

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

---

**Tese de Doutorado**

**Cálculo Estocástico em Variedades  
Folheadas**

**IMECC - UNICAMP**

por

**Diego Sebastián Ledesma <sup>†</sup>**

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Pedro José Catuogno**

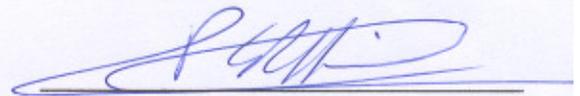
<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro do FAPESP, N° de Processo 04/13758-0.

## TÍTULO DA TESE

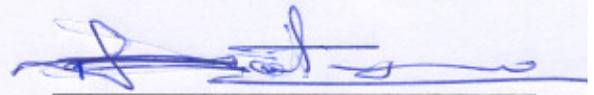
**CÁLCULO ESTOCÁSTICO EM VARIEDADES FOLHEADAS**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Diego Sebastián Ledesma e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de março de 2009



Prof. Dr.: Paulo Régis Caron Ruffino  
Orientador



Prof. Dr: Pedro José Catuogno  
Co-orientador

Banca Examinadora:

- 1 Fabiano Braga Brito (UNIRIO)
- 2 Ryuichi Fukuoka (UEM)
- 3 Luiz Antonio Barrera San Martin (UNICAMP)
- 4 Eduardo Garibaldi (UNICAMP)
- 5 Paulo Régis Caron Ruffino

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemáticas

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP  
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – 859/8a. região**

L498c Ledesma, Diego Sebastián  
Cálculo estocástico em variedades folheadas/Diego Sebastián  
Ledesma -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientadores : Paulo Régis Caron Ruffino; Pedro José Catuogno  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Processo estocástico. 2. Folheações (Matemática). 3. Geometria.  
I. Ruffino, Paulo Régis Caron. II. Catuogno, Pedro José. III.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Stochastic Calculus on Foliated Manifolds

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Stochastic processes. 2. Foliations (Mathematics).  
3. Geometry.

Área de concentração: Calculo estocástico; Geometria

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Fabiano Braga Brito (UNIRIO)  
Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka (UEM)  
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Eduardo Garibaldi (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 27/02/2009

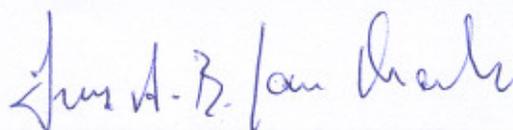
Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 27 de fevereiro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO



Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof. (a). Dr (a). EDUARDO GARIBALDI



Prof. (a). Dr (a). FABIANO BRAGA BRITO



Prof. (a) Dr. (a) RYUICHI FUKUOKA

## Agradecimentos

Quanto à parte acadêmica agradeço enormemente aos professores Pedro J. Catuogno e Paulo R. C. Ruffino pela orientação recebida ao longo destes quatro anos de estudo. Também expresso a minha gratidão a todos aqueles professores e colegas que, de uma ou outra maneira, ajudaram na minha formação. Não pode ficar fora dos agradecimentos a FAPESP tendo, graças ao suporte financeiro recebido, tornado o trabalho viável.

Quanto ao suporte moral e espiritual, agradeço a minha esposa Mara por ter estado do meu lado nestes quatro anos de trabalho.

*À minha esposa Mara Belén  
Schmitz*

---

# ABSTRACT

We study stochastic process on foliated manifolds. First we introduce some operators, which we call foliated, and study their properties. With these objects, we define the natural processes on foliated spaces, such as foliated martingales and foliated Brownian motion. We study how they are related with the geometry of the foliation and use them to characterize, in a probabilistic way, when the foliation is harmonic or geodesic. Then, we introduce an stochastic calculus and define the Itô and Stratonovich integrals on foliations. We prove a conversion formula and a Itô formula in this context. Finally we focus our study on the foliated Brownian motion and the harmonic measures. We give a construction of the foliated Brownian motion based on stochastic differential equations and apply the formalism developed to give a new proof of the Lucy Garnett Theorem. We study properties of the harmonic measures and we characterize them in terms of solutions of a second order differential equations.

---

# RESUMO

Neste trabalho estudamos processos estocásticos em variedades folheadas. Introduzimos primeiro uma série de operadores, que chamamos de *operadores folheados*, e estudamos suas propriedades. Definimos, por meio dos operadores introduzidos, os processos básicos em espaços folheados como, por exemplo, *martingale folheada* e *movimento browniano folheado*. Estudamos a relação destes processos com a geometria da folheação e caracterizamos estocasticamente quando uma folheação é harmônica ou geodésica. Definimos, integrais estocásticas de Itô e Stratonovich em folheações e desenvolvemos um cálculo estocástico próprio. Provamos uma fórmula de conversão de integral de Itô para Stratonovich e uma fórmula de Itô neste contexto. Finalmente estudamos, com particular atenção, o movimento browniano folheado e medidas harmônicas em espaços folheados. Construimos o movimento browniano folheado com o formalismo de equações diferenciais estocásticas, aplicando-o conjuntamente com o cálculo diferencial introduzido para fronecer uma nova prova do Teorema de Lucy Garnett sobre medidas harmonicas em folheações. Estudamos propriedades de medidas harmônicas e damos uma caracterização das mesmas como soluções de uma equação diferencial de segunda ordem.

---

# SUMÁRIO

Abstract . . . . .	ix
Resumo . . . . .	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Cálculo Estocástico</b>	<b>3</b>
2.1 Processos Estocásticos . . . . .	3
2.2 Movimento Browniano . . . . .	5
2.3 Integrais Estocásticas . . . . .	6
2.4 Equações Diferenciais Estocásticas em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	9
2.5 Processos Estocásticos em Variedades Diferenciáveis . . . . .	11
2.6 Geometria de Segunda Ordem . . . . .	13
2.7 Integral Estocástica . . . . .	15
2.8 Equações Diferenciais Estocásticas em Variedades . . . . .	17
<b>3 Folheações</b>	<b>21</b>
3.1 Folheações . . . . .	21
3.2 Construção de Folheações . . . . .	25
3.3 Holonomia . . . . .	27
3.4 Folheações Riemannianas . . . . .	30
3.5 Medidas em Folheações . . . . .	32
<b>4 Operadores em Folheações</b>	<b>35</b>
4.1 Operadores Folheados . . . . .	35
4.2 Aplicações Harmônicas Folheadas . . . . .	44
4.3 Apêndice . . . . .	50

---

<b>5</b>	<b>Processos Estocásticos em Espaços Folheados</b>	<b>53</b>
5.1	Processos Estocásticos Folheados . . . . .	53
5.2	Integrais Folheadas de Itô e Stratonovich . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Movimento Browniano Folheado</b>	<b>63</b>
6.1	Construção . . . . .	63
6.2	Medidas Harmônicas . . . . .	66
6.3	Transiência e Recorrência do MBFo . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Apêndice</b>	<b>79</b>
7.1	Número de Rotação Relativo para Sistema Dinâmicos Estocásticos . . . . .	79

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estudamos processos estocásticos em variedades folheadas. Na verdade nosso objetivo são aqueles processos que respeitam a folheação, isto é, aqueles cujos caminhos estão na mesma folha que a condição inicial e não passam de uma folha para a outra. Chamamos estes processos de folheados.

O estudo deste tipo de processos foi iniciado por Lucy Garnett em [17], com a introdução do movimento browniano em folheações. A partir de então, o movimento browniano folheado foi considerado por diversos autores, dentre os quais destacamos Kaimainovich [25], Ghys [18, 19], Candel [6, 5]. Além do movimento browniano, tais autores estudaram medidas especiais - chamadas de *harmônicas* por Garnett - e as aplicaram em diversos contextos com resultados interessantes (ver o livro de Candel e Conlon [6]).

Em todos os casos, o movimento browniano em folheações foi definido e estudado, discorrendo sem entrar em detalhes, como o processo que gera um semigrupo de calor e cujo operador de segunda ordem associado  $\Delta_E$  (denominado laplaciano folheado) e cuja definição é simplesmente um operador  $\Delta_E$  tal que para toda folha  $L$  temos

$$\Delta_E|_L = \Delta_L$$

onde  $\Delta_L$  denota o operador laplaciano da folha. Até agora, o estudo em geral dos processos folheados concentra-se nas propriedades das medidas harmônicas.

Neste trabalho, propomo-nos a estudar os processos folheados como processos distinguidos e desenvolvemos para estes um cálculo estocástico particular. Para isto, introduzimos uma gama de operadores (Definição 2) que chamaremos de folheados e estudaremos as suas propriedades (Lemas 5, 6, 8, 18 e Corolário 1). Em particular, preocupamo-nos com o cálculo diferencial que estes produzem. Se bem que alguns destes operadores já eram conhecidos, damos uma definição própria e diferente, mas que coincide com as já conhecidas por causa do Lema 3.

Baseados nestes operadores introduzimos, no Capítulo 4 os conceitos de martingale em folheações e movimento browniano (Definições 5, 6, 7, 8). Daremos ao movimento browniano folheado uma caracterização de Levi (Lemas 10 e 11). Estudaremos como algumas propriedades destes processos está relacionada à geometria da folheação (Proposição 5 e 6). Também definiremos integrais estocásticas (Definição 9) para estes processos e daremos uma fórmula de Itô (Proposição 7), que é o ponto principal no cálculo estocástico, e estudaremos respectivas propriedades (Lemas 13, 12, 14 e Proposição 9). O conteúdo deste capítulo, em particular o ponto de vista, é original e forma parte do coração do trabalho.

Finalmente nos concentraremos no movimento browniano folheado. Faremos sua construção (Proposição 10) já não do ponto de vista da análise, mas do ponto de vista das equações diferenciais estocásticas, isto é, como solução de uma equação diferencial estocástica. Feito isto, junto com as ferramentas desenvolvidas, seguiremos os passos de Lucy Garnett, porém sempre fazendo uso do nosso cálculo (Teoremas 22 e 23). Mostraremos também alguns exemplos e como os aspectos computacionais se simplificam em alguns casos.

Uma vez que o trabalho mistura dois ramos da matemática (teoria de folheações e cálculo estocástico), achamos conveniente colocar dois capítulos introdutórios, um para cada tópico, que abordam brevemente deles sem se aprofundar nos detalhes.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Neste capítulo, daremos uma introdução à teoria do cálculo estocástico. O tratamento será feito sem muitos detalhes, mas tentando focalizar nos resultados relevantes da teoria que serão utilizados no trabalho. Começaremos a estudar os processos no espaço euclidiano. Daremos as definições básicas até chegar na fórmula de Itô. Falaremos também rapidamente da teoria de equações diferenciais estocásticas.

Passaremos então para os processos estocásticos em variedades. Estes são uma generalização natural dos processos estocásticos no espaço euclidiano, sendo de fundamental importância, para a sua análise, a integral estocástica (Itô e Stratonovich). Para definir esta integral, primeiro estudaremos os rudimentos de geometria de segunda ordem ou cálculo de Schwartz. Também daremos os conceitos básicos de equações diferenciais estocásticas em variedades como uma generalização do caso euclidiano.

---

### 2.1 Processos Estocásticos

---

Nesta seção daremos uma introdução à teoria do cálculo estocástico no espaço euclidiano. Em geral nossa discussão estará baseada nos livros de Oksendal [32] e Freedman [16].

Um *processo estocástico em  $\mathbb{R}^n$*  é uma família de variáveis aleatórias  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  em  $\mathbb{R}^n$  sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Em geral, notaremos esta família como  $X$  ou  $X(t)$ .

Se para quase todo  $\omega \in \Omega$  temos que o *caminho*  $X(\cdot, \omega) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínuo, dizemos que  $X(t)$  é um *processo estocástico contínuo*.

Uma *filtragem*  $\{\mathcal{F}_t\}$  da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  é uma coleção de sub  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  tais que  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$  se  $s > t$ . Definimos  $\mathcal{F}_\infty$  como a menor  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ . Se, para todo  $t \in [0, T]$ , a variável aleatória  $X(t)$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável dizemos que o processo  $X$  é  $\{\mathcal{F}_t\}$  adaptado. De agora em diante consideraremos só processos adaptados.

Um processo  $X$  é uma *martingale* com respeito à filtragem  $\{\mathcal{F}_t\}$  se

- $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ ,
- $X(t)$  é  $\mathcal{F}_t$  mensurável para todo  $t$ , e
- $\mathbb{E}[X(s)|\mathcal{F}_t] = X(t)$  para todo  $s \geq t$ .

Analogamente, dizemos que um processo  $X$  é uma *supermartingale* (respectivamente *submartingale*) se, no último item acima, trocamos a igualdade pelo sinal menor ou igual (respectivamente, maior ou igual).

**Exemplo:** Seja  $X$  um processo, temos uma filtragem canônica associada  $\{\mathcal{F}_t\}$  considerando cada  $\mathcal{F}_t$  como a menor sigma álgebra gerada pela variável aleatória  $\{X(s), s \leq t\}$  que contém todos os conjuntos de medida 0. ■

Dizemos que um processo é uniformemente integrável se, e somente se,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_t 1_{\|X_t\| > N}] \rightarrow 0.$$

**Teorema 1.** *Seja  $X$  uma martingale.*

- Se  $X$  é uniformemente integrável e  $\int_{\Omega} \mathbb{E}[|X|] dP < \infty$  então existe

$$X_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$$

que satisfaz  $\int_{\Omega} \mathbb{E}[|X_{\infty}|] dP < \infty$  e que é  $\mathcal{F}_{\infty}$  mensurável.

- Se  $X$  é limitada em  $L^p(\Omega)$  com  $p > 1$ , isto é,  $\sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ , então

$$X_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$$

está em  $L^p(\Omega)$ .

Um tempo de parada com respeito ao processo  $X$  é uma variável aleatória  $T$  tal que

$$\{\omega \in \Omega; T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

**Exemplo:** Um tempo de parada clássico é o chamado primeiro tempo de saída de um conjunto. Sejam  $X$  um processo em  $\mathbb{R}^n$ , e  $B \subset \mathbb{R}^n$  um boreliano tal que  $X(0) \in B$ . Definimos

$$T(\cdot) = \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}; X(t, \cdot) \notin B\}.$$

Resulta que  $T$  é um tempo de parada. ■

Dados dois tempos de parada  $S$  e  $T$ , é fácil ver que as variáveis aleatórias  $S \wedge T = \inf\{S, T\}$  e  $S \vee T = \sup\{S, T\}$  são tempos de parada.

Dado um processo estocástico  $X$  e um tempo de parada  $T$ , definimos o *processo parado*  $X^T$  por

$$X^T(t, \omega) = X_{t \wedge T(\omega)}(\omega)$$

e a filtragem parada

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Um resultado fundamental na teoria de martingale é o teorema da parada opcional que caracteriza quando um processo é martingale.

**Teorema 2.** *Seja  $X$  um processo  $\{\mathcal{F}_t\}$  adaptado. São equivalentes:*

- $X$  é martingale,
- $X^T$  é martingale para todo tempo de parada  $T$ ,
- $\mathbb{E}[X^T] = \mathbb{E}[X_0]$  para todo tempo de parada limitado  $T$ ,
- $\mathbb{E}[X^T | \mathcal{F}_S] = X_S$  para todos tempos de paradas  $T \leq S$ . Se  $X$  for integrável, então a igualdade é válida ainda se  $T$  e  $S$  não forem limitados.

Um conceito mais fraco que martingale e que tem grande utilidade é o conceito de martingale local. Um processo é uma *martingale local* se existe uma sequência de tempos de parada  $T_n \uparrow \infty$  tal que, para todo  $n$ ,  $M^{T_n}$  é martingale. Pode-se ver que toda martingale local limitada é, de fato, uma martingale.

Por último, temos o conceito de *semimartingale contínua*. Este é um processo contínuo  $X$  que admite uma decomposição do tipo

$$X = X_0 + M + A,$$

com  $X(0) \in \mathcal{F}_0$  mensurável,  $M$  uma martingale local contínua com  $M(0) = 0$  e  $A$  um processo de variação finita com  $A(0) = 0$ . Esta decomposição é conhecida como *decomposição de Doob-Meyer* e é única (ver, por exemplo, livro de Emery [12]).

## 2.2 Movimento Browniano

O movimento browniano é um processo fundamental no cálculo estocástico. Como veremos logo no trabalho, este processo é uma martingale com gerador infinitesimal compatível com a métrica.

Seja  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade filtrado. Dizemos que um processo  $B$  em  $\mathbb{R}$  é um movimento browniano (MB) se

- i-  $B(0)=0$ ;
- ii- Para todo  $0 \leq t_1 < \dots \leq t_k$ , as variáveis aleatórias  $B(t_r) - B(t_{r-1})$  são independentes e normalmente distribuídas com

$$\mathbb{E}[B(t_r) - B(t_{r-1})] = 0 \quad \mathbb{E}[(B(t_r) - B(t_{r-1}))^2] = (t_r - t_{r-1}).$$

O MB existe pelo teorema de extensão de Kolmogorov (ver, por exemplo, o livro de Friedman [16]) e possui uma versão contínua pelo critério de continuidade de Kolmogorov (ver de novo Friedman [16]). Algumas propriedades do MB são as seguintes:

- Para quase todo  $\omega$ , o caminho  $B(t, \omega)$  é não diferenciável.
- O MB é uma martingale.

Uma caracterização do movimento Browniano é dada pelo seguinte teorema de Levy [16].

**Teorema 3.** *Seja  $X$  um processo  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado e contínuo que satisfaz*

$$\mathbb{E}[X(t) - X(s)|\mathcal{F}_s] = 0, \quad \mathbb{E}[(X(t) - X(s))^2] = (t - s)$$

para todo  $0 \leq s < t$ , então  $X$  é um MB

No caso  $n$  dimensional, dizemos que um processo  $B(t) = (B^1(t), \dots, B^n(t))$  é um MB se cada processo  $B^i(t)$  é um MB em  $\mathbb{R}$  e as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}^i$  geradas por  $B^i(t)$ , para  $t \geq 0$ ,  $i = 1 \dots n$ , são independentes. Analogamente ao Teorema 3, temos o seguinte teorema, que também é conhecido como caracterização de Levy.

**Teorema 4.** *Se  $X = (X^1, \dots, X^n)$  é uma martingale contínua  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptada que cumpre*

$$\mathbb{E}[X(t) - X(s)|\mathcal{F}_s] = 0, \quad \mathbb{E}[(X^i(t) - X^i(s))(X^j(t) - X^j(s))] = \delta_{ij}(t - s)$$

para todo  $0 \leq s < t$ , onde  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ , então  $X$  é um MB

## 2.3 Integrais Estocásticas

Nesta seção, vamos estender o conceito de integral para os processos estocásticos. Ela não vai ser definida da mesma forma que a integral de Riemann-Stieljes pois, é possível ver que, do fato de um processo estocástico não ter necessariamente variação finita, o procedimento utilizado para definir a integral de Riemann não funciona no nosso contexto (ver por exemplo as notas de Bain [2] pg.11). Primeiro vamos definir a integral de processos simples com respeito a martingales e depois estendemos para casos mais gerais.

Um processo  $X$  é dito *simples* se existem seqüências de tempos de parada  $0 \leq T_0 \leq \dots \leq T_k \uparrow \infty$  e variáveis aleatórias  $Z_k$  uniformemente limitadas e  $\mathcal{F}_{T_k}$ -mensuráveis tais que

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k 1_{(T_k, T_{k+1}]}$$

Se  $X$  é um processo simples e  $M$  é uma martingale, definimos a integral

$$\int_0^t X dM = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k (M_{t \wedge T_k} - M_{t \wedge T_{k+1}}).$$

Esta integral pode se estender para integrais de processos previsíveis utilizando o Teorema da Convergência Monótona e o fato que todo processo previsível pode ser aproximado por processos simples. A extensão é feita de maneira similar ao caso da integral de Lebesgue.

A integral estocástica assim definida é chamada de integral de Itô e possui as seguintes propriedades.

- $\int_0^t X dY$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.
- $\int X dY$  é uma semimartingale.
- $\mathbb{E} [\int X dB] = 0$ , onde  $B$  é o MB.
- $\int X dY$  é linear em  $X$  e  $Y$ .
- $\int X Z dY = \int X d(\int Z dY)$ .
- $(\int X dY)^T = \int X dY^T = \int X^T dY$  para todo tempo de parada  $T$ . Mais ainda se  $Y$  for martingale local, então  $\int X dY$  é martingale local.
- Se  $X_n$  é uma seqüência de processos previsíveis dominado por um processo  $K$  e convergindo a um processo  $X$ ,

$$\int X_n dY \rightarrow \int X dY.$$

- Se  $Y$  é uma martingale, então  $\int_0^t X dY$  é uma martingale

Existem duas integrais estocásticas relevantes, uma delas é a integral de Itô, que já foi introduzida, e a outra é a integral de Stratonovich que pode ser definida em função da de Itô. Para isto, precisamos de um conceito a mais que é o de variação quadrática conjunta.

Sejam  $X, Y$  duas semimartingales previsíveis tais que  $\int X dY, \int Y dX$  existem. Chamamos de *covariação quadrática conjunta de  $X$  e  $Y$*  o processo

$$[X, Y] = XY - X_0 Y_0 - \int X dY - \int Y dX.$$

Quando  $X = \int HdZ$  e  $Y = \int KdR$ , ocorre

$$[X, Y] = \int HKd[Z, R].$$

No caso  $X = Y$  denotamos  $[X, X] = [X]$  e chamamos a este processo simplesmente de *variação quadrática*. A variação quadrática é um processo crescente de variação finita.

**Exemplo:** Seja  $B$  o MB em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\{t_j\}_{j=1}^N$  uma partição de  $[0, t]$ . É possível ver que

$$\int BdB = \lim_{|\Delta t_j| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Por um lado

$$(B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2) = (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + 2B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Por outro lado

$$B_t^2 = \sum_{j=1}^N (B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2),$$

e

$$\sum_{j=1}^N (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \rightarrow t \quad \text{quando} \quad (t_{j+1} - t_j) \rightarrow 0,$$

uniformemente em probabilidade. Temos então que

$$\int BdB = \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}t.$$

O termo  $-\frac{1}{2}t$  mostra que a integral de Itô não se comporta como a integral comum. ■

Definimos a integral de Stratonovich de  $X$  com respeito a  $Y$  pela expressão

$$\int X\delta Y = \int XdY + \frac{1}{2}[X, Y].$$

**Exemplo:** Seja  $B$  o MB em  $\mathbb{R}$ . Pelo exemplo anterior e da definição de variação quadrática, segue que  $[B, B] = t$ . Portanto, a integral de Stratonovich  $\int B\delta B = \frac{1}{2}B^2$ . ■

Estes exemplos mostram que as duas integrais são diferentes. Em particular, a integral de Stratonovich se comporta de forma similar à integral de Riemann. De fato, a principal diferença entre as duas integrais é o seu comportamento com respeito à mudança de variáveis. Este é um ponto central do cálculo estocástico, pois, no caso da integral de Itô, a mudança de variáveis possui um termo a mais com respeito ao cálculo clássico, enquanto a integral de Stratonovich não. Colocamos a seguir estes resultados em forma de Teorema. A demonstração pode ser vista, por exemplo, no livro de Karatzas e Shreve [24].

**Teorema 5.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função  $C^2$  e  $X$  uma semimartingale contínua. Então*

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n \int (\partial_i f)(X) dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int (\partial_{ij}^2 f)(X) d[X^i, X^j],$$

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n \int (\partial_i f)(X) \delta X^i.$$

A primeira destas igualdades é chamada de *Fórmula de Itô* e é um dos resultados mais importantes do cálculo estocástico.

---

## 2.4 Equações Diferenciais Estocásticas em $\mathbb{R}^n$

---

Uma equação diferencial estocástica é uma equação diferencial com um termo de ruído.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e considere uma filtragem  $\{\mathcal{F}_t\}$  de  $\mathcal{F}$ . Sejam  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  funções mensuráveis satisfazendo

$$\|b(x)\| + \|a(x)\| \leq C(1 + \|x\|),$$

para alguma constante  $C$  e

$$\|b(x) - b(y)\| + \|a(x) - a(y)\| \leq D(\|x - y\|),$$

para alguma constante  $D$ . Considere uma semimartingale  $Z$  em  $\mathbb{R}^m$  adaptada a  $\mathcal{F}_t$  e  $X_0$  uma variável aleatória mensurável com respeito a  $\mathcal{F}_0$ . Dizemos que uma semimartingale  $X$  em  $\mathbb{R}^n$  é *solução da equação diferencial estocástica (EDE)* :

$$\begin{aligned} dX &= b(X)dt + a(X)dZ(t), \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

definida até um tempo de parada  $T$  se satisfaz

- i-  $X(t)$  é adaptada.
- ii-  $b(X) \in L_1(0, T)$  e  $a(X)$  em  $L^2(0, T)$ .
- iii-  $X(t) = X_0 + \int_0^T b(X(t))dt + \int_0^T a(X(t))dZ(t)$ .

O maior tempo de parada para o qual a solução está definida é chamado de *tempo de explosão*  $e(X)$ .

Da mesma forma que para as equações diferenciais ordinárias, há um teorema de existência e unicidade para as EDEs, o qual enunciamos abaixo. Para uma prova deste teorema, podem ser consultados os livros de Oksendal [32] ou Evans [13].

**Teorema 6.** *Seja  $T > 0$  e  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}$  funções mensuráveis satisfazendo*

$$\|b(x)\| + \|a(x)\| \leq C(1 + \|x\|),$$

para alguma constante  $C$  e

$$\|b(x) - b(y)\| + \|a(x) - a(y)\| \leq D(\|x - y\|),$$

para alguma constante  $D$ . Seja  $X_0$  uma variável aleatória que é independente da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_\infty$  e tal que  $\mathbb{E}[\|X_0\|^2] < \infty$ . Então a EDE (2.1) tem uma única solução  $X(t)$  contínua em  $t$  (até seu tempo de explosão  $e(X)$ ) com a propriedade que  $X(t, \omega)$  é adaptada a  $\sigma$ -álgebra  $\tilde{\mathcal{F}}_t$  gerada por  $X_0$  e  $B_s$  para  $s < t$ , cumprindo

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \|X(t)\|^2 dt \right] < \infty.$$

No caso de  $Z$  ser definida em  $[0, \infty)$  então  $e(X) = \infty$

**Observação:** A unicidade deve ser interpretada em probabilidade, isto é, se existe uma outra solução  $\tilde{X}$  então  $\mathbb{P}(X(t) = \tilde{X}(t), \text{ para todo } 0 \leq t \leq T) = 1$ .

O processo solução  $X$  da EDE (2.1) é chamado de *difusão*. No caso das difusões, pode-se provar a existência de um fluxo de difeomorfismos. De fato, temos o seguinte resultado que pode ser consultado no livro de Ikeda-Watanabe [23].

