Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

Estimativas ABP e problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para operadores diferenciais não lineares

Taísa Junges Miotto

Tese de Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Co-orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Campinas - SP
Maio de 2009

ESTIMATIVAS ABP E PROBLEMAS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI PARA OPERADORES DIFERENCIAIS NÃO LINEARES

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Taísa Junges Miotto** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de maio de 2009.

Djairo Guedes de Figueiredo

Prof. **Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**
Orientador

Prof. **Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki**
Co-orientador

Banca Examinadora:

Prof. **Dr. Djairo Guedes de Figueiredo** UNICAMP

Prof. **Dr. Andrés Ignácio Ávila Barrera** UNIV. DE LA FRONTEIRA-CHILE

Prof. **Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira** UFC

Prof. **Dr. Marcelo da Silva Montenegro** UNICAMP

Prof. **Dr. Milton da Costa Lopes Filho** UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR em Matemática.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Junges-Miotto, Taísa

M669e Estimativas ABP e problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para operadores diferenciais não lineares/Taísa Junges Miotto -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo ; Olímpio Hiroshi Miyagaki

Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Equações diferenciais parciais. 2.Equações diferenciais não-lineares. 3.Estimativas a-priori. I. Figueiredo, Djairo Guedes de, 1934-. II.Miyagaki, Olímpio Hiroshi. . III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

(mfbm/imecc)

Título em inglês: ABP estimates and Ambrosetti-Prodi type problems for nonlinear differential operators

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partial differential equations. 2. Nonlinear differential equations. 3. A priori estimates.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais-Análise

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Andrés Ignácio Ávila Barrera (UFRO)
Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira (UFC)
Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho (IMECC-Unicamp)

Data da defesa: 11/05/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 11 de maio de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Djairo G de Figueiredo

Prof. (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Marcelo da Silva Montenegro

Prof. (a). Dr (a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO

Prof. (a). Dr (a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO

Eduardo V O Teixeira

Prof. (a). Dr (a). EDUARDO VASCONCELOS OLIVEIRA TEIXEIRA

Prof. (a) Dr. (a) ANDRES AVILA BARRERA

Dedico este trabalho, com profunda saudade, a minha querida vó Oraide (in memorian), que sempre lembrarei com muito carinho e amor. In memorian é pouco para expressar a saudade imensa que ela deixou em todos nós.

Agradecimentos

À Deus, pelo dom mais precioso do universo, a vida, por reconhecer sua importância, pela força nas horas difíceis, sempre me iluminando e protegendo nesta longa caminhada.

Às pessoas especiais em minha vida que, sem dúvida, foram e continuarão a ser as mais importantes: meus pais, José Luiz e Neiva Rita, pelo exemplo de vida, amor, carinho, incentivo e confiança. Saibam que tenho muita admiração e orgulho de pessoas tão especiais. Me sinto muito abençoada por ter pais tão maravilhosos. Amo muito vocês!!

Ao meu marido Márcio, por todo seu amor, amizade,compreensão e por ter feito eu acreditar em mim mesma. Pela paciência em ler várias vezes essa tese e pelas sugestões tão importantes para a construção desse trabalho. Ressalto aqui a minha admiração por você e minha enorme felicidade em poder compartilhar com essa pessoa tão incrível todos momentos da minha vida.

Ao professor Djairo pelas inúmeras contribuições e valiosas sugestões a este trabalho, por compartilhar seus conhecimentos e pelo exemplo de ética, competência e profissionalismo. Muito obrigada pelos seus valiosos conselhos e incentivos.

Ao professor Olímpio, pelo apoio e incentivo para o desenvolvimento desta pesquisa, pela sua imensa amizade, atenção, exemplo de profissional e ser humano, ética, força, perseverança e bom humor. A você, professor, devoto a mais sincera admiração e meu agradecimento.

Aos meus familiares, tios e primos, que são pessoas tão importantes e especiais na minha vida, e que de uma forma ou de outra estiveram ao meu lado torcendo e apoiando. Em especial, aos meus padrinhos Luciano e Louvaine que mesmo distantes, sempre estiveram presentes com palavras de incentivo, amor e carinho. Aos meus sogros Anselmo e Lourdes, pela acolhida, pelo carinho e apoio constante. Aos meus cunhados pela amizade e torcida.

Aos membros da banca pelas críticas e sugestões que muito contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos do doutorado, Anne, Bruno, Elisandra, Edcarlos, Evandro, Carlos, Alan, Cintia, Henrique, Ana Cristina, pela amizade que foi construída e cultivada durante esses anos, que trouxe momentos de alegria e aprendizado. A todos os meus amigos, que mesmo sem perceber me davam força para continuar. Um agradecimento em especial à minha grande amiga, quase irmã, Lorena, pelo seu afeto e amizade sempre presentes desde o tempo de graduação.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNICAMP, da UFSCar e da UFSM, em particular ao professor e grande amigo João Batista Peneireiro, pelos ensinamentos, pela paciência e carinho demonstrados durante toda minha formação acadêmica.

Aos funcionários da secretaria do IMECC, pela presteza e o auxílio em todos os momentos necessários, por sempre ajudar a solucionar as dúvidas e burocracias acadêmicas.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido durante o curso.

"Trabalhai como se tudo dependesse de vós e rezai como se tudo dependesse de Deus". (Sto Inácio de Loyola)

Resumo

O objetivo deste trabalho é obter estimativas ABP para operadores completamente não lineares e estudar problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para o operador $p-$Laplaciano nos casos superlinear para a equação e sublinear para sistema, aplicando o método de sub e supersolução e a teoria do grau de Leray Schauder, para obtermos nos casos de Ambrosetti-Prodi, multiplicidade de soluções. Para aplicarmos a teoria do grau de Leray Schauder precisamos obter estimativas a priori das eventuais soluções dos problemas, estimativas essas que serão obtidas aplicando-se técnicas diferentes em cada caso. No Capítulo 1 enunciaremos alguns resultados auxiliares que serão utilizados no decorrer do trabalho. No Capítulo 2 obtemos estimativas do tipo ABP para soluções de viscosidade de uma classe de operadores completamente não lineares, o qual um exemplo é o operador $p-$Laplaciano. No Capítulo 3 estudamos o problema do tipo Ambrosetti-Prodi para equação com o $p-$Laplaciano no caso superlinear, fazendo uso da técnica blow up e de teoremas do tipo Liouville. No Capítulo 4 estudamos o problema do tipo Ambrosetti-Prodi para sistema com o $p-$Laplaciano no caso sublinear, utilizando para isso soluções de viscosidade e a caracterização do autovalor principal.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, Equações diferenciais não- lineares, Estimativas a priori.

Abstract

The aim of this work is to obtain ABP estimates for fully nonlinear operators and to study problems of the Ambrosetti-Prodi type for the $p-$Laplacian operator in two cases: superlinear case for the equation and the sublinear case for the system. For this, we use the sub and supersolution method and the Leray Schauder degree theory, to obtain in the two cases, multiplicity of solutions. To apply the degree theory, we need a priori estimates of the possible solutions, obtained applying different techniques in each problem. In Chapter 1 we will cite some auxiliary results, which will use during this work. In Chapter 2 we will obtain ABP estimates for viscosity solutions to a class of fully nonlinear operators, whose example is the $p-$Laplacian operator. In Chapter 3 we will study the Ambrosetti-Prodi type problems for the superlinear case, using the blow up technique and Liouville theorems type. In Chapter 4 we will study the Ambrosetti-Prodi type problem for system in the sublinear case, using for this viscosity solutions and the variational characterization of the principal eigenvalue.

Key words: Partial differential equations, Nonlinear differential equations, A priori estimates.

Notações

Ao longo deste trabalho seguiremos as seguintes notações:

- $\|\cdot\|$ representa a norma $(L^\infty(\Omega))^2$ e $\|\cdot\|_\infty$ a norma $L^\infty(\Omega)$,
- $u = u^+ - u^-$, onde $u^+ = \max\{0, u\}$ e $u^- = \max\{0, -u\}$,
- $\nu(x)$ denota o vetor unitário normal interno a x,
- $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ representa a derivada normal de u na direção normal ν,
- q.t.p. significa quase todo ponto
- para cada $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$, dizemos que $h_1 \prec h_2$ se, para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h_1(x) + \varepsilon < h_2(x)$ q.t.p. $x \in K$.
- para cada $u, v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ dizemos que $u \ll v$ em Ω se $u(x) < v(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < \frac{\partial v}{\partial \nu}(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$,
- o mesmo símbolo $\ll(\leq)$ será usado para uma ou mais coordenadas, dependendo da situação: $u, v \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$, $u \ll (\leq)\, v$ se $u_i \ll (\leq)\, v_i$, $i = 1, 2$,
- $(C_0(\overline{\Omega}))^2 = C_0(\overline{\Omega}) \times C_0(\overline{\Omega})$, onde $C_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u(x) = 0,\ \forall\, x \in \partial\Omega\}$. Analogamente, definimos $(C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ e $(C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$.
- $V \subset\subset U$ significa que V é um aberto em U tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$,
- $B_r(x)$ é uma bola aberta de centro x e raio r em $\mathbb{R}^N$ e ainda $vol(B_r(x)) = r^N\omega_N$ e área$(B_r(x)) = N r^{N-1}\omega_N$ onde ω_N é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$,
- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Sumário

Introdução

Este trabalho destina-se ao estudo de problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para o operador $p-$Laplaciano para a equação no caso superlinear e de sistema no caso linear ou sublinear. Problemas desse tipo são amplamente estudados por diversos autores e receberam essa terminologia devido aos primeiros matemáticos que o resolveram em 1972, como descreveremos a seguir.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira de classe $C^{2,\alpha}$. A. Ambrosetti e G. Prodi em [3] mostraram, utilizando teoremas de inversão para aplicações diferenciáveis com singularidades em espaços de Banach, a existência de uma variedade $\mathcal{M}$ de classe C^1 em $C^{0,\alpha}(\Omega)$ que divide o espaço em duas componentes conexas $\mathcal{N}$ e $\mathcal{O}$ de modo que o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f(u) + g(x), & \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

não possui soluções se g pertence a $\mathcal{N}$, possui exatamente uma solução se g pertence a $\mathcal{M}$ e possui exatamente duas soluções se g está em $\mathcal{O}$. Nesse caso f é uma função a valores reais de classe C^2 satisfazendo

(A1) $f''(s) > 0, \forall\, s \in \mathbb{R}$,

(A2) $0 < \lim\limits_{s \to -\infty} f'(s) < \lambda_1 < \lim\limits_{s \to +\infty} f'(s) < \lambda_2$

com λ_1, λ_2 o primeiro e o segundo autovalor de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ respectivamente.

Em 1975, Berger e Podolak [9] fizeram a decomposição de g na forma $g = t\phi_1 + g_1$, sendo ϕ_1 a primeira autofunção positiva de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ com norma unitária e $g_1 \in \{g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int g\phi_1 = 0\} = \{span(\phi_1)\}^{\perp}$. Dessa forma, aplicando o método de Liapunov Schmidt, eles encontraram um número real $t(g_1)$ de forma que o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f(u) + t\phi_1 + g_1, & \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2}$$

não possui soluções se $t > t(g_1)$, possui exatamente uma solução se $t = t(g_1)$ e possui exatamente duas soluções se $t < t(g_1)$.

Ainda em 1975, Kazdan e Warner [48] desconsideraram a hipótese de convexidade de f e substituíram a hipótese $(A2)$ por

$$-\infty < \lim_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \infty.$$

Utilizando o método de sub e supersolução eles provaram a existência de uma função $t : \{span(\phi_1)\}^{\perp} \to \mathbb{R}$ tal que o problema (2) possui pelo menos uma solução se $t < t(g_1)$ e não possui solução se $t > t(g_1)$.

Em meados da década de 70, Amann e Hess em [2], bem como Dancer em [27] de modo independente, completaram o resultado de Kazdan e Warner obtendo pelo menos duas soluções se $t < t(g_1)$ e pelo menos uma solução se $t = t(g_1)$. Para isso eles utilizaram a teoria do grau de Leray Schauder.

A partir do trabalho dos autores de Figueiredo e Solimini [33] inicia-se a resolução desse tipo de problema através de métodos variacionais. Com diferentes variantes e formulações, vários autores estudaram problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para operadores lineares de segunda ordem, dentre os quais podemos citar [29, 30, 34, 35, 46] e suas referências.

Mais recentemente problemas do tipo Ambrosetti-Prodi envolvendo o operador $p-$Laplaciano tem sido estudados. Arcoya e Ruiz [5], bem como Koizumi e Schmidt [50], estudaram simultaneamente o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) + t\phi + h, & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

sob as condições que f possui crescimento $p-$linear. No caso de [5], temos $\phi, h \in L^{\infty}(\Omega)$, com $\phi \succ 0$ enquanto que [50] consideraram $\phi, h \in C(\overline{\Omega})$, com $\phi \geq 0$. Ambos utilizaram método de sub e supersolução e teoria do grau de Leray Schauder.

Inspirados pelos trabalhos de [5], [29] e [32], estudamos no Capítulo 3 o seguinte problema

$$(P_t) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) + t\phi + h, & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta_p = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano e $1 < p < N$. Suponhamos que $\phi, h \in L^{\infty}(\Omega)$, com $\phi \succ 0$ em Ω e $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Denotando λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$, consideramos $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(f1) $\displaystyle\limsup_{u \to -\infty} \frac{f(x,u)}{|u|^{p-2}u} = \mu < \lambda_1$, uniformemente $x \in \Omega$,

(f2) Existe $\sigma > 0$ tal que $f(x,s) + \sigma|s|^{p-2}s$ é crescente em s e $f(x,0) = 0$.

(f3) $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{f(x,u)}{u^{\alpha}} = a(x), \quad a \in C(\overline{\Omega}), \quad a \geq 1, \quad p-1 < \alpha < p^* - \frac{N}{N-p}$, onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$.

Através do método de sub e supersolução e da teoria do grau provamos o seguinte resultado:

Teorema 0.1 *Suponha que as hipóteses $(f1)-(f3)$ sejam válidas. Então existem constantes $-\infty < t_* \leq t^* < +\infty$ tais que o problema (P_t):*

i) *possui pelo menos duas soluções se $t < t_*$,*

ii) *possui pelo menos uma solução se $t \leq t^*$,*

iii) *não possui solução se $t > t^*$.*

Para o caso de sistemas existem resultados para o caso do operador Laplaciano, onde podemos citar [22, 36, 37, 38, 56], sendo que os dois primeiros utilizam a teoria do grau e os demais fazem uso de métodos variacionais. Recentemente de Figueiredo e Sirakov em [32] estudam o problema do tipo Ambrosetti-Prodi para operadores uniformemente elíticos na forma não-divergente e coeficientes não suaves, com o auxílio da teoria de soluções de viscosidade. Para o caso do operador $p-$Laplaciano, $p \neq 2$, não conhecemos nenhum resultado para esse tipo de problema. Motivados pelos resultados de [32] e [37] estudaremos no Capítulo 4 o seguinte problema

$$(S_t) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u_1 = f_1(x, u_1, u_2) + t_1\phi_1 + h_1, & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta_p u_2 = f_2(x, u_1, u_2) + t_2\phi_2 + h_2, & \text{em} \quad \Omega \\ u_1 = u_2 = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $h_i, \phi_i \in L^\infty(\Omega)$, com $\phi_i \succ 0$ em Ω, para $i = 1, 2$ e $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ é um parâmetro.

O sistema (S_t) pode ser reescrito na forma matricial

$$-\Delta_p u = f(x, u) + t\phi + h, \ \text{ em } \ \Omega \quad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega,$$

onde $u = (u_1, u_2)^T$, $h = (h_1, h_2)^T$, $f(x, u) = (f_1(x, u_1, u_2), f_2(x, u_1, u_2))^T$ e $t\phi = (t_1\phi_1, t_2\phi_2)^T$.

Além disso, $f_i : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(H1) $|f_i(x, s_1, s_2)| \leq C(1 + |s_1|^{q_i} + |s_2|^{r_i}),\ 1 < r_i, q_i \leq p - 1,\ \ i = 1, 2,$

(H2) existe $\sigma > 0$ tal que $f_i(x, s_1, s_2) + \sigma|s_i|^{p-2}s_i$ é não decrescente em s_i, para todo $(x, s_j) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$,

(H3) $f_i(x, 0, 0) = 0$ e f_i é quase-monótona para todo $(x, s_i) \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, isto é, para cada $i \neq j$, $i = 1, 2,\ f_i(x, s_1, s_2)$ é não decrescente em u_j,

(H4) existem matrizes estritamente cooperativas ($a_{ij}, c_{ij} > 0$ para $i \neq j$),

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

de modo que $a_{11} + a_{12} \leq 0$, $a_{21} + a_{22} \leq 0$ e existe $\delta \in [0, 1]$ tal que $\lambda_1 - \delta c_{11} - (1 - \delta)c_{22} < 0$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$, tais que

$$\lambda_1(\Delta_p + A_1) > 0, \quad \lambda_1(\Delta_p + A_2) < 0,$$

onde

$$\lambda_1(\Delta_p + A_i) = \sup \mathcal{E}(A_i),$$

$$\mathcal{E}(A_i) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists\varphi \in (W_0^{1,p}(\Omega))^2 : \varphi > 0, \Delta_p\varphi + (A_i + \lambda I)\Psi_p(\varphi) \leq 0\},$$

com $\Psi_p(s) = (\psi_p(s_1), \psi_p(s_2))^T$ e $\psi_p(s_i) = |s_i|^{p-2}s_i$. Além disso, existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$f(x, s) \geq A_1\Psi_p(s) - b_1\bar{e}, \forall s \leq 0$$

e

$$f(x, s) \geq A_2\Psi_p(s) - b_2\bar{e}, \forall s \geq 0,$$

para $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $\bar{e} = (1, 1)^T = e^T$,

(H5) para cada sequência $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\|s_n^-\|$ é limitado e $\|s_n^+\| \to \infty$ quando $n \to \infty$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(x, s_n) - f(x, s_n^+)}{\|s_n^+\|^{p-1}} \geq 0.$$

Novamente através do método de sub e supersolução e da teoria do grau provamos o seguinte teorema:

Teorema 0.2 *Suponha que $(H1) - (H5)$ ocorrem. Então existem curvas Lipschitzianas Γ^* e Γ_* que dividem $\mathbb{R}^2$ em três conjuntos disjuntos $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{O}$ tais que o problema (S_t):*

i) *possui ao menos duas soluções para $t \in \mathcal{M}$,*

ii) *possui ao menos uma solução para $t \in \Gamma^* \cup \Gamma_* \cup \mathcal{O}$,*

iii) *não possui solução para $t \in \mathcal{N}$.*

O método de sub e supersolução pode ser visto através do Teorema do Ponto Fixo de Schauder ou variacionalmente, como foi mostrado recentemente por de Figueiredo, Gossez e Ubilla em [31]. Neste trabalho utilizamos a primeira forma pois não trabalhamos com argumentos variacionais. Nos Capítulos 3 e 4 a forma de encontrar a sub, a supersolução e o método de sub e supersolução são praticamente análogos. Como é conhecido, para aplicarmos a teoria do grau de Leray Schauder precisamos obter estimativas a priori para as eventuais soluções. Nesse ponto os capítulos diferem com relação aos métodos utilizados em cada caso.

No Capítulo 3 utilizamos a caracterização variacional do primeiro autovalor do operador $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$ e um resultado de Ladyzhenskaya e Ural'tseva em [51] para obtermos a limitação da parte negativa. Para o parâmetro t adaptamos um resultado de Dong [39] que utiliza princípio de comparação e para limitação da solução aplicamos a técnica blow up desenvolvida por Gidas e Spruck em [44].

Já para o sistema no Capítulo 4 utilizamos raciocínio análogo para limitação de t, a relação entre autovalores e as matrizes da hipótese $(H4)$ para a limitação da solução e para a parte negativa vamos usar a teoria das soluções de viscosidade, teoria essa que será descrita no Capítulo 2.

Mais geralmente, no Capítulo 2 trataremos do estudo de equações do tipo

$$F(D^2u, Du) = g(x, u)$$

onde $g \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$ e o operador $F : S(N) \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(F0) F é contínuo.

(F1) $F(\mu M, tp) = |t|^\alpha \mu F(M, p), \forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ M \in S(N),\ \mu \in \mathbb{R}_+,\ \alpha > -1.$

(F2) $a|p|^\alpha\, tr(M_1) \leq F(M_1 + M_2, p) - F(M_2, p) \leq A|p|^\alpha\, tr(M_1),\ M_1 \geq 0,\ M_1, M_2 \in S(N)$, com $\alpha > -1,\ 0 < a \leq A$, onde $S(N)$ denota o espaço das matrizes reais simétricas $N \times N$.

Notemos que o operador $p-$Laplaciano pode ser escrito na forma $\Delta_p u = F_0(D^2u, Du)$, com

$$F_0(M, q) = |q|^{p-2}tr(M) + (p-2)|q|^{p-4} < Mq, q >,$$

e F_0 satisfaz $(F0) - (F2)$, onde $< \cdot, \cdot >$ denota o produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^N$.

Com essas hipóteses e utilizando ferramentas como as sup-convoluções, conseguimos provar os seguintes teoremas:

Teorema 0.3 *Sejam $u \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$. Se u é uma subsolução de viscosidade da equação*

$$F(D^2u, Du) = f(x) \ \ em \ \ \{u > 0\},$$

então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + Cdiam(\Omega)\|f^-\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Se u é uma supersolução de viscosidade da equação

$$F(D^2u, Du) = f(x) \ \ em \ \ \{u < 0\},$$

então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha)$ tal que

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + Cdiam(\Omega)\|f^+\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^N(\Gamma^+(u^-))}.$$

Teorema 0.4 *Sejam $u \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$. Se $\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ e u é uma subsolução de viscosidade da equação*

$$F(D^2u, Du) + \gamma|Du|^{\beta} = f(x) \ \ em \ \ \{u > 0\},$$

onde $0 < \beta \leq \alpha + 1$, então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha, \beta, \gamma)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + Cdiam(\Omega)\|f^-\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Se $\|f^+\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ e u é uma supersolução de viscosidade da equação

$$F(D^2u, Du) + \gamma|Du|^{\beta} = f(x) \ \ em \ \ \{u < 0\},$$

onde $0 < \beta \leq \alpha + 1$, então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha, \beta, \gamma)$ tal que

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + Cdiam(\Omega)\|f^+\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^-))}.$$

E a partir do Teorema 0.3, provamos o seguinte resultado para sistemas, que será utilizado no Capítulo 4:

Teorema 0.5 *Seja $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ uma supersolução de viscosidade do sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_p u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}|u_j|^{p-2}u_j = f_i(x), \quad em \ \ \Omega \\ i = 1, ..., m, \end{array} \right.$$

onde $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, com $f_i \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$ e $A = (a_{ij}) \in S(m)$ satisfaz $a_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \leq 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Então

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega}\{\min\{u_1, ..., u_m\}\} \ \ &\leq \ \ \sup_{\partial\Omega}\{\max\{(u_1)^-, ..., (u_m)^-\}\} \\ &\quad + C diam(\Omega)\|\tilde{f}\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^N(\Gamma^+(u^-))}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{f} = \max\{f_1^+, ..., f_m^+\}$.

No Capítulo 1 enunciaremos alguns resultados auxiliares que serão de grande importância no decorrer deste trabalho e no Apêndice descreveremos algumas desigualdades e relações que serão utilizadas principalmente no Capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção daremos alguns resultados relacionados ao operador $p-$ Laplaciano e às matrizes usados neste trabalho. Durante este capítulo, consideraremos Ω um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$.

1.1.1 Princípios de Comparação

Em alguns casos usaremos princípios de comparação diferentes, dessa forma vamos enunciar aqui os princípios de comparação que serão utilizados:

Proposição 1.1 *[12, Remark 2.2] Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$-\Delta_p u \geq -\Delta_p v \text{ em } \Omega, \quad u \geq v \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Então $u \geq v$ em Ω.

Este é um resultado básico e fácil de verificar, basta por exemplo multiplicar $-\Delta_p u + \Delta_p v$ por $(v-u)^+$.

Proposição 1.2 *[59, Lema 3.1] Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2}u \geq -\Delta_p v + \lambda |v|^{p-2}v, & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u \geq v, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\lambda > 0$, então $u \geq v$ em Ω.

1.1.2 Regularidade

Seja $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$\rho(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante $C > 0$ é escolhida de forma que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx = 1$. Além disso, para cada $\eta > 0$, consideremos

$$\rho_\eta(x) := \frac{1}{\eta^N}\rho\left(\frac{x}{\eta}\right).$$

As funções ρ_η são de classe C^∞ e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\eta\, dx = 1, \quad supp(\rho_\eta) \subset B_\eta(0).$$

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e para cada $\eta > 0$, consideremos o conjunto $\mathcal{U}_\eta = \{x \in \mathcal{U}; dist(x, \partial\mathcal{U}) > \eta\}$.

Definição 1.1 *Se $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ é localmente integrável, definimos sua molificação standard por*

$$f_\eta := \rho_\eta * f \quad em\ \mathcal{U}_\eta.$$

Então temos as seguintes propriedades com respeito as molificações standard:

Teorema 1.1 *[40, Teorema 6]*

i) $f_\eta \in C^\infty(\mathcal{U}_\eta)$,

ii) $f_\eta \to f$ *q.t.p. quando* $\eta \to 0$,

iii) *Se* $f \in C(\mathcal{U})$, *então* $f_\eta \to f$ *uniformemente sobre compactos de* $\mathcal{U}$,

iv) *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p_{loc}(\mathcal{U})$ *então* $f_\eta \to f$ *em* $L^p_{loc}(\mathcal{U})$.

v) *Para cada aberto* $V \subset\subset \mathcal{U}$ *temos* $Df_\eta \to Df$ *em* $L^p(V)$ *quando* $\eta \to 0$.

O resultado a seguir é o Teorema de Aleksandrov que nos dá uma condição para que uma função seja duas vezes diferenciável q.t.p.. Este resultado será utilizado no Capítulo 2:

Teorema 1.2 *[25, Teorema A.2] Seja $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ semiconvexa. Então φ é duas vezes diferenciável q.t.p. sobre $\mathbb{R}^N$.*

O próximo lema é uma combinação de um resultado de Ladyzhenskaya e Ural'tseva ([51, Teorema 7.1]) e estimativas C^1 de [52]:

Lema 1.1 *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & em \quad \Omega \\ \quad u = 0, & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é uma função Caratheodory tal que

$$|f(x,s)| \leq M(1 + |s|^\sigma)$$

para $1 < \sigma < \frac{Np}{N-p}$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$ e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C = C(M).$$

O seguinte teorema é um resultado de regularidade, que pode ser provado seguindo os argumentos de [42, Teorema B]:

Teorema 1.3 *Suponha que* $(u,v) \in (W_0^{1,p}(\Omega))^2$ *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g_1(x,u,v), & em & \Omega \\ -\Delta_p v &= g_2(x,u,v), & em & \Omega \\ u=v=0, & & sobre & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde g_1, g_2 *são funções Caratheodory tais que*

$$max\{|g_1(x,s,t)|, |g_2(x,s,t)|\} \leq C(1+|s|^{\sigma_1}+|t|^{\sigma_2})$$

para $1 < \sigma_i \leq p-1$, $i=1,2$ *e* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. *Então* $(u,v) \in (C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$, $0<\alpha<1$ *e* $\|(u,v)\|_{(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2} < M = M(C)$.

