpha}}$. Mas, desde que $u_m \rightarrow u$ em $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$, e a convergência nos espaços $\mathcal{H}_{k, \vec{\alpha}}$ implica convergência no sentido de distribuições, temos por unicidade do limite que $\bar{u} = u$. $\square$

Demonstração do Teorema 2.2.5: Desde que f é homogênea de grau $\frac{-2mp}{p-1}$, isto é, $f(\delta x) = \delta^{-\frac{2mp}{p-1}} f(x)$, então, por (2.1.9), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\delta x) &= Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\delta x - y|^{n-2m}} f(y) dy \\ &= \delta^{n-2m} Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - \frac{y}{\delta}|^{n-2m}} \cdot \delta^{-n + \frac{2mp}{p-1}} f\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \delta^{-\frac{2m}{p-1}} \mathcal{F}(f)(x), \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

para todo $\delta > 0$, isto é, $\mathcal{F}(f)$ é homogênea de grau $-\frac{2m}{p-1}$. Considere a sequência de Picard em (2.3.31). Temos por (2.3.35) que $u^1(x)$ é homogênea de grau $-\frac{2m}{p-1}$. Também, observando que

$$\mathcal{N}(u) = \mathcal{F}(u|u|^{p-1}) \text{ e } \mathcal{T}(u) = \mathcal{F}(Vu), \quad (2.3.36)$$

e supondo que $u^s(x)$ é homogênea de grau $-\frac{2m}{p-1}$, obtemos, desde que V é homogênea de grau $2m$, que $u^{s+1}(x)$ é homogênea de mesmo grau. Assim, por indução, temos que u^s é homogênea de grau $-\frac{2m}{p-1}$, para todo $s \in \mathbb{N}$. Agora, desde que o limite $u^s \rightarrow u$ é tomado no espaço $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ com $\vec{\alpha} = \vec{0}$, cuja norma é invariante pelo *scaling* (2.1.12), pela unicidade do limite, a solução u deve satisfazer

$$u(x) = \delta^{\frac{2m}{p-1}} u(\delta x) \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n \text{ para todo } \delta > 0.$$

$\square$

Demonstração do Corolário 2.2.7: Note que pela condição (2.2.4),

$$\|V_k\|_{2m, \vec{\alpha}} \leq \sum_{i=1}^l \|h_{i,k}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} < \frac{1}{L \frac{2m}{p-1} C_{\vec{\alpha}}},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Também, como

$$\|V_k - V\|_{2m, \vec{\alpha}} \leq \sum_{i=1}^l \|h_{i,k} - h_i\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \quad (2.3.37)$$

e $h_{i,k} \rightarrow h_i$ quando $k \rightarrow \infty$, para cada $i = 1, \dots, l$, então $V_k \rightarrow V$ em $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ e temos a estimativa

$$\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < \frac{1}{L_{\frac{2m}{p-1}} C_{\vec{\alpha}}}.$$

Assim, estamos nas condições do Teorema 2.2.1. Por (2.3.30) na demonstração do Teorema 2.2.1 parte (ii), obtemos a seguinte estimativa

$$\|u_k - u\|_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}} \leq \frac{L_{\frac{2m}{p-1}}}{c} \left(\frac{2\tilde{\varepsilon} C_{\vec{\alpha}}}{1 - \tilde{\tau}} \|V_k - V\|_{2m, \vec{\alpha}} \right), \quad (2.3.38)$$

o que nos garante a convergência desejada. $\square$

Demonstração do Corolário 2.2.11:

Parte (i) Pelo Lema 1.1.8 (veja pág. 14), a estimativa para a constante $C_{\vec{\alpha}}$ depende fortemente da posição das singularidades e do raio d_j de cada bola B_j tomada na demonstração deste lema. Quando $l = 2$, isto é, quando o potencial apresenta duas singularidades, o melhor raio a ser tomado de maneira a tornar $C_{\vec{\alpha}}$ o menor possível é igual a metade da distância entre as singularidades. Com efeito, sendo $\vec{\alpha} = (x_1, x_2)$, tome $d_1 = d_2 = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$ no Lema 1.1.8. Assim,

$$C_{i,j} := \sup_{x \in B_i} \left(\frac{|x - x_i|}{|x - x_j|} \right) = 1,$$

$$E_{i,j} = \sup_{x \in B_i^C} \left(\frac{|x - x_j|}{|x - x_i|} \right) = 3,$$

e portanto, substituindo estes valores em (1.1.33), temos que $C_{\vec{\alpha}} = 2.3^s$ onde $s = \min \left\{ \frac{2m}{p-1}, 2m \right\}$.

Além disso, pelo Lema 1.4.7 e por (2.1.4) (veja pág. 22 e 27), fazendo as devidas substituições obtemos

$$\begin{aligned} L_{\frac{2m}{p-1}} &= Q_{n,m} K \left(n - \frac{2m}{p-1}, 2m \right) \\ &= \frac{\Gamma \left(\frac{n}{2} - \frac{mp}{p-1} \right) \Gamma \left(\frac{m}{p-1} \right)}{2^{2m} \Gamma \left(\frac{n}{2} - \frac{m}{p-1} \right) \Gamma \left(\frac{mp}{p-1} \right)}. \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Assim, a condição $\|V\|_{2m, \vec{\alpha}} < \frac{1}{L_{\frac{2m}{p-1}} C_{\vec{\alpha}}}$ e (2.3.39) nos levam a (2.2.6).

Parte (ii) No caso em que as singularidades são vértices de um polígono regular, temos que $C_{\vec{\alpha}}$ irá depender da maior distância entre os vértices, e por isso consideramos dois casos. Se l é par, então temos que a maior distância entre dois vértices é dada por

$$\max\{|x_i - x_j|\} = \frac{A}{\sin \left(\frac{\pi}{l} \right)},$$

onde A é a distância entre dois vértices consecutivos. Assim, tomando $d_j = \frac{A}{2}$, para todo $j = 1, \dots, l$, na demonstração do Lema (1.1.8), obtemos

$$C_{i,j} := \sup_{x \in B_i} \left(\frac{|x - x_i|}{|x - x_j|} \right) \leq 1,$$

e

$$E_{i,j} = \sup_{x \in B_i^C} \left(\frac{|x - x_j|}{|x - x_i|} \right) \leq 1 + \frac{2 \max\{|x_i - x_j|\}}{A} = 1 + \frac{2}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{l}\right)}.$$

Substituindo estes valores em (1.1.33) (veja pág. 16), temos que $C_{\vec{\alpha}} = 2 \left(1 + \frac{2}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{l}\right)} \right)^s$ onde $s = \min \left\{ \frac{2m}{p-1}, 2m \right\}$. Se l é ímpar, então

$$\max\{|x_i - x_j|\} = \frac{A}{2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2l}\right)}.$$

Segue que

$$C_{i,j} := \sup_{x \in B_i} \left(\frac{|x - x_i|}{|x - x_j|} \right) \leq 1,$$

e

$$E_{i,j} = \sup_{x \in B_i^C} \left(\frac{|x - x_j|}{|x - x_i|} \right) \leq 1 + \frac{2 \max\{|x_i - x_j|\}}{A} = 1 + \frac{1}{2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2l}\right)}.$$

Assim, substituindo estes valores em (1.1.33), obtemos $C_{\vec{\alpha}} = 2 \left(1 + \frac{1}{2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2l}\right)} \right)^s$, onde $s = \min \left\{ \frac{2m}{p-1}, 2m \right\}$.

Agora, usando (2.3.39) e os valores encontrados para $C_{\vec{\alpha}}$ nos casos acima, obtemos as estimativas (2.2.7) e (2.2.8). $\square$

2.3.4 Demonstração do Teorema 2.2.13

Parte (i) Temos que

$$\psi = u|u|^{p-1} + Vu + f \in \mathcal{H}_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}},$$

pois a solução u obtida no Teorema 2.2.1 (i) pertence a $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$, $V \in \mathcal{H}_{2m, \vec{\alpha}}$ e $f \in \mathcal{H}_{\frac{2mp}{p-1}, \vec{\alpha}}$. Por (2.1.5) (veja pág. 27) podemos escrever

$$u = \mathcal{F}(u|u|^{p-1} + Vu + f).$$

O Lema 2.3.1 (veja pág. 33), com $d = \frac{2m}{p-1}$ leva-nos a $\partial^\beta u \in \mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1} + |\beta|, \vec{\alpha}}$, para todo β multi-índice tal que $0 \leq |\beta| < 2m$, e portanto $u \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$.

No que segue mostraremos que u satisfaz a primeira condição em (2.1.1) no sentido de distribuições. Considere uma função teste arbitrária $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^m u(x), \varphi(x) \rangle &= \langle u(x), (-\Delta)^m \varphi(x) \rangle \\ &= \left\langle Q_{n,m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2m}} (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy, (-\Delta)^m \varphi(x) \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left\langle Q_{n,m} \frac{1}{|x-y|^{n-2m}}, (-\Delta)^m \varphi \right\rangle \right) (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy. \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

Relembrando que a função de Green $\Gamma(x, y) = Q_{n,m} \frac{1}{|x-y|^{n-2m}}$ satisfaz $(-\Delta)_x^m [\Gamma(x, y)] = \delta_{\{y\}}(x)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, obtemos de (2.3.40) que

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^m u(x), \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \delta_y(x), \varphi(x) \rangle (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy \\ &= \langle u|u|^{p-1} + Vu + f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

como queríamos.

Parte (ii) Seja Ω um aberto suave contido em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$. Pelo *item (i)*, temos que $u \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}) \subset W_{loc}^{2m-1, \infty}(\Omega)$. Desde que $(-\Delta)^m u(x) = \psi$ fracamente com

$$\psi = u|u|^{p-1} + Vu + f \in L_{loc}^\infty(\Omega),$$

regularidade elíptica implica que $u \in H_{loc}^{2m}(\Omega)$. Segue que $u \in H_{loc}^{2m}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$, $(-\Delta)^m u(x) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$, e então u satisfaz a EDP em (2.1.1)₁ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

Parte (iii) Assumindo ainda que $f, V \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\})$, obtemos

$$(-\Delta)^m u = u|u|^{p-1} + Vu + f \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}). \quad (2.3.41)$$

Segue do item (ii) e de (2.3.41) que u verifica a EDP em (2.1.1) para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$. $\square$

2.3.5 Demonstração do Teorema 2.2.16

Parte (i) Pelo argumento de contração empregado na demonstração do Teorema 2.2.1 (i), temos que a solução u é o limite em $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \tilde{\alpha}}$ da sequência de Picard em (2.3.31). Desde que $f(x) \geq 0$ e $f(x) \neq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos que $F(f) = u^1$ é positiva. Supondo $u^s > 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ para $s \in \mathbb{N}$, então

$$u^{s+1} = u^1 + \mathcal{N}(u^s) + \mathcal{T}(u^s) = u^1 + \mathcal{F}(u^s |u^s|^{p-1} + Vu^s) > 0,$$

pois $V \geq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, um argumento de indução assegura que todos os elementos de (2.3.31) são positivos.

