

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Homotopia Causal de Trajetórias de Sistemas de Controle

Tese de Doutorado

Eyüp Kızıl

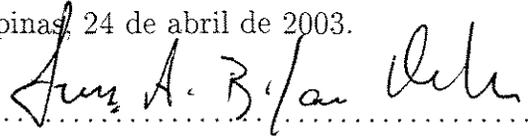
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Campinas-SP  
Abril, 2003

# Homotopia Causal de Trajetórias de Sistemas de Controle

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Eyüp KIZIL e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de abril de 2003.



Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin  
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
2. Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
3. Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende
4. Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva
5. Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

**UNICAMP**  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE	Be
Nº CHAMADA	UNICAMP K658L
V	EX
TOMBO BC/	54396
PROC.	124103
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	17/06/03
Nº CPD	

CM001B4B40-0

BIB ID 293061

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Kizil, Eyüp

K658h Homotopia causal de trajetórias de sistemas de controle / Eyüp  
Kizil -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

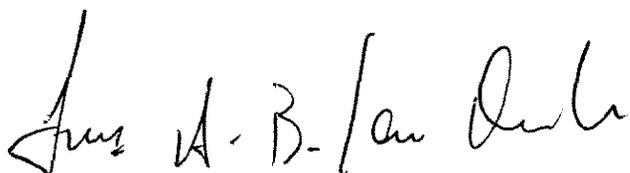
Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria de controle não-linear. 2. Teoria da homotopia. 3. Lie,  
grupos de. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

**Tese de Doutorado defendida em 24 de abril de 2003 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



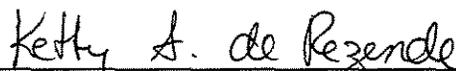
---

**Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN**



---

**Prof (a). Dr (a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO**



---

**Prof (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE**



---

**Prof (a). Dr (a). MARIA APARECIDA SOARES RUAS**



---

**Prof (a). Dr (a). PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA**

# Índice

Resumo	v
Abstract	vii
Introdução	ix
Lista de símbolos	xiii
<b>1 Generalidades</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemas de controle e suas órbitas . . . . .	1
1.2 Acessibilidade . . . . .	4
1.2.1 Condição de posto de álgebra de Lie . . . . .	5
1.2.2 Acessibilidade Normal . . . . .	6
1.3 Conjuntos de controle . . . . .	6
<b>2 Regularidade e Homotopia Monotônica</b>	<b>9</b>
2.1 Trajetórias não paramétricas . . . . .	9
2.2 Controles Regulares . . . . .	12
2.2.1 Construções com controles regulares . . . . .	12
2.3 Controles Normais . . . . .	16
2.4 Relação entre normalidade e regularidade . . . . .	17
2.5 Homotopia Monotônica . . . . .	19
<b>3 Estrutura de variedade em <math>\Gamma(\Sigma, x_0)</math></b>	<b>23</b>
3.1 Construção de estrutura de variedade . . . . .	23
<b>4 Levantamentos</b>	<b>29</b>
4.1 Difeomorfismos locais . . . . .	29
4.2 Levantamento de $\Sigma$ a $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . . . . .	32

<b>5</b>	<b>Recobrimento universal de controle</b>	<b>39</b>
5.1	Propriedade Universal de $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Homotopia monotônica e homotopia</b>	<b>45</b>
6.1	Exemplo . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Semigrupos</b>	<b>53</b>
7.1	Semigrupos de Lie . . . . .	53
7.2	Sistemas invariantes em grupos . . . . .	54
7.3	Recobrimentos de semigrupos . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Conjuntos de controle</b>	<b>67</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>73</b>

# Agradecimentos

Agradeço

ao professor Luiz San Martin pela orientação desta tese, por suas idéias sem qual o trabalho não teria sido possível, e especialmente por sua imensa paciência comigo

ao professor Fritz Colonus de Institut für Mathematik, Universität Augsburg de Alemanha pelas discussões feitas, que foram muito úteis em progresso do trabalho

ao professor Gilli por deixar usar sua sala e seu computador para digitar esta tese

ao Imecc pela sua hospitalidade

à CAPES pelo suporte financeiro.

Aileme ithaf ederim...

# Resumo

Neste trabalho, tratamos da homotopia monotônica, uma variante apropriada de homotopia, de trajetórias de sistemas de controle não-linear assim como de curvas monotônicas em semigrupos de Lie. Introduzimos primeiro um conceito de regularidade para funções de controle que por sua vez pode ser visto, através de uma reparametrização, como generalização de controles normais, e depois consideramos a homotopia monotônica das trajetórias regulares de um sistema de controle  $\Sigma$  numa variedade  $M$ . Em seguida, mostramos que o conjunto  $\Gamma(\Sigma, x)$  de classes de homotopia monotônica das trajetórias regulares do sistema  $\Sigma$  a partir de um estado fixo tem estrutura de variedade diferenciável com a mesma dimensão que  $M$ . Nesta conexão, o teorema 3.1.1 é um dos resultados principais da tese. Como corolário deste teorema temos um difeomorfismo local e levantamos  $\Sigma$  à variedade  $\Gamma(\Sigma, x)$  obtendo um sistema em  $\Gamma(\Sigma, x)$ .

Para considerar as propriedades universais de  $\Gamma(\Sigma, x)$ , tomamos uma variedade  $N$  que recobre o conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  via um difeomorfismo local sobrejetor. Comparando as trajetórias de sistemas levantados sobre essas duas variedades, construímos uma aplicação de  $\Gamma(\Sigma, x)$  a valores em  $N$ . Esta construção é nada mais do que imitar a teoria clássica. Feito isso, comparamos a homotopia monotônica com a homotopia usual. Em particular, exibimos um exemplo de um sistema de controle que admite trajetórias que são homotópicas mas não são monotonicamente homotópicas. Pretendemos também relacionar nossas construções e resultados com um dos problemas apresentados em [16] para semigrupos gerais. Também, definimos o semigrupo fundamental para homotopia monotônica como análogo de grupo fundamental de um espaço topológico.

Finalmente, particularizamos os resultados já obtidos para o contexto de conjuntos de controle onde o problema de valor inicial que aparece ao longo do trabalho pode ser melhorado assumindo  $x \in \text{int}\mathcal{A}(x)$ .

# Abstract

In this work, we deal with monotonic homotopy, an appropriate variant of homotopy, of trajectories of non-linear control systems as well as monotonic curves in Lie semigroups. We first introduce a concept of regularity for control functions which may be viewed, through a reparametrization, as generalization of normal controls, and consider monotonic homotopy of regular trajectories of a given control system  $\Sigma$  on a manifold  $M$ . Then, we show that the set  $\Gamma(\Sigma, x)$  of monotonic homotopy classes of regular trajectories of  $\Sigma$  starting at a given fixed point  $x$  has a differentiable manifold structure with the same dimension as  $M$ . In this connection, Theorem 3.1.1 is one of the major achievements of the thesis. As a consequence of this theorem we get a local diffeomorphism and lift  $\Sigma$  to the manifold  $\Gamma(\Sigma, x)$  obtaining a system in  $\Gamma(\Sigma, x)$ .

To consider universal properties of  $\Gamma(\Sigma, x)$ , we take a manifold  $N$  that covers the accessible set  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  via a surjective local diffeomorphism. Comparing the trajectories of the lifted systems on these two manifolds, we construct a map from  $\Gamma(\Sigma, x)$  into  $N$ . This construction is only a mild imitation of the classical theory. We then compare monotonic homotopy with usual homotopy. In particular, we exhibit an example of a system admitting trajectories which are homotopic but not monotonically homotopic. We also try to relate our constructions and results to one of the problems presented in [16] for semigroups in general. We define a fundamental semigroup for monotonic homotopy as an analogue of fundamental group of a topological space.

Finally, we particularize the results obtained so far to the context of control sets where the initial value problem that appears throughout the work may be improved assuming  $x \in \text{int}\mathcal{A}(x)$ .

# Introdução

A teoria de sistemas de controle tem mantido desde 1950 em atividade a um número grande de matemáticos e a geometria diferencial tem sido aplicado eficientemente nesta área nos últimos anos. Nesta tese, estudamos esta teoria desde o ponto de vista da topologia algébrica. Mais precisamente, o objetivo do trabalho é estudar a homotopia monotônica de trajetórias de sistemas de controle assim como de curvas monotônicas em semigrupos de Lie. A homotopia monotônica é uma variante apropriada de homotopia na qual as trajetórias (resp. as curvas monotônicas) são ligadas por homotopias que envolvem apenas trajetórias (resp. curvas monotônicas). Esse conceito de homotopia foi introduzido recentemente na literatura por Lawson [15], [16] e Colonijs-Spadini [3], [4].

Antes de passar a um resumo dos capítulos que compõem esta dissertação, comentamos as diferenças deste trabalho com o de Sarychev [24] que trata também de homotopia de trajetórias de sistemas de controle. Em [24] são considerados sistemas de controle sem campo de vetores drift. Para esta classe de sistemas satisfazendo a condição de posto de álgebra de Lie, é mostrado que o mergulho  $i$  do espaço de trajetórias (com as mesmas extremidades fixas) no espaço de todos os caminhos em uma variedade que conectam essas extremidades é uma equivalência homotópica. O exemplo apresentado no capítulo 6 mostra que esse resultado não ocorre necessariamente para sistemas com vetor drift, que são os considerados neste trabalho.

A tese é dividida em oito capítulos:

Capítulo 1: contém algumas definições básicas sobre sistemas de controle não lineares. Mais precisamente, é dada a definição de um sistema de controle e as noções de controlabilidade, controlabilidade aproximada, destes sistemas. Controlabilidade é um dos conceitos principais na teoria do controle e não ocorre em geral para um sistema não linear. Este problema pode ser analisado sob dois pontos de vista. O primeiro é a parte da órbita e o segundo é

a parte de acessibilidade. Já que a questão de acessibilidade nos interessa mais, a ênfase dada aqui é a parte de acessibilidade. Portanto, incluímos os enunciados do teorema da órbita [26], [28], sem demonstração e alguns resultados clássicos sobre acessibilidade.

Capítulo 2: é dedicado ao estudo de homotopia monotônica e ao conceito de regularidade para funções de controle em relação a aplicação de ponto-final (veja definição 2.2.1). Mostramos na proposição 2.4.1 que através de uma reparametrização a classe de controles normais (considerados em [27]) forma uma subclasse de controles regulares. Então, a noção de regularidade é mais geral e utilizaremos a noção de controle normal, que serão utilizados aqui apenas para garantir uma quantidade suficiente de controles regulares.

Uma observação importante a essa altura, em relação à existência de controles regulares, é a condição de posto de álgebra de Lie. Sob essa hipótese os controles normais se tornam regulares através de uma reparametrização como dito acima. A proposição 2.4.3 é uma modificação de um resultado clássico devido a Sussmann e pode ser vista então como uma generalização suave do caso normal para o caso regular. Ao longo deste capítulo provamos alguns resultados para controles regulares que precisaremos para o progresso do trabalho e para referências futuras. Esses resultados envolvem a concatenação entre controles normais e regulares (proposição 2.2.4), reversibilidade de regularidade (lema 2.2.5) e a relação entre normalidade e regularidade (proposição 2.4.1). Finalmente, relacionamos a homotopia monotônica com concatenação (proposição 2.5.2) e mostramos que a homotopia monotônica pode ser levada às trajetórias revertidas (proposição 2.5.3).

Capítulo 3: contém um dos resultados principais da tese, i.e., o teorema 3.1.1 que estabelece uma construção, para homotopia monotônica, de um análogo do recobrimento simplesmente conexo de um espaço topológico. Mais precisamente, seja  $\Sigma$  um sistema de controle no espaço estado  $M$  (uma variedade diferenciável de dimensão finita). Fixando um ponto inicial  $x$  em  $M$  consideramos o conjunto de trajetórias regulares a partir de  $x$  e denotamos por  $\Gamma(\Sigma, x)$  o conjunto de classes de homotopia monotônica dessas trajetórias. Logo mostramos que existe uma estrutura de variedade em  $\Gamma(\Sigma, x)$  tal que a aplicação de ponto-final  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow M$  é um difeomorfismo local no sentido em que sua diferencial é um isomorfismo em cada ponto de  $\Gamma(\Sigma, x)$  (veja corolário 3.1.3). Mais ainda, a imagem de  $\varepsilon$  é contida no interior  $\text{int}\mathcal{A}(x)$  do conjunto acessível de  $x$ , e ela é de fato  $\text{int}\mathcal{A}(x)$  desde que assumimos a condição de posto de álgebra de Lie. Tudo isso em algum sentido pode ser visto como um análogo (para homotopia monotônica) do

recobrimento simplesmente conexo de um espaço topológico. Neste caso, a aplicação  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow \text{int}\mathcal{A}(x)$  é o análogo da aplicação de recobrimento simplesmente conexo clássico.

Capítulo 4: estuda o processo de levantamento. De fato, levantamos o sistema  $\Sigma$  à  $\Gamma(\Sigma, x)$  via o difeomorfismo local  $\varepsilon$ . Centramos nossa atenção ao sistema levantado  $\tilde{\Sigma}$  para relacionar suas propriedades com a homotopia monotônica das trajetórias do sistema original  $\Sigma$ . Notemos que levantamento não é direto. Isto é, o ponto inicial  $x$  em geral não está no seu conjunto acessível e também para levantar as trajetórias do sistema  $\Sigma$  através de  $\varepsilon$  temos que ter trajetórias dentro de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ . Em geral as trajetórias (mesmo as regulares) não estão inteiramente contidas no conjunto  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ . A idéia para evitar essa complicação técnica é fazer toda construção dentro de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  tomando um ponto  $z_0$  regularmente atingível a partir de  $x_0$  e logo deixar a condição inicial  $x_0$  no meio trocando os papéis de  $z_0$  com  $x_0$ , i.e. assumir  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$  para algum  $x_1 \in M$  e tentar voltar atras um pouco. Continuando assim, provamos um resultado que relaciona  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  com  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  onde  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Mais precisamente mostramos na proposição 4.2.6 que  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  é uma subvariedade aberta de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . A partir dessa proposição é possível provar que duas trajetórias são monotonicamente homotópicas se, e somente se, seus levantamentos têm as mesmas extremidades em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  (veja, teorema 4.2.7). Isto pode ser visto também como uma caracterização de homotopia monotônica para as trajetórias em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

Capítulo 5: considera as propriedades universais de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Por propriedade universal entenderemos o seguinte: Seja  $N$  uma variedade qualquer que recobre o conjunto  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  através de um difeomorfismo local sobrejetor  $\pi$ . Então existe um difeomorfismo local  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  tal que  $\pi \circ f = \varepsilon_{x_0}$  onde  $\varepsilon_{x_0}$  denota o difeomorfismo local  $\Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  do corolário 3.1.3.

Para construir uma tal aplicação  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  levantamos primeiro trajetórias regulares a partir de  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  a ambas variedades  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  e  $N$ , e obtemos aplicações definidas em  $\Gamma(\Sigma, z_0)$ . Em seguida estendemo-las ao espaço todo  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Mostramos também que a aplicação  $f$  obtida dessa maneira não é necessariamente sobrejetora devido à questão da controlabilidade do sistema levantado  $\tilde{\Sigma}$  em  $N$ .

Capítulo 6: compara a homotopia monotônica com a homotopia usual. Evidentemente homotopia monotônica implica homotopia entre trajetórias.

Mas, a recíproca em geral não acontece como se vê no exemplo dado neste capítulo. Notemos que esse exemplo também mostra que a aplicação  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow \text{int}\mathcal{A}(x)$  em geral não é uma aplicação de recobrimento. Resumindo, o ponto fundamental é decidir quando existe uma homotopia monotônica entre duas trajetórias que são homotópicas como curvas. Deste ponto de vista, o objetivo principal deste capítulo é procurar condições sobre o sistema para que trajetórias homotópicas com mesmo ponto final sejam também monotonicamente homotópicas.

Capítulo 7: procura relacionar as construções feitas nos capítulos precedentes com um dos problemas apresentados em [16]. Mais precisamente, a homotopia monotônica foi considerada também na teoria de semigrupos por Lawson de uma maneira um pouco diferente que a nossa [15], [16]. O objetivo desses trabalhos foi o de estender construções clássicas de grupos de recobrimento universal a semigrupos de Lie. O problema é saber se é possível identificar o semigrupo  $\Gamma(\Sigma, 1)$ , onde 1 denota o elemento neutro do grupo, e o semigrupo de recobrimento universal de um semigrupo de Lie  $S$  (ou semigrupo infinitesimalmente gerado). Através de sistemas de controle invariantes em grupos de Lie, os resultados já obtidos são enunciados também no contexto de teoria de semigrupos de Lie, ao invés da teoria do controle. Notemos que o problema indicado acima foi resolvido em [16] para o caso particular de semigrupos de Ol'shanskii. Então nós abordamos o caso de semigrupos gerais utilizando os resultados obtidos sobre o recobrimento universal do controle.

Capítulo 8: é baseado na particularização dos resultados já obtidos nos capítulos precedentes para o contexto de conjuntos de controle. Nesse caso, o problema de valor inicial pode ser melhorado para conjuntos de controle assumindo  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$ . Daí devido à existência de trajetórias periódicas regulares definimos o semigrupo fundamental em relação a homotopia monotônica, análogo de grupo fundamental de um espaço topológico, veja Coloniuss-Spadini [4].

# Lista de símbolos

$\mathbb{R}_+^k$	espaço Euclidiano com coordenadas positivas
$\mathbb{H}$	grupo de quatérnions com coeficientes reais
$\mathbb{RP}^2$	espaço projetivo real
$\text{diag}\{a, b, c\}$	matriz diagonal
$\text{ger}\{i, j\}$	espaço gerado por $i$ e $j$
$\dim(M)$	dimensão de $M$
$T_x M$	espaço tangente a $M$ em $x$
$TM$	fibrado tangente de $M$
$X$	campo de vetores
$\mathcal{X}^\infty(M)$	espaço vetorial de campos diferenciáveis em $M$
$\{X^1, X^2, \dots, X^k\}$	seqüência finita dos campos
$X_t$	fluxo induzido por $X$
$\Sigma$	sistema de controle, família de campos de vetores, cone, etc
$-\Sigma$	sistema revertido
$S_\Sigma$	semigrupo do sistema $\Sigma$
$S_\Sigma(x)$	órbita positiva de $x$
$G_\Sigma$	grupo do sistema $\Sigma$
$G_\Sigma(x)$	órbita de $x$
$u$	função de controle, controle
$\mathcal{U}$	espaço de controles
$\mathcal{U}_{pc}$	espaço de controles constantes por pedaços
$u * v$	concatenação de controles, trajetórias, etc
$X_u$	campo de vetores parametrizado por $u$
$\text{dom}(X_u)$	domínio de $X_u$
$\mathcal{L}(\mathcal{F})$	álgebra de Lie gerada por $\mathcal{F}$
$\Delta_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}$	distribuição que corresponde a $\mathcal{L}(\mathcal{F})$
$\mathcal{A}_\Sigma(x)$	conjunto acessível do sistema $\Sigma$ a partir de $x$
$\text{int}(D)$	interior de $D$

$fe(D)$	fecho de $D$
$trj_x(u)$	trajetória (a partir de $x$ ) que corresponde ao controle $u$
$T(\Sigma)$	espaço de trajetórias de $\Sigma$
$T(\Sigma, x)$	espaço de trajetórias de $\Sigma$ a partir de $x$
$trj_x$	aplicação $\mathcal{U} \rightarrow T(\Sigma, x)$
$e_x$	aplicação de avaliação
$\mathcal{A}(x)$	imagem de $e_x$
$\mathcal{R}_\Sigma(x)$	controles regulares de $\Sigma$ em $x$
$\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$	conj. regularmente acessível de $\Sigma$
$\mathcal{A}_R(\Sigma, x)^\sim$	recobrimento univ. simpl. conexo de $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$
$\mathcal{A}_N(\Sigma, x)$	conj. normalmente acessível de $\Sigma$
$Im(f)$	imagem de $f$
$ker(f)$	núcleo de $f$
$R(\Sigma, x, y)$	espaço de trajetórias regulares de $\Sigma$ de $x$ a $y$
$\simeq_m$	monotonicamente homotópico
$\square_m$	classe de homotopia monotônica
$\alpha \simeq_m \beta$	$\alpha$ é monotonicamente homotópica a $\beta$
$\alpha \simeq_{\mathcal{A}} \beta$	$\alpha$ é homotópica a $\beta$ dentro de $\mathcal{A}(x_0)$
$\Gamma(\Sigma, x)$	espaço de classes de homotopia monotônica
$\widehat{\Sigma}$	levantamento de $\Sigma$ a $\Gamma(\Sigma, x)$
$\widehat{trj}_y(u)$	levantamento de $trj_z(u)$ com $\varepsilon(y) = z$
$\varepsilon_{x_0}$	aplicação de avaliação
$G$	grupo de Lie
$\mathfrak{g}$	álgebra de Lie de $G$
$\exp$	aplicação exponencial
$L_g$	translação à esquerda
$R_g$	translação à direita
$S$	semigrupo
$S^{-1}$	semigrupo inverso de $S$
$\widetilde{S}$	semigrupo de recobrimento univ. de $S$ , levantamento de $S$ , etc
$Sg$	órbita de $S$ a partir de $g$
$D$	conjunto de controle
$C$	conjunto de controle invariante
$P(\Sigma, x)$	conj. de trajetórias regulares periódicas de $\Sigma$ baseadas em $x$
$\Lambda(\Sigma, x)$	semigrupo fundamental de homotopia monotônica

# Capítulo 1

## Generalidades

Esta parte introdutória é baseada no apêndice A sobre a teoria geométrica do controle do livro de Coloniuss-Kliemann, [6], e nas notas não publicadas sobre órbitas de famílias de campos de vetores de San Martin, [19].

### 1.1 Sistemas de controle e suas órbitas

**Definição 1.1.1** *Um sistema de controle é dado pelos seguintes objetos :*

1. *O espaço estado  $M$ , uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ ;*
2. *O conjunto de controles admissíveis*

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U, \text{ localmente integrável}\}$$

*onde  $U$  denota um espaço de controles. Portanto requeremos que os controles sejam integráveis em cada intervalo limitado.*

3. *As dinâmicas*

$$\dot{x} = X(x, u(t)). \tag{1.1}$$

*Mais precisamente, a dinâmica do sistema é dada por uma família de equações diferenciais que dependem de controles. Assumimos que para todo  $u \in \mathcal{U}$  a aplicação  $X_u : p \mapsto X(p, u)$  de  $M$  no fibrado tangente  $TM$  de  $M$  é um campo de vetores diferenciável em  $M$ . Então, para todo  $u \in \mathcal{U}$  e  $x \in M$ , a equação diferencial  $\dot{x} = X(x, u)$  tem soluções locais únicas  $\varphi(t, x, u)$  com  $\varphi(0, x, u) = x$  no tempo  $t = 0$ . Mesmo que*

não seja essencial para nossos resultados por conveniência suporemos que os campos de vetores  $X_u$ ,  $u \in \mathcal{U}$ , são completos. Isto é, as soluções existem globalmente para  $t \in \mathbb{R}$  e portanto o subgrupo a 1-parâmetro correspondente  $\Theta_u : (t, x) \mapsto \varphi(t, x, u)$  é definido em  $\mathbb{R} \times M$ . Daí que a curva integral  $\Phi(t) =: \varphi(t, x, u)$  satisfaz

$$\Phi_* \left( \frac{d}{dt} \right) \Big|_t = \dot{\Phi}(t) = X_u(\Phi(t)), \quad \Phi(t) = x$$

e  $\Theta_u(t, x) = \Phi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in M$ . Notemos que as curvas integrais de um sistema de controle são chamadas de trajetórias. Dividindo essas soluções em pedaços obtemos soluções para controles constantes por pedaços ou curvas integrais quebradas.

Na definição acima, alternativamente admitimos também apenas controles constantes por pedaços  $u$  (i.e.,  $\mathbb{R}$  se decompõe em subintervalos cujos comprimentos são inferiormente limitados de tal maneira que  $u$  é constante em cada um desses subintervalos). Denotamos por

$$\mathcal{U}_{pc} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U, \quad u \text{ é constante por pedaços}\}$$

o conjunto desses controles. Uma observação importante sobre esta classe é que através do lema de aproximação, provado por Sussmann [29], os resultados obtidos para sistemas de controle considerando apenas controles constantes por pedaços podem ser estendidos aos sistemas mais gerais aproximando um controle qualquer por essa classe.

Um sistema de controle é determinado pela seguinte coleção correspondente de campos de vetores parametrizados por controles

$$\mathcal{F} = \{X_u : u \in \mathcal{U}\}.$$

Além do mais, esta família de campos deve satisfazer

$$M = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{dom}(X_u) \tag{1.2}$$

Portanto, a teoria (geométrica) do controle pode ser vista também como a teoria de famílias de campos de vetores ou poli-sistemas dinâmicos. Por essa razão, ao longo do texto, uma família  $\Sigma$  de campos de vetores será dominada também por sistema de controle.

Agora, seja  $\Sigma$  um sistema de controle sobre uma variedade diferenciável conexa  $M$  de dimensão finita. Suponhamos que para cada  $u$ ,  $\text{dom}(X_u)$  é aberto em  $M$ . Portanto a condição dada em (1.2) não é restritiva, pois sempre é possível considerar o sistema sobre a variedade  $\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{dom}(X_u)$ . Denotamos por  $X_t$  o fluxo (de difeomorfismos locais) induzido por um campo  $X$  em  $\Sigma$ . Associado a  $\Sigma$ , temos então um semigrupo  $S_\Sigma$  gerado por  $\Sigma$ , ou semigrupo do sistema, que é definido por

$$S_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \cdots \circ X_{t_k}^k : X^i \in \Sigma \text{ e } t_i \in \mathbb{R}^+\},$$

Notemos que  $S_\Sigma$  é um semigrupo no sentido local. Pois, o produto é dado pela composta de difeomorfismos a menos de localização do domínio e as inversas dos elementos de  $S_\Sigma$  não estão em geral em  $S_\Sigma$  por exigência do tempo positivo. De maneira semelhante, temos

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \cdots \circ X_{t_k}^k : X^i \in \Sigma \text{ e } t_i \in \mathbb{R}\}$$

o grupo (local) gerado pelos fluxos dos campos em  $\Sigma$ , sem restrição de que o tempo seja positivo. Portanto, este conjunto é fechado por composições e por elementos inversos, isto é, permite-se o retorno no tempo. De fato,  $(X_t)^{-1} = X_{-t}$ .