Demonstração: Seja $d>1$ de forma que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{dp}(\Omega)$ e considere $p_k = pd^k$, $m_k = p(d^k-1)$. Podemos mostrar por indução que $(u,v) \in (L^{p_k}(\Omega))^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, supondo que $(u,v) \in (L^{p_k}(\Omega))^2$, multiplicando a primeira equação de (1.1) por u^{m_k+1} e usando a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{dp}(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u^{d^k}\|_{dp}^p &\leq C_1 d^{pk} \int_\Omega |u^{m_k}||\nabla u|^p \\ &\leq \frac{C_2 d^{pk}}{1+m_k} \int_\Omega |u|^{1+m_k} + |u|^{\sigma_1+1+m_k} + |v|^{\sigma_2}|u|^{1+m_k}. \end{aligned}$$

Utilizando desigualdades de Young generalizada e de Hölder para estimar essas integrais, obtemos

$$(\|u\|_{p_{k+1}}^{p_{k+1}})^{\frac{1}{d}} \leq C_3 d^{k(p-1)}(1+\|u\|_{p_k}^{p_k}+\|v\|_{p_k}^{p_k}).$$

Multiplicando a segunda equação de (1.1) por v^{m_k+1} e repetindo esse argumento, obtemos

$$(\|v\|_{p_{k+1}}^{p_{k+1}})^{\frac{1}{d}} \leq C_4 d^{k(p-1)}(1+\|u\|_{p_k}^{p_k}+\|v\|_{p_k}^{p_k}).$$

Tomando $C = \max\{C_3, C_4\}$, temos

$$\max\{\|u\|_{p_{k+1}}, \|v\|_{p_{k+1}}, 1\} \leq [Cd^{k(p-1)}(1+\|u\|_{p_k}^{p_k}+\|v\|_{p_k}^{p_k})]^{\frac{d}{p_{k+1}}}.$$

Definindo $E_k = p_k \log \max\{\|u\|_{p_k}, \|v\|_{p_k}, 1\}$, obtemos $E_{k+1} \leq r_k + dE_k$, onde consideramos $r_k = d\log 3C + dk(p-1)\log d$. Pela hipótese de indução temos que E_k é finito, logo E_{k+1} é finito e portanto concluímos a indução.

Ainda, deduzimos que existe constante B tal que

$$\max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\} \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \exp\left(\frac{E_k}{p_k}\right) = \exp\left(\frac{B}{pd}\right) < \infty.$$

Portanto $(u,v) \in (L^\infty(\Omega))^2$. Então o resultado de regularidade de [52] aplicado em cada equação nos garante que $(u,v) \in (C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$, para $0<\alpha\leq 1$, o que conclui o resultado. ■

1.1.3 Outros Resultados sobre $p-$Laplaciano

Seja $\mathcal{K}$ o operador inverso de $-\Delta_p$. Arcoya e Ruiz [5] provam o seguinte resultado:

Lema 1.2 *[5, Lemma 2.3] Sejam $f_n, f \in L^\infty(\Omega)$, $\|f_n\|_\infty < C$ para alguma constante $C > 0$, e suponha que $f_n \to f$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Sejam $u_n = \mathcal{K}(f_n)$, $u = \mathcal{K}(f)$, as quais são funções de classe $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ (para um certo $\alpha \in (0,1)$). Então, $u_n \to u$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para todo $0 \le \beta < \alpha$. Em particular, o operador $\mathcal{K} : L^\infty(\Omega) \to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ é contínuo e compacto.*

Precisaremos do resultado a seguir, o qual é uma adaptação de [12, Proposição 2.3]:

Teorema 1.4 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e $v \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma solução de*

$$\Delta_p u \le g(x, u, v) \quad em \quad \Omega.$$

Se $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ são tais que $D\varphi(x_0) \neq 0$, $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e $u \ge \varphi$ em uma vizinhança de x_0, então

$$\Delta_p\varphi(x_0) \le g(x_0, u(x_0), v(x_0)).$$

Demonstração: Notemos inicialmente que é suficiente provar que essa propriedade ocorre para toda φ tal que $\varphi(y) < u(y)$ para todo $y \neq x_0$ em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0. De fato, suponha que a propriedade ocorre para tais funções, então tomando $\varphi_\varepsilon(y) = \varphi(y) - \varepsilon|y - x_0|^4$ e fazendo ε tender a zero, obtemos o resultado para toda φ.

Suponha por contradição que existem $x_0 \in \Omega$ e alguma função $\varphi \in C^2(\Omega)$ satisfazendo $D\varphi(x_0) \neq 0$, $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e $u > \varphi$ em $B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$ mas $\Delta_p\varphi(x_0) > g(x_0, u(x_0), v(x_0))$. Por continuidade podemos escolher $r_1 > 0$ suficientemente pequeno de forma que para todo $y \in B_{r_1}(x_0)$, $D\varphi(y) \neq 0$ e $\Delta_p\varphi(y) > g(y, u(y), v(y))$, onde $r_1 < r$ é tal que $B_{r_1}(x_0) \subset B_r(x_0)$.

Seja $m = \inf\limits_{|x-x_0|=r_1} \{u(x) - \varphi(x)\} > 0$ e defina $\overline{\varphi} = \varphi + \frac{m}{2}$. Temos

$$\Delta_p\overline{\varphi}(y) = \Delta_p\varphi(y) > g(y, u(y), v(y)) \ge \Delta_p u \text{ em } B_{r_1}(x_0).$$

Se $x \in \partial B_{r_1}(x_0)$ segue que $u(x) - \varphi(x) \ge m$ e assim

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) + \frac{m}{2} \le \varphi(x) + \frac{u(x) - \varphi(x)}{2} < u(x).$$

Pelo princípio de comparação, Proposição 1.1, obtemos que $\overline{\varphi} \le u$ em $B_{r_1}(x_0)$, o que contradiz $\overline{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) + \frac{m}{2} = u(x_0) + \frac{m}{2} > u(x_0)$. Isso termina a prova do teorema. ■

Com relação a princípios de máximo para o caso escalar, citaremos dois resultados importantes que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Proposição 1.3 *[41, Teorema 5] Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= a|u|^{p-2}u + f, & em & \Omega \\ u &= 0, & sobre & \partial\Omega. \end{cases}$$

Para $f \in L^{p'}(\Omega)$, o princípio do máximo ocorre para esse problema se, e somente se, $a < \lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$.

Por um problema satisfazer o princípio do máximo entendemos que a hipótese $f \geq 0$ implica em $u \geq 0$.

O seguinte resultado é o bem conhecido Princípio do Máximo de Vázquez:

Proposição 1.4 *[61, Teorema 5] Seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$ com $u \geq 0$ q.t.p. em Ω e $\Delta_p u \leq \beta(u)$ q.t.p. em Ω, sendo $\beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua, não decrescente, $\beta(0) = 0$ e ainda ou $\beta(s) = 0$ para algum $s > 0$ ou $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e a seguinte relação ocorre*

$$\int_0^1 (\beta(s)s)^{-\frac{1}{p}} ds = \infty.$$

Então se u não é identicamente nula sobre Ω, temos que u é positiva em todo Ω. Além disso se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ para um $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da esfera interior e $u(x_0) = 0$ então $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ onde ν é um vetor normal interno a x_0.

1.2 Sobre Matrizes e o Autovalor Principal

O propósito desta seção é estudar algumas relações entre a hipótese $(H4)$ e o problema de autovalor, através de alguns resultados conhecidos. Começamos com a definição de uma M-matriz não singular:

Definição 1.2 *Para $1 \leq k \leq N$ denotamos por B_k a matriz obtida tirando as $(N-k)$ linhas e colunas da matriz B. Dizemos que $B = (b_{ij})$ é uma M-matriz não singular se $b_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$, $b_{ii} > 0$ e $\det B_k > 0$ para $1 \leq k \leq N$.*

Consideremos λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$ e φ_1 a autofunção positiva e de norma unitária associada a λ_1. Sendo $I = (\delta_{ij})$ a matriz identidade e $A = (a_{ij})$ uma matriz arbitrária, defina

$$\mu_{1,A} = \sup \mathcal{F}(A),$$

onde

$$\mathcal{F}(A) = \{\mu \in \mathbb{R} : ((\lambda_1 - \lambda)I - A) \ \text{é inversível para todo } \lambda < \mu\}.$$

Os seguintes resultados proporcionam uma relação entre a matriz de um sistema e propriedades das soluções do mesmo.

Teorema 1.5 *[43, Teorema 2.2] Suponha que $p \in (1, \infty)$, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira é de classe $C^{2,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$ com $\alpha < p - 1$. Suponha também que os coeficientes a_{ij} $(1 \leq i, j \leq N)$ são constantes satisfazendo $a_{ii} < 0$ e $a_{ij} > 0$ para $i \neq j$. Então o problema de autovalor*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_i &=& \displaystyle\sum_{j=1}^N a_{ij}\psi_p(u_j) + \Lambda\psi_p(u_i), & \text{em} \quad \Omega \\ u_i &=& 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.2}$$

tem uma solução positiva limitada Φ_1 associada com um autovalor $\Lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\Lambda = \mu_{1,A}$. Neste caso temos que Φ_1 é única a menos de um múltiplo escalar positivo, $\Phi_1^i = c_i^{\frac{1}{p-1}} \varphi_1$, onde $c = (c_1, ..., c_N) \in int(\mathbb{R}^N_+)$ satisfaz $((\lambda_1 - \mu_{1,A})I - A)c^T = 0$.

Teorema 1.6 *[41, Teorema 8] Suponha que $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$ e $g_i \in L^{p'}(\Omega)$. Então o problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_i & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\psi_p(u_j) + g_i, & em \quad \Omega \\ u_i & = & 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.3}$$

satisfaz o Princípio do Máximo se, e somente se, $(\lambda_1 I - A)$ é uma M-matriz não singular.

Teorema 1.7 *[1, Teorema 2.8] Sejam f_1, $f_2 \geq 0$, não triviais e $\alpha a + \beta d \geq \lambda_1$, para α, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. Se b, $c > 0$, então o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_1 & = & a|u_1|^{p-2}u_1 + b|u_2|^{p-2}u_2 + f_1, & em \quad \Omega \\ -\Delta_p u_2 & = & c|u_1|^{p-2}u_1 + d|u_2|^{p-2}u_2 + f_2, & em \quad \Omega \\ u_1 = u_2 = 0, & & & sobre \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

não tem solução positiva.

Na introdução definimos para cada matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $b, c > 0$, o autovalor principal

$$\lambda_1(\Delta_p + A) = \sup \mathcal{E}(A),$$

$$\mathcal{E}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \varphi \in (W_0^{1,p}(\Omega))^2 : \varphi > 0, \Delta_p\varphi + (A + \lambda I)\Psi_p(\varphi) \leq 0\},$$

com $\Psi_p(s) = (\psi_p(s_1), \psi_p(s_2))^T$ e $\psi_p(s_i) = |s_i|^{p-2}s_i$.

Pelo Teorema 1.7 temos que se $\alpha(a + \lambda) + \beta(d + \lambda) \geq \lambda_1$, para constantes α, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, então o sistema $\Delta_p U + (A + \lambda I)\Psi_p(U) \leq 0$ não admite solução positiva, ou seja, se $\alpha(a + \lambda) + \beta(d + \lambda) = \alpha a + \beta d + \lambda \geq \lambda_1$, com α, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$, então $\lambda \notin \mathcal{E}(A)$.

Portanto se A é uma matriz estritamente cooperativa, o conjunto $\mathcal{E}(A)$ é limitado superiormente e como $\mathcal{E}(A)$ é um intervalo ilimitado inferiormente, temos que

$$\lambda_1(\Delta_p + A) \leq \lambda_1 - \alpha a - \beta d, \tag{1.4}$$

para quaisquer α, $\beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$.

Observação 1.1 **i)** *Notemos que se a matriz $A_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ da hipótese $(H4)$ é estritamente cooperativa com*

$$\lambda_1 - \delta c_{11} - (1 - \delta)c_{22} < 0,$$

para algum $\delta \in [0, 1]$, então por (1.4), temos que $\lambda_1(\Delta_p + A_2) < 0$.

ii) *Pelo fato da matriz $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ da hipótese $(H4)$ ser estritamente cooperativa e satisfazer $a_{ii} < 0$ para $i = 1, 2$, temos pelo Teorema 1.5 que $\mu_{1,A_1} \leq \lambda_1(\Delta_p + A_1)$. Observando que*

$$a_{11} \leq -a_{12} < 0, \; a_{22} \leq -a_{21} < 0,$$

implica que, para todo $\lambda < \lambda_1$,

$$\det((\lambda_1 - \lambda)I - A_1) = (\lambda_1 - \lambda)^2 - (\lambda_1 - \lambda)(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

temos que $\mu_{1,A_1} \geq \lambda_1 > 0$. *Assim,* $\lambda_1(\Delta_p + A_1) \geq \mu_{1,A_1} \geq \lambda_1 > 0$. *Em particular, considerando* $\lambda = 0$ *na desigualdade acima e como*

$$\lambda_1 - a_{11}, \lambda_1 - a_{22} > 0,$$

temos que $(\lambda_1 I - A_1)$ *é uma* M*-matriz não singular.*

Capítulo 2

Resultados Básicos Sobre Teoria de Soluções de Viscosidade

2.1 Introdução

A noção de solução de viscosidade foi introduzida primeiramente para equações diferenciais parciais de primeira ordem não lineares por Crandall e Lions em [26]. A idéia básica era colocar as derivadas sobre a função teste via o princípio do máximo, ao invés de utilizar a integração por partes, como é feito no caso de soluções fracas. Essa noção tem tido muito sucesso na teoria de existência e unicidade de soluções de equações de Hamilton-Jacobi. Para tanto nos referimos aos trabalhos de [6, 24] e suas referências. Pouco tempo depois Lions em [53] estendeu a definição de soluções de viscosidade para equações diferenciais parciais de segunda ordem. Desde então muitos trabalhos apareceram em periódicos matemáticos conhecidos. Uma boa referência a respeito de soluções de viscosidade, sua história, exemplos e teoria é o artigo de Crandall Ishii e Lions em [25].

Como foi dito na Introdução, neste capítulo iremos considerar as seguintes classes de equações

$$F(D^2u, Du) = f(x), \ \ \forall\, x \in \Omega, \tag{2.1}$$

e

$$F(D^2u, Du) + \gamma|Du|^\beta = f(x), \ \ \forall\, x \in \Omega, \tag{2.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado, $f \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$ e o operador $F : S(N) \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses $(F0) - (F2)$ descritas na Introdução.

Esses operadores tem sido estudados por Birindelli e Demengel em [10, 11, 13] nos quais elas obtêm resultados de princípio de comparação, princípio de máximo, existência de autovalores, alguns teoremas de Liouville e resultados de regularidade, mas ainda não tinha-se estudado estimativas do tipo ABP, o qual é a nossa contribuição para essa classe de operadores. A classe de operadores que satisfaz essas condições é ampla e inclui $F(M, p) = |p|^\alpha \mathcal{M}^{\pm}_{a,A}(M)$, onde $\mathcal{M}^{\pm}_{a,A}$ são os operadores de Pucci (veja Apêndice A) e o operador $p-$Laplaciano. Outros exemplos podem ser encontrados em [10].

Este capítulo é organizado como segue. Na Seção 2 definimos soluções de viscosidade e semijets. Na Seção 3, definimos sup convoluções e descrevemos algumas propriedades. Na Seção 4 provamos as estimativas ABP para soluções de viscosidade das classes de equações (2.1) e (2.2). E na Seção 5 aplicamos um dos teoremas provados na Seção 4 para obter estimativas ABP para um sistema com o operador $p-$Laplaciano.

2.2 Definição e Semijets

Usaremos nesse trabalho o conceito de soluções de viscosidade adaptado ao nosso contexto, pois não podemos considerar, como usualmente, funções teste cujo gradiente é nulo no ponto de teste, visto que o operador não está definido nesses pontos, principalmente no caso $\alpha < 0$. Por isso trabalharemos com soluções de viscosidade definidas da mesma forma que Birindelli e Demengel em [10, 11, 13] e que Patrizi em [55]:

Definição 2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $G : S(N) \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ um operador contínuo e g uma função contínua definida sobre $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.*
i) *$u \in C(\Omega)$ é uma subsolução de viscosidade de*

$$G(D^2u, Du) = g(x, u),$$

se para cada $x_0 \in \Omega$, uma das seguintes condições é satisfeita:
– ou existe uma bola aberta $B_\delta(x_0) \subset \Omega$, $\delta > 0$, sobre a qual u é constante, $u = c$ e $g(x, c) \leq 0$, $\forall\, x \in B_\delta(x_0)$.
– ou para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\varphi \geq u$ em uma vizinhança de x_0 e $D\varphi(x_0) \neq 0$, temos

$$G(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0)) \geq g(x_0, u(x_0)).$$

ii) *$u \in C(\Omega)$ é uma supersolução de viscosidade de*

$$G(D^2u, Du) = g(x, u),$$

se para cada $x_0 \in \Omega$, uma das seguintes condições é satisfeita:
– ou existe uma bola aberta $B_\delta(x_0) \subset \Omega$, $\delta > 0$, sobre a qual u é constante, $u = c$ e $g(x, c) \geq 0$, $\forall\, x \in B_\delta(x_0)$.
– ou para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\varphi \leq u$ em uma vizinhança de x_0 e $D\varphi(x_0) \neq 0$, temos

$$G(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0)) \leq g(x_0, u(x_0)).$$

iii) *$u \in C(\Omega)$ é uma solução de viscosidade se é ao mesmo tempo sub e supersolução de viscosidade.*

Observação 2.1 *A partir da definição de solução de viscosidade e da Proposição 1.4 temos que toda solução clássica é uma solução de viscosidade.*

Podemos olhar para as funções teste de um modo conveniente, que nos será útil no que segue, a partir dos semi-jets:

Definição 2.2 *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. Para $x_0 \in \Omega$, definimos o superjet de segunda ordem de u em x_0 por*

$$\begin{aligned} J^{2,+}u(x_0) &= \{(X,p) \in S(N) \times \mathbb{R}^N : \ u(x) \leq u(x_0) + < p, x - x_0 > \\ &+ \frac{1}{2} < X(x-x_0), x - x_0 > + \, o\left(|x-x_0|^2\right) \ \textit{quando} \ \ x \to x_0\} \end{aligned}$$

e o subjet de segunda ordem de u em x_0 por

$$\begin{aligned} J^{2,-}u(x_0) &= \{(X,p) \in S(N) \times \mathbb{R}^N : \ u(x) \geq u(x_0) + < p, x - x_0 > \\ &+ \frac{1}{2} < X(x-x_0), x - x_0 > + \, o\left(|x-x_0|^2\right) \ \textit{quando} \ \ x \to x_0\}. \end{aligned}$$

Em [25] e [47] temos alguns exemplos e propriedades dos semi-jets, dentre eles o seguinte resultado, que adaptamos para o nosso caso:

Lema 2.1 *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \Omega$, então*

$$\begin{aligned} J^{2,+}u(x_0) &= \{(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0)) \mid \varphi \in C^2(\Omega), \ \varphi(x_0) = u(x_0), \\ &\quad \varphi \geq u \textit{ em uma vizinhança de } x_0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^{2,-}u(x_0) &= \{(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0)) \mid \varphi \in C^2(\Omega), \ \varphi(x_0) = u(x_0), \\ &\quad \varphi \leq u \textit{ em uma vizinhança de } x_0\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Faremos a demonstração para a primeira igualdade, a segunda segue de modo análogo. Seja W o lado direito da primeira igualdade. Note que $W \subset J^{2,+}u(x_0)$ é trivial pela expansão de Taylor de φ em torno de x_0. Para a outra inclusão, seja $(X,p) \in J^{2,+}u(x_0)$, logo existem $\delta > 0$ e $w \in C([0,\delta])$, não decrescente, com $w(0) = 0$, $w(r) = 0$, para todo $r \in (-\infty, 0)$, de forma que

$$u(x) \leq u(x_0) + < p, x - x_0 > + \frac{1}{2} < X(x-x_0), x - x_0 > + w(|x-x_0|)|x-x_0|^2.$$

Dessa forma, basta considerar

$$\varphi(x) = u(x_0) + < p, x - x_0 > + \frac{1}{2} < X(x-x_0), x - x_0 > + \theta(|x-x_0|),$$

onde $\theta(r) = \displaystyle\int_r^{2r} dt \int_t^{2t} w(s)ds$, para $r \leq \frac{\delta}{4}$. ■

Decorre deste resultado o seguinte fato:

Observação 2.2 *Dado $(X,p) \in J^{2,+}u(x_0)$, existe $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi \geq u$ em uma vizinhança de x_0, $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $D\varphi(x_0) = p$ e $D^2\varphi(x_0) = X$.*

A respeito de sub e supersoluções de viscosidade temos uma propriedade interessante que será utilizada no Capítulo 4:

Lema 2.2 *O máximo de subsoluções de viscosidade é subsolução de viscosidade.*

Demonstração: Sejam u e v subsoluções de viscosidade de

$$F(D^2z, Dz) = g(x, z)$$

e defina $w = \max\{u, v\}$. Tomemos $x_0 \in \Omega$ arbitrário.

Se w é constante em $B_\delta(x_0)$, $w = c$, podemos supor, sem perda de generalidade que $w(x) = u(x)$ em $B_\delta(x_0)$. Como u é constante nessa bola, $u = c$, e sendo u subsolução de viscosidade temos $g(x, c) \leq 0$ em $B_\delta(x_0)$.

Se w não é constante em uma vizinhança de x_0 (e assim, sem perda de generalidade, podemos supor que u também não é constante e $u(x_0) = w(x_0)$), seja $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi \geq w \geq u$ em uma vizinhança de x_0, $u(x_0) = w(x_0) = \varphi(x_0)$ e $D\varphi(x_0) \neq 0$. Sendo u subsolução de viscosidade de $F(D^2u, Du) = g(x, u)$, segue que

$$F(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0)) \geq g(x_0, u(x_0)) = g(x_0, w(x_0)).$$

E portanto w é subsolução de viscosidade de $F(D^2z, Dz) = g(x, z)$. ■

Observação 2.3 *Analogamente provamos que o mínimo de supersoluções de viscosidade é supersolução de viscosidade.*

2.3 Sup Convoluções

Outra ferramenta conhecida e muito utilizada na teoria de soluções de viscosidade para, de certa forma, regularizar as funções são as chamadas sup e inf convoluções.

Definição 2.3 *Dados $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, definimos a sup convolução de u, $u^\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, por*

$$u^\varepsilon(x) = \sup_{y\in\Omega}\{u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x - y|^2\},$$

e a inf convolução de u, $u_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, por

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{y\in\Omega}\{u(y) + \frac{1}{2\varepsilon}|x - y|^2\}.$$

Esta definição bem como algumas propriedades de tais funções podem ser encontrados em [7, 15, 23, 25, 47]. Abaixo seguem alguns resultados que vamos utilizar no decorrer deste trabalho.

Lema 2.3 *[7, Lemma 3.7] Seja $u \in C(\overline{\Omega})$. Se $x \in \Omega$ então*

$$u^\varepsilon(x) = \sup\{u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x - y|^2 : |x - y| \leq 2\sqrt{\varepsilon M}\},$$

onde $M = \sup_{\overline{\Omega}} |u(x)|$. Esse supremo é finito e é atingido para algum $\hat{x} \in \Omega$ satisfazendo $|x - \hat{x}| \leq 2\sqrt{\varepsilon M}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$ e seja $y \in \Omega$ tal que $|x-y| > 2\sqrt{\varepsilon M}$, então

$$u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 < u(y) - 2M \leq -M \leq u(x) \leq u^\varepsilon(x).$$

Assim o supremo não pode ocorrer no conjunto $\{y \in \Omega : |x-y| > 2\sqrt{\varepsilon M}\}$. Como o conjunto $\{y \in \Omega : |x-y| \leq 2\sqrt{\varepsilon M}\}$ é compacto e u é contínua, temos que u atinge seu supremo. ■

Lema 2.4 *[20, Lemma A.2] Sejam Ω um conjunto limitado, $u \in C(\overline{\Omega})$ e u^ε sua sup convolução. Então:*
i) *u^ε é Lipschitz contínua sobre Ω.*
ii) *$u^\varepsilon \to u$ quando $\varepsilon \to 0$ uniformemente sobre Ω.*
iii) *Existe uma função mensurável $M : \Omega \to S(N)$ tal que*

$$u^\varepsilon(y) = u^\varepsilon(x) + < Du^\varepsilon(x), y-x > + \frac{1}{2} < M(x)(y-x), y-x > + o\left(|y-x|^2\right),$$

q.t.p. $x \in \Omega$.
iv) *$M(x) \geq -\dfrac{I}{\varepsilon}$ q.t.p. em Ω.*
v) *Se u^ε_η é uma molificação standard de u^ε, então $D^2 u^\varepsilon_\eta \geq -\frac{I}{\varepsilon}$ e*

$$D^2 u^\varepsilon_\eta(x) \to M(x) \ \ q.t.p.\ \ x \in \Omega \ \ quando \ \ \eta \to 0.$$

Demonstração: *i)* Sejam $y, z \in \Omega$ arbitrários. Então temos

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(y) &= u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\hat{y}-z|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(|\hat{y}-z|^2 - |\hat{y}-y|^2) \\ &\leq u^\varepsilon(z) + \frac{1}{2\varepsilon}(|\hat{y}-z|^2 - |\hat{y}-y|^2) \\ &= u^\varepsilon(z) + \frac{1}{2\varepsilon}(|\hat{y}-z| + |\hat{y}-y|)(|\hat{y}-z| - |\hat{y}-y|) \\ &\leq u^\varepsilon(z) + \frac{1}{2\varepsilon}(|\hat{y}-y| + |\hat{y}-y| + |y-z|)|y-z| \\ &\leq u^\varepsilon(z) + \frac{1}{2\varepsilon}(4\sqrt{\varepsilon M} + diam(\Omega))|y-z| \\ &\leq u^\varepsilon(z) + k|y-z|. \end{aligned}$$

Trocando os papéis de y e z obtemos $u^\varepsilon(z) - u^\varepsilon(y) \leq k|y-z|$. Portanto u^ε é Lipschitz contínua.

ii) Sejam $y \in \Omega$ e $\hat{y}$ tal que $u^\varepsilon(y) = u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\hat{y}-y|^2$. Como u é contínua, dado $h > 0$, existe $d > 0$ tal que $u(x) \leq u(y) + h$, se $|x-y| < d$.

Seja $\varepsilon < \frac{d^2}{4M}$, então como $|\hat{y}-y| \leq 2\sqrt{\varepsilon M}$, temos que $|\hat{y}-y| < d$, o que implica $u(\hat{y}) \leq u(y) + h$, ou seja,

$$u^\varepsilon(y) = u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\hat{y}-y|^2 \leq u(y) + h - \frac{1}{2\varepsilon}|\hat{y}-y|^2 \leq u(y) + h.$$

Dessa forma temos que dado qualquer $h > 0$, existe $\varepsilon < \frac{d^2}{4M}$ de modo que $0 \leq u^\varepsilon(y) - u(y) \leq h$. Desde que y é qualquer segue que $u^\varepsilon \to u$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$.

iii) Mostremos que u^ε é semiconvexa, ou seja, existe constante $C > 0$ de modo que $\overline{u^\varepsilon}(y) = u^\varepsilon(y) + C|y|^2$ é convexa em todo subconjunto convexo de Ω. Para o nosso caso mostraremos que $\overline{u^\varepsilon}(y) = u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2\varepsilon}|y|^2$ é convexa, isto é, para todo $y+h, y-h,\ y \in \Omega$, temos $\overline{u^\varepsilon}(y+h) + \overline{u^\varepsilon}(y-h) - 2\overline{u^\varepsilon}(y) \geq 0$.