Se $u^s(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, então $u \geq 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, usando que u é uma solução, obtemos

$$u = u^1 + \mathcal{F}(u|u|^{p-1} + Vu) \geq u^1 + 0 > 0, \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, é suficiente mostrarmos que a convergência $u^s \rightarrow u$ em $\mathcal{H}_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}}$ implica $u^s(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Para isto, seja $u^s - u = w_1^s + \dots + w_l^s$ uma decomposição ótima para cada $s \in \mathbb{N}$. Dada uma decomposição $u^s = u_1^s + \dots + u_l^s$, existe uma decomposição $u = u_1 + \dots + u_l$ tal que

$$w_j^s = u_j^s - u_j, \text{ para todo } j = 1, \dots, l.$$

Temos que $\|u_j^s - u_j\|_{\frac{2m}{p-1}, x_j} = \|w_j^s\|_{\frac{2m}{p-1}, x_j} \rightarrow 0$, para todo $j = 1, \dots, l$, visto que $\|u^s - u\|_{\frac{2m}{p-1}, \vec{\alpha}} \rightarrow 0$, e $w_1^s + \dots + w_l^s$ é ótima. Agora, usando que a convergência na norma $\|\cdot\|_{\frac{2m}{p-1}, x_j}$ implica convergência pontual em quase todo ponto, segue que $u_j^s \rightarrow u_j$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $j = 1, \dots, l$. Logo,

$$u^s = \sum_{j=1}^l u_j^s \rightarrow \sum_{j=1}^l u_j = u \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n,$$

como queríamos.

Parte (ii). Primeiro mostraremos que $u^1 = \mathcal{F}(f)$ é $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétrica quando f apresenta esta propriedade. Seja $f = f_1 + \dots + f_l$ uma decomposição para f como na Definição 1.2.1. Observe que

$$\mathcal{F}(f_{\sigma(j)})(T_j(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_j(x) - y|^{n-2m}} f_{\sigma(j)}(y) dy.$$

Desde que T_j é inversível e seu jacobiano é 1, a mudança de variáveis $y = T_j(z)$ nos mostra que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_j(x) - y|^{n-2m}} f_{\sigma(j)}(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_j(x) - T_j(z)|^{n-2m}} f_{\sigma(j)}(T_j(z)) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - z|^{n-2m}} f_j(z) dz. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_1) + \dots + \mathcal{F}(f_l)$ é uma decomposição para $\mathcal{F}(f)$ verificando $\mathcal{F}(f_{\sigma(j)})(T_j(x)) = \mathcal{F}(f_j)(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $j = 1, \dots, l$ e todo $T \in O_{\vec{\alpha}, \sigma}$.

Agora, usando $\mathcal{N}(u) = \mathcal{F}(u|u|^{p-1})$ e $\mathcal{T}(u) = \mathcal{F}(Vu)$, inferimos do Lema 2.3.2 que se u é multipolar simétrica com respeito a $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$, então $\mathcal{N}(u)$ e $\mathcal{T}(u)$ também apresentam esta propriedade. Por indução, segue que todos os termos u^s de (2.3.31) são $(\sigma, O_{\vec{\alpha}, \sigma})$ -multipolar simétricos. Além disso, para cada $s \in \mathbb{N}$, temos uma decomposição $u^s = u_1^s + \dots + u_l^s$ tal que

$$u_{\sigma(j)}^s(T_j(x)) = u_j^s(x) \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3.42)$$

Procedendo como na demonstração da *Parte (i)*, existe uma decomposição $u = u_1 + \dots + u_l$ tal que

$u_j^s(x) \rightarrow u_j(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $j = 1, \dots, l$, e então $u_{\sigma(j)}^s(T_j(x)) \rightarrow u_{\sigma(j)}(T_j(x))$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Em vista de (2.3.42) e pela unicidade do limite pontual, concluímos que $u_{\sigma(j)}(T_j(x)) = u_j(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $j = 1, \dots, l$, como queríamos. $\square$

Capítulo 3

Equação do calor linear com potenciais singulares

Neste capítulo apresentamos resultados de boa-colocação global, e comportamento assintótico para a equação do calor linear com potencial. Este estudo é desenvolvido nos espaços PM^k . Também estudamos propriedades qualitativas da solução como autossimilaridade, positividade e simetria radial.

Este capítulo está dividido em três seções. Na Seção 3.1 fixamos algumas notações, apresentamos a noção de solução utilizada, e definimos os espaços funcionais nos quais buscamos tais soluções. Os resultados obtidos para (0.0.11) estão enunciados na Seção 3.2, que está subdividida em três subseções. Na primeira temos o resultado de boa-colocação, na segunda tratamos sobre autossimilaridade, positividade e simetria radial, e a terceira é destinada a análise do comportamento assintótico. A Seção 3.3 esta reservada para as demonstrações dos resultados enunciados na Seção 3.2.

3.1 Formulação funcional

Para conveniência o leitor, relembramos o problema a ser estudado neste capítulo:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - Vu = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

onde $n \geq 3$ e $V(x)$ é um potencial singular.

Estudaremos (3.1.1) no espaço PM^k , cuja norma é definida via transformada de Fourier. O fluxo de (3.1.1) será estudado no seguinte espaço

$$X_k = BC_w([0, \infty); PM^k), \quad (3.1.2)$$

onde $BC_w(I; X)$ representa o conjunto de funções limitadas de um intervalo I em um espaço de Banach $X \subset \mathcal{S}'$, que são fracamente contínuas no tempo no sentido de $\mathcal{S}'$, para cada $t \geq 0$. Logo, dada $u \in BC_w([0, \infty); PM^k)$ temos que para cada $t_0 \in [0, \infty)$,

$$\langle u(t), \phi \rangle \rightarrow \langle u(t_0), \phi \rangle, \text{ quando } t \rightarrow t_0, \quad (3.1.3)$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Note que $X_k = BC_w([0, \infty); PM^k)$ munido com a norma

$$\|u\|_{X_k} = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{PM^k} \quad (3.1.4)$$

é um espaço de Banach. Mostraremos esta propriedade na sequência.

É um resultado bastante conhecido, que o espaço das funções limitadas de um intervalo I em um espaço de Banach X , é Banach. Considere uma sequência de Cauchy $(u_s)_{s \in \mathbb{N}}$ em X_k . Então, existe uma função u limitada de I em PM^k tal que $u_s \rightarrow u$ quando $s \rightarrow \infty$, na norma de X_k . Mostremos que u é fracamente contínua no tempo no sentido de $\mathcal{S}'$. Note que, para cada $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} |\langle u(t) - u(t_0), \phi \rangle| &\leq |\langle u(t) - u_s(t), \phi \rangle| + |\langle u_s(t) - u_s(t_0), \phi \rangle| \\ &\quad + |\langle u_s(t_0) - u(t_0), \phi \rangle| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^k |\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_s(\xi, t)| |\xi|^{-k} |\check{\phi}(\xi)| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^k |\hat{u}_s(\xi, t_0) - \hat{u}(\xi, t_0)| |\xi|^{-k} |\check{\phi}(\xi)| \\ &\quad + |\langle u_s(t) - u_s(t_0), \phi \rangle|. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Pela definição da norma em PM^K , e desde que $0 \leq k < n$, obtemos de (3.1.5) que

$$\begin{aligned} |\langle u(t) - u(t_0), \phi \rangle| &\leq 2\|u_s - u\|_{X_k} \left(\|\check{\phi}\|_{L^\infty} \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^k} \right) + \|\check{\phi}\|_{L^1} \right) \\ &\quad + |\langle u_s(t) - u_s(t_0), \phi \rangle|. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Como $u_s(t) \rightarrow u_s(t_0)$ em $\mathcal{S}'$, a desigualdade em (3.1.6) implica que

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} |\langle u(t) - u(t_0), \phi \rangle| \leq 2\|u_s - u\|_{X_k} \left(\|\check{\phi}\|_{L^\infty} \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^k} \right) + \|\check{\phi}\|_{L^1} \right). \quad (3.1.7)$$

Assim, como $s \in \mathbb{N}$ e $\phi \in \mathcal{S}$ são arbitrários, temos que o limite superior em (3.1.7) é zero, de onde segue que

$$\lim_{t \rightarrow T} \langle u(t) - u(t_0), \phi \rangle = 0, \quad (3.1.8)$$

mostrando a convergência em (3.1.3).

Seja $g(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/4t}$ o núcleo Gaussiano, isto é, a solução fundamental da equação do calor $u_t - \Delta u = 0$. Defina o operador $G(t)$ como sendo o operador convolução com $g(x, t)$. Logo,

$$G(t)(u)(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u(y) dy. \quad (3.1.9)$$

Pelo princípio de Duhamel, obtemos que (3.1.1) é equivalente a seguinte equação integral

$$u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)Vu(s)ds. \quad (3.1.10)$$

Estamos interessados em buscar soluções $u(x, t) \in X_k$, isto é, para cada $t > 0$, a função $u(t) = u(., t)$ pertence ao espaço PM^k , que é um subespaço das distribuições temperadas que impõe condições na transformada de Fourier (veja (1.3.7)). Para isto precisamos esclarecer em que sentido a equação integral em (3.1.10) será entendida.

Note que, sendo $\hat{g}(\xi, t)$ a transformada de Fourier de $g(x, t)$ para cada $t > 0$, então

$$\hat{g}(\xi, t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}. \quad (3.1.11)$$

Calculando-se formalmente a transformada de Fourier dos termos em (3.1.10), obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{G(t)u_0}(\xi, t) &= \hat{g}(\xi, t)\hat{u}_0(\xi) \\ &= e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t G(t-s)Vu(s)ds \right)^\wedge(\xi, t) &= \int_0^t \hat{g}(\xi, t-s)\widehat{Vu(s)}(\xi, s) ds \\ &= \int_0^t e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-s)} (\hat{V} * \hat{u})(\xi, s) ds. \end{aligned}$$

Assim, o problema (3.1.1) é formalmente equivalente a seguinte equação funcional

$$u(t) = G(t)u_0 + L_V(u)(t), \quad (3.1.12)$$

onde os operadores $G(t)u_0$ e $L_V(u)(t)$ são definidos via transformada de Fourier como

$$\widehat{G(t)u_0}(\xi, t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi) \quad (3.1.13)$$

$$\widehat{L_V(u)(t)}(\xi) = \int_0^t e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-s)} (\hat{V} * \hat{u})(\xi, s) ds. \quad (3.1.14)$$

A igualdade (3.1.12) deve ser entendida no sentido de distribuições temperadas $\mathcal{S}'$, com os operadores definidos como em (3.1.13) e (3.1.14). Note que, se u e V são suficientemente regulares, então $L_V(u)(t) = \int_0^t G(t-s)(Vu)(s) ds$ no sentido de Bochner em PM^k . Porém, para u e V gerais, o operador $L_V(u)$ não pode ser entendido em tal sentido. Neste caso, este deve ser entendido em um sentido fraco (para maiores detalhes veja [65], [13], [15]).