A órbita pelo sistema em tempo positivo, ou simplesmente órbita positiva, a partir de  $x \in M$  se define como a órbita de ação do semigrupo local  $S_\Sigma$  sobre  $x$ , isto é,

$$S_\Sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \in S_\Sigma\}.$$

**Definição 1.1.2** *Seja  $\Sigma$  um sistema de controle numa variedade  $M$ . O conjunto*

$$\mathcal{A}_\Sigma(x) = \{y \in M : y = \varphi(t, x, u) \text{ para algum } u \in \mathcal{U}_{pc} \text{ e } t > 0\}$$

*é dito o conjunto dos pontos atingíveis ou simplesmente conjunto acessível a partir de  $x \in M$  por concatenações de trajetórias dos campos de  $\Sigma$ , com a restrição de que se consideram apenas as partes positivas das trajetórias.*

Observe que, a partir dessa definição,  $S_\Sigma(x)$  coincide com  $\mathcal{A}_\Sigma(x)$ . Por outro lado, associado às órbitas positivas, temos os seguintes conceitos :

**Definição 1.1.3**  *$\Sigma$  é dito controlável a partir de  $x \in M$  se  $S_\Sigma(x) = M$ .  $\Sigma$  é controlável se o for a partir de todo  $x \in M$ .*

A questão de controlabilidade é um problema fundamental na teoria do controle. Para um sistema de controle não linear não podemos esperar em geral controlabilidade com  $U$  limitado por exemplo.

**Definição 1.1.4**  $\Sigma$  é dito *aproximadamente controlável a partir de*  $x \in M$  se  $\text{fe}S_\Sigma(x) = M$  e é *aproximadamente controlável se o for a partir de todo*  $x \in M$ .

O problema de controlabilidade é dividido em duas partes; o problema da órbita, e o problema de acessibilidade, que é o que nos interessa mais. Então enunciaremos o seguinte resultado fundamental sobre as órbitas do sistema sem demonstrar e logo passar à parte de acessibilidade.

**Teorema 1.1.5** (*Teorema da órbita*) *Seja*  $\mathcal{F} = \{X_u : u \in \mathcal{U}\}$  *uma família de campos de vetores diferenciáveis sobre uma variedade diferenciável*  $M$ . *Então para cada*  $x \in M$  *a órbita*  $G_\Sigma(x)$  *é uma subvariedade imersa quase-regular de*  $M$ .

**Demonstração:** Veja *Sussmann* [28], *Stefan* [26] e o apêndice A de [6].  $\square$

## 1.2 Acessibilidade

Uma outra propriedade que é obviamente mais fraca que a propriedade de controlabilidade é a acessibilidade do sistema. Consideramos então a seguir esta propriedade e os resultados mais básicos.

**Definição 1.2.1** *O sistema*  $\Sigma$  *é dito acessível a partir de*  $x \in M$  *se*  $\text{int}S_\Sigma x \neq \emptyset$ . *O sistema satisfaz a propriedade de acessibilidade, ou simplesmente*  $\Sigma$  *é acessível se o for a partir de todo*  $x \in M$ .

Evidentemente, o interior de  $S_\Sigma x$  está contido no interior de  $G_\Sigma x$ . Então, quando o sistema  $\Sigma$  for acessível a partir de  $x \in M$ , temos que  $\dim G_\Sigma x = \dim M$ .

### 1.2.1 Condição de posto de álgebra de Lie

**Definição 1.2.2** Diremos que  $\Sigma$  satisfaz a condição de posto de álgebra de Lie se

$$\dim \Delta_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} = \dim M \quad \text{para todo } x \in M$$

onde  $\Delta_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}$  significa a distribuição que corresponde a álgebra de Lie  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  gerada por  $\mathcal{F}$ .

Veremos mais para adiante que esta condição tem importância para o desenvolvimento de nosso trabalho, e em particular, para garantir a existência de controles regulares introduzidos no próximo capítulo. Como os resultados neste texto usam, com bastante frequência, a propriedade de acessibilidade local de sistemas de controle, damos a seguinte

**Definição 1.2.3** Um sistema de controle é dito localmente acessível se para todo  $x \in M$  e toda vizinhança  $N$  de  $x$ , o conjunto  $A_{\Sigma}(x) \cap N$  tem interior não vazio.

Notemos aqui que a condição de posto de álgebra de Lie definida acima garante a acessibilidade local de um sistema de controle. Por este motivo apresentamos a seguir um teorema conhecido.

**Teorema 1.2.4** (Krener) Seja  $\Sigma$  um sistema de controle como em (1.1) sobre uma variedade  $M$  e com campos de  $\mathcal{F}$ . Assuma que a distribuição  $\Delta_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}$  correspondente a álgebra de Lie  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  gerada por  $\mathcal{F}$  satisfaz  $\Delta_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}(x) = T_x M$  para todo  $x \in M$ . Então o sistema é localmente acessível.

**Demonstração:** Veja, ([6], Theorem A.4.4). □

Este teorema mostra que as órbitas positivas, em tempos pequenos, de cada ponto tem pontos interiores na órbita inteira. Mais ainda, temos a seguinte

**Proposição 1.2.5** Se o sistema  $\Sigma$  for localmente acessível, então o interior  $\text{int}A_{\Sigma}(x)$  é denso em  $A_{\Sigma}(x)$ .

**Demonstração:** Veja, ([6], Proposição A.4.9). □

### 1.2.2 Acessibilidade Normal

Se um estado  $y$  em  $M$  é atingível (ou acessível) a partir de um outro estado  $x$  em  $M$  então existem campos  $X^1, X^2, \dots, X^k$  em  $\Sigma$  e  $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$  com coordenadas positivas tal que  $y = X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x)$ . Seguindo Sussmann [27], definimos uma noção mais forte do que acessibilidade e que torna-se importante no estudo de propriedades topológicas de conjuntos acessíveis e controlabilidade.

**Definição 1.2.6** *Um ponto  $y$  em  $M$  é dito normalmente acessível a partir de  $x$  em  $M$  se existem  $X^1, X^2, \dots, X^k$  em  $\Sigma$  e um  $\tau \in \mathbb{R}^k$  com coordenadas positivas  $t_1, t_2, \dots, t_k$  tal que a aplicação*

$$\rho_{D,x}(t_1, t_2, \dots, t_k) = X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x)$$

*satisfaz seguintes condições :*

1.  $\rho_{D,x}(\tau) = y$
2. O posto da diferencial  $d(\rho_{D,x})_\tau$  de  $\rho$  no ponto  $\tau$  é igual a dimensão de  $M$ .

Finalmente notemos que as noções mencionadas acima, i.e., controlabilidade, controlabilidade aproximada e acessibilidade, estão relacionadas com sistemas de controle e dependem apenas de semigrupo do sistema  $S_\Sigma$ . Portanto, podemos usá-las, sem perda de generalidade, para semigrupos arbitrários.

## 1.3 Conjuntos de controle

Os conjuntos de controle são essenciais para o estudo de sistemas de controle não linear. Mais precisamente, esses conjuntos são regiões maximais dentro do espaço de estado onde a controlabilidade aproximada ocorre. A seguinte definição especifica as propriedades desses conjuntos.

**Definição 1.3.1** *Um conjunto  $D \subset M$  é dito conjunto de controle de um sistema  $\dot{x} = X(x, u)$  se*

1. Para todo  $x \in D$ , existe uma trajetória  $\varphi(\cdot, x, u)$  correspondente a um estado inicial  $x$  no tempo  $t = 0$  e uma função de controle  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $\varphi(t, x, u) \in D$  para  $t \geq 0$ ,

2.  $D \subset \text{fe}(\mathcal{A}(x))$  para todo  $x \in D$ ,
3.  $D$  é maximal com estas propriedades, isto é, se  $D' \supset D$  satisfaz (1)-(2), então  $D' = D$ .

Notemos que essa definição não muda se usarmos controles constantes por pedaços no lugar de controles localmente integráveis (veja [6], Seção 3.2). A primeira propriedade na definição pede que possamos ficar dentro de  $D$  para todos os tempos positivos, e a propriedade (2) significa que a partir de um ponto em  $D$  podemos alcançar aproximadamente qualquer outro ponto de  $D$ . Deste ponto de vista, qualquer conjunto  $D_0$  satisfazendo as propriedades (1)-(2) está contido num conjunto de controle, ([6], *Proposição 3.2.5*). Em particular, conjuntos de controle são dois a dois disjuntos.

**Definição 1.3.2** *Um conjunto de controle  $C \subset M$  é dito invariante se  $\text{fe}C = \text{fe}(\mathcal{A}(x))$  para todo  $x \in C$ .*

**Observações:**

1. Qualquer conjunto  $D \subset M$  com  $\text{int}D \neq \emptyset$  que seja maximal com a propriedade de que  $D \subset \text{fe}(\mathcal{A}(x))$  para todo  $x \in D$  torna-se um conjunto de controle, ([6], *Proposição 3.2.4*).
2. Uma outra observação interessante é a condição de não-retorno, isto é, uma vez que saímos do conjunto de controle o retorno não é mais permitido, ([6], *Proposição 3.2.3*).
3. Notemos também que muitos resultados sobre conjuntos de controle não valem sem a hipótese de acessibilidade local e com interior vazio pela dificuldade que causa.

□

## Capítulo 2

# Regularidade e Homotopia Monotônica

Notemos que a partir deste capítulo teremos, ao longo do trabalho, uma situação um pouco diferente da que foi apresentada no capítulo anterior para o contexto de sistemas de controle. Em particular, reparametrizamos as trajetórias do sistema uma vez que só nos interessa suas propriedades geométricas. Assumimos também, por razões topológicas, que a nossa variedade  $M$  seja dada com uma métrica Riemanniana que induz uma função de distância  $d$ .

### 2.1 Trajetórias não paramétricas

Considere  $E$  um subespaço vetorial de dimensão finita do espaço vetorial  $\mathcal{X}^\infty(M)$  (sobre  $\mathbb{R}$ ) de campos de vetores diferenciáveis em  $M$ . Novamente, por razões topológicas assumimos que  $E$  admite produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seja  $\Sigma \subset E$  um cone convexo gerador em  $E$ , (isto é,  $E$  não admite nenhum subespaço próprio que contém  $\Sigma$ ).

Como caso particular, consideremos um sistema de controle afim

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^m v_i X_i(x)$$

onde  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  assume valores num conjunto convexo  $U$ . Neste caso  $E$  é o subespaço vetorial gerado pelos campos  $X_0, X_1, \dots, X_m$  e  $\Sigma$  é o cone em  $E$  gerado por campos em  $X_0 + \sum_{i=1}^m v_i X_i$ ,  $v \in U$ .

Um outro caso particular que nos interessa neste trabalho seria tomar um grupo de Lie  $G$  e um cone  $\Sigma \subset \mathfrak{g}$  na álgebra de Lie de  $G$ . Neste caso  $E \subset \mathfrak{g}$  é nada mais nada menos do que o subespaço gerado por  $\Sigma$  no espaço dos campos de vetores invariantes à direita em  $G$ .

Dado  $x \in M$ , denotamos por  $E(x)$  o subespaço do espaço tangente  $T_x M$  obtido avaliando os campos de  $E$  no ponto  $x$ , i.e.,  $E(x) = \{X(x) : X \in E\}$ . De maneira semelhante, a aplicação de avaliação possui um cone convexo  $\Sigma(x) \in T_x M$ . E também temos assumido uma norma em  $E$  de tal modo que a inclusão de  $E$  no espaço dos campos seja diferenciável para que  $v \in E \rightarrow v(x) \in T_x M$  também seja diferenciável.

Ao longo do texto, nos concentraremos no espaço das trajetórias de  $\Sigma$  onde por trajetória entendemos uma curva  $\alpha$  em  $M$  com a propriedade  $\alpha'(t) \in \Sigma(\alpha(t))$ . Em princípio, uma trajetória pode ser definida em um intervalo arbitrário  $[0, T]$ . Mas já que estamos interessados especialmente em propriedades geométricas das trajetórias (i.e. nos seus traços) então basta defini-las em  $[0, 1]$  apenas, reparametrizando as trajetórias. Isso é possível pelo fato de  $\Sigma$  ser um cone. De fato, se  $\alpha : [0, T] \rightarrow M$ ,  $T > 0$ , é uma trajetória então a curva  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  definida por  $\beta(t) = \alpha(Tt)$  satisfaz  $\beta'(t) = T\alpha'(Tt) \in \Sigma(\beta(t))$  e, portanto, dá uma trajetória. Esses comentários todos justificam as seguintes definições:

Denote por  $\mathcal{E}$  o espaço de Banach das funções mensuráveis e limitadas  $u : [0, 1] \rightarrow E$  munido com a norma do supremo (essencial)  $\|\cdot\|_\infty$ . Seja  $\mathcal{U}$  o cone convexo formado pelas funções  $u \in \mathcal{E}$  que assumem valores em  $\Sigma$ . A hipótese de que  $\Sigma$  é um cone gerador em  $E$  implica que  $\mathcal{U}$  tem pontos interiores em  $\mathcal{E}$  com respeito a norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Os elementos de  $\mathcal{U}$  são chamados de funções de controle de  $\Sigma$ .

Dada uma função de controle  $u : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  e uma condição inicial  $x \in M$ , a trajetória correspondente  $\text{trj}_x(u) : [0, 1] \rightarrow M$  é a solução de equação diferencial

$$\dot{x} = u(t)(x)$$

a partir de  $x$ . Comparando com (1.1), podemos ver que essa última equação também é um pouco diferente da que foi dada antes. Com efeito, o controle  $u$  pode ser visto como uma curva que para cada  $t$  nos dá um campo de vetores em  $\Sigma$ . A partir de agora usaremos a notação  $\text{trj}_x(u)$  em vez da notação usada  $\varphi(\cdot, x, u)$ . O conjunto das trajetórias de  $\Sigma$  será denotado por  $T(\Sigma)$  e para conjunto das trajetórias a partir de  $x$  usaremos a notação  $T(\Sigma, x)$ .

Notemos que o espaço  $\mathcal{E}$  pode ser considerado com a topologia fraca\* que é a topologia mais fraca tal que para todo  $y \in L_1([0, 1], E)$  a função linear  $u \mapsto \int_0^1 \langle y(t), u(t) \rangle dt$  é contínua.

O conjunto dos pontos finais das trajetórias

$$\mathcal{A}_\Sigma(x) = \{\text{trj}_x(u)(1) : u \in \mathcal{U}\}$$

é dito conjunto de acessibilidade (do sistema  $\Sigma$ ) a partir de  $x$ , e denotaremos simplesmente por  $\mathcal{A}(x)$ .

Equivalentemente,  $\mathcal{A}(x)$  é a imagem da aplicação  $e_x : \mathcal{U} \rightarrow M$  que associa a  $u$  o ponto final  $\text{trj}_x(u)(1)$  da sua trajetória. Finalmente notemos que a aplicação  $x \mapsto \text{trj}_x(u)(1)$  com  $u$  fixo é um difeomorfismo local como segue da teoria de existência e unicidade.

Feito isso, o próximo passo é topologizar o espaço  $T(\Sigma, x)$ . Naturalmente existem várias topologias diferentes sobre esse espaço como a topologia de convergência uniforme, a topologia compacto-aberta, etc. Mas a topologia mais adequada para o contexto que seguimos ao longo do trabalho é a topologia  $\mathcal{C}^1$  que provém de uma métrica dada por

$$d_1(\alpha, \beta) = \sup_{t \in [0,1]} d(\alpha(t), \beta(t)) + \text{ess sup}_{t \in [0,1]} |\alpha'(t) - \beta'(t)|.$$

A continuidade da aplicação  $\text{trj}_x : \mathcal{U} \rightarrow T(\Sigma, x)$  para qualquer  $x$  é consequência bem conhecida dos teoremas sobre dependência contínua das soluções de equações diferenciais em relação a parâmetros. Portanto, temos a seguinte

**Proposição 2.1.1** *A aplicação  $\text{trj}_x$  é aberta em relação a topologia  $\mathcal{C}^1$  sobre o conjunto das trajetórias.*

**Demonstração:** Dado  $W \subset \mathcal{U}$  um aberto e  $w \in W$ . Pela própria estrutura da métrica  $d_1$ , a  $\varepsilon$ -bola (aberta) de  $\text{trj}(w)$  está contida em  $\text{trj}(W)$ .  $\square$

Usando esta proposição temos o seguinte

**Corolário 2.1.2** *Um subconjunto  $A$  de  $T(\Sigma, x)$  é aberto se, e somente se, sua imagem inversa  $\text{trj}_x^{-1}(A)$  for aberta em  $\mathcal{U}$ .*

**Demonstração:** Com efeito, a continuidade da aplicação  $\text{trj}_x$  de  $\mathcal{U}$  -com a topologia de convergência uniforme- no espaço  $T(\Sigma, x)$  -com a topologia  $\mathcal{C}^1$ -

junto com a proposição acima garante a afirmação feita.  $\square$

Fixe  $x \in M$ . Definimos anteriormente a aplicação  $\text{trj}_x$  que associa a um controle  $u \in \mathcal{U}$  uma trajetória a partir de  $x$ . O ponto final dessa trajetória será representado por  $e_x(u)$ . Notemos que o domínio dessa aplicação pode ser todo o espaço de Banach  $\mathcal{E}$  no caso em que o sistema for completo. Mais uma vez pelos teoremas usuais sobre dependência das soluções sobre parâmetros segue que a aplicação  $e_x$  é diferenciável.

## 2.2 Controles Regulares

**Definição 2.2.1** *Uma função de controle  $u$  é dita regular num ponto  $x \in M$  se  $u \in \text{int}\mathcal{U}$  e a diferencial  $d(e_x)_u$  da aplicação de avaliação  $e_x$  em  $u$  for sobrejetora.*

O conjunto de controles regulares em  $x$  será denotado por  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ . Uma trajetória  $\alpha$  é dita regular se  $\alpha = \text{trj}_x(u)$  para algum  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$ . O conjunto de trajetórias regulares em  $x$  será representado por  $R(\Sigma, x)$  enquanto  $R(\Sigma, x, y)$  denota o conjunto de trajetórias regulares a partir de  $x$  cujo ponto final é  $y \in M$ . Denotamos por  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  o conjunto dos pontos acessíveis a partir de  $x$  via controles regulares.

**Proposição 2.2.2** *Os conjuntos  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  e  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  são abertos.*

**Demonstração:** A afirmação segue como uma aplicação do teorema da função implícita. Com efeito, observe que pela definição 2.2.1 um controle regular é nada mais nada menos do que um ponto regular da aplicação (diferenciável)  $e_x$ . Portanto, o conjunto  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  é um subconjunto aberto em  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  como sendo a imagem de  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  sob  $e_x$  também é aberto.  $\square$

Assumindo a condição de posto de álgebra de Lie, será mostrado adiante que esses conjuntos não são vazios.

### 2.2.1 Construções com controles regulares

Nesta seção, calculamos a diferencial da aplicação de ponto final em termos da equação adjunta (linearizada) para mostrar que a concatenação (tanto à

esquerda quanto à direita) de um controle regular com outro qualquer nos dá um novo controle regular. Antes disso, definimos a concatenação entre funções de controle.

**Definição 2.2.3** *Sejam  $u, v : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  dois controles. Denote por  $v * u$ , a concatenação de  $u$  com  $v$  que é definida como*

$$(v * u)(t) = \begin{cases} u(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

**Proposição 2.2.4** *Sejam  $u, v$  dois controles em  $\text{int}\mathcal{U}$ . Suponha que  $u$  é regular em  $x_0$ . Então,  $v * u$  é regular em  $x_0$ . Se  $v$  for regular no ponto final de  $\text{trj}_{x_0}(u)$  então  $v * u$  é regular em  $x_0$ .*

**Demonstração:** Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = u(t)(x) = f(t, x, u) \text{ com } x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

Seja  $\varphi_t$  o fluxo de (2.1) passando por  $x_0$  quando  $t = 0$ . Denote por  $d\varphi_t = \varphi_{t*}$ , o fluxo linearizado obtido levantando  $\varphi_t$  ao fibrado tangente  $TM$  de  $M$  via a diferencial. Como os campos de vetores em  $M$  podem ser levantados a  $TM$ , podemos em particular levantar o sistema  $\Sigma$  ao sistema  $\Sigma^*$  sobre  $TM$ . Se  $X$  é um campo em  $M$ , denotemos por  $X^*$  o campo levantado a  $TM$ . Por conseguinte, temos um cone  $\Sigma^*$  no espaço linear  $E^*$  (imagem de  $E$ ) dos campos em  $TM$ .

Retornando a equação (2.1), a derivada do fluxo  $\varphi_t$  com respeito ao parâmetro satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\dot{z} = f^*(t, z, u) + f'_u(t, x, u) \quad (2.2)$$

onde  $f'_u$ , a derivada parcial de  $f$  com respeito a  $u$ , pode ser pensada como uma curva dependente de controle. Daí a solução de (2.2) é dada pela fórmula:

$$z(t) = \varphi_{t*} \varphi_{\tau*}^{-1} x(\tau) \int_{\tau}^t \varphi_{s*}^{-1} f'_u(s, x(s), u) ds.$$

Portanto, a diferencial  $(de)_u(w)$  de  $e$  em  $u$ , avaliada em algum  $w$  como vetor tangente a curva indicada acima, é

$$(de)_u(w) = (d\varphi_1)_{x_0} \int_0^1 (d\varphi_t)_{x_0}^{-1} w(t) dt$$

onde  $\varphi_t$  significa o fluxo determinado pelo controle regular  $u : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ . Agora denote por  $\psi_s$  o fluxo determinado por um controle  $v$ , não necessariamente regular. Então, temos que

$$(de)_{v*u}(w) = (d\Phi_1)_{x_0} \int_0^1 (d\Phi_t)_{x_0}^{-1} w(t) dt \quad (2.3)$$

onde  $\Phi_t$  é o fluxo obtido concatenando os fluxos  $\varphi_t$  e  $\psi_t$ . Para escrever explicitamente a fórmula (2.3) em termos de dois fluxos  $\varphi_t$  e  $\psi_t$  precisamos de uma reparametrização da seguinte forma: Sejam

$$w_1(t) = \begin{cases} w(t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad w_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ w(t), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

i.e.  $w_1 = w|_{[0, \frac{1}{2}]}$  e  $w_2 = w|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ , e sejam  $\varphi_t^1$  e  $\psi_t^1$  os fluxos reparametrizados, determinados respectivamente pelos controles  $u_1$  e  $v_1$  dados por

$$u_1(t) = \begin{cases} u(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad v_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ v(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Daí segue que  $\varphi_{1/2}^1 = \varphi_1$  e  $\psi_{1/2}^1 = \psi_1$ . Então, a fórmula (2.3) torna-se

$$\begin{aligned} (de)_{v*u}(w) &= d(\psi_{1/2}^1)_{\varphi_{1/2}^1(x_0)} \circ \\ & \quad d(\varphi_{1/2}^1)_{x_0} \left\{ \int_0^{1/2} (d\varphi_{2t})_{x_0}^{-1} w_1(t) dt + \int_{1/2}^1 (d\psi_{2t-1})_{x_0}^{-1} w_2(t) dt \right\} \\ &= d(\psi_1)_{\varphi_1(x_0)} \circ d(e_{x_0})_u(w_1) + \\ & \quad d(\psi_1)_{\varphi_1(x_0)} \circ d(\varphi_1)_{x_0} \left\{ \int_{1/2}^1 (d\psi_{2t-1})_{x_0}^{-1} w_2(t) dt \right\} \\ &= d(\psi_1)_{\varphi_1(x_0)} d(e_{x_0})_u(w_1) + d(\psi_1)_{\varphi_1(x_0)} \circ d(\varphi_1)_{x_0} \circ \\ & \quad d(\psi_1)_{\varphi_1(x_0)}^{-1} \circ d(\psi_1)_{\varphi_1(x_0)} \left\{ \int_{1/2}^1 (d\psi_{2t-1})_{x_0}^{-1} w_2(t) dt \right\} . \end{aligned}$$

i.e.,

$$(de)_{v*u}(w) = d(\psi_1)_{\varphi_1(x_0)} d(e_{x_0})_u(w_1) + d(\psi_1 \circ \varphi_1 \circ \psi_1^{-1})_{\psi_1 \circ \varphi_1(x_0)} d(e_{\varphi_1(x_0)})_v(w_2). \quad (2.4)$$

Já que  $w$  é arbitrário, podemos escolhê-lo de tal modo que sua restrição ao intervalo  $[1/2, 1]$  é zero, i.e.,  $w_2 \equiv 0$ . Por outro lado, como a diferencial do fluxo  $\psi_t$  é um isomorfismo em cada ponto, ela preserva a dimensão e daí que  $(de)_{v*u}$  é sobre quando  $u$  for regular em  $x_0$ , mostrando que  $v * u$  é de fato regular em  $x_0$ .