De fato, fixado $y \in \Omega$, seja $\hat{y}$ tal que $u^\varepsilon(y) = u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|y - \hat{y}|^2$. Então,

$$u^\varepsilon(y+h) \geq u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|y + h - \hat{y}|^2$$

$$u^\varepsilon(y-h) \geq u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|y - h - \hat{y}|^2,$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \overline{u^\varepsilon}(y+h) + \overline{u^\varepsilon}(y-h) - 2\overline{u^\varepsilon}(y) \\
= \ & u^\varepsilon(y+h) + \frac{1}{2\varepsilon}|y+h|^2 + u^\varepsilon(y-h) + \frac{1}{2\varepsilon}|y-h|^2 - 2u^\varepsilon(y) - \frac{2}{2\varepsilon}|y|^2 \\
\geq \ & u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|y+h-\hat{y}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|y+h|^2 + u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|y-h-\hat{y}|^2 \\
& + \frac{1}{2\varepsilon}|y-h|^2 - 2u(\hat{y}) + \frac{2}{2\varepsilon}|y-\hat{y}|^2 - \frac{2}{2\varepsilon}|y|^2 \\
= \ & \frac{1}{2\varepsilon}(-|y+h|^2 + 2 < y+h, \hat{y} > - |\hat{y}|^2 + |y+h|^2 - |y-h|^2 \\
& + 2 < y-h, \hat{y} > - |\hat{y}|^2 + |y-h|^2 + 2|y|^2 - 4 < y, \hat{y} > + 2|\hat{y}|^2 - 2|y|^2 \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Assim, sendo $u^\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ semiconvexa, temos pelo Teorema de Aleksandrov (Teorema 1.2) que u^ε é duas vezes diferenciável q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, dessa forma existe $M \in S(N)$ tal que

$$u^\varepsilon(y) \leq u^\varepsilon(x) + < Du^\varepsilon(x), y - x > + \frac{1}{2} < M(y-x), y-x > + o(|y-x|^2)$$

q.t.p $x \in \Omega$.

iv) Pelo item *iii)* segue que $(M(x_0), Du^\varepsilon(x_0)) \in J^{2,+}u^\varepsilon(x_0)$, logo pela Observação 2.2 existe $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u^\varepsilon(x_0)$, $\varphi \geq u^\varepsilon$ em uma vizinhança $B_\delta(x_0)$ de x_0, onde $D\varphi(x_0) = Du^\varepsilon(x_0)$ e $D^2\varphi(x_0) = M(x_0)$. Seja $\hat{x}$ o ponto onde o supremo é atingido na definição de u^ε, então, para todo $x \in B_\delta(x_0)$ e $y \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned}
u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 - \varphi(x) & \leq \sup_{\overline{\Omega}}(u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2) - \varphi(x) \\
& = u^\varepsilon(x) - \varphi(x) \\
& \leq u^\varepsilon(x_0) - \varphi(x_0) \\
& = u(\hat{x}) - \frac{1}{2\varepsilon}|x_0 - \hat{x}|^2 - \varphi(x_0).
\end{aligned}$$

Fazendo $y = \hat{x}$, temos

$$u(\hat{x}) - \frac{1}{2\varepsilon}|x - \hat{x}|^2 - \varphi(x) \leq u(\hat{x}) - \frac{1}{2\varepsilon}|x_0 - \hat{x}|^2 - \varphi(x_0)$$

ou seja,

$$\frac{1}{2\varepsilon}|x_0 - \hat{x}|^2 + \varphi(x_0) \leq \frac{1}{2\varepsilon}|x - \hat{x}|^2 + \varphi(x).$$

Sendo $x \in B_\delta(x_0)$ qualquer, temos que a função $\xi(x) = \frac{1}{2\varepsilon}|x - \hat{x}|^2 + \varphi(x)$ tem um mínimo local em x_0 e $\xi \in C^2(B_\delta(x_0))$. Assim temos que $D\xi(x_0) = 0$ e $D^2\xi(x_0) \geq 0$, ou seja,

$$D\varphi(x_0) = \frac{1}{\varepsilon}(x_0 - \hat{x}) \ \text{ e } \ \frac{I}{\varepsilon} + D^2\varphi(x_0) \geq 0.$$

Logo, sendo $D\varphi(x_0) = Du^\varepsilon(x_0)$ e $D^2\varphi(x_0) = M(x_0)$, segue

$$Du^\varepsilon(x_0) = \frac{1}{\varepsilon}(x_0 - \hat{x}) \ \text{ e } \ M(x_0) \geq -\frac{I}{\varepsilon},$$

o que conclui este item.

v) Seja u_η^ε uma molificação standard dada pelo Teorema 1.1, logo temos que $u_\eta^\varepsilon \in C^2(\Omega)$, e assim pela expansão de Taylor temos

$$\begin{aligned} u_\eta^\varepsilon(y) &= u_\eta^\varepsilon(x) + < Du_\eta^\varepsilon(x), y - x > + \frac{1}{2} < D^2u_\eta^\varepsilon(x)(y - x), y - x > \\ &+ o(|y - x|^2), \end{aligned} \tag{2.3}$$

para y próximo de x. Como $u_\eta^\varepsilon \to u^\varepsilon$ uniformemente em conjuntos compactos, fazendo $\eta \to 0$ em (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(y) &= u^\varepsilon(x) + < \lim_{\eta \to 0} Du_\eta^\varepsilon(x), y - x > + \frac{1}{2} < \lim_{\eta \to 0} D^2u_\eta^\varepsilon(x)(y - x), y - x > \\ &+ o(|y - x|^2), \end{aligned}$$

para y próximo de x. Por outro lado, por *iii)* temos

$$u^\varepsilon(y) = u^\varepsilon(x) + < Du^\varepsilon(x), y - x > + \frac{1}{2} < M(x)(y - x), y - x > + o(|y - x|^2).$$

Logo, fazendo a diferença dessas expressões, pelo Teorema 1.1 v) temos,

$$\left\langle \left[\lim_{\eta \to 0} D^2u_\eta^\varepsilon(x) - M(x) \right] (y - x), y - x \right\rangle = 0$$

e portanto $\lim_{\eta \to 0} D^2u_\eta^\varepsilon(x) = M(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Mostremos agora que $D^2u_\eta^\varepsilon \geq -\frac{I}{\varepsilon}$. Como $u_\eta^\varepsilon \in C^2(\Omega)$, temos pela expansão de Taylor que

$$\begin{aligned} u_\eta^\varepsilon(x) &= u_\eta^\varepsilon(x_0) + < Du_\eta^\varepsilon(x_0), x - x_0 > + \frac{1}{2} < D^2u_\eta^\varepsilon(x_0)(x - x_0), x - x_0 > \\ &\quad + o(|x - x_0|^2). \end{aligned}$$

Como $u_\eta^\varepsilon \to u^\varepsilon$ uniformemente em conjuntos compactos, temos que dado $\gamma > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\eta < \delta$, segue que

$$|u_\eta^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x)| < \gamma, \ \ \forall \, x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Se $\gamma = |x-x_0|^2$, para $\eta < \gamma$, temos

$$\begin{array}{rcl} -|x-x_0|^2 + u^\varepsilon(x) & \leq & u^\varepsilon_\eta(x) \\ & = & u^\varepsilon_\eta(x_0) + < Du^\varepsilon_\eta(x_0), x - x_0 > \\ & & + \dfrac{1}{2} < D^2u^\varepsilon_\eta(x_0)(x-x_0), x-x_0 > + o(|x-x_0|^2) \\ & \leq & u^\varepsilon(x_0) + |x-x_0|^2 + < Du^\varepsilon_\eta(x_0), x-x_0 > \\ & & + \dfrac{1}{2} < D^2u^\varepsilon_\eta(x_0)(x-x_0), x-x_0 > + o(|x-x_0|^2), \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} u^\varepsilon(x) & \leq & u^\varepsilon(x_0) + < Du^\varepsilon_\eta(x_0), x-x_0 > \\ & & + \dfrac{1}{2} < D^2u^\varepsilon_\eta(x_0)(x-x_0), x-x_0 > + 2|x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2). \end{array}$$

Logo $(D^2u^\varepsilon_\eta(x_0), Du^\varepsilon_\eta(x_0)) \in J^{2,+}u^\varepsilon(x_0)$ e assim existe $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u^\varepsilon(x_0)$, $\varphi \geq u^\varepsilon$ em uma vizinhança $B_\delta(x_0)$ de x_0, $D\varphi(x_0) = Du^\varepsilon_\eta(x_0)$ e $D^2\varphi(x_0) = D^2u^\varepsilon_\eta(x_0)$. Fazendo raciocínio análogo ao item *iv)* obtemos o resultado. ■

O resultado a seguir é conhecido como a "propriedade mágica" das sup convoluções.

Lema 2.5 *[25, Lemma A.5] Seja $u \in C(\overline{\Omega})$. Se $(Y,q) \in J^{2,+}u^\varepsilon(x_0)$, então $(Y,q) \in J^{2,+}u(\hat{x})$, onde $\hat{x}$ é tal que $u^\varepsilon(x_0) = u(\hat{x}) - \dfrac{1}{2\varepsilon}|x_0 - \hat{x}|^2$.*

Demonstração: Sejam $y \in \Omega,\ x \in \mathbb{R}^N$ arbitrários, então

$$\begin{array}{rl} & u(y) - \dfrac{1}{2\varepsilon}|y-x|^2 \leq u^\varepsilon(x) \\ \leq & u^\varepsilon(x_0) + < q, x-x_0 > + \dfrac{1}{2} < Y(x-x_0), x-x_0 > + o\left(|x-x_0|^2\right) \\ = & u(\hat{x}) - \dfrac{1}{2\varepsilon}|x_0-\hat{x}|^2 + < q, x-x_0 > + \dfrac{1}{2} < Y(x-x_0), x-x_0 > \\ & + o\left(|x-x_0|^2\right). \end{array}$$

Como x e y são arbitrários, tomando $x = y - \hat{x} + x_0$, segue que

$$u(y) \ \leq \ u(\hat{x}) + < q, y-\hat{x} > + \frac{1}{2} < Y(y-\hat{x}), y-\hat{x} > + o\left(|y-\hat{x}|^2\right),$$

e assim obtemos o resultado. ■

2.4 Estimativas ABP para Operadores Singulares Completamente Não Lineares

Nesta seção estamos interessados em estimativas do tipo Aleksandrov-Bakelman-Pucci (ABP) para soluções de viscosidade das equações (2.1) e (2.2).

Observamos que, por uma estimativa ABP entendemos uma limitação para o supremo de uma subsolução u em Ω em termos do supremo de u sobre $\partial\Omega$ e da norma L^N de f.

Para o caso de soluções clássicas e fracas, as estimativas ABP podem ser encontradas em [8, 16, 45, 52] sobre domínios limitados. Já para domínios ilimitados citamos [17, 18, 62] bem como suas referências.

Caffarelli [19] iniciou o estudo de estimativas ABP para soluções de viscosidade. De fato, ele provou esta estimativa para soluções de viscosidade da equação

$$\mathcal{M}^+_{a,A}(D^2u) = f(x), \quad \text{em} \quad B_1(0).$$

Em 1996, Caffarelli *et al* [20] obtiveram estimativas ABP para soluções L^p-viscosidade de

$$-\mathcal{M}^+_{a,A}(D^2u) - \gamma|Du| \leq f(x) \ \text{ sobre } \ \{u > 0\}$$

e

$$-\mathcal{M}^-_{a,A}(D^2u) + \gamma|Du| \geq f(x) \ \text{ sobre } \quad \{u < 0\}.$$

Recentemente, estimativas ABP para equações da forma

$$F(D^2u, Du, u, x) = f(x), \ \ x \in \Omega \tag{2.5}$$

tem sido estudadas. Em [57], Quaas e Sirakov estudaram a equação (2.5) impondo

$$\mathcal{M}^-_{a,A}(X) - \gamma|p| - \delta|r| \leq F(X, p, r, x) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + \gamma|p| + \delta|r|, \ \ \forall\, x \in \Omega,$$

com γ, δ constantes positivas e Ω um domínio suave limitado. Capuzzo Dolcetta *et al* em [21], consideram a equação (2.5) sob a hipótese

$$F(X, p, r, x) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + b(x)|p|, \ \ \forall\, x \in \Omega,$$

para uma função contínua, não-negativa e limitada b e Ω um domínio aberto de $\mathbb{R}^N$ satisfazendo certas condições. Koike e Swiech [49] estenderam [21] para $b \in L^q_+(\Omega)$ e soluções L^p-viscosidade. Além disso temos o trabalho de Amendola, Rossi e Vitolo [4] no qual estudam estimativas ABP para (2.5) sob hipótese

$$F(X, p, r, x) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + b(x)|p|^q, \ \ \forall\, x \in \Omega,$$

onde Ω é o domínio definido em [21], b é uma função contínua e $q \in [1, 2]$. Nosso operador é, de certa forma, mais geral que os operadores citados acima, desde que F satisfaz

$$|p|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,A}(M) \leq F(M, p) \leq |p|^\alpha \mathcal{M}^+_{a,A}(M), \tag{2.6}$$

com $\alpha > -1$ (note que (F2) implica (2.6)(veja Apêndice A)).

Motivados pelos resultados de [45] e [20], o nosso objetivo é provar estimativas ABP para equações (2.1) e (2.2), com F satisfazendo as condições (F0)-(F2). Começamos escrevendo algumas definições que serão importantes para esse fim:

Definição 2.4 *Para $0 < a \leq A$, os operadores de Pucci são definidos por*

$$\mathcal{M}^+_{a,A}(M) = a \sum_{e_i<0} e_i + A \sum_{e_i>0} e_i,$$

$$\mathcal{M}^-_{a,A}(M) = A \sum_{e_i<0} e_i + a \sum_{e_i>0} e_i,$$

onde e_i são os autovalores de M.

No apêndice temos uma definição equivalente para esses operadores, bem como suas propriedades.

Em geral para demonstrarmos resultados de estimativas ABP, precisamos definir a noção de conjunto de contato superior de uma função u:

Definição 2.5 *[20, Appendix A] Para $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $r > 0$, defina o conjunto de contato superior de u por*

$$\Gamma^+(u, \Omega) = \{x \in \Omega : \exists\, p \in \mathbb{R}^N \,; u(y) \leq u(x) + < p, y - x >, \forall\, y \in \Omega\}$$

$$\Gamma^+_r(u, \Omega) = \{x \in \Omega : \exists\, p \in \overline{B}_r(0) \,; u(y) \leq u(x) + < p, y - x >, \forall\, y \in \Omega\}.$$

Denotaremos durante esse capítulo $\Gamma^+(u, \Omega)$ simplesmente por $\Gamma^+(u)$ e $\Gamma^+_r(u, \Omega)$ por $\Gamma^+_r(u)$, salvo os casos em que haja dúvidas com relação ao domínio em questão. O próximo resultado encontra-se em [20], entretanto daremos uma breve demonstração:

Lema 2.6 *[20, Lemma A.1] Sejam u_j, $j = 1, 2, ...$ funções definidas sobre conjuntos Ω_j, onde Ω_j são conjuntos abertos tais que $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ e $\bigcup \Omega_j = \Omega$. Se u_j converge uniformemente sobre cada Ω_m a uma função contínua u, então*

$$\limsup_{j\to\infty} \Gamma^+(u_j, \Omega_j) \subset \Gamma^+(u, \Omega).$$

Demonstração: Seja $x \in \limsup_{j\to\infty} \Gamma^+(u_j, \Omega_j)$, logo existe $p_j \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$u_j(y) \leq u_j(x) + < p_j, y - x >,\ \forall\, y \in \Omega_j. \tag{2.7}$$

Como $u_j \to u$ uniformemente sobre cada Ω_m e por hipótese $\bigcup \Omega_j = \Omega$, temos que sendo $y_j = x - r\dfrac{p_j}{|p_j|}$, para $r > 0$ suficientemente pequeno, $y_j \in \Omega_j$, logo passando o limite obtemos

$$\inf_{|y-x|\leq r} u(y) \leq \liminf_{j\to\infty} u_j(y_j) \leq u(x) - r \limsup_{j\to\infty} |p_j|.$$

Dessa forma temos que p_j é limitado e portanto $p_j \to p$. Assim passando o limite em (2.7) obtemos

$$u(y) \leq u(x) + < p, y - x >,\ \forall\, y \in \Omega.$$

■

Vamos agora à demonstração dos nossos resultados sobre estimativas ABP. Para facilitar a leitura iremos enunciar novamente os teoremas. Consideraremos inicialmente o caso do operador que não tem dependência do gradiente:

Teorema 2.1 *Sejam $u \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$. Se u é uma subsolução de viscosidade da equação*

$$F(D^2u, Du) = f(x) \quad em \quad \{u > 0\},$$

então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + Cdiam(\Omega)\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Se u é uma supersolução de viscosidade da equação

$$F(D^2u, Du) = f(x) \quad em \quad \{u < 0\},$$

então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha)$ tal que

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + Cdiam(\Omega)\|f^+\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Demonstração: Para provarmos esse teorema, separaremos a prova em duas partes: na primeira parte vamos supor que a subsolução de viscosidade $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Na segunda parte consideraremos apenas $u \in C(\overline{\Omega})$ e faremos a demonstração por aproximações, utilizando as sup convoluções.

Parte 1: $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Defina

$$r_0 = r_0(u) = \frac{\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+}{diam(\Omega)}.$$

A idéia será obter uma estimativa em função de $\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}$ para todo $r < r_0$ e assim, obtemos $r_0 \leq C\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}$. Pela definição de r_0 concluímos o resultado. Para obter essas estimativas, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.7 *Para cada $r < r_0$, obtemos*

i)

$$\int_{B_r(0)} g(p)\, dp \leq \int_{\Gamma_r^+(u^+)} g(Du)\, |\det D^2u|\, dx, \quad \forall g \in C(\mathbb{R}^N), \; g \geq 0. \tag{2.8}$$

ii) $D^2u \leq 0$ *sobre* $\Gamma_r^+(u^+) \subset \{u > 0\}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ a imagem de $\Gamma_r^+(u^+)$ sob a aplicação Du. Se esta aplicação é uma bijeção então por mudança de variáveis temos

$$\int_{\mathcal{A}} g(p)\, dp = \int_{\Gamma_r^+(u^+)} g(Du)\, |detD^2u|\, dx.$$

Se a aplicação é apenas sobrejetora, desde que $g \geq 0$ temos

$$\int_{\mathcal{A}} g(p)\, dp \leq \int_{\Gamma_r^+(u^+)} g(Du)\, |detD^2u|\, dx.$$

Assim, devemos mostrar que $B_r(0) \subset \mathcal{A}$. Seja $p \in B_r(0)$ e considere

$$L_p(t) = \min_{x \in \overline{\Omega}} \{t + < p, x > -u^+(x)\}.$$

notemos que L_p é contínua, positiva para t suficientemente grande e negativa para $-t$ grande. Seja t_p a maior raiz de $L_p(t)$, então

$$t_p + < p, x > -u^+(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \Omega,$$

$$t_p + < p, y > -u^+(y) = 0, \text{ para algum } y \in \overline{\Omega},$$

isto é, $t_p + < p, x > -u^+(x) \geq t_p + < p, y > -u^+(y)$, para todo $x \in \Omega$, ou

$$u^+(x) \leq u^+(y) + < p, x - y >, \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.9}$$

e assim

$$y \in \Gamma_r^+(u^+). \tag{2.10}$$

Sendo $u(x) \leq u^+(x)$, $\forall\, x \in \Omega$, pela desigualdade de Cauchy Schwartz segue

$$u(x) \leq u^+(y) + < p, x - y > \leq u^+(y) + |p||x - y| < u^+(y) + r\, diam(\Omega).$$

Como esta desigualdade vale para todo $x \in \Omega$, temos

$$\sup_{\Omega} u \leq u^+(y) + r\, diam(\Omega).$$

Pela definição de r_0 segue que

$$\sup_{\partial\Omega} u^+ \leq u^+(y) + (r - r_0)\, diam(\Omega) < u^+(y).$$

Logo, $y \notin \partial\Omega$ e $u^+(y) > 0$, em particular, $u(y) > 0$. Com isto temos que $\Gamma_r^+(u^+) \subset \{u > 0\}$. Além disso, por (2.9) temos

$$< p, x > -u(x) \;\; \geq \;\; < p, x > -u^+(x) \;\; \geq \;\; < p, y > -u(y), \quad \forall\, x \in \Omega,$$

ou seja, y é um ponto de máximo de $u(\cdot) - < p, \cdot >$. Como esta função é duas vezes continuamente diferenciável e $y \notin \partial\Omega$, segue que $D(u(y) - < p, y >) = 0$ e ainda temos que $D^2(u(y) - < p, y >) \leq 0$, isto é, $D(u(y)) = p$ e $D^2(u(y)) \leq 0$. Assim concluímos por (2.10) que $p \in Du(\Gamma_r^+(u^+))$ e $D^2 u \leq 0$ sobre $\Gamma_r^+(u^+) \subset \{u > 0\}$ e portanto a demonstração do Lema 2.7 está completa.

Para estimar os dois lados da relação (2.8), escolheremos funções g adaptadas para os casos $\alpha \geq 0$ e $-1 < \alpha < 0$, que serão analisados separadamente, e para isso precisaremos conhecer o comportamento de Du no conjunto $\Gamma^+(u^+)$. Dividiremos a prova em vários passos.

Passo 1: Comportamento de Du no conjunto $\Gamma_r^+(u^+)$.

Seja $x_0 \in \Gamma_r^+(u^+)$ arbitrário. Se $Du(x_0) \neq 0$, como $u \in C^2(\Omega)$, podemos tomar $\varphi = u$ na definição de subsolução de viscosidade, e concluímos que

$$F(D^2 u(x_0), Du(x_0)) \geq f(x_0).$$

Por (2.6) obtemos

$$-f^-(x_0) \leq f(x_0) \leq F(D^2u(x_0), Du(x_0)) \leq |Du(x_0)|^\alpha \mathcal{M}^+_{a,A}(D^2u(x_0)).$$

Pelo Lema 2.7, segue que $D^2u(x_0) \leq 0$, logo $\mathcal{M}^+_{a,A}(D^2u(x_0)) = atr(D^2u(x_0))$ e então

$$\left(\frac{-tr(D^2u(x_0))}{N}\right)^N \leq \left(\frac{f^-(x_0)}{Na|Du(x_0)|^\alpha}\right)^N.$$

Se $Du(x_0) = 0$ e $D^2u(x_0) \neq 0$, então x_0 é um ponto crítico de u e assim, pelo Lema 2.7 ii), $D^2u(x_0) < 0$, o que implica que x_0 é um ponto crítico não degenerado de u. Note que, como $u \in C^2(\Omega)$, o conjunto dos pontos críticos não degenerados é enumerável.

Pelo Lema 2.7 ii) e pela Proposição A.1 com $0 \leq -D^2u$, $I \in S(N)$, temos

$$|\det D^2u| \leq \left(\frac{-tr(D^2u)}{N}\right)^N.$$

Portanto no Passo 1 concluímos que

$$|\det D^2u(x_0)| \leq \left(\frac{f^-(x_0)}{Na|Du(x_0)|^\alpha}\right)^N, \quad \text{para } x_0 \in \Gamma^+_r(u^+), \quad Du(x_0) \neq 0$$

e o conjunto onde $Du(x) = 0$ e $D^2u(x) \neq 0$ é enumerável.
Passo 2: Consideremos $\alpha \geq 0$.
Neste caso, tomando $g(p) = |p|^{\alpha N}$ obtemos pelo Lema 2.7,

$$\int_{B_r(0)} |p|^{\alpha N} dp \leq \int_{\Gamma^+_r(u^+)} |Du|^{\alpha N} |\det D^2u|\, dx. \tag{2.11}$$

Passo 2.1: Estimativa do lado direito de (2.11).
Seja $\mathcal{U} = \{x \in \Gamma^+_r(u^+) : Du(x) = 0\}$. Então, pelo Passo 1,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^+_r(u^+)\setminus\mathcal{U}} |Du|^{\alpha N} |\det D^2u|\, dx &\leq \int_{\Gamma^+_r(u^+)\setminus\mathcal{U}} |Du|^{\alpha N} \left(\frac{f^-}{Na|Du|^\alpha}\right)^N dx \\ &\leq \frac{1}{N^N a^N} \int_{\Gamma^+(u^+)} (f^-)^N dx.\end{aligned}$$

Passo 2.2: Estimativa do lado esquerdo de (2.11).
Pela propriedade da co-área,

$$\int_{B_r(0)} |p|^{\alpha N} dp = \int_0^r q^{\alpha N} \int_{\partial B_q(0)} dS dq = \frac{\omega_N r^{(\alpha+1)N}}{\alpha+1}.$$

Pelos Passos 2.1 e 2.2 obtemos

$$r \leq \underbrace{\left(\frac{\alpha+1}{\omega_N N^N a^N}\right)^{\frac{1}{N(\alpha+1)}}}_{C=C(N,a,\alpha)} \|f^-\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Como esta estimativa vale para todo $r < r_0$, temos $r_0 \leq C\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\alpha+1}}$, ou seja,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C diam(\Omega)\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Passo 3: Consideremos $-1 < \alpha < 0$.
Seja $g(p) = (1 + k|p|)^{\alpha N}$, com $k > 0$ constante qualquer, pelo Lema 2.7 i),

$$\int_{B_r(0)} (1 + k|p|)^{\alpha N} dp \leq \int_{\Gamma_r^+(u^+)} (1 + k|Du|)^{\alpha N} |\det D^2 u|\, dx. \tag{2.12}$$

Passo 3.1: Estimativa do lado direito de (2.12).
Considerando $\mathcal{U}$ como no Passo 2.1, temos pelo Passo 1 que

$$\int_{\Gamma_r^+(u^+)\backslash\mathcal{U}} (1 + k|Du|)^{\alpha N} |\det D^2 u| dx \leq \int_{\Gamma_r^+(u^+)\backslash\mathcal{U}} (1 + k|Du|)^{\alpha N} \left(\frac{f^-}{Na|Du|^{\alpha}}\right)^N dx.$$

Notando que

$$\frac{(1 + k|Du|)^{\alpha N}}{|Du|^{\alpha N}} = \left(\frac{1 + k|Du|}{|Du|}\right)^{\alpha N} = \frac{1}{\left(\frac{1}{|Du|} + k\right)^{-\alpha N}} \leq \frac{1}{k^{-\alpha N}}, \tag{2.13}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_r^+(u^+)\backslash\mathcal{U}} (1 + k|Du|)^{\alpha N} \left(\frac{f^-}{Na|Du|^{\alpha}}\right)^N dx &\leq \frac{1}{N^N a^N k^{-\alpha N}} \int_{\Gamma_r^+(u^+)\backslash\mathcal{U}} (f^-)^N dx \\
&\leq \frac{1}{N^N a^N k^{-\alpha N}} \int_{\Gamma^+(u^+)} (f^-)^N dx.
\end{aligned}$$

Passo 3.2: Estimativa do lado esquerdo de (2.12).
Pelo Lema A.1 temos

$$(1 + kq)^{-\alpha N} \leq C_{\alpha N}(1 + (kq)^{-\alpha N}),$$

logo

$$\int_{B_r(0)} (1 + k|p|)^{\alpha N} dp = N\omega_N \int_0^r \frac{q^{N-1}}{(1 + kq)^{-\alpha N}} dq \geq \frac{N\omega_N}{C_{\alpha N}} \int_0^r \frac{q^{N-1}}{1 + (kq)^{-\alpha N}} dq.$$

Agora, desde que $q \leq r < r_0$ implica

$$\frac{1}{1 + (kq)^{-\alpha N}} > \frac{1}{1 + (kr_0)^{-\alpha N}},$$

então obtemos

$$\frac{N\omega_N}{C_{\alpha N}} \int_0^r \frac{q^{N-1}}{1 + (kq)^{-\alpha N}} dq > \frac{N\omega_N}{C_{\alpha N}} \int_0^r \frac{q^{N-1}}{1 + k(r_0)^{-\alpha N}} dq = \frac{\omega_N r^N}{C_{\alpha N}(1 + (kr_0)^{-\alpha N})}$$

e portanto

$$\int_{B_r(0)} (1+k|p|)^{\alpha N} dp > \frac{\omega_N r^N}{C_{\alpha N}(1+(kr_0)^{-\alpha N})} \tag{2.14}$$

Segue de (2.12) e dos Passos 3.1 e 3.2 que

$$\frac{\omega_N r^N}{C_{\alpha N}(1+(kr_0)^{-\alpha N})} \leq \frac{1}{N^N a^N k^{-\alpha N}} \|f^-\|^N_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Novamente, como esta estimativa é válida para todo $r < r_0$, temos que

$$\frac{{r_0}^N}{1+(kr_0)^{-\alpha N}} \leq \frac{C_{\alpha N}}{\omega_N N^N a^N k^{-\alpha N}} \|f^-\|^N_{L^N(\Gamma^+(u^+))},$$

onde $k > 0$ é qualquer. Em particular, tomando $k = (r_0)^{-1}$, obtemos

$$r_0 \leq \underbrace{\left(\frac{2C_{\alpha N}}{\omega_N N^N a^N}\right)^{\frac{1}{N(\alpha+1)}}}_{C(N,a,\alpha)} \|f^-\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))},$$

e portanto concluímos a primeira parte.
Parte 2: $u \in C(\overline{\Omega})$.
Sejam u^ε a sup convolução de u e u^ε_η uma molificação standard de u^ε, logo temos $u^\varepsilon_\eta \in C^\infty$. Da mesma forma que no Lema 2.7 temos o seguinte resultado:

Lema 2.8 *Para cada $r < r_0(u^\varepsilon_\eta)$, obtemos*

i)

$$\int_{B_r(0)} g(p)\,dp \leq \int_{\Gamma^+_r(u^{\varepsilon}_\eta{}^+)} g(Du^\varepsilon_\eta)|\det D^2 u^\varepsilon_\eta|\,dx,\ \forall\, g \in C(\mathbb{R}^N),\ g \geq 0. \tag{2.15}$$

ii) $D^2 u^\varepsilon_\eta \leq 0$ *sobre* $\Gamma^+_r(u^{\varepsilon}_\eta{}^+) \subset \{u^\varepsilon_\eta > 0\}$.