3.2 Resultados

Nesta seção enunciaremos os resultados obtidos para o problema (3.1.1). Dividiremos esta em três subseções. A primeira contém os resultados de existência, unicidade e dependência contínua para (3.1.12). Na segunda, enunciamos as propriedades qualitativas das soluções obtidas, como autossimilaridade, positividade e simetria radial, e na terceira analisamos o comportamento assintótico dessas soluções.

3.2.1 Boa-colocação

O próximo resultado garante a existência de uma solução global para (3.1.12) no espaço X_k , e também a dependência contínua desta solução com relação aos dados iniciais. Além disso, também mostramos que quando V é o potencial de Hardy, isto é, $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$, a condição para boa-colocação em X_k é $0 \leq |\lambda| < \lambda_*$, que é a mesma condição que surge para boa-colocação em L^2 .

Teorema 3.2.1. Suponha que $V \in PM^{n-2}$ e $u_0 \in PM^k$ com $2 < k < n$. Seja $K(\alpha, \beta)$ como em (1.4.7) (veja pág. 32).

- (i) (Existência e unicidade) Seja $C_{n-2,k} = \frac{K(2,n-k)}{4\pi^2}$ e assuma que

$$\|V\|_{PM^{n-2}} < \frac{1}{C_{n-2,k}}. \quad (3.2.1)$$

Então, a equação funcional (3.1.12) tem uma única solução u em X_k .

- (ii) (Potencial de Hardy) Para $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$, a condição sobre V torna-se equivalente a $|\lambda| < (k-2)(n-k)$. Note que o máximo de $(k-2)(n-k)$ é $\lambda_* = \frac{(n-2)^2}{4}$ que é atingido quando $k = \frac{n+2}{2}$. Então, o item (i) nos dá uma solução global u para (3.1.12) para todo $u_0 \in PM^{1+\frac{n}{2}}$ e $0 \leq |\lambda| < \lambda_*$.
- (iii) (Dependência contínua) A aplicação que leva o dado inicial e o potencial na solução $(u_0, V) \rightarrow u$ é Lipschitz contínua de $PM^k \times PM^{n-2}$ para X_k . Mais precisamente, se u e v são soluções obtidas no item (i) correspondentes a u_0, V e v_0, W , respectivamente, então

$$\|u - v\|_{X_k} \leq \frac{1}{1 - C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}}} \left(\|u_0 - v_0\|_{PM^k} + \frac{C_{n-2,k} \|v_0\|_{PM^k}}{1 - C_{n-2,k} \|W\|_{PM^{n-2}}} \|V - W\|_{PM^{n-2}} \right)$$

O Teorema 3.2.1 pode ser aplicado para outros tipos de potenciais singulares dando condições explícitas sobre o tamanho deles. O corolário abaixo apresenta alguns exemplos de tipos de potenciais que aparecem em contextos físicos.

Corolário 3.2.2. Assuma as hipóteses do Teorema 3.2.1. Seja $\beta(\cdot, \cdot)$ a função Beta e $|\cdot|$ a norma da soma em $\mathbb{R}^n$.

- (i) (Potencial multipolar isotrópico) Seja $V(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{|x - x^j|^2}$ com $x^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$. A condição (3.2.1) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^m |\lambda_j| < (k-2)(n-k). \quad (3.2.2)$$

A melhor restrição em (3.2.2) acontece para $k = \frac{n+2}{2}$. Neste caso, obtemos

$$\sum_{j=1}^m |\lambda_j| < \lambda_* = \frac{(n-2)^2}{4}. \quad (3.2.3)$$

- (ii) (Potencial dipolo) Seja $V(x) = \frac{d \cdot x}{|x|^3}$ onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. A condição (3.2.1) é equivalente a

$$|d| < \frac{\pi}{(n-2)} \frac{(k-2)(n-k)}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)}. \quad (3.2.4)$$

Para $k = \frac{n+2}{2}$ obtemos

$$|d| < \frac{\pi}{(n-2)} \frac{\lambda_*}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)}, \quad (3.2.5)$$

que corresponde ao máximo do valor da expressão no lado direito em (3.2.4).

- (iii) (Potencial multipolar anisotrópico) Seja $V(x) = \sum_{j=1}^m \frac{(x-x^j) \cdot d^j}{|x-x^j|^3}$ com $x^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)$ e $d^j = (d_1^j, d_2^j, \dots, d_n^j)$. A condição (3.2.1) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^m |d^j| < \frac{\pi}{(n-2)} \frac{(k-2)(n-k)}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)}. \quad (3.2.6)$$

Similarmente ao item (ii), o máximo do valor da expressão no lado direito de (3.2.6) é atingido quando $k = \frac{n+2}{2}$. Neste caso, obtemos

$$\sum_{j=1}^m |d^j| < \frac{\pi}{(n-2)} \frac{\lambda_*}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)}. \quad (3.2.7)$$

3.2.2 Autossimilaridade, positividade e simetria radial

Assumindo que o potencial V é homogêneo de grau -2 e u_0 é homogêneo de grau $-(n-k)$, isto é,

$$V(\delta x) = \delta^{-2} V(x) \text{ e } u_0(\delta x) = \delta^{-(n-k)} u_0(x)$$

obtemos que, se $u(x, t)$ é uma solução do problema (3.1.1), então

$$u_\delta(x, t) = \delta^{n-k} u(\delta x, \delta^2 t) \quad (3.2.8)$$

também é uma solução deste mesmo problema.

Isto mostra que (3.1.1) tem o *scaling*

$$u(x, t) \rightarrow u_\delta(x, t). \quad (3.2.9)$$

Definição 3.2.3. Dizemos que uma solução $u(x, t)$ de (3.1.1) é autossimilar se esta é invariante pelo *scaling* (3.2.9), isto é,

$$u = u_\delta, \forall \delta > 0.$$

No resultado que segue, assumindo uma certa homogeneidade sobre u_0 e V , obtemos que a solução u de (3.1.12) é autossimilar. Além disso, mostramos que a solução é positiva quando V e u_0 também são, e dependendo da simetria radial dessas funções, também investigaremos se u é radialmente simétrica ou não.

Teorema 3.2.4. Assuma as hipóteses do Teorema 3.2.1.

- (i) (Autossimilaridade) Assuma que u_0 e V são homogêneas de grau $-(n-k)$ e -2 , respectivamente. Então, a solução u satisfaz

$$u(x, t) = \delta^{n-k} u(\delta x, \delta^2 t), \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ (na variável } x), \quad (3.2.10)$$

para todo $t > 0$, i.e. u é autossimilar.

- (ii) (Positividade) Suponha $u_0 \not\equiv 0$. Se $V, u_0 \geq 0$, então u é positiva. Da mesma maneira, se $V \geq 0$ e $u_0 \leq 0$, então u é negativa.
- (iii) (Simetria radial) Seja V radialmente simétrica. A solução u obtida no Teorema 3.2.1 é radialmente simétrica para cada $t > 0$ se, e somente se, u_0 é radialmente simétrica.

3.2.3 Comportamento assintótico

Considere $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$ com $0 \leq |\lambda| < \lambda_*$ em (3.1.1). Em [63], os autores mostram que (3.1.1) admite duas soluções estacionárias explícitas

$$\omega_1(x) = A_1 |x|^{-\frac{n-2}{2}+q} \text{ e } \omega_2(x) = A_2 |x|^{-\frac{n-2}{2}-q}. \quad (3.2.11)$$

Para conveniência do leitor incluiremos a demonstração deste fato a seguir. Suponha que u é uma solução radial estacionária de (3.1.1), isto é, $u(x, t) = u(r)$ com $r = |x|$. Assim, o laplaciano de $u(r)$ é dado por

$$(-\Delta u) = u_{rr} + \left(\frac{n-1}{r}\right) u_r. \quad (3.2.12)$$

Tomando $v(r, t) = u(r, t)r^{\frac{n-2}{2}}$, e sendo u_r e v_r as derivadas de u e v com relação a r , respectivamente, vemos que

$$u_r = v_r r^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)} - \left(\frac{n-2}{2}\right) v r^{-\frac{n}{2}},$$

e

$$u_{rr} = v_{rr} r^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)} - (n-2) v_r r^{-\left(\frac{n}{2}\right)} + \left(\frac{n-2}{2}\right) \frac{n}{2} v r^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)}.$$

Assim, substituindo as duas igualdades anteriores em (3.2.12), obtemos

$$\Delta u = v_{rr} r^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)} + \frac{v_r}{r} r^{-\left(\frac{n}{2}\right)} + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{n}{2} v r^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)}. \quad (3.2.13)$$

Desde que estamos supondo que u é uma solução estacionária de (3.1.1), então $u_t = 0$. Usando (3.2.13) em (3.1.1), e o fato de que $\lambda_* = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, obtemos a equação para v

$$v_{rr} + \frac{v_r}{r} + (\lambda - \lambda_*) \frac{v}{r^2} = 0. \quad (3.2.14)$$

A equação acima admite duas soluções da forma

$$v_1(r) = A_1 |x|^q \text{ e } v_2(r) = A_2 |x|^{-q}, \quad (3.2.15)$$

onde os A_i 's são constantes reais arbitrárias e $q = \sqrt{\lambda_* - \bar{\lambda}}$. Portanto, as funções

$$\omega_1 = A_1 |x|^{-\frac{n-2}{2}+q} \text{ e } \omega_2 = A_2 |x|^{-\frac{n-2}{2}-q} \quad (3.2.16)$$

são duas soluções estacionárias explícitas de (3.1.12).

Aplicando o Lema 1.4.4 (veja pág. 24), com $l = 0$ e $\alpha = \frac{n+2}{2} + q$, obtemos que

$$\widehat{\omega}_1(\xi) = \bar{A}_1 |x|^{\frac{n+2}{2}+q}.$$

Da mesma maneira, tomando agora $\alpha = \frac{n+2}{2} - q$ no Lema 1.4.4, obtemos também que

$$\widehat{\omega}_2(\xi) = \bar{A}_2 |x|^{\frac{n+2}{2}-q}.$$

Logo, os índices

$$k_1 = \frac{n+2}{2} + q \text{ e } k_2 = \frac{n+2}{2} - q \quad (3.2.17)$$

são os únicos tais que $\omega_1 \in PM^{k_1}$ e $\omega_2 \in PM^{k_2}$. A afirmação de unicidade no Teorema 3.2.1 diz que a única solução de (3.1.12) em X_{k_i} , com dado inicial ω_i , é a correspondente estacionária.

No próximo resultado, analisamos o comportamento assintótico das soluções e daremos em particular um critério para que estas converjam para um estado estacionário. Aqui empregamos algumas ideias introduzidas em [15].