**Teorema 7.** *Seja  $X$  uma difusão que satisfaz a EDE*

$$\begin{aligned} dX &= b(X)dt + a(X)dB(t), \\ X(0) &= x, \end{aligned}$$

onde  $B$  é o movimento browniano e os coeficientes  $a$  e  $b$  satisfazem as mesmas condições que o Teorema 6. Então, para todo  $t$  fixo, existe uma aplicação  $X_t$  que leva  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow X_t^x(\omega) \in \mathbb{R}^n$  e é solução da EDE acima para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . O mapa  $X_t$  pode ser escolhido  $C^\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Denote por  $X^x$  a solução da EDE com  $X(0) = x \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que o operador de segunda ordem  $A$  definido por

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_t^x)] - f(x)}{t}, \quad \text{para toda } f \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

é o gerador da difusão  $X$ . Sua existência para o caso das difusões é garantida (ver, por exemplo, o livro de Oksendal [32] ou de Evans [13]). Pela fórmula de Itô, o operador  $A$  pode ser escrito como

$$Af(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)(\partial_i f)(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (aa^t)_{ij}(x)(\partial_{ij}^2 f)(x).$$

**Exemplo:** Se  $B$  é o movimento browniano, então segue da fórmula de Itô que

$$Af = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\partial_{ii}^2 f) = \Delta_{\mathbb{R}^n} f$$

para toda  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . ■

Da fórmula de Itô decorre o seguinte Teorema conhecido na literatura como *fórmula de Dynkin*

**Teorema 8.** *Seja  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Assuma que  $T$  é um tempo de parada tal que  $\mathbb{E}[T^x] < \infty$ . Então*

$$\mathbb{E}[f(X_{t \wedge T}^x)] = f(x) + \mathbb{E} \left[ \int_0^T Af(X_s^x) ds \right].$$

Toda difusão gera um operador de segunda ordem  $A$ . Pode ser mostrada a recíproca, isto é, se tivermos um operador de segunda ordem estritamente elíptico  $A$ , existe uma difusão  $X$  que tem como gerador infinitesimal o operador  $A$  (ver, por exemplo, o livro de Yosida [41]).

Temos descrito aqui a formulação das EDE no sentido de Itô, mas também é possível desenvolver a teoria para equações de Stratonovich da forma

$$\begin{aligned} dX &= b(X)dt + a(X)\delta Z(t), \\ X(0) &= X_0, \end{aligned}$$

onde  $a = (V_1, \dots, V_n)$ , com  $V_i$  campos em  $\mathbb{R}^n$ . Basta usar a conversão Itô-Stratonovich

$$a(X) \delta Z = a(X) dZ + \sum_{i,j=1}^m V_i V_j d[Z^i, Z^j]$$

e empregar a teoria desenvolvida para a equação

$$\begin{aligned} dX &= b(X)dt + a(X) dZ + \sum_{i,j=1}^m V_i V_j d[Z^i, Z^j], \\ X(0) &= X_0. \end{aligned}$$

## 2.5 Processos Estocásticos em Variedades Diferenciáveis

Os processos estocásticos em variedades são uma generalização dos processos estocásticos no espaço euclidiano. Nesta seção, de modo similar à seção anterior, daremos as definições básicas para logo estudar a integral estocástica e as equações diferenciais estocásticas em variedades. Em geral, os resultados listados nesta seção podem ser consultados nos livros de Emery [12] ou de Hsu [21].

Um processo estocástico  $X$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  a valores em uma variedade  $M$ , é um família de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro  $t$ . Se  $\mathcal{F}_{(0 \leq t \leq T)}$  é

uma filtragem de  $\mathcal{F}$ , dizemos que o processo é adaptado se para todo  $t$ ,  $X(t)$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável. Daqui para frente consideramos somente processos adaptados.

Um processo  $X$  em  $M$  é dito uma *semimartingale*, se para toda função  $f \in C^\infty(M)$ , o processo  $f(X)$  em  $\mathbb{R}$  é uma semimartingale.

Para toda forma bilinear  $b$  e toda semimartingale  $X$ , temos associada a *b-variação quadrática* que é definida pelas seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \int (df \otimes dg)(dX, dX) &= [f(X), g(X)], \\ \int fb(dX, dX) &= \int f(x)d\left(\int b(dX, dX)\right), \end{aligned}$$

onde  $f, g \in C^\infty(M)$ . Eis algumas propriedades da b-variação.

- Se  $\phi : M \rightarrow N$  é um aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis, então

$$\int (\phi_* \otimes \phi_*)^* b(dX, dX) = \int b(d\phi(X), d\phi(X)).$$

- $\int b(dX, dX)$  depende só da parte simétrica de  $b$ .
- Se  $b$  é definida positiva, então  $\int b(dX, dX)$  é crescente.

Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade  $M$  nos permite definir o conceito de *martingale*. Dizemos que uma semimartingale  $X$  é uma martingale se, e somente se, para toda função  $f \in C^\infty(M)$  temos que o processo

$$f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Hess}f(dX, dX)$$

é uma martingale local. A seguinte proposição permite caracterizar as martingales em termos dos tempos de parada.

**Proposição 1.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com conexão  $\nabla$ ,  $X$  uma martingale e  $\{T_n\}$  é uma seqüência crescente de tempos de parada com  $T_0 = 0$  e  $\sup T_n = \infty$ . Então  $X$  é martingale se, e somente se,  $X^{T_n}$  é uma martingale para todo  $n$ .*

Uma importante propriedade das martingales está contida na proposição a seguir. Basicamente, ela afirma que, para todo ponto na variedade, sempre existe uma vizinhança aberta tal que quaisquer duas martingales dentro dela que coincidem no ponto final são iguais.

**Proposição 2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com conexão  $\nabla$ . Então, todo ponto de  $M$  possui uma vizinhança aberta  $U$  com a seguinte propriedade: para quaisquer duas martingales  $X, Y$  a valores em  $U$ , definidas em  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, \mathbb{P})$  e tais que  $X(1) = Y(1)$  vale  $X(t) = Y(t)$  quase certamente para todo  $0 \leq t \leq 1$ .*

Quando a variedade  $M$  é uma variedade riemanniana, existe uma conexão canônica: a conexão de Levi-Civita. Esta conexão permite definir o *movimento browniano* na variedade como a semimartingale  $X$  em  $M$  para a qual

$$f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \Delta_M f(dX, dX),$$

é uma martingale local em  $\mathbb{R}$ , onde  $\Delta_M$  é o operador Laplaciano. O seguinte lema caracteriza o movimento browniano.

**Lema 1.** *Uma semimartingale  $X$  é um movimento browniano se, e somente se, é martingale e*

$$[f(X), f(X)] = \int \|\text{grad}_E f(X)\|^2 dt,$$

para toda  $f \in C^\infty(M)$ .

Uma pergunta clássica no cálculo estocástico é se o movimento browniano explode, isto é, se existe um  $t < \infty$  tal que  $B_t = \infty$ . Introduzimos assim o conceito *completitude estocástica*. Dizemos que uma variedade  $M$  é *estocasticamente completa* se, para todo  $x \in M$ , temos que, com probabilidade 1, o tempo de explosão  $e(B^x)$  do movimento Browniano começando em  $x$  é infinito,

$$\mathbb{P}[e(B^x) = \infty] = 1.$$

Existem várias condições geométricas que garantem a completitude estocástica, nós só mencionaremos a seguinte que pode ser examinada nos livros de Elworthy [11] ou Hsu [21].

**Teorema 9.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana que satisfaz  $\text{Ric}_M > Kg$  para  $K > -\infty$  em  $\mathbb{R}$ . Então  $M$  é estocasticamente completa.*

Decorre do teorema que uma variedade compacta é estocasticamente completa, assim como o espaço euclidiano.

## 2.6 Geometria de Segunda Ordem

Vamos considerar, nesta seção, as definições básicas da geometria de segunda ordem que serão úteis para o estudo do cálculo estocástico em variedades. Para um estudo mais profundo, o leitor pode consultar, por exemplo, o livro de Emery [12] ou o trabalho de Catuogno [7].

Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $x$  um ponto de  $M$ . Considere uma carta  $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$  com  $x \in U$ . Defina  $\tau_x M$  como o conjunto dos operadores diferenciais de segunda ordem  $L$  sem termos constantes. Localmente podemos descrever  $L$  da seguinte maneira

$$L = \sum_{i=1}^p a_i D_i + \sum_{i,j=1}^p a_{ij} D_{ij},$$

onde  $D_i = \partial/\partial x_i$ ,  $D_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$  e  $a_{ij} = a_{ji}$ . Analogamente pode ser definido  $\tau_x^* M$ , o espaço das formas de segunda ordem  $\Theta$ , por

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dx^i + \sum_{i,j=1}^n \theta_{ij} dx^i \cdot dx^j,$$

onde  $\{dx^i, dx^i \cdot dx^j\}$  é a base dual associada a  $\{D_i, D_{ij}\}$  e  $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ . O produto  $\cdot$  é definido para quaisquer duas 1-formas  $\omega$  e  $\nu$  em  $T^*M$ , e campos vetoriais  $X$  e  $Y$  em  $TM$ , da seguinte maneira

$$\omega \cdot \nu(X) = 0 \quad \text{e} \quad \omega \cdot \nu(XY) = \frac{1}{2}(\omega(X)\nu(Y) + \omega(Y)\nu(X)).$$

A união disjunta desses espaços define o *fibrado tangente de segunda ordem*  $\tau M$  e o *fibrado cotangente de segunda ordem*  $\tau^* M$  por

$$\tau M = \bigcup_{x \in M} \tau_x M \quad \text{e} \quad \tau^* M = \bigcup_{x \in M} \tau_x^* M,$$

Observamos que o fibrado tangente e o fibrado cotangente são subfibrados dos respectivos fibrados de segunda ordem.

Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana. Uma conexão  $\nabla$ , compatível com a métrica, pode ser visualizada como um projetor linear  $\mathbf{F} : \tau M \rightarrow TM$  definido da seguinte maneira

$$\mathbf{F}(X) = X, \quad \mathbf{F}(XY) = \nabla_X Y,$$

onde  $X, Y$  em  $TM$ . Também é possível definir um operador linear  $\mathbf{D} : T^*M \rightarrow \tau^*M$  que verifica para toda função  $f$  e toda 1-forma  $\omega$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(df) &= d^2 f, \\ \mathbf{D}(f\omega) &= \mathbf{H}(df \otimes \omega) + fd\omega. \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{H} : T^*M \otimes T^*M \rightarrow \tau^*M$  é um operador linear que satisfaz

$$\mathbf{H}(\omega \otimes \nu) = \omega \cdot \nu.$$

**Observação:** É fácil ver que se  $X, Y \in TM$  e  $\omega \in T^*M$  então

$$2\mathbf{D}\omega(XY) = \omega([X, Y]) + X\omega(Y) + Y\omega(X)$$

Definimos a restrição  $\mathbf{R} : \tau^*M \rightarrow T^*M$ , que é uma inversa a esquerda de  $\mathbf{D}$ , localmente (na carta local) por

$$\mathbf{R}(\theta_i d^2 x^i + \theta_{ij} dx^i \cdot dx^j) = \theta_i dx^i.$$

Se  $\phi : M \rightarrow N$  é uma aplicação entre variedades diferenciáveis e  $L \in \tau M$  é um vetor de segunda ordem em  $x$ , definimos o "pull-back"  $\phi(x)_* L \in \tau_{\phi(x)} N$  de  $L$  por  $\phi$  como sendo o vetor de segunda ordem em  $\phi(x)$  obtido da expressão

$$\phi(x)_* L(f) = L(f \circ \phi)(x),$$

onde  $f \in C^\infty(N)$ . Analogamente, para um covetor  $\Theta$  em  $\tau_{\phi(x)}^*N$ , o "pull-back"  $\phi(x)^*\Theta \in \tau_x M$  é definido por

$$\phi(x)^*\Theta(L) = \Theta(\phi(x)_*L),$$

onde  $L \in \tau_x M$ .

Se tivermos um vetor de segunda ordem  $L \in \tau M$  podemos definir um operador quadrático  $\mathbf{Q} : \tau_x M \rightarrow T_x M \odot T_x M$  que associa para cada  $L \in \tau M$  um operador de segunda ordem em  $\tau M$  da seguinte forma: sejam  $f, g \in C^\infty(M)$ , então  $\mathbf{Q}L$  é dado por

$$\mathbf{Q}L(fg) = \frac{1}{2}(L(fg) - fL(g) - gL(f)).$$

Em coordenadas locais,  $\mathbf{Q}$  pode ser visto como a aplicação linear definida por

$$\mathbf{Q} \left( \sum_{i=1}^n a_i D_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i \odot D_j.$$

Dizemos que uma aplicação  $\phi : \tau M \rightarrow \tau N$  é um *morfismo de Schwartz* se for uma transformação linear que satisfaz

- $\phi(T_x M) \subset T_y N$  e
- para todo  $L \in \tau_x M$ , temos que  $\mathbf{Q}(\phi L) = (\phi \otimes \phi)(\mathbf{Q}L)$ ,

onde  $x \in M$  e  $y = \phi(x) \in N$ .

**Exemplo:** O "pull-back"  $\phi_*$  é um morfismo de Schwartz.

## 2.7 Integral Estocástica

Nesta seção, vamos introduzir a integral estocástica em variedades da qual decorrerão as integrais de Itô e Stratonovich.

Seja  $X$  uma semimartingale em uma variedade  $M$ . Para  $\Theta \in \tau^* M$ , a integral de  $\Theta$  ao longo de  $X$  é dada em uma carta local  $(U, X_1, \dots, x_n)$  pela expressão

$$\int \Theta \mathbf{d}X = \sum_{i=1}^n \int \theta_i dX_s^i + \sum_{i,j=1}^n \int \theta_{ij} d[X^i, X^j]_s.$$

Neste formalismo  $\mathbf{d}X$  é visto como um elemento de  $\tau M$  que satisfaz, para toda  $f \in C^\infty$ ,

$$d(f(X)) = (\mathbf{d}X)f,$$

o que o torna independente da escolha do sistema de coordenadas. Esse fato é conhecido como princípio de Schwartz.

Globalmente a integral estocástica pode ser definida pelas seguintes propriedades

$$\begin{aligned}\int d^2 f(\mathbf{d}X) &= f(X) - f(X_0), \\ \int K\Theta(\mathbf{d}X) &= \int Kd\left(\int \Theta(\mathbf{d}X)\right),\end{aligned}$$

onde  $K$  é limitado e previsível e  $d$  denota a integral de Itô em  $\mathbb{R}$ .

Algumas propriedades da integral estocástica são

- $\int \Theta(\mathbf{d}\phi(X)) = \int \phi^*\Theta(\mathbf{d}X)$ .

- Se  $t \rightarrow s_t$  é uma mudança contínua no tempo, então

$$\int_0^t \Theta(\mathbf{d}X_{A_s}) = \int_{A_0}^{A_t} \Theta(\mathbf{d}X_s).$$

Mais ainda, se  $T$  for um tempo de parada, então

$$\left(\int \Theta(\mathbf{d}X)\right)^T = \int \Theta(\mathbf{d}X^T).$$

- Se  $f, g$  são funções diferenciáveis, então

$$\int (df \cdot dg)(\mathbf{d}X) = \frac{1}{2}[f(X), g(X)].$$

- Se  $\Theta$  e  $\Xi$  são previsíveis,

$$\frac{1}{2}\left[\int \Theta(\mathbf{d}X), \int \Xi(\mathbf{d}X)\right] = \int (\mathbf{R}\Theta \cdot \mathbf{R}\Xi)(\mathbf{d}X).$$

- Se  $b$  é uma forma bilinear, então

$$\int b(dX, dX) = 2 \int \mathbf{H}b(\mathbf{d}X).$$

Uma vez definida a integral estocástica, podemos introduzir as integrais de Itô e Stratonovich da seguinte maneira. Sejam  $X$  uma semimartingale e  $\alpha$  uma 1-forma em  $M$ . Definimos a *integral de Stratonovich de  $\alpha$  ao longo de  $X$*  pela expressão

$$\int \alpha(\delta X) = \int \mathbf{D}\alpha(\mathbf{d}X),$$

e a *integral de Itô de  $\alpha$  ao longo de  $X$*  pela expressão

$$\int \alpha(d^{\Gamma} X) = \int \Gamma\alpha(\mathbf{d}X),$$

onde  $\Gamma : T^*M \rightarrow \tau^*M$  é induzido pela conexão  $\nabla$  em  $M$  e satisfaz

$$\Gamma\alpha = \mathbf{D}\alpha - \mathbf{H}\nabla\alpha.$$

Uma propriedade interessante da integral de Itô é a sua fórmula de mudança de variáveis. Se  $\phi : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável entre variedades  $(M, \nabla^M)$  e  $(N, \nabla^N)$ ,  $X$  uma semimartingale em  $M$  e  $\Theta$  é uma forma de segunda ordem em  $N$ , então

$$\int \Theta(d^{\Gamma^N} \phi(X)) = \int \phi^* \Theta(d^{\Gamma^M} X) + \frac{1}{2} \int \beta_\phi^* \Theta(dX, dX),$$

onde  $\beta_\phi$  é a segunda fórmula fundamental definida como a seção de  $TM \odot TM \otimes \phi^*TN$  que satisfaz

$$\alpha_\phi = \beta_\phi \circ \mathbf{Q},$$

sendo  $\alpha_\phi$  seção de  $\tau M \otimes \phi^*TN$  definida por

$$\alpha_\phi = \Gamma^N \phi_* - \phi_* \Gamma^M.$$

## 2.8 Equações Diferenciais Estocásticas em Variedades

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e considere campos  $V_0, V_1, \dots, V_m$  em  $TM$ . Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  uma espaço de probabilidade e considere  $B$  o movimento browniano  $m$  dimensional adaptado a uma filtragem  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Uma *equação diferencial estocástica em  $M$*  é definida por  $m + 1$  campos vetoriais  $V_0, \dots, V_m$ , uma semimartingale em  $\mathbb{R}^m$   $Z$  e uma variável aleatória  $X_0 \in \mathcal{F}_0$ . Escrevemos simbolicamente a equação da forma

$$\begin{aligned} dX &= V_0(X)dt + \sum_{j=1}^m V_j(X)\delta Z^j, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned}$$

Dizemos que uma semimartingale  $X$  definida até um tempo de parada  $T$  é solução desta equação se, para toda  $f \in C^\infty(M)$  e  $0 \leq t < T$ , temos que

$$f(X(t)) = f(X_0) + \int_0^t V_j f(X(s)) \delta Z^j(s).$$

Uma consequência da fórmula de Itô é que, se a equação acima vale para funções  $f_1, \dots, f_k$ , então vale para qualquer função destas. Por exemplo, se usamos o teorema de imersão de Whitney que mergulha  $M$  em  $\mathbb{R}^N$ , então é suficiente mostrar a equação acima para as funções coordenadas.

Uma forma de construir soluções de equações diferenciais em variedades é a seguinte. Mergulhamos  $M$  em  $\mathbb{R}^n$  e consideramos  $M$  como sub-variedade fechada de  $\mathbb{R}^N$ . Cada campo vetorial  $V_j$  é, ao mesmo tempo, uma função diferenciável a valores em  $\mathbb{R}^n$  e pode ser estendido a um campo vetorial  $\tilde{V}_j$  em  $\mathbb{R}^N$ . Assim, temos definida uma equação estendida em  $\mathbb{R}^N$

$$X(t) = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \tilde{V}_j \delta Z^j(s),$$

que tem solução única até o seu tempo de parada. Os seguintes teoremas finalizam a construção.

**Teorema 10.** *Existe uma única solução de*

$$\begin{aligned} dX &= V_0(X)dt + \sum_{j=1}^m V_j(X)\delta Z^j, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned}$$

até o seu tempo de explosão.

**Teorema 11.** *Se  $X$  é solução da equação estendida até o seu tempo de explosão  $e(X)$  e se  $X_0 \in M$ , então  $X(t) \in M$  para  $0 \leq t < e(X)$ .*

**Exemplo:** Como exemplo de equações diferenciais estocásticas em variedades, consideramos a construção do movimento browniano proposta por Eells-Elworthy [11]. Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Considere  $r : O(M) \rightarrow M$  o fibrado das bases ortonormais sobre  $M$ . A projeção  $r$  induz um difeomorfismo

$$r_* : H_u O(M) \rightarrow T_x M \quad \text{com } x = r(u),$$

onde  $H_u O(M)$  denota o espaço horizontal sobre  $u \in O(M)$  com respeito a conexão canônica. Em  $O(M)$  temos definido  $n$  campos vetoriais horizontais  $H_1, \dots, H_n$  tais que, para cada  $u \in O(M)$ ,  $H_i(u)$  é o único campo vetorial horizontal cumprindo  $r_* H_i(y) = v e_i$ , onde  $r(v) = y$  e  $v \in O(M)$ .

Definimos a seguinte equação em  $O(M)$

$$\begin{aligned} dU &= \sum_{j=1}^n H_j(U) \delta B^j, \\ U(0) &= u \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde  $(B^1, \dots, B^n)$  é o movimento browniano em  $\mathbb{R}^n$ . Pelo que foi visto acima, a equação admite uma única solução  $U$ . Seja  $X = r(U)$  o processo projetado a  $M$  e seja  $f \in C^\infty(M)$ , então

$$f(X) - f(x) = \sum_{j=1}^n \int H_j(f \circ r)(U) \delta B^j,$$

passando para uma integral de Itô

$$f(X) - f(x) = \sum_{j=1}^n \int H_j(f \circ r)(U) dB^j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int (H_j)^2(f \circ r)(U) dt.$$

Usando a conhecida identidade

$$\text{Hess} f(X_i, X_j) = H_i H_j(f \circ r),$$

temos que

$$\sum_{j=1}^n (H_j)^2(f \circ r)(U) = \Delta_M f(X),$$

portanto

$$f(X) - f(x) - \frac{1}{2} \int \Delta_M f(X) dt = \sum_{j=1}^n \int H_j(f \circ r)(U) dB^j(t),$$

o que mostra que  $X = r(U)$  é um MB. ■

Outra aplicação das equações diferenciais estocásticas, semelhante ao caso euclidiano, vem a ser os processos de difusão. Estes são importantes pela relação que têm com os operadores elípticos de segunda ordem. Seja  $L$  um operador diferencial de segunda ordem elíptico, mas não necessariamente não-degenerado, em uma variedade diferenciável  $M$ . Um processo adaptado  $X$  em  $M$  é dito uma *difusão em  $M$  gerada por  $L$*  se é uma semimartingale tal que

$$f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t Lf(X(s)) ds$$

é uma martingale local para toda  $f \in C^2(M)$ , até o tempo de explosão  $e(X)$ . Observe que esta definição é equivalente àquela que demos para o caso  $M = \mathbb{R}^n$ .

Toda difusão  $X$  dá origem a uma medida definida por  $\mu^X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ . Mais ainda, pode ser visto que se temos uma medida  $\mu_0$ , uma variável aleatória  $X_0$  tal que  $\mu_0 = \mathbb{P} \circ X_0^{-1}$  e um operador elíptico  $L$ , então existe um processo  $X$  em  $M$  com  $X(0) = X_0$  que é uma  $L$  difusão com  $\mu^X(0) = \mu_0$ . Uma medida  $\mu$  é dita *invariante* se

$$\int \mathbb{E}[f(X^x)] \mu(dx) = \int f(x) \mu(dx).$$

Se o processo de difusão  $X$  é gerado por uma equação diferencial estocástica que possui um fluxo de soluções, o processo induz um semigrupo  $\{P_t\}_{0 \leq t}$  que age no espaço das funções contínuas da seguinte forma

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X^x)] = \int_M f(y) P(t, x, dy),$$

onde  $P(t, x, \cdot) = \mathbb{P} \circ (X^x)^{-1}(t)$  são as probabilidades de transição do processo  $X$ . Desta forma, a medida invariante poderia ser determinada pelo teorema do ponto fixo de Kakutani (ver, por exemplo, o trabalho de Pei-Dong e Min Qian [33]), mas isto nem sempre é possível (por exemplo, no caso de uma variedade  $M$  não compacta). Um resultado geral neste sentido é válido quando a variedade  $M$  é compacta. Neste caso, temos o seguinte resultado clássico do cálculo estocástico que encontramos, por exemplo, no trabalho de Pei Dong Liu e Min Quian [33].

**Teorema 12.** *Se  $\phi_t : M \times \Omega \times [0, T] \rightarrow M$  é um fluxo estocástico de difeomorfismos sobre uma variedade compacta  $M$ , então existe no mínimo uma medida invariante para o fluxo.*

**Exemplo:** Quando o operador for elíptico não-degenerado, a medida invariante é única (portanto ergódica) e tem uma densidade diferenciável com respeito a medida de Lebesgue

induzida pela métrica na variedade. Um caso particular, que corresponde ao movimento browniano, ocorre quando  $L = \Delta_M$ . Neste caso, a medida invariante é a medida de Lebesgue.



---

---

# CAPÍTULO 3

---

## FOLHEAÇÕES

Neste capítulo, vamos discutir brevemente elementos da teoria de folheações. Procuraremos nos concentrar nos itens úteis para o presente trabalho. Por isso, muitos dos tópicos importantes da teoria de folheações serão omitidos. Em geral, vamos dar as definições básicas, alguns exemplos ilustrativos e alguns resultados relevantes que serão utilizados adiante. Em linhas gerais, nossa discussão seguirá os livros de Moerdijk e Mrcun [29] e de Candel e Conlon [6].

---

### 3.1 Folheações

---

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $n$ . Uma *folheação*  $F$  de  $M$ , de dimensão  $p$  e codimensão  $q$  ( $p + q = n$ ), é uma partição  $\{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de  $M$  em subconjuntos conexos, chamadas *folhas*, com a seguinte propriedade: *para todo ponto em  $M$  existe uma vizinhança aberta  $U$  e uma carta*

$$\{U, \phi = (x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q\},$$

*tal que, para cada folha  $\mathfrak{L}_\alpha$ , as componentes conexas de  $U \cap \mathfrak{L}_\alpha$  são definidas pelas equações  $y_1 = \text{constante}$ ,  $\dots$ ,  $y_q = \text{constante}$ . Uma carta deste tipo é chamada *carta folheada*. As componentes conexas que correspondem aos conjuntos  $y_j = \text{cte.}$  em uma carta folheada recebem o nome de *placas* de  $F$ . Fixando  $y$ , temos que o mapa  $\phi^{-1} : \mathbb{R}^p \times \{y\} \rightarrow M$  é um mergulho suave. Portanto, as placas são sub-variedades conexas de dimensão  $p$ .*

Um *atlas folheado* é dado por um conjunto maximal de cartas folheadas

$$\{U_i, \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q\}_{i \in I}.$$

Observamos que, pela definição de carta folheada, os difeomorfismos dados pela mudança de coordenadas  $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$  são globalmente da forma

$$\phi_{ij}(x, y) = (f_{ij}(x, y), h_{ij}(y)),$$

com respeito à decomposição  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ .

**Exemplos:** Alguns exemplos canônicos em folheações são:

- 1- O exemplo trivial é a folheação do espaço  $\mathbb{R}^n$  dada pela carta folheada  $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ .
- 2- Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma submersão entre variedades diferenciáveis. Considere a folheação  $F(\phi)$  cujas folhas são as componentes conexas das fibras de  $\phi$ . Um atlas folheado de  $F(\phi)$  é obtido da forma canônica local da submersão. Este tipo de folheação é chamada de *simples*.
- 3- Seja  $a \in \mathbb{R}$  um irracional e considere a submersão  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\phi(x, y) = x - ay$ . Pelo item anterior, temos uma folheação  $F(\phi)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Seja agora  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \simeq S^1 \times S^1$  a aplicação de recobrimento padrão. A folheação  $F(\phi)$  induz uma folheação  $F$  em  $\mathbb{T}^2$ . Uma carta folheada pode ser obtida da seguinte forma: se  $(U, \psi)$  é uma carta folheada de  $\mathbb{R}^2$ , então  $(\pi(U), \psi(\pi^{-1}))$  é uma carta folheada de  $F$ . Toda folha é difeomorfa a  $\mathbb{R}$  e é densa em  $\mathbb{T}^2$ . Esta é a *folheação de Kroneker do Toro*.
- 4- É possível definir a folheação de uma variedade com bordo de forma óbvia, porém exigindo que as folhas sejam transversais ao bordo ou que as componentes conexas do bordo sejam folhas. O exemplo padrão deste tipo de folheação é a *folheação de Reeb do toro sólido*, a qual é descrita a seguir. Consideremos  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ , e defina a submersão  $\phi : \text{Int}(D) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(z, x) = \exp\left(\frac{1}{1 - |z|^2}\right) - x.$$

Temos, então, a folheação  $F(\phi)$  de  $\text{Int}(D) \times \mathbb{R}$  que pode ser estendida a uma no cilindro  $D \times \mathbb{R}$  adicionando a folha dada pelo bordo  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Agora, como  $D \times \mathbb{R}$  é o recobrimento universal do toro sólido  $D \times S^1$  da maneira canônica, temos que a folheação de  $D \times \mathbb{R}$  induz uma folheação  $\mathcal{R}$  no toro sólido. O toro no bordo é uma folha de  $\mathcal{R}$ . As demais folhas são difeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  e têm a folha do bordo como o conjunto dos pontos de aderência.