Como feito na Parte 1, nosso objetivo é para todo $r < r_0(u)$, obter estimativas para r em termos de uma constante e $\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}$. Agora, como $u^\varepsilon \to u$ uniformemente e $u^\varepsilon_\eta \to u^\varepsilon$ uniformemente, dado $r < r_0(u)$, obtemos ε e η suficientemente pequenos de forma que $r < r_0(u^\varepsilon_\eta)$.
Pelo Lema 2.4 v) obtemos $\frac{-I}{\varepsilon} \leq D^2 u^\varepsilon_\eta \leq 0$ sobre $\Gamma^+_r(u^{\varepsilon}_\eta{}^+)$ e $D^2 u^\varepsilon_\eta(x) \to M(x)$ q.t.p. x, logo

$$M(x) \leq 0 \text{ q.t.p. } x \in \overline{\lim_{\eta\to 0}} \Gamma^+_r(u^{\varepsilon}_\eta{}^+). \tag{2.16}$$

Como g é contínua, pelo Teorema da Convergência Limitada aplicado em (2.15) temos

$$\int_{B_r(0)} g(p)\,dp \leq \int_{\overline{\lim_{\eta\to 0}} \Gamma^+_r(u^{\varepsilon}_\eta{}^+)} g(Du^\varepsilon)|\det M|\,dx, \forall\, g \in C(\mathbb{R}^N),\ g \geq 0. \tag{2.17}$$

Novamente, analisaremos o comportamento de Du^ε no conjunto $\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+})$ no intuito de estimar a integral (2.17).
Passo 4: Análise do comportamento de Du^ε no conjunto $\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+})$.
Seja $x \in \overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+})$ arbitrário. Pelo Lema 2.4 iii) temos

$$(M(x), Du^\varepsilon(x)) \in J^{2,+}u^\varepsilon(x).$$

Logo, pelo Lema 2.5, temos que $(M(x), Du^\varepsilon(x)) \in J^{2,+}u(\hat{x})$, onde $\hat{x}$ é tal que $u^\varepsilon(x) = u(\hat{x}) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-\hat{x}|^2$ e assim pela Observação 2.2, existe $\varphi \in C^2(\Omega)$ com $u(\hat{x}) = \varphi(\hat{x})$, $u \leq \varphi$ em uma vizinhança de $\hat{x}$ tal que

$$D\varphi(\hat{x}) = Du^\varepsilon(x), \quad D^2\varphi(\hat{x}) = M(x). \tag{2.18}$$

Suponha que $Du^\varepsilon(x) \neq 0$, então sendo u subsolução de viscosidade e $\hat{x} \in \{u > 0\}$, temos $F(D^2\varphi(\hat{x}), D\varphi(\hat{x})) \geq f(\hat{x})$. Por (2.18) e (2.6),

$$f(\hat{x}) \leq F(D^2\varphi(\hat{x}), D\varphi(\hat{x})) = F(M(x), Du^\varepsilon(x)) \leq |Du^\varepsilon(x)|^\alpha \mathcal{M}^+_{a,A}(M(x)).$$

Considerando $f_\varepsilon(x) = \inf\limits_{\{|x-y|\leq 2\sqrt{\varepsilon M}\}} f(y)$, por (2.16) segue que

$$-f_\varepsilon^-(x) \leq f(\hat{x}) \leq a|Du^\varepsilon(x)|^\alpha tr(M(x)), \;\; q.t.p.\, x \in \overline{\lim_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+}),$$

isto é,

$$\left(\frac{-tr(M(x))}{N}\right)^N \leq \left(\frac{f_\varepsilon^-(x)}{Na|Du^\varepsilon(x)|^\alpha}\right)^N \;\; q.t.p.\, x \in \overline{\lim_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+}).$$

Por (2.16) e pela Proposição A.1 com $0 \leq M, I \in S(N)$, obtemos

$$|\det M| \leq \left(\frac{-trM}{N}\right)^N.$$

Se $Du^\varepsilon(x) = 0$, então por (2.18) temos $D\varphi(\hat{x}) = 0$. Se $D^2\varphi(\hat{x}) \neq 0$ então $\hat{x}$ é ponto crítico de φ, o qual é não degenerado, desde que, por (2.16), obtemos $D^2\varphi(\hat{x}) = M(x) \leq 0$ e $D^2\varphi(\hat{x}) \neq 0$. Logo o conjunto dos pontos tais que $Du^\varepsilon = 0$ e $M(x) \neq 0$ (isto é, o conjunto dos pontos críticos não degenerados de φ) é enumerável.

Portanto, no Passo 4 concluímos se $Du^\varepsilon(x) \neq 0$ que

$$|\det M(x)| \leq \left(\frac{f_\varepsilon^-(x)}{Na|Du^\varepsilon(x)|^\alpha}\right)^N q.t.p.\, x \in \overline{\lim_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+}), \tag{2.19}$$

e o conjunto onde $Du^\varepsilon(x) = 0$ e $D^2u^\varepsilon(x) \neq 0$ é enumerável.
Passo 5: Consideremos $\alpha \geq 0$.
Seja $\mathcal{V} = \{x \in \overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+}) : Du^\varepsilon(x) = 0\}$. Usando a Proposição A.1 e tomando $g(p) = |p|^{\alpha N}$, temos em (2.17) que

$$\int_{B_r(0)} |p|^{\alpha N} dp \;\; \leq \;\; \int_{\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^{\varepsilon+})\setminus\mathcal{V}} |Du^\varepsilon|^{\alpha N}\left(\frac{-trM}{N}\right)^N dx.$$

Agora, pelo Passo 2.2 e equação (2.19) segue

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_N r^{N(\alpha+1)}}{\alpha+1} &= \int_{B_r(0)} |p|^{\alpha N} dp \\
&\leq \int_{\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^\varepsilon{}^+)\setminus\mathcal{V}} |Du^\varepsilon|^{\alpha N} \left(\frac{-trM}{N}\right)^N dx \\
&\leq \int_{\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^\varepsilon{}^+)\setminus\mathcal{V}} |Du^\varepsilon|^{\alpha N} \left(\frac{f_\varepsilon^-}{Na|Du^\varepsilon|^\alpha}\right)^N dx \\
&\leq \frac{1}{N^N a^N} \int_{\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^\varepsilon{}^+)\setminus\mathcal{V}} (f_\varepsilon^-)^N dx.
\end{aligned}$$

Como f_ε é contínua, quando $\varepsilon \to 0$ obtemos, pelo Lema 2.6,

$$\begin{aligned}
r^{N(\alpha+1)} &\leq \frac{\alpha+1}{\omega_N N^N a^N} \int_{\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\left(\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^\varepsilon{}^+)\setminus\mathcal{V}\right)} (f^-)^N dx \\
&\leq \frac{\alpha+1}{\omega_N N^N a^N} \|f^-\|^N_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.
\end{aligned}$$

Desde que $r < r_0$ é arbitrário, o resultado segue.

Passo 6: Caso $-1 < \alpha < 0$.

Tomando $g(p) = (1+k|p|)^{\alpha N}$ em (2.17), temos pela equação (2.19) que

$$\int_{B_r(0)} (1+k|p|)^{\alpha N} dp \leq \int_{\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^\varepsilon{}^+)} (1+k|Du^\varepsilon|)^{\alpha N} \left(\frac{f_\varepsilon^-}{Na|Du^\varepsilon|^\alpha}\right)^N dx.$$

Pelo Passo 3.2, mais precisamente, equação (2.14), e usando a desigualdade obtida no Passo 3.1, temos

$$\frac{\omega_N r^N}{C_{\alpha N}(1+(kr_0)^{-\alpha N})} \leq \frac{1}{N^N a^N k^{-\alpha N}} \int_{\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\Gamma_r^+(u_\eta^\varepsilon{}^+)} (f_\varepsilon^-)^N dx.$$

Fazendo o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos como no Passo 5, que

$$\frac{\omega_N r^N}{C_{\alpha N}(1+(kr_0)^{-\alpha N})} \leq \frac{1}{N^N a^N k^{-\alpha N}} \|f^-\|^N_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Como esta estimativa se aplica para todo $r < r_0$, temos que

$$\frac{{r_0}^N}{1+(kr_0)^{-\alpha N}} \leq \frac{C_{\alpha N}}{\omega_N N^N a^N k^{-\alpha N}} \|f^-\|^N_{L^N(\Gamma^+(u^+))},$$

onde $k > 0$ é qualquer. Em particular, tomando $k = (r_0)^{-1}$, obtemos

$$r_0 \leq \underbrace{\left(\frac{2C_{\alpha N}}{\omega_N N^N a^N}\right)^{\frac{1}{N(\alpha+1)}}}_{C(N,a,\alpha)} \|f^-\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))},$$

e portanto concluímos a segunda parte.

Para as supersoluções, consideremos

$$r_0 = \frac{-inf_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^-}{diam(\Omega)},$$

e utilizamos a mesma idéia desta prova, substituindo u^+ por u^- e usando as inf convoluções e suas propriedades. ■

Provaremos agora o caso da equação que possui dependência do gradiente.

Teorema 2.2 *Sejam $u \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$. Se $\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ e u é uma subsolução de viscosidade da equação*

$$F(D^2u, Du) + \gamma |Du|^\beta = f(x) \ \ em \ \ \{u > 0\},$$

onde $0 < \beta \leq \alpha + 1$, então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha, \beta, \gamma)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C diam(\Omega) \|f^-\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Se $\|f^+\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ e u é uma supersolução de viscosidade da equação

$$F(D^2u, Du) + \gamma |Du|^\beta = f(x) \ \ em \ \ \{u < 0\},$$

onde $0 < \beta \leq \alpha + 1$, então existe uma constante positiva $C = C(N, a, \alpha, \beta, \gamma)$ tal que

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C diam(\Omega) \|f^+\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^-))}.$$

Demonstração: Esta demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 2.1. Considerando inicialmente $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, definimos

$$r_0 = \frac{\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+}{diam(\Omega)},$$

e obtemos estimativas para $r < r_0$. Como o Lema 2.7 não depende de qual equação u é subsolução de viscosidade, este lema continua válido neste caso.

Novamente consideraremos os casos $\alpha \geq 0$ e $-1 < \alpha < 0$ separadamente e pelo Passo 1 do teorema anterior, as integrais podem ser calculadas apenas onde $Du(x_0) \neq 0$, para $x_0 \in \Gamma_r^+(u^+)$. Neste caso, como $Du(x_0) \neq 0$ e $u \in C^2(\Omega)$, tomando $\varphi = u$ na definição de subsolução de viscosidade, obtemos

$$F(D^2u(x_0), Du(x_0)) + \gamma |Du(x_0)|^\beta \geq f(x_0).$$

Por (2.6),

$$-f^-(x_0) \leq f(x_0) \leq |Du(x_0)|^\alpha \mathcal{M}^+_{a,A}(D^2u(x_0)) + \gamma |Du(x_0)|^\beta,$$

e, pelo Lema 2.7, temos que $D^2u(x_0) \leq 0$, donde segue

$$\left(\frac{-tr(D^2u(x_0))}{N}\right)^N \leq \left(\frac{f^-(x_0)+\gamma|Du(x_0)|^\beta}{Na|Du(x_0)|^\alpha}\right)^N. \tag{2.20}$$

Caso 1: Consideremos a princípio $\alpha \geq 0$.
Pelo Lema 2.7, tomando $g(p) = (k^{\frac{N}{N-1}}+|p|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{1-N}|p|^{\alpha N}$, com $k \geq 1$ uma constante arbitrária e sendo $\mathcal{U} = \{x \in \Gamma_r^+(u^+) : Du(x) = 0\}$, segue que

$$\int_{B_r(0)} \frac{|p|^{\alpha N}}{(k^{\frac{N}{N-1}}+|p|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1}}\, dp \leq \int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} \frac{|Du|^{\alpha N}}{(k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1}} |\det D^2u|\, dx. \tag{2.21}$$

Passo 1.1: Estimativa do lado direito de (2.21).
Pela Proposição A.1 temos que

$$|detD^2u| \leq \left(\frac{-trD^2u}{N}\right)^N$$

e por (2.20) segue para todo $x_0 \in \Gamma_r^+(u^+)$ que

$$|\det D^2u(x_0)| \leq \left(\frac{f^-(x_0)+\gamma|Du(x_0)|^\beta}{Na|Du(x_0)|^\alpha}\right)^N. \tag{2.22}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} \frac{|Du|^{\alpha N}}{(k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1}} |\det D^2u|\, dx \\
&\leq \int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{1-N}|Du|^{\alpha N}\left(\frac{f^-+\gamma|Du|^\beta}{Na|Du|^\alpha}\right)^N dx \\
&\leq \frac{2^{N-1}}{N^Na^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{1-N}\left(\frac{k^N(f^-)^N}{k^N}+\gamma^N|Du|^{\beta N}\right) dx.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Agora, note que

$$k^N = (k^{\frac{N}{N-1}})^{N-1} \leq (k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1} \tag{2.24}$$

e

$$|Du|^{\beta N} = (|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1} \leq (k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1}, \tag{2.25}$$

assim, usando estas desigualdades em (2.23) obtemos,

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{N-1}}{N^Na^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{1-N}\left(\frac{k^N(f^-)^N}{k^N}+\gamma^N|Du|^{\beta N}\right) dx \\
\leq\ &\frac{2^{N-1}}{N^Na^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} \frac{\left(\frac{(f^-)^N}{k^N}+\gamma^N\right)}{(k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1}}(|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}}+k^{\frac{N}{N-1}})^{N-1}dx \\
\leq\ &\frac{2^{N-1}}{N^Na^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)} \left(\frac{(f^-)^N}{k^N}+\gamma^N\right) dx.
\end{aligned}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} \frac{|Du|^{\alpha N}}{(k^{\frac{N}{N-1}}+|Du|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1}}|\det D^2u|\,dx \\
\leq\ & \frac{2^{N-1}}{N^N a^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)}\left(\frac{(f^-)^N}{k^N}+\gamma^N\right)dx. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Passo 1.2: Estimativa do lado esquerdo de (2.21).
Como $\beta \leq \alpha+1$, temos $\frac{\alpha+1}{\beta}\geq 1$, então sendo $k^{\frac{N}{N-1}}+|p|^{\frac{\beta N}{N-1}}\geq 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_r(0)} \frac{|p|^{\alpha N}}{(k^{\frac{N}{N-1}}+|p|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{N-1}}dp \\
\geq\ & \int_{B_r(0)} \frac{|p|^{\alpha N}}{(k^{\frac{N}{N-1}}+|p|^{\frac{\beta N}{N-1}})^{(N-1)(\frac{\alpha+1}{\beta})}}dp \\
\geq\ & 2^{1-(N-1)(\frac{\alpha+1}{\beta})}N\omega_N\int_0^r \frac{q^{\alpha N+N-1}}{k^{\frac{N(\alpha+1)}{\beta}}+q^{\alpha N+N}}dq \\
=\ & C_1(N,\alpha,\beta)\ln\left(\frac{r^{N+\alpha N}}{k^{\frac{N}{\beta}(\alpha+1)}}+1\right).
\end{aligned}
$$

Assim, segue da equação (2.26), e do Passo 1.2 que

$$
\ln\left(\frac{r^{N+\alpha N}}{k^{\frac{N}{\beta}(\alpha+1)}}+1\right)\leq \frac{2^{N-1}}{C_1(N,\alpha,\beta)N^N a^N}\int_{\Gamma^+(u^+)}\left(\frac{(f^-)^N}{k^N}+\gamma^N\right)dx.
$$

Tomando $k=\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}$, segue

$$
\left(\frac{r^{N+\alpha N}}{\|f^-\|^{\frac{N}{\beta}(\alpha+1)}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}}\right)\leq \underbrace{\exp\left(\frac{2^{N-1}}{C_1(N,\alpha,\beta)N^N a^N}\int_{\Gamma^+(u^+)}\left(1+\gamma^N\right)dx\right)-1}_{C^{N(\alpha+1)}=[C(N,a,\alpha,\gamma,\beta)]^{N(\alpha+1)}},
$$

isto é

$$
r\leq\ C\left(\|f^-\|^{\frac{N}{\beta}(\alpha+1)}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}\right)^{\frac{1}{N(\alpha+1)}}.
$$

Como esta estimativa se verifica para todo $r<r_0$, concluímos

$$
r_0\leq C\|f^-\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))},
$$

ou seja,

$$
\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C diam(\Omega)\|f^-\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.
$$

Caso 2: Consideremos o caso em que $-1<\alpha<0$.
Novamente pela Lema 2.7, tomando

$$
g(p)=(k+|p|)^{\alpha N}(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}}+|p|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)},
$$

com $k \geq 1$ constante arbitrária, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r(0)} (k+|p|)^{\alpha N}(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |p|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} dp \\
\leq\ &\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (1+k|Du|)^{\alpha N}(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} |\det D^2 u|\, dx. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Passo 2.1: Estimativa do lado direito de (2.27).
Por (2.22) e (2.13) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (1+k|Du|)^{\alpha N}(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} |\det D^2 u|\, dx \\
\leq\ &\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (1+k|Du|)^{\alpha N}(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} \left(\frac{f^- + \gamma|Du|^\beta}{Na|Du|^\alpha}\right)^N dx \\
\leq\ &\frac{2^{N-1}k^{\alpha N}}{N^N a^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} \left(\frac{k^N(f^-)^N}{k^N} + \gamma^N|Du|^{N\beta}\right) dx \\
\leq\ &\frac{2^{N-1}}{N^N a^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} \left(\frac{k^N(f^-)^N}{k^N} + \gamma^N|Du|^{N\beta}\right) dx.
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que $k \geq 1$ e $-\alpha N > 0$, logo $k^{\alpha N} \leq 1$. Seguindo a idéia do Passo 1.1, mais especificamente, as idéias das equações (2.24) e (2.25) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{N-1}}{N^N a^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} \left(\frac{k^N(f^-)^N}{k^N} + \gamma^N|Du|^{N\beta}\right) dx \\
\leq\ &\frac{2^{N-1}}{N^N a^N}\int_{\Gamma_r^+(u^+)\setminus\mathcal{U}} \left(\frac{(f^-)^N}{k^N} + \gamma^N\right)\frac{(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(N-1)}}{(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |Du|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(N-1)}} dx \\
\leq\ &\frac{2^{N-1}}{N^N a^N}\int_{\Gamma^+(u^+)} \left(\frac{(f^-)^N}{k^N} + \gamma^N\right) dx.
\end{aligned}$$

Passo 2.2: Estimativa do lado esquerdo de (2.27).
Pela propriedade da co-área e pelo Lema A.1,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r(0)} (k+|p|)^{\alpha N}(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |p|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} dp \\
=\ &\int_0^r \frac{q^{N-1}}{(k+q)^{-\alpha N}(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(N-1)}} dq \\
\geq\ &N d_1 \omega_N \int_0^r \frac{q^{N-1}}{(k^{-\alpha N} + q^{-\alpha N})(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(N-1)}} dq,
\end{aligned}$$

com $d_1 = 1$, se $-\alpha N \in (0,1]$, ou $d_1 = 2^{1+\alpha N}$, se $-\alpha N > 1$. Agora, note que

$$q^{-\alpha N} = (q^{\frac{N}{N-1}})^{-\alpha(N-1)} \leq (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{-\alpha(N-1)},$$

e

$$k^{-\alpha N} = (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}})^{-\alpha\beta(N-1)} \leq (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{-\alpha\beta(N-1)}.$$

Como $-1 < \alpha < 0$ temos $0 < \beta \leq \alpha + 1 < 1$, logo $-\alpha\beta(N-1) < -\alpha(N-1)$ e assim

$$(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{-\alpha\beta(N-1)} \leq (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{-\alpha(N-1)}.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
& N d_1 \omega_N \int_0^r \frac{q^{N-1}}{(k^{-\alpha N} + q^{-\alpha N})(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(N-1)}} dq \\
\geq \; & \frac{N d_1 \omega_N}{2} \int_0^r \frac{q^{N-1}}{(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{(\beta-\alpha)(N-1)}} dq \\
\geq \; & \frac{N d_1 \omega_N}{2} \int_0^r \frac{q^{N-1}}{(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{(N-1)}} dq,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $\beta - \alpha \leq 1$.
Agora, pelo Lema A.1 sendo $d_2 = 1$, se $N - 1 \leq 1$, ou $d_2 = 2^{2-N}$, se $N - 1 > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{N d_1 \omega_N}{2} \int_0^r \frac{q^{N-1}}{(k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + q^{\frac{N}{N-1}})^{(N-1)}} dq \; & \geq \; \frac{N d_1 d_2 \omega_N}{2} \int_0^r \frac{q^{N-1}}{k^{\frac{N}{\beta}} + q^N} dq \\
& = \; \frac{d_1 d_2 \omega_N}{2} \int_0^{r^N} \frac{du}{k^{\frac{N}{\beta}} + u} \\
& = \; \frac{d_1 d_2 \omega_N}{2} \ln\left(\frac{r^N}{k^{\frac{N}{\beta}}} + 1\right).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos no Passo 2.2 que

$$\int_{B_r(0)} (k + |p|)^{\alpha N} (k^{\frac{N}{\beta(N-1)}} + |p|^{\frac{N}{N-1}})^{\beta(1-N)} dp \geq \frac{d_1 d_2 \omega_N}{2} \ln\left(\frac{r^N}{k^{\frac{N}{\beta}}} + 1\right).$$

Pelos Passos 2.1 e 2.2 segue que

$$\frac{d_1 d_2 \omega_N}{2} \ln\left(\frac{r^N}{k^{\frac{N}{\beta}}} + 1\right) \leq \frac{2^{N-1}}{N^N a^N} \int_{\Gamma^+(u^+)} \left(\frac{(f^-)^N}{k^N} + \gamma^N\right) dx,$$

onde $k \geq 1$ é arbitrário. Em particular, tomando $k = \|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}$, temos

$$\begin{aligned}
& \ln\left(\frac{r^N}{\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{N}{\beta}}} + 1\right) \\
\leq \; & \frac{2^N}{d_1 d_2 \omega_N N^N a^N} \int_{\Gamma^+(u^+)} \left(\frac{(f^-)^N}{\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^N} + \gamma^N\right) dx \\
\leq \; & \frac{2^N}{d_1 d_2 \omega_N N^N a^N} \int_{\Gamma^+(u^+)} 1 + \gamma^N dx.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$r^N \leq \underbrace{\left(\exp\left(\frac{2^N}{d_1 d_2 \omega_N N^N a^N}\int_{\Gamma^+(u^+)} 1+\gamma^N dx\right)-1\right)}_{[C(N,a,\alpha,\gamma)]^N=C^N}\|f^-\|^{\frac{N}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Como esta estimativa é verdadeira para todo $r < r_0$ concluímos

$$r_0 \leq C(N,a,\alpha,\gamma)\|f^-\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}$$

e portanto obtemos o resultado desejado. Para o caso em que u é apenas contínua, utilizamos o mesmo argumento usado na segunda parte do Teorema 2.1. O caso da supersolução é provado de maneira análoga. ■

Observação 2.4 *Como citamos anteriormente, $p-$Laplaciano é um exemplo de operador satisfazendo as hipóteses (F0)-(F2). Assim os teoremas provados anteriormente para esse operador podem ser escritos da seguinte forma:*

Corolário 2.1 *Sejam $u \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^N(\Omega)\cap C(\Omega)$. Se u é uma subsolução de viscosidade da equação*

$$\Delta_p u = f(x) \ \ em \ \ \{u > 0\},$$

então existe uma constante positiva $C = C(N,a,\alpha)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + Cdiam(\Omega)\|f^-\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Se u é uma supersolução de viscosidade da equação

$$\Delta_p u = f(x) \ \ em \ \ \{u < 0\},$$

então existe uma constante positiva $C = C(N,a,\alpha)$ tal que

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + Cdiam(\Omega)\|f^+\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^N(\Gamma^+(u^-))}.$$

Corolário 2.2 *Sejam $u \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^N(\Omega)\cap C(\Omega)$. Se $\|f^-\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ e u é uma subsolução de viscosidade da equação*

$$\Delta_p u + \gamma|Du|^\beta = f(x) \ \ em \ \ \{u > 0\},$$

onde $0 < \beta \leq p-1$, então existe uma constante positiva $C = C(N,a,\alpha,\beta,\gamma)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + Cdiam(\Omega)\|f^-\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^+))}.$$

Se $\|f^+\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ e u é uma supersolução de viscosidade da equação

$$\Delta_p u + \gamma|Du|^\beta = f(x) \ \ em \ \ \{u < 0\},$$

onde $0 < \beta \leq p-1$, então existe uma constante positiva $C = C(N,a,\alpha,\beta,\gamma)$ tal que

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + Cdiam(\Omega)\|f^+\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^N(\Gamma^+(u^-))}.$$

2.5 Estimativas ABP para Sistemas Quasilineares

Para o caso de sistema, temos a seguinte definição de soluções de viscosidade:

Definição 2.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $G : S(N) \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ um operador contínuo e g alguma função contínua definida sobre $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$. Dizemos que $u = (u_1, ..., u_m) \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ é uma solução de viscosidade do sistema*

$$\begin{cases} G_i(D^2 u_i, Du_i) = g_i(x, u), \quad em \quad \Omega \\ i = 1, ..., m \end{cases} \tag{2.28}$$

se para cada $i \in \{1, ..., m\}$, u_i é uma solução de viscosidade da equação

$$G_i(D^2 u_i, Du_i) = g_i(x, u).$$

Através do Corolário 2.1 podemos provar o seguinte teorema, que será útil para obtermos estimativas a priori para a parte negativa de uma eventual solução de (S_t) no Capítulo 4:

Teorema 2.3 *Seja $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ uma supersolução de viscosidade do sistema*

$$\begin{cases} \Delta_p u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} |u_j|^{p-2} u_j = f_i(x), \quad em \quad \Omega \\ i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{2.29}$$

onde $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, com $f_i \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$ e $A = (a_{ij}) \in S(m)$ satisfaz $a_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^m a_{ij} \leq 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Então

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega}\{\min\{u_1, ..., u_m\}\} \quad &\leq \quad \sup_{\partial\Omega}\{\max\{(u_1)^-, ..., (u_m)^-\}\} \\ &\quad + C diam(\Omega) \|\tilde{f}\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{p-1}}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{f} = \max\{f_1^+, ..., f_m^+\}$.

Demonstração: Seja $v = \min\{-u_1^-, ..., -u_m^-\}$, onde $u = (u_1, ..., u_m)$ é supersolução de viscosidade de (2.29). Provaremos que v é supersolução de viscosidade de $\Delta_p v = \tilde{f}$. De fato, suponhamos por contradição que v não é supersolução de viscosidade, logo existe $x_0 \in \Omega$ tal que, ou existe $B_\delta(x_0)$ sobre a qual u é constante e $\tilde{f}(\bar{x}) < 0$ para algum $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ (mas nesse caso $0 > \tilde{f}(\bar{x}) \geq 0$, um absurdo), ou existe $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $D\varphi(x_0) \neq 0$, $\varphi(x_0) = v(x_0)$, $v \geq \varphi$ em $B_r(x_0)$ e

$$\Delta_p \varphi(x_0) > \tilde{f}(x_0). \tag{2.30}$$

Neste caso, por continuidade, existe $B_\gamma(x_0)$, $\gamma < r$ tal que $\Delta_p \varphi(y) > \tilde{f}(y)$, para todo $y \in B_\gamma(x_0)$.