Teorema 3.2.5. Assuma as hipóteses do Teorema 3.2.1. Sejam u e v duas soluções para (3.1.12) em X_k correspondentes aos dados u_0 e $v_0 \in PM^k$, respectivamente. Temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{PM^k} = 0 \quad (3.2.18)$$

se, e somente se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^k} = 0. \quad (3.2.19)$$

A condição (3.2.19) é verificada para $u_0 = v_0 + \varphi$ com $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se $V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}$ com $|\lambda| < (k_i - 2)(n - k_i)$, onde k_i é como em (3.2.17), e $u_0 = \omega_i + \varphi$ com $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - \omega_i\|_{PM^{k_i}} = 0, \quad (3.2.20)$$

o que mostra a existência de uma "bacia atratora" (com um abuso da expressão) ao redor de cada solução estacionária ω_i em PM^{k_i} .

Observação 3.2.6. Sejam $V(x) = \lambda|x|^{-2}$, k como no Teorema 3.2.1, e $u_0(x) = x_j |x|^{-(n-k+1)}$. A solução u com dado inicial u_0 , dada pelo Teorema 3.2.1 (i), não é estacionária. De fato, supondo que $v(x, t) = u_0(x)$ para todo $t > 0$, temos que

$$\Delta v = -(n - k + 1)(k - 1)x_j |x|^{-(n-k+3)}, \quad (3.2.21)$$

de onde segue que

$$-\Delta v - Vv = ((n - k + 1)(k - 1) - \lambda)x_j |x|^{-(n-k+3)}. \quad (3.2.22)$$

Assim, v é uma solução estacionária de (3.1.1), e logo de (3.1.12), se e somente se,

$$\lambda = (n - k + 1)(k - 1).$$

Portanto, em vista da condição $|\lambda| < (n - k)(k - 2)$ no Teorema 3.2.1 (ii), e desde que $(n - k)(k - 2) < (n - k + 1)(k - 1)$, concluímos o afirmado. Além disso, u_0 é uma função homogênea não-radial de grau $-(n - k)$. Segue do Teorema 3.2.4 (i) que a correspondente solução u é autossimilar. Note que no caso $k = k_i$, tomando uma solução estacionária ω_i e sendo $\psi = u_0 - \omega_i \not\equiv 0$ homogênea de grau $-(n - k_i)$, fazendo a mudança de variável $w = \xi\sqrt{t}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \widehat{G(t)\psi}(\xi) \right| &= \left| e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \hat{\psi}(\xi) \right| \\ &= \left| e^{-4\pi^2|w|^2} \hat{\psi}\left(\frac{w}{\sqrt{t}}\right) \right| \\ &= \left| e^{-4\pi^2|w|^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{-k_i} \hat{\psi}(w) \right|. \end{aligned}$$

Segue que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{k_i} \left| \widehat{G(t)\psi}(\xi) \right| = \sup_{\frac{w}{\sqrt{t}} \in \mathbb{R}^n} |w|^{k_i} \left| e^{-4\pi^2|w|^2} \hat{\psi}(w) \right| = \sup_{w \in \mathbb{R}^n} |w|^{-k_i} \left| \widehat{G(1)\psi}(w) \right|,$$

e então

$$\|G(t)\psi\|_{PM^{k_i}} = \|G(1)\psi\|_{PM^{k_i}}, \text{ para todo } t > 0.$$

Assim, passando o limite quando $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t)\psi\|_{PM^{k_i}} = \|G(1)\psi\|_{PM^{k_i}} \neq 0.$$

Portanto, a condição (3.2.19) não é satisfeita e o comportamento assintótico de u não é descrito por uma solução estacionária ω_i . Em vez disso, obtemos de (3.2.18) uma "bacia atratora" ao redor da solução autossimilar u . Mais precisamente, se $v_0 = u_0 + \varphi$, com $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então a solução perturbada v é atraída para a solução u no sentido de (3.2.18). De fato, (3.2.19) induz uma relação de equivalência no conjunto PM^k de dados iniciais, dada por:

$$u_0 \sim v_0 \text{ se, e somente se vale (3.2.19).} \quad (3.2.23)$$

As considerações acima mostram um comportamento assintótico diversificado das soluções em PM^k com infinitos possíveis assintóticos que são caracterizados pelas classes de equivalência de dados iniciais.

3.2.4 Uma equação parabólica de ordem mais alta

Considere o seguinte problema para a equação parabólica de ordem $2m$ com potencial singular crítico

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^m u - \frac{\lambda}{|x|^{2m}} u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (3.2.24)$$

onde $n > 2m$. Em [35], usando a desigualdade de Hardy, os autores estenderam os resultados de Baras-Goldstein obtendo um valor limiar explícito λ_m para boa-colocação de soluções em L^2 . Este valor é chamado de a melhor constante de Hardy de desigualdades multiplicativas envolvendo $V(x) = \lambda |x|^{-2m}$, e é dado por

$$\lambda_m = \begin{cases} B_2 B_4 \dots B_m & \text{para } m \text{ par,} \\ B_3 B_5 \dots B_m \lambda_* & \text{para } m \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (3.2.25)$$

onde $B_k = \left[\frac{(n-2k)(n+2k-4)}{4} \right]^2$ para cada $k = 1, 2, \dots, m$, e $\lambda_* = \frac{(n-2)^2}{4}$.

Com algumas adaptações nos argumentos, podemos estender os resultados do Teorema 3.2.1 para o problema (3.2.24), obtendo-se boa-colocação das soluções em PM^k para $0 \leq |\lambda| < \lambda_{k,m}$, onde $\lambda_{k,m}$ é uma constante que depende de k, n e m . Em particular, quando $k = \frac{n+2m}{2}$, encontramos o mesmo valor limiar obtido para boa-colocação em L^2 , isto é, $\lambda_{k,m} = \lambda_m$. Antes de enunciarmos precisamente estes resultados, faremos algumas considerações.

Seja $g_m(x, t)$ a solução fundamental da equação $u_t + (-\Delta)^m u = 0$. Defina o operador $G_m(t)$ como sendo o operador convolução com $g_m(x, t)$, ou seja,

$$G_m(t)(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_m(x - y, t) f(y) dy.$$

A transformada de Fourier de $g_m(x, t)$ é dada por

$$\widehat{g_m(t)}(\xi) = e^{-(2\pi)^{2m} |\xi|^{2m} t}. \quad (3.2.26)$$

Segue que

$$\widehat{G_m(t)f}(\xi) = e^{-(2\pi)^{2m} |\xi|^{2m} t} \hat{f}(\xi, t). \quad (3.2.27)$$

Note que, aplicando o Lema 1.4.4 com $l = 0$ e $\alpha = n - 2m$, obtemos que

$$\left(\frac{\lambda}{|x|^{2m}} \right)^\wedge (\xi) = \gamma_{0,n-2m} \frac{\lambda}{|\xi|^{n-2m}}, \quad (3.2.28)$$

onde $\gamma_{0,n-2m} = \frac{\pi^{2m-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n-2m}{2})}{(m+1)!}$. Isto nos diz que $V_\lambda(x) := \frac{\lambda}{|x|^{2m}} \in PM^{n-2m}$ e

$$\|V_\lambda\|_{PM^{n-2m}} = \gamma_{0,n-2m} |\lambda|. \quad (3.2.29)$$

Analogamente a (3.1.1), o problema (3.2.24) é formalmente equivalente a seguinte equação funcional

$$u(t) = G_m(t)u_0 + L_\lambda(u)(t), \quad (3.2.30)$$

onde os operadores $G_m(t)u_0$ e $L_\lambda(u)(t)$ são definidos via transformada de Fourier como

$$\widehat{G_m(t)u_0}(\xi, t) = e^{-(2\pi)^{2m}|\xi|^{2m}t} \hat{u}_0(\xi) \quad (3.2.31)$$

$$\widehat{L_\lambda(u)(t)}(\xi) = \gamma_{0,n-2m}\lambda \int_0^t e^{-(2\pi)^{2m}|\xi|^{2m}(t-s)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi - \eta|^{n-2m}} \hat{u}(\xi, s) d\eta \right) ds. \quad (3.2.32)$$

A igualdade em (3.2.30) deve ser entendida no sentido de distribuições temperadas com os operadores definidos via transformada de Fourier como em (3.2.31) e (3.2.32).

Assumindo que u_0 é homogêneo de grau $-(n-k)$, que $u(x, t)$ é uma solução do problema (3.2.24), temos que u_δ definida por

$$u_\delta(x, t) = \delta^{n-k} u(\delta x, \delta^{2m} t), \delta > 0, \quad (3.2.33)$$

é também uma solução de (3.2.24), para todo $\delta > 0$. Portanto, a equação (3.2.24) tem o *scaling*

$$u(x, t) \rightarrow u_\delta(x, t). \quad (3.2.34)$$

No próximo teorema, mostramos a boa-colocação de (3.2.24) em PM^k , e investigamos a autossimilaridade da solução obtida.

Teorema 3.2.7. Suponha que $u_0 \in PM^k$ com $2m < k < n$.

(i) (Existência e unicidade) Seja

$$|\lambda| < \lambda_{k,m}, \quad (3.2.35)$$

onde

$$\lambda_{k,m} = \frac{2^{2m} \Gamma\left(\frac{n-k}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} - m\right)}. \quad (3.2.36)$$

Então, a equação funcional (3.2.30) tem uma única solução u em X_k .

(ii) O valor máximo de $\lambda_{k,m}$ é λ_m dado em (3.2.25), o qual é atingido quando $k = \frac{n+2m}{2}$. Então, para todo $u_0 \in PM^{\frac{n}{2}+m}$ e $0 \leq |\lambda| < \lambda_m$, o item (i) nos dá uma solução global $u \in X_{\frac{n}{2}+m}$ para (3.2.30).

(iii) (Dependência contínua) A aplicação que leva o dado inicial na solução $u_0 \rightarrow u$ é Lipschitz contínua de PM^k para X_k . Mais precisamente, se u e v são soluções obtidas no item (i) correspondentes a u_0 e v_0 , respectivamente, então

$$\|u - v\|_{X_k} \leq \frac{\lambda_{k,m}}{\lambda_{k,m} - |\lambda|} \|u_0 - v_0\|_{PM^k}.$$

(iv) (Autossimilaridade) Assuma que u_0 é homogênea de grau $-(n-k)$. Então, a solução u satisfaz

$$u(x, t) = \delta^{n-k} u(\delta x, \delta^{2m} t), \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ (na variável } x), \quad (3.2.37)$$

para todo $t > 0$.

Observação 3.2.8. O resultado sobre positividade e simetria radial também estende-se para (3.2.24), isto é, se $u_0 \geq 0$ (resp. $u_0 \leq 0$) e $u_0 \not\equiv 0$, então a solução u obtida no Teorema 3.2.7 é positiva (resp. negativa). Também, a solução u obtida no Teorema 3.2.7 é radialmente simétrica para cada $t > 0$ se, e somente se, u_0 é radialmente simétrica.

3.3 Demonstração dos resultados

Nesta seção provamos os resultados enunciados na Seção (3.2). Antes, mostramos alguns lemas que serão usados nas demonstrações.