Analogamente,  $v * u$  é regular em  $x_0$  desde que  $v$  seja regular no ponto  $\text{trj}_{x_0}(u)(1)$ . Com efeito, olhando (2.4) e trocando os papéis de  $\varphi_t$  e  $\psi_s$  basta escolher  $w$  sendo zero sobre o intervalo  $[0, 1/2]$ , o que implica regularidade de  $v * u$  em  $x_0$ , provando a proposição.  $\square$

O seguinte lema mostra que regularidade pode ser levada às trajetórias revertidas no tempo. Dado uma curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , escrevemos  $\alpha^-(t) = \alpha(1 - t)$ . Se  $\alpha$  for uma trajetória de  $\Sigma$  então  $\alpha^-$  é uma trajetória de  $-\Sigma$  onde  $-\Sigma = \{-X : X \in \Sigma\}$  denota sistema revertido. De fato, se  $\alpha = \text{trj}_x(u)$  então  $\alpha^- = \text{trj}_y(-u)$  onde  $y$  denota o ponto final de  $\alpha$  e  $-u$  é controle de  $-\Sigma$ .

**Lema 2.2.5** *Seja  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  e coloque  $y_0 = e_{x_0}(u)$ . Então  $-u \in \mathcal{R}_{-\Sigma}(y_0)$ . Equivalentemente, se  $\alpha \in R(\Sigma, x_0, y_0)$  então  $\alpha^- \in R(-\Sigma, y_0, x_0)$ .*

**Demonstração:** Evidentemente, a imagem de diferencial  $d(e_{x_0})_u : \mathcal{U} \rightarrow T_{\varphi_1(x_0)}M$  está contida no espaço tangente  $T_{\varphi_1(x_0)}M$ . Por outro lado, usando a hipótese de que  $u$  é regular em  $x_0$  sabemos que  $d(e_{x_0})_u$  é sobre e portanto  $\text{Im}(d(e_{x_0})_u) = T_{\varphi_1(x_0)}M$ . Denote por  $\psi_t$  a trajetória (revertida) de  $-\Sigma$  determinada por  $-u$ . Agora considere a aplicação  $d(e_{y_0})_{-u} : \mathcal{U} \rightarrow T_{x_0}M$  que é dada por

$$d(e_{y_0})_{-u}(w) = (d\psi_1)_{y_0} \int_0^1 (d\psi_t^{-1})_{\psi_t(y_0)} w(t) dt \in T_{x_0}M. \quad (2.5)$$

Afirmamos que esta última expressão é o espaço tangente todo  $T_{x_0}M$  para mostrar sobrejetividade de  $d(e_{y_0})_{-u}$ . Com efeito, (2.5) é igual a

$$\int_0^1 (d\psi_1)_{y_0} \circ (d\psi_t^{-1})_{\psi_t(y_0)} w(t) dt = \int_0^1 d(\psi_1 \circ \psi_t^{-1})_{\psi_t(y_0)} w(t) dt.$$

Mas,  $d(\psi_1 \circ \psi_t^{-1})_{\psi_t(y_0)} = d(\varphi_{1-t}^{-1})_{\varphi_{1-t}(x_0)} = d(\varphi_{1-t}^{-1})_{\psi_t(y_0)}$  o que implica pela regra da cadeia da derivada que  $\psi_1 \circ \psi_t^{-1} = \varphi_{1-t}^{-1}$ . Isto é, temos que

$$\begin{aligned} d(e_{y_0})_{-u}(w) &= \int_0^1 d(\psi_1 \circ \psi_t^{-1})_{\psi_t(y_0)} w(t) dt \\ &= \int_0^1 d(\varphi_{1-t}^{-1})_{\varphi_{1-t}(x_0)} w(t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

e mais ainda obtemos  $\varphi_{1-t} \circ \psi_1 = \psi_t$  que vale por definição. Por outro lado,

$$d(e_{x_0})_u(w) = (d\varphi_1)_{x_0} \int_0^1 (d\varphi_t^{-1})_{\varphi_t(x_0)} w(t) dt. \quad (2.7)$$

Já que as integrais em (2.6) e (2.7) são iguais a menos de mudança de variáveis  $t \mapsto 1-t$ , e  $(d\varphi_1)_{x_0}$  é um isomorfismo, segue que  $d(e_{y_0})_{-u}$  é sobre se, e somente se,  $d(e_{x_0})_u$  for. Portanto, concluímos que  $-u$  é controle regular em  $y_0$  para  $-\Sigma$ .  $\square$

## 2.3 Controles Normais

Para garantir existência de controles regulares assumimos a condição do posto da álgebra de Lie. Neste caso, podemos construir uma quantidade suficiente de controles constantes por pedaços que são regulares. De fato, sabe-se que sob a condição do posto da álgebra de Lie existem controles normais (no sentido de Sussmann [27]). Por outro lado, verificamos a seguir que um controle normal é regular se estiver no interior de  $\mathcal{U}$ . Isto mostra a existência de controles regulares.

Para relembrar da noção de controle normal, denote por  $X_t$  o fluxo induzido por um campo de vetores  $X$  sobre  $M$ . Se  $X^1, X^2, \dots, X^k$  são campos de vetores em  $\Sigma$ , podemos formar a função

$$\rho_x(t_1, t_2, \dots, t_k) = X_{t_k}^k \circ \dots \circ X_{t_1}^1(x)$$

com  $x \in M$ . Se  $t_1, t_2, \dots, t_k \geq 0$  então  $\rho(t_1, t_2, \dots, t_k)$  significa o ponto final de uma trajetória a partir de  $x$  definida por um controle constante por

pedaços. Segundo Sussmann [27], um tal controle é dito normal em  $x$  se o posto de  $\rho$  em  $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  é  $n = \dim M$ .

## 2.4 Relação entre normalidade e regularidade

Para estabelecer a relação entre controles normais e regulares, fixe  $X^1, X^2, \dots, X^k$  em  $\Sigma$ . Seja  $\mathbb{R}_+$  o conjunto dos números reais estritamente positivos. Cada  $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$  determina um controle constante por pedaços que assume valores  $X^i$  no intervalo  $[T_{i-1}, T_i]$  onde  $T_i = t_1 + \dots + t_i$  com  $t_0 = 0$ . Este controle é definido no intervalo  $[0, T_k]$ .

Reparametrizamos esses controles constantes por pedaços através das seguintes aplicações:

1. Seja

$$\Delta = \{(s_1, s_2, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k : s_1 + s_2 + \dots + s_k = 1\}$$

$k$ -simplexo em  $\mathbb{R}^k$  e seja  $\eta : \Delta \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^k$  aplicação definida por

$$\eta((s_1, s_2, \dots, s_k), T) = T(s_1, s_2, \dots, s_k).$$

Então,  $\eta$  é um difeomorfismo.

2. A aplicação  $\mu : \Delta \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{U}$  que associa a  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$  o controle constante por pedaços definido em  $[0, 1]$  cujo valores no intervalo  $[S_{j-1}, S_j]$  é  $TX^i$  onde  $S_i = s_1 + \dots + s_i$  e  $s_0 = 0$ .

Pela definição dessas aplicações obtemos o seguinte diagrama comutativo que dá uma reparametrização de controles definidos por  $\tau \in \mathbb{R}_+^k$

$$\begin{array}{ccc} \Delta \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{R}_+^k \\ \mu \downarrow & & \downarrow \rho_x \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{e_x} & M \end{array} \quad (2.8)$$

Com essas notações podemos provar agora a seguinte relação entre as diferenciais de  $e_x$  e  $\rho_x$ .

**Proposição 2.4.1** *Tome  $\xi \in \Delta \times \mathbb{R}_+$ . Então a diferencial  $d(e_x)_{\mu(\xi)}$  é sobrejetora se  $d\rho_x$  tem posto igual a  $n = \dim M$  em  $\eta(\xi)$ .*

**Demonstração:** A imagem de  $d(\rho_x)_\tau$  é gerada pelas seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial t_i}(\tau) = dX_{t_k}^k \circ \cdots \circ dX_{t_{i+1}}^{i+1}(X^i(z_i))$$

onde  $z_i = X_{t_i}^i \circ \cdots \circ X_{t_1}^1(x)$ . Por outro lado, coloque  $\xi = ((s_1, s_2, \dots, s_k), T)$  e denote por  $\varphi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , o fluxo induzido pelo controle  $\mu(\xi)$ . Escrevendo explicitamente

$$\varphi_t = TX_{t-S_{i-1}}^i \circ \cdots \circ TX_{t_1}^1 \quad (2.9)$$

se  $t \in [S_{i-1}, S_i]$  onde  $S_i = s_1 + \cdots + s_i$  e  $s_0 = 0$ . A fórmula de variação dos parâmetros dá

$$d(e_x)_{\mu(\xi)}(w) = (d\varphi_1)_x \int_0^1 (d\varphi_t)_x^{-1} w(t) dt$$

com  $w \in \mathcal{E}$ . Em particular, escolhemos  $w$  tal que

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [S_{i-1}, S_i] \\ X^i, & t \in [S_{i-1}, S_i] \end{cases}.$$

Então usando a expressão em (2.9) e o fato de que  $dX_t(X) = X$  para todo campo de vetores  $X$ , segue que

$$d(e_x)_{\mu(\xi)}(w) = T_{s_i} \frac{\partial \rho_x}{\partial t_i}(\tau).$$

Portanto, as derivadas parciais de  $\rho_x$  aparecem na imagem de  $d(e_x)_{\mu(\xi)}$ , mostrando a proposição.  $\square$

**Proposição 2.4.2** *Assumindo a condição de posto de álgebra de Lie, temos que o conjunto de controles regulares não é vazio.*

**Demonstração:** Pela hipótese, o cone convexo  $\Sigma$  gera  $E$  o espaço vetorial de dimensão finita de campos de vetores. Portanto,  $\text{int}\Sigma$  também gera  $E$  e a álgebra de Lie gerada por campos em  $\text{int}\Sigma$  coincide com a álgebra  $\mathcal{L}$  gerada por  $E$ . Então, usando a mesma técnica de mostrar que a condição de posto de álgebra de Lie implica acessibilidade (veja por exemplo, Jurdjevic [12]), segue que existem  $X^1, X^2, \dots, X^k$  em  $\text{int}\Sigma$  e  $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$  que definem

um controle normal. Este controle pertence a  $\text{int}\mathcal{U}$  com respeito a topologia de norma do supremo e é regular pela proposição 2.4.1.  $\square$

Reunindo essas proposições todas, podemos provar agora a seguinte

**Proposição 2.4.3** *Assumindo a condição de posto de álgebra de Lie, temos que  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x) = \text{int}\mathcal{A}(x)$ , e  $\text{fe}(\text{int}\mathcal{A}(x)) = \text{fe}\mathcal{A}(x)$ .*

**Demonstração:** A segunda igualdade foi mencionada anteriormente, veja proposição 1.2.5. Como  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  é aberto e  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x) \subset \mathcal{A}(x)$ , vale que  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x) \subset \text{int}\mathcal{A}(x)$ . Para mostrar a outra inclusão, sejam  $y \in \text{int}\mathcal{A}(x)$  arbitrário e  $V$  uma vizinhança de  $y$  contida em  $\text{int}\mathcal{A}(x)$ . Para controles normais, sabe-se que  $V \cap \mathcal{A}_N(-\Sigma, y) \neq \emptyset$  onde  $\mathcal{A}_N(-\Sigma, y)$  significa conjunto acessível a partir de  $y$  via trajetórias normais de  $-\Sigma$ . Isto é, existe um controle normal  $-v$  em  $y$  para  $-\Sigma$  tal que  $\text{trj}_y(-v)(1) = z$  para algum  $z$  em  $V$ . Agora, em vista de proposição 2.4.1 podemos trocar normalidade por regularidade e concluir que  $-v$  é regular em  $y$  e que  $z \in V \cap \mathcal{A}_R(-\Sigma, y) \supset V \cap \mathcal{A}_N(-\Sigma, y) \neq \emptyset$ . Pela reversibilidade de regularidade garantido no lema 2.2.5,  $v$  torna-se regular em  $z$  para  $\Sigma$  tal que  $\text{trj}_z(v)(1) = y$ .

Denote por  $\text{trj}_x(u)$  a trajetória a partir de  $x$  com ponto final  $z$  por algum controle  $u$ . Pela proposição 2.2.4, a trajetória que corresponde ao controle  $v * u$  é regular em  $x$  e une  $x$  a  $y$ . i.e.  $y \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ , completando a demonstração.  $\square$

## 2.5 Homotopia Monotônica

A homotopia monotônica entre trajetórias de um sistema  $\Sigma$  é um tipo de homotopia que conecta de uma maneira contínua trajetórias de  $\Sigma$  através de trajetórias. Evidentemente, podemos definir uma tal homotopia entre trajetórias quaisquer. Mas, já que a ênfase dada aqui é a homotopia entre trajetórias regulares definimos esse conceito de homotopia no contexto do espaço das trajetórias regulares. Lembramos que para  $x, y \in M$  o conjunto  $R(\Sigma, x, y)$  de trajetórias regulares de  $\Sigma$  começando em  $x$  e terminando em  $y$  é munido com a topologia  $\mathcal{C}^1$ .

**Definição 2.5.1** *Duas trajetórias  $\alpha$  e  $\beta$  são chamadas de monotonicamente (ou causalmente) homotópicas ( $\alpha \simeq_m \beta$ ) se existe uma função contínua  $h_t$  :*

$[0, 1] \rightarrow R(\Sigma, x, y)$  tal que  $h_0 = \alpha$ ,  $h_1 = \beta$  e para cada  $s$ ,  $s \mapsto h_t(s)$  é uma trajetória regular começando em  $x$  e terminando em  $y$  ou alternativamente se existem  $x, y \in M$  tal que  $\alpha$  e  $\beta$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $R(\Sigma, x, y)$ .

Esta variante da homotopia aparece na literatura com nomes diferentes, veja Coloniuss-Spadini [3], [4] e Lawson [15], [16]. Em vista disso, usaremos qualquer um dos termos de *homotopia causal*, *homotopia monotônica* ou *homotopia dinâmica*, no sentido da definição acima. As vezes usaremos o termo de *homotopia geométrica* para a homotopia usual entre curvas.

Note que a relação de ser monotonicamente homotópica define uma relação de equivalência. Então, se fixarmos uma condição inicial  $x_0 \in M$  o conjunto de classes de homotopia monotônica das trajetórias em  $R(\Sigma, x_0)$  será representado por  $\Gamma(\Sigma, x_0) = R(\Sigma, x_0) / \simeq_m$ . A aplicação  $\pi : R(\Sigma, x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  é a projeção canônica que associa a uma trajetória regular  $\alpha$  sua classe de homotopia monotônica  $[\alpha]_m$ . Também escrevemos  $\tau = \pi \circ \text{trj}$  para denotar a aplicação que associa a uma função de controle a classe de homotopia monotônica de sua trajetória. Abaixo estabelecemos uma relação entre a homotopia monotônica e a concatenação de trajetórias.

**Proposição 2.5.2** *Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\Sigma, x, y)$  e  $\beta_1, \beta_2 \in R(\Sigma, y, z)$  para  $x, y, z \in M$  tais que  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  and  $\beta_1 \simeq_m \beta_2$ . Então,  $\beta_1 * \alpha_1 \simeq_m \beta_2 * \alpha_2$ .*

**Demonstração:** Pela hipótese, existem homotopias monotônicas  $f_t : [0, 1] \rightarrow R(\Sigma, x, y)$  tal que  $f_0 = \alpha_1$  e  $f_1 = \alpha_2$ ,  $g_t : [0, 1] \rightarrow R(\Sigma, y, z)$  tal que  $g_0 = \beta_1$  e  $g_1 = \beta_2$ , respectivamente. A concatenação de homotopias  $h_t = g_t * f_t$  define a homotopia procurada entre  $\beta_1 * \alpha_1$  e  $\beta_2 * \alpha_2$ .  $\square$

**Proposição 2.5.3** *Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\Sigma, x, y)$  para  $x, y$  em  $M$  tal que  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$ . Então  $\alpha_1^- \simeq_m \alpha_2^-$  para  $-\Sigma$ .*

**Demonstração:** Coloque  $\alpha_1 = \text{trj}_x(u)$  e  $\alpha_2 = \text{trj}_x(v)$  para alguns controles regulares  $u, v$  em  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$ . Pelo lema 2.2.5  $-u, -v \in \mathcal{R}_{-\Sigma}(y)$  e portanto  $\alpha_1^- = \text{trj}_y(-u)$  e  $\alpha_2^- = \text{trj}_y(-v) \in R(-\Sigma, y, x)$ . Denote por  $h_t$  a homotopia monotônica (existente pela hipótese) entre  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$ , isto é,  $h_t$  (para cada  $t$ ) é uma trajetória regular a partir de  $x$  com ponto final  $y$ , e denote por  $u_t$  o controle regular correspondente. Mais uma vez por uso do mesmo lema,  $-u_t$  para cada  $t$  é regular em  $y$  para  $-\Sigma$  e suas trajetórias  $h_t^-$  são regulares

a partir de  $y$  cujo ponto final é  $x$ , mostrando a proposição.  $\square$

Esta proposição mostra que a homotopia monotônica é preservada ao reverter as trajetórias de  $\Sigma$  às trajetórias de  $-\Sigma$ .

## Capítulo 3

# Estrutura de variedade em $\Gamma(\Sigma, x_0)$

O propósito deste capítulo é construir uma estrutura de variedade diferenciável no espaço de classes de homotopia monotônica das trajetórias regulares  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . A palavra ‘diferenciável’ sempre significará diferenciabilidade de classe  $C^\infty$ . Assumimos também que o sistema  $\Sigma$  satisfaz a condição de posto da álgebra de Lie em todo  $x \in M$ .

### 3.1 Construção de estrutura de variedade

O resultado fundamental deste capítulo é o seguinte teorema que tanto topologicamente quanto analiticamente descreve o espaço  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

**Teorema 3.1.1** *Seja  $\Sigma$  um sistema evoluindo numa variedade diferenciável  $M$ . O espaço de classes de homotopia monotônica  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  tem uma estrutura de variedade diferenciável ( $C^\infty$ ) de dimensão  $n = \dim(M)$ .*

Para construção de estrutura de variedade em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  usamos o seguinte fato conhecido sobre a construção de estrutura de variedades diferenciáveis:

**Proposição 3.1.2** *Seja  $X$  um conjunto (sem estrutura topológica) e  $\phi_i : W_i \rightarrow X$  uma coleção de aplicações com  $W_i$  como sendo subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que*

1. *Cada  $\phi_i$  é uma bijeção entre  $W_i$  sobre sua imagem*

$$2. X = \bigcup_i \phi_i(W_i)$$

3. Se  $i, j$  são tal que  $C_{ij} = \phi_i(W_i) \cap \phi_j(W_j) \neq \emptyset$  então o conjunto  $\phi_i^{-1}(C_{ij}) \subset W_i$  é aberto e a aplicação  $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(C_{ij}) \rightarrow W_j$  é diferenciável.

Então  $(W_i, \phi_i)$  define um atlas para uma única estrutura da variedade em  $X$ . Esta estrutura induz implicitamente uma topologia em  $X$ .

**Demonstração:** veja Daniel Martin [17] aonde o enunciado desta proposição é a própria definição de variedade.  $\square$

Definimos um atlas para a estrutura diferenciável sobre  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  através da aplicação  $e_{x_0}$ . Já que o ponto inicial  $x_0$  é fixo, escreveremos simplesmente  $e$ ,  $\text{trj}$  no lugar de  $e_{x_0}$  e  $\text{trj}_{x_0}$ , etc. Coloque  $x = e(u)$  para ponto final da trajetória regular definida por  $u$ . Por definição (de controle regular) sabemos que o posto da aplicação  $e$  em  $u$  é igual à dimensão de  $M$  e portanto pelo teorema da função implícita existem conjuntos abertos  $U \subset \mathcal{E}$ ,  $V \subset \ker de_u$  e  $W \subset \mathbb{R}^n$  tais que  $U$  é difeomorfo ao produto cartesiano  $V \times W$  e a restrição de  $e$  a  $U$  é equivalente à projeção  $V \times W \rightarrow W$  (veja [13]). Antes de passar aos detalhes da demonstração observamos que o teorema da função implícita é aplicável aqui já que a variedade  $M$  é de dimensão finita e o controle  $u$  é regular o que implica que o subespaço fechado  $\ker de_u$  é de codimensão finita e, portanto, é completável em  $\mathcal{E}$ .

Em vista do difeomorfismo  $V \times W \rightarrow U$  identificamos usualmente a vizinhança  $U$  em  $\mathcal{E}$  com  $V \times W$ . Para fixar as idéias suponhamos que  $0 \in V$  e  $u$  se identifica a um ponto em  $\{0\} \times W$  (que se identifica a  $W$ ). Então consideramos  $W$  ou como uma subvariedade  $n$ -dimensional de  $U$  (identificada a  $\{0\} \times W$ ) ou como um subconjunto aberto do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Chamaremos um tal  $W$  de seção de  $e$  em  $u$ . Notemos também que como  $u \in \text{int}\mathcal{U}$  podemos contrair  $U$  e supor que  $U \subset \text{int}\mathcal{U}$ . Dessa forma, todo  $v \in U$  é regular.

Dada uma seção  $W$  de  $e$  em  $u$ , a aplicação  $\text{trj} : W \rightarrow R(\Sigma, x_0)$  que associa a um controle  $v \in W$  sua trajetória correspondente é contínua e injetora já que os pontos finais das trajetórias definidas por  $v_1 \neq v_2$  em  $W$  são diferentes. Pela mesma razão se tomarmos a composta da aplicação  $\text{trj}$  com a projeção canônica  $\pi : R(\Sigma, x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0) = R(\Sigma, x_0)/\simeq_m$  obtemos uma aplicação contínua e injetora

$$\psi = \pi \circ \text{trj} : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$$

e por conseguinte uma bijeção contínua sobre sua imagem. Nosso objetivo é provar que a coleção de aplicações bijetoras  $\psi : W \rightarrow \psi(W)$  com  $W$  percorrendo as seções em  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  definem um atlas para a estrutura diferenciável sobre  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Para visualizar isso basta verificar as seguintes afirmações da proposição 3.1.2:

1. As imagens  $\psi(W)$  cobrem  $\Gamma(\Sigma, x_0)$
2. As aplicações de transição  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$  são diferenciáveis (e têm domínios abertos).

Pela definição de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  como conjunto de classes de equivalência das trajetórias regulares é imediato que qualquer classe em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  pertence a algum  $\psi(W)$ .

Para demonstrar diferenciabilidade das aplicações de transição, sejam  $(\psi_i(W_i), \psi_i)$ ,  $i = 1, 2$ , duas cartas locais com  $C = \psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2) \neq \emptyset$ . Tome uma classe  $\xi \in C$  e sejam  $v_i \in W_i$  tais que  $\psi_i(v_i) = \xi$ ,  $i = 1, 2$ . Olhando  $W_i$  como subconjunto de  $\mathcal{U}$  temos por definição que as trajetórias  $\text{trj}(v_i)$  são equivalentes o que implica que elas tem o mesmo ponto terminal em  $M$ , denotado por  $x$ . Denote por  $e_i$  a restrição de  $e$  a  $W_i$ ,  $i = 1, 2$ . Como  $e_i : W_i \rightarrow e(W_i) \in M$  é difeomorfismo, podemos contrair ambos  $W_i$ ,  $i = 1, 2$ , e supor que existe um aberto  $N \subset M$  tal que  $e_i : W_i \rightarrow N$  são difeomorfismos.

Afirmamos agora que  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1 = e_2^{-1} \circ e_1$ . De fato, dado  $v_1 \in \psi_1^{-1}(C) \subset W_1$ ,  $\psi_1(v_1)$  é a classe de homotopia monotônica de  $\text{trj}(v_1)$ , e  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1(v_1) = v_2$  onde  $\text{trj}(v_2) \simeq_m \text{trj}(v_1)$ . Em particular, os pontos finais de  $\text{trj}(v_2)$  e  $\text{trj}(v_1)$  coincidem, isto é,  $e_1(v_1) = e_2(v_2)$  o que é equivale a dizer que  $v_2 = e_2^{-1} \circ e_1(v_1)$  mostrando a afirmação feita acima. Uma vez encontrada a expressão  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1 = e_2^{-1} \circ e_1$ , segue-se imediatamente que as aplicações de transição

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 : \psi_1^{-1}(C) \subset W_1 \longrightarrow \psi_2^{-1}(C) \subset W_2$$

são aplicações diferenciáveis, já que  $e_i$ ,  $i = 1, 2$ , é difeomorfismo (de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ).

**Corolário 3.1.3** *Seja  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \subset M$  a aplicação de avaliação que associa a uma classe de homotopia monotônica  $[\gamma]_m$  o ponto final de seu representante. Então,  $\varepsilon$  é um difeomorfismo local no sentido em que a diferencial  $d\varepsilon_z$  de  $\varepsilon$  em cada  $z \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  é um isomorfismo.*

**Demonstração:** A afirmação segue imediatamente da construção da estrutura diferenciável da variedade de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Com efeito, mantendo as mesmas notações usadas na construção seja  $\psi : W \rightarrow \psi(W)$  uma carta para a estrutura diferenciável. Então temos a seguinte composição

$$\psi(W) \subset \Gamma(\Sigma, x_0) \xrightarrow{\psi^{-1}} W \xrightarrow{e|_W} N \subset M$$

com  $\varepsilon = (e|_W) \circ \psi^{-1}$ . Portanto,  $\varepsilon$  torna-se um difeomorfismo entre os conjuntos abertos  $\psi(W)$  e  $N$ , provando o corolário.  $\square$

O atlas construído em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  considera este conjunto com a topologia da variedade para qual as aplicações de transição se tornam homeomorfismos. Por outro lado, o conjunto de controles regulares  $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  é munido tanto com a topologia forte (i.e. topologia da norma) quanto com a topologia fraca\*. A seguir estabelecemos propriedades de continuidade da aplicação  $\tau = \pi \circ \text{trj} : \mathcal{R}_\Sigma(x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  que associa a uma função de controle a classe de homotopia monotônica de sua trajetória.