Fixemos $k \in \{1, ..., m\}$ de forma que $-u_k^-(x_0) = v(x_0)$, então temos

$$\varphi(x_0) = v(x_0) = -u_k^-(x_0) \;\text{ e }\; \varphi \leq v \leq 0 \;\text{ em }\; B_r(x_0). \tag{2.31}$$

Suponhamos a princípio que $\varphi(x_0) = 0$. Assim, por (2.30) e (2.31) temos que $\varphi \in C^2(\Omega)$ é solução de

$$\Delta_p \varphi > 0, \text{ em } B_\gamma(x_0), \;\; \varphi \leq 0 \text{ sobre } \partial B_\gamma(x_0).$$

Segue do Princípio de Máximo de Vázquez que $\varphi < 0$ ou $\varphi \equiv 0$. Como $\varphi(x_0) = 0$ concluímos que $\varphi \equiv 0$, o que é uma contradição, já que $D\varphi(x_0) \neq 0$.

Suponhamos agora o caso em que $\varphi(x_0) < 0$. Como $v(x_0) = -u_k^-(x_0)$, temos

$$-u_k^-(x_0) \leq -u_j^-(x_0), \text{ para todo } j \in \{1, ..., m\} \tag{2.32}$$

e $-u_k^-(x_0) = \varphi(x_0) < 0$, logo $u_k^-(x_0) = -u_k(x_0)$. Definindo

$$U^+ = \{k \neq j : u_j(x_0) > 0\},$$
$$U^- = \{k \neq j : u_j(x_0) < 0\},$$
$$U^0 = \{k \neq j : u_j(x_0) = 0\},$$

obtemos, por (2.30) que

$$\begin{aligned} & \Delta_p \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^m a_{kj} |u_j(x_0)|^{p-2} u_j(x_0) \\ > \;& f_k^+(x_0) + a_{kk}|u_k(x_0)|^{p-2}u_k(x_0) + \sum_{j \in U^+} a_{kj}|u_j(x_0)|^{p-2}u_j(x_0) \\ + \;& \sum_{j \in U^-} a_{kj}|u_j(x_0)|^{p-2}u_j(x_0) + \sum_{j \in U^0} a_{kj}|u_j(x_0)|^{p-2}u_j(x_0). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Como $a_{kj} \geq 0$ para $k \neq j$ segue que

$$\sum_{j \in U^+} a_{kj}|u_j(x_0)|^{p-2}u_j(x_0) \geq 0.$$

Ainda, notando que em U^- temos $u_j(x_0) = -u_j^-(x_0)$ e como $u_k^-(x_0) = -u_k(x_0)$, segue

$$\begin{aligned} (2.33) \;\; \geq \;\; & f_k^+(x_0) + a_{kk}|-u_k^-(x_0)|^{p-2}(-u_k^-(x_0)) \\ & + \sum_{j \in U^-} a_{kj}|-u_j^-(x_0)|^{p-2}(-u_j^-(x_0)). \end{aligned}$$

Como $|t|^{p-2}t$ é crescente em t e por (2.32) segue que

$$\begin{aligned} & f_k^+(x_0) + a_{kk}|-u_k^-(x_0)|^{p-2}(-u_k^-(x_0)) + \sum_{j \in U^-} a_{kj}|-u_j^-(x_0)|^{p-2}(-u_j^-(x_0)) \\ \geq \;& f_k^+(x_0) + a_{kk}|-u_k^-(x_0)|^{p-2}(-u_k^-(x_0)) + \sum_{j \in U^-} a_{kj}|-u_k^-(x_0)|^{p-2}(-u_k^-(x_0)) \\ + \;& \sum_{j \in U^+ \cup U^0} a_{kj}|-u_k^-(x_0)|^{p-2}(-u_k^-(x_0)) \\ = \;& f_k^+(x_0) + |-u_k^-(x_0)|^{p-2}(-u_k^-(x_0)) \sum_{j=1}^m a_{kj} \geq f_k^+(x_0) \geq f_k(x_0), \end{aligned}$$

desde que por hipótese $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \leq 0$ e $-u_k^- \leq 0$. Ou seja, existem $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tais que $D\varphi(x_0) \neq 0$ e, por (2.31), $\varphi(x_0) = -u_k^-(x_0) = u_k(x_0)$ e $\varphi \leq v \leq -u_k^- \leq u_k$ em $B_r(x_0)$. Ainda, temos que

$$\Delta_p \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^{m} a_{kj}|u_j(x_0)|^{p-2}u_j(x_0) > f_k(x_0).$$

Assim u_k não é uma supersolução de viscosidade de (2.29), o que é uma contradição.

Portanto v é uma supersolução de viscosidade de $\Delta_p v = \tilde{f}$. Segue do Corolário 2.1 que

$$-\inf_{\Omega} v \leq \sup_{\partial\Omega} v^- + C\ diam(\Omega)\|\tilde{f}^+\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Agora,

$$-\inf_{\Omega} v = -\inf_{\Omega}\{\min\{-u_1^-, ..., -u_m^-\}\}.$$

Como $-u_i^- \leq u_i$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$ temos $\min\{-u_1^-, ..., -u_m^-\} \leq \min\{u_1, ..., u_m\}$, logo

$$-\inf_{\Omega}\{\min\{u_1, ..., u_m\}\} \leq -\inf_{\Omega}\{\min\{-u_1^-, ..., -u_m^-\}\}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} v^- &= \max\{0, -v\} = \max\{0, -\min\{-u_1^-, ..., -u_m^-\}\} \\ &= \max\{0, \max\{u_1^-, ..., u_m^-\}\} = \max\{u_1^-, ..., u_m^-\}. \end{aligned}$$

Assim, como $\tilde{f}^+ = \tilde{f}$, concluímos

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega}\{\min\{u_1, ..., u_m\}\} &\leq \sup_{\partial\Omega}\{\max\{(u_1)^-, ..., (u_m)^-\}\} \\ &\quad + C diam(\Omega)\|\tilde{f}\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{p-1}}, \end{aligned}$$

e o teorema está provado. $\blacksquare$

Capítulo 3

Problema do tipo Ambrosetti-Prodi superlinear para o operador $p-$Laplaciano

2.1 Introdução

O propósito desta seção é estudar a existência de múltiplas soluções do problema

$$(P_t) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) + t\phi + h, & \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado com fronteira de classe $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\Delta_p = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano e $1 < p < N$. Assumimos que $\phi, h \in L^\infty(\Omega)$, com $\phi \succ 0$ em Ω, $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e f é uma função contínua que satisfaz as hipóteses $(f1) - (f3)$ descritas na Introdução. Este problema pertence a classe de problemas do tipo Ambrosetti-Prodi, e sob nossas condições devido a hipótese $(f3)$, é um problema superlinear. Problemas desse tipo para o operador Laplaciano e o caso superlinear podem ser vistos, por exemplo, em [30, 33, 34, 35] e suas referências. No caso do $p-$Laplaciano não conhecemos esse tipo de resultado.

Motivados pelos resultados obtidos por Arcoya e Ruiz [5] bem como de Figueiredo [29] provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Suponha que as hipóteses* $(f1)-(f3)$ *sejam válidas. Então existem constantes* $-\infty < t_* \leq t^* < +\infty$ *tais que o problema* (P_t)*:*

i) *possui pelo menos duas soluções se* $t < t_*$,

ii) *possui pelo menos uma solução se* $t \leq t^*$,

iii) *não possui solução se* $t > t^*$.

Como foi explicado na Introdução, para provar o Teorema 2.1, usaremos o método de sub e supersolução para encontrarmos a primeira solução. Para obter a segunda solução precisamos de estimativas a priori das eventuais soluções de (P_t). Observamos que a prova de [5] não se aplica ao nosso caso, visto que eles trabalham com o caso $p-$linear. Para contornar esse fato, adaptamos alguns argumentos utilizados pelos autores de Figueiredo e Sirakov [32], obtendo não somente uma estimativa da parte negativa de u, mas também uma limitação de t tal que (P_t) possui uma solução, e desse modo uma estimativa para a solução u. Como o operador estudado em [32] é linear, a limitação de t segue facilmente da linearidade do operador e de estimativas ABP. A principal dificuldade nesse ponto é que o nosso operador não é linear, então adaptamos um resultado de Dong em [39] que utiliza um princípio de comparação para limitar t. Para a limitação de u utilizamos a técnica blow up, o qual sua aplicação somente é possível graças a um recente trabalho de Lorca [54], o qual prova um resultado do tipo Liouville em um semi espaço. De posse dessas estimativas podemos obter a segunda solução através da teoria do grau de Leray Schauder, seguindo o resultados de [5] e [29].

Este capítulo é organizado como segue. Na Seção 2 encontramos a primeira solução. Na Seção 3, obtemos as estimativas a priori para as eventuais soluções de (P_t) e na Seção 4 aplicamos a teoria do grau de Leray Schauder para obter a segunda solução.

2.2 Primeira Solução

Nossa principal ferramenta para encontrar uma solução será o método de sub e supersolução. Procuraremos dessa forma sub e supersoluções para (P_t):

Proposição 2.1 *Para cada $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$, $t \in \mathbb{R}$, existe $\underline{u} \in C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $\underline{u} \ll w$ e*

$$-\Delta_p \underline{u} \leq f(x, \underline{u}) + t\phi + h, \quad em \ \ \Omega.$$

Demonstração: Sejam $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$, $t \in \mathbb{R}$ fixos, mas arbitrários. Por $(f1)$ temos que para $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \mu)$, existe constante $C > 0$ tal que

$$f(x,u) \geq (\mu + \varepsilon)|u|^{p-2}u - C,$$

para todo $u < 0$. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução de

$$-\Delta_p u = (\mu + \varepsilon)|u|^{p-2}u - C + t\phi + h, \text{ em } \ \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega.$$

onde, sem perda de generalidade, tomamos C grande o suficiente para obter $-C + t\phi + h < \ 0$.

Afirmação 2.1 *Podemos tomar $C > 0$ grande o suficiente tal que $u \ll w$.*

De fato, seja $\{C_n\}$ uma sequência tal que $C_n \to \infty$ (sem perda de generalidade assumimos que $C_n > 1$) e $\{u_n\}$ uma sequência de soluções de

$$-\Delta_p u_n = (\mu + \varepsilon)|u_n|^{p-2}u_n - C_n + t\phi + h, \text{ em } \ \Omega, \quad u_n = 0, \text{ sobre } \ \partial\Omega. \tag{2.1}$$

Logo, se $v_n = \dfrac{u_n}{(C_n)^{\frac{1}{p-1}}}$, então temos que v_n é solução de

$$-\Delta_p v_n = (\mu + \varepsilon)|v_n|^{p-2}v_n - 1 + \frac{t\phi + h}{C_n}, \text{ em } \Omega, \quad v_n = 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Pelo Lema 1.1 obtemos $v_n \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$, $\|v_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \le M$. Assim, pela imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $0 \le \beta < \alpha$ temos que, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Pelo Lema 1.2 obtemos $v_n \to v$ que é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= (\mu+\varepsilon)|v|^{p-2}v - 1, & \text{em} \quad \Omega \\ v &= 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo (Proposição 1.3) e Princípio do Máximo de Vázquez (Proposição 1.4) obtemos $v \ll 0$.

Notemos que $v_n = \frac{u_n}{(C_n)^{\frac{1}{p-1}}} \to v \ll 0$, logo $u_n < 0$, $\frac{\partial u_n}{\partial \nu} < 0$ e ainda $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}, u_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Como $u_n, w \in C_0^1(\overline{\Omega})$ temos que para n grande o suficiente, $u_n \ll w$. Seja n_0 tal que $u_{n_0} \ll w$ e $C_{n_0} \ge C$. Então, definindo $\underline{u} = u_{n_0}$, como u_{n_0} é solução de (2.1) temos,

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} &= (\mu+\varepsilon)|\underline{u}|^{p-2}\underline{u} - C_{n_0} + t\phi + h \\ &\le (\mu+\varepsilon)|\underline{u}|^{p-2}\underline{u} - C + t\phi + h \\ &\le f(x,\underline{u}) + t\phi + h, \end{aligned}$$

isto é, $\underline{u}$ é subsolução de (P_t) que satisfaz $\underline{u} \ll w$. ■

Proposição 2.2 *Dada uma função $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$, existe $\underline{t}$ tal que para todo $t \le \underline{t}$, (P_t) possui uma supersolução $\overline{u} \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $\overline{u} \ll w$.*

Demonstração: Fixemos um conjunto aberto Ω_0 tal que $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Defina

$$M > \max_{y\in\overline{\Omega}, s\in[-1,0]} |f(y,s)| + \|h\|_\infty.$$

Para cada $n > 0$, seja $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução de

$$-\Delta_p u_n = g_n(x), \ \text{em } \Omega, \quad u_n = 0, \ \text{sobre } \partial\Omega,$$

onde

$$g_n(x) = \begin{cases} -n^{p-1}, & x \in \Omega_0 \\ M, & x \in \Omega\backslash\Omega_0. \end{cases}$$

Note que $\frac{g_n}{n^{p-1}} \to -\chi_{\Omega_0}$ em $L^\infty(\Omega)$, quando n tende a ∞, sendo χ_{Ω_0} a função característica de Ω_0. Defina agora $v_n = \frac{u_n}{n}$. Pelos Lemas 1.1 e 1.2, obtemos que a sequência $v^n \to v$ em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, onde v é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= -\chi_{\Omega_0}, & \text{em} \quad \Omega, \\ v &= 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo e Princípio do Máximo de Vázquez temos que $v \ll 0$. Fazendo como na Afirmação 2.1 obtemos que para n_0 grande o suficiente, $u_{n_0} \ll w$ e $u_{n_0} < 0$ em Ω. Podemos assumir $u_{n_0} < -1$ em Ω_0. Defina $\bar{u} = u_{n_0}$ e

$$\bar{t} < -\frac{(n_0^{p-1} + \max_{x\in\overline{\Omega}, s\in[\min \bar{u}, -1]} |f(x,s)| + \|h\|_\infty)}{\inf_{\bar{u}^{-1}((-\infty,-1])} \phi},$$

notando que, como $\phi \succ 0$, $\inf_{\bar{u}^{-1}((-\infty,-1])} \phi > 0$ (aqui o ínfimo é tomado no sentido essencial).

Agora, para $x \in \Omega$ existem duas possibilidades: ou $\bar{u}(x) \in [-1, 0)$, ou $\bar{u}(x) < -1$. Como $\bar{u} < -1$ em Ω_0, temos no primeiro caso que $x \in \Omega \backslash \Omega_0$, logo

$$f(x, \bar{u}) + \bar{t}\phi(x) + h(x) < M = g_{n_0} = -\Delta_p \bar{u}.$$

Por outro lado, se $\bar{u}(x) < -1$, então, por definição de $\bar{t}$,

$$\begin{aligned} & f(x, \bar{u}) + \bar{t}\phi(x) + h(x) \\ \leq \;& \max_{y \in \overline{\Omega}, s \in [\min \bar{u}, -1]} |f(y, s)| + \bar{t} \inf_{\bar{u}^{-1}((-\infty,-1])} \phi + \|h\|_\infty \\ < \;& -n_0^{p-1} = g_{n_0} \\ = \;& -\Delta_p \bar{u}. \end{aligned}$$

Portanto $\bar{u}$ é supersolução de $(P_{\bar{t}})$ e para todo $t \leq \bar{t}$, $\bar{u}$ é supersolução de (P_t) com $\bar{u} \ll w$, o que conclui a demonstração. ■

O próximo resultado é o conhecido método de sub e supersolução, o qual nos dará a primeira solução, através do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Teorema 2.2 *Sejam $\underline{u}, \overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ sub e supersolução de (P_t) respectivamente tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω, com $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ sobre $\partial\Omega$. Então existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solução de (P_t) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração: Defina os operadores $N_t : C_0^1(\overline{\Omega}) \to L^\infty(\Omega)$ por

$$N(v) = f(x, v) + \sigma|v|^{p-2}v + t\phi + h, \quad v \in C_0^1(\overline{\Omega})$$

e $T : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ por $T(v) = w$ se, e somente se, w é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w + \sigma|w|^{p-2}w = v, & \text{em} \quad \Omega \\ \quad w = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Defina também $Q_t : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ por $Q_t = T \circ N_t$.

Note que u é um ponto fixo de Q_t se, e somente se, u é uma solução de (P_t). Afirmamos que Q_t é compacto. De fato, como $Q_t = T \circ N_t$ e N_t é contínua, basta mostrar que T é compacto. Com efeito, seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$ e $w_n = T(u_n)$, logo

$$-\Delta_p w_n + \sigma|w_n|^{p-2}w_n = u_n.$$

Pelo Lema 1.1 $w_n \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\|w_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} < C$. Obtemos pela imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ que, a menos de subsequência, $w_n \to w$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, portanto T é compacto.

Agora, defina

$$\mathcal{A} = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)\}.$$

Note que $\mathcal{A}$ é fechado e convexo. Pela hipótese $(f2)$ e pelo princípio de comparação (Proposição 1.2) temos que $Q_t(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, e pelo Lema 1.1 $Q_t(\mathcal{A})$ é limitado. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ que é um ponto fixo de Q_t, ou seja, existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ solução de (P_t) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω. ■

2.3 Estimativas a Priori

Para obtermos a segunda solução usando a teoria do grau, precisamos obter estimativas a priori. Nesta seção começamos encontrando uma estimativa para a parte negativa de u, e depois mostramos que se u é solução de (P_t) para t maior que uma certa constante negativa, então $t \leq C(1 + \|u\|_{\infty}^{p-1})$. Finalmente, provaremos uma estimativa a priori sobre u usando a técnica blow up, introduzida por Gidas-Spruck [44]. Observamos aqui que para usar a técnica blow up precisamos de resultados do tipo Liouville para $\mathbb{R}^N$ e para o semi espaço, os quais tem sido provados por [58] e [54] respectivamente. Para fazer uso desses teoremas, em nossa hipótese $(f3)$ precisamos impor que $p - 1 < \alpha < p^* - \frac{N}{N-p}$. Para facilidade do leitor vamos enunciar esses resultados:

Teorema 2.3 *[58, Teorema III] Suponhamos que g é subcrítica e $g(u) > 0$ para todo $u > 0$. Então toda solução limitada de*

$$\Delta_p u + g(u) = 0, \ \ u \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^N, \ \ 1 < p < N,$$

é trivial.

Teorema 2.4 *[54, Teorema 3.1] Considere o problema*

$$u^m \leq -\Delta_p u \leq C u^m, \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \tag{2.2}$$

onde $C \geq 1$. Suponhamos que $p - 1 < m < p^* - \frac{N}{N-p}$. Então, não existe solução positiva de (2.2) em $C^1(\mathbb{R}^N_+)$.

Para provar a limitação da parte negativa, precisamos do seguinte resultado devido a Ladyzhenskaya e Ural'tseva [51]:

Teorema 2.5 *[51, Teorema 5.1] Suponhamos que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ possui $ess \max_{\partial\Omega} u(x)$ limitado e que para $k \geq \hat{k} \geq ess \max_{\partial\Omega} u(x)$ satisfaz a desigualdade*

$$\int_{A_k} |\nabla u|^p \leq \gamma \left(\int_{A_k} |u - k|^l \right)^{\frac{p}{l}} + \gamma \sum_{i=1}^{M} k^{\alpha_i} (med(A_k))^{1 - \frac{p}{N} + \varepsilon_i},$$

onde $A_k = \{x \in \Omega : \ u(x) \geq k\}$, γ, l, α_i e M são constantes positivas. Suponha também que

$$l \leq \frac{Np}{N-p}, \ \varepsilon_i > 0, \ p \leq \alpha_i < \varepsilon_i q + p.$$

Então, $ess \max_{\Omega} u(x)$ não excede alguma constante que depende de $\gamma, l, \alpha_i, \varepsilon_i$ $(i = 1, ..., M)$, $m, N, \hat{k}, q$, $med(\Omega)$, e ou da norma $\|u\|_{L^1(A_{\hat{k}})}$ (para $q < \frac{Np}{N-p}$) ou da norma $\|u\|_{L^q(A_{\hat{k}})}$ (para $q \geq \frac{Np}{N-p}$).

A seguir, argumentando como [5], provaremos a limitação da parte negativa de uma eventual solução de (P_t):

Teorema 2.6 *Para cada $C_0 \in \mathbb{R}_+$, existe constante $M > 0$ tal que para todo $t \geq -C_0$, se u é solução de (P_t) então $\|u^-\|_\infty \leq M$.*

Demonstração: Seja u uma solução de (P_t). Considerando u^- como uma função teste obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u^- = \int_\Omega (f(x,u) + t\phi + h)u^-.$$

Agora, se $\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) \leq 0\}$, como $\nabla u^- = -\nabla u$ em Ω^- e $u^- = -u$ em Ω^-, temos que

$$\int_{\Omega^-} |\nabla u|^p = \int_{\Omega^-} f(x,u)u + t\phi u + hu.$$

Como f satisfaz $(f1)$ temos que para todo $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \mu)$, existe $C > 0$ grande o suficiente tal que

$$f(x,u)u \leq (\mu + \varepsilon)|u|^p - Cu, \quad \text{para todo } \ u < 0. \tag{2.3}$$

Então,

$$\int_{\Omega^-} |\nabla u|^p \ \ \leq \ \ \int_{\Omega^-} (\mu + \varepsilon)|u|^p - Cu + t\phi u + hu.$$

Assim, pela caracterização variacional de λ_1 e pela desigualdade de Hölder segue que

$$\left(1 - \frac{(\mu+\varepsilon)}{\lambda_1}\right)\int_{\Omega^-} |\nabla u|^p \ \ \leq \ \ \left(\int_{\Omega^-} |-C - C_0\phi + h|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega^-} |u|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

o que implica que existe M_2 independente de $t \geq -C_0$ tal que

$$\|\nabla u^-\|_p^{p-1} \leq M_2. \tag{2.4}$$

Agora, consideremos $\hat{k} = 1$ e para $k \geq \hat{k}$, definimos o conjunto

$$A_k = \{x \in \Omega : u^-(x) > k\},$$

então

$$\int_{A_k} |\nabla u^-|^p = -\int_{A_k} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u^- - k) = -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u^- - k)^+.$$

Como u é uma solução de (P_t) e por (2.3) temos

$$\begin{aligned} & -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u^- - k)^+ \leq -\int_{A_k} (f(x,u) - C_0\phi + h)(u^- - k) \\ \leq \ & \int_{A_k} (\mu+\varepsilon)|u^-|^{p-2}u^-(u^- - k) + \int_{A_k} (C + C_0\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty)(u^- - k) \\ = \ & I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Para o valor de I_2 temos a seguinte estimativa

$$I_2 \leq (C + C_0\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty) \int_{A_k} u^- k^{p-p} := \tilde{\gamma} \int_{A_k} u^- k^{p-p}.$$

Aplicando a desigualdade de Young Generalizada (Lema A.2) para I_1 com $q = \frac{p-1}{p} \in (0,1)$ e $\delta = \frac{\lambda_1}{4(\mu+\varepsilon)} > 0$, e para I_2 com $q = \frac{1}{p} \in (0,1)$ e $\delta = \frac{\lambda_1 k^\gamma}{4\tilde{\gamma}} > 0$ onde $\gamma \in \left(p\left(\frac{N-p^2}{N-p}\right), p\right)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} |\nabla u^-|^p &\leq I_1 + I_2 \\
&\leq \frac{\lambda_1}{4}\int_{A_k} |u^-|^p + \left(\frac{4(\mu+\varepsilon)(p-1)}{p\lambda_1}\right)^{p-1} \frac{\mu+\varepsilon}{p}\int_{A_k} |u^- - k|^p \\
&\quad + \frac{\lambda_1 k^\gamma}{4}\int_{A_k} |u^-|^p k^{-p^2} + \tilde{\gamma}\left(\frac{4\tilde{\gamma}}{p\lambda_1 k^\gamma}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} k^{\frac{p^2}{p-1}} med(A_k).
\end{aligned}$$

Pela caracterização variacional de λ_1, segue

$$\begin{aligned}
\underbrace{\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{k^{\gamma-p^2}}{4}\right)}_{\nu_1} \int_{A_k} |\nabla u^-|^p &\leq \underbrace{\left(\frac{4(\mu+\varepsilon)(p-1)}{p\lambda_1}\right)^{p-1} \frac{\mu+\varepsilon}{p}}_{\nu_2} \int_{A_k} |u^- - k|^p \\
&+ \underbrace{\tilde{\gamma}\left(\frac{4\tilde{\gamma}}{p\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p}}_{\nu_3} med(A_k) k^{\frac{p^2-\gamma}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Segue da definição de γ que $k^{\gamma-p^2} < 1$ para todo $k > \hat{k}$ e então $\nu_1 > \frac{1}{2}$. Temos também que $\nu_2, \nu_3 > 0$. Tomando $\bar{\gamma} = 2\max\{\nu_2, \nu_3\}$, obtemos

$$\int_{A_k} |\nabla u^-|^p \leq \bar{\gamma}\left(\int_{A_k} |u^- - k|^p\right) + \bar{\gamma} k^{\frac{p^2-\gamma}{p-1}} (med(A_k)).$$

Como $1 < p < N$, temos pela imersão de Sobolev e por (2.4) que existe $\bar{C} > 0$ independe de $t \geq -C_0$, onde $\|u^-\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u^-\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \bar{C}$. Pelo Teorema 2.5 com $q = p^*$, $l = p$, $\bar{M} = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{p}{N}$, $\alpha_1 = \frac{p^2-\gamma}{p-1} \in \left(p, p^* \frac{p}{N} + p\right)$ e $\hat{\gamma} = \bar{\gamma}$, obtemos $\|u^-\|_\infty \leq M$, onde M depende somente de $p, \gamma, N, 1, med(\Omega), \bar{C}$. ■

Teorema 2.7 *Para cada $C_0 \in \mathbb{R}_+$, existe constante $C_1 > 0$ tal que para todo $t \geq -C_0$, se u é solução de (P_t) então $t \leq C_1(1 + \|u\|_\infty^{p-1})$.*

Demonstração: Sejam $C_0 \in \mathbb{R}_+$ e $t \geq -C_0$. Se $-C_0 \leq t \leq 0$, então considerando $C_1 \geq 0$ qualquer, temos

$$t \leq C_1 \leq C_1(1 + \|u\|_\infty^{p-1})$$

e o teorema está provado.