No que segue relembramos uma estimativa no espaço PM^k para o semigrupo do calor (3.1.13). Esta estimativa esta presente por exemplo em [15], mas para conveniência do leitor, a incluiremos aqui.

Lema 3.3.1. Se $f \in PM^k$ com $k \geq 0$ então $G(t)f \in BC_w([0, \infty); PM^k)$ e

$$\sup_{t>0} \|G(t)f\|_{PM^k} \leq \|f\|_{PM^k}. \quad (3.3.1)$$

Demonstração: Temos que

$$|\xi|^k \left| \widehat{G(t)f}(\xi) \right| \leq |\xi|^k |e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \hat{f}(\xi)| \leq |\xi|^k |\hat{f}(\xi)|. \quad (3.3.2)$$

Aplicando $\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n}$ em ambos os lados de (3.3.2), obtemos a estimativa em (3.3.1). Mostremos a continuidade fraca de $G(t)f$ com respeito a t . É suficiente mostrar tal continuidade em $t = 0$. Logo, para $\phi \in \mathcal{S}$, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle G(t)f - f, \phi \rangle| &= \left| \left\langle \widehat{G(t)f} - \hat{f}, \check{\phi} \right\rangle \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} - 1| |\hat{f}(\xi)| |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 4\pi^2 t \frac{|e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} - 1|}{4\pi^2 |\xi|^2 t} |\xi|^k |\hat{f}(\xi)| |\xi|^{2-k} |\check{\phi}(\xi)| d\xi. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Aplicando $\text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n}$ no lado direito de (3.3.3), segue que

$$|\langle G(t)f - f, \phi \rangle| \leq 4\pi^2 t \cdot \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} - 1|}{4\pi^2 |\xi|^2 t} \|f\|_{PM^k} \|\check{\phi}\|_{L^1}. \quad (3.3.4)$$

Desde que o lado direito de (3.3.4) converge para 0, quando $t \rightarrow 0^+$, obtemos a continuidade fraca de $G(t)f$. □

O próximo lema mostra uma estimativa para o operador linear (3.1.14) no espaço PM^k , explicitando a dependência da norma de V e dando uma expressão exata para a constante.

Lema 3.3.2. Seja $0 < b_1, b_2 < n$ tal que $n < b_1 + b_2 < 2n$. Para $K(\alpha, \beta)$ como no Lema 1.4.3 (veja pág. 22), defina

$$C_{b_1, b_2} = \frac{1}{4\pi^2} K(n - b_1, n - b_2). \quad (3.3.5)$$

Então, $L_V(u) \in BC_w([0, \infty); PM^b)$ com $b = b_1 + b_2 + 2 - n$ e

$$\sup_{t>0} \|L_V(u)(t)\|_{PM^b} \leq C_{b_1, b_2} \|V\|_{PM^{b_1}} \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{PM^{b_2}}, \quad (3.3.6)$$

para todo $V \in PM^{b_1}$ e $u \in X_{b_2}$.

Demonstração: Usando o Lema 1.4.3, estimamos

$$\begin{aligned}
|\widehat{V} * \widehat{u}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{V}(\xi - \eta) \widehat{u}(\eta)| d\eta \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi - \eta|^{b_1}} \frac{1}{|\eta|^{b_2}} d\eta \|V\|_{PM^{b_1}} \|u\|_{PM^{b_2}} \\
&\leq K(n - b_1, n - b_2) \frac{1}{|\xi|^{b_1+b_2-n}} \|V\|_{PM^{b_1}} \|u\|_{PM^{b_2}}.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Segue de (3.1.14) e (3.3.7) que

$$\begin{aligned}
|\widehat{L_V(u)}(\xi)| &\leq \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} |\widehat{V} * (\widehat{u}(\xi, s))| ds \\
&\leq \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} \frac{K(n - b_1, n - b_2)}{|\xi|^{b_1+b_2-n}} \|V\|_{PM^{b_1}} \|u(\cdot, s)\|_{PM^{b_2}} ds \\
&\leq \frac{K(n - b_1, n - b_2)}{|\xi|^{b_1+b_2-n}} \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} ds \|V\|_{PM^{b_1}} \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{PM^{b_2}} \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2} \frac{K(n - b_1, n - b_2)}{|\xi|^{b_1+b_2+2-n}} (1 - e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}) \|V\|_{PM^{b_1}} \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{PM^{b_2}},
\end{aligned}$$

de onde segue que,

$$\|L_V(u)(t)\|_{PM^b} \leq \frac{K(n - b_1, n - b_2)}{4\pi^2} \|V\|_{PM^{b_1}} \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{PM^{b_2}}, \tag{3.3.8}$$

com $b = b_1 + b_2 + 2 - n$, para todo $t > 0$. Tomando o sup em t , obtemos a desigualdade em (3.3.6).

Para concluir a prova, precisamos mostrar que $L_V(u)(\cdot)$ é fracamente contínua no tempo em $\mathcal{S}'$. Para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $T > t$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle L_V(u)(T) - L_V(u)(t), \phi \rangle| &= \left| \left\langle \widehat{L_V(u)}(T) - \widehat{L_V(u)}(t), \check{\phi} \right\rangle \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_t^T \left| e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-\tau)} (\widehat{V} * \widehat{u})(\xi, \tau) \check{\phi}(\xi) \right| d\tau d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \left| (e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-\tau)} - e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-\tau)}) (\widehat{V} * \widehat{u})(\xi, \tau) \check{\phi}(\xi) \right| d\tau d\xi.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Considere

$$J_1 := \int_{\mathbb{R}^n} \int_t^T \left| e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-\tau)} (\widehat{V} * \widehat{u})(\xi, \tau) \check{\phi}(\xi) \right| d\tau d\xi \tag{3.3.10}$$

e

$$J_2 := \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \left| (e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-\tau)} - e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-\tau)}) (\widehat{V} * \widehat{u})(\xi, \tau) \check{\phi}(\xi) \right| d\tau d\xi. \tag{3.3.11}$$

Usando (3.3.7), estimamos

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_t^T e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-\tau)} |\xi|^{b_1+b_2-n} |(\hat{V} * \hat{u})(\xi, \tau)| |\xi|^{n-b_1-b_2} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq K(n-b_1, n-b_2) \|V\|_{PM^{b_1}} \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{PM^{b_2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_t^T e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-\tau)} |\xi|^{n-b_1-b_2} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq (T-t) K(n-b_1, n-b_2) \|V\|_{PM^{b_1}} \|u\|_{X_{b_2}} \| |\xi|^{n-b_1-b_2} \check{\phi} \|_{L^1},
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

e, desde que

$$\int_0^t 4\pi^2 |\xi|^2 e^{-4\pi^2 |\xi|^2 (t-\tau)} d\tau \leq 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t |e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-\tau)} (e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-t)} - 1)| |(\hat{V} * \hat{u})(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq (T-t) \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|e^{-4\pi^2|\xi|^2(T-t)} - 1|}{4\pi^2|\xi|^2(T-t)} \right) \|V\|_{PM^{b_1}} \|u\|_{X_{b_2}} \| |\xi|^{n-b_1-b_2} \check{\phi} \|_{L^1}.
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Assim, desde que $J_1 \rightarrow 0$ e $J_2 \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow T$, obtemos por (3.3.9) que

$$\langle L_V(u)(T) - L_V(u)(t), \phi \rangle \longrightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow T,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$. De maneira análoga, mostra-se a convergência quando $t = 0$ e a prova está concluída (para maiores detalhes veja [15], [51] e a dissertação [44]). $\square$

3.3.1 Demonstração do Teorema 3.2.1

Parte (i) Vamos definir

$$\tau = C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}}.$$

O Lema 3.3.2 com $(b_1, b_2) = (n-2, k)$ nos diz que

$$\begin{aligned}
\|L_V(u)(t) - L_V(v)(t)\|_{X_k} &= \sup_{t>0} \|L_V(u-v)(t)\|_{PM^k} \\
&\leq C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \|u-v\|_{X_k},
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

e então

$$\|L_V\|_{X_k \rightarrow X_k} \leq \tau < 1.$$

Também, o Lema 3.3.1 nos dá

$$\|G(t)u_0\|_{X_k} = \sup_{t>0} \|G(t)u_0\|_{PM^k} \leq \|u_0\|_{PM^k}. \tag{3.3.15}$$

As estimativas, (3.3.14) com $v = 0$ e (3.3.15), implicam que o operador $H : X_k \rightarrow X_k$ tal que $H(u) = G(t)u_0 + L_V(u)(t)$ está bem definido. Além disso, temos

$$\|H(u) - H(v)\|_{X_k} \leq \|L_V(u)(t) - L_V(v)(t)\|_{X_k} \leq \tau \|u - v\|_{X_k}, \text{ para toda } u, v \in X_k, \tag{3.3.16}$$

o que mostra que H é uma contração em X_k . Agora, o teorema do ponto fixo de Banach assegura a existência de uma única solução $u \in X_k$ para (3.1.12).

Parte (ii) Por (3.3.5) e pelo Lema 1.4.3, podemos calcular $C_{n-2,k}$ explicitamente como

$$\begin{aligned} C_{n-2,k} &= \frac{K(2, n-k)}{4\pi^2} \\ &= \frac{\pi^{n/2} \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)}{4\pi^2 \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+n-k}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Usando as propriedades da função Gamma em (1.4.2) e (1.4.3) (veja pág. 22), segue que

$$\Gamma\left(\frac{(2+n-k)}{2}\right) = \frac{n-k}{2} \Gamma\left(\frac{(n-k)}{2}\right) \text{ e } \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{(k-2)}{2} \Gamma\left(\frac{(k-2)}{2}\right). \quad (3.3.18)$$

Substituindo as igualdades em (3.3.18) na equação (3.3.17), obtemos

$$C_{n-2,k} = \frac{\pi^{n/2}(n-2)}{2\pi^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (k-2)(n-k)}. \quad (3.3.19)$$

Logo, pelo Teorema 3.2.1 (i), segue que

$$\|V\|_{PM^{n-2}} < \frac{1}{C_{n-2,k}} = \frac{2\pi^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (k-2)(n-k)}{\pi^{n/2}(n-2)}. \quad (3.3.20)$$

Para $V = \frac{\lambda}{|x|^2}$, aplicando o Lema 1.4.4 (veja pág. 24), com $\alpha = n-2$ e $l = 0$, obtemos

$$\hat{V}(\xi) = \lambda \pi^{2-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) |\xi|^{2-n}.$$

Assim, $V \in PM^{n-2}$ e

$$\|V\|_{PM^{n-2}} = |\lambda| \pi^{2-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right). \quad (3.3.21)$$

Em vista de (3.3.21), a condição (3.3.20) pode ser expressada por meio do tamanho de $|\lambda|$ como

$$\begin{aligned} |\lambda| &< \frac{1}{\pi^{2-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) C_{n-2,k}} \\ &= \frac{2\pi^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (n-k)(k-2)}{\pi^2 \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) (n-2)} = (n-k)(k-2). \end{aligned}$$

Observe que, como dito anteriormente, o máximo da expressão $(n-k)(k-2)$ é atingido quando $k = \frac{n+2}{2}$ e é igual a $\lambda_* = \frac{(n-2)^2}{4}$. Assim, a Parte (i) garante a existência de uma solução global u para (3.1.12) para todo $u_0 \in PM^{1+\frac{n}{2}}$ e $0 \leq |\lambda| < \lambda_*$.