**Proposição 3.1.4** *A aplicação  $\tau$  é contínua com respeito a topologia fraca\* (e, portanto, com respeito à topologia forte). Também,  $\tau$  é uma aplicação aberta com respeito a topologia forte (e, portanto, com respeito à topologia fraca\*).*

**Demonstração:** Para continuidade, lembramos o fato de que  $\text{trj}$  é uma aplicação contínua do espaço de controles com a topologia fraca\* no conjunto de trajetórias com a topologia de convergência uniforme (veja por exemplo Sontag [25]). Em particular, a aplicação de ponto-final  $e$  é contínua com respeito a topologia fraca\*. Agora, seja  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  a aplicação de avaliação do corolário 3.1.3. Então temos que  $e = \varepsilon \circ \tau$ . Daí segue-se a continuidade de  $\tau$  já que  $\tau$  é dada localmente como  $\tau = \varepsilon^{-1} \circ e$  onde  $\varepsilon^{-1}$  denota a inversa local de  $\varepsilon$ .

A afirmação de que  $\tau$  é uma aplicação aberta segue como consequência da construção das cartas através do teorema da função implícita. Com efeito, usando as mesmas notações na construção das cartas, o domínio de  $\tau$  é localmente um produto devido ao teorema de função implícita, isto é, dado  $U$  um aberto em  $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  temos que  $U \simeq V \times W$  e a restrição a  $U$  de  $e$  é a projeção  $V \times W \rightarrow W$ . Portanto,  $\tau(U) = (\varepsilon^{-1} \circ e)(U) = \varepsilon^{-1}(W)$  que é um aberto em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  já que  $\varepsilon^{-1}$  é aberta.  $\square$

Esta demonstração se aplica a aplicação  $\pi : R(\Sigma, x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  definida sobre trajetórias regulares.

**Proposição 3.1.5** *A aplicação  $\pi : R(\Sigma, x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  é contínua com respeito a topologia  $\mathcal{C}^0$  (e portanto com respeito a topologia  $\mathcal{C}^1$ ). Também,  $\pi$  é uma aplicação aberta com respeito a topologia  $\mathcal{C}^1$  (e por conseguinte com respeito a topologia  $\mathcal{C}^0$ ).*

**Demonstração:** Para ver que  $\pi$  é aberta, lembramos que pela proposição 2.1.1,  $\text{trj}$  é uma aplicação aberta com respeito à topologia  $\mathcal{C}^1$ . Portanto, pelo mesmo argumento usado na proposição precedente concluímos que  $\pi$  é aberta com respeito à topologia  $\mathcal{C}^1$  e, por consequência, com respeito à topologia  $\mathcal{C}^0$  também já que a topologia  $\mathcal{C}^0$  é mais fraca que a topologia  $\mathcal{C}^1$ .  $\square$

**Observação:** Evidentemente podemos considerar o conjunto  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  com a topologia quociente na qual um subconjunto  $A \subset \Gamma(\Sigma, x_0)$  é aberto se, e somente se, a imagem inversa  $\pi^{-1}(A)$  for aberta em  $R(\Sigma, x_0)$  em relação a topologia  $\mathcal{C}^1$ . Já que  $\pi$  é uma aplicação tanto contínua quanto aberta com respeito a topologia da variedade, segue que esta topologia coincide com a topologia quociente.

Para verificar que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é de Hausdorff, uma propriedade que não é evidente a princípio, usamos o seguinte resultado geral que garante quando um espaço topológico com uma estrutura de variedade é de Hausdorff.

**Lema 3.1.6** *Sejam  $L$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis e  $f : L \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável tal que  $df_z$  é um isomorfismo em cada ponto  $z \in L$ . Então  $L$  é de Hausdorff se  $N$  é.*

**Demonstração:** Tome  $x, y \in L$  com  $x \neq y$ . Se  $f(x) \neq f(y)$ , pela hipótese de  $N$  ser Hausdorff escolha os conjuntos abertos  $U_1$  de  $f(x)$  e  $U_2$  de  $f(y)$  tal que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Então  $f^{-1}(U_1)$  e  $f^{-1}(U_2)$  separam  $x$  de  $y$ . Portanto suponhamos que  $f(x) = f(y)$ . Já que  $L$  é localmente um espaço Euclidiano basta mostrar que existe um conjunto aberto  $V$  de  $y$  que não contém  $x$  no seu fecho. Pois neste caso  $L \setminus \text{fe}(V)$  seria um aberto que contém  $x$  e que não intercepta  $V$ . Para isso, escolha  $V \subset L$  de tal modo que  $f : V \rightarrow f(V)$  seja um difeomorfismo e suponha também que exista uma seqüência  $x_n \in V$  com  $x_n \rightarrow x$ . Então  $f(x_n) \rightarrow f(x) = f(y)$ . Mas, a restrição de  $f$  a  $V$  é um difeomorfismo. Portanto,  $x_n \rightarrow y$  contradiz a hipótese de que  $x \neq y$  e daí

que  $x \notin \text{fe}(V)$ , concluindo a demonstração do lema.  $\square$

Juntando esse lema com o corolário 3.1.3 segue imediatamente a propriedade de Hausdorff de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

**Corolário 3.1.7** *A topologia em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é de Hausdorff.*

Feito isso, podemos deduzir ainda algumas propriedades de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Mais precisamente, note que a aplicação  $\tau$  é contínua e o espaço de Banach  $\mathcal{E}$  é separável, isto é,  $\mathcal{E}$  é um espaço métrico completo que tem um subconjunto denso e enumerável (veja [6]). Pelo fato de que todo espaço métrico separável é segundo enumerável (i.e., tem base enumerável) segue que  $\mathcal{E}$  é segundo enumerável. Também, o domínio  $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  de  $\tau$  é segundo enumerável como sendo subespaço de  $\mathcal{E}$ . Daí segue que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é segundo enumerável. Pois imagem contínua-aberta de um espaço segundo enumerável é segundo enumerável. Sabe-se que todo espaço localmente compacto, Hausdorff e segundo enumerável é paracompacto (veja [1], proposição 5.5.5). Portanto temos a seguinte

**Proposição 3.1.8**  *$\Gamma(\Sigma, x_0)$  é paracompacta.*

**Observações:**

1. Através da proposição 2.4.1, o espaço de controles normais forma uma subclasse do espaço de controles regulares. Portanto, podemos mostrar da maneira semelhante que as cartas definidas pelos controles normais também formam um subatlas da estrutura definida a partir dos controles regulares.
2. O espaço  $\Gamma(\Sigma, x)$  como sendo uma variedade separável tem uma quantidade enumerável de componentes conexas. Pelos resultados estabelecidos até agora não está claro a princípio se é conexo. Mas, mostramos que  $\Gamma(\Sigma, x)$  é difeomorfo a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \cdot)$  (veja proposição 4.2.6). Por outro lado,  $\text{fe}(\text{int}\mathcal{A}(\widehat{x})) = \mathcal{A}(\widehat{x})$  é conexo. Através da proposição 2.4.3, escrevendo  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  no lugar de  $\text{int}\mathcal{A}(\widehat{x})$  nessa igualdade podemos dizer que o fecho de  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  onde  $\widehat{x} \in \Gamma(\Sigma, x_1)$  se projeta em  $x$  é conexo dentro de  $\Gamma(\Sigma, x_1)$  para algum  $x_1 \in M$  tal que  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$ .

$\square$

# Capítulo 4

## Levantamentos

Neste capítulo, estudamos o processo de levantamento. Mais precisamente, dada uma variedade diferenciável  $M$  seja  $\Sigma$  um sistema evoluindo sobre  $M$ . Temos pelo teorema 3.1.1 que o espaço  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é uma variedade diferenciável e que é localmente difeomorfo a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Portanto, através desse difeomorfismo local podemos levantar os campos de  $\Sigma$  a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  e obter um novo sistema na variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Em seguida, centramos nossa atenção a esse sistema (levantado) para relacionar suas propriedades com a homotopia monotônica das trajetórias do sistema original.

### 4.1 Difeomorfismos locais

Por conveniência fazemos um breve resumo de resultados conhecidos sobre difeomorfismos locais entre variedades diferenciáveis que serão úteis adiante.

**Definição 4.1.1** *Sejam  $L$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $f : L \rightarrow N$  tal que  $df_z$  é uma bijeção para cada  $z \in L$  é dito um difeomorfismo local. Isto é, para cada  $z \in L$  existem vizinhanças  $V$  de  $z$  em  $L$  e  $U$  de  $f(z)$  em  $N$  tal que  $f : V \rightarrow U$  é um difeomorfismo.*

Uma classe particular de difeomorfismos locais são recobrimentos diferenciáveis que têm muitas propriedades não compartilhadas por difeomorfismos locais em geral.

Para nossos objetivos, estamos interessados em levantamentos contínuos a  $L$  de aplicações a valores em  $N$ . Mesmo que isso sempre possa ser feito para aplicações de recobrimento, não vale em geral para difeomorfismos locais.

**Exemplo 4.1.2** *Sejam  $L = (0, 3/2) \subset \mathbb{R}$  e  $N$  o círculo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . A projeção natural  $f : L \rightarrow N$  é um difeomorfismo local mas não é aplicação de recobrimento. O caminho que dá duas voltas sobre  $N$  não tem levantamento contínuo (global) a  $L$ .*

Por outro lado, o levantamento contínuo é localmente possível e é único sobre espaços conexos quando existe.

**Lema 4.1.3** *Sejam  $f : L \rightarrow N$  um difeomorfismo local sobrejetor e  $X$  um espaço topológico. Seja  $\alpha : X \rightarrow N$  uma aplicação contínua e tome  $t_0 \in X$  e  $y \in L$  tal que  $f(y) = \alpha(t_0)$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $t_0$  e uma única aplicação  $\tilde{\alpha} : U \rightarrow L$  tal que  $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  e  $\tilde{\alpha}(t_0) = y$ . Mais ainda, se  $X$  for conexo e  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : X \rightarrow L$  são tais que  $f \circ \tilde{\alpha}_i = \alpha$  e  $\tilde{\alpha}_i(t_0) = y$ ,  $i = 1, 2$ . Então  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ .*

**Demonstração:** Tome uma vizinhança  $V$  de  $y$  em  $L$  tal que a aplicação  $f|_V : V \rightarrow f(V)$  seja um difeomorfismo. Então podemos definir  $\tilde{\alpha}$  localmente ao redor de  $t_0$  via  $(f|_V)^{-1} \circ \alpha$  onde  $(f|_V)^{-1} : f(V) \rightarrow V$  é a inversa local de  $f$ . Mais precisamente, seja  $U$  uma vizinhança de  $t_0$  em  $X$ . Então para cada  $t \in U$

$$\tilde{\alpha}(t) = (f|_V)^{-1} \alpha(t).$$

Esse levantamento local é definido de uma maneira única. A unicidade segue pelo fato de que o conjunto  $A = \{t \in X : \tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)\}$  é tanto fechado (por continuidade e por  $L$  ser Hausdorff) quanto aberto (por unicidade local) em  $X$ .  $\square$

Adiante, usaremos este lema para levantar curvas em  $N$  a  $L$ . O seguinte lema mostra o levantamento de homotopias entre curvas.

**Lema 4.1.4** *Sejam  $f : L \rightarrow N$  um difeomorfismo local sobrejetor e  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow N$  duas curvas contínuas tal que  $\alpha(0) = \beta(0)$ . Seja também  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N$  uma aplicação contínua tal que  $H(0, t) = \alpha(t)$ ,  $H(1, t) = \beta(t)$  e  $H(s, 0) = \alpha(0)$ . Tome  $y \in L$  com  $f(y) = \alpha(0)$  e suponha que para todo  $s \in [0, 1]$  a curva  $t \mapsto H(s, t)$  se levanta a uma curva em  $L$ , digamos  $\tilde{H}(s, t)$ , tal que  $\tilde{H}(s, 0) = y$ . Então  $(s, t) \mapsto \tilde{H}(s, t)$  é contínua e portanto é uma homotopia entre  $\tilde{H}(0, t)$  e  $\tilde{H}(1, t)$ , levantamentos de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente.*

**Demonstração:** Tomamos um levantamento local contínuo de  $H$  ao redor de  $(0, 0)$  e usamos a unicidade de levantamento dos caminhos para ver a continuidade de  $\tilde{H}$  em  $(0, 0)$ . Fixando  $s \in [0, 1]$ , seja  $m$  o supremo de  $t$  tal que  $H$  é contínua em  $(s, \tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $\tilde{H}(s, m)$  tal que  $f : V \rightarrow f(V)$  é um difeomorfismo. Então, numa vizinhança  $U$  de  $(s, m)$ ,  $H$  se levanta continuamente a uma aplicação  $\tilde{H}_1$ , tendo imagem em  $V$ . Mas, se  $\tau$  for suficientemente próximo a  $m$  então  $\tilde{H}(s, \tau)$  pertence a  $V$  pela continuidade da aplicação  $\tau \mapsto \tilde{H}(s, \tau)$ . Portanto, usando a continuidade de  $\tilde{H}$  em  $(s, \tau)$  concluimos que  $\tilde{H}(\sigma, \tau)$  pertence a  $V$  se  $(\sigma, \tau)$  é próximo suficiente a  $(s, m)$ . Por conseguinte, pela unicidade de levantamentos das curvas  $\tau \mapsto \tilde{H}(\sigma, \tau)$  concluimos que  $\tilde{H} = \tilde{H}_1$  sobre  $U$ . Isto implica que  $m = 1$ , completando a demonstração.  $\square$

Por este lema obtemos que curvas homotópicas se levantam a curvas com o mesmo ponto final, caso a homotopia também se levante.

**Lema 4.1.5** *Suponha que  $\alpha, \beta$  satisfazem as condições do lema anterior, e assumamos também que  $\alpha(1) = \beta(1)$ , e que  $H$  é uma homotopia fixando os pontos finais. Então os levantamentos de  $\alpha$  e  $\beta$  a partir de  $y$  têm o mesmo ponto final, i.e.,  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ .*

**Demonstração:** De fato, pela continuidade  $\tilde{H}(s, 1)$  é uma função constante de  $s$ .  $\square$

**Observação:** No lema 4.1.4, assumimos a existência de  $\tilde{H}(s, t)$  para mostrar sua continuidade. Em geral, não é possível levantar tais homotopias. Por exemplo, considere a aplicação

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3 - 3z.$$

Para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ ,  $f'(z) \neq 0$  e portanto  $f$  é um difeomorfismo local (teorema da função inversa). Além do mais  $f$  é sobrejetor pois os valores  $\pm 2$  do polinômio  $z^3 - 3z$  nos pontos  $\pm 1$  são também assumidos nos pontos  $\pm 2$ , os quais pertencem a  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ . Em  $\mathbb{C}$  toda curva pode ser contraída a um ponto pelo fato de  $\mathbb{C}$  ser simplesmente conexo. Mas, já que  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$  não é simplesmente conexo, existem homotopias em  $\mathbb{C}$  que não podem ser levantadas a  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ .

Sejam  $f : L \rightarrow N$  um difeomorfismo local e  $X$  um campo de vetores em  $N$ . Então definimos  $\tilde{X}$  em  $L$  por

$$\tilde{X}(x) = df^{-1}(X(f(x))),$$

onde  $f^{-1}$  denota a inversa local de  $f$  ao redor de  $x$ . Daí segue que a aplicação  $X \mapsto \tilde{X}$  é injetora e  $f$  leva trajetórias de  $\tilde{X}$  em trajetórias de  $X$ . Reciprocamente, se  $\alpha$  é uma trajetória de  $X$  e  $\tilde{\alpha}$  é uma curva em  $L$  tal que  $f(\tilde{\alpha}) = \alpha$  então  $\tilde{\alpha}$  é uma trajetória de  $\tilde{X}$ . Por outro lado, não é verdade que trajetórias de  $X$  se levantam inteiramente a trajetórias de  $\tilde{X}$  (veja por exemplo, o difeomorfismo local  $(0, 3/2) \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , mencionado acima).

Dado um sistema de controle  $\Sigma$ , se levantarmos o espaço vetorial  $E$  a  $\tilde{E}$  obtemos um sistema de controle  $\tilde{\Sigma}$  em  $L$  tal que ambos  $\Sigma$  e  $E$  estão em bijeção com  $\tilde{\Sigma}$  e  $\tilde{E}$ , respectivamente. Por causa dessas bijeções, as funções de controle de  $\Sigma$  são também funções de controle de  $\tilde{\Sigma}$ . Em seguida, sempre usaremos o mesmo espaço de controles  $\mathcal{U}$  para sistemas relacionados por difeomorfismos locais. Vemos que para  $u \in \mathcal{U}$  as trajetórias correspondentes de  $\tilde{\Sigma}$  são levadas nas trajetórias de  $\Sigma$ , em outras palavras se  $f(y_0) = x_0$  então  $\text{trj}_{x_0} = f \circ \tilde{\text{trj}}_{y_0}$ , onde  $\tilde{\text{trj}}_{y_0}(u)$  denota a trajetória de  $\tilde{\Sigma}$ . Esta igualdade implica imediatamente a seguinte

**Proposição 4.1.6** *Um controle  $u$  é regular em  $z \in L$  (com respeito a  $\tilde{\Sigma}$ ) se, e somente se, for regular em  $f(z) \in N$  (com respeito a  $\Sigma$ ).*

Para sistemas relacionados por difeomorfismos locais introduzimos a seguinte terminologia conveniente

**Definição 4.1.7** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sistemas de controle evoluindo sobre  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Dizemos que a aplicação  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é uma aplicação de controle entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  se  $f$  é um difeomorfismo local e  $df(\Sigma_1) = \Sigma_2$ . Dizemos que uma aplicação de controle  $f$  é uma aplicação de recobrimento do controle se for sobrejetora.*

## 4.2 Levantamento de $\Sigma$ a $\Gamma(\Sigma, x_0)$

Pelo corolário 3.1.3, a aplicação de avaliação  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  é um difeomorfismo local. Portanto, a restrição de  $\Sigma$  a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  pode ser levantada a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . O sistema levantado será representado por  $\hat{\Sigma}$ .

Dado um campo de vetores  $X$  em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  escrevemos  $\widehat{X}$  para denotar seu levantamento a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Também, denotamos por  $\widehat{\text{trj}}_z(u)$  a trajetória de  $\widehat{\Sigma}$  começada em  $z \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  e que corresponde a um controle  $u$ .

O propósito desta seção é estudar  $\widehat{\Sigma}$  e relacionar suas propriedades com a homotopia monotônica das trajetórias de  $\Sigma$ . Aqui e nas seguintes seções mantemos nossas construções o mais próxima possível do caso clássico. Por outro lado, temos que tomar cuidado com o ponto inicial da curva a ser levantada pelo fato de que em geral  $x_0$  não pertence a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

Nosso primeiro objetivo é provar que o sistema  $\widehat{\Sigma}$  é completo se  $\Sigma$  o for. Tome  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ , um controle  $u \in \mathcal{U}$  e coloque  $\widehat{\alpha} = \widehat{\text{trj}}_{y_0}(u)$ . Temos que verificar que  $\widehat{\alpha}$  é definida no intervalo inteiro  $[0, 1]$ . Para isso, coloque  $z_0 = \varepsilon(y_0) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e seja  $\alpha = \text{trj}_{z_0}(u)$  a trajetória de  $\Sigma$  a partir de  $z_0$ . Pela hipótese de que  $\Sigma$  é completo,  $\alpha$  se estende a  $[0, 1]$ . Também,  $\widehat{\alpha}$  é o levantamento de  $\alpha$ . Portanto basta verificar se  $\alpha$  se levanta completamente a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

Construímos explicitamente o levantamento de  $\alpha$  como o seguinte: denote por  $\bar{\alpha}$  o caminho no espaço de trajetórias que é definido por

$$\bar{\alpha}(s)(t) = \alpha(st) \quad s, t \in [0, 1]$$

onde para cada  $s$ ,  $\bar{\alpha}(s)$  é apenas um pedaço de  $\alpha$  no intervalo  $[0, s]$ . Isto é,  $\bar{\alpha}(s) = \alpha|_{[0, s]}$ . O caminho  $\bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow R(\Sigma, x_0)$  é contínuo com respeito a topologia  $\mathcal{C}^0$ . Com efeito, dada uma seqüência  $s_n$  em  $[0, 1]$  com  $s_n \rightarrow s$ . Para continuidade de  $\bar{\alpha}$  basta mostrar que  $s_n \rightarrow s$  implica  $\bar{\alpha}(s_n) \rightarrow \bar{\alpha}(s)$ . Observe que  $s_n \rightarrow s$  implica  $s_n t \rightarrow st$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Por continuidade de  $\alpha$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\sup_{0 \leq t \leq 1} d(\alpha(s_n t), \alpha(st)) < \varepsilon$  enquanto  $|s_n t - st| < \delta$ .

Segue que  $\sup_{0 \leq t \leq 1} d(\bar{\alpha}(s_n)(t), \bar{\alpha}(s)(t)) = \sup_{0 \leq t \leq 1} d(\alpha(s_n t), \alpha(st)) < \varepsilon$ , mostrando a continuidade de  $\bar{\alpha}$  na topologia  $\mathcal{C}^0$ . Notemos que pela proposição 3.1.5, a composta  $[0, 1] \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  torna-se uma aplicação contínua com respeito à topologia  $\mathcal{C}^0$ .

Agora seja  $\beta$  uma trajetória regular a partir de  $x_0$  que é um representante da classe  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ . Pela proposição 2.2.4,  $\bar{\alpha}(s) * \beta$  pertence a  $R(\Sigma, x_0)$  e portanto faz sentido tomar sua classe de homotopia monotônica  $[\bar{\alpha}(s) * \beta]_m \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ . A curva dada por

$$s \longmapsto [\bar{\alpha}(s) * \beta]_m$$

é exatamente o levantamento procurado  $\widehat{\alpha}$  como se expressa na seguinte

**Proposição 4.2.1** *Sejam as notações como acima. Então,  $\hat{\alpha} : s \rightarrow [\bar{\alpha}(s) * \beta]_m$ ,  $s \in [0, 1]$ . Em particular, o ponto final de  $\hat{\alpha}$  é a classe de homotopia monotônica da concatenação  $\alpha * \beta$  se  $\beta$  é representante de  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ .*

**Demonstração:** Notemos que o ponto final de  $s \mapsto \bar{\alpha}(s) * \beta$  é  $\alpha(s)$ . E portanto por definição de  $\varepsilon$  temos que  $\varepsilon([\bar{\alpha}(s) * \beta]_m) = \alpha(s)$  para todos os  $s \in [0, 1]$ . Agora como  $\bar{\alpha}(0) * \beta = \beta$ , a classe  $[\bar{\alpha}(0) * \beta]_m = [\beta]_m = y_0$  e então segue que  $s \mapsto [\bar{\alpha}(s) * \beta]_m$  é o único levantamento  $\hat{\alpha}$  a partir de  $y_0$  mostrando a afirmação feita acima.  $\square$

A partir desta proposição concluímos que  $\widehat{\Sigma}$  é completo. Para referências futuras marcamos este fato.

**Proposição 4.2.2** *Se  $\Sigma$  é completo então o sistema levantado  $\widehat{\Sigma}$  também é completo.*

Um fato conhecido na teoria de espaços de recobrimentos afirma que duas curvas em um espaço  $M$  com as mesmas extremidades são homotópicas se, e somente se, seus levantamentos ao recobrimento universal  $\widetilde{M}$  a partir de um mesmo ponto inicial têm o mesmo ponto final.

O nosso objetivo agora é provar um análogo no contexto da homotopia monotônica. A este respeito, temos que tomar cuidado com o fato de que em geral as trajetórias a partir de  $x_0$  (mesmo as regulares) não estão inteiramente contidas em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ , como o exemplo a seguir mostra.

**Exemplo 4.2.3** *Considere o sistema  $\Sigma$  em  $\mathbb{R}^2$  dado por*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

onde  $u$  e  $v$  denotam controles (constantes). Como o sistema  $\Sigma$  é gerado pelos campos  $X = \frac{\partial}{\partial x}$  e  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$  que são constantes, o conjunto dos pontos acessíveis a partir da origem via trajetórias (constantes por pedaços)  $\mathcal{A}_R(\Sigma, 0)$  é dado por  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$  e a aplicação de avaliação  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, 0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, 0)$  é um difeomorfismo (global). Portanto uma trajetória normal constante por pedaços que fica em um dos dois eixos por algum intervalo de tempo não está contida em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, 0)$ .

Por conseguinte, não temos a princípio os levantamentos a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  das trajetórias de  $\Sigma$ . Para evitar esse problema, consideramos a seguinte situação que é suficiente para relacionar os levantamentos com a homotopia monotônica: Fixando  $x_0$ , tome  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Então vamos provar que duas trajetórias regulares  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  a partir de  $z_0$  com um mesmo ponto final são monotonicamente homotópicas se, e somente se, seus levantamentos a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  a partir de uma mesma classe  $y_0$  têm mesmo ponto final. Na verdade, provamos um resultado mais forte que diz que  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  é uma subvariedade aberta da variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  quando  $z_0$  for um ponto acessível a partir de  $x_0$  via uma trajetória regular. A demonstração desse resultado requer a seguinte recíproca parcial da proposição 2.5.2 cuja demonstração usa a proposição 4.2.1.