Suponhamos que $t > 0$ e seja u solução de (P_t). Pelo Teorema 2.6 temos que $\|u^-\|_\infty \leq M$, assim por $(f2)$ temos

$$f(x,u) + \sigma|u|^{p-2}u \geq f(x,-M) + \sigma|-M|^{p-2}(-M).$$

Defina

$$k_1 = \inf_{\overline{\Omega}} f(x,-M) + \sigma|-M|^{p-2}(-M)$$

(note que k_1 não depende de t). Sejam $\Omega_0 \subset \Omega$ um conjunto compacto e $\delta > 0$ tal que $\phi > \delta$ em Ω_0, então em Ω_0 temos

$$\begin{aligned} -\Delta_p u + \sigma|u|^{p-2}u &= f(x,u) + \sigma|u|^{p-2}u + t\phi + h \\ &> k_1 + t\delta - \|h\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se

$$t \leq 2\left|\frac{-k_1 + \|h\|_\infty}{\delta}\right|, \tag{2.6}$$

então definindo $C_1 = 2\left|\frac{-k_1 + \|h\|_\infty}{\delta}\right|$ segue que $t \leq C_1 \leq C_1(1 + \|u\|_\infty^{p-1})$ e o teorema está provado. Suponhamos agora que t satisfaz a seguinte relação

$$t > 2\left|\frac{-k_1 + \|h\|_\infty}{\delta}\right|.$$

Logo temos que $t\delta > 2|-k_1 + \|h\|_\infty| \geq -k_1 + \|h\|_\infty$ e assim $k_1 - \|h\|_\infty + t\delta > 0$. Seja v solução de

$$-\Delta_p v + \sigma|v|^{p-2}v = 1 \text{ em } \Omega_0, \quad v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_0.$$

Então sendo $\tilde{M} = \frac{M}{(k_1 + t\delta - \|h\|_\infty)^{\frac{1}{p-1}}}$, temos que $z = v - \tilde{M}$ satisfaz, em Ω_0,

$$\begin{aligned} -\Delta_p\, z + \sigma|z|^{p-2}z &= -\Delta_p\, v + \sigma|v - \tilde{M}|^{p-2}(v - \tilde{M}) \\ &\leq -\Delta_p\, v + \sigma|v|^{p-2}v = 1, \end{aligned}$$

e $z = v - \tilde{M} = -\tilde{M}$, sobre $\partial\Omega_0$. Logo definindo $w = (k_1 + t\delta - \|h\|_\infty)^{\frac{1}{p-1}}z$, segue pela desigualdade acima e por (2.5) que

$$\begin{aligned} -\Delta_p w + \sigma|w|^{p-2}w &= (k_1 + t\delta - \|h\|_\infty)(-\Delta_p z + \sigma|z|^{p-2}z) \\ &\leq -\Delta_p u + \sigma|u|^{p-2}u \end{aligned}$$

em Ω_0. Ainda, sobre $\partial\Omega_0$, temos

$$\begin{aligned} w &= (k_1 + t\delta - \|h\|_\infty)^{\frac{1}{p-1}}z = -(k_1 + t\delta - \|h\|_\infty)^{\frac{1}{p-1}}\tilde{M} \\ &= -M \leq u. \end{aligned}$$

Pelo princípio de comparação (Proposição 1.2) obtemos $u \geq w$ em Ω_0. Seja $x_0 \in \Omega_0$ tal que $v(x_0) = \|v\|_{L^\infty(\Omega_0)}$, logo

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &\geq u(x_0) \geq w(x_0) \\ &= (k_1 + t\delta - \|h\|_\infty)^{\frac{1}{p-1}}(v(x_0) - \tilde{M}) \\ &= (k_1 + t\delta - \|h\|_\infty)^{\frac{1}{p-1}}\|v\|_{L^\infty(\Omega_0)} - M, \end{aligned}$$

isto é, pela suposição sob t e o Lema $A.1$

$$t \leq \frac{(\|u\|_\infty + M)^{p-1}}{\delta\|v\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega_0)}} + \frac{\|h\|_\infty - k_1}{\delta} < \frac{C_p(\|u\|^{p-1}_\infty + M^{p-1})}{\delta\|v\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega_0)}} + \frac{t}{2},$$

ou

$$t < \frac{2C_p(\|u\|^{p-1}_\infty + M^{p-1})}{\delta\|v\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega_0)}}. \tag{2.7}$$

Defina

$$C_1 = \max\left\{\frac{2C_p}{\delta\|v\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega_0)}}, \frac{2C_pM^{p-1}}{\delta\|v\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega_0)}}, 2\left|\frac{\|h\|_\infty - k_1}{\delta}\right|\right\},$$

onde $C_p = 1$ se $p-1 \leq 1$ e $C_p = 2^{p-1}$ se $p-1 > 1$. Então por (2.6) e (2.7) temos $t \leq C_1(1 + \|u\|^{p-1}_\infty)$, o que conclui a prova. ∎

Aplicaremos agora a técnica blow up para obter uma estimativa da norma $L^\infty(\Omega)$ de uma eventual solução de (P_t) em função do parâmetro t.

Teorema 2.8 *Existe uma constante C_2 tal que para todo $t \geq 1$ e para toda solução u de (P_t) temos $\|u\|_\infty \leq C_2 t^{\frac{1}{\alpha}}$.*

Demonstração: Consideremos $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,s) = f(x,s) - a(x)(s^+)^\alpha.$$

Notemos que g é contínua e por $(f3)$ temos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{|g(x,s)|}{s^\alpha} = 0. \tag{2.8}$$

Suponhamos que a conclusão do teorema é falsa, então existem sequências $\{t_n\}$ tal que $t_n \geq 1$ e $\{u_n\}$ solução de (P_{t_n}) tais que

$$\|u_n\|^\alpha_\infty > nt_n. \tag{2.9}$$

Como u_n é solução de (P_{t_n}), segue da definição de g que

$$-\Delta_p u_n = a(x)(u_n^+)^\alpha + g(x,u_n) + t_n\phi + h. \tag{2.10}$$

Pelo Teorema 2.6 temos que $\|u_n^-\|_\infty \leq M$, assim $\|u_n^+\|_\infty = \|u_n\|_\infty$ para $n \geq n_0$ grande o suficiente. Defina $\lambda_n = \|u_n\|_\infty^{-\frac{1}{q}}$, onde $q = \frac{p}{\alpha-(p-1)} > 0$. Então obtemos

$$\lambda_n = \|u_n\|_\infty^{-\frac{1}{q}} \leq (nt_n)^{-\frac{1}{q\alpha}} \leq n^{-\frac{1}{q\alpha}} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Sem perda de generalidade vamos supor que $\lambda_n^q < 1$ para $n \geq n_0$. Considere também, para $n \geq n_0$ a função v_n definida por

$$v_n(x) = \lambda_n^q u_n(\lambda_n x + x_n) + M,$$

onde $u_n(x_n) = \|u_n^+\|_\infty = \|u_n\|_\infty$. Assim, para $n \geq n_0$,

$$v_n(0) = 1 + M \text{ e } 0 \leq v_n(x) \leq 1 + M.$$

Por outro lado, (2.10) e um cálculo direto mostram que v_n satisfaz

$$\begin{aligned} -\Delta_p v_n(x) &= \lambda_n^{q(p-1)+p} a(y_n)(u_n^+(y_n))^\alpha + \lambda_n^{q(p-1)+p} t_n \phi(y_n) \\ &\quad + \lambda_n^{q(p-1)+p}[g(y_n, u_n(y_n)) + h(y_n)] \\ &= \lambda_n^{q(p-1)+p-q\alpha} a(y_n)[v_n(x) - M + {\lambda_n}^q u_n^-(y_n)]^\alpha + \lambda_n^{q(p-1)+p} t_n \phi(y_n) \\ &\quad + \lambda_n^{q(p-1)+p}[g(y_n, u_n(y_n)) + h(y_n)], \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $y_n = \lambda_n x + x_n$ para $x \in \Omega_n = \frac{\Omega - x_n}{\lambda_n}$ e $n \geq n_0$.

Agora, observe que pela definição de q temos $q(p-1) + p - q\alpha = 0$. Além disso, por (2.9),

$$\lambda_n^{q(p-1)+p} t_n = \|u_n\|_\infty^{-\alpha} t_n \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, como $\phi \in L^\infty(\Omega)$, temos que $\lambda_n^{q(p-1)+p} t_n \phi \to 0$ quando $n \to \infty$. Ainda,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{q(p-1)+p}[g(y_n, u_n(y_n)) + h(y_n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{g(\lambda_n x + x_n, u_n(\lambda_n x + x_n))}{\|u_n\|_\infty^\alpha},$$

visto que $h \in L^\infty(\Omega)$. Agora, sabemos que $\{u_n(\lambda_n x + x_n)\}$ é limitada inferiormente pelo Teorema 2.6. Se $\{u_n(\lambda_n x + x_n)\}$ é limitada superiormente, para todo $x \in \Omega_n$ e $n \in \mathbb{N}$, então desde que g é contínua, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(\lambda_n x + x_n, u_n(\lambda_n x + x_n))}{\|u_n\|_\infty^\alpha} = 0.$$

Se $\{u_n(\lambda_n x + x_n)\}$ não é limitado superiormente, então existe $\{\tilde{x}_n\} \subset \Omega_n$ tal que $u_n(\lambda_n \tilde{x}_n + x_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como $\alpha > 0$, pela definição de $\{x_n\}$ temos que $(u_n(\lambda_n \tilde{x}_n + x_n))^\alpha \leq (u_n(x_n))^\alpha$ e então por (2.8),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|g(\lambda_n \tilde{x}_n + x_n, u_n(\lambda_n \tilde{x}_n + x_n))|}{\|u_n\|_\infty^\alpha} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|g(\lambda_n \tilde{x}_n + x_n, u_n(\lambda_n \tilde{x}_n + x_n))|}{(u_n(\lambda_n \tilde{x}_n + x_n))^\alpha} = 0.$$

Sendo $\overline{\Omega}$ compacto, temos que, a menos de subsequência, $x_n \to x_0 \in \overline{\Omega}$. Pelos teoremas de regularidade em [59, 60] para o operador $p-$Laplaciano, podemos obter estimativas sobre

$\{v_n\}$ assegurando-se que, a menos de uma sequência, $v_n \to v$ localmente uniformemente, com $v \in C^1(\mathcal{G})$ e v satisfaz

$$-\Delta_p v = a(x_0)(v - M)^\alpha \quad \text{em} \ \ \mathcal{G},$$

onde $\mathcal{G} = \mathbb{R}^N$, se $x_0 \in \Omega$ ou $\mathcal{G} = \mathbb{R}^N_+$, se $x_0 \in \partial\Omega$.

Como $v_n(x) - M + {\lambda_n}^q u_n^-(y_n) = {\lambda_n}^q u_n^+(y_n) \geq 0$, para todo $x \in \Omega_n$, com $n \geq n_0$ e $v_n(\cdot) - M + {\lambda_n}^q u_n^-(\lambda_n \cdot + x_n) \to v - M$ localmente uniformemente, temos que $v - M \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{G}$. Assim, definindo $w = v - M$, temos que $w \in C^1(\mathcal{G})$, $w(0) = 1$ e $w(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{G}$. Além disso, w satisfaz

$$-\Delta_p w = a(x_0) w^\alpha \quad \text{em} \ \ \mathcal{G}.$$

Se $\mathcal{G} = \mathbb{R}^N$, pelo Teorema 2.3 temos que $w \equiv 0$, o que é uma contradição com o fato que $w(0) = 1$. E se $\mathcal{G} = \mathbb{R}^N_+$, da mesma forma, obtemos uma contradição com o Teorema 2.4. Assim concluímos a demonstração. ■

Observação 2.1 *Como $t\phi = t^+\phi - t^-\phi$, podemos considerar $\tilde{h} = h - t^-\phi$ e supor $t > 0$, assim repetindo a demonstração do Teorema 2.8 substituindo t por $\max\{t, 1\}$, obtemos o seguinte resultado: Para cada $C_0 \in \mathbb{R}_+$, existe uma constante $C_2 > 0$ de forma que para todo $t \geq -C_0$ e para toda solução de (P_t) com este t temos $\|u\|_\infty^\alpha \leq C_2 \max\{t, 1\}$.*

Do Teorema 2.7 e da Observação 2.1 obtemos os seguintes resultados a respeito da norma $L^\infty(\Omega)$ de u e de t:

Teorema 2.9 *Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existem $\tilde{R}, \bar{R} > 0$ tais que para todo $t \geq t_0$, se u é uma solução de (P_t) então $\|u\|_\infty \leq \tilde{R}$ e $t \leq \bar{R}$.*

Demonstração: Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ e defina $C_0 = t_0^- \geq 0$. Segue do Teorema 2.7 que para todo $t \geq t_0 \geq -t_0^- = -C_0$, se u é uma solução de (P_t) então $t \leq C_1(1 + \|u\|_\infty^{p-1})$. Pela Observação 2.1 temos que

$$t \leq C_1(1 + \|u\|_\infty^{p-1}) \leq C_1(1 + (C_2 \max\{1, t\})^{\frac{p-1}{\alpha}}).$$

Se $t \geq 1$, então $t \leq C_1(1 + (C_2 t)^{\frac{p-1}{\alpha}})$. Como $\frac{p-1}{\alpha} < 1$ temos que t é limitado, ou seja, existe $\bar{R} > 1$ tal que $t \leq \bar{R}$. Como $\|u\|_\infty^\alpha \leq C_2 \max\{1, t\} \leq \bar{R} C_2$, definindo $\tilde{R} = (\bar{R} C_2)^{\frac{1}{\alpha}}$ concluímos o resultado. ■

Ainda, como consequência deste teorema obtemos uma limitação das soluções na norma $C^1(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.10 *Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existem $R, \bar{R} > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$, se u é uma solução de (P_t) então $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq R$ e $t \leq \bar{R}$.*

Demonstração: Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, seja $C_0 = t_0^- \geq 0$. Pelos Teoremas 2.6 e 2.9 temos que se u é uma solução de (P_t) então $\|u^-\|_\infty < M$, $\|u\|_\infty < \tilde{R}$ e $t < \bar{R}$. Agora, sendo u uma solução de (P_t) temos

$$-\Delta_p u = f(x, u) + t\phi + h.$$

Como $u \in [-M, \tilde{R}]$, temos $|f(x,u)| \leq R_1$ para $(x,u) \in \overline{\Omega} \times [-M, \tilde{R}]$ e então segue que $d(x,u) = f(x,u) + t\phi + h$ é uma função Caratheodory que satisfaz

$$|d(x,u)| \leq R_1 + \bar{R}\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty = R_2.$$

Assim pelo Lema 1.1 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $0 \leq \alpha < 1$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C = C(R_2)$. Defina $R = C(R_2)$. ■

2.4 Segunda Solução

Como dito anteriormente, aplicando a teoria do grau de Leray-Schauder, completaremos a prova do Teorema 2.1 encontrando outra solução de (P_t).

Denotemos

$$\mathcal{S} = \{t \in \mathbb{R} : (P_t) \text{ possui ao menos uma supersolução}\}.$$

Pela Proposição 2.2, temos que existe $\underline{t} \in \mathbb{R}$ tal que $(P_{\underline{t}})$ tem uma supersolução e para todo $t \leq \underline{t}$, (P_t) tem uma supersolução, logo $\mathcal{S}$ é não vazio e se $t \in \mathcal{S}$ então $(-\infty, t] \subset \mathcal{S}$. Definimos ainda

$$\mathcal{S}_1 = \{t \in \mathbb{R} : (P_t) \text{ possui ao menos uma solução}\}.$$

Obviamente $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$. Além disso, se $t \in \mathcal{S}$, então (P_t) tem uma supersolução $\bar{u}$. Segue da Proposição 2.1 que existe subsolução $\underline{u}$ tal que $\underline{u} \ll \bar{u}$. Logo, pelo Teorema 2.2 existe u solução de (P_t) com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ e portanto $t \in \mathcal{S}_1$. Assim $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$. Pelo Teorema 2.9 obtemos que (P_t) não tem solução para todo $t \geq \bar{R}$, logo $\mathcal{S}$ é limitado superiormente e podemos definir

$$t^* = \sup_{\mathcal{S}} t.$$

Segue da definição de supremo que para todo $t \geq t^*$, (P_t) não tem solução e portanto provamos o item *iii)* do Teorema 2.1.

Agora mostraremos *ii)*. Da definição de supremo existe $\{t_n\} \subset \mathcal{S}$ tal que $t_n \to t^*$. Sem perda de generalidade podemos assumir que t_n é crescente. Como $t_n \in \mathcal{S}$, existe u_n solução de (P_{t_n}), isto é, para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega (f(x,u_n) + t_n\phi + h)\varphi. \tag{2.12}$$

Considerando $t_0 = t_1$ (o primeiro elemento da sequência acima), temos pelos Teoremas 2.6 e 2.10 que $u_n \in [-M, R]$, logo $|f(x,u_n)| \leq K$. Ainda, pelo Teorema 2.10, segue

$$|f(x,u_n) + t_n\phi + h| \leq K + \bar{R}\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty \leq \bar{M},$$

logo pelo Lema 1.1 segue que $\{u_n\}$ é limitado em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e portanto possui uma subsequência convergente $u_{n_k} \to u^*$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $0 \leq \beta < \alpha$. Assim, tomando limite quando $n_k \to \infty$ em (2.12) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u^*|^{p-2}\nabla u^* \nabla\varphi = \int_\Omega (f(x,u^*) + t^*\phi + h)\varphi,$$

isto é, u^* é solução de (P_{t^*}). Assim, $t^* \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} = (-\infty, t^*]$, o que conclui o item *ii)*.

Provaremos agora o item *i)*. Seja u^* solução de (P_{t^*}) e defina

$$\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R} : (P_t) \text{ possui ao menos uma supersolução } \bar{u} \ll u^*\}.$$

Segue da Proposição 2.2 que $\mathcal{T}$ é um intervalo não vazio que é ilimitado inferiormente. Seja $t_0 \in \mathcal{T}$. Mostremos que (P_{t_0}) possui ao menos duas soluções. Como $t_0 \in \mathcal{T}$, temos que existe $\bar{u}$ supersolução de (P_{t_0}) tal que $\bar{u} \ll u^*$. Dessa forma, a Proposição 2.1 e o Teorema 2.2 nos dão uma solução u_0 de (P_{t_0}). Tomando uma menor subsolução, se necessário, u_0 verifica $\underline{u} \ll u_0 \leq \bar{u} \ll u^*$.

Agora, definimos

$$\mathcal{D} = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : \; \underline{u} < u < u^*, \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} < \frac{\partial u^*}{\partial \nu}, \quad \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < R_0\},$$

onde R_0 será definido mais tarde. Consideremos também

$$\tilde{f}(x,\xi) = \begin{cases} f(x,\underline{u}) + \sigma|\underline{u}|^{p-2}\underline{u}, & \xi \leq \underline{u} \\ f(x,\xi) + \sigma|\xi|^{p-2}\xi, & \underline{u} \leq \xi \leq u^* \\ f(x,u^*) + \sigma|u^*|^{p-2}u^*, & \xi \geq u^* \end{cases}$$

e $\tilde{Q}_t : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definida por $\tilde{Q}_t(v) = w$ se, e somente se, w é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w + \sigma|w|^{p-2}w = \tilde{f}(x,v) + t\phi + h, & \text{em} \quad \Omega \\ w = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Por demonstração análoga ao Teorema 2.2 temos que $\tilde{Q}_t$ é compacto. Como $\tilde{f}$ é limitada temos que as soluções da equação acima são uniformemente limitadas em $C_0^1(\overline{\Omega})$ e então podemos definir $R_0 > \sup\{\|\tilde{Q}_{t_0}(v)\|_{C^1(\overline{\Omega})} : v \in C_0^1(\overline{\Omega})\}$.

Mostraremos que $\tilde{Q}_{t_0}(\bar{\mathcal{D}}) \subset \bar{\mathcal{D}}$. De fato, seja $v \in \bar{\mathcal{D}}$ e considere $w = \tilde{Q}_{t_0}(v)$. Como $\tilde{f}$ é não decrescente e $t_0 \leq t^*$, temos que

$$-\Delta_p w + \sigma|w|^{p-2}w = \tilde{f}(x,v) + t_0\phi + h \leq \tilde{f}(x,u^*) + t_0\phi + h \leq -\Delta_p u^* + \sigma|u^*|^{p-2}u^*.$$

Pelo princípio de comparação (Proposição 1.2), $w \leq u^*$. Mostraremos que $\frac{\partial w}{\partial \nu} \leq \frac{\partial u^*}{\partial \nu}$. Suponha por contradição que $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x) > \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x)$ para algum $x \in \partial\Omega$. Como ν é um vetor normal interno e $w(x) = u^*(x) = 0$, temos

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x) < \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{w(x+\lambda\nu) - w(x)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{u^*(x+\lambda\nu) - u^*(x)}{\lambda} = \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x),$$

o que é uma contradição. Assim $\frac{\partial w}{\partial \nu} \leq \frac{\partial u^*}{\partial \nu}$. Analogamente obtemos $\underline{u} \leq w$ e $\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \leq \frac{\partial w}{\partial \nu}$. Pela definição de R_0 segue que $w \in \bar{\mathcal{D}}$.

Além disso se Q_t é dado pelo Teorema 2.2, temos que $\tilde{Q}_t = Q_t$ em $\bar{\mathcal{D}}$, u é uma solução de (P_t) se, e somente se, u é um ponto fixo de Q_t e $u_0 \in \mathcal{D}$. Se a fronteira de $\mathcal{D}$ contém uma solução de (P_{t_0}) então a prova está completa. Suponha que $\partial\mathcal{D}$ não contém soluções de (P_{t_0}).

Sejam $\psi \in \mathcal{D}$ e $H_\lambda = H : [0,1] \times \bar{\mathcal{D}} \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definida por

$$H(\lambda, u) = \lambda Q_{t_0}(u) + (1-\lambda)\psi.$$

Note que $\mathcal{D}$ é um conjunto aberto, limitado e convexo. Dessa forma, como $Q_{t_0}(\bar{\mathcal{D}}) \subset \bar{\mathcal{D}}$, temos que $H(\lambda, v) \in \mathcal{D}$, para todo $\lambda \in [0,1)$. Então temos que $0 \notin (I - H(\lambda, \cdot))(\partial\mathcal{D})$, para todo $\lambda \in [0,1]$ pois se isso ocorresse, teríamos $H(\lambda_0, v) = v$, para algum $v \in \partial\mathcal{D}$ e algum para todo $\lambda \in [0,1)$. Agora, $H(\lambda, v) \in \mathcal{D}$, para todo $\lambda \in [0,1)$, e para $\lambda = 1$ teríamos que $H(1,v) = v$, para $v \in \partial\mathcal{D}$, o que é uma contradição desde que $\partial\mathcal{D}$ não contém soluções de (P_{t_0}). Portanto $deg(I - H_\lambda, \mathcal{D}, 0)$ está bem definido. Pela invariância homotópica temos

$$deg(I-\psi, \mathcal{D}, 0) = deg(I - H_0, \mathcal{D}, 0) = deg(I - H_1, \mathcal{D}, 0) = deg(I - Q_{t_0}, \mathcal{D}, 0).$$

Agora, tome $y(\lambda) = \lambda\psi$ e $\bar{H}_\lambda = \bar{H} : [0,1] \times \bar{\mathcal{D}} \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definida por

$$\bar{H}(\lambda, u) = (1-\lambda)\psi,$$

novamente pela invariância homotópica temos

$$deg(I-\psi, \mathcal{D}, 0) = deg(I - \bar{H}_0, \mathcal{D}, y(0)) = deg(I - \bar{H}_1, \mathcal{D}, y(1)) = deg(I, \mathcal{D}, \psi).$$

Portanto segue que

$$deg(I - Q_{t_0}, \mathcal{D}, 0) = 1.$$

Mostraremos que para $r \in \mathbb{R}$ grande o suficiente, temos que $deg(I - Q_{t_0}, B_r(0), 0) = 0$. Para t_0, sejam $\bar{R}, R > 0$ dados pelo Teorema 2.10. Considere $r > R$, $\hat{t} > \bar{R}$ e defina

$$\tilde{H}_t = \tilde{H} : [t_0, \hat{t}] \times B_r(0) \to C_0^1(\overline{\Omega}) \ \text{ por } \ \tilde{H}(t,u) = Q_t(u).$$

Note que $\tilde{H}$ é compacto e $0 \notin (I - \tilde{H}(t,\cdot))(\partial B_r(0))$, para todo $t \in [t_0, \hat{t}]$ (pois caso contrário existe $v \in \partial B_r(0)$ tal que $Q_t(v) = \tilde{H}(t,v) = v$, para algum $t \in [t_0, \hat{t}]$, e então v é uma solução de (P_t) com $\|v\| = r > R$, o que é uma contradição já que para todo $t \geq t_0$, as soluções de (P_t) são limitadas superiormente por R). Pela invariância homotópica temos

$$deg(I - \tilde{H}_{t_0}, B_r(0), 0) = deg(I - \tilde{H}_{\hat{t}}, B_r(0), 0) = 0,$$

desde que pelo Teorema 2.10, para $t > \bar{R}$ (P_t) não tem solução.

Pela propriedade da excisão do grau,

$$0 = deg(I - Q_{t_0}, B_r(0), 0) = deg(I - Q_{t_0}, \mathcal{D}, 0) + deg(I - Q_{t_0}, B_r(0) \setminus \mathcal{D}, 0),$$

logo $deg(I - Q_{t_0}, B_r(0) \setminus \mathcal{D}, 0) \neq 0$, isto é, existe $v \in B_r(0) \setminus \mathcal{D}$ solução de (P_{t_0}) e dessa forma (P_{t_0}) possui duas soluções. Assim temos que para $t \in \mathcal{T}$, existe pelo menos duas soluções para (P_t). Consideremos

$$t_* = \sup_{\mathcal{T}} t.$$

Logo temos que para todo $t < t_*$, (P_t) tem ao menos duas soluções, concluindo a prova do teorema.

Capítulo 4

Problema do tipo Ambrosetti-Prodi para um sistema envolvendo o operador $p-$Laplaciano

4.1 Introdução

Consideremos o seguinte sistema

$$(S_t) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u_1 &= & f_1(x,u_1,u_2)+t_1\phi_1+h_1, & \text{em} & \Omega \\ -\Delta_p u_2 &= & f_2(x,u_1,u_2)+t_2\phi_2+h_2, & \text{em} & \Omega \\ u_1=u_2=0, & & & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado, $\phi_i, h_i \in L^\infty(\Omega)$, com $\phi_i \succ 0$, $i=1,2$, $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ é um parâmetro e f_i, $i=1,2$ são funções contínuas satisfazendo as condições $(H1)-(H5)$ descritas na Introdução.

O sistema (S_t) pode ser reescrito na forma matricial

$$-\Delta_p u = f(x,u)+t\phi+h, \text{ em } \Omega \quad u=0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $u=(u_1,u_2)^T$, $h=(h_1,h_2)^T$, $f(x,u)=(f_1(x,u_1,u_2),f_2(x,u_1,u_2))^T$ e $t\phi=(t_1\phi_1,t_2\phi_2)^T$.

Como já sabemos este problema também pertence a classe de problemas do tipo Ambrosetti-Prodi. Para o caso de sistemas temos os trabalhos de [37, 38, 56] que tratam os problemas variacionalmente, e os trabalhos de [22, 36, 32] que utilizam argumentos topológicos, trabalhos esses que estudam operadores lineares de segunda ordem uniformemente elípticos. Para o caso de sistemas envolvendo o operador $p-$Laplaciano, $p\neq 2$, não conhecemos nenhum resultado.

Como já explicado, neste capítulo vamos nos basear nos trabalhos de [32] e [37] para provar o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Suponha que $(H1)-(H5)$ ocorrem. Então existem curvas Lipschitzianas Γ^* e Γ_* que dividem $\mathbb{R}^2$ em três conjuntos disjuntos $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{O}$ tais que o problema (S_t):*

i) *possui ao menos duas soluções para* $t \in \mathcal{M}$*,*

ii) *possui ao menos uma solução para* $t \in \Gamma^* \cup \Gamma_* \cup \mathcal{O}$*,*

iii) *não possui solução para* $t \in \mathcal{N}$*.*

Assim como no Capítulo 3, para provarmos o Teorema 4.1, faremos uso do método de sub e supersolução para obter a primeira solução e teoria do grau para a segunda. Também precisaremos das estimativas a priori, analogamente a Seção 3.3. A limitação da parte negativa será provada com o auxílio do Teorema 2.3 e a limitação da solução usa fortemente a hipótese $(H4)$.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 encontramos a primeira solução. A Seção 3 é destinada a obter as estimativas a priori para as eventuais soluções de (S_t) e na Seção 4 aplicamos a teoria do grau de Leray Schauder para obter a segunda solução.

4.2 Primeira Solução

Com o objetivo de obter a primeira solução vamos utilizar o método de sub-super solução. Para isso começamos obtendo um resultado a respeito da existência de uma sub-solução:

Proposição 4.1 *Para todo* $w = (w_1, w_2) \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, *existe* $\underline{u} = (\underline{u_1}, \underline{u_2}) \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ *subsolução de* (S_t) *tal que* $\underline{u} \ll w$*.*

Demonstração: Sejam $w \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ fixos, mas arbitrários. Seja $u \in (W_0^{1,p}(\Omega))^2$ solução de

$$-\Delta_p u = A_1 \Psi_p(u) - d_1 e + t\phi + h, \text{ em } \Omega \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

onde sem perda de generalidade tomamos $d_1 > 0$ grande suficiente para $-d_1 + t_i\phi_i + h_i < 0$, para $i = 1, 2$. (como $-d_1 + t_i\phi_i + h_i \in L^{p'}(\Omega)$, para $i = 1, 2$, A_1 é uma matriz cooperativa e $(\lambda_1 I - A_1)$ é uma M-matriz não singular (veja Definição 1.2), a existência de tal solução é garantida pelo Teorema 3 de [14].)