Parte (iii) Sejam u e v duas soluções obtidas pelo *item (i)* com dados V, u_0 e W, v_0 , respectivamente. Primeiramente, usando (3.3.16), obtemos

$$\|v\|_{X_k} = \|H(v)\|_{X_k} \leq \|G(t)v_0\|_{X_k} + \|L_W(v)\|_{X_k} \leq \|v_0\|_{PM^k} + C_{n-2,k} \|W\|_{PM^{n-2}} \|v\|_{X_k},$$

que implica

$$\|v\|_{X_k} \leq \frac{\|v_0\|_{PM^k}}{1 - C_{n-2,k} \|W\|_{PM^{n-2}}}. \quad (3.3.22)$$

Subtraindo as respectivas equações verificadas por u, v , e em seguida aplicando a norma $\|\cdot\|_{X_k}$, estimamos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{X_k} &= \|G(t)(u_0 - v_0) + L_V(u - v) + L_{V-W}(v)\|_{X_k} \\ &\leq \|u_0 - v_0\|_{PM^k} + C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \|u - v\|_{X_k} \\ &\quad + C_{n-2,k} \|V - W\|_{PM^{n-2}} \|v\|_{X_k}. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

As estimativas (3.3.22) e (3.3.23) levam-nos a

$$\|u - v\|_{X_k} \leq \frac{1}{1 - C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}}} \left(\|u_0 - v_0\|_{PM^k} + \frac{C_{n-2,k} \|v_0\|_{PM^k}}{1 - C_{n-2,k} \|W\|_{PM^{n-2}}} \|V - W\|_{PM^{n-2}} \right),$$

como desejado. $\square$

Demonstração do Corolário 3.2.2

Parte (i) (Potencial multipolar isotrópico) Sendo $\tau_y f(x) = f(x - y)$, pela propriedade de translação da transformada de Fourier temos que $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$. Logo, aplicando o Lema 1.4.4 com $\alpha = n - 2$ e $l = 0$, obtemos

$$\widehat{V}(\xi) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \pi^{2-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) e^{-2\pi i(x^j, \xi)} |\xi|^{2-n},$$

implicando que $V \in PM^{n-2}$ e

$$\|V\|_{PM^{n-2}} \leq \pi^{2-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|\right).$$

Assim, se

$$\sum_{j=1}^m |\lambda_j| < (n - k)(k - 2),$$

então, por (3.3.20), obtemos (3.2.1).

Parte (ii) (Potencial dipolo) O Lema 1.4.4 com $\alpha = n - 2$ e $l = 1$ nos dá que

$$\begin{aligned} \widehat{V}(\xi) &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{d_j x_j}{|x|^3} \right)^\wedge = \sum_{j=1}^m 2i^{-1} \pi^{\frac{3-n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{d_j \xi_j}{|\xi|^{n-1}} \\ &= 2i^{-1} \pi^{\frac{3-n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{d \cdot \xi}{|\xi|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Segue que $V \in PM^{n-2}$ e

$$\|V\|_{PM^{n-2}} \leq 2\pi^{\frac{3-n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) |d|.$$

Então, a condição (3.3.20) (i.e. (3.2.1)) é verificada quando

$$\begin{aligned} |d| &< \frac{1}{2\pi^{\frac{3-n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{2\pi^{2-n/2}(n-k)(k-2)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)} \\ &= \frac{\pi^{1/2}(n-k)(k-2)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi(n-k)(k-2)}{(n-2)} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Parte (iii) (Potencial multipolar anisotrópico) Novamente, usando a propriedade de translação da transformada de Fourier e o Lema 1.4.4 com $\alpha = n-2$ e $l = 1$, podemos calcular a transformada de Fourier de $V(x) = \sum_{j=1}^m \frac{(x-x^j) \cdot d^j}{|x-x^j|^3}$ com $x^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)$ e $d^j = (d_1^j, d_2^j, \dots, d_n^j)$, e esta é dada por

$$\widehat{V}(\xi) = \sum_{j=1}^m 2i^{-1} \pi^{\frac{3-n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) e^{-2\pi i(x^j \cdot \xi)} \frac{\xi \cdot d^j}{|\xi|^{n-1}},$$

e então, similarmente a *Parte (ii)*, a condição (3.2.1) para V no Teorema 3.2.1 é verificada para

$$\sum_{j=1}^m |d^j| < \frac{\pi(n-k)(k-2)}{(n-2)} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)}.$$

□

3.3.2 Demonstração do Teorema 3.2.4

Parte (i) Seja u a solução dada no Teorema 3.2.1 (i) e $u_\delta(x, t) = \delta^{n-k} u(\delta x, \delta^2 t)$. Usando (1.3.8) (veja pág. 21), temos que

$$\begin{aligned} \|u_\delta\|_{X_k} &= \sup_{t>0} \|u_\delta(t)\|_{PM^k} \\ &= \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^k |\widehat{u}_\delta(\xi, t)| \\ &= \delta^{k-n} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\delta^{-1} \xi|^k |\delta^{n-k} \widehat{u}(\delta^{-1} \xi, \delta^2 t)| \\ &= \|u\|_{X_k} < \infty. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Além disso, desde que $\delta^2 t \rightarrow \delta^2 T$ quando $t \rightarrow T$, não é difícil ver que $u_\delta(x, \cdot)$ é fracamente contínua no tempo em $\mathcal{S}'$, garantindo que $u_\delta \in X_k$. Note que, sendo $u_0(x)$ homogênea de grau $-(n-k)$, então

$$u_\delta(x, 0) = \delta^{n-k} u(\delta x, 0) = \delta^{n-k} u_0(\delta x) = u_0(x), \quad (3.3.26)$$

de onde segue que u_δ satisfaz a mesma condição inicial u_0 que a solução u .

Mostremos que u_δ também é solução de (3.1.12). Por (1.3.6) (veja pág. 20) e da condição de homogeneidade sobre $u_0(x)$, obtemos que $\hat{u}_0$ é homogênea de grau $-k$. Logo,

$$\begin{aligned}\widehat{G(\delta^2 t)u_0}(\delta^{-1}\xi) &= e^{-4\pi^2|\delta^{-1}\xi|^2\delta^2 t}(\hat{u}_0)(\delta^{-1}\xi) \\ &= \delta^k e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi) \\ &= \delta^k \widehat{G(t)u_0}(\xi, t).\end{aligned}\tag{3.3.27}$$

Também, sendo V homogênea de grau -2 , então $\hat{V}$ é homogênea de grau $-(n-2)$, e

$$\begin{aligned}\hat{V} * \hat{u}(\delta^{-1}\xi, \tau) &= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{V}(\delta^{-1}(\xi - \eta)) \hat{u}(\delta^{-1}\eta, \tau) d\eta \\ &= \delta^{-n+k} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{n-2m} \hat{V}(\xi - \eta) \delta^{-k} \hat{u}(\delta^{-1}\eta, \tau) d\eta \\ &= \delta^{k-2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{V}(\xi - \eta) \hat{u}_\delta(\eta, \tau) d\eta \\ &= \delta^{k-2} \hat{V} * \hat{u}_\delta(\xi, \tau).\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}L_V \widehat{(u)(\delta^2 t)}(\delta^{-1}\xi) &= \int_0^{\delta^2 t} e^{-4\pi^2|\delta^{-1}\xi|^2(\delta^2 t-s)} (\hat{V} * \hat{u})(\delta^{-1}\xi, s) ds \\ &= \delta^{k-2} \int_0^t e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-\tau)} (\hat{V} * \hat{u}_\delta)(\xi, \tau) \delta^2 d\tau \\ &= \delta^k \int_0^t e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-\tau)} (\hat{V} * \hat{u}_\delta)(\xi, \tau) d\tau \\ &= \delta^k L_V \widehat{(u_\delta)(t)}(\xi).\end{aligned}\tag{3.3.28}$$

Assim, desde que u é solução de (3.1.12) obtemos de (3.3.27) e (3.3.28) que

$$\begin{aligned}\hat{u}_\delta(\xi, t) &= \delta^{-k} (\hat{u}(\delta^{-1}\xi, \delta^2 t)) \\ &= \widehat{G(t)u_0}(\xi, t) + L_V \widehat{(u_\delta)(t)}(\xi).\end{aligned}\tag{3.3.29}$$

Portanto, $u_\delta \in X_k$ é solução de (3.1.12) com condição inicial $u_0 \in PM^k$. A unicidade dada no Teorema 3.2.1 nos garante a igualdade em (3.2.10), como queríamos.

Parte (ii) Relembremos primeiro que $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dita ser não-negativa (resp. não-positiva), se $\langle F, \varphi \rangle \geq 0$ (resp. ≤ 0), para todo $\varphi \geq 0$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Também, F é positiva (resp. negativa) quando $\langle F, \varphi \rangle > 0$ (resp. < 0), para todo $\varphi > 0$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Note que $u_1 = G(t)u_0$ é uma distribuição positiva em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para $t > 0$, quando u_0 é não-negativa e $u_0 \not\equiv 0$. Desde que a solução u foi obtida pelo teorema do ponto fixo de Banach, esta é o limite da iteração de Picard

$$u_1 = G(t)u_0 \text{ e } u_{b+1} = u_1 + L_V(u_b), \quad b \in \mathbb{N}.\tag{3.3.30}$$

Um argumento de indução mostra que todos os elementos de (3.3.30) são distribuições positivas em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para $t > 0$. Desde que $u_b \rightarrow u$ em X_k , temos que $u_b \rightarrow u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para $t > 0$. Segue que $u(\cdot, t)$ é uma distribuição não-negativa, para $t > 0$, pois a convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ preserva não-negatividade. Como u_1 é positiva e $L_V(u)$ é não-negativa, segue que

$$\langle u(\cdot, t), \varphi \rangle = \langle u_1(\cdot, t), \varphi \rangle + \langle L_V(u)(t), \varphi \rangle \geq \langle u_1(\cdot, t), \varphi \rangle > 0, \text{ para } t > 0,$$

para todo $\varphi > 0$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Parte (iii) Sejam u_0 e V radialmente simétricas. Como a semigrupo do calor preserva simetria radial, segue que $u_1 = G(t)u_0$ é radialmente simétrica, para cada $t > 0$ fixo. Também, $L_V(u)$ é radialmente simétrica desde que u é também radialmente simétrica. Por indução, segue que $\{u_b\}_{b \geq 1}$ (veja (3.3.30)) é radialmente simétrica, para cada $t > 0$ fixo. Desde que $u_b \rightarrow u$ em X_k e a transformada de Fourier preserva simetria radial, obtemos que u é radialmente simétrica, para cada $t > 0$ fixo.