**Lema 4.2.4** *Sejam  $\beta_1, \beta_2 \in R(\Sigma, x_0)$  com mesmo ponto final  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e seja  $\alpha$  uma trajetória de  $\Sigma$  a partir de  $z_0$ . Então  $\alpha * \beta_1 \simeq_m \alpha * \beta_2$  se, e somente se,  $\beta_1 \simeq_m \beta_2$ .*

**Demonstração:** Antes de mais nada, pela proposição 2.5.2 é claro que a homotopia entre  $\beta_1$  e  $\beta_2$  pode ser estendida via o caminho constante  $\alpha$ , para produzir uma homotopia entre  $\alpha * \beta_1$  e  $\alpha * \beta_2$ . Por outro lado, suponha por absurdo que  $\beta_1$  não seja homotópica a  $\beta_2$ . Isto é,  $[\beta_1]_m \neq [\beta_2]_m$ . Denote por  $\gamma_i$ , ( $i = 1, 2$ ), os levantamentos de  $\alpha$  a partir de  $[\beta_i]_m$ , respectivamente. Então  $\gamma_i = \widehat{\text{trj}}_{[\beta_i]_m}(u)$ ,  $i = 1, 2$ , onde  $u$  é uma função de controle que define a trajetória  $\alpha$ . Como  $[\beta_1]_m \neq [\beta_2]_m$  segue que os pontos finais de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são diferentes, pela unicidade dos levantamentos (veja lema 4.1.3). Mas pela proposição 4.2.1 sabemos que o ponto final de  $\gamma_i$  é a classe de homotopia monotônica  $[\alpha * \beta_i]_m$ ,  $i = 1, 2$ , mostrando que  $\beta_1$  é de fato monotonicamente homotópica a  $\beta_2$  se  $\alpha * \beta_1 \simeq_m \alpha * \beta_2$ .  $\square$

Revertendo o tempo podemos ainda ter uma relação análoga entre homotopia monotônica e concatenação à direita.

**Corolário 4.2.5** *Seja  $\beta$  uma trajetória regular a partir de  $x_0$  com ponto final  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Então duas trajetórias regulares  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , a partir de  $z_0$  com mesmo ponto final são monotonicamente homotópicas se, e somente se,  $\alpha_1 * \beta \simeq_m \alpha_2 * \beta$ .*

**Demonstração:** Segue-se imediatamente do lema anterior e pelo fato de que tanto a homotopia monotônica quanto a regularidade podem ser levados

às trajetórias revertidas, veja o lema 2.2.5.  $\square$

Agora podemos relacionar, como dito antes,  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  com  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  onde  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Para isso, fixe uma trajetória regular  $\beta$  de  $x_0$  a  $z_0$ . Então, a concatenação  $\alpha \mapsto \alpha * \beta$  manda  $R(\Sigma, z_0)$  em  $R(\Sigma, x_0)$ . Pelo corolário 4.2.5  $\alpha_1 * \beta \simeq_m \alpha_2 * \beta$  se  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$ . Assim teremos uma aplicação bem definida

$$I_\beta : \Gamma(\Sigma, z_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$$

dada por  $I_\beta([\alpha]_m) = [\alpha * \beta]_m$ . Novamente usando o corolário 4.2.5 concluímos que  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  se  $\alpha_1 * \beta \simeq_m \alpha_2 * \beta$  o que significa que a aplicação  $I_\beta$  é injetora.

**Proposição 4.2.6** *Retomando as notações acima, seja  $\beta$  uma trajetória regular. A imagem de  $I_\beta$  é  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$  e  $I_\beta : \Gamma(\Sigma, z_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$  é um difeomorfismo. Portanto, se  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são duas trajetórias regulares de  $x_0$  a  $z_0$ , então  $I_{\beta_1} = I_{\beta_2}$  se, e somente se,  $\beta_1 \simeq_m \beta_2$ .*

**Demonstração:** Foi verificado antes que os levantamentos das trajetórias do sistema  $\Sigma$  são as trajetórias do sistema levantado  $\widehat{\Sigma}$ . Portanto a imagem da aplicação  $I_\beta$  está contida no conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$ . Reciprocamente  $I_\beta$  é sobre  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$  pelo fato de que as trajetórias de  $\widehat{\Sigma}$  são projetadas nas trajetórias de  $\Sigma$ . Já que  $I_\beta$  é injetor, segue então que  $I_\beta : \Gamma(\Sigma, z_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$  é uma bijeção. Agora pela proposição 4.2.1,  $I_\beta([\alpha]_m)$  é o ponto final de levantamento  $\widehat{\alpha}$ . Assim a aplicação  $I_\beta$  localmente pode ser representada como composta  $\varepsilon_{x_0}^{-1} \circ \varepsilon_{z_0}$  onde  $\varepsilon_{x_0}^{-1}$  denota a inversa local da aplicação de avaliação  $\varepsilon_{x_0} : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Portanto  $I_\beta$  é diferenciável e sua diferencial é um isomorfismo em cada ponto o que mostra que  $I_\beta$  é de fato um difeomorfismo.  $\square$

A partir desta proposição segue imediatamente que as trajetórias de  $\Sigma$  saindo de  $z_0$  com mesmo ponto final são monotonicamente homotópicas se, e somente se, seus levantamentos têm o mesmo ponto final. O corolário seguinte será destacado para uso posterior.

**Teorema 4.2.7** *Seja como antes  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e fixe um  $y_0 \in \varepsilon_{x_0}^{-1}\{z_0\}$ . Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  duas trajetórias regulares de  $\Sigma$  a partir de  $z_0$  com mesmo ponto final. Denote por  $\widehat{\alpha}_1$  e  $\widehat{\alpha}_2$  respectivamente seus levantamentos a variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  a partir de  $y_0$ . Então  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  se, e somente se, os pontos finais de  $\widehat{\alpha}_1$  e  $\widehat{\alpha}_2$  coincidem.*

Esta caracterização de homotopia monotônica para as trajetórias em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  possui a seguinte

**Proposição 4.2.8** *Sejam  $\delta_1$  e  $\delta_2$  duas trajetórias de  $\widehat{\Sigma}$  em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  com mesmo ponto inicial  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ . Então  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são monotonicamente homotópicas em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  se, e somente se, têm o mesmo ponto final.*

**Demonstração:** As trajetórias de  $\Sigma$ ,  $\alpha_i = \varepsilon(\delta_i)$  têm as mesmas extremidades em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e seus levantamentos são  $\delta_1$  e  $\delta_2$  respectivamente. Pelo corolário precedente temos que  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$ . Assim existe uma homotopia via trajetórias  $h_t$  que as conecta. Para cada  $t$ , a trajetória correspondente se levanta a uma trajetória  $\widehat{h}_t$  de  $\widehat{\Sigma}$  a partir de  $y_0$ . Notemos que  $\widehat{h}_t$  é contínua pelo lema 4.1.4. Usando mais uma vez o mesmo corolário concluímos que o ponto final de cada  $h_t$  é o mesmo que  $\delta_i$ . Portanto,  $\widehat{h}_t$  torna-se uma homotopia que conecta  $\delta_1$  a  $\delta_2$ , terminando a demonstração.  $\square$

A proposição acima mostra que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é *simplesmente conexo* no sentido em que duas trajetórias com as mesmas extremidades são monotonicamente homotópicas. Alternativamente, a construção de recobrimento para  $\widehat{\Sigma}$  não possui novas variedades:

**Corolário 4.2.9** *Para qualquer  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ , o espaço  $\Gamma(\widehat{\Sigma}, y_0)$  coincide com  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$  e portanto com  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  se  $z_0 = \varepsilon_{x_0}(y_0)$ .*

**Demonstração:** De fato, pela proposição anterior o difeomorfismo local  $\varepsilon_{y_0} : \Gamma(\widehat{\Sigma}, y_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$  é injetor e portanto um difeomorfismo sobre sua imagem.  $\square$

Finalizamos este capítulo com uma discussão sobre a topologia usada para homotopia monotônica. Segundo a nossa definição, duas trajetórias são monotonicamente homotópicas se pertencem à mesma componente conexa de  $R(\Sigma, x, y)$  que é munido com a topologia  $\mathcal{C}^1$ . Se considerarmos a topologia  $\mathcal{C}^0$  no lugar de  $\mathcal{C}^1$ , segue que duas trajetórias que sejam  $\mathcal{C}^1$  monotonicamente homotópicas são também  $\mathcal{C}^0$  monotonicamente homotópicas. Pois, um caminho  $\mathcal{C}^1$  contínuo também é  $\mathcal{C}^0$  contínuo já que a topologia  $\mathcal{C}^0$  é mais fraca que a topologia  $\mathcal{C}^1$ . A seguir aplicamos os resultados de levantamentos já obtidos para ver que a topologia  $\mathcal{C}^0$  determina as mesmas classes de homotopia monotônica.

**Proposição 4.2.10** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  trajetórias regulares em  $R(\Sigma, x, z)$  e suponha que exista um caminho  $\xi$  em  $R(\Sigma, x, z)$  que une  $\alpha$  a  $\beta$  e que é  $C^0$  contínuo. Então,  $\alpha$  e  $\beta$  são  $C^1$  monotonicamente homotópicas.*

**Demonstração:** Tome  $x_0$  tal que  $x \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ , o que implica que  $\Gamma(\Sigma, x)$  é igual a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y)$  para qualquer  $y \in \varepsilon_{x_0}^{-1}(x)$ . Também, coloque  $H(s, t) = \xi(s)(t)$ . Pelo lema 4.1.4  $H$  se levanta a uma homotopia  $\widehat{H}$  em  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y)$ , porque as curvas  $t \mapsto H(s, t)$  são trajetórias e portanto se levantam a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y)$ . Os levantamentos  $\widehat{\alpha}$  e  $\widehat{\beta}$  a partir de  $y$  são dados por  $\widehat{\alpha}(t) = \widehat{H}(0, t)$  e  $\widehat{\beta}(t) = \widehat{H}(1, t)$ . Já que  $\widehat{H}$  é o levantamento de  $H$ , segue que  $\widehat{\alpha}$  e  $\widehat{\beta}$  têm o mesmo ponto final. Portanto, pelo teorema 4.2.7,  $\alpha$  e  $\beta$  são  $C^1$  monotonicamente homotópicas.  $\square$

# Capítulo 5

## Recobrimento universal de controle

O conjunto  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  sendo uma subvariedade (aberta) admite recobrimento universal simplesmente conexo. Em relação ao sistema  $\Sigma$ , a variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  também pode ser vista como um recobrimento (universal) de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Pois, ela recobre  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  via um difeomorfismo local (sobrejetor) que é a aplicação de avaliação. E também  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é *simplesmente conexo* no sentido em que trajetórias com as mesmas extremidades em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  são monotonicamente homotópicas. Portanto para distinguir esses dois recobrimentos chamaremos  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  de recobrimento universal do controle.

### 5.1 Propriedade Universal de $\Gamma(\Sigma, x_0)$

Considere uma aplicação de recobrimento do controle  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  entre um sistema  $\tilde{\Sigma}$  em  $N$  e  $\Sigma$  (ou sua restrição a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ ), veja a definição 4.1.7. Nosso propósito aqui é provar a existência de uma aplicação de controle  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  entre  $\tilde{\Sigma}$  e  $\tilde{\Sigma}$ . Esta construção é parecida com o caso clássico que fornece recobrimentos de um espaço dado a partir de seu recobrimento universal simplesmente conexo. Notemos que, ao contrário do caso clássico, esta aplicação  $f$  não é necessariamente sobrejetora, i.e., não é aplicação de recobrimento do controle. A sobrejetividade depende de  $\tilde{\Sigma}$  ser controlável ou não.

A maneira natural para definir uma aplicação  $\Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  seria tomar trajetórias regulares a partir de  $x_0$  e logo levantá-las a ambos  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  e

$N$  para obter uma aplicação simplesmente por comparação desses levantamentos. Para realizar esta construção temos que ter trajetórias dentro de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  que em geral não é verdadeiro. Para evitar essa dificuldade, levantaremos trajetórias a partir de  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  para obter aplicações definidas em  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  e logo estendê-las ao espaço todo  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

Assumimos que o sistema  $\tilde{\Sigma}$  é completo em  $N$ . Sob esta hipótese, toda trajetória  $\alpha$  de  $\Sigma$  se levanta a uma única trajetória de  $\tilde{\Sigma}$  desde que um ponto referencial  $y_0$  seja dado em cima de  $z_0$ . De fato, se  $u$  é um controle que define  $\alpha$ , então  $\tilde{\alpha} = \text{trj}_{y_0}(u)$  representa esse levantamento. Nossa abordagem requer uma trajetória que une  $x_0$  a  $z_0$  e que esteja contida em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  exceto (possivelmente) por ponto inicial  $x_0$ . Construimos esta curva da seguinte maneira :

**Lema 5.1.1** *Assumimos que o sistema  $\Sigma$  satisfaça a condição de posto de álgebra de Lie e tome  $x_0 \in M$ ,  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Então existe uma seqüência  $z_n$  em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  com  $\lim z_n = x_0$  e tal que  $z_m \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_n)$  se  $m < n$ .*

**Demonstração:** Construimos essa seqüência indutivamente a partir de  $z_0$ . Primeiro escolhemos uma seqüência de vizinhanças abertas  $U_n$ ,  $n \geq 1$ , de  $x_0$  tais que  $\{x_0\} = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ . Agora definimos  $z_1 \in U_1 \cap \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  da seguinte maneira:

Tome uma função de controle  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$  tal que o ponto final da trajetória correspondente é  $e_{x_0}(u) = z_0$ . Revertendo o tempo vemos que  $-u$  é um controle regular no ponto  $z_0$  para sistema (revertido)  $-\Sigma$ . Assim se escrevermos  $e_{z_0}^-$  para a aplicação que associa a um controle em  $-\Sigma$  o ponto final da trajetória a partir de  $z_0$ , segue que a imagem  $\text{Im}(e_{z_0}^-)$  cobre uma vizinhança de  $x_0$ . Portanto,  $\mathcal{A}_R(-\Sigma, z_0) \cap U_1 \cap \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  não é vazio e qualquer  $z$  nessa intersecção satisfaz nosso requerimento. Pois,  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_1)$  se  $z_1 \in \mathcal{A}_R(-\Sigma, z_0)$ . Agora produza por indução e defina analogamente  $z_{n+1} \in \mathcal{A}_R(-\Sigma, z_n) \cap U_{n+1} \cap \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  usando uma trajetória regular de  $x_0$  a  $z_n$ . Em cada passo obtemos  $z_n \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_{n+1})$  implicando que  $z_m \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_n)$  quando  $m < n$ .  $\square$

Dada uma seqüência  $z_n$  como construída nesse lema, unimos  $z_{n+1}$  a  $z_n$  via uma trajetória de  $\Sigma$ , denote por  $\beta_n$ . Em princípio  $\beta_n$  está definida no intervalo  $[0, 1]$  mas podemos transladar o tempo para que  $\beta_n$  esteja definida no intervalo  $[-n - 1, -n]$ . Concatenando sucessivamente essas trajetórias

obtemos uma curva definida em  $(-\infty, 0]$ , que fica inteiramente contida no conjunto  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

**Lema 5.1.2** *Sejam as notações como acima. Então existe uma curva contínua*

$$\beta : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$$

tal que  $\beta(0) = z_0$ , cada pedaço  $\beta|_{[a,b]}$  com  $a < b \leq 0$  é uma (reparametrização de uma) trajetória de  $\Sigma$  e existe uma seqüência  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que  $\beta(t_n) \rightarrow x_0$ .

Em seguida precisaremos de levantamentos da curva  $\beta$  no lema anterior a uma curva  $\widehat{\beta}$  em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Para evitar o problema de existência de tal levantamento, construímos  $\widehat{\beta}$  mergulhando  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$  para algum  $x_1$  com  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$ . Pela proposição 4.2.6,  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é difeomorfo a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  se  $\widehat{x} \in \Gamma(\Sigma, x_1)$  se projeta em  $x_0$ . Assim a construção de curva  $\beta$  pode ser realizada em  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  em vez de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

**Lema 5.1.3** *Mantendo as notações e hipóteses acima, fixe  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0) = \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$ . Então existe uma curva contínua*

$$\widehat{\beta} : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$$

tal que  $\widehat{\beta}(0) = y_0$ , cada pedaço  $\widehat{\beta}|_{[a,b]}$  com  $a < b \leq 0$  de  $\widehat{\beta}$  é uma (reparametrização de uma) trajetória de  $\widehat{\Sigma}$  e existe uma seqüência  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que  $\widehat{\beta}(t_n) \rightarrow \widehat{x}$ .

Agora começamos a construção de aplicação procurada  $\Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$ . Seja  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  uma aplicação de recobrimento do controle e fixe  $y_0 \in \varepsilon^{-1}\{z_0\}$  e  $w_0 \in \pi^{-1}\{z_0\}$  para algum  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Então definimos uma aplicação

$$f_{z_0, y_0, w_0} : \Gamma(\Sigma, z_0) \longrightarrow N$$

da seguinte maneira:

Pela proposição 4.2.6,  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  é difeomorfo a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$ . Agora, tome  $y$  em  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$ . Então existe uma trajetória regular  $\alpha$  de  $\Sigma$  a partir de  $z_0$  tal que seu levantamento  $\widehat{\alpha}$  com condição inicial  $y_0$  tem  $y$  como ponto final. Denote por  $\widetilde{\alpha}$  o levantamento de  $\alpha$  a  $N$  com condição inicial  $w_0$ . Então declaramos o valor  $f_{z_0, y_0, w_0}(y)$  como sendo ponto final de  $\widetilde{\alpha}$ .

**Lema 5.1.4** *A aplicação  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é independente de escolha da trajetória  $\alpha$  usada na definição.*

**Demonstração:** Seja  $\alpha_1$  outra trajetória cujo levantamento  $\widehat{\alpha}_1$  termina em  $y$ . Denote por  $\widetilde{\alpha}_1$  o levantamento de  $\alpha_1$  a  $N$  com ponto inicial  $w_0$ . Como os pontos finais de  $\widehat{\alpha}$  e  $\widehat{\alpha}_1$  coincidem segue pelo corolário 4.2.5 que  $\alpha_1$  é monotonicamente homotópica a  $\alpha$ . Portanto os levantamentos  $\widetilde{\alpha}$  e  $\widetilde{\alpha}_1$  a  $N$  têm o mesmo ponto final já que a condição inicial  $w_0$  é a mesma (veja lema 4.1.5). Portanto  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é bem-definida.  $\square$

**Lema 5.1.5** *A aplicação  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é um difeomorfismo local.*

**Demonstração:** De fato, já que a aplicação  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é definida pelo ponto final de um levantamento, ela satisfaz  $\pi \circ f_{z_0, y_0, w_0} = \varepsilon$ . Assim,  $f_{z_0, y_0, w_0}$  localmente é dada por  $\pi^{-1} \circ \varepsilon$  onde  $\pi^{-1}$  denota a inversa local de  $\pi$ . Portanto  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é um difeomorfismo local.  $\square$

Tendo a aplicação  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0) \rightarrow N$ , repetimos esta construção ao longo da curva  $\widehat{\beta} : (-\infty, 0] \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0) = \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  dada no lema 5.1.3. Denote então por  $\beta = \varepsilon(\widehat{\beta})$  a projeção de  $\widehat{\beta}$  a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e seja  $\widetilde{\beta}$  o levantamento de  $\beta$  a  $N$  com  $\widetilde{\beta}(0) = w_0$ . Para cada  $t \in (-\infty, 0]$  temos um difeomorfismo local

$$f_{\beta(t), \widetilde{\beta}(t), \widetilde{\beta}(t)} : \Gamma(\Sigma, \beta(t)) \longrightarrow N.$$

Por simplicidade escreveremos  $f_t$  no lugar de  $f_{\beta(t), \widetilde{\beta}(t), \widetilde{\beta}(t)}$ . Os lemas a seguir mostram que essas aplicações são reunidas para formar um difeomorfismo local  $\Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$ .

**Lema 5.1.6**  $\Gamma(\Sigma, x_0) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$ .

**Demonstração:** Em vista do lema 5.1.3, olhamos  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  como conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x}) \subset \Gamma(\Sigma, x_1)$  com  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$ . Tome  $y \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  e seja  $\widehat{\alpha}$  uma trajetória regular de  $\widehat{\Sigma}$  a partir de  $\widehat{x}$  que acabe em  $y$ . Revertendo o tempo,  $\widehat{\alpha}^-$  torna-se regular em  $y$  para  $-\widehat{\Sigma}$ . Portanto existe uma vizinhança  $U$  de  $\widehat{x}$  em  $\Gamma(\Sigma, x_1)$  tal que  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y')$  para todo  $y' \in U$ . Como  $\widehat{\beta}(t) \rightarrow \widehat{x}$  segue-se  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$  para algum  $t$ , concluindo a demonstração.  $\square$

**Lema 5.1.7** *Suponha que  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t_1)) \cap \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t_2))$  para dados  $t_1, t_2 \in (-\infty, 0]$ . Então  $f_{t_1}(y) = f_{t_2}(y)$ .*

**Demonstração:** Para fixar as idéias suponhamos que  $t_1 < t_2$  e denotamos por  $\widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  a restrição de  $\widehat{\beta}$  a  $[t_1, t_2]$ , que é uma trajetória de  $\widehat{\Sigma}$ . Analogamente, seja  $\beta_{t_1, t_2}$  a projeção de  $\widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

Agora tome duas trajetórias regulares  $\widehat{\alpha}_i$ ,  $i = 1, 2$ , de  $\widehat{\Sigma}$  a partir de  $\widehat{\beta}(t_i)$ ,  $i = 1, 2$ , com mesmo ponto final  $y$ . Denote por  $\alpha_i$  suas projeções a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e sejam  $\widetilde{\alpha}_1$  o levantamento a  $N$  de  $\alpha_1$  a partir de  $\widetilde{\beta}(t_1)$  e  $\widetilde{\alpha}_2$  o levantamento de  $\alpha_2$  a partir de  $\widetilde{\beta}(t_2)$ . Pela definição,  $f_{t_i}(y)$  é o ponto final de  $\widetilde{\alpha}_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Note que o ponto final de  $\widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  é  $\widehat{\beta}(t_2)$  o que permite considerar a concatenação  $\widehat{\alpha}_2 * \widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  para obter uma trajetória de  $\widehat{\Sigma}$  a partir de  $\widehat{\beta}(t_1)$  com ponto final  $y$ . Assim, ambas  $\widehat{\alpha}_1$  e  $\widehat{\alpha}_2 * \widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  têm o mesmo ponto final  $y$ , o que implica que suas projeções  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 * \beta_{t_1, t_2}$  respectivamente são monotonicamente homotópicas. Por conseguinte, seus levantamentos  $\widetilde{\alpha}_1$  e  $(\alpha_2 * \beta_{t_1, t_2})^\sim$  a partir de  $\widetilde{\beta}(t_1)$  têm mesmo ponto final. Portanto para concluir a demonstração do lema basta observar que os pontos finais de  $\widetilde{\alpha}_2$  e  $(\alpha_2 * \beta_{t_1, t_2})^\sim$  coincidem. Mas isso segue pelo fato de que  $\widetilde{\alpha}_2$  começa a partir de  $\widetilde{\beta}(t_2)$  o que implica que  $(\alpha_2 * \beta_{t_1, t_2})^\sim = \widetilde{\alpha}_2 * \widetilde{\beta}_{t_1, t_2}$ . Daí os pontos finais são de fato iguais, mostrando que  $f_{t_1}(y) = f_{t_2}(y)$ .  $\square$

Com esses dois lemas podemos definir agora uma aplicação bem definida

$$f : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow N \quad (5.1)$$

escrevendo  $f(y) = f_t(y)$  onde  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$  para algum  $t \in (-\infty, 0]$ .

Resumindo tudo isso, temos:

**Teorema 5.1.8** *Seja  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  uma aplicação de recobrimento do controle entre  $\widehat{\Sigma}$  e  $\Sigma$ , que são assumidos como sistemas completos. Então existe uma aplicação do controle  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  tal que  $\pi \circ f = \varepsilon$ .*

**Demonstração:** Pela construção,  $f$  é igual a  $f_t$  sobre o aberto  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$ . Portanto, as propriedades de  $f_t$  são herdadas de  $f$ , mostrando que ele é um difeomorfismo local que leva  $\widehat{\Sigma}$  em  $\Sigma$ .  $\square$

Notemos que em geral a aplicação  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  não é sobrejetora. De fato, a imagem de  $f_t$  é o conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\tilde{\Sigma}, \tilde{\beta}(t))$  e portanto a imagem de  $f$  é

$$\text{Im}(f) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \mathcal{A}_R(\tilde{\Sigma}, \tilde{\beta}(t)), \quad (5.2)$$

que pode ser um subconjunto próprio de  $N$  já que  $\tilde{\Sigma}$  pode não ser controlável. No próximo capítulo damos um exemplo com  $N = \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)^\sim$ , o recobrimento universal de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ , onde o sistema levantado  $\tilde{\Sigma}$  não é controlável.

## Capítulo 6

# Homotopia monotônica e homotopia

O propósito deste capítulo é relacionar a homotopia monotônica entre trajetórias de  $\Sigma$  com a homotopia usual sem restrição de ser monotônica. Evidentemente homotopia monotônica implica homotopia, mas a recíproca em geral não acontece como se mostra no exemplo abaixo. Então será analisado a seguir quando é que a homotopia usual (ou homotopia geométrica) implica a homotopia dinâmica. Para estabelecer esta questão de uma forma mais clara temos que especificar o conjunto onde as homotopias acontecem. Como duas trajetórias monotonicamente homotópicas (com mesmo ponto final) são homotópicas dentro do conjunto acessível  $\mathcal{A}(x_0)$  de um ponto inicial comum, a questão mais correta a se fazer é quando a homotopia geométrica dentro de  $\mathcal{A}(x_0)$  implica a homotopia dinâmica. Tendo esses comentários em mente, introduzimos a seguinte terminologia.

Para duas trajetórias  $\alpha$  e  $\beta$  de  $\Sigma$  com o mesmo ponto final, escrevemos  $\alpha \simeq_{\mathcal{A}} \beta$  se elas são homotópicas (com o mesmo ponto final fixo) dentro de  $\mathcal{A}(x_0)$  onde  $x_0$  é o ponto inicial comum. Como antes, usaremos a notação  $\alpha \simeq_m \beta$  se forem monotonicamente homotópicas.