- 5- A esfera  $S^3$  admite uma decomposição  $S^3 \simeq X \cup_{\partial X} X$ , onde  $X$  é o toro sólido. Como  $\partial X$  é uma folha da folheação de Reeb do toro sólido, podemos colar as folheações das duas cópias de  $X$  pelo bordo  $\partial X$ . Isto pode ser feito de forma tal que a folheação obtida em  $S^3$  é suave. Esta folheação tem uma única folha compacta e é chamada de *folheação de Reeb de  $S^3$* .

■

O teorema de Frobenius (ver, por exemplo, o livro de Moerdijk e Marcn [29]) oferece as seguintes descrições equivalentes de uma folheação:

- i- Uma cobertura aberta  $\{U_i\}$  de  $M$  com submersões  $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$  tal que existem difeomorfismos (necessariamente únicos)

$$\gamma_{ij} : s_j(U_i \cap U_j) \rightarrow s_i(U_i \cap U_j)$$

com  $\gamma_{ij} \circ s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j}$ . Estes difeomorfismos satisfazem a condição de cociclo

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ik} \circ \gamma_{kj},$$

e são chamados de *cociclos de Haefliger* representando  $F$ .

- ii- Um subfibrado integrável  $E$  de  $TM$  de dimensão  $n - q$ .
- iii- Um ideal diferencial (graduado) localmente trivial  $\mathfrak{J} = \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{J}^k$  de dimensão  $q$  na álgebra diferencial graduada  $\Omega(M)$ . Isto quer dizer que o subconjunto  $\mathfrak{J}$  de  $\Omega(M)$  satisfaz duas propriedades

- $d\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}$  e que,
- para todo ponto  $M$  existe uma vizinhança aberta  $U$  tal que  $\mathfrak{J}|_U$  é o ideal em  $\Omega(M)|_U$  gerado por  $q$  1-formas linearmente independentes.

Nesta tese, consideraremos, em geral, a descrição de folheações dada pelo item (ii) acima, ou seja, pelo subfibrado integrável  $E \subset TM$ . Nessa linha, dizemos que a folheação  $F$  é *orientável* se  $E$  for orientável e dizemos que é *transversalmente orientável* se o subfibrado normal  $E^\perp \simeq TM/E$  é orientável. Uma *orientação* de  $F$  é uma orientação de  $E$  e uma *orientação transversal* de  $F$  é uma orientação de  $E^\perp$ . A existência de uma orientação de  $E^\perp$  implica a existência de uma  $q$ -forma  $\nu \in \Lambda E^{\perp*}$  e de uma 1-forma (não necessariamente única)  $\alpha \in TM^*$  tal que

$$d\nu = \alpha \wedge \nu.$$

**Observação:** Desta última identidade resulta (pela formulação (iii) do teorema de Frobenius) que se localmente  $\mathfrak{J}$  é gerado por formas  $\omega_1, \dots, \omega_q$ ,  $\nu$  pode ser escrita como sendo

$$\nu = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q.$$

Também segue que localmente existe uma 1-forma  $\alpha$  tal que

$$d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q) = \alpha \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q.$$

O argumento que prova a globalidade da identidade segue por partição da unidade.

Um resultado importante devido a Godbillon e Vey é enunciado a seguir. Para conveniência do leitor, apresentamos uma demonstração.

**Teorema 13.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $F$  uma folheação transversalmente orientável de codimensão  $q$ . Então*

$$i- d(\alpha \wedge (d\alpha)^q) = 0.$$

ii- A classe de cohomologia de de-Rham  $[\alpha \wedge (d\alpha)^q] \in H_{dR}^{2q+1}(M)$  é independente da escolha da orientação  $\nu$  e da 1-forma  $\alpha$ .

**Demonstração:** Primeiramente, observe que, pela existência de um ideal diferenciável localmente trivial caracterizando  $F$ , temos:

a) Se uma 1-forma  $\alpha$  satisfaz  $\alpha \wedge \nu = 0$ , então localmente

$$\alpha = \sum_{i=1}^q a_i \omega_i,$$

onde  $\omega_1, \dots, \omega_q$  é uma base de  $E^{\perp*}$ .

b) Se uma 1-forma  $\gamma$  satisfaz  $d\gamma \wedge \nu = 0$ , então localmente

$$d\gamma = \sum_{i=1}^q \gamma_i \wedge \omega_i.$$

Para provar (i), observe que localmente

$$0 = d^2\nu = d\alpha \wedge \nu + (-1)^q \alpha \wedge d\nu = d\alpha \wedge \nu,$$

onde

$$d\alpha = \sum_{i=1}^q \alpha_i \wedge \omega_i.$$

Portanto

$$d(\alpha \wedge (d\alpha)^q) = (d\alpha)^{q+1} = \left( \sum_{i=1}^q \alpha_i \wedge \omega_i \right)^{q+1}$$

possui em cada termo um produto de  $q+1$  das  $\omega_i$  que se anulam, pois  $\Lambda^{q+1} E^{\perp*} = 0$ .

Para provar (ii) considere duas orientações  $\nu$  e  $\nu'$ . Então  $\nu' = f\nu$  com  $f$  não nula. Segue que

$$d\nu' = df \wedge \nu + f\alpha \wedge \nu = (d \log(|f|) + \alpha) \wedge \nu',$$

então, se  $\alpha' = d \log(|f|) + \alpha$  temos que

$$\alpha' \wedge (d\alpha')^q = (\alpha + d \log(|f|)) \wedge (d\alpha)^q = \alpha \wedge (d\alpha)^q + d(\log(|f|)) \wedge (d\alpha)^q$$

Portanto, a classe  $[\alpha \wedge (d\alpha)^q]$  não depende de  $\nu$ .

Se  $\alpha$  e  $\alpha'$  satisfazem  $d\nu = \alpha \wedge \nu = \alpha' \wedge \nu$ , então chame  $\beta = \alpha - \alpha'$ . Observe que  $\beta = \sum_{i=1}^q b_i \omega_i$  e, conseqüentemente,  $\beta \wedge (d\alpha')^q = 0$ . Logo

$$\alpha' \wedge (d\alpha')^q = (\alpha - \beta) \wedge (d\alpha')^q = \alpha \wedge (d\alpha')^q.$$

Por outro lado,

$$(d\alpha')^q = (d\alpha + d\beta)^q = (d\alpha)^q \wedge \sum_{i=1}^q \binom{q}{i} (d\alpha)^{q-i} \wedge (d\beta)^i,$$

e assim

$$\alpha' \wedge (d\alpha')^q = \alpha \wedge (d\alpha)^q + \alpha \wedge \sum_{i=1}^q \binom{q}{i} (d\alpha)^{q-i} \wedge (d\beta)^i.$$

Observe que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{q-i} \wedge (d\beta)^i = d(\alpha \wedge (d\alpha)^{q-i} \wedge (d\beta)^{i-1} \wedge \beta) \pm ((d\alpha)^{q-i+1} \wedge (d\beta)^{i-1} \wedge \beta),$$

onde o segundo termo da direita é 0, pois contém  $q+1$  produtos dos  $\omega_i$ 's. Portanto, a classe de cohomologia  $[\alpha \wedge (d\alpha)^q]$  tampouco depende da escolha de  $\alpha$ . ■

A classe  $[\alpha \wedge (d\alpha)^q] \in H_{dR}^{2q+1}(M)$  é uma classe característica em folheações que recebe o nome de *classe de Godbillon-Vey*. Quando a dimensão da variedade  $M$  é  $n = 2q + 1$ , a integral desta classe fornece um número intrínseco da folheação chamado de *número de Godbillon Vey de  $F$* .

Um resultado de Hurder [22] diz que, nas esferas de dimensão ímpar  $S^{2q+1}$ ,  $q \geq 1$ , admitindo um subfibrado integrável de dimensão  $q$ , sempre existe uma folheação de codimensão  $q$  com número de Godbillon-Vey igual a um número real escolhido arbitrariamente.

## 3.2 Construção de Folheações

Folheações em variedades podem ser obtidas a partir de folheações conhecidas mediante operações geométricas. A seguir listamos algumas dessas construções.

- **Folheação Produto:** Sejam  $(M, F)$  e  $(N, F')$  duas variedades folheadas. Defina em  $M \times N$  a folheação produto  $F \times F'$  cujas folhas são da forma  $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}'$  com  $\mathfrak{L} \in F$  e  $\mathfrak{L}' \in F'$ . Se  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  são cartas folhadas de  $M$  e  $N$  respectivamente, temos que  $(U \times V, \phi \times \psi)$  é uma carta folhada de  $M \times N$ .
- **Folheação "Pull-back":** Sejam  $\phi : N \rightarrow M$  uma aplicação suave e  $F$  uma folheação de  $M$ . Assuma que  $\phi$  é transversal a  $F$ , ou seja,

$$T_{\phi(x)}M = \phi_*T_xN + E_{\phi(x)},$$

com  $E$  o subfibrado integrável caracterizando  $F$ . Do teorema de Frobenius e do bom comportamento do "pull-back"  $\phi^*$  com respeito ao colchete de Lie, temos que  $\phi_*E \subset TN$ , onde

$$\phi^*E = \{(p, v) \in TN, \phi_*v \in E_{\phi(p)}\},$$

é integrável e, portanto, define uma folheação  $\phi^*F$  em  $N$  pelo teorema de Frobenius.

- **Folheação Quociente:** Sejam  $(M, F)$  uma variedade folheada e  $G$  um grupo de Lie agindo em forma própria e descontínua em  $M$ , de tal forma que a variedade quociente  $M/G$  é Hausdorff. Assuma que a folheação  $F$  é invariante pela ação de  $G$  i.e. para todo  $g \in G$  temos  $dg \cdot E = E$ . Então a projeção ao quociente  $\pi : M \rightarrow M/G$  define uma folheação em  $M/G$  pelo bom comportamento do "push-forward" com respeito ao colchete de Lie. De fato,  $\pi_*E \subset T(M/G)$ , onde

$$\pi_*E = \{(p, v) \in T(M/G), v \in \pi_*E_{\pi^{-1}(p)}\}$$

é um subfibrado integrável e, portanto, define uma folheação em  $M/G$ .

- **Folheação associada à ação de um grupo de Lie:** Dizemos que a ação  $A : G \times M \rightarrow M$  de um grupo de Lie  $G$  sobre uma variedade  $M$  é folheada se a dimensão do subgrupo de isotropia  $G_x$  é uma função constante de  $x$ . Neste caso, as componentes conexas das órbitas da ação são as folhas da folheação de  $M$ . O subfibrado integrável de  $TM$  é descrito em termos da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como a imagem do diferencial da ação  $dA : \mathfrak{g} \times M \rightarrow TM$ .

No caso  $G = \mathbb{R}$ , uma ação suave em  $M$  é chamada de *fluxo* em  $M$ . Para tais folheações existe um campo vetorial que não se anula em  $M$ . Um exemplo de fluxo é o dado pela folheação de Kronecker.

- **Fibrados Folheados:** Um *fibrado folheado* (ver [34]) é um fibrado  $(P, M, \pi : P \rightarrow M)$  com uma folheação  $F$  de  $P$  com as seguintes propriedades:

- i- As folhas de  $F$  têm a mesma dimensão que  $M$ .
- ii- As folhas de  $F$  são transversas às fibras do fibrado.

Eis um exemplo de fibrado folheado. Consideremos um grupo  $G$  agindo à direita em forma própria e descontínua sobre uma variedade  $\tilde{M}$  tal que  $\tilde{M}/G \simeq M$  (por exemplo, sejam  $G = \pi_1(M, x)$  o primeiro grupo fundamental de  $M$  em um ponto base  $x \in M$  e  $\tilde{M}$  o recobrimento universal). Assumamos também que  $G$  age à esquerda sobre uma variedade  $F$ . Introduzimos o quociente

$$E = \tilde{M} \times_G F$$

obtido do espaço produto  $\tilde{M} \times F$  pela identificação  $(pg, f) \sim (p, gf)$  para todo  $p \in \tilde{M}$ , e todo  $f \in F$ . Portanto,  $E$  é o espaço de órbitas  $\tilde{M} \times F$  com respeito à ação de  $G$ , sendo também uma variedade. A projeção  $\text{pr}_1 : \tilde{M} \times F \rightarrow M$  induz uma projeção  $\pi : E \rightarrow M$  que define um fibrado sobre  $M$ . A folheação  $F(\text{pr}_2)$  de  $\tilde{M} \times F$ , definida pela submersão  $\text{pr}_2 : \tilde{M} \times F \rightarrow F$ , é invariante pela ação de  $G$  e induz em  $E$  uma folheação quociente  $F$ , que dá a estrutura de fibrado folheado.

### 3.3 Holonomia

Nesta seção, vamos dar a definição de holonomia e estudar algumas das propriedades. Nossa discussão seguirá os livros de Moerdijk e Mrcun [29] e de Candel e Conlon [6].

Antes de introduzir a holonomia, precisamos discutir o conceito de germe de funções. Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis. Tome  $x \in M$  e  $y \in N$ . O *germe* de uma função de  $x$  a  $y$  é uma classe de equivalência de aplicações  $\phi : U \rightarrow V$  de uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  a uma vizinhança aberta  $V$  de  $y$  com  $\phi(x) = y$ .

Sejam  $\phi : U \rightarrow V$  e  $\phi' : U' \rightarrow V'$  duas aplicações. Dizemos que  $\phi$  e  $\phi'$  são equivalentes se, e somente se, existe uma vizinhança aberta  $W \subset U \cap U'$  tal que  $\phi|_W = \phi'|_W$ . Denotamos o germe de  $f$  como  $\text{germ}_x(f) : (M, x) \rightarrow (N, y)$ . Observamos que

- Os germes  $\text{germ}_x(f) : (M, x) \rightarrow (N, y)$  e  $\text{germ}_y(g) : (N, y) \rightarrow (R, z)$  podem ser compostos  $\text{germ}_x(g \circ f|_{\text{dom}(g)}) : (M, x) \rightarrow (R, z)$ .
- Existe o germe identidade  $\text{germ}_x(\text{Id}) : (M, x) \rightarrow (M, x)$ .
- Se  $f$  é um difeomorfismo local, então existe o germe inverso a  $\text{germ}_x(f) : (M, x) \rightarrow (N, y)$  que é  $\text{germ}_y(f^{-1}) : (N, y) \rightarrow (M, x)$ . Em particular, os germes de difeomorfismos  $(M, x) \rightarrow (M, x)$  formam um grupo denotado por  $\text{Dif}_x(M)$ . Denotamos por  $\text{Dif}_x^+(M)$  ao subgrupo de  $\text{Dif}_x(M)$  constituído pelos germes de difeomorfismos que preservam orientação em  $x$ .

Seja  $(M, F)$  uma variedade folhada. Uma *variedade transversal* é uma subvariedade  $T$  de  $M$  tal que, para todo  $x \in T$ , temos  $T_x T + E_x = T_x M$  onde  $E_x = T\mathfrak{L}_x$ . Uma variedade transversal não necessariamente intersecta cada folha de  $F$  e, em geral, existe um transversal sobre cada ponto de  $M$ . Seja  $\mathfrak{L} \in F$  uma folha. Considere pontos  $x, y \in \mathfrak{L}$  e transversais  $S$  e  $T$  sobre  $x$  e  $y$  respectivamente. Para todo caminho  $\gamma$  de  $x$  para  $y$  podemos associar o germe de difeomorfismos

$$\text{hol}(\gamma) : (T, x) \rightarrow (S, y),$$

chamado *holonomia do caminho*  $\gamma$  em  $\mathfrak{L}$  com respeito às seções transversais  $S$  e  $T$ . Passamos a detalhar a sua construção. Assuma que existe uma carta folhada  $(U, \phi)$  tal que  $\gamma([0, 1]) \subset U$ . Em particular, os pontos  $x$  e  $y$  estão sobre a mesma placa em  $U$ . Então há uma vizinhança aberta  $A \subset U$  de  $x$  em  $T$  na qual podemos definir uma aplicação diferenciável  $f : A \rightarrow S$  que satisfaz

- $f(x) = y$ , e
- para todo  $x' \in A$ , o ponto  $f(x') \in S$  está na mesma placa, em  $U$ , que  $x'$ .

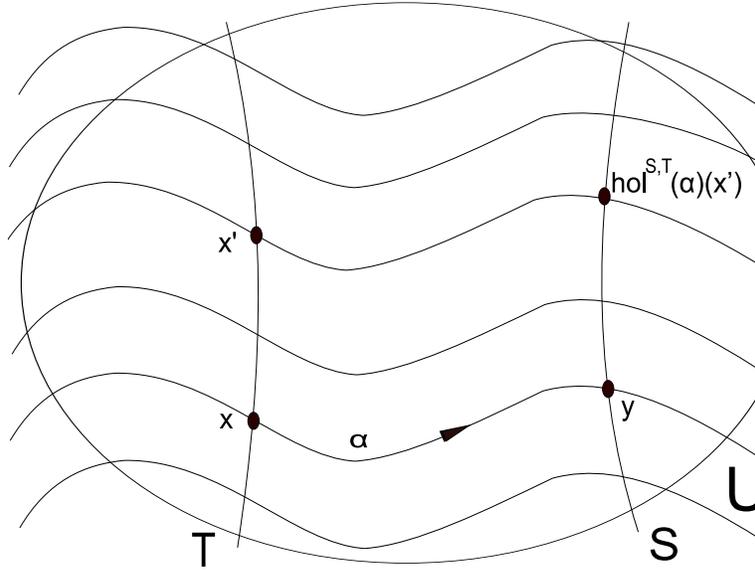


Figura 1.

Claramente podemos escolher  $A$  suficientemente pequeno para que  $f$  seja um difeomorfismo sobre sua imagem. Definimos então

$$\text{hol}^{S,T}(\gamma) = \text{germ}_x(f).$$

Observamos que esta definição não depende da escolha de  $U$ , nem de  $f$  e nem do caminho  $\gamma$ . Se tivermos um caminho que passa por uma sequência de cartas folheadas, podemos compor as holonomias de cada carta para obter uma holonomia para o caminho. Algumas propriedades da holonomia são as seguintes:

- i- Sejam  $\gamma$  e  $\gamma'$  dois caminhos em  $\mathcal{L}$  que unem  $x$  e  $y$  e  $y$  e  $z$  respectivamente. Sejam  $T, S$  e  $R$  transversais em  $x, y$  e  $z$ , respectivamente. Então

$$\text{hol}^{R,T}(\gamma'\gamma) = \text{hol}^{R,S}(\gamma') \circ \text{hol}^{S,T}(\gamma),$$

onde  $\gamma'\gamma$  denota a concatenação dos caminhos  $\gamma'$  e  $\gamma$ .

- ii- Sejam  $\gamma$  e  $\gamma'$  caminhos homotópicos em  $\mathcal{L}$  de  $x$  a  $y$ , e  $T$  e  $S$  os transversais em  $x$  e  $y$ , respectivamente. Então

$$\text{hol}^{S,T}(\gamma) = \text{hol}^{S,T}(\gamma').$$

Portanto, podemos definir os grupos de holonomia nas classes de homotopia dos caminhos em  $\mathcal{L}$  de  $x$  a  $y$ .

- iii- Sejam  $\gamma$  caminho em  $\mathcal{L}$  que une  $x$  e  $y$ ,  $T$  e  $T'$  dois transversais em  $x$  e  $S$  e  $S'$  dois transversais em  $y$ . Então

$$\text{hol}^{S',T'}(\gamma) = \text{hol}^{S',S}(y) \circ \text{hol}^{S,T}(\gamma) \circ \text{hol}^{T,T'}(x),$$

onde  $y$  e  $x$  aqui denotam os caminhos constantes. Neste sentido, a holonomia é independente dos transversais.

Destas propriedades básicas decorre que, se  $T$  é um transversal qualquer através de  $x$ , então existe um homomorfismo de grupos

$$\text{hol}^T = \text{hol}^{T,T} : \pi_1(\mathfrak{L}, x) \rightarrow \text{Dif}_x(T).$$

Como  $\text{Dif}_x(T) \simeq \text{Dif}_0(\mathbb{R}^q)$  e pela propriedade de independência dos transversais, obtemos um homomorfismo de grupos

$$\text{hol} : \pi_1(\mathfrak{L}, x) \rightarrow \text{Dif}_0(\mathbb{R}^q),$$

que é chamado de *homomorfismo de holonomia* de  $\mathfrak{L}$ . Em particular, a imagem  $\text{Hol}(\mathfrak{L}, x)$  de  $\text{hol}$  é chamada de *grupo de holonomia* de  $\mathfrak{L}$ . Dizemos que dois caminhos  $\gamma$  e  $\gamma'$  têm o mesmo grupo de holonomia se  $\text{hol}(\gamma'\gamma^{-1}) = 1$ . Esta é uma relação de equivalência definida nas classes de homotopias de caminhos de  $\mathfrak{L}$  de  $x$  a  $y$ . A classe de equivalência  $\gamma$ , com respeito a esta relação, recebe o nome de *classe de holonomia*.

Tomando o diferencial no 0 de um germe de difeomorfismo, obtemos o homomorfismo de grupos  $d_0 : \text{Dif}_0(\mathbb{R}^q) \rightarrow \text{Gl}(q, \mathbb{R})$ . O *homomorfismo linear de holonomia* de  $\mathfrak{L}$  é definido pela composição

$$d\text{hol} = d_0 \circ \text{hol} : \pi_1(\mathfrak{L}, x) \rightarrow \text{Gl}(q, \mathbb{R}).$$

Sua imagem recebe o nome de *grupo linear de holonomia* de  $\mathfrak{L}$ , e é denotada por  $d\text{Hol}(\mathfrak{L}, x)$ .

Os grupos de holonomia são muito importantes no estudo das folheações, mas nesta tese não vamos nos aprofundar mais no tópico. Indicamo ainda um resultado importante devido a Thurston (ver, por exemplo, o livro de Candel [5] para uma prova).

**Teorema 14.** *Seja  $F$  uma folheação de codimensão  $q$  em uma variedade  $M$  com uma folha compacta  $\mathfrak{L}$ . Então uma das seguintes afirmações acontece*

- i- O grupo linear de holonomia de  $\mathfrak{L}$  é não trivial, ou*
- ii- A cohomologia de De-Rham  $H_{dR}^1(\mathfrak{L})$  é não trivial, ou*
- iii- O grupo de holonomia de  $\mathfrak{L}$  é trivial, e existe uma vizinhança aberta e saturada de  $\mathfrak{L}$  em  $M$  e um difeomorfismo*

$$V \simeq \mathfrak{L} \times \mathbb{R}^q$$

*onde as folhas de  $V$  se correspondem com as fibras da projeção  $\mathfrak{L} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ .*

Para esclarecer o item (iii), dizemos que um conjunto  $V$  é saturado se ele for união de folhas, isto é,  $V = \cup_{\alpha \in I} \mathfrak{L}_\alpha$ .

**Exemplo:**

- 1- Se a folha  $\mathfrak{L}$  é simplesmente conexa, então o grupo de holonomia é trivial.
- 2- Para uma folha de uma folheação do tipo  $F(\phi)$ , definida por uma submersão  $\phi : M \rightarrow N$ , o grupo de holonomia de  $\mathfrak{L}$  é trivial.
- 3- A folheação de Reeb do toro sólido possui todas as folhas simplesmente conexas com exceção da folha do bordo  $\mathbb{T}^2$ . É fácil ver que a definição de holonomia faz sentido para uma folha no bordo, exceto quando o transversal é difeomorfo ao intervalo  $[0, \infty)$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são os geradores do grupo fundamental do toro, temos que  $\text{hol}(\alpha) = 1$ , mas  $\text{hol}(\beta)$  é um germe de 0 a 0 de um difeomorfismo  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $f(t) < t$  para todo  $t > 0$ .
- 4- A folheação de Reeb de  $S^3$  tem uma folha compacta  $\mathbb{T}^2$  e o grupo de holonomia para esta é  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Para  $\alpha, \beta$  como acima,  $\text{hol}(\alpha)$  e  $\text{hol}(\beta)$  são germes de difeomorfismos  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $g(t) < t$  se  $t < 0$  e  $g(t) = t$  se  $t \geq 0$  e  $h(t) = t$  se  $t \leq 0$  e  $h(t) < t$  se  $t > 0$ . ■

---

### 3.4 Folheações Riemannianas

---

O conceito de folheações riemannianas foi introduzido por Reinhart [35] e explorado por diversos autores (por exemplo, Tondeur [38] e Molino [30]). Denotamos por  $(M, F)$  uma variedade folheada de codimensão  $q$ . Uma métrica transversal em  $M$  é uma forma bilinear  $g^\perp$  em  $M$  semidefinida positiva que satisfaz

- $\ker(g_x^\perp) = E$ , onde  $E$  é o subfibrado que caracteriza  $F$ , e
- $L_X g^\perp = 0$  para todo  $X \in E$ , onde

$$L_X g^\perp(Y, Z) = Xg^\perp(Y, Z) - g^\perp([X, Y], Z) - g^\perp(Y, [X, Z]).$$

A segunda condição implica que  $g^\perp$  é invariante pelo grupo de holonomia, pois garante que  $g^\perp$  não muda ao longo dos caminhos que estão na folha. Dizemos que uma folheação  $F$  munida com uma métrica transversal é uma *folheação riemanniana*.

**Exemplo:** Assuma que os cociclos de Haefliger são isometrias de  $\mathbb{R}^q$  munido com uma estrutura riemanniana qualquer  $h$  (não necessariamente com curvatura nula). Seja  $\{U_i, s_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q\}$  o atlas folheado que gera os cociclos  $\gamma_{ij} : s_j(U_i \cap U_j) \rightarrow s_i(U_i \cap U_j)$ . Defina localmente a métrica transversal  $g^\perp$  pela fórmula  $g^\perp|_{U_i} = s_i^* h$ . Agora, pelo fato dos  $\gamma_{ij}$  serem isometrias, podemos colar as métricas locais para formar uma métrica transversal global. ■

Observamos que, se  $T$  é uma variedade transversal em  $(M, F)$ , então  $g^\perp|_T$  é uma métrica riemanniana para  $T$  e, portanto,  $T$  tem uma estrutura riemanniana.

Quando  $(M, g)$  for uma variedade riemanniana tal que  $g$  induz uma métrica transversal em  $E^\perp$ , dizemos que  $g$  é uma *métrica tipo fibrado*.

A geometria transversal de  $F$  é modelada por  $E^\perp$ . Uma ferramenta fundamental no seu estudo é a conexão de Bott  $\nabla^B$ . Para defini-la, considere  $(M, F, g)$  uma *variedade riemanniana folheada*, isto é, uma variedade riemanniana que admite uma folheação  $F$  (não confundir com folheação riemanniana). Então  $M$  admite uma conexão de Levi-Civita que denotamos por  $\nabla^M$ . Considere a projeção ortogonal  $\pi^\perp : TM \rightarrow E$ . Definimos para todo  $Y \in E^\perp$  e  $X \in TM$  a conexão

$$\nabla_X^B Y = \begin{cases} \pi^\perp[X, Y] & \text{se } X \in E \\ \pi(\nabla_X^M Y) & \text{se } X \in E^\perp \end{cases}.$$

Em geral,  $\nabla^B$  não é compatível com a métrica. De fato, um resultado nessa direção é o seguinte lema, cuja prova pode ser consultada no livro de Tondeur [38, pg. 53].