Afirmação 4.1 *Podemos tomar* d_1 *grande suficiente para que* $u \ll w$*.*

De fato, seja $\{d_1^n\}$ sequência tal que $d_1^n \to \infty$ (sem perda de generalidade assuma que $d_1^n > 1$) e $\{u^n\}$ uma sequência de soluções de

$$-\Delta_p u^n = A_1 \Psi_p(u^n) - d_1^n \bar{e} + t\phi + h, \text{ em } \Omega \quad u^n = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{4.1}$$

Logo, se $v^n = \dfrac{u^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}} = \left(\dfrac{u_1^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}}, \dfrac{u_2^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}} \right)$, então v^n é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p v_1^n &= a_{11}\psi_p(v_1^n) + a_{12}\psi_p(v_2^n) - 1 + \frac{t_1\phi_1 + h_1}{d_1^n}, \quad \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta_p v_2^n &= a_{21}\psi_p(v_1^n) + a_{22}\psi_p(v_2^n) - 1 + \frac{t_2\phi_2 + h_2}{d_1^n}, \quad \text{em} \quad \Omega \\ v_1^n = v_2^n = 0, & \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, note que

$$\left|\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\psi_p(v_j^n) - 1 + \frac{t_i\phi_i + h_i}{d_1^n}\right| \leq M_i(|v_1^n|^{p-1} + |v_2^n|^{p-1} + 1), \quad \text{para} \;\; i = 1, 2,$$

com $M_i = M_i(a_{i1}, a_{i2}, t_i, \phi_i, h_i)$. Pelo Teorema 1.3 temos $(v_1^n, v_2^n) \in (C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$ para algum $0 < \alpha < 1$, e $\|(v_1^n, v_2^n)\|_{(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2} \leq M$, onde $M = M(M_1, M_2)$. Logo, pela imersão compacta $(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2 \hookrightarrow (C^{1,\beta}(\overline{\Omega}))^2$, $0 \leq \beta < \alpha$ temos que, a menos de subsequência, $(v_1^n, v_2^n) \to (v_1, v_2)$ em $(C^{1,\beta}(\overline{\Omega}))^2$. Pelo Lema 1.2 segue que $(v_1^n, v_2^n) \to (v_1, v_2)$, a qual é solução de

$$\left\{\begin{array}{rclll} -\Delta_p\, v_1 & = & a_{11}\psi_p(v_1) + a_{12}\psi_p(v_2) - 1, & \text{em} & \Omega \\ -\Delta_p\, v_2 & = & a_{21}\psi_p(v_1) + a_{22}\psi_p(v_2) - 1, & \text{em} & \Omega \\ v_1 = v_2 = 0, & & & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.6) segue que $v_i \leq 0$, $i = 1, 2$. Considerando cada equação separadamente e sabendo que $a_{ij} > 0$ para $i \neq j$, obtemos, aplicando o Princípio do Máximo de Vázquez (Proposição 1.4) com $\beta(s) = -a_{ii}\psi_p(s)$ para a i-ésima equação, $i = 1, 2$, que $v \ll 0$.

Como $v^n = \frac{u^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}} \to v \ll 0$, temos que $u_i^n < 0$, $\frac{\partial u_i^n}{\partial \nu} < 0$ e ainda $\frac{\partial u_i^n}{\partial \nu}$, $u_i^n \to -\infty$ quando $n \to \infty$.

Sendo $w_i, u_i^n \in C_0^1(\overline{\Omega})$, temos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_1^{n_1} < w_1$ e $\frac{\partial u_1^{n_1}}{\partial \nu} < \frac{\partial w_1}{\partial \nu}$. Analogamente existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $u_2^{n_2} < w_2$ e $\frac{\partial u_2^{n_2}}{\partial \nu} < \frac{\partial w_2}{\partial \nu}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e tal que $d_1^{n_0} > b_1$, onde b_1 é dado pela hipótese $(H4)$. Então, como $(u_1^{n_0}, u_2^{n_0})$ é solução de (4.1) temos para $i = 1, 2$,

$$\begin{array}{rcl} -\Delta_p u_i^{n_0} & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\psi_p(u_j^{n_0}) - b_1^{n_0} + t_i\phi_i + h_i \\ & < & \displaystyle\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\psi_p(u_j^{n_0}) - b_1 + t_i\phi_i + h_i \\ & \leq & f_i(x, u^{n_0}) + t_i\phi_i + h_i \end{array}$$

isto é $\underline{u} = (u_1^{n_0}, u_2^{n_0})$ é subsolução de (S_t) que satisfaz $\underline{u} \ll w$. ■

Proposição 4.2 *Dado $w \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$, existe $\bar{t} \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $t \leq \bar{t}$, existe uma supersolução $\overline{u} \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ para (S_t) com $\overline{u} \ll w$.*

Demonstração: Fixe um conjunto aberto Ω_0 tal que $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Defina

$$M_i > \max_{x \in \overline{\Omega}, s \in [-1,0]^2} |f_i(x, s)| + \|h\|.$$

Para cada $n > 0$, seja $u^n = (u_1^n, u_2^n) \in (W_0^{1,p}(\Omega))^2$ solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rclll} -\Delta_p\, u_1^n & = & -\sigma|u_1^n|^{p-2}u_1^n + g_1^n(x), & \text{em} & \Omega \\ -\Delta_p\, u_2^n & = & -\sigma|u_2^n|^{p-2}u_2^n + g_2^n(x), & \text{em} & \Omega \\ u_1^n = u_2^n = 0, & & & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{array}\right.$$

onde σ é dado pela hipótese $(H2)$ e

$$g_i^n(x) = \begin{cases} -n^{p-1}, & x \in \Omega_0 \\ M_i, & x \in \Omega \backslash \Omega_0. \end{cases}$$

(Temos pelo Teorema 3 de [14] que existe tal solução).
Notemos que $\frac{g_i^n}{n^{p-1}} \to -\chi_{\Omega_0}$ em $L^\infty(\Omega)$, quando n tende a ∞, $i = 1, 2$, onde χ_{Ω_0} é a função característica de Ω_0. Definimos agora $v^n = (v_1^n, v_2^n) = \left(\frac{u_1^n}{n}, \frac{u_2^n}{n}\right)$. Pelo Lema 1.2, temos que a sequência $v^n \to v$ em $(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$, $0 < \alpha < 1$, onde v é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p v_1 &= -\sigma|v_1|^{p-2}v_1 - \chi_{\Omega_0}, & \text{em} & \Omega \\ -\Delta_p v_2 &= -\sigma|v_2|^{p-2}v_2 - \chi_{\Omega_0}, & \text{em} & \Omega \\ v_1 = v_2 = 0, & & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.6 e o Princípio do Máximo de Vázquez temos que $v \ll 0$. Fazendo raciocínio análogo ao da Afirmação da Proposição 4.1 obtemos que para n_0 grande o suficiente, $u^{n_0} \ll w$ e $u^{n_0} < 0$ em Ω. Podemos assumir que $u^{n_0} \in (-1, -\infty)^2$ em Ω_0.

Definimos $\bar{u} = u^{n_0}$ e $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ por

$$\bar{t}_i < -\frac{(n_0^{p-1} + \max_{x\in\overline{\Omega}, s\in[\min \bar{u}, -1]^2} |f_i(x,s)| + \|h\|)}{\inf_{\bar{u}^{-1}((-\infty,-1]^2)} \phi_i}.$$

Considerando que, como $\phi_i \succ 0$, $\inf_{\bar{u}^{-1}((-\infty,-1]^2)} \phi_i > 0$ (aqui o ínfimo é considerado em sua forma essencial). Mostraremos que $\bar{u}$ é supersolução de $(S_{\bar{t}})$. Para $x \in \Omega$ existem três possibilidades:

1) $-1 \le \bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x) \le 0$,

2) $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x) \le -1$,

3) $\bar{u}_i(x) \le -1 \le \bar{u}_j(x) \le 0$, para algum $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.

Como $u^{n_0} \in (-\infty, -1)^2$ em Ω_0, temos que $x \in \Omega\backslash\Omega_0$ no primeiro e terceiro caso, e $x \in \Omega_0$ no segundo caso. Assim, no primeiro caso temos, para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} & f_i(x, \bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) + \bar{t}_i\phi_i(x) + h_i(x) \\ < \;& M_i \le M_i - \sigma|\bar{u}_i|^{p-2}\bar{u}_i = g_i^{n_0} - \sigma|\bar{u}_i|^{p-2}\bar{u}_i \\ = \;& -\Delta_p\bar{u}_i. \end{aligned}$$

No segundo caso, pela definição de $\bar{t}$, temos, para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} & f_i(x, \bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) + \bar{t}_i\phi_i(x) + h_i(x) \\ & \le \max_{x\in\overline{\Omega}, s\in[\min \bar{u}, -1]^2} f_i(x,s) + \bar{t}_i \inf_{\bar{u}^{-1}((-\infty,-1])} \phi_i + \|h\| \\ & < -n_0^{p-1} \le -n_0^{p-1} - \sigma|\bar{u}_i|^{p-2}\bar{u}_i = g_i^{n_0} - \sigma|\bar{u}_i|^{p-2}\bar{u}_i \\ & = -\Delta_p\bar{u}_i. \end{aligned}$$

No terceiro caso, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\bar{u}_2 \leq -1 \leq \bar{u}_1 \leq 0$. Pela hipótese $(H3)$ temos

$$\begin{aligned} & f_1(x, \bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) + \bar{t}_1\phi_1(x) + h_1(x) \\ \leq\ & f_1(x, \bar{u}_1(x), \bar{u}_1(x)) + \bar{t}_1\phi_1(x) + h_1(x) \\ <\ & M_1 \leq M_1 - \sigma|\bar{u}_1|^{p-2}\bar{u}_1 = g_1^{n_0} - \sigma|\bar{u}_1|^{p-2}\bar{u}_1 \\ =\ & -\Delta_p \bar{u}_1. \end{aligned}$$

e pela hipótese $(H2)$,

$$\begin{aligned} & f_2(x, \bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) + \sigma|\bar{u}_2(x)|^{p-2}\bar{u}_2(x) + \bar{t}_2\phi_2(x) + h_2(x) \\ \leq\ & f_2(x, \bar{u}_1(x), \bar{u}_1(x)) + \sigma|\bar{u}_1(x)|^{p-2}\bar{u}_1(x) + \bar{t}_2\phi_2(x) + h_2(x) \\ \leq\ & M_2 + \sigma|\bar{u}_1(x)|^{p-2}\bar{u}_1(x) \leq M_2 = g_2^{n_0}, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$f_2(x, \bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) + \bar{t}_2\phi_2(x) + h_2(x) \leq g_2^{n_0} - \sigma|\bar{u}_2(x)|^{p-2}\bar{u}_2(x) = -\Delta_p \bar{u}_2.$$

Portanto $\bar{u}$ is supersolução de $(S_{\bar{t}})$ e para todo $t \leq \bar{t}$, $\bar{u}$ é supersolução de (S_t) com $\bar{u} \ll w$, o que conclui a demonstração. ∎

O próximo resultado é o método de sub e supersolução, que foi demonstrado no Capítulo 3, Teorema 2.2, para o caso escalar, o qual faremos agora para sistemas.

Teorema 4.2 *Sejam $\underline{u}, \overline{u} \in (C^1(\overline{\Omega}))^2$ sub e supersolução de (S_t) respectivamente tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω, com $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ sobre $\partial\Omega$. Então existe $u \in (C^1(\overline{\Omega}))^2$ solução de (S_t) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração: Consideremos os operadores

$$N_t : (C_0^1(\overline{\Omega}))^2 \to (L^\infty(\Omega))^2 \ \text{ e } \ T : (L^\infty(\Omega))^2 \to (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$$

definidos para cada $i = 1, 2$, por

$$N(v) = (N_1(v), N_2(v)), \ \text{ onde } \ N_i(v) = f_i(x, v) + \sigma|v_i|^{p-2}v_i + t_i\phi_i + h_i,$$

e $T(v) = (T_1(v), T_2(v)) = (w_1, w_2)$ se, e somente se, (w_1, w_2) é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 + \sigma|w_1|^{p-2}w_1 = v_1, & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta_p w_2 + \sigma|w_2|^{p-2}w_2 = v_2, & \text{em} \quad \Omega \\ \quad w_1 = w_2 = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Definimos também $Q_t : (C_0^1(\overline{\Omega}))^2 \to (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ por $Q_t = T \circ N_t$.

Como no Teorema 2.2 temos que u é um ponto fixo de Q_t se, e somente se, u é uma solução de (S_t), e utilizando o Teorema 1.3 ao invés do Lema 1.1 obtemos por demonstração análoga àquele caso que Q_t é compacto. Considerando

$$\mathcal{B} = \{u \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2 : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)\},$$

temos que $\mathcal{B}$ é um conjunto fechado e convexo. Ainda, pela Proposição 1.2, $(H2)$ e $(H3)$ temos que $Q_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, e pelo Teorema 1.3 $Q_t(\mathcal{B})$ é limitado. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder existe $u \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ o qual é ponto fixo de Q_t, ou seja, existe $u \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ solução de (S_t) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω. ∎

4.3 Estimativas a Priori

Para obtermos a segunda solução usando a teoria do grau, precisamos obter estimativas a priori para as eventuais soluções de (S_t). Começamos essa seção obtendo uma estimativa para a parte negativa de u, depois mostraremos que se u é solução de (S_t) para t maior que uma certa constante negativa, então $t_i < C(1 + \|u\|^{p-1})$, $i = 1, 2$, e finalmente, provaremos uma estimativa a priori para u, se $t \geq -Ce$.

Teorema 4.3 *Para cada $C_0 \in \mathbb{R}_+$, existe constante $M > 0$ tal que para todo $t \geq -C_0 e$, se u é solução de (S_t) então $\|u^-\| \leq M$.*

Demonstração: Seja $m = \max\limits_i \{\|h_i\|_\infty + C_0\|\phi_i\|_\infty\}$. Como (u_1, u_2) é solução de (S_t), temos que

$$\Delta_p u_i + f_i(x, u_1, u_2) = -t_i\phi - h_i \leq C_0\|\phi\|_\infty + \|h_i\|_\infty \leq m, \;\; i = 1, 2.$$

Como f_i é quase-monótona (por $(H3)$), temos que

$$f_1(x, u_1, -u_2^-) \leq f_1(x, u_1, u_2) \;\text{ e }\; f_2(x, -u_1^-, u_2) \leq f_2(x, u_1, u_2),$$

logo

$$\begin{cases} \Delta_p u_1 \leq m - f_1(x, u_1, -u_2^-), & \text{em} \quad \Omega \\ \Delta_p u_2 \leq m - f_2(x, -u_1^-, u_2), & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u_1 = u_2 = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Mostraremos que (u_1, u_2) é supersolução de viscosidade de (4.2). Seja $x_0 \in \Omega$ qualquer. Se $u_1 = \theta$ constante em uma vizinhança $B_\delta(x_0)$ de x_0, segue que $m - f_1(x, \theta, -u_2^-) \geq \Delta_p u_1 = 0$ em $B_\delta(x_0)$.

Se u_1 não é constante em uma vizinhança de x_0, considere $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $D\varphi(x_0) \neq 0$, $\varphi(x_0) = u_1(x_0)$, $\varphi \leq u_1$ em uma vizinhança de x_0. Então pelo Teorema 1.4 segue que

$$\Delta_p\varphi(x_0) \leq m - f_1(x_0, u_1(x_0), -u_2^-(x_0)).$$

Fazendo demonstração análoga para u_2 obtemos que (u_1, u_2) é supersolução de viscosidade de (4.2).

Além disso, como $-u_i^- \leq 0$, $i = 1, 2$ e $f_i(x, 0, 0) = 0$, segue que

$$m - f_1(x, 0, -u_2^-) \geq 0, \;\; m - f_2(x, -u_1^-, 0) \geq 0,$$

logo $(0, 0)$ é supersolução de viscosidade de (4.2).

Como o ínfimo de duas supersoluções de viscosidade é supersolução de viscosidade (veja Lema 2.2), temos que $w = \min\{(0, 0), (u_1, u_2)\} = (-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de viscosidade de (4.2).

Agora provaremos que $(-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_p u_1 + a_{11}\psi_p(u_1) + a_{12}\psi_p(u_2) = m + b_1, & \text{em} \quad \Omega \\ \Delta_p u_2 + a_{21}\psi_p(u_1) + a_{22}\psi_p(u_2) = m + b_1, & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u_1 = u_2 = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

De fato, seja $x_0 \in \Omega$ arbitrário. Se $-u_1^- = \theta$ constante em $B_\delta(x_0)$, temos pela hipótese $(H4)$ e pelo fato que $(-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de viscosidade de (4.2) que

$$m + b_1 - a_{11}\psi_p(\theta) - a_{12}\psi_p(-u_2^-) \geq m - f_1(x, -u_1^-, -u_2^-) \geq 0 \text{ em } B_\delta(x_0).$$

Suponhamos que $-u_1^-$ não é constante em uma vizinhança de x_0, considere $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $D\varphi(x_0) \neq 0$, $\varphi(x_0) = -u_1^-(x_0)$, $\varphi \leq -u_1^-$ em uma vizinhança de x_0. Como $(-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de viscosidade de (4.2) e por $(H4)$ segue que

$$\Delta_p\varphi(x_0) \leq m - f_1(x_0, -u_1^-(x_0), -u_2^-(x_0)) \leq m + b_1 - a_{11}\psi_p(-u_1^-) - a_{12}\psi_p(-u_2^-).$$

Analogamente para a segunda equação obtemos a afirmação.

Dessa forma, pelo Teorema 2.3 temos que

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega}\{\min\{-u_1^-, -u_2^-\}\} &\leq \sup_{\partial\Omega}\{\max\{(-u_1^-)^-, (-u_2^-)^-\}\} \\ &\quad + C\, diam(\Omega)\, \|m + b_1\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Como (u_1, u_2) é solução de (S_t) temos que $u_1 = u_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$. Também,

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega}\{\min\{-u_1^-, -u_2^-\}\} &= -\inf_{\Omega}\{-\max\{u_1^-, u_2^-\}\} \\ &= \sup_{\Omega}\{\max\{u_1^-, u_2^-\}\} = \|u^-\|. \end{aligned}$$

Portanto $\|u^-\| \leq M$. ■

Teorema 4.4 *Para cada $C_0 \in \mathbb{R}_+$, existe constante $C_1 > 0$ tal que para todo $t \geq -C_0 e$, se u é solução de (S_t) então $t_i \leq C_1(1 + \|u\|^{p-1})$, $i = 1, 2$.*

Demonstração: Sejam $C_0 \in \mathbb{R}_+$ e $t \geq -C_0 e$.

Se $-C_0 e \leq t \leq 0$, então seja $C_1 \geq 0$ uma constante qualquer, logo

$$t_i \leq C_1 \leq C_1(1 + \|u\|^{p-1})$$

e o teorema está provado.

Suponha que $t_i > 0$ para $i = 1, 2$ e seja u uma solução de (S_t). Pelo Teorema 4.3 temos que $\|u^-\| \leq M$, logo segue de $(H2)$ e $(H3)$ que

$$f_i(x, u_1, u_2) + \sigma|u_i|^{p-2}u_i > f_i(x, -M, -M) + \sigma|-M|^{p-2}(-M).$$

Defina

$$k_i = \inf_{\overline{\Omega}} f_i(x, -M, -M) + \sigma|-M|^{p-2}(-M)$$

(note que k_i não depende de t). O restante da demonstração é análogo ao Teorema 2.7 e obtemos constante C_1^i tal que $t_i \leq C_1^i(1 + \|u\|^{p-1})$. Tomando $C_1 = \max\{C_1^1, C_1^2\}$, concluímos a prova. ■

Também precisamos do seguinte teorema:

Teorema 4.5 *Para cada $C_0 \in \mathbb{R}_+$, existe constante $C_2 > 0$ tal que para todo $t \geq -C_0 e$ e para toda solução de (S_t) temos $\|u\| \leq C_2$.*

Demonstração: Suponha por contradição que existem sequências $\{u^n\}$ e $\{t^n\}$ tais que $\|u^n\| \to \infty$, $t^n \geq -C_0 e$ e

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1^n &=& f_1(x, u_1^n, u_2^n) + t_1^n \phi_1 + h_1, & \text{em} & \Omega \\ -\Delta_p u_2^n &=& f_2(x, u_1^n, u_2^n) + t_2^n \phi_2 + h_2, & \text{em} & \Omega \\ u_1^n = u_2^n = 0, & & & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja $v^n = (v_1^n, v_2^n) = \left(\frac{u_1^n}{\|u^n\|}, \frac{u_2^n}{\|u^n\|}\right)$. Então da hipótese $(H1)$ e do Teorema 4.4 segue que

$$\begin{aligned} -\Delta_p v_1^n &= \frac{f_1(x, u_1^n, u_2^n) + t_1^n \phi_1 + h_1}{\|u^n\|^{p-1}} \\ &\leq \frac{C(1 + |u_1^n(x)|^{q_1} + |u_2^n(x)|^{r_1}) + C_1(1 + \|u^n\|^{p-1})\|\phi_1\|_\infty + \|h_1\|_\infty}{\|u^n\|^{p-1}} \\ &\leq C_3, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Por outro lado, pelo Teorema 4.3 temos que $\|(u^n)^-\| \leq M$, logo segue que $\|u^n\| = \|(u^n)^+\|$ para n suficientemente grande. Como f_1 é quase-monótona e pelas hipóteses $(H5)$ e $(H4)$ temos que

$$\begin{aligned} -\Delta_p v_1^n &= \frac{f_1(x, u_1^n, u_2^n) + t_1^n \phi_1 + h_1}{\|u^n\|^{p-1}} \\ &\geq \frac{f_1(x, u_1^n, -M) - C_0 \phi_1 - \|h_1\|_\infty}{\|u^n\|^{p-1}} \\ &\geq \frac{f_1(x, (u_1^n)^+, 0) - o(1)\|(u^n)^+\|^{p-1} - C_0 \phi_1 - \|h_1\|_\infty}{\|u^n\|^{p-1}} \\ &\geq \frac{c_{11}|(u_1^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1)\|u^n\|^{p-1} - C_0 \phi_1 - \|h_1\|_\infty}{\|u^n\|^{p-1}} \geq C_4 \end{aligned}$$

Assim obtemos que $|-\Delta_p v_1^n| \leq C_5$ para n grande o suficiente e portanto segue que v_1^n converge, a menos de subsequência, a uma função v_1 em $C^1(\overline{\Omega})$. Por raciocínio análogo obtemos que v_2^n converge, a menos de subsequência, a uma função v_2 em $C^1(\overline{\Omega})$.

Como (u_1^n, u_2^n) é solução de (S_{t_n}) por $(H5)$ e $(H4)$ temos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_1^n|^{p-2} \nabla u_1^n \nabla \varphi &= \int_\Omega (f_1(x, u_1^n, u_2^n) + t_1^n \phi_1 + h_1)\varphi \\ \geq & \int_\Omega (f_1(x, (u_1^n)^+, (u_2^n)^+) - o(1)\|(u^n)^+\|^{p-1} - C_0 \phi_1 + h_1)\varphi \\ \geq & \int_\Omega (c_{11}|(u_1^n)^+|^{p-1} + c_{12}|(u_2^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1)\|(u^n)^+\|^{p-1} - C_0 \phi_1 + h_1)\varphi \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla v_1^n|^{p-2}\nabla v_1^n \nabla\varphi \\
&\geq \int_\Omega \left(\frac{c_{11}|(u_1^n)^+|^{p-1} + c_{12}|(u_2^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1)\|(u^n)^+\|^{p-1} - C_0\phi_1 + h_1}{\|u^n\|^{p-1}} \right)\varphi \\
= \quad & \int_\Omega \left(c_{11}|(v_1^n)^+|^{p-1} + c_{12}|(v_2^n)^+|^{p-1} - o(1) + \frac{h_1 - C_0\phi_1 - b_2}{\|u^n\|^{p-1}} \right)\varphi
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v_1|^{p-2}\nabla v_1 \nabla\varphi \geq \int_\Omega (c_{11}|v_1^+|^{p-1} + c_{12}|v_2^+|^{p-1})\varphi.$$

Ou seja, temos, fazendo o mesmo raciocínio para u_2^n, que (v_1, v_2) é solução de

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta_p v_1 \geq c_{11}|v_1^+|^{p-2}v_1^+ + c_{12}|v_2^+|^{p-2}v_2^+, & \text{em} & \Omega \\ -\Delta_p v_2 \geq c_{21}|v_1^+|^{p-2}v_1^+ + c_{22}|v_2^+|^{p-2}v_2^+, & \text{em} & \Omega \\ v_1 = v_2 = 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Mostremos que $v_i \geq 0$, para $i = 1, 2$. De fato, suponha que existe $x_i \in \Omega$ tal que $v_i(x_i) < 0$. Como $v_i \in C^1(\overline{\Omega})$, considere $\tilde{\Omega}_i = v_i^{-1}((-\infty, 0))$ e $\Omega_i \subset \tilde{\Omega}_i$ a componente conexa que contém x_i. Assim, para $i \neq j$, temos por (4.3) que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p v_i & \geq & c_{ij}|v_j^+|^{p-2}v_j^+, & \text{em} \quad \Omega_i \\ v_i & = & 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega_i. \end{array} \right.$$

Pelo princípio do máximo temos que $v_i \geq 0$ em Ω_i, o que é uma contradição pela definição de Ω_i. Assim, não existe $x_i \in \Omega$ tal que $v_i(x_i) < 0$ e portanto $v_i \geq 0$, para $i = 1, 2$. Como $v_i \geq 0$, segue de $(H4)$, (4.3) e princípio do máximo de Vázquez que $v_i > 0$, para $i = 1, 2$. Assim, pelas definições de $\mathcal{E}(A_2)$ e $\lambda_1(\Delta_p + A_2)$ temos que $0 \in \mathcal{E}(A_2)$ e assim $0 \leq \lambda_1(\Delta_p + A_2)$, o que contradiz $(H4)$. Portanto existe $C_2 > 0$ tal que $\|u\| \leq C_2$. ■

Devido aos Teoremas 4.4 e 4.5 obtemos as seguintes estimativas para t e para a norma C^1 de uma eventual solução de (S_t):

Teorema 4.6 *Dado $t^0 \in \mathbb{R}^2$, existem $R, \bar{R} > 0$ tais que para todo $t \geq t^0$, se u é uma solução de (S_t) então $\|u\|_{(C^1(\overline{\Omega}))^2} \leq R$ e $t \leq \bar{R}e$.*

Demonstração: Dado $t^0 \in \mathbb{R}^2$, defina $C_0 = \max\{(t_1^0)^-, (t_2^0)^-\} \geq 0$. Segue dos Teoremas 4.4 e 4.5 que para todo $t \geq t^0 \geq -(t^0)^- \geq -C_0 e$, se u é uma solução de (S_t) então $\|u\| \leq C_2$ e $t_i \leq C_1(1 + \|u\|^{p-1})$, $i = 1, 2$. Seja $\bar{R} = C_1(1 + C_2^{p-1})$. Agora, como u é uma solução de (S_t) temos

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_1 & = & f_1(x, u_1, u_2) + t_1\phi_1 + h_1, & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta_p u_2 & = & f_2(x, u_1, u_2) + t_2\phi_2 + h_2, & \text{em} \quad \Omega \\ u_1 = u_2 = 0, & & & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Como $(u_1, u_2) \in [-M, C_2]^2$ (M dado pelo Teorema 4.3), $|f_i(x, u_1, u_2)| \leq R_i$ para $(x, u_1, u_2) \in \overline{\Omega} \times [-M, C_2] \times [-M, C_2]$, $i = 1, 2$ e então temos que $d_i(x, u_1, u_2) = f_i(x, u_1, u_2) + t_i\phi_i + h_i$ é uma função Caratheodory que satisfaz

$$|d_i(x, u_1, u_2)| \leq R_i + \bar{R}\|\phi_i\|_\infty + \|h\| \leq R_2.$$

Pelo Teorema 1.3 $u \in (C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$, para $0 < \alpha < 1$ e $\|u\|_{(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2} \leq C = C(R_2)$. Portanto existe $R > 0$ tal que $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})^2} \leq R$. ■

4.4 Segunda Solução

Como explicado anteriormente, nesta seção, utilizando a teoria do grau de Leray-Schauder, completaremos a prova do Teorema 4.1 encontrando outra solução de (S_t).

Denotemos

$$\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\}.$$

Para cada $y \in \mathcal{Y}$, consideremos os conjuntos

$$\mathcal{S}_1 = \{s \in \mathbb{R} : (S_{y+se}) \text{ tem ao menos uma supersolução}\}$$

$$\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{R} : (S_{y+se}) \text{ tem ao menos uma solução}\}.$$

Notemos que $\mathcal{S}$ é limitado superiormente pelo Teorema 4.6, pela Proposição 4.2, segue que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e se $t \in \mathcal{S}_1$ então $s \in \mathcal{S}_1$, para todo $s \leq t$. Obviamente $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1$. Pela Proposição 4.1 e Teorema 4.2 temos que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$, assim $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$.