**Definição 6.0.9** *Diremos que um sistema  $\Sigma$  é geométrico em  $x_0$  se a homotopia monotônica é equivalente a homotopia geométrica. Mais precisamente, se  $\alpha$  e  $\beta$  são trajetórias regulares começando em  $x_0$  e terminando em um mesmo ponto, então  $\alpha \simeq_{\mathcal{A}} \beta$  implica  $\alpha \simeq_m \beta$ .*

**Observação:** No contexto de semigrupos topológicos, Lawson, [16], usa o

termo de *estrutura de homotopia compatível* quando a homotopia geométrica coincide com a homotopia monotônica.

Considerando a propriedade geométrica de  $\Sigma$ , nosso resultado principal é o exemplo que será dado a seguir. Por enquanto, provamos apenas um resultado simples, que mostra que este problema é relacionado com a possibilidade de levantar homotopias a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Lembre que uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  satisfaz a propriedade de levantamento de homotopia (abbrev. PLH) para um espaço  $X$  se para qualquer aplicação  $f^* : X \rightarrow E$  e toda homotopia  $H : [0, 1] \times X \rightarrow B$  com  $H(0, \cdot) = p \circ f^*$ , existe um levantamento  $H^* : [0, 1] \times X \rightarrow E$  com  $H^*(0, \cdot) = f^*$ , veja Hu [11].

**Proposição 6.0.10** *Seja  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$  e suponha que  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}(x_0)$  satisfaz PLH para o intervalo  $[0, 1]$ . Então  $\Sigma$  é geométrico em  $x_0$ .*

**Demonstração:** Tome  $\alpha, \beta \in R(\Sigma, x, z)$  que sejam homotópicas em  $\mathcal{A}(x)$ . Fixe  $y \in \varepsilon_{x_0}^{-1}(x)$  e denote por  $\hat{\alpha}$  o levantamento de  $\alpha$  a partir de  $y$ . Também, denote por  $H$  a homotopia (com pontos finais fixos) entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Pela PLH,  $H$  se levanta a  $\hat{H}$  com  $\hat{H}(0, \cdot) = \hat{\alpha}$ . Já que  $\hat{H}$  é o levantamento de  $H$ , segue que  $\hat{H}(1, \cdot) = \hat{\beta}$ . Portanto,  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  têm o mesmo ponto final, porque  $H$  fixa pontos finais. Isto mostra que  $\alpha \simeq_m \beta$ , concluindo a demonstração.  $\square$

**Corolário 6.0.11** *Seja  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$  e suponha que  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}(x_0)$  é aplicação de recobrimento. Então  $\Sigma$  é geométrico em  $x_0$ .*

**Demonstração:** De fato, toda aplicação de recobrimento satisfaz a propriedade de levantamento de homotopia para  $[0, 1]$ .  $\square$

**Observação:** Estes resultados valem sem a hipótese de que  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$ . Mas notemos que neste caso ausência dessa hipótese causa dificuldades técnicas devido ao fato de que trajetórias em  $\mathcal{A}(x_0)$  podem não admitir levantamentos a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

A seguir daremos um exemplo para mostrar que em geral a homotopia não implica a homotopia monotônica. A idéia é tomar  $\Sigma$  evoluindo sobre  $M$  e  $x_0 \in M$  tal que a imagem da aplicação do controle  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)^\sim$  não é simplesmente conexa. Então, trajetórias tal que seus levantamentos a  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)^\sim$  têm o mesmo ponto final podem ser homotópicas mas não são monotonicamente homotópicas se esses levantamentos não forem

homotópicos dentro da imagem de  $f$ . Na verdade, tomamos  $\Sigma$  como sendo um sistema controlável a partir de  $x_0$ , o que quer dizer que  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)^\sim = \widetilde{M}$  e podemos levantar trajetórias inteiras a partir de  $x_0$  às trajetórias de  $\widetilde{\Sigma}$  a partir de um ponto  $w_0$  sobre  $x_0$ . Neste caso a imagem de  $f$  torna-se o conjunto acessível a partir de  $w_0$  e procuraremos trajetórias de  $\widetilde{\Sigma}$  que tenham o mesmo ponto final mas não são homotópicas dentro do conjunto acessível a partir de  $w_0$ . Desta maneira obteremos trajetórias que são homotópicas no conjunto acessível a partir de  $x_0$  mas não são monotonicamente homotópicas.

## 6.1 Exemplo

Em nosso exemplo, tomamos  $M$  como sendo a variedade flag  $\mathbb{F} = \mathbb{F}^3(1, 2)$  dos flags ( $V_1 \subset V_2$ ),  $\dim V_i = i$ , de subespaços de  $\mathbb{R}^3$ . O sistema  $\Sigma$  será dado por um cone na álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$  das matrizes que induz campos de vetores em  $\mathbb{F}$  através de ação de  $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{F}$ .

Denote por  $\{i, j, k\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e seja  $W \subset \mathbb{R}^3$  um cone pontual (i.e.,  $W \cap -W = \{0\}$ ) que contém  $i$  no seu interior e tal que  $W \cap \text{ger}\{j, k\} = \{0\}$ . Coloque

$$\Sigma_1 = \{X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) : \forall t > 0, \exp(tX)W \subset W\} \quad \Sigma = -\Sigma_1.$$

Daí segue que  $\Sigma_1$  é um cone em  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ . Também,  $\Sigma_1$  contém no seu interior qualquer matriz diagonal  $\text{diag}\{2a, -a, -a\}$ ,  $a > 0$  (veja [22], *Teorema 6.12* ou [20]). Sejam  $S$  e  $S_1$  semigrupos em  $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$  gerados por  $\exp(\Sigma)$  e  $\exp(\Sigma_1)$  respectivamente. Então  $S = S_1^{-1}$  e já que  $\text{int}\Sigma_1 \neq \emptyset$  segue que ambos semigrupos têm interior não vazio em  $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$ .

Se  $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$  agir sobre uma variedade  $M$ , os cones  $\Sigma$  e  $\Sigma_1$  induzem sistemas de controle no mesmo sentido considerado acima, que usaremos a mesma letra  $\Sigma$  ou  $\Sigma_1$  para denotar. Os conjuntos acessíveis de  $\Sigma$  em  $M$  são as órbitas de  $S$ . Em particular, temos um sistema de controle na variedade flag.

Os conjuntos controláveis de  $S_1$  nas variedades flags são conhecidos (veja [20]). Primeiro, a ação de  $S_1$  sobre espaço projetivo real  $\mathbb{RP}^2$  nos dá dois conjuntos controláveis: O conjunto  $[W]$  das linhas contidas em  $W$  é o conjunto de controle invariante enquanto o conjunto de controle minimal é o complemento de  $[W]$  em  $\mathbb{RP}^2$ . Por outro lado, em  $\mathbb{F}$  há três conjuntos de controle. O conjunto de controle invariante é  $C = \pi^{-1}[W]$ , onde  $\pi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  denota a projeção padrão. Os outros dois conjuntos de controle são sitados em cima de conjunto de controle minimal em  $\mathbb{RP}^2$ . Note que, pela unicidade

de conjunto de controle invariante,  $\text{int}C \subset S_1x$  para qualquer  $x \in \mathbb{F}$ . Para  $S$ , (e portanto  $\Sigma$ ) a esquema é o mesmo: existe um único conjunto de controle invariante e um minimal, que é  $\text{int}C$ .

Qualquer  $x_0 \in \text{int}C$  serve para considerar  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Para conveniência escolhamos  $x_0 = (V_1 \subset V_2)$  com  $V_1 = \text{ger}\{i\}$  e  $V_2 = \text{ger}\{i, j\}$ . Este  $x_0$  pertence a  $\text{int}C$  porque  $i \in \text{int}[W]$  e  $C = \pi^{-1}[W]$ . Já que  $\text{int}C$  é o único conjunto de controle minimal de  $S$ , segue que  $\Sigma$  é controlável a partir de  $x_0$ . Por conseguinte,  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) = \mathbb{F}$ .

O recobrimento simplesmente conexo de  $\mathbb{F}$  é a esfera tri-dimensional  $\mathbb{S}^3$  com a aplicação de recobrimento  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{F}$  definida concretamente da seguinte forma: seja  $\mathbb{H}$  o espaço dos quatérnios  $a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$  com coeficientes reais. A esfera unitária  $\mathbb{S}^3 = \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\} \subset \mathbb{H}$  é um grupo de Lie compacto com multiplicação quaterniônica. Sua álgebra de Lie é  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ , que identificamos com o espaço de quatérnios imaginários puros, que é o espaço tangente  $T_1\mathbb{S}^3$ .

O grupo  $\mathbb{S}^3$  age em espaço tridimensional de quatérnios imaginários puros via  $w \mapsto zw\bar{z}$ , definindo um homomorfismo sobrejetor  $\theta : \mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R})$  com  $\ker \theta = \{\pm 1\}$ . Tomando a composta de ação de  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$  com  $\theta$  obtemos uma ação de  $\mathbb{S}^3$  sobre  $\mathbb{F}$ .

Uma computação simples mostra que  $\theta(i) = \text{diag}\{1, -1, -1\}$ ,  $\theta(j) = \text{diag}\{-1, 1, -1\}$  e  $\theta(k) = \text{diag}\{-1, -1, 1\}$ . Isto implica que, através da ação de  $\mathbb{S}^3$  sobre  $\mathbb{F}$ , podemos identificar  $\mathbb{F}$  com  $\mathbb{S}^3/Z$  onde

$$Z = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}.$$

Assim, a aplicação canônica  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{F} = \mathbb{S}^3/Z$  é um recobrimento com oito folhas de  $\mathbb{F}$ . Além do mais,  $Z$  age em  $\mathbb{S}^3$  à direita e suas órbitas são as fibras de  $p$ .

Notemos que os quatérnios  $i, j, k$  também podem ser considerados como elementos de álgebra de Lie de  $\mathbb{S}^3$ . Como a aplicação exponencial  $\exp$  é dada pelas séries usuais de Taylor na álgebra  $\mathbb{H}$  temos que  $\exp(it) = \cos t + isent$ . Em seguida,  $\tilde{\sigma}_1$  e  $\tilde{\sigma}_2$  denotaram os círculos

$$\tilde{\sigma}_1(t) = \cos t + isent \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}_2(t) = j \cos t + ksent \quad t \in [0, 2\pi]$$

em  $\mathbb{S}^3$ . Também a diferencial  $d\theta_1$  na identidade é um isomorfismo entre o espaço tangente  $T_1\mathbb{S}^3$  e  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ . Uma computação simples mostra que

$$d\theta_1(i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Agora, consideramos o sistema  $\tilde{\Sigma}$  levantado a  $\mathbb{S}^3$ . Denote por  $G$  o recobrimento simplesmente conexo de  $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$ , que é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ . Denotamos também por  $\theta : G \rightarrow \text{Sl}(3, \mathbb{R})$  o homomorfismo de recobrimento porque ele estende  $\theta : \mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R})$ . Qualquer ação de  $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$  torna-se a uma ação de  $G$  pela composta com  $\theta$ .

Já que  $\mathbb{S}^3$  é o recobrimento simplesmente conexo de  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ , segue que decomposição de Iwasawa de  $G$  é  $G = \mathbb{S}^3 T$  onde  $T$  denota um subgrupo fechado isomórfico a grupo de matrizes triangulares superiores com entradas positivas na diagonal. Portanto,  $G$  age sobre  $\mathbb{S}^3$  identificando-o com  $G/T$ . Por outro lado,  $X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$  induz um campo de vetores sobre  $\mathbb{F}$  cujo levantamento  $\tilde{X}$  a  $\mathbb{S}^3$  é também o campo induzido. O cone  $\Sigma \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$  gera um semigrupo  $\tilde{S} \subset G$  de tal modo que suas órbitas são conjuntos acessíveis do sistema levantado  $\tilde{\Sigma}$ . Escreva  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}^{-1}$  para o levantamento de  $S_1$  a  $G$ .

O próximo passo é determinar os conjuntos de controle minimais de  $\tilde{S}$  em  $\mathbb{S}^3$ , isto é, o interior dos conjuntos controláveis invariantes de  $\tilde{S}_1$ . Para isso, notemos que  $p$  intercambia a ação de  $G$  sobre  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{F}$ . Portanto, qualquer conjunto controlável em  $\mathbb{S}^3$  se projeta em  $\text{int}C$  através de  $p$ . Mais ainda, a ação esquerda de  $G$  sobre  $\mathbb{S}^3$  comuta com a ação direita de  $Z$ , o que implica que se  $D \subset \mathbb{S}^3$  é um conjunto de controle e  $m \in Z$  então  $Dm$  também é um conjunto de controle. Isso implica que  $Dm = D$  e os conjuntos de controle invariantes de  $\tilde{S}_1$  em  $\mathbb{S}^3$  são da forma  $Dm = D$ ,  $m \in Z$ . Portanto para ter conjuntos controláveis minimais fixamos um deles, digamos  $D_1$ , e encontramos o conjunto de todos  $m \in Z$  tal que  $D_1 m = D_1$  (aqui  $D_1 m$  significa a translação à direita de  $D_1 \subset \mathbb{S}^3$  via  $m \in Z \subset \mathbb{S}^3$ ).

Na verdade os conjuntos de controle invariantes de  $\tilde{S}_1$  são as componentes conexas de  $p^{-1}C$ . Com efeito, os conjuntos de controle invariante são conexos, e portanto estão contidos em componentes conexas. Por outro lado, pela proposição 4.3 em [21]  $\tilde{S}_1$  é transitivo no interior de uma componente conexa, e por conseqüência, as componentes conexas são de fato conjuntos de controle invariantes.

**Proposição 6.1.1** *Há exatamente dois conjuntos de controle invariantes de  $\tilde{S}_1$  em  $\mathbb{S}^3 = G/T$ . Denotamos eles por  $D_1$  e  $D_2$ . Então  $D_1 m = D_1$  se  $m \in \{\pm 1, \pm i\}$  e  $D_1 m = D_2$  se  $m \in \{\pm j, \pm k\}$ . Também,  $\tilde{\sigma}_1$  é contido em  $\text{int}D_1$  enquanto  $\tilde{\sigma}_2$  é contido em  $\text{int}D_2$ .*

**Demonstração:** Primeiro, fazemos  $G$  agir sobre  $\mathbb{S}^2$  tomando a composta de ação de  $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$  com o homomorfismo canônico  $\theta : G \rightarrow \text{Sl}(3, \mathbb{R})$  (que

estende a  $\theta : \mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R})$ . O subgrupo de isotropia  $P$  no vetor básico  $i$  contém o subgrupo de matrizes triangulares superiores  $T$ . Assim, temos uma projeção equivariante  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que manda os conjuntos de controle em  $\mathbb{S}^3$  sobre os em  $\mathbb{S}^2$ . Agora, os conjuntos de controle de  $\tilde{S}_1$  em  $\mathbb{S}^2$  são os mesmos de  $S_1$  cujos conjuntos controláveis invariantes são intersecções de  $\pm W$  com  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Portanto,  $\tilde{S}_1$  tem pelo menos dois conjuntos controláveis invariantes em  $\mathbb{S}^3$ .

Por outro lado, seja  $P_0$  a componente de identidade de  $P$ . O fato de que o conjunto de controle invariante  $C$  de  $S_1$  em  $\mathbb{F}$  contém a fibra inteira sobre  $x_0$  significa que  $P_0 x_0 \subset \text{int}C$ . Agora, a aplicação  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{F}$  satisfaz  $p(Z) = \{x_0\}$ . Por conseguinte, para qualquer  $m \in Z$ ,  $P_0 m$  é inteiramente contida num conjunto de controle invariante de  $\tilde{S}_1$  em  $\mathbb{S}^3$ . Também, se  $m \in Z$  então a ação esquerda de  $m$  deixa invariante a fibra  $p^{-1}\{x_0\}$  e portanto  $Dm = D$  quando  $m \in P_0 \cap T$ .

Agora, a álgebra de Lie de  $P$  é o subespaço das matrizes em  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$  da forma

$$\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

com  $A$  uma matriz  $2 \times 2$ , enquanto a componente de identidade de  $\theta(P)$  é  $\theta(P_0)$ , que é o subgrupo de  $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$  formado pelas matrizes do mesmo tipo, mas tendo  $a > 0$  e  $a \det A = 1$ . Portanto, pela expressão dada acima para  $\theta(j)$  e  $\theta(k)$  vemos que  $j, k \notin P_0$ .

Por outro lado, por (6.1)  $d\theta_1$  pertence a álgebra de Lie de  $P$ . Portanto, o círculo  $\exp(it) = \tilde{\sigma}(t)$  é contido em  $P_0$ . Em particular,  $\pm 1 = \exp(\pm i\pi)$  e  $\pm i = \exp(\pm i\pi/2)$  pertencem a  $P_0$ , mostrando que  $D_1 m = D_1$  se  $m \in \{\pm 1, \pm i\}$ . Analogamente, podemos ver que  $D_1(\pm j) = D_1(\pm k)$ , concluindo a demonstração da proposição.  $\square$

**Corolário 6.1.2** *Os conjuntos de controle minimais de  $\tilde{S}$  (e  $\tilde{\Sigma}$ ) sobre  $\mathbb{S}^3$  são  $\text{int}D_1$  e  $\text{int}D_2$ .*

Com esse corolário na mão podemos dar um exemplo de um par de trajetórias de  $\Sigma$  em  $\mathbb{F}$  que tem o mesmo ponto final e são homotópicas mas não são monotonicamente homotópicas.

Primeiro notemos que pela segunda parte de prova acima o círculo  $\tilde{\sigma} = \{\cos t + i \sin t : t \in \mathbb{R}\}$  é contido na componente de identidade  $P_0$  de  $P$ , e portanto em  $\text{int}D_1$ , já que  $1 \in \text{int}D_1$ . As trajetórias que consideramos são os dois lados de  $\tilde{\sigma}$  separados por  $\pm 1$  e passando por  $\pm i$ , respectivamente.

**Lema 6.1.3** *As curvas  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^3$ ,  $\tilde{\alpha}(t) = \cos t + i \sin t$  e  $\tilde{\beta}(t) = \cos t - i \sin t$  são (reparametrizações de) trajetórias de  $\tilde{\Sigma}$ .*

**Demonstração:** Denote por  $\sigma_1$  a projeção de  $\tilde{\sigma}_1$  em  $\mathbb{F}$ . Já que 1 é mandado em  $x_0$  e

$$\theta(\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & -\sin 2t \\ 0 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

segue que  $\sigma_1$  é a curva  $f_s = (V_1 \subset V_2^s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , onde  $V_2^s$  é o subespaço gerado por  $i$  e  $j \cos 2s + k \sin 2s$ . Agora, tome a matriz diagonal  $H = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  em  $\text{int}\Sigma$ , com  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . A existência de uma tal matriz vem de fato mencionado anteriormente de que por exemplo  $X = \text{diag}\{-2, 1, 1\}$  pertence a  $\text{int}\Sigma_1 \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ , e daí que  $-X \in \text{int}\Sigma$ . Por conseguinte podemos escolher  $H$  próximo a  $-X$ . Olhando para a realização concreta de  $\sigma$  vemos que  $\exp(tH)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , deixa este círculo invariante. Com efeito,  $V_1$  é invariante sob  $\exp(tH)$  como o subespaço  $\text{ger}\{j, k\}$ . Além disso, o grupo de 1-parâmetro  $\exp(tH)$  tem apenas dois pontos fixos em  $\sigma$ , já que as únicas linhas em  $\text{ger}\{j, k\}$  invariantes sob  $\exp(tH)$  são aquelas geradas pelos  $j$  e  $k$ . Os demais pontos de  $\sigma$  estão em duas trajetórias de  $\exp(tH)$ , percorrendo de  $f_0$  a  $f_{\pi/4}$ .

Considere agora o grupo a 1-parâmetro  $\exp(tH)$  em  $G$ . Via equivariância ele deixa  $\tilde{\sigma}_1$  invariante, e como  $\tilde{\sigma}_1$  é o recobrimento com duas folhas de  $\sigma_1$ ,  $\exp(tH)$  tem quatro pontos fixos e quatro trajetórias, digamos  $\tau_1$  e  $\tau_2$  percorrendo de 1 a  $i$  e de  $i$  a  $-1$ , respectivamente, e  $\tau_3$  e  $\tau_4$ , que vão de 1 a  $-i$  e de  $-i$  a  $-1$ , respectivamente.

Como  $H \in \Sigma$ , cada  $\tau_i$  pode ser visto como uma trajetória de  $\Sigma$  definido sobre a reta real toda. Para concluir a prova vamos conectar os pontos fixos entre  $\tau_i$ 's para obter trajetórias definidas num intervalo compacto. Para isso, tome por exemplo o ponto fixo 1 e vamos conecta-lo a  $\tau_1$ . Desde que  $H \in \text{int}\Sigma$  existe então  $a > 0$  pequeno suficiente tal que

$$X = H + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \in \text{int}\Sigma.$$

Então o grupo a 1-parâmetro  $\exp(tX) \in G$  deixa  $\tilde{\sigma}_1$  invariante e 1 não é um ponto fixo. Se tomarmos  $t$  pequeno suficiente conectamos 1 a  $\tau_1$ . Processando analogamente com os outros pontos fixos verificamos que os semi-círculos são de fato as trajetórias de  $\Sigma$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Denotamos por  $\alpha$  e  $\beta$  as projeções em  $\mathbb{F}$  de  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$ , respectivamente. Já que  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  são trajetórias de  $\tilde{\Sigma}$ , segue que  $\alpha$  e  $\beta$  são trajetórias de  $\Sigma$ . Também, os pontos finais de  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  coincidem, e daí que  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicas em  $\mathbb{F}$  ( $= \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ ). Finalmente, vamos provar que  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  não são monotonicamente homotópicas. Isto vai mostrar que  $\alpha$  e  $\beta$  também não são monotonicamente homotópicas, já que a homotopia monotônica eventual entre  $\alpha$  e  $\beta$  se levantaria a uma homotopia monotônica entre  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$ .

Para a prova de que  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  não são monotonicamente homotópicas reunimos os seguintes fatos:

1. Lembramos a demonstração de proposição 6.1.1, que afirma que os círculos  $\tilde{\sigma}_1 = \cos t + isent$  é contido em  $\text{int}D_1$  e  $\tilde{\sigma}_2 = j \cos t + ksent$  está contido em  $\text{int}D_2$ .
2. O conjunto  $\text{int}D_2$  é o conjunto de controle minimal de  $\tilde{\Sigma}$  portanto é invariante sob trajetórias no tempo negativo desse sistema. Isto significa que trajetórias positivas de  $\Sigma$  partindo de fora de  $\text{int}D_2$  nunca entram dentro desse conjunto. Assim, uma trajetória a partir de  $1 \in \text{int}D_1$  não pode ter seu ponto final em  $\text{int}D_2$ .
3. O círculo  $\tilde{\sigma}_1$  não é homotópico a um ponto em  $\mathbb{S}^3 \setminus \tilde{\sigma}_2$ . (Nas palavras topológicas, isso diz que “linking number” de  $\tilde{\sigma}_1$  e  $\tilde{\sigma}_2$  não é trivial.) Para ver isso, tome a projeção estereográfica  $\mathbb{S}^3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  com o pólo norte  $N$  tomado em  $\tilde{\sigma}_2$ . Então  $\tilde{\sigma}_2$  vai para uma reta  $l$  que passa pela origem em  $\mathbb{R}^3$ , enquanto  $\tilde{\sigma}_1$  vai para um círculo que não pode ser contraído a um ponto sem atravessar  $l$  (veja [2], página 238).

Portanto a homotopia entre  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  deve cruzar  $\tilde{\sigma}_2$  e conseqüentemente não é monotônica. Pois, caso contrário nós teríamos uma trajetória a partir de  $1$  que termine em  $\tilde{\sigma}_2 \in \text{int}D_2$ . Isto conclue a demonstração de que  $\alpha$  e  $\beta$  são trajetórias homotópicas em  $\mathbb{F}$  mas, não monotonicamente.

**Observação:** Pelo corolário 6.0.11 segue que neste exemplo o difeomorfismo local  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  não é uma aplicação de recobrimento.

# Capítulo 7

## Semigrupos

A homotopia monotônica foi considerada também na teoria de semigrupos por Lawson de uma maneira um pouco diferente que a nossa (veja [15], [16]). O objetivo desses trabalhos foi o de estender as construções clássicas de grupos de recobrimento universal à semigrupos de Lie.

Então enunciamos os resultados já obtidos nos capítulos precedentes no contexto de teoria de semigrupos de Lie, ao invés da teoria do controle. A relação se dá através de sistemas de controle invariantes em grupos de Lie. Nesse contexto, pretendemos relacionar nossas construções com um dos problemas apresentados em [16]. O problema é saber se é possível identificar o semigrupo  $\Gamma(\Sigma, 1)$ , onde 1 denota o elemento neutro de um grupo de Lie, com o semigrupo de recobrimento universal  $\tilde{S}$  de um semigrupo de Lie  $S$  (ou semigrupo infinitesimalmente gerado). Lembramos que esse problema foi resolvido em [16] para o caso particular de semigrupos de Ol'shanskii. Então nós abordamos o caso de semigrupos gerais utilizando os resultados obtidos sobre o recobrimento universal do controle. Notemos também que os resultados apresentados neste capítulo são parciais.

### 7.1 Semigrupos de Lie

Sejam  $G$  um grupo de Lie conexo de dimensão finita cuja álgebra de Lie é  $\mathbb{L}(G) = \mathfrak{g}$  e  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  a aplicação exponencial de  $\mathfrak{g}$  em  $G$ .