**Lema 2.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada. Então  $g$  é uma métrica tipo fibrado se, e somente se,  $\nabla^B$  é compatível com a métrica em  $E^\perp$  induzida por  $g$*

É fácil ver que a conexão  $\nabla^B$  tem curvatura nula na direção de  $E$ , isto é,  $R(X, X') = 0$  para  $X, X' \in E$ . Isto está relacionado com a topologia das variedades folhadas como foi mostrado por Bott (ver [4, cap. 6]).

**Teorema 15.** *Seja  $E \subset TM$  um subfibrado integrável de codimensão  $q$ . Então as classes de Potrajagin  $\text{Pont}^k(E^\perp)$  são 0 para  $k > 2q$ .*

Passamos ao estudo das variedades riemannianas folheadas. Vamos ver as folhas de  $F$  geometricamente imersas em  $M$ . Relembraremos conceitos próprios da teoria de imersões, os quais serão utilizados no nosso trabalho. Considere então  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada com conexão de Levi-Civita  $\nabla^M$  e projeções ortogonais  $\pi : TM \rightarrow E$  e  $\pi^\perp : TM \rightarrow E^\perp$ . Definimos a *segunda forma fundamental*  $W : E \times E \rightarrow E^\perp$  pela fórmula

$$W(X, Y) = \pi^\perp(\nabla_X^M Y).$$

Se  $W \equiv 0$ , dizemos que a folheação é *totalmente geodésica*. Este último fato não é uma definição mas um teorema. Na verdade, uma folheação  $F$  é totalmente geodésica se todas as folhas são sub-variedades totalmente geodésicas.

O campo vetorial *curvatura média da folheação* é o campo  $K$  definido pelo traço em  $E$  da segunda forma fundamental mais precisamente  $K = \text{Tr}_E W$ . Se  $K$  for 0 então as folhas da folheação são variedades mínimas (ver o livro de Kobayashi e Nomizu [26]). Uma tal folheação é dita *harmônica*.

## 3.5 Medidas em Folheações

O estudo das medidas em espaços folheados tem como objetivo obter propriedades qualitativas sobre as folheações. As primeiras medidas a serem estudadas foram as medidas transversais, mas elas possuem a desvantagem de nem sempre existirem. Em [17], Lucy Garnett introduziu o conceito de medidas harmônicas. Estas medidas são medidas invariantes para uma difusão (isto será visto claramente em breve) a qual Garnett chamou *movimento browniano em folheações*. A vantagem das medidas harmônicas, com respeito as medidas transversais, reside no fato de sempre existirem (no caso da variedade ser compacta). Nesta seção, vamos dar as definições básicas e alguns resultados importantes.

Dizemos que uma folheação tem uma *medida invariante por holonomia* se o grupo de holonomia tem uma medida invariante não trivial que é finita em conjuntos transversais compactos. Se  $\mu$  é uma medida invariante por holonomia, temos que seu suporte é o conjunto de pontos  $x \in M$  com a seguinte propriedade: para todo transversal  $T$  em  $x$ ,  $\mu(T) > 0$ . O suporte da medida é uma união das folhas de  $F$ , isto é, um conjunto saturado de  $M$ . Quando  $F$  é transversalmente orientada, uma medida invariante determina uma classe de homologia. É possível dar uma expressão explícita para esta classe em termos da carta folheada (ver, por exemplo, o trabalho de Plante [34] e suas referências).

**Exemplo:** Se  $(M, F, g)$  é uma variedade riemanniana folheada com  $F$  transversalmente orientável, podemos definir naturalmente uma forma  $\chi^\perp$ . Seja  $\{E_1, \dots, E_q\}$  uma base ortonormal de  $E^\perp$ . Defina, localmente,  $\chi^\perp$  como a  $q$ -forma que avaliada em um conjunto arbitrário  $Y_1, \dots, Y_q \in TM$  é dada pela expressão

$$\chi^\perp(Y_1, \dots, Y_q) = \det[g(Y_i, E_j)_{ij}].$$

A forma  $\chi^\perp$  satisfaz, para  $Y \in E$ , a expressão (ver o livro de Tondeur [38, pg. 70] )

$$L_Y \chi^\perp = -g(\kappa, Y) \chi^\perp,$$

onde

$$\kappa = \pi \left( \sum_{j=p+1}^n \nabla_{E_j} E^j \right).$$

Conseqüentemente, se  $\kappa = 0$  temos que  $\chi^\perp$  é uma medida invariante por holonomia.

As *medidas harmônicas* são medidas invariantes pelo semigrupo gerado pelo movimento browniano folheado (detalhes serão mostrados adiante). Eis a idéia da construção: Cada folha  $\mathcal{L} \in F$  admite uma métrica riemanniana, tendo portanto um Laplaciano  $\Delta_{\mathcal{L}}$ . A "união" desses operadores dá origem a um operador de segunda ordem  $\Delta$  em  $M$ . Este operador gera uma difusão em  $M$  que possui uma medida invariante  $\mu$ . Esta medida é a medida harmônica. Portanto, uma medida  $\mu$  é harmônica se, e somente se, para toda função  $f \in C^2(M)$  temos que  $\int \Delta f \mu = 0$ . O seguinte teorema é um dos resultados mais importantes em medidas harmônicas e foi obtido por Garnett em [17].

**Teorema 16.** *i- Toda variedade riemanniana folheada e compacta sempre admite medidas harmônicas.*

*ii- Toda função boreliana limitada  $f$  que é harmônica em cada folha deve ser constante em quase toda folha, relativa a uma medida harmônica finita em  $M$ .*

*iii- Uma medida  $\mu$  é harmônica se, e somente se, localmente se desintegra como uma soma de medidas nas folhas, as quais são produto de uma função harmônica positiva na folha pela medida de Lebesgue da folha.*

Também em [17] foi introduzido o conceito de *medida ergódica* (estas medidas são medidas harmônicas que, para todo conjunto saturado  $U$ , satisfaz em  $\mu(U)\mu(U^c) = 0$ ) e foi provado um teorema ergódico e um teorema de decomposição para as medidas harmônicas em medidas ergódicas. No presente trabalho, não vamos, contudo, entrar em detalhes neste assunto.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## OPERADORES EM FOLHEAÇÕES

Os conceitos básicos do cálculo estocástico, como martingale e movimento browniano, requerem a definição prévia de alguns operadores geométricos, como o hessiano e o laplaciano, além do estudo das suas propriedades. Portanto, no contexto dos espaços folheados, precisamos de definições equivalentes. É esse o objetivo central deste capítulo: introduzir para uma folheação os operadores gradiente, hessiano, divergente e laplaciano em forma global, para dar uma base ao cálculo estocástico em folheações. Para isto, consideraremos uma folheação  $F$  em uma variedade riemanniana  $(M, g)$  como um subfibrado integrável  $E$  do fibrado tangente  $TM$ . Em geral, ao longo do capítulo, a variedade riemanniana considerada não precisa ser compacta.

Os pontos principais deste capítulo são a Definição 2, os Lemas 5, 6, 7 e 8, o Corolário 1 e os Teoremas 17 e 18. O ponto de vista adotado é um ponto de vista global, no sentido que os operadores são globais. Na última seção, aplicamos todo o formalismo desenvolvido em um trabalho de Gromov [20].

---

### 4.1 Operadores Folheados

---

Ao longo do capítulo, consideraremos uma variedade riemanniana folheada  $(M, F, g)$ , onde a folheação  $F$  herda a métrica de  $M$  (ou seja, cada folha está geometricamente imersa em  $M$ , com  $\dim(M) = n$  e  $\dim(F) = p$ ) bem como uma conexão  $\nabla$  compatível com  $g$ . Escolhemos descrever a folheação  $F$  como um subfibrado integrável  $E$  do fibrado tangente  $TM$  e, baseados no teorema de Frobenius, usaremos indistintamente os termos integrabilidade e involutibilidade para o fibrado  $E$ . Denotamos por  $\pi : TM \rightarrow E$  a projeção ortogonal em  $E$ . Com esta notação, é fácil ver que métrica  $g$  se escreve da seguinte forma

$$g = g_E + g^\perp, \quad \text{onde} \quad g_E(v, w) = g(\pi v, \pi w) \quad \text{e} \quad g^\perp(v, w) = g((1 - \pi)v, (1 - \pi)w).$$

para todos  $v$  e  $w$  vetores em  $T_x M$ .

**Observação:** Se a variedade  $M$  for compacta, temos que, toda métrica sobre  $E$ , isto é, uma forma bilinear  $\tilde{g}$  de  $TM$  que é definida positiva quando restrita a  $E$ , pode ser estendida numa métrica  $g$  de  $TM$ , com  $g_E = \tilde{g}$  e  $g^\perp$  como acima dada em função de qualquer métrica  $\bar{g}$  definida em  $M$ .

Definimos em  $E$  a conexão  $\nabla^E$ , induzida por  $\nabla$ , e descrita para todo  $X \in TM$  e todo campo  $Y$  em  $E$  pela expressão

$$\nabla_X^E Y = \pi \nabla_X Y.$$

**Lema 3.** *Seja  $\nabla$  uma conexão compatível com a métrica  $g$ . Então  $\nabla^E$  é compatível com a métrica  $g_E$ , isto é, para todo  $Y$  em  $TM$  e campos  $X$  e  $Z$  em  $E$ , vale que*

$$Y g_E(X, Z) = g_E(\nabla_Y^E X, Z) + g_E(X, \nabla_Y^E Z).$$

Quando  $\nabla$  for a conexão de Levi-Civita em  $M$ ,  $\nabla^E$  se restringe naturalmente a conexão de Levi-Civita associada à métrica  $g_E$  sobre cada  $L \in F$ .

**Demonstração:** Claramente  $\nabla^E$  é uma conexão em  $E$  pois  $\nabla$  é conexão em  $M$ . Seja  $X \in TM$  e  $Y, Z$  campos em  $E$ . Resulta

$$\begin{aligned} X g_E(Y, Z) &= X g(Y, Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\pi \nabla_X Y, Z) + g(Y, \pi \nabla_X Z) \\ &= g_E(\nabla_X^E Y, Z) + g_E(Y, \nabla_X^E Z). \end{aligned}$$

Logo, a conexão é compatível com a métrica. Se  $X, Y, Z$  são campos vetoriais em  $E$ , segue que

$$\nabla_X^E Y - \nabla_Y^E X = \pi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \pi[X, Y] = [X, Y].$$

Conseqüentemente, quando nos restringimos a uma folha de  $F$ , a conexão induzida é a conexão de Levi-Civita. ■

**Observação:** Quando  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita,  $\nabla^E|_E : E \times E \rightarrow E$  depende somente da parte  $g_E$  da métrica. De agora em diante, não faremos distinção entre  $g$  e  $g_E$  a menos que seja necessário.

**Definição 1.** *Dizemos que uma curva  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  é uma geodésica folheada se  $\dot{\gamma}_t \in E_{\gamma_t}$  e  $\nabla_{\dot{\gamma}_t}^E \dot{\gamma}_t = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .*

**Lema 4.** *Para cada ponto  $m \in M$  e vetor  $v \in T_m M$ , existem  $\epsilon > 0$  e uma única geodésica folheada  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $\gamma_0 = m$  e  $\dot{\gamma}_0 = v$*

**Demonstração:** Seja  $(U, (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q))$  uma carta folheada tal que  $m \in U$ . Se  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffels de  $\nabla^E$  em  $U$ , então a geodésica  $\gamma$  deve ser a solução do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \gamma_t^k + \Gamma_{ij}^k \frac{d}{dt} \gamma_t^j \frac{d}{dt} \gamma_t^i &= 0, \quad k = 1, \dots, p, \\ \frac{d}{dt} \gamma_t^k &= 0, \quad k = p+1, \dots, n \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_t^k &= v^k, \quad k = 1, \dots, n \\ \gamma_0 &= m. \end{aligned}$$

Logo, o resultado segue da aplicação dos teoremas de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias. ■

**Observação:** As geodésicas folheadas são geodésicas das folhas com respeito à métrica induzida.

Como no caso das geodésicas em variedades, as geodésicas folheadas satisfazem a propriedade de homogeneidade, isto é, se  $\gamma(t, m, av)$  é a geodésica que satisfaz  $\gamma(0, m, av) = m$  e  $\dot{\gamma}(0, m, av) = av$  com  $a \in \mathbb{R}$  e  $v \in E$ , então  $\gamma(t, m, av) = \gamma(at, m, v)$ . Isto nos permite definir a exponencial folheada como a aplicação  $\exp^F : U \subset E \rightarrow M$  dada por

$$\exp^F(m, v) = \gamma(1, m, v).$$

No trabalho de Lucy Garnett [17], o operador laplaciano em folheações é descrito em forma geral como o operador  $\Delta_E$  tal que

$$\Delta_E f(x) = \Delta_{L_x} f(x),$$

onde  $\Delta_{L_x}$  é o laplaciano da folha  $L_x \in F$  que passa por  $x$ . Nós propomos uma nova definição que permite uma expressão dos operadores na forma de Hormander e que está baseada puramente na involutibilidade do subfibrado  $E$ , pois a definição anterior, no nosso contexto, não é conveniente.

**Definição 2.** *Sejam  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\nabla$  a conexão riemanniana,  $X, Y$  campos vetoriais em  $E$  e  $\pi : TM \rightarrow E$  a projeção ortogonal. Definimos os seguintes operadores em  $E$*

- a)  $\text{grad}_E f = \pi \nabla f$ ,
- b)  $\text{div}_E Y = \text{Tr}_E g(\nabla^E Y, \cdot)$ , onde  $\text{Tr}_E$  denota o traço em  $E$ ,
- c)  $\text{Hess}_E(f)(X, Y) = XY(f) - \nabla_X^E Y f$ ,
- d)  $\Delta_E f = \text{div}_E(\text{grad}_E f) = \text{Tr}_E \text{Hess}_E f$ .

Seja  $\{X_1, \dots, X_p\}$  uma base ortonormal de  $E$ . É simples verificar que podemos, localmente, descrever estes operadores pelas seguintes expressões:

- a)  $\text{grad}_E f = \sum_{i=1}^p (X_i f) X_i,$
- b)  $\text{div}_E Y = \sum_{i=1}^p (g(\nabla_{X_i}^E Y, X_i)),$
- c)  $\Delta_E f = \sum_{i=1}^p \text{Hess}_E f(X_i, X_i).$

### Observações

- 1- Na definição do operador  $\text{Hess}_E$ , a conexão  $\nabla$  pode ser qualquer conexão sem torsão.
- 2- Para uma conexão sem torsão  $\nabla$ , se  $\text{Hess}_M$  denota o operador hessiano em  $M$  induzido por  $\nabla$ , temos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \text{Hess}_M f(X, Y) &= XYf - \nabla_X Yf \\ &= XYf - \nabla_X^E Yf + \nabla_X^E Yf - \nabla_X Yf \\ &= \text{Hess}_E f(X, Y) - W(X, Y)f, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $W : E \times E \rightarrow E^\perp$  é a segunda forma fundamental da folheação definida por

$$W(X, Y) = \nabla_X Y - \pi \nabla_X Y.$$

Desta fórmula segue, para o caso de  $\nabla$  ser a conexão riemanniana, que

$$\Delta_E f = \text{Tr}_E \text{Hess}_M f + Kf, \tag{4.2}$$

com  $K$  o vetor curvatura media definido por

$$K = \text{Tr}_E W.$$

- 3- É claro que quando  $\nabla$  é a conexão riemanniana temos, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, que

$$\begin{aligned} (\Delta_E f)^2 &= \left| \sum_{i=1}^p g(\nabla_{X_i}^E \text{grad}_E f, X_i) \right|^2 \\ &\leq p \sum_{i=1}^p g(\nabla_{X_i}^E \text{grad}_E f, \nabla_{X_i}^E \text{grad}_E f) := p \|\text{Hess}_E f\|^2. \end{aligned}$$

- 4- Por causa do Lema 3, quando nos restringimos a uma folha  $L \in F$ , os operadores  $\text{grad}_E$ ,  $\text{div}_E$  e conseqüentemente  $\Delta_E$  são o gradiente, o divergente e o laplaciano em  $L$  com respeito à métrica restrita.

A seguir, estudamos algumas propriedades destes operadores. Em particular examinamos a relativa ao produto de funções. Veremos que o comportamento do hessiano e do laplaciano folheados é similar aos operadores hessiano e laplaciano canônicos.

**Lema 5.** *Sejam  $f, h$  funções em  $C^\infty(M)$ . Então*

$$\text{Hess}_E(fh) = h\text{Hess}_E f + f\text{Hess}_E h + dh|_E \otimes df|_E + df|_E \otimes dh|_E.$$

**Demonstração:** Sejam  $f, h$  funções em  $C^\infty(M)$  e  $X, Y$  dois campos vetoriais em  $E$ . Temos

$$\begin{aligned} \text{Hess}_E(fh)(X, Y) &= \text{Hess}(fh)(X, Y) + W(Y)X(fh) \\ &= h\text{Hess}f(X, Y) + f\text{Hess}h(X, Y) + XhYf + 2XfYh \\ &\quad + hW(Y)Xf + fW(Y)Xh \\ &= h\text{Hess}_E f(X, Y) + h\text{Hess}_E h(X, Y) \\ &\quad + dh|_E \otimes df|_E(X, Y) + df|_E \otimes dh|_E(X, Y). \end{aligned}$$

■

**Corolário 1.** *Sejam  $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $C^2$  na direção da folha. A seguinte identidade vale*

$$\Delta_E(fh) = f\Delta_E h + h\Delta_E f + 2g(\text{grad}_E f, \text{grad}_E h).$$

**Demonstração:** Somente precisamos provar que  $\text{Tr}_E(df|_E \otimes dh|_E) = g(\text{grad}_E f, \text{grad}_E h)$ . Seja  $\{X_1, \dots, X_p\}$  uma base ortonormal de  $E$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_E(df|_E \otimes dh|_E) &= \sum_{i=1}^p X_i h X_i f g \\ &= \sum_i^p X_i f \sum_j^p g(X_i, X_j) X_j h \\ &= \sum_{i,j}^p X_i h X_j f g(X_i, X_j) = g(\text{grad}_E f, \text{grad}_E h). \end{aligned}$$

■

Rumler, em [37], introduziu uma classe característica para folheações da seguinte forma: Se  $(M, F, g)$  é uma variedade riemanniana folheada com  $F$  orientada define-se a forma característica  $\chi$  de  $F$  como a  $p$ -forma que, ao ser avaliada em um conjunto arbitrário  $Y_1, \dots, Y_p \in TM$ , é dada localmente por

$$\chi(Y_1, \dots, Y_p) = \det[g(Y_i, E_j)_{ij}],$$

onde  $\{E_1, \dots, E_p\}$  é uma base ortonormal de  $E$ . Esta  $p$ -forma diferencial, quando restrita a uma folha, é a forma volume da mesma. O seguinte Lema é interessante, pois permitirá usar o teorema de Stokes nas folheações.

**Lema 6.** *Seja  $Y$  um campo vetorial em  $E$ . Então*

$$\operatorname{div}_E(Y)\chi = L_Y \chi,$$

onde  $L_Y$  é a derivada de Lie.

**Demonstração:** Sejam  $E_1, \dots, E_p$  campos vetoriais em  $E$  constituindo uma base ortonormal de  $E$ . Então

$$\begin{aligned} L_Y \chi(E_1, \dots, E_p) &= Y(\chi(E_1, \dots, E_p)) - \sum_{j=1}^p \chi(E_1, \dots, L_Y E_j, \dots, E_p) \\ &= 0 + \sum_{j=1}^p \chi(E_1, \dots, \nabla_{E_j}^E Y, \dots, E_p) \\ &= \sum_{j=1}^p g(\nabla_{E_j}^E Y, E_j) \chi(E_1, \dots, E_p) = \operatorname{div}_E(Y) \chi(E_1, \dots, E_p). \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, usamos que  $g_E(L_Y E_j, E_j) = -g_E(\nabla_{E_j}^E Y, E_j)$ . ■

Se  $F$  for transversalmente orientada, podemos definir (ver o livro de Tondeur [38]) uma forma transversal  $\chi^\perp$ . Localmente, esta forma pode ser descrita por meio de uma base ortonormal  $\{E_{p+1}, \dots, E_n\}$  de  $E^\perp$  como a forma que, avaliada em um conjunto arbitrário  $Y_1, \dots, Y_{n-p} \in TM$ , é dada por

$$\chi^\perp(Y_1, \dots, Y_p) = \det[g(Y_i, E_j)_{ij}].$$

Nós a achamos interessante pela seguinte propriedade.

**Lema 7.** *A forma  $\chi^\perp$  satisfaz*

$$d\chi^\perp = -k^\perp \wedge \chi^\perp, \tag{4.3}$$

onde  $k^\perp = g(\kappa, \cdot)$  e

$$\kappa = \pi \left( \sum_{j=p+1}^n \nabla_{E_j} E^j \right).$$

**Demonstração:** Sejam  $\{E_{p+1}, \dots, E_n\}$  uma base ortonormal de  $E^\perp$  e  $Y \in TM$ . Observamos que  $d\chi^\perp \in E^* \wedge (\wedge_q(E^\perp)^*)$ . Caso  $Y \in E^\perp$ , obviamente temos que  $d\chi^\perp(Y, E_{p+1}, \dots, E_n) = 0$ . Por outro lado, se  $Y \in E$ , então

$$i_Y \chi^\perp = 0.$$

Logo, da fórmula de Cartan, constatamos

$$\begin{aligned} d\chi^\perp(Y, E_{p+1}, \dots, E_n) &= L_Y \chi^\perp(E_{p+1}, \dots, E_n) \\ &= Y(\chi^\perp(E_{p+1}, \dots, E_n)) - \sum_{j=p+1}^n \chi^\perp(E_{p+1}, \dots, L_Y E_j, \dots, E_n) \\ &= 0 - \sum_{j=p+1}^n g([Y, E_j], E_j) = -g \left( Y, \sum_{j=p+1}^n \nabla_{E_j} E_j \right), \end{aligned}$$

tendo sido utilizado que

$$g([Y, E_j], E_j) = \frac{1}{2}Yg(E_j, E_j) - g(\nabla_{E_j}Y, E_j) = g(Y, \nabla_{E_j}E_j).$$

Assim, para todo  $Y \in TM$ , temos

$$d\chi^\perp(Y, E_{p+1}, \dots, E_n) = \sum_{j=p+1}^n g(Y, \pi\nabla_{E_j}E_j) = g(Y, \kappa).$$

O resultado segue por linearidade. ■

**Observação:** Se  $(M, F, g)$  é uma variedade riemanniana folheada com  $F$  orientada e transversalmente orientada, então  $\mu_g = \chi \wedge \chi^\perp$  (ver Tondeur [38, pg. 73]).

**Observação:** O vetor  $\kappa$  pode, alternativamente, ser definido como o campo vetorial em  $E$  que satisfaz para todo  $X \in E$

$$g(\kappa, X) = \operatorname{div}_E(X) - \operatorname{div}(X),$$

ou como o traço em  $E^\perp$  da forma bilinear  $b$  com valores em  $E$ , definida por

$$b(V, W) = \pi\nabla_VW.$$

Observamos que, quando a variedade for transversalmente orientada, todas definições coincidem. A forma  $k^\perp$  desempenha um papel importante quando a folheação é de codimensão 1 como mostra o seguinte teorema<sup>1</sup>.

**Teorema 17.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada  $F$  de codimensão 1 que transversalmente é  $C^2$  e folhas  $C^\infty$ . Assuma que o fibrado normal  $E^\perp$  é orientado. Então  $[k^\perp \wedge (dk^\perp)^q] \in H_{dR}^{2q+1}(M)$  é a classe de Godbillon-Vey.*

**Demonstração:** A orientação transversal de  $M$  e o teorema de Frobenius garantem a existência de uma orientação  $\omega$  e de uma 1-forma  $\alpha$  tal que  $d\omega = \alpha \wedge \omega$ . Logo  $\alpha \wedge d\alpha$  é a classe de Godbillon-Vey. Por outro lado, se  $F$  é transversalmente orientada, então temos que  $\chi^\perp$  está bem definida e  $\chi^\perp|_E = 0$ . Conseqüentemente, existe uma função  $f$  tal que  $\omega = f\chi^\perp$ . Então

$$\alpha \wedge \omega = d\omega = d(f\chi^\perp) = (d\ln(f) - k^\perp) \wedge \omega,$$

e  $\alpha$  e  $k^\perp$  definem a mesma classe de Godbillon-Vey. ■

Seja  $E^\perp$  o subfibrado de  $TM$  ortogonal a  $E$ . No espírito do trabalho de Bergery e Bourguignon [3], provaremos uma decomposição para o laplaciano na variedade em termos

---

<sup>1</sup>Este Teorema é um clássico (ver o artigo de Reinhart e Wood [36]), mas foi obtido em forma independente pelo autor em um intento de relacionar a classe de Godbillon-Vey e as medidas harmônicas por meio do vetor  $\kappa$ .

de outros operadores. Sejam  $p \in M$ ,  $(U, \phi)$  uma carta folheada sobre  $p$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Seja  $X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q$  uma base ortonormal de  $TU$  adaptada, ou seja,  $X_1, \dots, X_p \in E$  e  $Y_1, \dots, Y_q \in E^\perp$ . Por definição temos que

$$\Delta_M f(p) = \Delta_E f(p) - Kf(p) + \left( \sum_{j=1}^q Y_j^2 - \nabla_{Y_j} Y_j \right) f(p).$$

Definimos o operador  $A$  como sendo

$$A = -K + \sum_{j=1}^q Y_j^2 - \nabla_{Y_j} Y_j,$$

onde claramente  $\nabla$  é a conexão riemanniana em  $M$ . No seguinte lema, vamos relacionar o operador  $A$ , ou parte dele, com o operador  $\Delta_b$  (chamado de *laplaciano básico* no livro de Tondeur [38]) dado por

$$\Delta_b f = *((d - k\wedge) * (df \wedge \chi) \wedge \chi),$$

onde  $k = g(K, \cdot)$  e  $*$  denota o operador de Hodge.