Assuma agora que u_0 não é radialmente simétrica e V é radialmente simétrica. Suponha por contradição, que u é radialmente simétrica, então $L_V(u)$ também será radialmente simétrica. Além disso, $G(t)u_0 = u - L_V(u)$ também seria radialmente simétrica, o que é uma contradição, pois $(G(t)u_0)^\wedge = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \hat{u}_0$ é radialmente simétrica se, e somente se $\hat{u}_0$ é radialmente simétrica. $\square$

3.3.3 Demonstração do Teorema 3.2.5

Provaremos somente que (3.2.19) implica (3.2.18). A recíproca segue similarmente. Subtraindo as equações satisfeitas por u e v , e depois calculando a norma em PM^k , obtemos

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{PM^k} \leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^k} + J_1(t) + J_2(t) \quad (3.3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} J_1(t) &= 4\pi^2 C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^{\delta t} |\xi|^2 e^{-4\pi^2 |\xi|^2 (t-s)} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{PM^k} ds \\ J_2(t) &= 4\pi^2 C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\delta t}^t |\xi|^2 e^{-4\pi^2 |\xi|^2 (t-s)} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{PM^k} ds, \end{aligned}$$

com $\delta > 0$ sendo uma constante que será escolhida depois. Usando que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} t |\xi|^2 e^{-t(1-s)4\pi^2 |\xi|^2} = \frac{e^{-1}}{4\pi^2 (1-s)},$$

e a mudança de variável $s = tz$ em $J_1(t)$, estimamos

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq 4\pi^2 C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^\delta t |\xi|^2 e^{-t(1-s)4\pi^2 |\xi|^2} \|u(\cdot, ts) - v(\cdot, ts)\|_{PM^k} ds \\ &\leq C \int_0^\delta (1-s)^{-1} \|u(\cdot, ts) - v(\cdot, ts)\|_{PM^k} ds. \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

O termo $J_2(t)$ pode ser estimado diretamente por

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq 4\pi^2 C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\delta t}^t |\xi|^2 e^{-(t-s)4\pi^2|\xi|^2} ds \right) \left(\sup_{\delta t < s < t} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{PM^k} \right) \\ &= C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \sup_{\delta t < s < t} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{PM^k}, \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

pois $\int_{\delta t}^t |\xi|^2 e^{-(t-s)4\pi^2|\xi|^2} ds = \frac{1}{4\pi^2} \left(1 - e^{-4\pi^2(1-\delta)t|\xi|^2} \right)$. Note que

$$\Gamma = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{PM^k} \leq (\|u\|_{X_k} + \|v\|_{X_k}) < \infty.$$

Podemos calcular o limite superior em (3.3.31), e então usar (3.3.32) e (3.3.33) para obter

$$\Gamma \leq \left(C \log \left(\frac{1}{1-\delta} \right) + C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} \right) \Gamma = M\Gamma.$$

Em vista de $C_{n-2,k} \|V\|_{PM^{n-2}} < 1$ (veja (3.2.1)) na pág. 48), podemos tomar $\delta > 0$ de tal maneira que $0 < M < 1$, e assim $\Gamma = 0$, como queríamos.

As demais conclusões estabelecidas seguem empregando (3.2.18) com $v(x, t) \equiv \omega_i$ e notando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t)\varphi\|_{PM^k} = 0$ quando $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

3.3.4 Demonstração do Teorema 3.2.7

Desde que alguns argumentos são similares aos da prova dos Teoremas 3.2.1 e 3.2.4, faremos a demonstração com menos detalhes, evitando repetição e destacando pontos importantes.

Parte (i) Para cada $f \in PM^k$ e $u \in X_k$ com $2m < k < n$ obtemos que $G_m(t)u, L_\lambda(u)(t) \in X_k$, com

$$\sup_{t>0} \|G_m(t)u\|_{PM^k} \leq \|u\|_{PM^k} \quad (3.3.34)$$

e

$$\|L_\lambda(u)(t)\|_{X_k} \leq \frac{K(2m, n-k)}{(2\pi)^{2m}} \gamma_{0,n-2m} |\lambda| \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{PM^k}. \quad (3.3.35)$$

onde, pelos Lemas 1.4.3 e 1.4.4 obtemos

$$K(2m, n-k) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(m) \Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} - m\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - m\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \quad (3.3.36)$$

e

$$\gamma_{0,n-2m} = \frac{\pi^{2m-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - m\right)}{\Gamma(m)}, \quad (3.3.37)$$

para maiores detalhes veja demonstração dos Lemas 3.3.1 e 3.3.2, no início desta seção. Defina

$$\begin{aligned} \lambda_{k,m} &:= \frac{(2\pi)^{2m}}{K(2m, n-k) \gamma_{0,n-2m}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} - m\right)}{2^{2m} \Gamma\left(\frac{n-k}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

e considere o operador $H_m : X_k \rightarrow X_k$ tal que $H_m(u) = G_m(t)u_0 + L_\lambda(u)(t)$. As estimativas (3.3.34) e (3.3.35) garantem que o operador H_m está bem definido e satisfaz

$$\|H_m(u) - H_m(v)\|_{X_k} \leq \|L_\lambda(u)(t) - L_\lambda(v)(t)\|_{X_k} \leq \frac{|\lambda|}{\lambda_{k,m}} \|u - v\|_{X_k}, \text{ para toda } u, v \in X_k. \quad (3.3.39)$$

Assim, para $|\lambda| < \lambda_{k,m}$, H_m é uma contração em X_k . Segue do teorema do ponto fixo de Banach a existência de uma única solução $u \in X_k$ para (3.2.30).

Parte (ii) Tomando $k = \frac{n+2m}{2}$, pela definição de $\lambda_{k,m}$ em (3.2.36), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_{\frac{n+2m}{2},m} &= \frac{2^{2m} \Gamma\left(\frac{n-k}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} - m\right)} \\ &= \frac{2^{2m} \left[\Gamma\left(\frac{n+2m}{4}\right)\right]^2}{\left[\Gamma\left(\frac{n-2m}{4}\right)\right]^2}. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Usando a propriedade (1.4.2) da função Gamma (veja pág. 22), podemos simplificar

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2m}{4}\right)} &= \left(\frac{n+2m-4}{4}\right) \left(\frac{n+2m-8}{4}\right) \cdots \left(\frac{n-2m+4}{4}\right) \left(\frac{n-2m}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \left[\frac{(n+2m-4)(n-2m)}{4} \right] \left[\frac{(n+2(m-2)-4)(n+2(m-2))}{4} \right] \cdots D_n, \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

onde D_n é dada por:

$$D_n = \begin{cases} \frac{n(n-4)}{4} & \text{para } m \text{ par,} \\ \left[\frac{(n+2)(n-6)}{4} \right] \left(\frac{n-2}{2} \right) & \text{para } m \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (3.3.42)$$

Substituindo (3.3.41) em (3.3.40), obtemos $\lambda_{\frac{n+2m}{2},m} = \lambda_m$ com λ_m sendo a constante de Hardy em (3.2.25).

Parte (iii) Considere u e v duas soluções obtidas na *Parte (i)* com dados iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Usando (3.3.39), obtemos

$$\|v\|_{X_k} = \|H_m(v)\|_{X_k} \leq \|G_m(t)v_0\|_{X_k} + \|L_\lambda(v)\|_{X_k} \leq \|v_0\|_{PM^k} + \frac{|\lambda|}{\lambda_{k,m}} \|v\|_{X_k},$$

o que implica

$$\|v\|_{X_k} \leq \frac{\lambda_{k,m}}{\lambda_{k,m} - |\lambda|} \|v_0\|_{PM^k}. \quad (3.3.43)$$

Subtraindo as equações satisfeitas por u, v , e aplicando a norma $\|\cdot\|_{X_k}$, estimamos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{X_k} &= \|G_m(t)(u_0 - v_0) + L_\lambda(u - v)\|_{X_k} \\ &\leq \|u_0 - v_0\|_{PM^k} + \frac{|\lambda|}{\lambda_{k,m}} \|u - v\|_{X_k}, \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

e então

$$\|u - v\|_{X_k} \leq \frac{\lambda_{k,m}}{\lambda_{k,m} - |\lambda|} \|u_0 - v_0\|_{PM^k}.$$

□

Parte (iv) Seja u a solução obtida na *Parte (i)* e $u_\delta(x, t) = \delta^{n-k} u(\delta x, \delta^{2m} t)$. Segue pelos mesmos argumentos usados na prova do Teorema 3.2.4 Parte (i), que $u_\delta \in X_k$ e

$$u_\delta(x, 0) = u_0(x). \quad (3.3.45)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (G_m(\delta^{2m} t) u_0)^\wedge(\delta^{-1} \xi) &= e^{-(2\pi)^{2m} |\delta^{-1} \xi|^{2m} \delta^{2m} t} (\hat{u}_0)(\delta^{-1} \xi) \\ &= \delta^k \widehat{G_m(t) u_0}(\xi, t) \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

e, tomando $V_\lambda(x) = \frac{\lambda}{|x|^{2m}}$, obtemos que $\widehat{V_\lambda}$ é homogênea de grau $-(n - 2m)$ e

$$\begin{aligned} \hat{V}_\lambda * \hat{u}(\delta^{-1} \xi, \tau) &= \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{V}_\lambda(\delta^{-1}(\xi - \eta)) \hat{u}(\delta^{-1} \eta, \tau) d\eta \\ &= \delta^{k-2m} \hat{V}_\lambda * \hat{u}_\delta(\xi, \tau). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} L_\lambda(\widehat{u})(\delta^{2m} t)(\delta^{-1} \xi) &= \int_0^{\delta^{2m} t} e^{-(2\pi)^{2m} |\delta^{-1} \xi|^{2m} (\delta^{2m} t - s)} (\hat{V}_\lambda * \hat{u})(\delta^{-1} \xi, s) ds \\ &= \delta^{k-2m} \int_0^t e^{-(2\pi)^{2m} |\xi|^{2m} (t - \tau)} (\hat{V}_\lambda * \hat{u}_\delta)(\xi, \tau) \delta^{2m} d\tau \\ &= \delta^k \int_0^t e^{-(2\pi)^{2m} |\xi|^{2m} (t - \tau)} (\hat{V}_\lambda * \hat{u}_\delta)(\xi, \tau) d\tau \\ &= \delta^k L_\lambda(\widehat{u_\delta})(t)(\xi). \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

Portanto, se u é solução de (3.2.30), obtemos de (3.3.46) e (3.3.47) que

$$\begin{aligned} \hat{u}_\delta(\xi, t) &= \delta^{-k} (\hat{u}(\delta^{-1} \xi, \delta^{2m} t)) \\ &= \widehat{G_m(t) u_0}(\xi, t) + \widehat{L_\lambda(u_\delta)(t)}(\xi), \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

isto é, u_δ é solução de (3.2.30) com condição inicial $u_0 \in PM^k$. Pela unicidade obtida na *Parte (i)*, temos que a igualdade (3.2.37) é satisfeita. □