**Definição 7.1.1** *Um subsemigrupo de Lie é um subsemigrupo fechado  $S$  de  $G$  que, como um subsemigrupo fechado, é gerado por imagens de todos os*

*semigrupos a 1-parâmetros*

$$\gamma_X : \mathbb{R}^+ \longrightarrow S, \quad t \longmapsto \exp(tX),$$

isto é,  $S = \text{fe}(\exp(\mathbb{L}(S)))$ , o fecho do subsemigrupo gerado pela imagem exponencial do conjunto subtangente de  $S$ .

O conjunto  $\mathbb{L}(S)$  desses semigrupos a 1-parâmetros pode ser visto como um conjunto na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Ele é um cone convexo fechado, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(S) + \mathbb{L}(S) &\subseteq \mathbb{L}(S) \\ \mathbb{R}^+ \cdot \mathbb{L}(S) &\text{ onde } \mathbb{R}^+ = [0, \infty), \end{aligned}$$

que satisfaz

$$e^{ad(X)} \mathbb{L}(S) = \mathbb{L}(S) \quad \forall X \in \mathbb{L}(S) \cap -\mathbb{L}(S),$$

uma identidade algébrica que reflete o fato de  $S$  ser invariante sob conjugações por elementos de grupo das unidades  $S \cap S^{-1}$ . Cones convexos satisfazendo estas propriedades são chamados de cones de Lie e desempenham o papel de álgebras de Lie na teoria de Lie de semigrupos.

Um subsemigrupo de Lie  $S$  é dito gerador se a álgebra de Lie gerada por  $\mathbb{L}(S)$  for igual a álgebra  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Neste caso,  $\text{int}S \neq \emptyset$  e  $\text{int}S$  é denso em  $S$ .

## 7.2 Sistemas invariantes em grupos

Nesta seção a teoria desenvolvida anteriormente será particularizada para famílias de campos invariantes (à direita ou à esquerda) num grupo de Lie conexo  $G$ . Denotaremos por  $L_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto gh$ , e  $R_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto hg$ , as translações à esquerda e à direita respectivamente. Pelo fato de que  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$ , é uma aplicação analítica, segue que para todo  $g \in G$  as translações  $L_g$  e  $R_g$  são difeomorfismos analíticos de  $G$ .

Um campo  $X$  é dito invariante à direita se  $(R_g)_* X = X$  onde  $*$  significa a diferencial. De maneira análoga, se define campos invariantes à esquerda. No que segue a preferência é dada aos campos invariantes à direita pelo motivo de considerar ações à esquerda (o que ocorre quando se escreve o valor de uma função  $f$  como  $f(x)$  então os campos que interessam são os invariantes à direita). A condição de invariância à direita implica que para

todo  $g \in G$ ,  $X(g) = d(R_g)_1 X(1)$  o que significa que os campos invariantes à direita são completamente determinados por seus valores na identidade. Notemos também que a invariância de  $X$  acarreta a simetria de  $X$  no sentido em que  $X_t(hg) = X_t(h)g$  para todos  $g, h \in G$ . Tomando em particular  $h = 1$ , fica  $X_t(g) = X_t(1)g$ . Isto é, a trajetória de  $X$  que passa por  $g$  é obtida por translação da trajetória que passa pelo elemento neutro. Como as trajetórias são obtidas umas das outras por translação, seus domínios de definição se prolongam sobre todo  $\mathbb{R}$ , isto é, os campos invariantes são completos e portanto seus fluxos são globalmente definidos em  $G$ .

Então, ao longo deste capítulo levamos a conta apenas trajetórias que passam pela identidade  $1 \in G$ , e portanto o conjunto  $\Gamma(\Sigma, 1)$  de classes de homotopia monotônica de  $\Sigma$ -trajetórias a partir de 1.

**Proposição 7.2.1** *O conjunto  $\Gamma(\Sigma, 1)$  é um semigrupo (topológico) e a aplicação de avaliação  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow S$  é um homomorfismo (contínuo) de semigrupos.*

**Demonstração:** A partir do teorema 3.1.1, trocando  $M$  por um grupo de Lie  $G$  e tomando  $x_0 = 1$ , o elemento neutro de  $G$ , temos que  $\Gamma(\Sigma, 1)$  é um espaço topológico Hausdorff. Para  $[\alpha]_m, [\beta]_m \in \Gamma(\Sigma, 1)$  a concatenação entre representantes  $\alpha$  e  $\beta$  é definida por

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \beta(2s), & s \in [0, 1/2] \\ R_{\beta(1)}(\alpha(2s - 1)), & s \in [1/2, 1] \end{cases} .$$

Notemos que a concatenação  $*$  entre  $\alpha$  e  $\beta$  é contínua com respeito à topologia  $\mathcal{C}^0$  em  $R(\Sigma, 1)$  e pela proposição 3.1.5, a aplicação  $\pi : (R(\Sigma, 1), \mathcal{C}^0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, 1)$  é contínua. Finalmente comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Sigma, 1) \times \Gamma(\Sigma, 1) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma, 1) \\ \downarrow ([\alpha], [\beta]) & \longmapsto & \downarrow [\alpha * \beta] \\ \pi \times \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ R(\Sigma, 1) \times R(\Sigma, 1) & \longrightarrow & R(\Sigma, 1) \\ \downarrow (\alpha, \beta) & \longmapsto & \downarrow \alpha * \beta \end{array}$$

implica continuidade do produto ‘ $\cdot$ ’ em  $\Gamma(\Sigma, 1)$  definido por

$$\Gamma(\Sigma, 1) \times \Gamma(\Sigma, 1) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, 1), \quad ([\alpha], [\beta]) \longmapsto [\alpha * \beta].$$

Este produto não depende dos representantes usados na definição. Com efeito, Seja  $\alpha' \simeq_m \alpha$  e  $\beta' \simeq_m \beta$  com as homotopias monotônicas  $h_1$  e

$h_2$  respectivamente. Então, a concatenação  $h_1 * h_2$  define uma homotopia monotônica entre  $\alpha * \beta$  e  $\alpha' * \beta'$ . Isto é,  $[\alpha * \beta]_m = [\alpha' * \beta']_m$ .

Também, o produto tem propriedade de associatividade. Mais precisamente,  $\alpha * (\beta * \gamma)$  e  $(\alpha * \beta) * \gamma$  são as trajetórias em  $R(\Sigma, 1)$  com parametrizações diferentes. Mas seus levantamentos obtidos concatenando sucessivamente os levantamentos de  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\alpha$  têm o mesmo ponto final e portanto pelo teorema 4.2.7 temos que  $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq_m (\alpha * \beta) * \gamma$  em  $R(\Sigma, 1)$ . Já que pelo lema 4.2.4, a homotopia monotônica tem bom comportamento com ‘\*’ concluímos que  $\Gamma(\Sigma, 1)$  é um semigrupo associativo. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varepsilon([\alpha]_m \cdot [\beta]_m) &= \varepsilon([\alpha * \beta]_m) \\ &= (\alpha * \beta)(1) \\ &= \alpha(1)\beta(1) \\ &= \varepsilon([\alpha]_m) \varepsilon([\beta]_m) \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação de avaliação  $\varepsilon$  é de fato um homomorfismo de semigrupos.  $\square$

### 7.3 Recobrimentos de semigrupos

Seja  $S \subset G$  um subsemigrupo infinitesimalmente gerado por um cone de Lie  $W$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , i.e.,  $S = \text{fe}\langle \exp(W) \rangle$ . Pela proposição 7.2.1, sabemos que  $\Gamma(\Sigma, 1)$  é um semigrupo topológico e a aplicação  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow S$ ,  $[\gamma]_m \mapsto \gamma(1)$  é um homomorfismo contínuo de semigrupos. Por outro lado, como  $S$  é conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo, ele admite recobrimento universal  $p : \tilde{S} \rightarrow S$ , veja [10]. Em particular, para um aberto em  $S$  existe também um espaço topológico que é o recobrimento (universal) simplesmente conexo desse conjunto aberto. No recobrimento podem existir várias estruturas de semigrupo, ao contrário do acontece com grupos de Lie, e podem nem ser isomorfas como se mostra no seguinte

**Exemplo 7.3.1** *Considere o cilindro dado pela projeção  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ , com  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . O cone  $W \subset \mathbb{R}^2$*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq |x|\}$$

é um semigrupo no plano e sua projeção  $S = \pi(W)$  é um semigrupo no cilindro. O cone  $W$  propriamente dito pode, com sua estrutura de semigrupo, ser uma realização de  $\tilde{S}$ . No entanto,  $\pi^{-1}(S)$  também é um semigrupo em  $\mathbb{R}^2$ . Essa imagem inversa é

$$\pi^{-1}(S) = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} (x + W)$$

que é simplesmente conexo e portanto é uma outra realização de recobrimento universal de  $S$ . As duas estruturas de semigrupos em  $\pi^{-1}(S)$  e  $W$  não são isomorfas.

Por outro lado, existe uma estrutura canônica no recobrimento  $\tilde{S}$  que é definida da seguinte forma: denote por  $m_S : S \times S \rightarrow S$  o produto em  $S$ . Então pelo princípio da monodromia  $m_S \circ (p \times p) : \tilde{S} \times \tilde{S} \rightarrow S$  se levanta de maneira única a uma aplicação contínua  $m_{\tilde{S}} : \tilde{S} \times \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  tal que  $p \circ m_{\tilde{S}} = m_S \circ (p \times p)$ . Pois,  $\tilde{S} \times \tilde{S}$  é simplesmente conexo. Daí  $\tilde{S}$  torna-se um semigrupo com respeito a essa aplicação contínua (veja [10], Teorema 3.14). Notemos também que é essa construção que vai ser usada ao longo deste capítulo.

As questões para entender  $\Gamma(\Sigma, 1)$  estão ligadas à sua comparação com  $\tilde{S}$ . Existem aplicações naturais  $\tilde{S} \rightarrow S$  e  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow S$ . Além do mais, como  $\tilde{S}$  pode ser realizado como espaço de classes de homotopia de curvas em  $S$  existe também uma aplicação  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow \tilde{S}$ , que a uma classe de equivalência de trajetórias monotonicamente homotópicas associa sua classe de equivalência por homotopias gerais.

Estamos interessados na questão da identificação de  $\Gamma(\Sigma, 1)$  com  $\tilde{S}$  usando a propriedade universal estudada anteriormente no capítulo 5. Como  $\tilde{S}$  pode não ter estrutura de variedade, não está claro a princípio como é que podemos realizar o levantamento de nosso sistema de controle  $\Sigma$  a  $\tilde{S}$ . Para evitar isso, consideramos o interior  $\text{int}S$ , que é uma variedade, e portanto temos o recobrimento universal simplesmente conexo  $\text{int}\tilde{S}$  também sendo uma variedade. Notemos que como 1 não está em  $\text{int}S$ , mergulhamos  $\text{int}\tilde{S}$  em  $\text{int}(Sg)$  para algum  $g \in \text{int}S^{-1}$ , interior do semigrupo inverso, e tomamos a seguir  $\tilde{1} \in \text{int}(Sg)$  tal que  $\pi(\tilde{1}) = 1$  onde  $\pi : \text{int}(Sg) \rightarrow \text{int}(Sg)$  denota a aplicação de recobrimento.

Como dito antes, identificamos  $\tilde{S}$  com classes de homotopia das curvas em  $S$  via relação de equivalência dada como segue:  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicas (como curvas) em  $S$  se têm as mesmas extremidades fixas.

O semigrupo que consideramos a seguir para identificação de  $\Gamma(\Sigma, 1)$  com  $\tilde{S}$  foi construído em [10]. Denotamos por

$$\gamma_X : \mathbb{R}^+ \longrightarrow S, \quad t \longmapsto \exp(tX)$$

o semigrupo à 1-parâmetro de  $S$  para um campo dado  $X \in W = \Sigma \subset \mathfrak{g}$ , e por  $\tilde{\gamma}_X : \mathbb{R}^+ \rightarrow \tilde{S}$  o levantamento a  $\tilde{S}$  de  $\gamma_X$ . Então,  $X \mapsto \tilde{\gamma}_X$  fornece uma bijeção de  $W$  sobre  $\text{Hom}(\mathbb{R}^+, \tilde{S})$ . Defina  $\text{Exp} : W \rightarrow \tilde{S}$  por  $X \mapsto \tilde{\gamma}_X(1)$ , que por sua vez pode ser vista como levantamento de aplicação exponencial  $\exp : W \rightarrow S$ . O semigrupo que levamos em conta é dado por

$$\tilde{S}_L =: \text{fe}\langle \text{Exp}(W) \rangle.$$

Para mais informações sobre esse semigrupo veja proposição 3.22 em [10].

**Teorema 7.3.2**  $\tilde{S}_L$  é simplesmente conexo.

A idéia da demonstração consiste em explorar a propriedade de reversibilidade, como já foi feito em [20]. Essa propriedade com o fato de que  $\tilde{S}_L$  é infinitesimalmente gerado permite deformar continuamente conjuntos compactos em  $\tilde{S}$  a conjuntos compactos em  $\tilde{S}_L$ . Com isso, é possível transladar qualquer homotopia em  $\tilde{S}$  a uma homotopia em  $\tilde{S}_L$ . Como  $\tilde{S}$  é simplesmente conexo, dado um laço em  $\tilde{S}_L$  ele é homotópico a um ponto em  $\tilde{S}$ . Transladando a homotopia existente, se mostra que o laço é homotópico em  $\tilde{S}_L$  a um ponto.

**Definição 7.3.3** Um subsemigrupo  $T \subset L$  é dito reversível à direita (resp. à esquerda) se para todo  $x \in L$ ,  $Tx \cap T \neq \emptyset$ , (resp.  $xT \cap T \neq \emptyset$ ).  $T$  é dito reversível se o for tanto à direita quanto à esquerda.

**Proposição 7.3.4**  $\tilde{S}_L$  é subsemigrupo reversível em  $\tilde{S}$  (à esquerda e à direita).

A demonstração desta proposição requer um série de lemas provados. Mais precisamente, começamos com a proposição 3.22 de [10], que garante que

$$\tilde{S} = \text{fe}(\pi_1(S)\tilde{S}_L) \tag{7.1}$$

onde  $\pi_1(S)$  é isomorfo a subgrupo  $p^{-1}(1)$  de  $\tilde{S}$ . E provaremos a afirmação primeiro para  $g \in \pi_1(S)\tilde{S}_L$  e depois passar ao fecho.

**Definição 7.3.5** *Um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto  $x$  num espaço topológico  $X$  é uma família  $\mathcal{F}$  de abertos de  $X$  tal que cada elemento de  $\mathcal{F}$  contém  $x$  e se  $A \subset X$  é um aberto com  $x \in A$  existe um  $B \in \mathcal{F}$  tal que  $B \subset A$ .*

Para demonstrar a proposição 7.3.4 no caso em que  $g \in \pi_1(S)\tilde{S}_L = \bigcup_{x \in \pi_1(S)} x\tilde{S}_L$  precisamos antes o seguinte

**Lema 7.3.6** *Denote por  $\mathcal{V}$  o conjunto das vizinhanças de  $\tilde{1}$  em  $\tilde{S}$  que estão contidas em  $\tilde{S}_L$ . Então cada uma das famílias  $\mathcal{F}_1 = \{xV : V \in \mathcal{V}\}$  e  $\mathcal{F}_2 = \{Vx : V \in \mathcal{V}\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x$  em  $\tilde{S}$ .*

**Demonstração:** O subsemigrupo  $\tilde{S}_L$  é uma vizinhança de  $\tilde{1}$  em  $\tilde{S}$  (veja proposição 3.22 em [10]). Dado um aberto  $A$  de  $\tilde{1}$  em  $\tilde{S}$ . Então  $\tilde{S}_L \cap A$  pertence a  $\mathcal{V}$ . Isto é  $\mathcal{V}$  é um sistema fundamental de vizinhanças.

Agora, tome  $V \in \mathcal{V}$ . Então  $xV$  (resp.  $Vx$ ) é uma vizinhança de  $x$  em  $\tilde{S}$ . Pois, a translação à esquerda  $L_x$  (resp. à direita  $R_x$ ) é um homeomorfismo sobre sua imagem. Portanto, cada elemento de  $\mathcal{F}_1$  (resp.  $\mathcal{F}_2$ ) contém  $x$ . Se  $A$  for um aberto de  $x$  então  $x^{-1}A$  é um aberto de  $\tilde{1}$ . Portanto existe  $U \in \mathcal{V}$  tal que  $U \subset x^{-1}A$  (resp., existe  $U \in \mathcal{V}$  tal que  $U \subset Ax^{-1}$ ). Com isso, concluímos que existe  $B = xU$  em  $\mathcal{F}_1$  (resp, existe  $B = Ux$  em  $\mathcal{F}_2$ ) tal que  $B \subset A$ , mostrando o lema.  $\square$

**Corolário 7.3.7** *Existem vizinhanças  $U$  e  $V$  em  $\mathcal{V}$  tal que  $Ux \subset xV$  (resp.  $xU \subset Vx$ ).*

**Demonstração:** Considerando  $xV$  como vizinhança de  $x$ , existe  $Ux \in \mathcal{F}_2$  tal que  $Ux \subset xV$ . Trocando os papéis das vizinhanças, para  $Vx$  existe  $xU \in \mathcal{F}_1$  tal que  $xU \subset Vx$ .  $\square$

**Lema 7.3.8** *Dado  $x \in \pi_1(S)$ , temos que  $x\tilde{S}_L = \tilde{S}_Lx$ .*

**Demonstração:** Pelo corolário 7.3.7, existem vizinhanças  $U$  e  $V$  em  $\mathcal{V}$  tal que  $Ux \subset xV$ . O fato de  $\tilde{S}_L$  ser semigrupo de Lie (conexo) implica que qualquer vizinhança da identidade o gera de maneira topológica. Em particular,

$U$  e  $V$  geram topologicamente  $\tilde{S}_L$ . Usando a inclusão  $Ux \subset xV$  duas vezes obtemos,

$$U^2x \subset UUX \subset UXV \subset xV^2 \subset x\tilde{S}_L.$$

Suponha por indução que  $U^{n-1}x \subset xV^{n-1} \subset x\tilde{S}_L$  é verdadeiro. Então,

$$U^n x \subset U(U^{n-1}x) \subset UXV^{n-1} \subset xV^n \subset x\tilde{S}_L.$$

Como  $U$  gera  $\tilde{S}_L$ , i.e.,  $\bigcup_{n>0} U^n = \tilde{S}_L$ , temos que  $\tilde{S}_L x \subset x\tilde{S}_L$ .

Para obter outra inclusão, i.e.,  $x\tilde{S}_L \subset \tilde{S}_L x$ , novamente pelo corolário 7.3.7 existem vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $\bar{1}$  em  $\tilde{S}_L$  tal que  $xV \subset Ux$ . Então,  $xV^2 \subset xVV \subset UxV \subset U^2x \subset \tilde{S}_L x$ . Indutivamente,  $xV^n \subset U^n x \subset \tilde{S}_L x$ . Como  $V$  gera  $\tilde{S}_L$ , segue que  $x\tilde{S}_L \subset \tilde{S}_L x$  e por conseguinte a igualdade  $x\tilde{S}_L = \tilde{S}_L x$  para todo  $x$ .  $\square$

**Definição 7.3.9** *Seja  $I$  o conjunto dos elementos  $x$  em  $\pi_1(S)$  que satisfazem a propriedade  $x\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$ . i.e.,  $I = \{x \in \pi_1(S) : x\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset\}$  e respectivamente defina  $J = \{x \in \pi_1(S) : \tilde{S}_L x \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset\}$ .*

**Lema 7.3.10**  *$I$  (resp.  $J$ ) é um subgrupo de  $\pi_1(S)$ .*

**Demonstração:** Seja  $x \in I$ . Então  $x\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$  implica que  $x^{-1}(x\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L) \neq \emptyset$ , pois,  $L_{x^{-1}}$  é um homeomorfismo. Isto implica que  $x^{-1}\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$  o que equivale a dizer que  $x^{-1} \in I$ . Se  $x, y \in I$  então existem  $s_1, s_2 \in \tilde{S}_L$  tal que  $xs_1, ys_2 \in \tilde{S}_L$ .

Pelo lema 7.3.8, existe  $s_3 \in \tilde{S}_L$  tal que  $s_1y = ys_3$ . Então  $xs_1ys_2 = xys_3s_2 \in \tilde{S}_L$  já que  $\tilde{S}_L$  é um semigrupo. Isto mostra que  $xy \in I$ . Todo subconjunto (não vazio) de um grupo com essas propriedades torna-se um subgrupo.

Analogamente,  $\tilde{S}_L x \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$  implica  $(\tilde{S}_L x \cap \tilde{S}_L)x^{-1} \neq \emptyset$  pelo fato de  $R_{x^{-1}}$  ser homeomorfismo. Isto é,  $\tilde{S}_L x^{-1} \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$  o que significa por definição de  $J$  que  $x^{-1} \in J$ . Se  $x, y \in J$  então existem  $s_1, s_2 \in \tilde{S}_L$  tal que  $s_1x, s_2y \in \tilde{S}_L$ . Pelo lema 7.3.8,  $xs_2 = s_3x$  para algum  $s_3 \in \tilde{S}_L$ . Então  $s_1xs_2y = s_1s_3xy \in \tilde{S}_L$ , mostrando  $xy \in J$ .  $\square$

**Corolário 7.3.11** *O lema 7.3.10 vale se trocarmos  $\tilde{S}_L$  por  $\text{int}\tilde{S}_L$ .*

**Demonstração:** De fato, pelo lema 7.3.8 sabemos que  $x\tilde{S}_L = \tilde{S}_Lx$  para todo  $x$  em  $\pi_1(S)$ . Portanto, vale que para todo  $x \in \pi_1(S)$ ,  $\text{int}(x\tilde{S}_L) = \text{int}(\tilde{S}_Lx)$ . Essa igualdade ainda pode ser escrita como  $x(\text{int}\tilde{S}_L) = (\text{int}\tilde{S}_L)x$  já que translação à esquerda (resp. à direita) é um homeomorfismo sobre sua imagem. Então usando essa última igualdade no lugar do lema 7.3.8 na demonstração do lema 7.3.10 e o fato de que  $\text{int}\tilde{S}_L$  é um ideal semigrupo, temos que  $I = \{x \in \pi_1(S) : x(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset\}$  (resp.  $J$ ) é um subgrupo de  $\pi_1(S)$ .  $\square$

Em vista do corolário anterior, usaremos  $\text{int}\tilde{S}_L$  no lugar de  $\tilde{S}_L$ .

**Lema 7.3.12**  $I = \pi_1(S)$ , isto é, para todo  $x \in \pi_1(S)$ ,  $x(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$  (resp.  $J = \pi_1(S)$ ).

**Demonstração:** Temos que provar que todo  $y \in \pi_1(S)$  está em  $I$ . Provamos primeiro a seguinte relação em  $\pi_1(S)$ : dados  $x, y \in \pi_1(S)$

$$x(\text{int}\tilde{S}_L) \cap y(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset \Leftrightarrow xI = yI.$$

Com efeito, se  $x(\text{int}\tilde{S}_L) \cap y(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$  então  $y^{-1}x(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$  o que significa que  $y^{-1}x \in I$ . Portanto,  $y(y^{-1}x) \in yI$ , i.e.,  $x \in yI$ , mostrando  $xI \subset yI$ . Como  $I$  é um subgrupo,  $(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y \in I$  e daí segue que  $y \in xI$ , isto é,  $yI \subset xI$ . Por conseguinte, temos a igualdade  $xI = yI$ . Reciprocamente, se  $xI = yI$  então  $x \in yI$ , i.e.,  $x = yz$  para algum  $z \in I$ . Então temos  $z(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$  e portanto  $yz(\text{int}\tilde{S}_L) \cap y(\text{int}\tilde{S}_L) = x(\text{int}\tilde{S}_L) \cap y(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$ . Afirmamos que para dado  $y \in \pi_1(S)$  existem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  em  $\pi_1(S)$  tal que  $y(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_1(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset, x_1(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_2(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset, \dots, x_n(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$ .

Tome  $y = x_1$ . Suponha por absurdo que  $x_1(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_2(\text{int}\tilde{S}_L) = \emptyset$ . Segue que  $x_2 \neq x_1$ , pois  $x_1 = x_2$  obviamente implica  $x_1(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_2(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$ . As duas classes  $x_1I$  e  $xI$  são ou disjuntas ou idênticas:

1. Se  $x_1I \cap xI = \emptyset$  então  $z(\text{int}\tilde{S}_L) \cap t(\text{int}\tilde{S}_L) = \emptyset$  para todo  $z \in x_1I$  e  $t \in xI$ . Portanto, temos que os conjuntos  $\bigcup_{z \in x_1I} z(\text{int}\tilde{S}_L)$  e  $\bigcup_{t \in xI} t(\text{int}\tilde{S}_L)$  são abertos de  $\tilde{S}$  cuja a intersecção é vazia, i.e.,

$$\bigcup_{z \in x_1I} z(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \bigcup_{t \in xI} t(\text{int}\tilde{S}_L) = \emptyset$$

enquanto a união é  $\tilde{S}$ . Porque  $\tilde{S} = \text{fe}(\pi_1(S)\tilde{S}_L)$ . Mas isso contradiz o fato de  $\tilde{S}$  ser conexo.

2. Se  $x_1 I = xI$  então  $x_1(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$  que contradiz a hipótese.

Por conseguinte, tem-se  $x_1(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_2(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$  para algum  $x_2 \neq x_1$ . Analogamente, existe  $x_3 \neq x_1, x_2$  tal que  $x_1(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_3(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$  e  $x_2(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_3(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$ .