**Lema 8.** *A seguinte decomposição vale*

$$\Delta_M = (\Delta_E - \kappa) + \Delta_b.$$

**Demonstração:** Por definição  $i_Z \chi = 0$  para todo  $Z \in E^\perp$ . Definimos, neste caso, a classe característica transversal como o dual de Hodge

$$\chi^\perp(V_1, \dots, V_p) = (*\chi)(V_1, \dots, V_p).$$

Na verdade, como a variedade é orientada, esta definição de  $\chi^\perp$  é equivalente à dada anteriormente. O operador de Hodge, porém torna mais fáceis os aspectos computacionais da demonstração. Observamos que  $i_Z \chi^\perp = 0$  para todo  $Z \in E$  e que  $\mu_g = \chi^\perp \wedge \chi$ . Portanto  $i_{\nabla f} \chi^\perp = *(df \wedge \chi)$  e

$$di_{\nabla f} \chi^\perp = L_{\pi^\perp \nabla f} \chi^\perp - i_{\pi^\perp \nabla f} d\chi_F,$$

onde  $\pi^\perp : TM \rightarrow E^\perp$  é a projeção ortogonal. Pela fórmula (4.3) temos que

$$\begin{aligned} i_{\pi^\perp \nabla f} d\chi^\perp &= k^\perp \wedge i_{\pi^\perp \nabla f} \chi^\perp \\ &= k^\perp \wedge i_{\nabla f} \chi^\perp. \end{aligned}$$

Assim, por um lado, vale

$$\begin{aligned} *(df \wedge \chi) \wedge \chi &= (L_{\pi^\perp \nabla f} \chi^\perp) \wedge \chi - k^\perp \wedge i_{\nabla f} \chi^\perp \wedge \chi \\ &= L_{\pi^\perp \nabla f} \mu_g - \chi^\perp \wedge (L_{\pi^\perp \nabla f} \chi) \\ &= L_{\pi^\perp \nabla f} \mu_g + K(f) \mu_g, \end{aligned}$$

observe que no último passo acima usamos a fórmula de Rumler (ver [38, pg. 66])

$$L_Z\chi|_E + k(Z)\chi|_E = 0, \quad \forall Z \in E^\perp.$$

Por outro lado, ocorre

$$k \wedge *(df \wedge \chi) = k \wedge i_{\nabla f}\chi^\perp = K(f)\chi^\perp.$$

Logo,  $\Delta_b f = *L_{\pi^\perp \nabla f} \mu_g = \operatorname{div}(\pi^\perp \nabla f)$ . No entanto

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\pi^\perp \nabla f) &= \sum_{j=1}^p g(\nabla_{X_j} \pi^\perp \nabla f, X_j) + \sum_{i=1}^q g(\nabla_{Y_j} \pi^\perp \nabla f, Y_j) \\ &= -Kf + \left( \sum_{i=1}^q Y_j^2 - \nabla_{Y_j} Y_j \right) f + \kappa f, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

A conexão  $\nabla^E$  é uma conexão no fibrado vetorial  $E$  e, portanto, tem associada um tensor curvatura  $R^E$  definido por

$$R^E(V, U) = \nabla_U^E \nabla_V^E - \nabla_V^E \nabla_U^E - \nabla_{[U, V]}^E. \quad (4.4)$$

Uma conseqüência do Lema 3 é que este tensor, quando restrito a uma folha, é o tensor curvatura da folha. Com isso em mente, definimos o tensor de Ricci folheado  $\operatorname{Ric}^E(u, v)$  como o traço em  $E$  do operador  $X \rightarrow R^E(u, X)v$ .

Estes operadores permitem obter uma versão da fórmula de Bochner-Weitzenböck para folheações.

**Teorema 18.** *Para toda  $f \in C^\infty(M)$ , a seguinte igualdade vale*

$$\frac{1}{2} \Delta_E (||\operatorname{grad}_E f||^2) = g(\operatorname{grad}_E \Delta_E f, \operatorname{grad}_E f) + ||\operatorname{Hess}_E f||^2 + \operatorname{Ric}^E(\operatorname{grad}_E f, \operatorname{grad}_E f).$$

**Demonstração:** Sejam  $Y$  e  $Z$  campos em  $M$ . Em particular se  $Y, Z$  estão em  $E$ , então

$$\begin{aligned} YZf &= g(\nabla_Y^E \operatorname{grad}_E f, Z) + g(\operatorname{grad}_E f, \nabla_Y^E Z), \quad e \\ ZYf &= g(\nabla_Z^E \operatorname{grad}_E f, Y) + g(\operatorname{grad}_E f, \nabla_Z^E Y), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} [Y, Z]f &= g(\nabla_Y^E \operatorname{grad}_E f, Z) + g(\operatorname{grad}_E f, \nabla_Y^E Z) - g(\nabla_Z^E \operatorname{grad}_E f, Y) - g(\operatorname{grad}_E f, \nabla_Z^E Y) \\ &= g(\nabla_Y^E \operatorname{grad}_E f, Z) - g(\nabla_Z^E \operatorname{grad}_E f, Y) + [Y, Z]f. \end{aligned}$$

Em outros termos,

$$g(\nabla_Y^E \operatorname{grad}_E f, Z) = g(\nabla_Z^E \operatorname{grad}_E f, Y).$$

Desta última expressão temos que, para todo  $X$  em  $E$ , a seguinte identidade vale

$$\frac{1}{2}Xg(\text{grad}_E f, \text{grad}_E f) = g(\nabla_{\text{grad}_E f}^E \text{grad}_E f, X).$$

Portanto,

$$\text{grad}_E \frac{1}{2}g(\text{grad}_E f, \text{grad}_E f) = \nabla_{\text{grad}_E f}^E \text{grad}_E f.$$

Se tomamos uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_p\}$  de  $E$ , temos, então, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_E \|\text{grad}_E f\|^2 &= \text{div}_E(\nabla_{\text{grad}_E f}^E \text{grad}_E f) \\ &= \sum_{j=1}^p g(\nabla_{E_j}^E \nabla_{\text{grad}_E f}^E \text{grad}_E f, E_j) \\ &= \text{Ric}^E(\text{grad}_E f, \text{grad}_E f) + \sum_{j=1}^p g(\nabla_{\text{grad}_E f}^E \nabla_{E_j}^E \text{grad}_E f, E_j) \\ &\quad + g(\nabla_{[\text{grad}_E f, E_j]}^E \text{grad}_E f, E_j) \\ &= \text{Ric}^E(\text{grad}_E f, \text{grad}_E f) + \sum_{j=1}^p \text{grad}_E f g(\nabla_{E_j}^E \text{grad}_E f, E_j) \\ &\quad + g(\nabla_{E_j}^E \text{grad}_E f, \nabla_{E_j}^E \text{grad}_E f) \\ &= \text{Ric}^E(\text{grad}_E f, \text{grad}_E f) + g(\text{grad}_E \Delta_E f, \text{grad}_E f) + \|\text{Hess}_E f\|^2. \end{aligned}$$

■

---

## 4.2 Aplicações Harmônicas Folheadas

---

Continuamos agora com o estudo de aplicações entre variedade folheadas. Em particular, estudaremos aquelas aplicações que preservam as folheações. O objetivo principal desta seção é mostrar mais uma aplicação do formalismo introduzido acima detalhando as contas do artigo de Gromov [20] desde nosso ponto de vista.

**Definição 3.** *Sejam  $(M, F, g)$  e  $(N, F', h)$  duas variedades riemannianas folheadas e seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que  $\phi$  é uma aplicação folheada se, e somente se,  $\phi_* E \subseteq E'$ , onde  $E$  e  $E'$  são os subfibrados integráveis que caracterizam  $F$  e  $F'$ , respectivamente.*

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades riemannianas com conexões sem torsão  $\nabla^M$  e  $\nabla^N$ . Definimos a segunda forma fundamental de  $\phi$  colocando

$$\beta_\phi(X, Y) = \nabla_{\phi_* Y}^N \phi_* X - \phi_* \nabla_Y^M X,$$

para todo  $X, Y \in TM$ . No contexto das variedades folheadas, é útil considerar a segunda forma fundamental  $\tilde{\beta}_\phi$  de uma aplicação folheada  $\phi : M \rightarrow N$  em cada folha. Mais precisamente, se  $\phi|_L : L \rightarrow L'$  para  $L \in F$  e  $L' \in K$ , é útil considerar a segunda forma fundamental

de  $\phi|_L$ . Nesse sentido, definimos  $\tilde{\beta}_\phi$  globalmente em  $M$  por

$$\tilde{\beta}_\phi(X, Y) = \nabla_{\phi_* Y}^{E'} \phi_* X - \phi_* \nabla_Y^E X,$$

para todo  $X, Y \in E$ .

Quando  $\nabla^M$  e  $\nabla^N$  são as conexões de Levi-Civita de  $M$  e  $N$  respectivamente, o traço em  $E$  de  $\tilde{\beta}_\phi$  é chamado de tensão folheada  $\tilde{\tau}_\phi = \text{Tr}_E \tilde{\beta}_\phi$ . Dizemos que uma aplicação  $\phi : (M, F) \rightarrow (N, F')$  é harmônica folheada se  $\tilde{\tau}_\phi = 0$ . O estudo de aplicações harmônicas folheadas aqui considerado é o feito por Gromov em [20]. Nesta seção, nosso objetivo é utilizar o ponto de vista proposto na presente tese para detalhar em termos computacionais o estudo de Gromov.

Sejam  $(M, F, g)$  e  $(N, F', h)$  duas variedades riemannianas folheadas, sem bordo, orientadas e transversalmente orientadas. Considere em  $M$  e  $N$  conexões sem torsão  $\nabla^M, \nabla^N$  e as conexões induzidas  $\nabla^E, \nabla^{E'}$ . Seja  $\phi_* E \subset E'$  o fibrado "pull-back" sobre  $M$  e a conexão "pull-back"  $\nabla^\phi$  dada por

$$\nabla_X^\phi \phi_* V = \nabla_{\phi_* X}^{E'} \phi_* V,$$

para todo  $X$  em  $TM$  e, em particular, para todo  $X \in E$ . Defina também a conexão canônica  $\hat{\nabla}$  no fibrado  $E^* \otimes \phi_* E$  por

$$\hat{\nabla}_X(\omega \otimes V) = (\nabla_X^E \omega \otimes V) + (\omega \otimes \nabla_X^\phi V).$$

**Definição 4.** *Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação folheada. Uma deformação folheada é uma aplicação diferenciável  $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow N$  tal que  $\phi(0, \cdot) = \phi$  e, para cada ponto  $x$  em  $M$  fixo,  $\dot{\phi}_t(x) \in E'$ .*

Observe que, se  $\phi_t$  é uma deformação folheada e  $V$  é uma campo vetorial em  $E$ , em toda carta folheada  $(x_\alpha, y_\alpha)$  sobre  $\phi(x)$  temos que  $y^\alpha(\phi_t) = y^\alpha(\phi_0)$ . Assim

$$\phi_{t*} V(y_\alpha) = V(\phi_t^\alpha) = V(\phi^\alpha) = 0,$$

pois  $V$  está em  $E$ . Então  $\phi_{t*} V \in E'$ .

**Exemplo:** Seja  $V$  um campo de  $E'$  ao longo de uma aplicação  $\phi_0 : M \rightarrow N$ , isto é, se  $\pi' : E' \rightarrow N$  é a projeção, então  $\pi'_N V = \phi_0$ . A aplicação  $\phi : M \times [0, T] \rightarrow N$  definida por

$$\phi(m, t) = \exp^{F'}(t V(\phi_0(m)))$$

é uma deformação folheada de  $\phi_0$ . ■

Seja  $\phi$  uma aplicação folheada. Então  $\phi_* \in E^* \otimes \phi_* E$  e

$$\hat{\nabla}_{X_j} \phi_*(X_i) = \nabla_{\phi_* X_j}^{E'} \phi_* X_i - \phi_* \nabla_{X_j}^E X_i = \tilde{\beta}_\phi(X_i, X_j).$$

Definimos, neste contexto, o operador energia como sendo

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{2} \int_M (\text{Tr}_E \phi^* h) \mu,$$

onde  $\mu = \chi \times \nu$  para  $\nu$  uma medida transversal e invariante por holonomia.

**Proposição 3.** *Sejam  $(M, F, g)$  e  $(N, F', h)$  duas variedades riemannianas folheadas, sem bordo, orientadas e transversalmente orientadas. Assuma  $M$  compacta. Consideremos uma aplicação folheada  $\phi_0 : (M, F, g) \rightarrow (N, F', h)$  e uma deformação folheada  $\phi_t$  de  $\phi_0$ , então*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\phi_t) = \nabla_{\partial_t\phi_t}\mathcal{E}(\phi_t) = - \int_M h(\tilde{\tau}_{\phi_t}, \dot{\phi}_t) \mu.$$

**Demonstração:** Consideramos a deformação folheada  $\phi_t$  de  $\phi_0$  e escrevemos

$$\Phi(t, x) = \phi_t(x) : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow N.$$

Sejam  $\{X_1, \dots, X_p\}$  uma base ortonormal de  $E$  e  $\pi' : TN \rightarrow E'$  a projeção ortogonal sobre o subfibrado integrável que define  $F'$ . Observamos que  $\Phi_* \in (\mathbb{R} \times TM^*) \otimes TN$  pode ser restringida a  $\Phi_* \in (\mathbb{R} \times E^*) \otimes E'$ . Definimos em  $\Phi_*(\mathbb{R} \times E) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times M$  a conexão "pull-back",  $\nabla^\Phi$ , induzida por  $\Phi$  e definimos sobre  $\mathbb{R} \times E \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times M$  a conexão produto padrão,  $\bar{\nabla}$ . Com estas duas conexões obtemos, por definição, que

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{(\partial_t, X_j)}\Phi_*(\partial_t, X_i) &= \nabla_{\Phi_*(\partial_t, X_j)}^{E'}\phi_*(\partial_t, X_i) - \Phi_*\bar{\nabla}_{(\partial_t, X_j)}(\partial_t, X_i) \\ &= \nabla_{\Phi_*(\partial_t, X_j)}^{E'}\phi_*(\partial_t, X_i) - \Phi_*(0, \nabla_{X_j}^E X_i). \end{aligned}$$

Uma vez que a conexão em  $N$  é sem torsão e  $[(\partial_t, 0), (0, X_i)] = 0$  para todo  $0 \leq i \leq p$  resulta

$$\begin{aligned} \nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi\Phi_*(0, X_i) &= \nabla_{\Phi_*(\partial_t, 0)}^{E'}\Phi_*(0, X_i) \\ &= \pi'\nabla_{\Phi_*(\partial_t, 0)}^N\Phi_*(0, X_i) \\ &= \pi'\nabla_{\Phi_*(0, X_i)}^N\Phi_*(\partial_t, 0) + \pi'\Phi_*[(\partial_t, 0), (0, X_i)] \\ &= \nabla_{\Phi_*(0, X_i)}^{E'}\Phi_*(\partial_t, 0), \end{aligned} \tag{4.5}$$

tendo sido utilizado que  $\phi_t$  é uma deformação folheada. De forma similar, podemos ver que

$$\begin{aligned} \nabla_{(0, X_j)}^\Phi\Phi_*(0, X_i) &= \nabla_{\Phi_*(0, X_j)}^{E'}\Phi_*(0, X_i) \\ &= \hat{\nabla}_{(0, X_j)}\Phi_*(0, X_i) + \Phi_*(0, \nabla^{E} X_j X_i). \end{aligned}$$

Por outro lado, a métrica  $h$  define uma métrica no fibrado  $\phi_*E$  de forma canônica. Considerando  $\Phi_* \in (\mathbb{R} \times TM^*) \otimes TN$  e utilizando o seguinte resultado (ver livro de Urakawa [39, pag. 128])

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^p h(\Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) = \sum_{i=1}^p h(\nabla_{\Phi_*(\partial_t, 0)}^N \Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)),$$

temos, pelo fato da  $\phi_t$  ser uma deformação folheada, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^p h(\Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) &= \sum_{i=1}^p h(\nabla_{\Phi_*(\partial_t, 0)}^{E'} \Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi \Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) \end{aligned}$$

Por outro lado, é possível ver que (ver livro de Urakawa [39, pag. 127])

$$(0, X_i)h(\Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) = h(\nabla_{\Phi_*(0, X_i)}^N \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) \\ + h(\Phi_*(\partial_t, 0), \nabla_{\Phi_*(0, X_i)}^N \Phi_*(0, X_i))$$

Assim, utilizando que  $\phi_t$  é deformação folheada, vemos que

$$(0, X_i)h(\Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) = h(\nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) \\ + h(\Phi_*(\partial_t, 0), \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(0, X_i))$$

Definimos  $Z_t \in E$  pela equação

$$g(Z_t, X) = h(\Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X)),$$

para um campo  $X \in E$  arbitrário. Utilizando as identidades obtidas acima, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^p h(\Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) &= \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi \Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^p (0, X_i)h(\Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) \\ &\quad - h(\Phi_*(\partial_t, 0), \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(0, X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^p (0, X_i)h(\Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) \\ &\quad - h(\Phi_*(\partial_t, 0), d\Phi(0, \nabla_{X_j}^E X_i)) \\ &\quad - h(\Phi_*(\partial_t, 0), \hat{\nabla}_{(0, X_i)} \Phi_*(0, X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^p X_i g(Z_t, X_i) - g(Z_t, \nabla_{X_i}^E X_i) \\ &\quad - h(\Phi_*(\partial_t, 0), \hat{\nabla}_{(0, X_i)} \Phi_*(0, X_i)) \\ &= \operatorname{div}_E(Z_t) - h\left(\dot{\phi}_t, \sum_{i=1}^p \tilde{\beta}_{\phi_t}(X_i, X_i)\right). \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes  $\int_M \operatorname{div}_E(X)\mu = 0$ . Já por definição,  $\tilde{\tau}_{\phi_t} = \sum_{i=1}^p \tilde{\beta}_{\phi_t}(X_i, X_i)$ . ■

**Proposição 4.** *Sejam  $(M, F, g)$  e  $(N, F', h)$  duas variedades folheadas sem bordo, que são orientáveis e transversalmente orientáveis. Assuma  $M$  compacta. Consideremos  $\phi : (M, F, g) \rightarrow (N, F', h)$  um aplicação folheada e uma deformação folheada  $\phi_{t,s}$  de  $\phi$ , então*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dsdt} \mathcal{E}(\phi_{s,t}) &= \int_M h\left(\nabla_{\phi_{s,t*} X_i}^{E'} \frac{d\phi_{s,t}}{dt}, \nabla_{\phi_{s,t*} X_i}^{E'} \frac{d\phi_{s,t}}{ds}\right) \mu \\ &\quad - \int_M h\left(R^{E'}\left(\frac{d\phi_{s,t}}{dt}, \phi_{s,t*} X_i\right) \frac{d\phi_{s,t}}{ds}, \phi_{s,t*} X_i\right) \mu - \int_M h\left(\nabla_{\phi_{s,t*} \partial_s}^{E'} \frac{d}{dt} \phi_{s,t}, \tilde{\tau}_{\phi_{s,t}}\right) \mu, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\tau}_{\phi_{s,t}}$  é a tensão folheada de  $\phi_{s,t}$ .

**Demonstração:** Consideremos uma deformação folheada  $\phi_{t,s}$  de  $\phi$  e escrevamos  $\Phi(t, s, x) = \phi_{t,s}(x) : (-\epsilon, \epsilon)^2 \times M \rightarrow N$ . Escolhemos uma base ortonormal  $\{X_1, \dots, X_p\}$  de  $E$ . Como anteriormente observamos que  $\Phi_* \in (\mathbb{R} \times E^*) \otimes E'$ . Consideremos em  $(-\epsilon, \epsilon) \times M$  a conexão "pull-back"  $\nabla^\Phi$  induzida por  $\Phi$ . Utilizando (4.5), observamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^p h(\Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) &= \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi \Phi_*(0, X_i), \nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi \Phi_*(0, X_i)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi \Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_s, 0)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi \Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \nabla_{(\partial_t, 0)}^\Phi \Phi_*(0, X_i) &= \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0) \\ &= R^\Phi((0, X_i), (\partial_s, 0))\Phi_*(\partial_t, 0) + \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde

$$\begin{aligned} R^\Phi((0, X_i), (\partial_s, 0))\Phi_*(\partial_t, 0) &= \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0) - \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0) \\ &\quad - \nabla_{[(\partial_s, 0), (0, X_i)]}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0) \\ &= \nabla_{\Phi_*(\partial_s, 0)}^{E'} \nabla_{\Phi_*(0, X_i)}^{E'} \Phi_*(\partial_t, 0) - \nabla_{\Phi_*(0, X_i)}^{E'} \nabla_{\Phi_*(\partial_s, 0)}^{E'} \Phi_*(\partial_t, 0) \\ &= R^{E'}(\Phi_*(0, X_i), \Phi_*(\partial_s, 0))\Phi_*(\partial_t, 0) \\ &= -R^{E'}(\Phi_*(\partial_s, 0), \Phi_*(0, X_i))\Phi_*(\partial_t, 0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Definindo  $Z_{t,s} \in E$  pela relação

$$g(Z_{t,s}, X) = h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X)),$$

segue

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_E(Z_{s,t}) &= h(\nabla_{(0, X_i)}^\Phi \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) + h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(0, X_i)) \\ &\quad - h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(\nabla_{(0, X_i)}^E(0, X_i))) \\ &= h(\nabla_{(0, X_i)}^\Phi \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) + h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \hat{\nabla} \Phi_*((0, X_i), (0, X_i))) \\ &= h(\nabla_{(0, X_i)}^\Phi \nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) + h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \tilde{\tau}_\Phi). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Inserindo no segundo termo da direita da equação (4.6) a equação (4.7), aplicando então ao resultado as identidades que aparecem nas equações (4.8) e (4.9) e integrando finalmente com

respeito à  $\mu$  constatamos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dsdt} \mathcal{E}(\phi_{s,t}) &= \int_M \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^p h(\Phi_*(0, X_i), \Phi_*(0, X_i)) \mu \\ &= \int_M \sum_{i=1}^p h(\nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \nabla_{(0, X_i)}^\Phi \Phi_*(\partial_s, 0)) \mu - \int_M h(\nabla_{(\partial_s, 0)}^\Phi \Phi_*(\partial_t, 0), \tilde{\tau}_\Phi) \mu \\ &\quad + \int_M \operatorname{div}_E(Z_{s,t}) \mu - \int_M h(R^{E'}(\Phi_*(\partial_s, 0), \Phi_*(0, X_i)) \Phi_*(\partial_t, 0), \Phi_*(0, X_i)) \mu \end{aligned}$$

donde decorre naturalmente o teorema pelo teorema de Stokes. ■

A última proposição mostra que os mínimos da energia são as aplicações folheadas que satisfazem  $\tilde{\tau}_\phi = 0$ . Da mesma forma que no caso de variedades riemannianas, o problema pode ser atacado considerando soluções da equação de calor

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_t &= \frac{1}{2} \tilde{\tau}_{\phi_t}, \\ \phi_0 &= \phi. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Neste contexto, fica claro que uma solução de (4.10) é uma aplicação  $\phi : M \times I \rightarrow N$ , com  $I \subseteq \mathbb{R}$ , tal que  $\phi_{t*} E \subseteq E'$ .

O seguinte teorema foi mostrado por Gromov em [20]. Fornecemos aqui, somente por completude, uma prova mais detalhada.

**Teorema 19.** *Sejam  $(M, F)$  e  $(N, F')$  duas folheações riemannianas com  $M$  compacta. Se  $\phi : M \rightarrow N$  é uma aplicação folheada então existe uma solução  $\psi$  da equação (4.10) acima.*

**Demonstração:** Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação folheada. Então  $\phi$  mapeia cada folha  $L \in M$  a uma folha  $L'$  de  $N$ . Logo, por ser  $M$  compacta, temos que a curvatura de Ricci satisfaz  $\operatorname{Ric}^E > K$  para  $K > -\infty$ . Então, pelo trabalho de de Li e Tam [27], para cada  $L \in F$  existe uma aplicação  $\phi_L : \mathbb{R}_{\geq 0} \times L \rightarrow L'$  que resolve a equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_L &= \frac{1}{2} \tau_{\phi_L}, \\ \phi_L(0, \cdot) &= \phi|_L. \end{aligned}$$

Defina então a aplicação  $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times M \rightarrow N$  de forma que  $\psi|_L = \phi_L$ , onde  $\phi_L$  é dado como acima. Observe que, para cada  $t$ ,  $\psi(t, \cdot)$  é uma aplicação folheada,  $C^2$  nas folhas, e que resolve a equação de calor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi &= \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\psi, \\ \psi(0, \cdot) &= \phi. \end{aligned}$$

■

O seguinte teorema é uma generalização do teorema de Eells e Sampson [10].

**Teorema 20.** *Seja  $(M, F)$  uma variedade riemanniana compacta e  $(N, F')$  uma variedade riemanniana com folhas de curvatura não positiva. Se  $\phi : M \rightarrow N$  é uma aplicação folheada e limitada então existe uma aplicação harmônica folheada  $\psi : M \rightarrow N$  homotópica a  $\phi$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema anterior, existe solução  $\psi_t$  da equação (4.10). Tomamos  $\tilde{\psi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t$ . Observe que  $\tilde{\psi}$  é limitada e, pelas Proposições 3 e 4, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\psi_t) &= -\frac{1}{2} \int_M \|\tilde{\tau}_{\psi_t}\|_N^2 \mu \leq 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E}(\psi_t) &= -2 \int_M h(\nabla_{\dot{\phi}_t} \dot{\phi}_t, \tilde{\tau}_{\phi_t}) \\ &= \frac{1}{2} \int_M (g^{ij} h(\nabla_{\partial_i} \tau_{\psi_t}, \nabla_{\partial_j} \tau_{\psi_t}) - g^{ij} R(\tau_{\psi_t}, d\psi_t \partial_i, \tau_{\psi_t}, d\psi_t \partial_j)) \mu. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\tau_{\psi_t}\|_N \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Logo,

$$\tau_{\tilde{\psi}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{\psi_t} = 0.$$

■

---

## 4.3 Apêndice

---

Neste apêndice, construiremos globalmente os operadores  $\text{grad}_E$  e  $\Delta_E$  utilizando geometria extrínseca.

Consideremos uma imersão isométrica da variedade  $(M, g)$  em  $(\mathbb{R}^N, \langle, \rangle)$  para  $N$  suficientemente grande. Seja  $P(m) : \mathbb{R}^N \rightarrow T_m M$  a projeção ortogonal com respeito a  $\langle, \rangle$ . Estas projeções definem uma aplicação global

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^N \times M &\rightarrow TM \\ (v, m) &\rightarrow (m, P(m)v). \end{aligned}$$

Definimos a conexão riemanniana natural,  $\nabla$ , associada a  $g$ , para quaisquer campos vetoriais  $V$  e  $Y$  em  $TM$ , como sendo

$$\nabla_V Y(m) = P(m) dY(V(m)) \quad \forall m \in M.$$

Seja  $F$  uma folheação em  $M$  e considere a projeção ortogonal  $\pi : TM \rightarrow E$  com respeito à métrica  $g$ , onde  $E$  denota o subfibrado integrável que caracteriza  $F$ . Seja  $\nabla^E$  a derivada covariante em  $E$  definida como segue

$$\nabla_V^E Y(m) = \pi \nabla_V Y(m).$$

para campos vetoriais  $V \in TM$ ,  $Y \in E$ .

Uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_N\}$  de  $\mathbb{R}^N$  induz campos vetoriais  $\tilde{X}_i$  em  $M$  definidos por

$$\tilde{X}_i(m) = P(m)e_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Estes campos são conhecidos na literatura como *campos gradientes das funções altura*. Defina campos vetoriais  $X_i$ 's em  $M$  por

$$X_i(m) = \pi \tilde{X}_i(m), \quad m \in M.$$

**Lema 9.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ . Então*

$$a) \operatorname{grad}_E f = \sum_{i=1}^N X_i f X_i,$$

$$b) \Delta_E f = \sum_{i=1}^N X_i^2 f,$$

**Demonstração:** Primeiro notamos que, para todo  $m \in M$ , vale

$$\sum_{i=1}^N X_i(m) \otimes X_i(m) = \sum_{i=1}^p u_i \otimes u_i, \quad (4.11)$$

onde  $\{u_i\}$  é uma base ortonormal de  $E_m$ .

a) Segue da definição do  $\operatorname{grad}_E f = \nabla f|_E$ . De fato, para qualquer  $m \in M$ , consideramos  $\{u_1, \dots, u_p\}$  uma base ortonormal de  $E$  sobre uma vizinhança  $U$  de  $m$ . Da equação (4.11), temos

$$\operatorname{grad}_E f = \sum_{i=1}^p u_i f u_i = \sum_{i=1}^N X_i f X_i.$$

b) Segue também da definição de  $\Delta_E f = \operatorname{div}_E(\operatorname{grad}_E f)$ . Novamente da equação (4.11), temos que

$$\begin{aligned} \Delta_E f(m) &= \sum_{i=1}^N g(\nabla_{X_i(m)}^E \operatorname{grad}_E f, X_i(m)) \\ &= \sum_{i=1}^N X_i(m) g(\operatorname{grad}_E f, X_i(m)) - g(\operatorname{grad}_E f, \sum_{i=1}^N \nabla_{X_i(m)}^E X_i(m)). \end{aligned}$$

Definimos as projeções  $Q = I - P$ ,  $\tilde{P} = \pi \circ P(m)$  e  $\tilde{Q} = (I - \pi) \circ P + Q$ . Então  $\tilde{P} + \tilde{Q} = I$  e  $\tilde{P} \circ \tilde{Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P} = 0$ . Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \nabla_{X_i}^E X_i(m) &= \sum_{i=1}^N \pi P(m) d\tilde{P}(m)(X_i)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{P}(m) d\tilde{P}(m)(\tilde{P}(m)(e_i))(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^N d\tilde{P}(m)(\tilde{P}(m)(e_i)) \tilde{Q} e_i. \end{aligned}$$

Na última expressão, utilizamos a seguinte identidade

$$\tilde{P}d\tilde{P} = -\tilde{P}d\tilde{Q} = d\tilde{P}\tilde{Q}.$$

Pela invariância da última expressão com relação aos vetores  $e_i$ , podemos tomar  $e_i = u_i$  para  $i = 1, \dots, p$ , o que implica que  $d\tilde{P}(m)(\tilde{P}(m)(e_i))\tilde{Q}e_i = 0$ , mostrando o resultado. ■

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## PROCESSOS ESTOCÁSTICOS EM ESPAÇOS FOLHEADOS

Processos estocásticos em folheações foram considerados inicialmente por Garnett em [17]. Neste artigo a autora introduziu o movimento browniano para provar resultados envolvendo o que ela chamou de medidas harmônicas. Mais tarde, uma construção do movimento browniano em folheações detalhada e baseada em semigrupos de difusão foi apresentada por Candel em [5].

Neste capítulo, pretendemos, baseados na teoria padrão dos processos estocásticos, dar um tratamento particular aos processos estocásticos em folheações, apresentando o que nós chamamos de processos estocásticos folheados. Na primeira parte do capítulo, apresentaremos definições precisas para estes objetos e estudaremos como suas propriedades geométricas podem ser caracterizadas em termos probabilísticos (Proposições 5 e 6). Também construiremos uma teoria de integração estocástica (Definição 9) e determinaremos uma fórmula de Itô (Proposição 7). Para isto, faremos uso dos operadores geométricos introduzidos no capítulo anterior e de suas propriedades. Em geral, nosso ambiente de trabalho será uma folheação de uma variedade riemanniana  $(M, g)$  definida por um subfibrado integrável  $E$  do fibrado tangente  $TM$  (ver Capítulo 3). A variedade  $M$  estará munida de uma conexão  $\nabla$  compatível com a métrica.

---

### 5.1 Processos Estocásticos Folheados

---

Ao longo desta seção, assumiremos que  $(M, F, g)$  é uma variedade riemanniana compacta equipada com uma conexão sem torsão  $\nabla$  e conexão folheada  $\nabla^E = \pi\nabla$ , onde  $\pi : TM \rightarrow E \subset TM$  é a projeção ortogonal no subfibrado integrável que define  $F$ . Começaremos com algumas definições canônicas. Fixamos, por conveniência, um espaço de probabilidade

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Definição 5.** *Seja  $X$  um processo estocástico em  $M$ . Dizemos que ele é folheado se cada caminho do processo que começa em uma folha  $L \in F$  continua na folha  $L$ .*

**Observação:** Um processo estocástico  $X$  é folheado se para toda carta folheada  $(U, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  os processos reais  $y_j(X)$  são constantes.

**Definição 6.** *Seja  $X$  um processo estocástico folheado. Dizemos que  $X$  é uma semimartingale folheada se, para toda função  $f \in C^\infty(M)$ , o processo a valores reais  $f(X)$  é uma semimartingale.*

**Observação:** Uma semimartingale folheada é uma semimartingale.

**Definição 7.** *Seja  $X$  uma semimartingale folheada. Dizemos que ela é uma martingale folheada se para toda  $f \in C^\infty(M)$*

$$f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess}_E(f)(dX, dX)$$

*é uma martingale local.*

**Observação:** Martingales folheadas não são necessariamente martingales. De fato, temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.** *Martingales folheadas são martingales se, e somente se, a folheado é totalmente geodésica.*

**Demonstração:** Se a folheado for totalmente geodésica, então  $\nabla_X^E Y = \nabla_X Y$  para todo  $X$  e  $Y \in E$  ou, equivalentemente, para toda  $f \in C^\infty(M)$ , temos  $\text{Hess}_E f(X, Y) = \text{Hess} f(X, Y)$ . O resultado segue da definição de martingales folheadas.

Por outro lado, considere  $L \in F$  e uma geodésica  $\gamma : [0, T] \rightarrow L$  em  $L$ , isto é, para toda  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma)(t) = \text{Hess}_E f(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)).$$

Isto é equivalente a dizer que

$$\text{Hess}_{\mathbb{R}}(f \circ \gamma)(\partial t, \partial t) = \text{Hess}_E f(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)).$$

O movimento browniano de  $\mathbb{R}$  é martingale, logo para  $X = \gamma(B)$  satisfaz

$$f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Hess}_E f(dX_t, dX_t),$$

é uma martingale local. Assim  $X$  é uma martingale folheada, portanto,  $X$  é uma martingale em  $M$ . Então

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma)(B) dt &= \int \text{Hess}_M f(dX, dX) \\ &= \int ((\gamma_* \otimes \gamma_*)^* \text{Hess}_M f)(dB, dB) \\ &= \int \text{Tr}_{\mathbb{R}}((\gamma_* \otimes \gamma_*)^* \text{Hess}_M f)(B) dt \\ &= \int \text{Hess}_M f(\dot{\gamma}(B), \dot{\gamma}(B)) dt. \end{aligned}$$

Assumimos  $B_0 = t_0 \in [0, T]$  diferenciando na última equação e avaliando no 0 temos que

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma)(t_0) = \text{Hess}_M f(\dot{\gamma}(t_0), \dot{\gamma}(t_0)).$$

Pela arbitrariedade de  $t_0$  temos que  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  é uma geodésica de  $M$ . ■

As martingales folheadas também satisfazem a propriedade de não confluência como mostra a seguinte proposição.

**Teorema 21.** *Para cada ponto de  $M$  existe uma vizinhança aberta  $U$  tal que se  $X$  e  $Y$  são martingales folheadas em  $U$ , definidas no mesmo espaço de probabilidade filtrado, com  $X_T = Y_T$  q.c., então  $X = Y$  q.c.*

**Demonstração:** Seja  $p$  em  $M$ . Consideremos uma carta folheada  $(U, \phi)$  sobre  $p$ . Sejam  $T$  um transversal que passa por  $p$  e  $T' \subset T \cap U$  um compacto e conexo tal que  $p \in T'$ . Para todo ponto  $m \in T'$  temos que, pela Proposição 2, existe uma bola geodésica, centrada em  $m$  e contida na folha através de  $m$ , na qual vale a propriedade de não confluência de martingale. Definimos por  $\epsilon(m)$  o maior raio de uma tal bola geodésica em  $L_m$ . Seja

$$\epsilon = \min_{m \in T'} \epsilon(m).$$

Observamos que  $\epsilon > 0$ . Caso contrário, existe uma sequência  $\{m_k\}$  em  $T'$  tal que  $\epsilon(m_k) > \epsilon(m_{k+1})$  e  $\epsilon(m_k) \rightarrow 0$ . Isto implica, pela compacidade de  $T'$ , que existe um ponto  $m_\infty \in T'$  e uma subsequência convergente  $\{m_{k_j}\}$  tal que  $m_{k_j} \rightarrow m_\infty$ . Mas, para  $m_\infty$ , temos que  $\epsilon(m_\infty) = 0$ , o que contradiz a Proposição 2.

Seja  $W$  a  $\epsilon$ -vizinhança tubular de  $T'$  definida pela exponencial folheada. Considere  $W'$  uma vizinhança aberta de  $p$  contida em  $W$ . Sejam  $X$  e  $Y$  martingales folheadas em  $W'$  tais que  $X_T = Y_T$ , então elas são martingales nas folhas a traves de  $W'$  e, portanto, pela propriedade de não confluência de martingales em cada folha, temos o resultado. ■

**Definição 8.** *Seja  $X$  uma martingale folhada. Então  $X$  é um movimento browniano folheado (MBFo) se, e somente se, para toda função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , temos que*

$$f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_E(f)(X) dt$$

é uma martingale local.

Os seguintes lemas caracterizam completamente o MBFo.

**Lema 10.** *Seja  $X$  uma semimartingale que verifica*

$$[f(X), f(X)] = \int \|\text{grad}_E f(X)\|^2 dt,$$

para toda função  $f \in C^\infty$ . Então para toda forma bilinear  $b$  se cumpre

$$\int b(dX, dX) = \int \text{Tr}_E b(X) dt.$$

**Demonstração:** Sejam  $f$  e  $h$  duas funções e  $\{V_1, \dots, V_p\}$  uma base ortonormal de  $E$ . Note que

$$\text{Tr}_E(df \otimes dh) = \sum_{i=1}^p V_i f V_i h = \langle \text{grad}_E f, \text{grad}_E h \rangle,$$

onde  $\text{grad}_E f = \text{grad} f|_E$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int \text{Tr}_E(df \otimes dh)(X) dt &= \int \langle \text{grad}_E f, \text{grad}_E h \rangle dt \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \|\text{grad}_E f + \text{grad}_E h\|^2(X) dt - \|\text{grad}_E f - \text{grad}_E h\|^2(X) dt \right) \\ &= \frac{1}{4} ([f + h(X), f + h(X)] - [f - h(X), f - h(X)]) \\ &= [f(X), h(X)] = \int (df \otimes dh)(dX, dX). \end{aligned}$$

Concluimos o lema por linearidade. ■

**Lema 11.** *Uma semimartingale folheada é um MBFo se, e somente se, é uma martingale folheada e, para toda função  $f$  suave,*

$$[f(X), f(X)] = \int \|\text{grad}_E f(X)\|^2 dt.$$

**Demonstração:** Se  $X$  é um MBFo, então pelo Lema 5,

$$f(X)^2 - f(X_0)^2 - \int f(X) \Delta_E f(X) dt - \int \|\text{grad}_E f(X)\|^2 dt$$

é uma martingale local. Por outro lado, pela fórmula de Itô

$$f(X)^2 - f(X_0)^2 - 2 \int f(X) df(X) - [f(X), f(X)] =$$

$$f(X)^2 - f(X_0)^2 - \int f(X) \Delta_E f(X) dt - [f(X), f(X)]$$

é uma martingale local. Comparando as últimas duas expressões, temos a ida.

Por outro lado, se  $X$  é uma martingale folheada que satisfaz a fórmula na hipótese, então, pelo Lema 10, temos que

$$f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Hess}_E f(dX, dX) = f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \Delta_E f(X) dt$$

é uma martingale local. ■

Lembramos que uma folheação é harmônica se tem curvatura média nula ( $K = 0$ ).

**Proposição 6.** *O MBFo é uma martingale em  $M$  se, e somente se, a folheação  $F$  é harmônica.*

**Demonstração:** Da fórmula (4.2) segue que

$$\begin{aligned} \Delta_E f &= \text{Tr}_E \text{Hess}_E f \\ &= \text{Tr}_E \text{Hess} f + K f. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Seja  $B$  um MBFo. Aplicando o Lema 10 e utilizando o fato de  $K$  ser igual a 0, resulta que

$$\begin{aligned} f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Tr}_E \text{Hess}_E f(X) dt &= f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Tr}_E \text{Hess} f(X) dt \\ &= f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Hess} f(dX, dX) dt. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ) Para que  $X$  seja uma martingale precisamos provar que, para toda  $f$ ,  $\int K f(X) dt = 0$ , o que é equivalente a dizer que  $K = 0$ . ■

**Observação:** Basicamente, a última proposição diz que a função imersão  $i : L \in F \hookrightarrow M$  é harmônica para toda  $L \in F$  desde que o MBFo se restringe ao movimento browniano em cada folha de  $F$ .

## 5.2 Integrais Folheadas de Itô e Stratonovich

Uma vez introduzidos os conceitos básicos, podemos desenvolver a teoria de integração de semimartingales folhadas baseados na teoria clássica. Lembramos que  $(M, F, g)$  é uma variedade riemanniana folheada e que  $\pi : TM \rightarrow E$  é a projeção ortogonal no subfibrado integrável  $E$  que caracteriza  $F$ .

**Observação:** Ao longo deste capítulo, vamos denotar  $\pi^*$  ao operador que atua em formas diferenciais. Mais precisamente, sendo  $\omega \in \Omega^k(M)$  e  $X_1, \dots, X_k$  campos em  $TM$ , então

$$(\pi^* \omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(\pi X_1, \dots, \pi X_k).$$

**Definição 9.** *Seja  $X$  uma semimartingale folheada em uma variedade  $(M, F)$  munida de uma conexão sem torsão  $\nabla$ . Definimos as integrais de Stratonovich e Itô de uma 1-forma  $\omega \in T^*M$  ao longo de  $X$  da seguinte maneira*

$$\int \omega \delta^F X = \int \pi^* \omega \delta X,$$

$$\int \omega d^F X = \int \pi^* \omega dX.$$

**Observação:** Se  $X$  é uma semimartingale folheada, então para uma carta folheada  $(U, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ , temos que

$$dX = \sum_{i=1}^p dX^i D_i + \sum_{i,j=1}^p d[X^i, X^j] D_{ij}.$$

As integrais definidas acima estão relacionadas pela seguinte forma de conversão.

**Lema 12.** *Seja  $X$  uma semimartingale folheada e  $\omega$  uma 1-forma. Então*

$$\int \omega \delta^F X = \int \omega d^F X + \frac{1}{2} \int (\nabla^E \omega)(dX, dX),$$

onde  $\nabla^E \omega$  é definido por

$$\nabla^E \omega := \nabla \pi^* \omega.$$

**Demonstração:** Sendo  $X$  uma semimartingale folheada e  $\omega$  uma 1-forma, resulta

$$\begin{aligned} \int \omega d^F X &= \int \mathbf{G} \pi^* \omega dX \\ &= \int \mathbf{D} \pi^* \omega dX - \int \mathbf{H} \nabla^E \omega dX \\ &= \int \omega \delta^F X - \frac{1}{2} \int (\nabla^E \omega)(dX, dX) \end{aligned}$$

Onde  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{G}$  são os operadores introduzidos na seção 2.6. ■

Também podemos relacionar as integrais de Itô e Stratonovich folheadas com as respectivas integrais no sentido clássico. Isto é basicamente o que assegura o seguinte lema.

**Lema 13.** *Seja  $X$  uma semimartingale folheada e  $\omega$  uma 1-forma. Então*

$$\int \omega \delta^F X = \int \omega \delta X,$$

e

$$\int \omega dX = \int \omega d^F X + \frac{1}{2} \int \tilde{W}^* \omega(dX, dX),$$

onde  $\tilde{W}$  uma seção de  $(TM \otimes TM)^* \otimes E$  que satisfaz  $\tilde{W} = W \circ (\pi \otimes \pi)$ , com  $W$  a segunda forma fundamental da folheada.

**Demonstração:** Seja  $\nabla^M$  uma conexão sem torsão de  $M$  e  $\nabla^E$  a conexão induzida em  $E$ . Observamos que, se  $V$  e  $W$  são campos de  $E$  e  $\omega$  uma 1-forma, então

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\pi^*\omega(V) &= \omega(\pi V) = \mathbf{D}\omega(V) \quad \text{e} \\ \mathbf{D}\pi^*\omega(VW) &= \frac{1}{2}(\pi^*\omega([V, W]) + V\pi^*\omega(W) + W\pi^*\omega(V)) \\ &= \frac{1}{2}(\omega([V, W]) + V\omega(W) + W\omega(V)) \\ &= \mathbf{D}\omega(VW). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \omega d^F X &= \int \pi^*\omega dX \\ &= \int \mathbf{G}\pi^*\omega \, \mathbf{d}X \\ &= \int \mathbf{D}\omega \, \mathbf{d}X - \int \mathbf{H}\nabla^E\omega \, \mathbf{d}X \\ &= \int \mathbf{D}\omega \, \mathbf{d}X - \int \mathbf{H}\nabla^M\omega \, \mathbf{d}X + \int \mathbf{H}(\nabla^M - \nabla^E)\omega \, \mathbf{d}X \\ &= \int \omega dX - \frac{1}{2} \int \tilde{W}^*\omega(dX, dX). \end{aligned}$$

Claramente,

$$\begin{aligned} \int \omega \delta^F X &= \int \pi^*\omega \delta X \\ &= \int \mathbf{D}\pi^*\omega \, \mathbf{d}X \\ &= \int \mathbf{D}\omega \, \mathbf{d}X \\ &= \int \omega \delta X. \end{aligned}$$

■

**Lema 14.** *Seja  $X$  uma semimartingale folheada em  $M$ . Então,  $X$  é uma martingale folheada se, e somente se, para toda 1-forma  $\omega$ ,*

$$\int \omega d^F X$$

*é uma martingale local.*

**Demonstração:** Seja  $f$  em  $C^\infty(M)$ . Resulta que

$$\begin{aligned} \int df d^F X &= \int df dX - \frac{1}{2} \int \tilde{W}^* df(dX, dX) \\ &= \int \mathbf{D}f \mathbf{d}X - \frac{1}{2} \int \text{Hess}f(dX, dX) - \frac{1}{2} \int (\tilde{W}^* df)(dX, dX) \\ &= \int df \delta X - \frac{1}{2} \int \text{Hess}_E f(dX, dX) \\ &= f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Hess}_E f(dX, dX). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se  $\int \omega d^F X$  é uma martingale local para toda  $\omega$ , tomando  $\omega = df$ , temos que  $X$  é uma martingale folheada.

Por outro lado, se  $X$  é uma martingale folheada, então  $\int \omega d^F X$  é uma martingale local para toda 1-forma exata. Observe que, se  $\omega = f\alpha$ , então  $\mathbf{D}\omega - \mathbf{H}\nabla^E \omega = f(\mathbf{D}\alpha - \mathbf{H}\nabla^E \alpha)$ . Portanto,

$$\int \omega d^F X = \int (f \circ X) d \left( \int \alpha d^F X \right)$$

e, como  $(\int \alpha d^F X)$  é martingale local, segue que  $\int \omega d^F X$  é martingale. Agora, o resultado segue do fato que toda 1-forma pode ser escrita como  $\omega = \sum_i f_i dh_i$  e da linearidade da integral estocástica. ■

Sejam  $\phi : (M, F) \rightarrow (N, F')$  uma aplicação folheada e  $X$  uma semimartingale folheada em  $M$ . Neste contexto, é natural se perguntar como se comporta a integral com respeito a  $\phi$ . Esse é o conteúdo da seguinte proposição.

**Proposição 7. (Fórmula de Itô folheada)** *Seja  $X$  uma semimartingale folheada em  $M$ ,  $\phi : (M, F) \rightarrow (N, F')$  uma aplicação folheada e  $\omega$  uma 1-forma de  $N$ . Então*

$$\int \omega(d^{F'} \phi(X)) = \int (\phi^* \omega)(d^F X) + \frac{1}{2} \int (\tilde{\beta}_\phi^* \omega)(dX, dX),$$

onde  $\tilde{\beta}_\phi^* \omega$  é uma forma bilinear simétrica tal que, avaliada em dois campos  $X$  e  $Y$  de  $E$ , toma o valor

$$\tilde{\beta}_\phi^* \omega(X, Y) = \omega(\tilde{\beta}_\phi(X, Y)).$$

**Demonstração:** Da fórmula de Itô para variedades, temos, para qualquer 1-forma  $\omega$  em  $T^*N$

$$\int \omega(d\phi(X)) = \int (\phi^* \omega)(dX) + \frac{1}{2} \int (\beta_\phi^* \omega)(dX, dX), \quad (5.1)$$

onde  $\beta_\phi$  é a segunda forma fundamental de  $\phi$ . Por definição,

$$\begin{aligned} \beta_\phi^* \omega(X, Y) &= \omega(\nabla_{\phi_* Y}^N \phi_* X - \phi_* \nabla_Y^M X) \\ &= \omega(\nabla_{\phi_* Y}^N \phi_* X) - \omega(\phi_* \nabla_Y^M X) \\ &= \omega(\nabla_{\phi_* Y}^{E'} \phi_* X - \phi_* \nabla_Y^E X) - \omega(\phi_* W^M(X, Y)) + \omega(W^N(\phi_* X, \phi_* Y)) \\ &= \tilde{\beta}_\phi^* \omega(X, Y) - \omega(\phi_* W^M(X, Y) + W^N(\phi_* X, \phi_* Y)). \end{aligned}$$

Assim, o resultado segue ao aplicar o Lema 13 a ambos lados da equação (5.1). ■

**Proposição 8.** *Seja  $\phi : (M, F) \rightarrow (N, F')$  uma aplicação entre duas variedades folheadas. Então,  $\phi$  é harmônica folheada se, e somente se, transforma o MBFo em martingales folheadas.*

**Demonstração:** Seja  $B$  o MBFo em  $M$ . Então, da fórmula de Itô folheada, segue que

$$\int \omega d^{F'} \phi(B) = \int \omega \circ \phi d^F B + \frac{1}{2} \int \tilde{\beta}_\phi^* \omega(dB, dB).$$

Observamos que  $\tilde{\beta}_\phi^* \omega$  é uma forma bilinear simétrica tal que, avaliada em dois campos  $X$  e  $Y$  de  $E$ , toma o valor

$$\tilde{\beta}_\phi^* \omega(X, Y) = \omega(\tilde{\beta}_\phi(X, Y)).$$

O traço em  $E$  de  $\tilde{\beta}_\phi^* \omega$  é

$$\begin{aligned} \text{Tr}_E(\tilde{\beta}_\phi^* \omega) &= \omega(\text{Tr}_E \tilde{\beta}_\phi) \\ &= \omega(\tilde{\tau}_\phi) := (\tilde{\tau}_\phi)^* \omega. \end{aligned}$$

Com estas identidades, segue, do Lema 10, que

$$\int \tilde{\beta}_\phi^* \omega(dB, dB) = \int \text{Tr}_E(\tilde{\beta}_\phi^* \omega)(B) dt = \int \tilde{\tau}_\phi^* \omega(B) dt.$$

Assim, se  $\tilde{\tau}_\phi = 0$ , temos, do fato do MBFo  $B$  ser uma martingale folheada e do lema 14, que  $\phi(B)$  é martingale folheada. Por outro lado, do lema 14 e da decomposição de Doob-Meyer, resulta que  $\tilde{\tau}_\phi^* \omega = 0$  para toda  $\omega \in T^*M$ . Portanto  $\tilde{\tau}_\phi = 0$ . ■

**Proposição 9.** *A aplicação folheada  $\phi : (M, F) \rightarrow (N, F')$  transforma MBFo em MBFo se, e somente se,  $\phi$  é uma submersão harmônica riemanniana das folhas de  $F$  nas folhas de  $F'$ .*

**Demonstração:** Assumimos que  $\phi : (M, F) \rightarrow (N, F')$  é uma aplicação folheada que transforma MBFo em MBFo. Seja  $f$  uma função  $C^\infty(N)$ . Por definição,

$$f(\phi(B)) - f(\phi(B_0)) - \frac{1}{2} \int \Delta_E(f \circ \phi)(B) dt = f(\phi(B)) - f(\phi(B_0)) - \frac{1}{2} \int (\Delta_{E'} f) \circ \phi(B) dt.$$

Então

$$\Delta_E(f \circ \phi) = (\Delta_{E'} f) \circ \phi.$$

Seja  $f \in C^\infty(M)$  igual ao produto de duas funções  $h$  e  $r$  em  $C^\infty(M)$ , isto é,  $f = hr$ . Segue, da equação anterior, que

$$g_M(\phi_* \text{grad}_{E'} r, \phi_* \text{grad}_E h) = g_N(\text{grad}_{E'} r, \text{grad}_{E'} h) \circ \phi.$$

Utilizando que, para todo ponto da variedade, um vetor pode ser visto como o gradiente de uma função no ponto, temos que  $\phi$  é uma isometria de  $\ker(\phi_*)^\perp \rightarrow E'$  e, conseqüentemente, uma submersão riemanniana harmônica das folhas de  $F$  nas folhas de  $F'$ .

Por outro lado, se  $\phi$  é uma submersão riemanniana harmônica das folhas de  $F$  nas de  $F'$  e  $B$  é um MBFo em  $M$ , então  $\phi(B)$  é uma martingale folheada. Logo, para toda  $f \in C^\infty(N)$ ,

$$\begin{aligned} [f(\phi(B)), f(\phi(B))] &= \int \|\text{grad}_E(f \circ \phi)\|^2 dt \\ &= \int \|\text{grad}_E(f \circ \phi)\|^2(B) dt \\ &= \int \|\phi^* \text{grad}_{E'} f\|^2(B) dt \\ &= \int \|\text{grad}_{E'} f\|^2 \phi(B) dt. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, do Lema 10,  $\phi(B)$  é um MBFo. ■

**Corolário 2.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada. Se existe uma variedade riemanniana  $L$  e uma aplicação  $\phi : M \rightarrow L$  que leva o MBFo no movimento browniano de  $L$ , então existe um subfibrado integrável  $H$  e um fibrado  $F'$  tal que  $E^\perp = H + F'$ . No caso  $F' \equiv 0$ ,  $F$  é localmente a folheadão produto.*

**Demonstração:** Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada. Assumamos que existe uma variedade riemanniana  $L$  e uma aplicação  $\phi : M \rightarrow L$  que leva o MBFo no movimento browniano de  $L$ . Consideramos  $L$  como uma variedade folheada por uma folha só. Pela Proposição 9, temos que  $\phi_* : E \rightarrow TL$  é sobrejetiva. Observamos que  $\ker(\phi_*)$  é integrável. De fato, se consideramos  $X, Y \in \ker(\phi_*)$ , então  $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y] = 0$ . Portanto existe um subfibrado  $K$  tal que  $E^\perp$  pode se escrever como a soma  $E^\perp = \ker(\phi_*) + K$ . No caso  $F' \equiv 0$  temos que  $F$  é localmente a folheadão produto. ■

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## MOVIMENTO BROWNIANO FOLHEADO

Neste capítulo, estudaremos o movimento browniano folheado do ponto de vista das equações diferenciais estocásticas. No seu artigo, Lucy Garnett [17] fez uma construção do MBFo utilizando o grupo do calor nas folhas (para mais detalhes ver o livro de Candel e Conlon [6]). Nós apresentaremos aqui uma construção intrínseca, mais geométrica e baseada no formalismo das equações diferenciais estocásticas, e uma construção, baseada na geometria extrínseca. Provaremos o teorema de Garnett com facilidade graças aos operadores folheados e suas propriedades. Também estudaremos as medidas harmônicas e as caracterizaremos como solução de uma equação diferencial de segunda ordem. Finalmente faremos um breve estudo sobre recorrência e transitividade do MBFo.

---

### 6.1 Construção

---

Ao longo deste capítulo, consideraremos uma variedade riemanniana compacta folheada  $(M, F, g)$  com  $F$  no mínimo  $C^2$  e subfibrado integrável  $E \subset TM$ . Assumiremos que  $M$  está munida de uma conexão  $\nabla$  compatível com a métrica  $g$ .