Defina, para $y \in \mathcal{Y}$,

$$\gamma^*(y) = \sup \mathcal{S}.$$

Afirmação 4.2 *$y \mapsto \gamma^*(y)$ é Lipschitziana.*

Com efeito, dados $y, z \in \mathcal{Y}$, com $y \neq z$, consideremos $\Gamma^*(y) = y + \gamma^*(y)e$ e $\Gamma^*(z) = z + \gamma^*(z)e$. Mostremos que $\Gamma^*(y) \not< \Gamma^*(z)$ e $\Gamma^*(z) \not< \Gamma^*(y)$. Suponhamos por contradição que temos $\Gamma^*(y) < \Gamma^*(z)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $y + \gamma^*(y)e + \varepsilon e < z + \gamma^*(z)e$, isto é

$$y + \gamma^*(y)e + \frac{\varepsilon}{2}e < \underbrace{z + \gamma^*(z)e - \frac{\varepsilon}{2}e}_{\tilde{z}}. \tag{4.4}$$

Como $\tilde{z} < \Gamma^*(z)$, $(P_{\tilde{z}})$ possui supersolução, e por (4.4), $(P_{y+\gamma^*(y)e+\frac{\varepsilon}{2}e})$ tem supersolução, o que contradiz a definição de $\gamma^*(y)$. Da mesma forma provamos que $\Gamma^*(z) \not< \Gamma^*(y)$.
Assim, existem $i, j \in \{1, 2\}$ tais que

$$y_i + \gamma^*(y) \geq z_i + \gamma^*(z) \quad \text{e} \quad y_j + \gamma^*(y) \leq z_j + \gamma^*(z).$$

Então

$$\gamma^*(z) - \gamma^*(y) \leq y_i - z_i \leq |y - z|$$

e

$$\gamma^*(y) - \gamma^*(z) \leq z_j - y_j \leq |y - z|.$$

Portanto, $|\gamma^*(y) - \gamma^*(z)| \leq |y - z|$ e a afirmação está provada.

Defina

$$\Gamma^* = \{y + \gamma^*(y)e : y \in \mathcal{Y}\}.$$

Temos que Γ^* é uma curva lipschitziana que divide $\mathbb{R}^2$ em duas componentes

$$\mathcal{C} = \{y + se : s < \gamma^*(y), y \in \mathcal{Y}\} \ \text{ e } \ \mathcal{N} = \{y + se : s > \gamma^*(y), y \in \mathcal{Y}\}.$$

Mostremos que para todo $t \in \mathcal{N}$, o problema (S_t) não tem solução. De fato, se $t \in \mathcal{N}$, existem $y \in \mathcal{Y}$ e $s > \gamma^*(y)$ tais que $t_i = y_i + s$. Como $s > \gamma^*(y)$, segue que $(S_t) = (S_{y+se})$ não tem solução pela definição de $\gamma^*(y)$.

Observação 4.1 *Pela definição de $\mathcal{S}$ e γ^* temos que se $t \in \mathcal{C}$, então (S_t) tem pelo menos uma solução.*

Mostremos agora *ii)*. Seja $t \in \Gamma^*$, logo $t = y^* + \gamma^*(y^*)e$, para algum $y^* \in \mathcal{Y}$. Pela definição de $\gamma^*(y^*)$ existe $\{t^n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t^n \to \gamma^*(y^*)$ e $(S_{y^*+t^ne})$ tem solução u^n. Sem perda de generalidade, suponhamos que t^n é crescente. Como u^n é solução de $(S_{y^*+t^ne})$, para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_i^n|^{p-2} \nabla u_i^n \nabla \varphi = \int_\Omega (f_i(x, u_1^n, u_2^n) + (y_i^* + t^n)\phi_i + h_i)\varphi, \ \ i = 1, 2. \tag{4.5}$$

Pela hipótese $(H1)$ e o Teorema 4.6, com $t^0 = y^* + t^1 e$ (t^1 é o primeiro elemento da sequência), temos, para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} |f_i(x, u_1^n, u_2^n) + (y_i^* + t^n)\phi + h_i| &\leq C(1 + |u_1^n|^{q_i} + |u_2^n|^{r_i}) + |y_i^* + t^n| \|\phi_i\|_\infty + \|h_i\|_\infty \\ &\leq C(1 + R^{p-1}) + (\bar{R} + |t^0|)\|\phi_i\|_\infty + \|h_i\|_\infty \leq \overline{M}. \end{aligned}$$

Logo pelo Teorema 1.3 segue que $\{u^n\}$ é limitada em $(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$ e assim possui uma subsequência convergente $u^{n_k} \to u^*$ em $(C^{1,\beta}(\overline{\Omega}))^2$, $0 \leq \beta < \alpha$. Dessa forma, tomando o limite quando $n_k \to \infty$ em (4.5) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_i^*|^{p-2} \nabla u_i^* \nabla \varphi = \int_\Omega (f_i(x, u_1^*, u_2^*) + t_i\phi_i + h_i)\varphi, \ \ i = 1, 2,$$

isto é, u^* é solução de (S_t). Portanto (S_t) tem solução para $t \in \Gamma^*$.

Agora considere, para $y \in \mathcal{Y}$,

$$\gamma_*(y) = \sup \mathcal{U},$$

onde

$$\mathcal{U} = \{s \in \mathbb{R} : \ (S_{y+se}) \text{ tem supersolução } \overline{u} \ll u^*, \ u^* \text{ solução de } (S_{y+\gamma^*(y)e})\}.$$

Note que $\gamma_*(y) \leq \gamma^*(y)$, argumentando como acima, provamos que $y \mapsto \gamma_*(u)$ é Lipschitz e podemos definir

$$\Gamma_* = \{y + \gamma_*(y)e : \ y \in \mathcal{Y}\}.$$

Temos que Γ_* divide $\mathcal{C}$ em dois conjuntos

$$\mathcal{M} = \{y + se : \; s < \gamma_*(y), \, y \in \mathcal{Y}\},$$

$$\mathcal{O} = \{y + se : \; \gamma_*(y) < s < \gamma^*(y), \, y \in \mathcal{Y}\}.$$

Pela Observação 4.1, se $t \in \mathcal{O} \cup \Gamma_*$ então (S_t) possui ao menos uma solução, o que conclui o item ii).

Provaremos que para todo $t \in \mathcal{M}$, o problema (S_t) tem pelo menos duas soluções. Dado $t^0 \in \mathcal{M}$, sejam $y^0 \in \mathcal{Y}$ e $s < \gamma_*(y^0)$ tais que $t^0 = y^0 + se$. Pela definição de $\gamma_*(y^0)$, (S_{t^0}) possui ao menos uma supersolução $\bar{u}$ tal que $\bar{u} \ll u^*$, onde u^* é solução de $(S_{y^0+\gamma^*(y^0)e})$. Segue da Proposição 4.1 que existe $\underline{u}$ subsolução de (S_{t^0}) tal que $\underline{u} \ll \bar{u}$, e pelo Teorema 4.2 (S_{t^0}) possui uma solução u^0 com $\underline{u} \leq u^0 \leq \bar{u}$. Tomando uma menor subsolução se necessário, $\underline{u} \ll u^0 \leq \bar{u} \ll u^*$. Defina, para $i = 1, 2$,

$$\tilde{f}_i(x, \xi_1, \xi_2) = f_i(x, g_1(\xi_1), g_2(\xi_2)) + \sigma |g_i(\xi_i)|^{p-2} g_i(\xi_i), \; \forall \, (x, \xi_1, \xi_2) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

onde $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$, é definida por

$$g_i(t) = \underline{u}_i \chi_{(0,\infty)}(\underline{u}_i - t) + t \chi_{[\underline{u}_i, u_i^*]}(t) + u_i^* \chi_{(0,\infty)}(t - u_i^*).$$

Notemos que g_i é contínua, limitada e não decrescente. Dessa forma, pela hipótese $(H2)$ temos que $\tilde{f}_i$ é limitada, contínua e não decrescente.

Defina também o operador $\tilde{Q}_{t^0} : (C_0^1(\overline{\Omega}))^2 \to (C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ por $\tilde{Q}_{t^0}(v) = w$ se, e somente se, w é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p \, w_1 + \sigma |w_1|^{p-2} w_1 &= \tilde{f}_1(x, v_1, v_2) + t_1^0 \phi_1 + h_1, & \text{em} & \Omega \\ -\Delta_p \, w_2 + \sigma |w_2|^{p-2} w_2 &= \tilde{f}_2(x, v_1, v_2) + t_2^0 \phi_2 + h_2, & \text{em} & \Omega \\ \quad w_1 = w_2 = 0, & & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Como no Teorema 4.2 temos que $\tilde{Q}_{t^0}$ é compacto. Como $\tilde{f}_i$ é limitada temos que as soluções do sistema acima são uniformemente limitadas em $(C_0^1(\overline{\Omega}))^2$ e então podemos considerar uma constante $R_0 > \sup\{\|\tilde{Q}_{t^0}(v)\|_{(C^1(\overline{\Omega}))^2} \; : \; v \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2\}$ e

$$\mathcal{D} = \left\{ u \in (C_0^1(\overline{\Omega}))^2 : \underline{u} \ll u \ll u^*, \|u\|_{(C^1(\overline{\Omega}))^2} < R_0 \right\}.$$

Notemos que $\mathcal{D}$ é um conjunto aberto, limitado e convexo. Como na Seção 3.4, utilizando as hipóteses $(H2)$ e $(H3)$, podemos mostrar que $\tilde{Q}_{t^0}(\bar{\mathcal{D}}) \subset \bar{\mathcal{D}}$. Além disso, se Q_t é dado pelo Teorema 4.2, temos que $\tilde{Q}_t = Q_t$ em $\bar{\mathcal{D}}$, u é uma solução de (S_t) se, e somente se, u é um ponto fixo de Q_t. Se a fronteira de $\mathcal{D}$ contém uma solução de (S_{t^0}) então a prova está completa, visto que $u^0 \in \mathcal{D}$.

Suponha que $\partial\mathcal{D}$ não contém soluções de (S_{t^0}). Por demonstração análoga à Seção 3.4, temos que $deg(I - Q_{t^0}, \mathcal{D}, 0) = 1$ e para $r \in \mathbb{R}$ grande o suficiente, $deg(I - Q_{t^0}, B_r(0), 0) = 0$.

Pela propriedade da excisão do grau,

$$0 = deg(I - Q_{t^0}, B_r(0), 0) = deg(I - Q_{t^0}, \mathcal{D}, 0) + deg(I - Q_{t^0}, B_r(0) \setminus \mathcal{D}, 0),$$

e assim $deg(I - Q_{t^0}, B_r(0) \setminus \mathcal{D}, 0) \neq 0$, isto é, existe $v \in B_r(0) \setminus \mathcal{D}$ solução de (S_{t^0}) e dessa forma (S_{t^0}) possui duas soluções. Portanto concluímos a prova do teorema.

Observação 4.2 *Gostaríamos de provar que* $\Gamma^* = \Gamma_*$, *mas infelizmente isto não é possível pois se* $t \in \mathcal{C}$, $t = y + se$, *com* $s < \gamma^*(y)$, *logo temos que* u^* *é supersolução de* (S_t), *onde* u^* *é solução de* $(P_{y+\gamma^*(y)e})$. *Pela Proposição 4.1 obtemos subsolução* $\underline{u}$ *tal que* $\underline{u} \ll u^*$ *e pelo Teorema 4.2 obtemos uma solução que satisfaz* $\underline{u} \leq u \leq u^*$. *Mas não podemos assegurar que* $u \ll u^*$. *Assim não podemos garantir que* $u \in \mathcal{D}$, *somente* $u \in \overline{\mathcal{D}}$. *Dessa forma o raciocínio utilizado na sequência e a teoria do grau de Leray Schauder não podem ser aplicados.*

Apêndice A

Apêndice

A.1 Algumas Desigualdades

Proposição A.1 *[28, Teorema 2.8]*

$$\det(A)\det(B) \leq \left(\frac{tr(AB)}{N}\right)^N, \quad A, B \geq 0, \;\; A, B \in S(N), \tag{A.1}$$

Lema A.1

$$(a+b)^m \leq C_m(a^m + b^m), \tag{A.2}$$

com $C_m = 1$*, se* $m \in (0, 1]$ *e* $C_m = 2^{m-1}$ *se* $m > 1$*.*

Demonstração: Para $m = 1$ é imediato. Consideremos o caso $m \in (0, 1)$: Com efeito, a função $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + b)^t - x^t - b^t$ com $t \in (0, 1)$ e $b \in [0, \infty)$ satisfaz $f(0) = 0$ e $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in [0, \infty)$, pois, supondo $f'(x) > 0$ obtemos $b < 0$, o que é uma contradição. Consideremos agora o caso $m > 1$: Se $a = 0$ é óbvio. Suponha $a > 0$, então $(A.2)$ pode ser escrito na forma $(1 + x)^m \leq 2^{m-1}(1 + x^m)$, onde $x = \frac{b}{a} \geq 0$. A função $f(x) = \frac{(1+x)^m}{(1+x^m)}$ satisfaz $f(0) = 1 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $f(x) > 1$ se $0 < x < \infty$. Portanto, f tem um máximo para $x \geq 0$ em seu único ponto crítico, $x = 1$. Como $f(1) = 2^{m-1}$, obtemos $(1 + x)^m \leq 2^{m-1}(1 + x^m)$, o que prova o lema. ■

Lema A.2 *(Desigualdade de Young Generalizada) Para todo* $a, b \geq 0$*,* $\delta > 0$ *e* $q \in (0, 1)$*, temos*

$$ab \leq \delta a^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{q}{1-q}} (1 - q) b^{\frac{1}{1-q}}.$$

Demonstração: Em [40] temos no Apêndice B.2 a seguinte desigualdade de Young:

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^s}{s},$$

para $a, b \geq 0$ e $r, s > 1$ satisfazendo $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Escrevendo

$$ab = \left((\delta/q)^q\, a\right)\left(\frac{b}{(\delta/q)^q}\right)$$

e utilizando a desigualdade de Young com $r = \frac{1}{q}$ e $s = \frac{1}{1-q}$ temos o resultado.

■

A.2 Os Operadores de Pucci e a Hipótese (F2)

Como vimos no Capítulo 2 os operadores de Pucci são definidos da seguinte forma.

Definição A.1 *Para $0 < a \leq A$, os operadores de Pucci são definidos por*

$$\mathcal{M}^+_{a,A}(M) = a\sum_{e_i<0} e_i + A\sum_{e_i>0} e_i,$$

$$\mathcal{M}^-_{a,A}(M) = A\sum_{e_i<0} e_i + a\sum_{e_i>0} e_i,$$

onde e_i são os autovalores de M.

Temos a seguinte definição equivalente, que pode ser encontrada em [15].

$$\mathcal{M}^+_{a,A}(M) = Atr(M^+) - atr(M^-),$$

$$\mathcal{M}^-_{a,A}(M) = atr(M^+) - Atr(M^-),$$

para cada $M \in S(N)$, com $M = M^+ - M^-$ a decomposição de M, onde $M^+ = PD^+P^\top$ é uma matriz não negativa definida e $M^- = PD^-P^\top$ é uma matriz não negativa definida, sendo $D^\pm$ uma matriz diagonal, onde a diagonal de D^+ é formada por $c_{ii} = \max\{0, e_i\}$ e a diagonal de D^- é formada por $b_{ii} = \max\{0, -e_i\}$.

A seguir enunciamos algumas propriedades desses operadores.

Proposição A.2 *[15, Lemma 2.10] Sejam $0 < a \leq A$ e $X, Y \in S(N)$.*

i) $\mathcal{M}^-_{a,A}(X) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X)$,

ii) $-\mathcal{M}^+_{a,A}(-X) = \mathcal{M}^-_{a,A}(X)$ *e* $\mathcal{M}^\pm_{a,A}(\gamma X) = \gamma\mathcal{M}^\pm_{a,A}(X)$, *se* $\gamma \geq 0$,

iii) $\mathcal{M}^+_{a,A}(X) + \mathcal{M}^-_{a,A}(Y) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X+Y) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + \mathcal{M}^+_{a,A}(Y)$,

iv) $\mathcal{M}^-_{a,A}(X) + \mathcal{M}^-_{a,A}(Y) \leq \mathcal{M}^-_{a,A}(X+Y) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + \mathcal{M}^-_{a,A}(Y)$,

v) $a' \leq a \leq A \leq A' \Rightarrow \mathcal{M}^-_{a',A'}(X) \leq \mathcal{M}^-_{a,A}(X)$ *e* $\mathcal{M}^+_{a',A'}(X) \geq \mathcal{M}^+_{a,A}(X)$.

Durante a demonstração das estimativas ABP no Capítulo 2 utilizamos várias vezes a hipótese (2.6) ao invés da hipótese $(F2)$. Mostraremos agora que $(F2)$ implica em (2.6). De fato, note que por (F2) sendo $X > 0$, e tomando $M_1 = X$ e $M_2 = -X$ obtemos

$$a|p|^\alpha tr(X) \leq F(X - X, p) - F(-X, p) \leq A|p|^\alpha tr(X)$$

o que implica

$$-A|p|^\alpha tr(X) \leq F(-X, p) \leq -a|p|^\alpha tr(X).$$

Dessa forma, sendo $M \in S(N)$, temos

$$\begin{aligned} F(M,p) &= F(M^+ - M^-, p) \leq A|p|^\alpha tr(M^+) + F(-M^-, p) \\ &\leq A|p|^\alpha tr(M^+) - a|p|^\alpha tr(M^-) = |p|^\alpha \mathcal{M}^+_{a,A}(M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(M,p) &= F(M^+ - M^-, p) \geq a|p|^\alpha tr(M^+) + F(-M^-, p) \\ &\geq a|p|^\alpha tr(M^+) - A|p|^\alpha tr(M^-) = |p|^\alpha \mathcal{M}^-_{a,A}(M). \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] ALLEGRETTO, W.; HUANG, Y. X. A Picone's identity for the p-Laplacian and applications. **Nonlinear Anal.** v. 32, n. 7, p. 819–830, 1998.

[2] AMANN, H.; HESS, P. A multiplicity result for a class elliptic boundary value problems. **Proc. Royal Soc. Edinburgh**, v. 84(A), p. 145–151, 1975.

[3] AMBROSETTI, A.; PRODI, G. On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces. **Ann. Mat. Pura Appl.**, v. 4, n. 93, p. 231–246, 1972.

[4] AMENDOLA, M. E.; ROSSI, L.; VITOLO, A. Harnack inequalities and ABP estimates for nonlinear second order elliptic equations in unbounded domains. **Abstract and Appl. Anal.**, p. 1–19, 2008.

[5] ARCOYA, D.; RUIZ, D. The Ambrosetti-Prodi Problem for the p-Laplace Operator. **Comm. Part. Diff. Eqns.**, v. 31, p. 849–865, 2006.

[6] BARLES, G. Existence results for first-order Hamilton-Jacobi equations. **Inst. Henri Poincaré. Anal. Nonlin.**, v. 1, p. 325–340, 1984.

[7] BAYDIL, B. **Viscosity Solutions - An introduction to the basics of the theory**. 2002. 106 p. Master's Thesis, Sabanci University, Istanbul, Turkey, 2002.

[8] BERESTYCKI, H.; NIRENBERG, L.; VARADHAN, S. R. S. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. **Comm. Pure and Appl. Math.**, v. 47, p. 47–92, 1994.

[9] BERGER, M. S.; PODOLAK, E. On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 24, p. 837–846, 1974.

[10] BIRINDELLI, I.; DEMENGEL, F. Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators. **Ann. Fac. Sci Toulouse Math.**, v. 13, p. 261–287, 2004.

[11] BIRINDELLI, I.; DEMENGEL, F. Eigenvalue, maximum principle and regularity for fully non linear homogeneous operators. **Comm. Pure and Appl. Analysis**, v. 6, p. 335–366, 2007.

[12] BIRINDELLI, I.; DEMENGEL, F. Some Liouville theorems for the p-Laplacian. **Elect. J. Differential Equations**, v. 8, p. 35–46, 2002.

[13] BIRINDELLI, I.; DEMENGEL, F. The Dirichlet problem for singular fully nonlinear operators. **Discrete and Cont. Dynamical Sys.**, Special vol., p. 110–121, 2007.

[14] BOCCARDO, L.; FLECKINGER, J.; DE THELIN, F. Existence of solution for some nonlinear cooperative systems. **Diff. and Int. Eqns.**, v. 7, p. 689–698, 1994.

[15] CABRE, X.; CAFFARELLI, L. A. **Fully-nonlinear equations**. Colloquium Publications 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[16] CABRE, X. Nondivergent elliptic equations on manifolds with nonnegative curvature. **Comm. Pure and Appl. Math.**, v. L, p. 623–665, 1997.

[17] CABRE, X. On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations. **Comm. Pure and Appl.**, Math. v. 48, p. 539–570, 1995.

[18] CAFAGNA, V.; VITOLO, A. On the maximum principle for second - order elliptic operators in unbounded domains. **C. R. Acad. Sci. Paris**, Ser. I, v. 334, p. 359–363, 2002.

[19] CAFFARELLI, L. A. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. **Annals of Mathematics**, v. 130, p. 189–213, 1989.

[20] CAFFARELLI, L. A. *et al.* On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. **Comm. Pure and Appl. Math**, v. 49, p. 365–397, 1996.

[21] CAPUZZO DOLCETTA, I.; LEONI, F.; VITOLO, A. The Aleksandrov-Bakelman-Pucci weak maximum principle for fully nonlinear equations in unbounded domains. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 30, p. 1863–1881, 2005.

[22] CHANG, K. C. Ambrosetti-Prodi type results in elliptic systems. **Nonlinear Anal.**, v. 51, n.4, p. 553–566, 2002.

[23] CRANDALL, M. G. Viscosity solutions: a primer, Viscosity solutions and applications, (Montecatini Terme, 1995). **Lecture Notes in Math.**, Springer, Berlin, v. 1660, p. 1–43, 1997.

[24] CRANDALL, M. G.; EVANS, L. C.; LIONS, P. L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 282, p. 487–502, 1984.

[25] CRANDALL, M. G.; ISHII, H.; LIONS, P. L. Users guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 27, p. 1–67, 1992.

[26] CRANDALL, M. G.; LIONS, P. L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 277, p. 1–42, 1983.

[27] DANCER, E. N. On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations. **J. Math. Pures Appl.**, v. 57, p. 351–366, 1978.

[28] DANNAN, F. M. Matrix and operator inequalities. **J. Inequal. Pure Appl. Math.**, v. 2, p. 1–7, 2001.

[29] DE FIGUEIREDO, D. G. **Lectures on boundary value problems of the Ambrosetti-Prodi type**. In: Atas do 12º Seminário Brasileiro de Análise (12^{th} Brazilian Analysis Seminar) São Paulo, p. 230–292, 1980.

[30] DE FIGUEIREDO, D. G. On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem. **Nonlinear Anal.**, v. 8, p. 655–665, 1984.

[31] DE FIGUEIREDO, D. G.; GOSSEZ, J. P.; UBILLA, P. Local "superlinearity" and "sublinearity" for the $p-$Laplacian, preprint.

[32] DE FIGUEIREDO, D. G.; SIRAKOV, B. On the Ambrosetti-Prodi problem for non-variational elliptic systems. **J. Differential Equations**, v. 240, p. 357–374, 2007.

[33] DE FIGUEIREDO, D. G.; SOLIMINI, S. A variational approach to superlinear elliptic problems. **Comm. Part. Diff. Eqns.**, v. 9, p. 699–717, 1984.

[34] DE FIGUEIREDO, D. G.; SRIKANTH, P. N.; SANTRA, S. Non-radially symmetric solutions for a superlinear Ambrosetti-Prodi type problem. **Comm. Contemporary Math.**, v. 7, p. 849–866, 2005.

[35] DE FIGUEIREDO, D. G.; YANG, J. Critical Superlinear Ambrosetti-Prodi problems. **Top. Meth. Nonlin. Anal.**, v. 14, n. 1, p. 59–80, 1999.

[36] DE MORAIS FILHO, D. C. A variational approach to an Ambrosetti-Prodi type problem for a system of elliptic equations. **Nonlinear Anal.**, v. 26, n. 10, p. 1655–1668, 1996.

[37] DE MORAIS FILHO, D. C. An Ambrosetti-Prodi-type problem for an elliptic system of equations via monotone iteration method and Leray-Schauder degree theory. **Abstr. Appl. Anal.**, v. 1, n. 2, p. 137–152, 1996.

[38] DE MORAIS FILHO, D. C.; PEREIRA, F. R. Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations. **Nonlinear Anal.**, v. 2007, p. 1–14, 2007.

[39] DONG, W. A priori estimates and existence of positive solutions for a quasilinear elliptic equation. **J. London Math. Soc.**, v. 72, p. 645–662, 2005.

[40] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Vol. 19, 1998.

[41] FLECKINGER, J.; HERNANDEZ, J.; DE THELIN, F. On maximum principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems. **Diff. and Int. Eqns.**, v. 8, p. 69–85, 1995.

[42] FLECKINGER, J.; MANÁSEVICH, R. F.; DE THELIN, F. Global Bifurcation from the first eigenvalue for a system of $p-$Laplacians. **Math. Nachrichten**, v. 182, p. 217–241, 1997.

[43] FLECKINGER, J.; TAKAC, P. Uniqueness of positive solutions for nonlinear cooperative systems with $p-$Laplacian. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 43, n. 4, p. 1227–1253, 1994.

[44] GIDAS, G.; SPRUCK, J. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 6, p. 883–901, 1981.

[45] GILBARG, D; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. 2nd edition, Revised third printing, New York: Springer-Verlag, 1998.

[46] HESS, P. On a nonlinear elliptic boundary value problem of the Ambrosetti-Prodi type. **Boll. Un. Mat. Ital**, v. 17, p. 187–192, 1980.

[47] ISHII, H. Viscosity solutions of nonlinear partial differential equations. **Sugaku Expositions**, v. 9, n. 2, p. 135–152, 1996.

[48] KAZDAN, J.; WARNER, F. W. Remarks on some quasilinear elliptic equations. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 28, n. 5, p. 567–597, 1975.

[49] KOIKE, S.; SWIECH, A. Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, preprint (2008).

[50] KOIZUMI, E.; SCHMITT, K. Ambrosetti-Prodi-type problems for quasilinear elliptic equations. **Diff. and Int. Eqns.**, v. 18, p. 241–262, 2005.

[51] LADYZHENSKAYA, O. A.; URAL'TSEVA, N. N. **Linear and quasilinear elliptic equations**. New York: Academic Press, 1968.

[52] LIEBERMAN, G. M. Local estimates for subsolutions and supersolutions of oblique derivative problems for general second order elliptic equations. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 304, n. 1, p. 343–353, 1987.

[53] LIONS, P. L. Optimal Control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Belmann equations. Part II: Viscosity solutions and uniqueness. **Comm. in PDE**, v. 8, p. 1229–1276, 1983.

[54] LORCA, S. Nonexistence of positive solution for quasilinear elliptic problems in the half-space. **J. Inequalities and Appl.**, v. 2007, p. 1–4, 2007.

[55] PATRIZI, S. The Neumann problem for singular fully nonlinear operators, to appear Journal de Mathematiques Pure et Appliquees.

[56] PEREIRA, F. R. **Problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas envolvendo expoentes subcrítico e crítico**. 95 p. Tese (Doutorado em Matemática), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

[57] QUAAS, A.; SIRAKOV, B. On the principal eigenvalues and the Dirichlet problem for fully nonlinear operators. **C. R. Math. Acad. Sci. Paris**, v. 342, n. 2, p. 115–118, 2006.

[58] SERRIN, J.; ZOU, H. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. **Acta Mathematica**, v. 189, n. 1, p. 79–142, 2002.

[59] TOLKSDORF, P. On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points. **Comm. Part. Diff. Eqns.**, v. 8, p. 773–817, 1983.

[60] TOLKSDORF, P. Regularity for more general class of quasilinear elliptic equations. **J. Differential Equations**, v. 51, p. 126–150, 1984.

[61] VÁZQUEZ, J. L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. **Appl. Math. Optim.**, v. 12, p. 191–202, 1984.

[62] VITOLO, A. On the maximum principle for complete second-order elliptic operators in general domains. **J. Differential Equations**, v. 194, p. 166–184, 2003.