Referências Bibliográficas

- [1] B. Abdellaoui, I. Peral, and V. Felli. Existence and multiplicity for perturbations of an equation involving a Hardy inequality and the critical Sobolev exponent in the whole of $\mathbb{R}^n$. *Advances in Differential Equations*, 9(5-6):481–508, 2004.
- [2] B. Abdellaoui, I. Peral, and A. Primo. Influence of the Hardy potential in a semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 139(5):897, 2009.
- [3] B. Abdellaoui, I. Peral, and A. Primo. Optimal results for parabolic problems arising in some physical models with critical growth in the gradient respect to a Hardy potential. *Advances in Mathematics*, 225(6):2967–3021, 2010.
- [4] B. Abdellaoui, I. Peral, and A. Primo. Strong regularizing effect of a gradient term in the heat equation with the Hardy potential. *Journal of Functional Analysis*, 258(4):1247–1272, 2010.
- [5] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, and S. Secchi. Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials. *Archive for rational mechanics and analysis*, 159(3):253–271, 2001.
- [6] A. Ambrosetti and D. Ruiz. Radial solutions concentrating on spheres of nonlinear Schrödinger equations with vanishing potentials. In *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh-A-Mathematics*, volume 136, pages 889–908. Cambridge Univ Press, 2006.
- [7] I. Bachar, H. Maagli, and N. Zeddini. Estimates on the Green function and existence of positive solutions for some nonlinear polyharmonic problems outside the unit ball. *Analysis and Applications*, 6(02):121–150, 2008.
- [8] I. Bachar, H. Mâagli, and M. Zribi. Estimates on the Green function and existence of positive solutions for some polyharmonic nonlinear equations in the half space. *manuscripta mathematica*, 113(3):269–291, 2004.
- [9] P. Baras and J. A. Goldstein. The heat equation with a singular potential. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284(1):121–139, 1984.
- [10] T. Bartsch, M. Schneider, and T. Weth. Multiple solutions of a critical polyharmonic equation. *Journal für die Reine Und angewandte Mathematik.*, pages 131–144, 2004.

- [11] T. Bartsch, T. Weth, and M. Willem. A Sobolev inequality with remainder term and critical equations on domains with topology for the polyharmonic operator. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 18(3):253–268, 2003.
- [12] C. Bennett and R. C. Sharpley. *Interpolation of operators*, volume 129. Access Online via Elsevier, 1988.
- [13] P. Biler, M. Cannone, I. A. Guerra, and G. Karch. Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles. *Mathematische Annalen*, 330(4):693–708, 2004.
- [14] X. Cabré and Y. Martel. Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 329(11):973–978, 1999.
- [15] M. Cannone and G. Karch. Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system. *Journal of Differential Equations*, 197(2):247–274, 2004.
- [16] J. A. Carrillo and L. C. Ferreira. Self-similar solutions and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation. *Monatshefte für Mathematik*, 151(2):111–142, 2007.
- [17] N. Chaudhuri and K. Sandeep. On a heat problem involving perturbed Hardy-Sobolev operator. *Royal Society of Edinburgh. Proceedings. Section A(Mathematics)*, 134(4):683–693, 2004.
- [18] A. Dall’Aglio, D. Giachetti, and I. Peral. Results on parabolic equations related to some Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. *SIAM journal on mathematical analysis*, 36(3):691–716, 2005.
- [19] R. Dalmaso. Existence and uniqueness results for polyharmonic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 36(1):131–137, 1999.
- [20] J. Dávila and L. Dupaigne. Comparison results for PDEs with a singular potential. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 133(01):61–83, 2003.
- [21] L. C. Evans. Partial differential equations: Graduate studies in mathematics. *American mathematical society*, 2, 1998.
- [22] V. Felli. On the existence of ground state solutions to nonlinear Schrödinger equations with multisingular inverse-square anisotropic potentials. *Journal d’analyse mathématique*, 108(1):189–217, 2009.
- [23] V. Felli, E. M. Marchini, and S. Terracini. On Schrödinger operators with multipolar inverse-square potentials. *Journal of Functional Analysis*, 250(2):265–316, 2007.
- [24] V. Felli, E. M. Marchini, and S. Terracini. On Schrödinger operators with multisingular inverse-square anisotropic potentials. *arXiv preprint arXiv:0711.3363*, 2007.

- [25] V. Felli and A. Pistoia. Existence of blowing-up solutions for a nonlinear elliptic equation with Hardy potential and critical growth. *Communications in Partial Differential Equations*, 31(1):21–56, 2006.
- [26] V. Felli and M. Schneider. Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli–Kohn–Nirenberg type. *Journal of Differential Equations*, 191(1):121–142, 2003.
- [27] V. Felli and S. Terracini. Fountain-like solutions for nonlinear elliptic equations with critical growth and Hardy potential. *Communications in Contemporary Mathematics*, 7(06):867–904, 2005.
- [28] V. Felli and S. Terracini. Elliptic equations with multi-singular inverse-square potentials and critical nonlinearity. *Communications in Partial Differential Equations*, 31(3):469–495, 2006.
- [29] V. Felli and S. Terracini. Nonlinear Schrödinger equations with symmetric multi-polar potentials. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 27(1):25–58, 2006.
- [30] L. Ferreira and C. Mesquita. Existence and symmetries for elliptic equations with multipolar potentials and polyharmonic operators. *to appear in Indiana University Mathematics Journal*, 2014.
- [31] L. C. Ferreira, E. S. Medeiros, and M. Montenegro. A class of elliptic equations in anisotropic spaces. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, pages 1–14, 2011.
- [32] L. C. Ferreira and M. Montenegro. Existence and asymptotic behavior for elliptic equations with singular anisotropic potentials. *Journal of Differential Equations*, 250(4):2045–2063, 2011.
- [33] L. C. Ferreira and M. Montenegro. A Fourier approach for nonlinear equations with singular data. *Israel Journal of Mathematics*, pages 1–25, 2013.
- [34] W. M. Frank, D. J. Land, and R. M. Spector. Singular potentials. *Reviews of Modern Physics*, 43(1):36, 1971.
- [35] V. Galaktionov and I. Kamotski. On nonexistence of Baras-Goldstein type for higher-order parabolic equations with singular potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(8):4117–4136, 2010.
- [36] J. Garcia Azorero and I. Peral Alonso. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. *Journal of Differential Equations*, 144(2):441–476, 1998.
- [37] F. Gazzola, H.-C. Grunau, and G. Sweers. *Polyharmonic boundary value problems: Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Number 1991. Springer, 2010.
- [38] Y. Ge. Brezis-Nirenberg problem and Coron problem for polyharmonic operators. In *Elliptic and Parabolic Problems*, pages 291–297. Springer, 2005.

- [39] Y. Ge. Positive solutions in semilinear critical problems for polyharmonic operators. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 84(2):199–245, 2005.
- [40] Y. Ge, J. Wei, and F. Zhou. A critical elliptic problem for polyharmonic operators. *Journal of Functional Analysis*, 260(8):2247–2282, 2011.
- [41] K. T. Gkikas. Existence and nonexistence of energy solutions for linear elliptic equations involving Hardy-type potentials. *Indiana University Mathematics Journal*, 58(5):2317–2345, 2009.
- [42] G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, and A. Rhandi. Kolmogorov equations perturbed by an inverse-square potential. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 4:623–630, 2011.
- [43] J. Goldstein and Q. Zhang. Linear parabolic equations with strong singular potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(1):197–211, 2003.
- [44] J. C. V. Guevara. Uma abordagem via transformada de Fourier para as equações de Navier-Stokes: boa-colocação e comportamento assintótico, 2013.
- [45] N. I. Karachalios and N. B. Zographopoulos. The semiflow of a reaction diffusion equation with a singular potential. *manuscripta mathematica*, 130(1):63–91, 2009.
- [46] Y. Karpeshina and Y.-R. Lee. Spectral properties of polyharmonic operators with limit-periodic potential in dimension two. *Journal d’Analyse Mathématique*, 102(1):225–310, 2007.
- [47] Y. Karpeshina and Y.-R. Lee. Absolutely continuous spectrum of a polyharmonic operator with a limit periodic potential in dimension two. *Communications in Partial Differential Equations*, 33(9):1711–1728, 2008.
- [48] I. Kombe. The linear heat equation with highly oscillating potential. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(9):2683–2691, 2004.
- [49] L. Landau and E. Lifshitz. Quantum mechanics. non-relativistic theory. volume 3 of course of theoretical physics, 1958.
- [50] Y. Le Jan and A. Sznitman. Stochastic cascades and 3-dimensional Navier–Stokes equations. *Probability Theory and Related Fields*, 109(3):343–366, 1997.
- [51] P. G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. CRC Press, 2010.
- [52] J.-M. Levy-Leblond. Electron capture by polar molecules. *Physical Review*, 153:1–4, 1967.
- [53] E. H. Lieb and M. Loss. Analysis, volume 14 of graduate studies in mathematics. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 4, 2001.

- [54] V. Liskevich, A. Shishkov, and Z. Sobol. Singular solutions to the heat equations with non-linear absorption and Hardy potentials. *Communications in Contemporary Mathematics*, 14(02), 2012.
- [55] C. Miao and B. Yuan. Solutions to some nonlinear parabolic equations in pseudomeasure spaces. *Mathematische Nachrichten*, 280(1-2):171–186, 2007.
- [56] G. Reyes and A. Tesei. Self-similar solutions of a semilinear parabolic equation with inverse-square potential. *Journal of Differential Equations*, 219(1):40–77, 2005.
- [57] D. Ruiz and M. Willem. Elliptic problems with critical exponents and Hardy potentials. *Journal of Differential Equations*, 190(2):524–538, 2003.
- [58] D. Smets. Nonlinear Schrödinger equations with Hardy potential and critical nonlinearities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(7):2909–2938, 2005.
- [59] E. M. Stein and G. L. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32)*, volume 1. Princeton university press, 1971.
- [60] S. Terracini. On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent. *Advances in Differential Equations*, 1(2):241–264, 1996.
- [61] M. C. Tolosa and J. G. Azorero. On bifurcation and uniqueness results for some semilinear elliptic equations involving a singular potential. *Journal of the European Mathematical Society*, 8(2):229–242, 2006.
- [62] J. Vancostenoble. Lipschitz stability in inverse source problems for singular parabolic equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 36(8):1287–1317, 2011.
- [63] J. L. Vazquez and E. Zuazua. The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential. *Journal of Functional Analysis*, 173(1):103–153, 2000.
- [64] Y. Wang and Y. Shen. Nonlinear biharmonic equations with Hardy potential and critical parameter. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 355(2):649–660, 2009.
- [65] M. Yamazaki. The Navier-Stokes equations in the weak- L^n space with time-dependent external force. *Mathematische Annalen*, 317(4):635–675, 2000.