Indutivamente, suponha que  $x_n(\text{int}\tilde{S}_L) \cap x_i(\text{int}\tilde{S}_L) \neq \emptyset$  para algum  $x_n \neq x_i$  onde  $1 \leq i \leq n-1$ . Para provar  $x_n(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$  suponha que a intersecção seja vazia para todo  $x \neq 1$  em  $\pi_1(S)$ . Isto implica ou  $x_n I \cap I = \emptyset$  ou  $x_n I = I$ . Se  $x_n I \cap I = \emptyset$  temos por indução que  $x_n \notin I$  para todo  $n \geq 1$ . Isto significa que  $\bigcup_{z \in x_n I} z(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \bigcup_{t \in I} t(\text{int}\tilde{S}_L) = \emptyset$  o que é absurdo pela conexidade de  $\tilde{S}$ . Se for  $x_n I = I$ ,  $x_n(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$  o que contradiz a hipótese. Então,  $x_n \neq 1$  satisfaz  $x_n(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$ , mostrando a afirmação feita acima.

Finalmente, usando indução sobre os  $x_1, x_2, \dots, x_n$  concluímos que  $y \in yI = x_1 I = \dots = x_n I = I$ . i.e.,  $y$  está de fato em  $I$ .

A afirmação de que  $J = \pi_1(S)$  é uma consequência imediata do lema 7.3.10 e do corolário 7.3.11. De fato, temos provado que para todo  $x \in \pi_1(S)$ ,  $x(\text{int}\tilde{S}_L) \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$ . Pelo corolário 7.3.11, colocamos  $(\text{int}\tilde{S}_L)x$  no lugar de  $x(\text{int}\tilde{S}_L)$ . Daí segue que  $(\text{int}\tilde{S}_L)x \cap \text{int}\tilde{S}_L \neq \emptyset$ .  $\square$

**Lema 7.3.13** *Dado  $sx \in x\tilde{S}_L (= \tilde{S}_L x)$ , vale  $sx\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$  (resp. para  $xs \in \tilde{S}_L x (= x\tilde{S}_L)$ , vale  $\tilde{S}_L xs \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$ ).*

**Demonstração:** Pelo lema 7.3.12,  $x\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$ , i.e.,  $xs_1 \in \tilde{S}_L$  para algum  $s_1 \in \tilde{S}_L$ . Usando a igualdade  $(sx)s_1 = s(xs_1) \in \tilde{S}_L$  temos que  $sx\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$ . Da mesma maneira, existe  $s_1 \in \tilde{S}_L$  tal que  $s_1 x \in \tilde{S}_L$ . A igualdade  $s_1(xs) = (s_1 x)s \in \tilde{S}_L$  mostra que  $\tilde{S}_L xs \cap \tilde{S}_L \neq \emptyset$ .  $\square$

**Demonstração da proposição 7.3.4:** Temos que mostrar o enunciado do lema 7.3.13 passando ao fecho. Dado  $g \in \tilde{S}$  existe um  $h_1 \in \tilde{S}_L$  tal que  $gh_1 \in \pi_1(S)\tilde{S}_L$ . Portanto, o lema 7.3.13 garante que  $\emptyset \neq gh_1\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L \subset g\tilde{S}_L \cap \tilde{S}_L$  (resp.  $\emptyset \neq \tilde{S}_L h_1 g \cap \tilde{S}_L \subset \tilde{S}_L g \cap \tilde{S}_L$ ).  $\square$

Um fato conhecido sobre reversibilidade é que conjuntos compactos podem ser transladados dentro de semigrupos reversíveis (c.f., Lemma 3.37,

[10]). Em [20] mostra-se que a translação pode ser feita particularmente por um elemento do semigrupo :

**Lema 7.3.14** *Dado um compacto  $K \subset \tilde{S}$  existe  $g \in \tilde{S}_L$  tal que  $gK \subset \tilde{S}_L$ .*

**Demonstração:** Veja lema 2.4 em [20].  $\square$

Agora, podemos provar a afirmação de que  $\tilde{S}_L$  é simplesmente conexo usando a mesma técnica já usada em [20].

**Demonstração do teorema 7.3.2:** Seja  $[\gamma] \in \pi_1(\tilde{S}_L, x_0)$  onde  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{S}_L$  é tal que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$  para algum  $x_0 \in \tilde{S}_L$ . Através da inclusão  $\tilde{i} : \tilde{S}_L \hookrightarrow \tilde{S}$ ,  $\tilde{i} \circ \gamma = \gamma$  é um laço em  $\tilde{S}$  com ponto base  $x_0$ . Como  $\tilde{S}$  é simplesmente conexo, existe uma homotopia  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{S}$  tal que  $H(s, 0) = \gamma(s)$ ,  $H(s, 1) = c_{x_0}(s) = x_0$  para todo  $s \in [0, 1]$  e  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . A imagem  $K = \text{Im}(H)$  da homotopia  $H$  é um subconjunto compacto em  $\tilde{S}$ . Portanto, pelo lema 7.3.14 existe  $g \in \tilde{S}_L$  tal que  $g(\text{Im}(H)) \subset \tilde{S}_L$ . Então a aplicação  $F(s, t) =: gH(s, t)$  define uma homotopia em  $\tilde{S}_L$  que leva  $g\gamma$  a  $gx_0$ .

Agora, tome uma curva  $g_t$  em  $\tilde{S}_L$  que une  $\tilde{1}$  a  $g$ , isto é,  $g_0 = \tilde{1}$  e  $g_1 = g$ . Denote por  $\alpha = R_{x_0}(g_t) = g_t x_0$  a curva transladada, isto é,  $\alpha$  é uma curva em  $\tilde{S}_L$  tal que  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = gx_0$ . Então,

$$\alpha^- * g\gamma * \alpha \simeq \alpha^- * c_{gx_0} * \alpha \simeq c_{x_0}$$

em  $\tilde{S}_L$ . Pois,  $(s, t) \mapsto F(s, t)$  é uma deformação de  $g\gamma$  a  $gx_0$  em  $\tilde{S}_L$ . Por outro lado,

$$t \longmapsto \alpha^- \Big|_{[0,t]} * \alpha(t)\gamma * \alpha \Big|_{[0,t]}$$

define uma deformação contínua de  $\alpha^- * g\gamma * \alpha$  a  $\gamma$ . Portanto, temos que  $\gamma \simeq c_{x_0}$  em  $\tilde{S}_L$ . ■

Como dito antes, para relacionar  $\Gamma(\Sigma, 1)$  com  $\tilde{S}$  utilizando as construções feitas, temos que considerar o interior  $\text{int}\tilde{S}$  que é uma variedade e portanto admite recobrimento simplesmente conexo  $\text{int}\tilde{S}$  sendo também uma variedade. Sabemos pelo teorema 7.3.2 que o semigrupo  $\tilde{S}_L$  é simplesmente conexo. Por outro lado, o interior de um semigrupo tem o mesmo tipo de homotopia que semigrupo inteiro, veja [10]. concluimos então que  $\text{int}\tilde{S}_L$  também é simplesmente conexo.

**Lema 7.3.15** Denote por  $\pi : \widetilde{\text{int}(Sg)} \rightarrow \text{int}(Sg)$  aplicação de recobrimento e tome  $\tilde{1} \in \widetilde{\text{int}(Sg)}$  tal que  $\pi(\tilde{1}) = 1$ . Então, o conjunto  $\mathcal{A}_R(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1}) \subset \widetilde{\text{int}(Sg)}$  é simplesmente conexo.

A idéia para demonstrar esta afirmação é construir um homeomorfismo  $h$  de  $\text{int}\tilde{S}_L$  sobre  $\mathcal{A}_R(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1})$  e logo concluir que  $\mathcal{A}_R(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1})$  é simplesmente conexo já que  $\text{int}\tilde{S}_L$  é simplesmente conexo. Se  $\text{int}S$  se identifica com classes de homotopia das curvas em  $\text{int}S$  com as mesmas extremidades, um elemento  $x$  em  $\text{int}\tilde{S}_L$  pode ser visto via a inclusão  $\tilde{i} : \text{int}\tilde{S}_L \rightarrow \widetilde{\text{int}S}$  como uma classe  $[\alpha]$  de algum  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = 1$  e  $\alpha(1) \in \text{int}S$ . Mergulhando  $\text{int}S$  em  $\text{int}(Sg)$  com  $g \in \widetilde{\text{int}S^{-1}}$ , o representante  $\alpha$  de  $[\alpha]$  se levanta a uma única curva  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \text{int}(Sg)$  com  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{1}$  tal que  $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ . O vetor subtangente  $\dot{\tilde{\alpha}}(0)$  se identifica com algum  $X$  em  $\Sigma = \mathbb{L}(S)$ . Daí segue que  $\dot{\tilde{\alpha}}(0)$  se identifica com  $\tilde{X}$  em  $\widetilde{\Sigma}$ , levantamento de  $X$ . Portanto, o ponto final de  $\tilde{\alpha}$  cai no conjunto  $\mathcal{A}(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1})$ . Agora definimos

$$h : \text{int}\tilde{S}_L \longrightarrow \mathcal{A}(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1}), \quad [\alpha] \longmapsto \tilde{\alpha}(1).$$

**Demonstração:** Considere a projeção (ponto-final)  $p_1 : \widetilde{\text{int}S} \rightarrow \text{int}S$  dada por  $[\alpha] \mapsto \alpha(1)$ . Esta aplicação é sobrejetora pelo fato de  $\text{int}S$  ser conexo por caminhos e também é contínua (veja [1]). A continuidade de  $h$  vem do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} [\alpha] & \xrightarrow{h} & \tilde{\alpha}(1) \\ \downarrow p_1 & \swarrow \pi & \\ \alpha(1) & & \end{array}$$

De fato,  $h$  é dada localmente como  $h = \pi^{-1} \circ p_1$  e portanto é contínua. Agora, sejam  $[\alpha]$  e  $[\beta]$  em  $\text{int}\tilde{S}_L$  tal que  $[\alpha] \neq [\beta]$  em  $\text{int}\tilde{S}_L$ , i.e.,  $\alpha$  não é homotópico a  $\beta$ . Então seus levantamentos  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  a  $\widetilde{\text{int}(Sg)}$  a partir de  $\tilde{1}$  não têm o mesmo ponto final, mostrando a injetividade de  $h$ . Para ver a sobrejetividade, tome  $y \in \mathcal{A}(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1})$  arbitrário. Existe então  $\alpha \in T(\Sigma, 1)$  tal que seu levantamento  $\tilde{\alpha} \in T(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1})$  tem  $y$  como ponto final. Formando a classe de homotopia de  $\alpha$  temos que  $h([\alpha]) = y$ .

Como  $h$  é uma bijeção contínua basta mostrar que tem inversa contínua. Para isso, seja  $y \in \mathcal{A}(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1})$ . Portanto,  $y = \tilde{\beta}(1)$  onde  $\tilde{\beta} \in T(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1})$  é o levantamento de um  $\beta \in T(\Sigma, 1)$ . Considere as aplicações (contínuas)  $\tilde{\beta} \rightarrow \pi \circ \tilde{\beta}$  ( $= \beta$ ) e  $\beta \rightarrow [\beta]$ . Definimos então a inversa  $h^{-1} : \mathcal{A}(\widetilde{\Sigma}, \tilde{1}) \rightarrow \text{int}\tilde{S}_L$  de  $h$  como sendo a composição dessas duas aplicações que é contínua.

Finalmente obtemos um homeomorfismo  $h$  de  $\text{int}\tilde{S}_L$  sobre  $\mathcal{A}(\tilde{\Sigma}, \tilde{1})$ . Já que  $\mathcal{A}_R(\tilde{\Sigma}, \tilde{1})$  está contido em  $\mathcal{A}(\tilde{\Sigma}, \tilde{1})$ , a restrição  $h : \text{int}\tilde{S}_L \rightarrow \mathcal{A}_R(\tilde{\Sigma}, \tilde{1}) \subset \mathcal{A}(\tilde{\Sigma}, \tilde{1})$  continua sendo homeomorfismo e portanto  $\mathcal{A}_R(\tilde{\Sigma}, \tilde{1})$  é simplesmente conexo, provando a afirmação feita acima. ■

**Corolário 7.3.16** *Seja  $f : \Gamma(\Sigma, g) \rightarrow \widetilde{\text{int}(Sg)}$  o difeomorfismo local da proposição 5.1.8 onde  $g \in \text{int}S^{-1}$ . Então, a restrição  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow \text{int}\tilde{S}_L$  é um difeomorfismo local sobrejetor com imagem simplesmente conexa.*

**Demonstração:** De fato, pela proposição 4.2.6 temos que  $\Gamma(\Sigma, 1) \cong \mathcal{A}_R(\hat{\Sigma}, \hat{1})$  onde  $\hat{1} \in \Gamma(\Sigma, g)$  que se projeta em  $1 \in \text{int}(Sg)$ . Então,

$$f \Big|_{\mathcal{A}_R(\hat{\Sigma}, \hat{1})} : \Gamma(\Sigma, 1) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\tilde{\Sigma}, \tilde{1})$$

é um difeomorfismo local sobrejetor cuja imagem pelo lema anterior é  $\text{int}\tilde{S}_L$ , que é simplesmente conexa. □

**Observação:** A questão da identificação de  $\Gamma(\Sigma, 1)$  com o subsemigrupo  $\text{int}\tilde{S}_L$  de  $\tilde{S}$  está relacionada com a pergunta de quando o difeomorfismo local sobrejetor  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow \text{int}\tilde{S}_L$  é um difeomorfismo global. Como foi provado, a imagem  $\text{int}\tilde{S}_L$  é simplesmente conexa. Todo difeomorfismo local com imagem simplesmente conexa é injetor e portanto é um difeomorfismo desde que goze da propriedade de levantamento único de caminhos (veja Lima [14]). Pelo exemplo dado no capítulo 4, já vimos que sem esta propriedade a afirmação não vale.

Existe uma ligação entre aplicações próprias e aplicações de recobrimentos. Para todo difeomorfismo local sobrejetor  $f : X \rightarrow Y$  onde  $X$  é de Hausdorff e  $Y$  é conexo, a hipótese de  $f$  ser própria é equivalente a dizer que  $f$  é aplicação de recobrimento.

Então o que pretendemos fazer mais adiante é estudar condições para que  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow \text{int}\tilde{S}_L$  seja uma aplicação própria. Para isso, a hipótese de que o conjunto de trajetórias que fixam  $1$  e  $s$ ,  $s \in \text{int}\tilde{S}_L$ , seja compacto é uma das condições que abordaremos. Notemos que esta hipótese é o mesmo que supor que as fibras de  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow \text{int}\tilde{S}_L$  sejam finitas. Também é uma hipótese possível que ocorre em boa quantidade de semigrupos.

Finalmente, quando  $\Gamma(\Sigma, 1) \rightarrow \text{int}\tilde{S}_L$  for um difeomorfismo, isso se reduz a dizer que duas trajetórias homotópicas dentro de  $\text{int}S$  também são monotonicamente homotópicas.

# Capítulo 8

## Conjuntos de controle

Neste Capítulo, queremos particularizar a teoria construída anteriormente para as órbitas positivas a partir de  $x_0 \in M$  tal que  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  ou equivalentemente  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$ . Por outro lado, esta condição ocorre se, e somente se,  $x_0$  pertence ao interior de algum conjunto de controle de  $\Sigma$ . Neste caso, as nossas construções já feitas aparecem de forma mais transparentes e mais próximas da situação clássica já que em algum recobrimento de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  sempre podemos tomar um ponto referencial sobre  $x_0$ . Também, a existência de trajetórias regulares periódicas que passam por  $x_0$  permitem a introdução de um semigrupo fundamental baseado em  $x_0$ , análogo do grupo fundamental de um espaço topológico (cf. [3], [4]).

Notemos que a condição  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$  implica que  $\mathcal{A}(x_0)$  é aberto, e portanto coincide com  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  desde que assumimos a condição de posto de álgebra de Lie, isto é, todo ponto atingível a partir de  $x_0$  também é regularmente atingível. Mantendo as mesmas notações anteriores, seja  $\widehat{\Sigma}$  o sistema levantado em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Lembramos que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é difeomorfo a conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, z_0)$  para algum  $z_0 \in \varepsilon^{-1}\{x_0\}$ . Portanto, podemos ver  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, z_0)$  como sendo uma realização de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ , e obter uma construção mais simples da aplicação do controle dada na proposição 5.1.8.

**Proposição 8.0.17** *Mantendo a hipótese  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$ , seja  $N \rightarrow \mathcal{A}(x_0)$  uma aplicação de recobrimento do controle e tome  $y_0 \in \varepsilon^{-1}\{x_0\}$  e  $w_0 \in \varepsilon^{-1}\{x_0\}$ . Então, existe uma única aplicação do controle  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  tal que  $\pi \circ f = \varepsilon$  e  $f(y_0) = w_0$ .*

**Demonstração:** Veja os lemas 5.1.4 e 5.1.5. □

Um outro objeto que pode ser construído neste contexto é o semigrupo fundamental relacionado com a homotopia monotônica (c.f. [3], [4]).

Agora fixe  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$ . Denote por  $P(\Sigma, x_0) = R(\Sigma, x_0, x_0)$  o conjunto de trajetórias regulares periódicas passando pelo  $x_0$ . Claramente, a concatenação de trajetórias define um produto em  $P(\Sigma, x_0)$ . Notemos que do jeito que a concatenação foi definida esse produto pode não ser associativo. Pois,  $\alpha * (\beta * \gamma)$  e  $(\alpha * \beta) * \gamma$  são trajetórias com parametrizações diferentes. Por outro lado, como consequência do teorema 4.2.7 as trajetórias  $\alpha * (\beta * \gamma)$ ,  $(\alpha * \beta) * \gamma$  em  $P(\Sigma, x_0)$  são monotonicamente homotópicas. De fato, os levantamentos dessas trajetórias a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  com ponto inicial  $y_0$  são concatenações sucessivas dos levantamentos de  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\alpha$ . Apesar que as trajetórias tenham parametrizações diferentes, têm o mesmo traço. Em particular, os levantamentos têm o mesmo ponto final. Portanto, pelo teorema 4.2.7,  $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq_m (\alpha * \beta) * \gamma$ . Como pelo lema 4.2.4 a homotopia monotônica tem bom comportamento com a concatenação segue que o quociente  $P(\Sigma, x_0) / \simeq_m$  é um semigrupo associativo.

**Definição 8.0.18** *Suponha  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$ . Então, o semigrupo fundamental baseado em  $x_0$  é definido como  $\Lambda(\Sigma, x_0) = P(\Sigma, x_0) / \simeq_m$ .*

Pelos resultados apresentados no capítulo 4, segue que duas trajetórias em  $P(\Sigma, x_0)$  são monotonicamente homotópicas se, e somente se, seus levantamentos a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  a partir de um ponto dado têm o mesmo ponto final. Usando este fato, podemos dizer que  $\Lambda(\Sigma, x_0)$  é dado pela fibra de  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  sobre  $x_0$ . Este resultado é um análogo de um fato conhecido de que o grupo fundamental é isomorfo ao grupo de transformações ‘deck’, e por consequência, a fibra de recobrimento simplesmente conexo.

**Proposição 8.0.19** *Tome  $x_0$  com  $x_0 \in \text{int}\mathcal{A}(x_0)$  e  $y_0 \in \varepsilon^{-1}\{x_0\}$ . Então,  $\Lambda(\Sigma, x_0)$  está em bijeção com  $\varepsilon^{-1}\{x_0\} \cap \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$ .*

**Demonstração:** Trajetórias periódicas em  $P(\Sigma, x_0)$  são trajetórias cujos levantamentos a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  a partir de  $y_0$  têm ponto final na fibra  $\varepsilon^{-1}\{x_0\} \cap \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$ . Então, o resultado segue como consequência da proposição 4.2.6 que garante que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é difeomorfo a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$ .  $\square$

O semigrupo  $\Lambda(\Sigma, x_0)$  admite a seguinte propriedade algébrica:

**Proposição 8.0.20**  $\Lambda(\Sigma, x_0)$  é cancelativo, isto é,  $xy = xz$  (ou  $yx = zx$ ) implica  $y = z$ .

**Demonstração:** A propriedade de ser cancelativo à esquerda é exatamente o que foi dito no lema 4.2.4. Para ver cancelatividade à direita, tome trajetórias  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  em  $P(\Sigma, x_0)$ . Então  $\beta * \alpha \simeq_m \gamma * \alpha$  significa que os levantamentos dessas concatenações a  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  têm o mesmo ponto final, diga  $w \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ . Por outro lado, os levantamentos de  $\beta$  e  $\gamma$  têm o mesmo ponto final. Pois, o levantamento de  $\alpha$  tendo  $w$  como ponto final é único (ver Lema 4.1.3).  $\square$

# Bibliografia

- [1] Abraham, R., Marsden, J. E. e Ratiu, T., *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer-Verlag (1988).
- [2] Bott, R e Tu, L. R., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math., Springer Verlag (1982).
- [3] Colonius F. e Spadini M., Uniqueness of local control sets.
- [4] ———, On the classification of control sets. in *Dynamics, Bifurcations and Control* (F. Colonius, L. Grüne, editors), Springer-Verlag (2002), pp.217-231.
- [5] Colonius F, San Martin, L. A. B. e Spadini M., *Fundamental Semigroups of Local Control Sets* (2003).
- [6] Colonius F. e Kliemann, W., *The Dynamics of Control*, Birkhäuser (2000).
- [7] Colonius F., Kizil E. e San Martin, L. A. B., Covering space for monotonic homotopy of trajetories of control systems, submetido.
- [8] Dieudonné, J., *Treatise on Analysis*, Vol. 10, Academic Press (1972).
- [9] Hilgert J., K. H. Hofmann, e J. D. Lawson, *Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups*, Oxford Press, Oxford (1989).
- [10] Hilgert J. e Neeb K. H., *Lie semigroups and their applications*, Lecture Notes in Math., **1552**, Springer Verlag (1993).
- [11] Hu, S. T., *Homotopy Theory*, Academic Press (1959).

- [12] Jurdjevic, V., Geometric Control Theory, Cambridge University Press (1997).
- [13] Lang, S., Differential Manifolds, Addison Wesley (1972)
- [14] Lima, Elon Lages, Grupo fundamental e espaços de recobrimento, segunda edição, IMPA (1998).
- [15] Lawson, J. D., Universal objects in Lie semigroup theory, Semigroup forum (1998), pp.121-132.
- [16] Lawson, J. D., Free local semigroup constructions, Monatsh. Math., **121** (1996), pp.309-333.
- [17] Martin, D., Manifold theory : An introduction for mathematical physicists, Ellis Horwood (1991).
- [18] San Martin, L.A.B., Álgebras de Lie, Editora da Unicamp (1999).
- [19] San Martin, L.A.B., Órbitas de Famílias de Campos de Vetores, (1998).
- [20] San Martin, L.A.B. e Santana J. A., The homotopy type of Lie semigroups in semi-simple Lie groups, Monatsh. Math. **136** (2002), pp.151-173.
- [21] San Martin, L. A. B. e O. G. de Rocio, Connected components of open semigroups in semi-simple Lie groups, submetido.
- [22] San Martin, L. A. B. e Tonelli, P. A., Semigroup actions on Homogeneous spaces, Semigroup Forum **50** (1995), pp.59-88.
- [23] San Martin, L. A. B., Invariant Control Sets on Flag Manifold, Math. Control Signals Systems **6** (1993), pp.41-61.
- [24] Sarychev, A.V., On homotopy properties of the space of trajectories of a completely nonholonomic differential system, Soviet Math. Dokl., Vol. 42., No:2 (1991), pp.674-678.
- [25] Sontag, E. Mathematical Control Theory, Springer-Verlag (1998).
- [26] Stefan, P., Accessible sets, orbits, and foliations with singularities, J. London Math. Soc. (1974), pp.699-713.

- [27] Sussmann, H., Some properties of vector fields systems that are not altered by small perturbations, *J. of Diff. Eq.* **20** (1976), pp.292-315.
- [28] ———, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **180**, (1973), pp.171-188.
- [29] ———, Existence and uniqueness of minimal realizations of non-linear systems, *Mathematical Systems Theory* **10** (1977), pp.263-284.

# Índice Remissivo

- acessibilidade
  - local, 5
  - normal, 6
  - propriedade de, 4
- aplicação
  - de avaliação, 26
  - de controle, 32
  - de ponto-final, 11
  - de recobrimento de controle, 32
- classe
  - de homotopia monotônica, 20
- concatenação
  - de controles, 13
  - de homotopias, 20
- condição
  - do posto da álgebra de Lie, 5
- cone convexo
  - de Lie, 54
  - gerador, 9
- conjunto
  - de acessibilidade, 11
  - de controle (global), 6
  - de controle invariante, 7
  - subtangente, 54
- controlabilidade, 3
  - aproximada, 4
- controle(s)
  - constantes por pedaços, 2
  - normal(is), 17
  - regular(es), 12
  - reparametrização de, 17
- curva integral, 2
- difeomorfismo local, 29
- homotopia
  - dinâmica, 20
  - geométrica, 20
  - monotônica (ou causal), 19
  - reversibilidade de, 20
- levantamento
  - contínuo, 29
  - de homotopia(s), 30
  - de sistema(s), 32
  - de trajetória(s), 33
- órbita
  - positiva, 3
  - teorema de, 4
- propriedade universal
  - de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ , 43
- recobrimento
  - de semigrupos, 56
  - diferenciável, 29
  - universal do controle, 39
- semigrupo(s)
  - a 1-parâmetro(s), 54

- de Lie, 53
- fundamental, 67
- recobrimento(s) de, 56
- reversível(is), 58
- sistema
  - de controle, 1
    - afim, 9
  - fundamental de vizinhanças, 59
  - geométrico, 45
  - grupo (local) de, 3
  - invariante, 54
  - revertido, 15
  - semigrupo (local) de, 3
- teorema
  - da função implícita, 24
  - de Krener, 5
- topologia
  - $C^0$ , 27
  - $C^1$ , 11
  - forte, 26
  - fraca\*, 11
- trajetória(s), 10
  - periódica(s), 67
  - regular(es), 12