Consideremos  $\mathbb{R}^p$  munido da base ortonormal canônica  $\{e_1, \dots, e_p\}$ . Seja  $O(E)$  o fibrado das bases ortonormais de  $E$ , isto é

$$O(E) = \{u : \mathbb{R}^p \rightarrow T_x M, \{ue_1, \dots, ue_p\} \text{ é uma base ortonormal de } E_x\}.$$

Observamos que o grupo agindo em  $O(E)$  é  $O(p, \mathbb{R})$  e que  $E$  é o fibrado vectorial associado ao  $O(E)$ . Seja  $r : O(E) \rightarrow M$  a projeção canônica definida por  $r(u) = x$ . A conexão  $\nabla^E$ , definida em  $E$ , induz uma partição do espaço tangente de  $O(E)$  em um espaço vertical  $VO(E)$

e outro horizontal  $HO(E)$  tais que  $TO(E) = VO(E) + HO(E)$  (ver Kobayashi-Nomizu [26]). É simples ver que

$$VO(E)_u \simeq O(p, \mathbb{R}) \quad \text{para todo } u \in O(E) \quad \text{e que} \quad r_*HO(E) = E$$

Para cada vetor  $v$  em  $\mathbb{R}^p$ , o campo vetorial  $H_v$  em  $O(E)$  definido em cada  $u$  de  $O(E)$  pela expressão

$$H_v(u) = \text{levantamento horizontal de } uv \in E_{r(u)} \text{ no ponto } u$$

é um campo horizontal em  $O(E)$ . Sejam  $e_1, \dots, e_p$  como acima. Definimos os campos vetoriais  $H_1, \dots, H_p$ , tais que  $H_i = H_{e_i}$ . É claro que

$$r_*H_i(y) = ve_i,$$

onde  $r(v) = y$  e  $v \in O(E)$ . Estes campos permitem definir o operador *laplaciano horizontal folheado* em  $O(E)$  como sendo

$$\Delta_E^H = \sum_{i=1}^p (H_i)^2.$$

A relação entre  $\Delta_E$  e  $\Delta_E^H$  é dada no lema a seguir.

**Lema 15.** *Para toda  $f \in C^\infty(M)$ , a seguinte identidade vale*

$$\Delta_E^H(f \circ r) = (\Delta_E f) \circ r.$$

**Demonstração:** Observamos primeiro que se  $i, j \leq p$ , temos que

$$H_i H_j(f \circ r)(u) = \text{Hess}_E f(ue_i, ue_j).$$

De fato, sabemos que

$$H_j(f \circ r)(u) = g(\text{grad}_E f(r(u)), ue_j) = g(\text{grad}_E f(r(u)), r_*H_j(r(u))).$$

Portanto, considerando  $u_t$  é uma curva horizontal tal que  $u_0 = u$  e  $\dot{u}_0 = H_i(u)$ , vemos que

$$\begin{aligned} H_i H_j(f \circ r)(u) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\text{grad}_E f(r(u_t)), r_*H_j(r(u_t))) \\ &= g(\nabla_{ue_i} \text{grad}_E f(r(u)), ue_j) \\ &= g(\nabla_{ue_i}^E \text{grad}_E f(r(u)), ue_j) \\ &= \text{Hess}_E f(ue_i, ue_j) \circ r(u) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta_E^H(f \circ r)(u) &= \sum_{i=1}^p (H_i)^2(f \circ r)(u) \\ &= \left( \sum_{i=1}^p \text{Hess}_E f(ue_i, ue_i) \right) \circ r(u) \\ &= \Delta_E f \circ r(u). \end{aligned}$$

■

**Proposição 10.** *Seja  $U$  o processo estocástico em  $O(M, E)$  que é solução da equação de Stratonovich*

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_{i=1}^p H_i(U) \delta B^i, \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

onde  $(B^1, \dots, B^p)$  é o movimento browniano em  $\mathbb{R}^p$ . Então  $r(U)$  é um MBFo de  $M$  começando em  $r(U_0)$ .

**Demonstração:** Seja  $f$  uma função  $C^\infty(M)$ . Pela fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} f(r(U)) - f(r(U_0)) &= \sum_{i=1}^p \int H_i(f \circ r)(U) dB^i + \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^p H_i^2(f \circ r)(U) dt \\ &= \sum_{i=1}^p \int H_i(f \circ r)(U) dB_t^i + \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^p \text{Hess}_E f(Ue_i, Ue_i)(r(U)) dt. \end{aligned}$$

O resultado segue do Lema 15. ■

**Exemplos:**

- Seja  $(M = N \times L, F = \{x\} \times L, g = g_N + g_L)$  a variedade riemanniana munida da folheação produto. Consideremos uma base ortonormal de  $TL$ . Então é claro que  $K = 0$  e que  $O(M) = O(N) \times O(L)$ . Portanto, o movimento browniano folheado  $B$  começando em  $(x_0, y_0)$  é dado por  $B = (x_0, W)$ , onde  $W$  é o movimento browniano da variedade  $L$ .
- Consideremos a folheação em  $(\mathbb{R}^2, F, \langle, \rangle)$  dada pelas retas  $\{ax + y = c, a > 0 \text{ fixo e } c \in \mathbb{R}\}$ . Pelo item anterior, o movimento browniano folheado é dado pelo processo estocástico

$$B = W \frac{(a, 1)}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

onde  $W$  é o movimento browniano em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  definida por

$$\phi(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \cos(y), \sin(y)) \subset \mathbb{R}^4.$$

Resulta que  $(\mathbb{T}^2, G = \phi(F), \langle, \rangle)$  é a folheação de Kronecker no Toro. Mostraremos que  $\phi(B)$  é o MBFo para esta folheação. De fato, como o subfibrado integrável caracterizando a folheação é  $E = \{\lambda(a\partial_x + \partial_y), \lambda \in \mathbb{R}\}$ , obtemos que

$$\Delta_E = \frac{1}{a^2 + 1} (a^2 \partial_x^2 + 2a \partial_{xy}^2 + \partial_y^2).$$

Logo, para qualquer função  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , segue, da fórmula de Itô, que

$$f(\phi(B_t)) = f(\phi(x_0)) + \int_0^t a(\partial_x f)(\phi(B_s)) + (\partial_y f)(\phi(B_s)) dW_s + \int_0^t (\Delta_E f)(\phi(B_s)) ds,$$

mostrando que  $\phi(B)$  é o movimento browniano folheado da folheação de Kronecker. ■

A construção do MBFo dada acima é uma construção global. No entanto, é possível fazer uma outra construção global, utilizando à geometria extrínseca. Usando a mesma notação do Apêndice do Capítulo 4, temos o seguinte resultado.

**Proposição 11.** *Sejam  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada e  $Y$  o processo solução da equação de Stratonovich*

$$\delta Y = \sum_{i=1}^N X_i(Y) \delta B^i,$$

onde  $(B^1, \dots, B^N)$  é o movimento browniano em  $\mathbb{R}^N$ . Então  $Y$  é um MBFo.

**Demonstração:** Seja  $f$  uma função  $C^\infty(M)$ , então, da fórmula de Itô e do Lema 9, temos que

$$f(Y) - f(Y_0) = \int g_E(\text{grad}_E f(Y), X_k(Y)) dB^k + \int \frac{1}{2} \Delta_E f(Y) dt, \quad (6.1)$$

donde segue o resultado. ■

## 6.2 Medidas Harmônicas

O semigrupo de Markov associado ao MBFo é definido pelas probabilidades de transição

$$P(t, x, A) = \mathbb{P}\{\omega : \phi(t, x, \omega) \in A\},$$

onde  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times M \times \Omega \rightarrow M$  é o fluxo solução da equação (6.1) e  $A \in \text{Borel}(M)$ .

Todo semigrupo de Markov induz um semigrupo de operadores  $T_t : C_b^2(M) \rightarrow C^\infty(M)$  (ver, por exemplo, Pei-Dong Liu e Min Qian [33] ou Ikeda e Watanabe [23]) da seguinte forma

$$T_t f(x) = \mathbb{E}[f(B_t^x)] = \mathbb{E}[f(\phi(t, x, \cdot))] = \int_M f(y) P(t, x, dy).$$

É fácil ver que, no caso do MBFo, o gerador infinitesimal do semigrupo de operadores é  $\Delta_E$ . Decorre disto que, para toda  $f \in C_b^2$ , a função  $T_t f(x)$  resolve

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} T_t f(x) = \Delta_E T_t f(x) \\ \lim_{t \rightarrow 0} T_t f(x) = f(x) \end{cases}$$

O semigrupo adjunto,  $\{T_t^*\}$ , age em  $\mathfrak{M}(M)$ , o espaço de medidas de  $M$ , da seguinte forma

$$T_t^* \mu(A) = \int_M P(t, x, A) \mu(dx).$$

Desta discussão, obtemos seguinte teorema de Lucy Garnett ([17]).

**Teorema 22.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada*

1) Se  $M$  for compacta, existem medidas harmônicas, isto é, medidas  $\mu$  tais que

$$\int_M \Delta_E f(x) \mu(dx) = 0 \quad \forall f \in C^2(M).$$

2) Toda função limitada  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  que é harmônica nas folhas é constante em  $\mu$ -q.t. folha com respeito a qualquer medida harmônica finita.

3) Assumimos que as folhas de  $F$  têm geometria limitada, isto é  $Ric_E > Rg_E$ . Seja  $\mu$  uma medida harmônica finita e  $f$  uma função limitada, com derivadas de primeira ordem limitadas e harmônica nas folhas. Então toda  $f$  é constante em  $\mu$ -q.t. folha.

**Demonstração:** 1) Lembramos que uma medida é dita invariante se  $T_t^* \mu = \mu$  para todo  $t \geq 0$ . Se  $M$  for compacto, então existe (ver Teorema 12) no mínimo uma medida invariante. Em geral, para quaisquer função  $f \in C^\infty(M)$  e medida invariante  $\mu$  temos que

$$\begin{aligned} \int_M f(x) \mu(dx) &= \int_M f(x) T_t^* \mu(dx) \\ &= \int_M \int_M f(x) P(t, y, dx) \mu(dy) \\ &= \int_M T_t f(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

Se a medida  $\mu$  for invariante, então para toda  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  que é  $C^2$  na direção da folha tal que  $\int_M h(x) \mu(dx) < \infty$  resulta que

$$\begin{aligned} \int_M \Delta_E h(x) \mu(dx) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M T_t h(x) \mu(dx) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M h(x) T_t^* \mu(dx) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M h(x) \mu(dx) = 0. \end{aligned}$$

2) Seja uma  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  função harmônica na direção da folha, isto é,  $\Delta_E f = 0$ , então  $f$  é claramente  $T_t$  invariante. Seja  $\mu$  uma medida harmônica, segue do Corolário 1 que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (\Delta_E f^2(x)) \mu(dx) = 2 \int_M f(x) \Delta_E f(x) \mu(dx) + \int_M \|\text{grad}_E f\|^2(x) \mu(dx) \\ &= \int_M \|\text{grad}_E f\|^2(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

3) Como as folhas têm geometria limitada, temos que o MBFo  $B$  está definido para todo tempo  $t \geq 0$ , pois a restrição do MBFo a cada folha é um MB desta. Por um resultado clássico (ver, por exemplo, Elworthy [11]), sabemos que o MB não explode. Seja  $f$  uma função limitada, com derivadas limitadas e harmônica nas folhas. Assuma  $C > \sup\{|f|, |D_i f|\}$ . Pela definição do MBFo, segue que  $\mathbb{E}[f(B)] = f(B_0)$  bem como resulta

$$C^2 > \mathbb{E}[f(B)^2] = f(B_0)^2 + \int \mathbb{E} [\|\text{grad}_E f\|^2(B)] dt,$$

tendo sido utilizado que

$$\Delta_E f^2 = 2f\Delta_E f + \|\text{grad}_E f\|^2,$$

junto com a harmonicidade de  $f$ . Logo, para cada  $B_0$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|\text{grad}_E f\|^2(B_t)] = 0.$$

Seja  $\mu$  uma medida harmônica finita em  $M$ . Observamos que para cada  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_M \|\text{grad}_E f\|^2(x) \mu(dx) &= \int_M \|\text{grad}_E f\|^2(x) T_t^* \mu(dx) \\ &= \int_M T_t \|\text{grad}_E f\|^2(x) \mu(dx), \end{aligned}$$

e

$$T_t \|\text{grad}_E f\|^2(x) \geq 0, \quad T_t \|\text{grad}_E f\|^2 < C^2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|\text{grad}_E f\|^2(B_t(x))] = 0.$$

Temos, então, que

$$\int \|\text{grad}_E f\|^2(x) \mu = \int T_k \|\text{grad}_E f\|^2 \mu,$$

para todo  $k$ , além de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k \|\text{grad}_E f\|^2 = 0.$$

O resultado segue do teorema da convergência dominada. ■

De forma similar, obtemos nossa versão do resultado de Adams em [1].

**Teorema 23.** *Sejam  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada com folhas de geometria limitada, e  $\mu$  uma medida harmônica finita. Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  uma função limitada, com derivadas de primeira ordem limitadas, tal que, para  $\mu$ -q.t. folha,  $\Delta_E f \leq 0$ . Então  $f$  é constante em  $\mu$ -q.t. folha.*

**Demonstração:** Seja  $B$  o movimento browniano folheado. Considere a função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\Delta_E f \leq 0$ . Considere  $u = \ln(f + 1)$ . Então  $u$  é positiva e satisfaz

$$\|\text{grad}_E u\|^2 + \Delta_E u = \frac{\Delta_E f}{f + 1} \leq 0.$$

Portanto, utilizando a última desigualdade e a definição do MBFo, temos

$$0 < \mathbb{E}[u(B)] \leq u(B_0) - \frac{1}{2} \int \mathbb{E} [\|\text{grad}_E u\|^2(B)] dt.$$

Decorre daí que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|\text{grad}_E u\|^2(B_t)] = 0.$$

Seja  $\mu$  uma medida harmônica finita em  $M$ . Tal como na demonstração do terceiro item do teorema anterior, garantimos

$$\int \|\text{grad}_E u\|^2(x) \mu = \int T_k \|\text{grad}_E u\|^2(x) \mu$$

para todo  $k$ , e que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k \|\text{grad}_E u\|^2(x) = 0.$$

Segue do teorema da convergência dominada que  $\text{grad}_E u = 0$  q.t. folha, mas isto implica que  $\text{grad}_E f = 0$  q.t. folha. ■

A seguir vamos mostrar um exemplo de como construir o MBFo e calcular a medida invariante.

**Exemplo:** Sejam  $\mathbb{T}^2$  o toro e  $\phi : (0, 2\pi)^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma carta dada por

$$\phi(x, y) = ((b + \cos(x)) \cos(y), (b + \cos(x)) \sin(y), \sin(x)),$$

com  $b > 1$ . A métrica induzida é descrita, nesta carta, por

$$g = dx^2 + (b + \cos(x))^2 dy^2$$

e a conexão riemanniana  $\nabla$ , por

$$\nabla_{\partial_x} \partial_x = 0, \quad \nabla_{\partial_x} \partial_y = \frac{-\sin(x)}{b + \cos(x)} \partial_y, \quad \nabla_{\partial_y} \partial_y = (b + \cos(x)) \sin(x) \partial_x.$$

Consideramos a folheação no toro dada pelas linhas de fluxo do campo vetorial  $Z = \alpha X_1 + X_2$ , onde  $\{X_1, X_2\}$  é uma base ortonormal de  $T\mathbb{T}^2$  dada por

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \frac{1}{(b + \cos(x))} \partial_y,$$

com subfibrado integrável associado  $E = \{\lambda Z, \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Denotamos  $Y = Z/\|Z\|$ . A folha através de  $(x_0, y_0)$  é a linha de fluxo de  $Y$  através de  $(x_0, y_0)$ , onde o fluxo  $\psi$  de  $Y$  está representado por  $\psi_t(x_0, y_0) = (x_t, y_t)$  com

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2}} && (2\pi \text{ mod } ), \\ y_t &= y_0 + A + \frac{2}{\alpha \sqrt{b^2 - 1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \tan \left( \frac{x_t}{2} \right) \right) && (2\pi \text{ mod } ), \\ A &= \frac{-2}{\alpha \sqrt{b^2 - 1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \tan \left( \frac{x_0}{2} \right) \right) && (2\pi \text{ mod } ). \end{aligned}$$

Mas

$$\nabla_Y Y = \frac{\sin(x)}{(1 + \alpha^2)(b + \cos(x))} \partial_x - \frac{\alpha \sin(x)}{(1 + \alpha^2)(b + \cos(x))^2} \partial_y,$$

portanto  $\nabla_Y^E Y = 0$  e  $\Delta_E = Y^2$ . Assim, o MBFo em  $\mathbb{T}^2$  pode ser escrito como  $B^F = \phi(x_t, y_t)$  onde  $x_t$  e  $y_t$  são solução de

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} dB_t, \\ dY_t &= \frac{1}{(b+\cos(X_t))\sqrt{1+\alpha^2}} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\alpha \sin(X_t)}{(1+\alpha^2)(b+\cos(X_t))^2} dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} B_t \quad (2\pi \text{ mod } ), \\ Y_t &= y_0 + A + \frac{2}{\alpha \sqrt{b^2-1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \tan \left( \frac{X_t}{2} \right) \right) \quad (2\pi \text{ mod } ). \end{aligned}$$

De fato, isto é o mesmo que dizer que o MBFo que começa em  $(x_0, y_0)$  é dado por

$$B_t^L = \psi_{B_t}(x_0, y_0).$$

Isto era esperado, pois  $\psi(x_0, y_0) : [0, \infty) \rightarrow L$  é uma isometria para cada folha  $L$ .

Assumindo que a medida harmônica é da forma  $\mu = h(x) \mu_g$ , resulta que  $h$  satisfaz

$$Y^2(h) + 2\operatorname{div}(Y) Y(h) + (Y(\operatorname{div}(Y)) + \operatorname{div}(Y))^2 h = 0,$$

ou em coordenadas

$$(b + \cos(x)) \frac{d^2}{dx^2} h(x) - 2 \sin(x) \frac{d}{dx} h(x) - \cos(x) h(x) = 0.$$

A solução desta equação é

$$h(x) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(b + \cos(x))}.$$

Assim

$$\mu = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(b + \cos(x))} \mu_g.$$

■

Este exemplo motiva o seguinte resultado.

**Proposição 12.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada. Assumamos que a folheação  $F$  é dada pelas linhas de fluxo de um campo vetorial não singular  $Y$  tal que  $\|Y\| = 1$ . Então o MBFo é dado por  $\phi_B$ , onde  $B$  é o movimento browniano em  $\mathbb{R}$  e  $\phi_t$  é o fluxo do campo vetorial  $Y$ .*

**Demonstração:** Consideremos a folha  $L$  passando por  $x_0 \in M$ . Então  $L = \phi_{\mathbb{R}}(x_0)$ . Observamos que como  $Yg(Y, Y) = 0$ , então  $g(\nabla_Y Y, Y) = 0$  e  $\nabla_Y^E Y = 0$ . Portanto, para toda  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  temos que

$$\partial_t^2 f(\phi(x_0)) = Y^2 f(\phi(x_0)) = \Delta_E f(\phi(x_0)).$$

Seja  $B$  o movimento browniano em  $\mathbb{R}$ . Logo

$$f(\phi_B(x_0)) - f(\phi_0(x_0)) - \frac{1}{2} \int \partial_t^2 f(\phi_B(x_0)) dt = f(\phi_B(x_0)) - f(\phi_0(x_0)) - \frac{1}{2} \int \Delta_E f(\phi_B(x_0)) dt,$$

donde o resultado segue imediatamente. ■

En geral, se temos duas variedades folheadas e uma aplicação folheada diferenciável entre elas, podemos obter uma relação entre as medidas harmônicas de ambas variedades.

**Proposição 13.** *Se  $\phi : (M, F) \rightarrow (N, F')$  é uma aplicação folheada que transforma MBFo em MBFo e  $\mu$  é uma medida harmônica em  $M$ , então  $\tilde{\mu} = \mu \circ \phi^{-1}$  é uma medida harmônica em  $N$ .*

**Demonstração:** Seja  $\mu$  uma medida harmônica em  $(M, F)$ . Claramente  $\tilde{\mu} = \mu \circ \phi^{-1}$  é uma medida de  $N$ . Aplicando a Proposição 9, temos que, para toda função  $f$  diferenciável na direção da folha,

$$\int_N (\Delta_{E'} f) \tilde{\mu} = \int_M (\Delta_{E'} f) \circ \phi \mu = \int_M \Delta_E (f \circ \phi) \mu = 0.$$

Assim,  $\tilde{\mu}$  é uma medida harmônica de  $N$ . ■

**Observação:** O resultado anterior pode ser generalizado da seguinte forma. Sejam  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação suave e  $X$  uma difusão em  $M$ , com gerador infinitesimal  $L$ , tal que

$$\phi_* L = \Delta_E.$$

Então, pela compacidade de  $N$ , temos que  $L$  possui uma medida invariante  $\tilde{\mu}$ . Portanto, se  $\mu = \tilde{\mu} \circ \phi^{-1}$ , temos que

$$\int_N \Delta_E f \mu = \int_M L(f \circ \phi) \tilde{\mu} = 0.$$

Segue disto que a medida  $\mu$  é harmônica. Um argumento deste tipo foi utilizado por Ledrappier [28] no estudo das medidas harmônicas nas folheações associadas a um difeomorfismo de Anosov e por nós mesmos na primeira construção do MBFo.

Quando a folheação  $F$  é orientada e transversalmente orientada e possui uma medida transversal invariante por holonomia, é possível caracterizar algumas classes de medidas harmônicas, como mostra um resultado que foi obtido por Garnett em [17] (Corolário 3). A seguir não só mostramos este resultado como também caracterizamos determinadas medidas harmônicas.

**Proposição 14.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada, com  $M$  compacta e sem bordo. Se  $\nu$  é uma medida invariante por holonomia então  $\tilde{\mu} = \chi \wedge \nu$  é uma medida harmônica. Mais ainda, se  $\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu_g} > 0$  e  $\mu$  é uma medida harmônica com derivada de Radon-Nikodim  $\frac{d\mu}{d\tilde{\mu}} = h : M \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $C^2$  na direção da folha, então existe uma função  $\tilde{h}$  na classe de  $h \in L^1(\mu_g)$  tal que  $\text{grad}_E h = 0$  e que*

$$\mu = \tilde{h} \tilde{\mu}.$$

**Demonstração:** Seja  $\nu$  a medida transversal invariante por holonomia. Então  $L_X\nu = 0$  para todo  $X \in E$ . Definimos  $\tilde{\mu} = \chi \wedge \nu$  e consideremos  $Y = \text{grad}_E f$ . Do Lema 6, resulta

$$L_Y \tilde{\mu} = \text{div}_E(Y)\chi \wedge \nu + \chi \wedge L_Y \nu = \Delta_E(f)\tilde{\mu}.$$

Então, pelo Teorema de Stokes, verificamos

$$\int_M \Delta_E(f)\tilde{\mu} = \int_M \mathcal{L}_Y(\tilde{\mu}) = \int_{\partial M} i_Y(\tilde{\mu}) = 0.$$

Portanto,  $\tilde{\mu}$  é harmônica.

Seja  $\mu$  uma medida harmônica com derivada de Radon Nikodim  $d\frac{d\mu}{d\mu_g}h$  contínua e  $C^2$  na direção da folha. Assumimos  $\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu_g} > 0$ . Então  $\mu$  pode ser escrita como

$$\mu = h\tilde{\mu}.$$

Logo, para uma função arbitrária  $f$ , temos, pelo lema 1,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \Delta_E f \mu = \int_M \Delta_E f h \tilde{\mu} \\ &= - \int_M (\Delta_E h) f \tilde{\mu} - \int_M g(\text{grad}_E f, \text{grad}_E h) \tilde{\mu}. \end{aligned}$$

Assim, tomando  $f = h$  temos, pela harmonicidade de  $\mu = h\tilde{\mu}$ , que

$$\int_M \|\text{grad}_E h\|^2 \tilde{\mu} = 0.$$

Logo,  $h$  é constante  $\tilde{\mu}$  q.t. folha e, portanto,  $h$  é constante  $\mu_g$  q.t. folha. Consequentemente existe uma função  $\tilde{h}$ , na classe de  $h \in L^2(\mu_g)$ , tal que  $\mu = \tilde{h}\tilde{\mu}$ . ■

**Observação:** Como é possível ver na demonstração, não precisamos de nenhuma caracterização das medidas harmônicas tampouco necessitamos considerar cartas folheadas. Somente foi utilizado o cálculo diferencial desenvolvido no trabalho e fatos já conhecidos, como o teorema de Stokes. Esta é, de fato, uma grande vantagem desta abordagem: conseguir enxergar propriedades intrinsecamente, sem ter que descer nas cartas folheadas.

É sabido que as medidas harmônicas têm como suporte conjuntos saturados (ver Lema A de [17] e discussão abaixo). O problema destes suportes é que podem ser tão simples quanto a união discreta de folhas (ver trabalhos de Feres et. al. [14], [15]). Isto dificulta a existência de densidades diferenciáveis das medidas harmônicas com respeito à medida de Lebesgue. Como veremos agora, a existência destas densidades está relacionada à solução de uma equação diferencial de segunda ordem associado ao laplaciano folheado. A solução deste tipo de equações é muito difícil de garantir. Na verdade, até onde sabemos, não há nenhum resultado que garanta a existência de solução.

**Proposição 15.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada compacta e sem bordo. Então, uma medida da forma  $\mu = h\mu_g$ , com  $h \geq 0$  e  $C^2$  nas folhas, é harmônica se, e somente se,  $h$  satisfaz*

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}_E h - h\kappa) = 0 \quad \mu_g - q.t.p.$$

**Demonstração:** Observamos que

$$(\Delta_E f - \kappa f)\mu_g = L_{\operatorname{grad}_E f}\mu_g.$$

Portanto se a variedade  $M$  for compacta e sem bordo, então o operador  $\Delta_E - \kappa$  é auto adjunto. De fato, pelo teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned} \int_M h(\Delta_E - \kappa)f\mu_g &= \int_M h L_{\operatorname{grad}_E f}\mu_g \\ &= - \int_M g(\operatorname{grad}_E f, \operatorname{grad}_E h)\mu_g \\ &= \int_M f L_{\operatorname{grad}_E h}\mu_g \\ &= \int_M f(\Delta_E - \kappa)h\mu_g. \end{aligned}$$

Considerando  $h = 1$  na equação acima, vemos que para qualquer função  $f$  em  $C^2(M)$

$$\int_M (\Delta_E - \kappa)f\mu_g = 0.$$

Se a medida harmônica é da forma  $h\mu_g$ , então, para toda função  $f$ , por iteração do argumento anterior, temos

$$0 = \int_M (\Delta_E f)h\mu_g = \int_M f(\Delta_E h - 2\kappa h - \operatorname{div}(\kappa)h)\mu_g.$$

Logo,  $h$  satisfaz a seguinte equação

$$\Delta_E h - 2\kappa h - \operatorname{div}(\kappa)h = 0 \quad \mu_g - q.c. \quad (6.2)$$

ou equivalentemente

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}_E h - h\kappa) = 0 \quad \mu_g - q.c.$$

■

Um corolário imediato é o seguinte.

**Corolário 3.** *Seja  $M$  uma variedade compacta sem bordo. Então  $\operatorname{div}(\kappa) = 0$  se, e somente se, toda medida da forma  $\mu = h\mu_g$  com  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica na direção da folha e  $\mu_g$  a medida de Lebesgue, é harmônica.*

**Demonstração:** Se  $\operatorname{div}(\kappa) = 0$ , então da discussão acima concluímos que  $\mu_g$  é uma medida harmônica. O corolário segue agora do Corolário 1 e do Teorema 22.

Por outro lado, as funções constantes são harmônicas. Portanto, podemos escolher  $h \equiv 1$ . Segue então, da fórmula 6.2, que  $\operatorname{div}(\kappa) = 0$ . ■

**Observação:** Da demonstração do corolário segue que, para toda medida harmônica que possui uma densidade diferenciável com respeito a medida de Lebesgue, temos que esta densidade é uma função básica, isto é, uma função tal que o gradiente folheado é nulo.

Do teorema de decomposição de Hodge, temos que existem uma função  $f$ , uma 1-forma harmônica  $\gamma$  e uma 2-forma  $\beta$  tais que  $k^\perp = df + \delta\beta + \gamma$ . O fato de  $\operatorname{div}(k) = 0$  implica  $0 = \delta k^\perp = -\Delta_M f$ . Como  $M$  é compacta, temos que  $f = \text{cte}$ . Assim  $k^\perp = \delta\beta + \gamma$ . Além disto, a equação (6.2) se reduz à seguinte

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}_E h) = \kappa(h) \quad \mu_g - \text{q.t.p.}$$

**Definição 10.** *Seja  $(M, F, G)$  uma variedade riemanniana folheada. Dizemos que  $F$  possui a propriedade de Liouville se qualquer função  $f$  harmônica (ou seja  $\Delta_E f = 0$ ) satisfaz  $\operatorname{grad}_E f = 0$ .*

Podemos caracterizar probabilisticamente a probabilidade de Liouville. Este é o conteúdo da seguinte proposição.

**Proposição 16.** *Seja  $(M, F, G)$  uma variedade riemanniana folheada. Então,  $F$  possui a propriedade de Liouville se, e somente se, toda função harmônica na direção da folha transforma o MBFo em um processo de variação limitada.*

**Demonstração:** Assumamos que  $F$  possui a propriedade de Liouville. Então, o resultado segue do lema 11.

Por outro lado, assumamos que todas as funções harmônicas na direção da folha transformam o MBFo em um processo de variação limitada. Segue da definição do MBFo que processo estocástico  $X = f(B) - f(B_0)$  é uma martingale local. Mas, por hipótese,  $X$  tem variação limitada. Logo, novamente pelo Lema 11, temos que para todo  $\epsilon > 0$

$$\int_t^{t+\epsilon} \|\operatorname{grad}_E f\|^2(B_s) ds = 0.$$

Derivando esta expressão com respeito a  $t$  e avaliando em  $t = 0$  temos que  $\|\operatorname{grad}_E f\|(B_0) = 0$ . O Resultado segue da liberdade na escolha do ponto inicial  $B_0$ . ■

**Proposição 17.** *Seja  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada compacta e sem bordo. A seguinte fórmula vale*

$$\int_M \|\operatorname{grad}_E h\|^2 \mu_g = - \int_M h^2 \operatorname{div}(\kappa) \mu_g.$$

**Demonstração:** Se  $M$  for uma variedade compacta sem bordo temos que

$$0 = \int_M (\Delta_E - \kappa)h^2 \mu_g = 2 \int_M \|\text{grad}_E h\|^2 \mu_g - \int_M \kappa(h^2) \mu_g.$$

É fácil verificar que esta fórmula pode ser re escrita da seguinte forma

$$\int_M \|\text{grad}_E h\|^2 \mu_g = - \int_M h^2 \text{div}(\kappa) \mu_g.$$

■

**Observação:** A condição de  $\text{div}(\kappa) = 0$  não é fundamental para que se cumpra a propriedade de Liouville, como mostra o exemplo do toro visto anteriormente, no qual a medida harmônica é absolutamente contínua em relação medida de Lebesgue mas  $\text{div}(\kappa) \neq 0$ .

### Exemplos:

- 1- Consideremos uma variedade riemanniana compacta sem bordo  $M$  de  $\dim(M) = 3$  e base ortonormal  $\{X, Y, H\}$  satisfazendo

$$[X, H] = X \quad [X, Y] = -H \quad [H, Y] = Y.$$

(Um exemplo destes espaços pode ser obtido do quociente do recobrimento universal de  $SL(2, \mathbb{R})$  por uma reticulado cocompacto). Seja  $F$  a folheação induzida por  $E = \text{span}\{X, H\}$ . Então, temos que as fórmulas relevantes são

$$\nabla_H H = 0, \quad \nabla_X X = -H, \quad \nabla_Y Y = H$$

$$\nabla_X Y = -\frac{1}{2}H,$$

$$\nabla_X H = X + \frac{1}{2}Y,$$

$$\nabla_Y H = -Y - \frac{1}{2}X.$$

Logo segue que

$$\Delta_E = X^2 + H^2 + H, \quad \kappa = H, \quad \text{e} \quad \text{div}(H) = 0.$$

Assim, temos que o MBFo obedece a seguinte EDE

$$dB = \frac{1}{2}H dt + H \delta B^1 + X \delta B^2,$$

onde  $(B^1, B^2)$  é o movimento browniano em  $\mathbb{R}^2$ . Por outro lado, do fato de  $\text{div}(\kappa) = 0$ , constatamos que a medida de Lebesgue é harmônica. Portanto, toda medida harmônica

será uma função básica  $f \geq 0$  pela medida de Lebesgue  $\mu_g$ . Se  $f$  for diferenciável, temos que  $Yf$  é invariante pelo campo  $H$ . De fato,

$$\begin{aligned} H(Yf) &= Yf + YHf \\ &= Yf. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M H(Yf)^2 \mu_g = 2 \int_M (Yf)H(Yf) \mu_g \\ &= 2 \int_M (Yf)^2 \mu_g. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Logo  $Yf = 0$ . Resulta que  $f = \text{cte.}$  portanto, a única medida harmônica não singular é a medida de Lebesgue. ■

- 2- Sejam  $M$  uma variedade diferenciável,  $G$  um grupo de Lie de dimensão  $q$  e  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie de  $G$ . Assuma que existe uma 1-forma  $\omega : TM \rightarrow \mathfrak{g}$  não singular, isto é,  $\omega_x : T_x M \rightarrow \mathfrak{g}$  é sobrejetora, satisfazendo a fórmula de Maurer-Cartan

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

Seja  $E_x = \ker \omega_x$  para todo  $x \in M$ . Defina  $E = \cup_{x \in M} E_x$ . Segue da fórmula de Maurer-Cartan que  $E$  define uma folheação em  $M$ . Esta folheação chama-se de Folheação de Lie.

Consideremos  $\{e_1, \dots, e_q\}$  uma base de  $\mathfrak{g}$  e  $Y_1, \dots, Y_q$  vetores em  $TM$  tais que  $\omega(Y_k) = e_k$ . Então temos que, para todo  $X \in E$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= -[\omega(X), \omega(Y_k)] = d\omega(X, Y_k) \\ &= X\omega(Y_k) - Y_k\omega(X) - \omega([X, Y_k]) \\ &= X(e_k) - \omega([X, Y_k]) = -\omega([X, Y_k]). \end{aligned}$$

Portanto, vale que  $[X, Y_k] \in E$ . Se introduzimos uma métrica adaptada em  $M$ , ou seja, uma métrica  $g$  tal que  $g(Y_k, Y_j) = \delta_{kj}$  e  $Y_1, \dots, Y_q$  forma uma base ortonormal de  $E^\perp$ , resulta que, para todo  $X \in E$ ,

$$g(\kappa, X) = \sum_{k=1}^q g(\nabla_{Y_k} Y_k, X) = g([Y_k, X], Y_k) = 0.$$

Vemos então que  $\kappa = 0$  o que implica que  $\mu_g$  é uma medida harmônica e que  $\Delta_E$  é um operador auto-adjunto.

O fato de  $\kappa$  ser zero junto com o Lema 8 implicam que o laplaciano em  $M$  se parte como a soma dos laplacianos folheado e básico, ou melhor

$$\Delta_M = \Delta_E + \Delta_b. \quad \blacksquare$$

### 6.3 Transiência e Recorrência do MBFo

Nesta última seção, estudaremos a transiência e recorrência do MBFo como processo estocástico em  $M$ . O estudo destas propriedades é um tópico clássico em sistemas dinâmicos estocásticos.

**Definição 11.** *Sejam  $(M, F, g)$  uma variedade riemanniana folheada e  $B$  o MBFo. Dizemos que um ponto  $x \in M$  é recorrente se para toda vizinhança aberta  $U$  de  $x$  existe alguma seqüência  $\{t_k\} \uparrow \infty$  tal que*

$$\mathbb{P}[\{B_{t_k}^x \in U, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots\}] = 1.$$

*Caso contrário, o ponto é transiente. Dizemos que o MBFo é recorrente se todo ponto for recorrente, analogamente dizemos que é transiente se todo ponto for transiente*

Sejam  $B$  o MBFo em  $M$  e  $U$  um boreliano de  $M$ . Definimos

$$\begin{aligned} e_U(x) &= \mathbb{P}_x[\{\exists t \geq 0, B_t \in U\}], \\ h_U(x) &= \mathbb{P}_x[\{\exists t_k \rightarrow \infty, B_{t_k} \in U, \forall k \in \mathbb{N}\}], \end{aligned}$$

e o subconjunto  $A_t$  do espaço de probabilidade  $\Omega$ , para  $t > 0$ ,

$$A_t = \{\exists s \geq t, B_s \in U\}.$$

Observamos que  $x$  é recorrente se  $h_U(x) = 1$  e transiente se  $h_U(x) = 0$ . Claramente  $A_t \subset A_s$  se  $t \geq s$ . Por definição, temos que

$$h_U(x) = \mathbb{P}_x(A_\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(A_t),$$

onde  $A_\infty = \bigcap_{t \geq 0} A_t$ .

Temos a seguinte lei 0-1 para o MBFo.

**Teorema 24.**  $\mathbb{P}(A_\infty) = 0$  ou  $1$

**Demonstração:** Sejam  $t \geq 0$  e  $\mathfrak{U}_t(V)$  a família de conjuntos de  $\Omega$  da forma

$$\{\omega \in \Omega, B_s(\omega) \in V, s \geq t\},$$

onde  $V$  é boreliando de  $M$ . Seja  $\mathfrak{G}_t$  a menor  $\sigma$ -álgebra gerada pelos  $\mathfrak{U}_t(V)$ . Como  $\mathfrak{G}_t \subseteq \mathfrak{G}_s$  se  $t \geq s$  e  $A_t \in \mathfrak{G}_t$ , resulta que

$$A_\infty \in \bigcap \mathfrak{G}_t.$$

O resultado segue da lei 0 – 1 de Kolmogorov. ■

**Corolário 4.** *O MBFo é transiente ou recorrente em  $\mu$  q.t. folha.*

**Demonstração:** Do Lema anterior segue que  $h_U(x) = 0$  ou  $h_U(x) = 1$ . Observamos que pela propriedade de Markov,

$$e_U(B_t^x(\omega)) = \mathbb{P}_{B_t^x(\omega)}[\{\exists s \geq 0, B_s \in U\}] = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A_t, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} .$$

Portanto

$$\mathbb{P}_x(A_t) = \int_{A_t} d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} e_U(B_t^x(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[e_U(B_t^x)] = T_t e_U(x),$$

onde  $T_t$  é o semigrupo de Markov gerado pelo MBFo. Disto segue que

$$h_U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t e_U(x) := T_{\infty} e_U(x)$$

e que  $h_U$  é uma função harmônica folheada. Pelo teorema de Garnett, temos que  $h_U$  é constante em  $\mu$  quase toda folha. Segue disto que o MBFo é recorrente ou transiente em cada folha. ■

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## APÊNDICE

Neste apêndice faremos um breve resumo de parte do trabalho do doutorando que foi publicado no *Dynamical Systems* [8]. O trabalho foi feito em conjunto com os professores Pedro Catuogno e Paulo Ruffino. Consideramos que por ter sido avaliado pelos avaliadores do jornal não deveria formar parte do trabalho a ser defendido, mas sim estar incluso em forma de resumo na monografia da tese.

---

### 7.1 Número de Rotação Relativo para Sistema Dinâmicos Estocásticos

---

Sejam  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  uma curva contínua e processos  $X_t$  e  $Y_t$  em  $TM^0 = TM - \{0\}$  tais que  $X_t, Y_t \in T_{\gamma(t)}M$ . Denotamos por  $A_{\gamma, X, Y}(t)$  o processo real que mede o ângulo entre os processos  $Y_t$  e  $X_t$  com ângulo inicial  $A_{X, Y}(0) \in [0, 2\pi)$ . Definimos o *número de rotação relativo* do vetor  $Y_t$  com respeito  $X_t$  ao longo da curva  $\gamma(t)$  por

$$\rho(\gamma, X, Y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_{\gamma, X, Y}(t)}{t},$$

quando o limite existe. Este número mede a velocidade angular relativa de  $Y_t$  quando  $X_t$  é considerado o referencial angular no plano  $T_{\gamma(t)}M$ . Notamos que as normas de  $X$  e  $Y$  não são relevantes.

Seja  $\pi : TM^0 \rightarrow M$  a projeção canônica. Considere em  $TM^0$  a 1-forma ângulo  $\omega$  em cada plano do espaço tangente  $T_x M^0, x \in M$ . Seja  $\tilde{\nabla}$  a extensão vertical da conexão  $\nabla$  em  $M$  a  $TM^0$ . Denotamos também por  $\tilde{\nabla}$  a extensão de  $\nabla$  no fibrado das esferas  $STM$ . Como o transporte paralelo preserva ângulos, temos que  $\omega$  é um tensor vertical em  $TM^0$ , ou seja,  $\tilde{\nabla}\omega = 0$ . Em termos de  $\omega$ , a definição do número de rotação pode ser escrita

$$\rho(\gamma, X, Y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \int_{X_t} \omega - \int_{Y_t} \omega \right\} \quad (7.1)$$

**Proposição 18.** *Seja  $\gamma$  uma curva em  $M$ . Considere  $X, Y, Z$  processos contínuos em  $TM^0$ , sobre  $\gamma$ . Assumindo que os números de rotação existem, temos que*

a) (aditividade)  $\rho(\gamma, X, Z) = \rho(\gamma, X, Y) + \rho(\gamma, Y, Z)$ ;

b) (anti-simetria)  $\rho(\gamma, X, Y) = -\rho(\gamma, Y, X)$ .

Sobre a existência, nosso primeiro resultado é o seguinte.

**Proposição 19.** *Considere a trajetória  $x_t(\omega)$  da EDE*

$$dx = \sum_{i=0}^m A^i(x) \circ dB^i \quad (7.2)$$

e uma difusão  $Y$  em  $STM$ , com  $\pi Y = x$ , solução de

$$DY_t = \sum_{i=0}^m \xi^i(Y_t) \circ dW_t^i, \quad (7.3)$$

onde  $Y_0 \in T_{x_0}M$ . Sejam  $\mu$  uma medida de probabilidade ergódica invariante em  $M$  e  $\nu$  uma medida invariante em  $STM$  com  $\pi_*\nu = \mu$ . Então  $\rho(x_t, //Y_0, Y_t)$  existe e é constante para  $\mathbb{P} \times \nu$ - quase todo  $(\omega, x_0)$ . Mais precisamente,  $\mathbb{P} \times \nu$  q.c.:

$$\rho(x_t, //Y_0, Y) = \int_{STM} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\nabla} \xi^i(\xi^i(v)), \tilde{\nabla} R \xi^i(R \xi^i(v)) \rangle + \langle \xi^0(v), Rv \rangle \, d\nu(v).$$

A projeção da difusão em  $TM^0$  sobre o fibrado das esferas  $STM$  é de novo uma difusão. Portanto, a Proposição 19 também garante que o número de rotação existe para toda difusão  $Y$  em  $TM^0$ . No caso geral, temos o seguinte resultado.

**Teorema 25.** *Sejam  $x$  uma difusão em  $M$  e  $X$  e  $Y$  difusões tangentes em  $T_{x_t}M$  ao longo de  $x$ . Portanto, se existe uma medida ergódica invariante  $\mu$  em  $M$  então existe  $\rho(x_t, X_t, Y_t)$ , o número de rotação relativo de  $Y$  em relação ao referencial  $X$  ao longo de  $x_t$ , mais ainda, este é  $\mathbb{P} \times \mu$ -q.c. constante.*

A definição do número de rotação pode ser estendida a dimensões maiores que 2. Para este caso geral, temos o seguinte resultado.

**Teorema 26.** *Sejam  $X$  e  $Y$  difusões não degeneradas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Então, valem*

$$\mathbb{P}\{X_t \in \ker P_p, \text{ para algum } t > 0\} = 0,$$

e

$$\mathbb{P}\{Y_t \in \ker P_p, \text{ para algum } t > 0\} = 0.$$

para todo plano  $p \in Gr_2(n)$ .

Os seguintes resultados relacionam o número definido acima com a geometria da variedade.

**Proposição 20.** *Seja  $\alpha$  uma curva regular na superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  e seja  $X$  um campo vetorial em  $M$ . Então*

$$\rho(\alpha_t, //_t(X_0), X(\alpha_t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{D}{dt} \left( \frac{X(\alpha_t)}{|X(\alpha_t)|} \right) \right] dt,$$

onde  $\left[ \frac{D}{dt} \left( \frac{X(\alpha_t)}{|X(\alpha_t)|} \right) \right]$  é o valor algébrico da derivada covariante.

**Corolário 5.** *Seja  $\alpha$  uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco sobre uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  então*

$$\rho(\alpha_t, //_t(v_0), \alpha'_t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T k_g(s) ds,$$

onde  $k_g(s)$  é a curvatura geodésica de  $\alpha_t$ .

**Corolário 6.** *Seja  $\gamma_s$  uma curva fechada, regular, parametrizada pelo comprimento de arco em  $\mathbb{R}^2$  e com período  $T$ . Então*

$$\rho(\gamma_t) = wI,$$

onde  $w = 2\pi/T$  e

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^T k(s) ds$$

é o índice de rotação de  $\gamma_s|_{(0,T)}$ .

Diferentemente de outros números de rotação para sistemas dinâmicos que existem na literatura, o número de rotação relativo definido acima é invariante por conjugação no seguinte sentido.

**Teorema 27.** *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades de dimensão 2 orientáveis e  $\phi : M \rightarrow N$  um difeomorfismo. Dadas uma curva  $\gamma$  (em particular uma curva integral de um sistema dinâmico) em  $M$ ,  $X$  e  $Y$  campos em  $TM^0$  ao longo de  $\gamma_t$ , se  $\phi$  preserva orientação, então*

$$\rho(\gamma, X, Y) = \rho(\phi(\gamma), \phi_*X, \phi_*Y),$$

caso contrário,

$$\rho(\gamma, X, Y) = -\rho(\phi(\gamma), \phi_*X, \phi_*Y).$$

Por último, discutimos o caso no qual o número de rotação é invariante por homotopia.

**Teorema 28.** *Seja  $H(s, t) : \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \rightarrow M$  uma homotopia diferenciável entre  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ . Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$ . Escrevamos  $X_t^s$  for  $X(H(s, t))$ . Assumindo que*

$$\rho(p, //_t^{-1}X_t^0, //_t^{-1}X_t^s) = 0$$

para todo  $s \in [0, 1]$ , temos, para  $Y_t^s = //_t Y_0$ , onde  $Y_0 \in T_p M$  é o transporte paralelo respeito de  $H(s, \cdot)$ , que

$$\rho(\gamma_0, X^0, Y^0) = \rho(H(s, \cdot), X^s, Y^s).$$

---

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S. R. Adams, *Superharmonic functions on foliations*. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 330, N°2 (1992), pp. 625-635.
- [2] A. Bain. *Notes on Stochastic Calculus* <http://www.chiark.greenend.org.uk/~alanb/stoc-calc.pdf>.
- [3] Bergery, B. and Bourgignon, J. P. *Laplacian and Riemannian submersion with totally geodesic fibres* Lect. Notes in Math. Vol 838, Springer 1979, pp. 30-35.
- [4] Bott, R.. *Lecture Notes on Characteristic Classes and Foliations* Lecture Notes in Math., vol. 279, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972, pp. 1-94.
- [5] Candel A., *The harmonic measures of Lucy Garnett*. Adv. Math. 176 (2003) N° 2, pp 187-247.
- [6] Candel A., Conlon L.. *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics, 23. American Mathematical Society. *Foliations II*, Graduate Studies in Mathematics, 60. American Mathematical Society.
- [7] Catuogno, P. J. *A Geometric Itô Formula*. Matemática contemporânea (SBM) Vol. 33, 2007, pp. 85-99.
- [8] Catuogno, P. J., Ledesma, D. S. e Ruffino, P. R. C. *Relative rotation number for stochastic systems: dynamical and topological applications* Dynamical Systems. Vol. 23, N° 4 (2008) pp. 425-435.
- [9] Deroin, B. and Kleptsyn, *Random conformal dynamical systems*. GAFA, Geom. funct. anal. Vol. 17 (2007), pp. 1043-1105.
- [10] Eells, J. e Sampson, J.H. *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), pp 109-160.

- [11] Elworthy, K. D. *Stochastic Differential Equations on Manifolds*, London Math. Society (Lecture Notes Series 70) Cambridge University Press 1982.
- [12] Emery, M. *Stochastic Calculus in Manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [13] Evans, L.C. *Introduction to stochastic differential equations* Berkeley lecture notes, version 1.2. <http://math.berkeley.edu/~evans/>.
- [14] Fenley, S, Feres, R and Parwani, K. *Harmonic functions on  $\mathbb{R}$  covered foliations and group actions on the circle* to appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems.
- [15] Feres R. and Zeghib A. *Dynamics on the space of harmonic functions and the foliated Liouville problem* Ergodic theory and dynamical systems, Vol. 25, N° 2 (2005), pp. 503-516.
- [16] Freedman, A. *Stochastic differential equations and applications Vol. 1*. Acad. Press (1975).
- [17] Garnett, L. *Foliation, The ergodic theorem and Brownian motion*. Journal of Functional Analysis 51 (1983), pp. 285-311.
- [18] Ghys, E. *Flots transversalement affines et tissus feuilletés*. Mém. Soc. Math. France 46 (1991), pp. 123-150.
- [19] Ghys, E. *Gauss–Bonnet theorem for 2–dimensional foliations* J. Funct. Anal. 77 N° 1 (1988), pp. 51-59.
- [20] Gromov, M. *Foliated plateau problem, part II: Harmonic maps of foliations*. Geometric And Functional Analysis. Vol. 1, N° 3 (1991), pp. 253-320.
- [21] Hsu, E. P. *Stochastic Analysis on Manifolds*. Graduate Studies in Mathematics. AMS.
- [22] Hurder, S. *The classifying space of smooth foliations*, Illinois Jour. Math. 29(1985), pp. 108-133.
- [23] Ikeda, N. e Watanabe, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Second edition. North-Holland Mathematical Library, 24. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989.
- [24] Karatzas, I. e Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*(2nd ed.) Springer (1991).
- [25] Kaimanovich, V.A. *Brownian motion on foliations: entropy, invariant measures, mixing*. Funct. Anal. Appl. 22 N° 4 (1988), pp. 326-328.

- [26] Kobayashi, S. and Nomizu, S. *Foundations of differential geometry I and II* (1963 and 1969) Interscience publishers.
- [27] Li, P. e Tam, L. *The heat equation and harmonic maps of complete manifolds*. Invent. math. 105 (1991), pp. 1-46.
- [28] Ledrappier, F. *Ergodic properties of the stable foliations* Lect. Notes in Math. Vol. 1514 (1992), pp. 131-145.
- [29] Moerdijk, I., Mrcun, J. *Introduction to foliations and Lie groupoids* Cambridge University Press (2003).
- [30] Molino, P. *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics, 73. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988.
- [31] Norris, J. R. *A complete differential formalism for stochastic calculus on manifolds*. Séminaires de Probabilités XXVI. Lect. Notes in Math. vol. 1526, Springer 1980, pp. 189-209.
- [32] Oksendal, B. K. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* Springer (2006).
- [33] Pei-Dong Liu, Min Qian *Smooth ergodic theory of Random Dynamical Systems*. Lecture Notes in Mathematics 1606, Springer.
- [34] Plante, J. F. *Foliations with measure preserving holonomy*. Annals of Mathematics, 102 (1975) pp. 327-361.
- [35] Reinhart, B. *Foliated Manifolds with Bundle-Like Metrics* The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 69, No. 1. (1959), pp. 119-132.
- [36] Reinhart, B. and Wood, J. W. *A Metric Formula for the Godbillon-Vey Invariant for Foliations*. Proc. of Am. Math. Soc. Vol. 38, No. 2. (1973), pp. 427-430.
- [37] Rumler, H. *Differential forms, Weitzembock formulae and foliations*, Publicacions Matemàtiques, Vol 33 (1989), pp. 543-554.
- [38] Tondeur, P. *Foliations on Riemannian manifolds*, Universitext, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [39] Urakawa, H. *Calculus of Variations and Harmonic maps*. American Mathematical Society (1994)
- [40] Li, Xue-Mei *An Averaging Principle for Integrable Stochastic Hamiltonian Systems*. Non-linearity 21 (2008) pp. 803-822.

- 
- [41] Yosida, K. *Functional Analysis*, Springer 6ta. Ed. (1980).
- [42] Yue, Chengbo *Brownian Motion on Anosov Foliations and Manifolds of Negative Curvature* J. Diff. Geom. 41 (1995) pp. 159-183.

---

# ÍNDICE REMISSIVO

- $\Delta_E$ , 37
- $\text{div}_E$ , 37
- $\text{grad}_E$ , 37
- $\text{Hess}_E$ , 37
- $\text{Ric}^E$ , 43
- D**, 14
- F**, 14
- H**, 14
- Q**, 15
- R**, 14
- d**, 15
  
- aplicação folheada, 44
- aplicação harmônica folheada, 45
  
- caminho, 3
- carta folheada, 21
- classe de Godbillon-Vey, 25
- cociclos de Haefliger, 23
- conexão de Bott, 31
- conjunto saturado, 29
- covariação quadrática, 7
- curvatura mediada folheação, 31
  
- decomposição de Doob-Meyer, 5
- deformação folheada, 45
- difusão, 10, 19
  
- eq. dif. est. em variedades, 17
- equações diferenciais estocásticas, 9
  
- estocasticamente completo, 13
  
- fórmula Itô folheada, 60
- fibrado cotangente de segunda ordem, 14
- fibrado folheado, 26
- fibrado tangente de segunda ordem, 14
- filtragem, 3
- fluxo, 26
- folheação, 21
- folheação de Kronecker, 22
- folheação harmônica, 31
- folheação orientável, 23
- folheação riemanniana, 30
- folheação simples, 22
- folheação totalmente geodésica, 31
- folheação transversalmente orientável, 23
  
- geometria de segunda ordem, 13
  
- holonomia, 27
  
- integral de Itô, 7, 16
- integral de Itô folheada, 58
- integral de Stratonovich, 8, 16
- integral de Stratonovich folheada, 58
- integral estocástica, 6, 16
  
- laplaciano horizontal folheado, 64
  
- martingale, 4
- martingale folheada, 54

martingale local, 5  
medida ergódica, 33  
medida invariante, 19  
medida invariante por holonomia, 32  
medidas em folheações, 32  
medidas harmônicas, 32, 67  
movimento browniano, 5, 13  
movimento browniano folheado, 55, 65

placas, 21  
processo estocástico, 3  
processo estocástico contínuo, 3  
processo estocástico folheado, 54  
processo parado, 5  
processo simples, 7

segunda forma fundamental, 31  
semimartingale, 12  
semimartingale contínua, 5  
semimartingale folheada, 54

tempo de parada, 4, 12

variação quadrática, 8, 12  
variedade riemanniana folheada, 31  
variedade transversal, 27