Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Estimação da superfície de volatilidade dos ativos através da Equação de Black-Scholes Generalizada

Leandro da Fonseca Prudente[†]
Mestrado em Matemática Aplicada - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. José Mario Martínez

[†] Este trabalho teve apoio financeiro do CNPq.

Estimação da superfície de volatilidade dos ativos através da Equação de Black-Scholes Generalizada

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Leandro da Fonseca Prudente** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de fevereiro de 2009.

Prof. Dr. **José Mario Martínez**
Orientador

Banca examinadora:
Prof. Dr. José Mario Martínez (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Roberto Andreani (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. João Luiz Chela (UPM)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a 2116

Prudente, Leandro da Fonseca
P951e Estimação da superfície de volatilidade dos ativos através da equação de Black-Scholes generalizada / Leandro da Fonseca Prudente -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientador : José Mario Martínez

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfície de volatilidade implícita. 2. Equação de Black-Scholes. 3. Opções (Finanças). I. Martínez, José Mario. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Estimation of the volatility surface of assets by generalized Black-Scholes equation.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Implied volatility surface. 2. Black-Scholes equation. 3. Options (Finance).

Área de concentração: Otimização

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

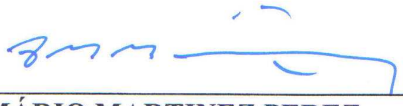
Prof. Dr. José Mario Martínez (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Roberto Andreani (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. João Luiz Chela (UPM)

Data da defesa: 27-02-2009

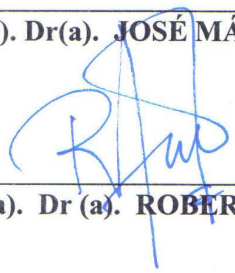
Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de fevereiro de 2009 e aprovada

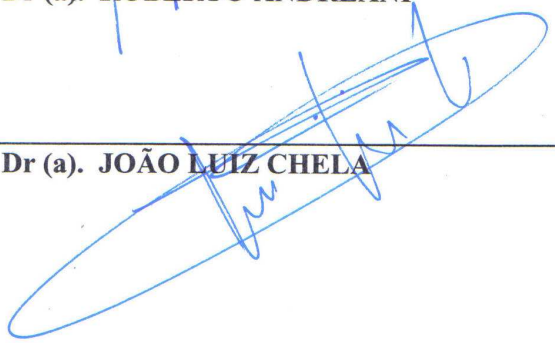
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). JOSÉ MÁRIO MARTINEZ PEREZ



Prof. (a). Dr (a). ROBERTO ANDREANI



Prof. (a). Dr (a). JOÃO LUIZ CHELA

Agradecimentos

Agradeço...

A Deus por sempre me iluminar e colocar as pessoas certas em meu caminho.

Aos meus pais, Arão e Ingrid, e aos meus irmãos, Ricardo e Renato, pelo apoio incondicional que me deram em todos os sentidos durante toda minha vida.

À minha namorada, Cecília, por toda dedicação e companherismo.

À minha família e amigos de Goiânia.

Aos meus meus amigos de Campinas sejam eles de república ou da faculdade.

Ao amigo Luís Felipe pelas valiosas reuniões de sexta-feira e discussões sempre produtivas. Pela sua ajuda e opiniões sempre válidas na montagem de minha apresentação e por me ceder um computador em que eu pudesse realizar este trabalho.

Ao professor Martínez pela orientação e atenção despendida sempre que necessitei.

Aos professores Nino e Lúcio por aceitarem tão prontamente participar da minha banca de qualificação e pelas imprecindíveis aulas de Matrizes e *PNL*.

Novamente aos professores Nino, Lúcio e ao professor Chela pela participação na banca de defesa.

Ao governo brasileiro, através do CNPq, pelo apoio fincanceiro tão importante para realização deste trabalho.

E a você leitor por se interessar pelo meu trabalho.

Muito obrigado!

Resumo

Nesta dissertação expomos algumas propriedades das opções e desenvolvemos a teoria clássica que resulta na Equação de Black-Scholes Generalizada, o modelo utilizado no mercado para precificar uma opção. Neste cenário apresentamos o Princípio da Retrodifusão. A ideia é obtermos a Equação de Black-Scholes por meios mais simples e que possibilitem uma interpretação intuitiva desta equação. Mostramos uma maneira numérica para resolver a Equação de Black-Scholes Generalizada e por fim desenvolvemos um método para estimar a superfície de volatilidade de um ativo usando como ferramenta conhecidas opções comercializadas.

Palavras-chave: Superfície de volatilidade implícita, Equação de Black-Scholes, Opções (finanças).

Abstract

In this work expose some properties of the options and developed the classical theory which results in the Generalized Black-Scholes equation, the model used in the market for pricing an option. In this context we present the *Princípio da Retrodifusão*. The idea is to get the Black-Scholes equation by simpler means and enabling an intuitive interpretation of this equation. We show a numerical way to solve the Generalized Black-Scholes equation and finally developed a method to estimate the volatility surface of an asset using as a tool known options traded.

Keywords: Implied volatility surface, Black-Scholes equation, Options (finance).

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

1 Introdução **1**

2 O mercado de derivativos **5**
2.1 Onde são comercializados os derivativos? 5
2.2 Opções 6
2.3 Outros tipos de derivativos 9
2.3.1 Contrato a termo 9
2.3.2 Contrato futuro 10

3 Taxa de juros **11**
3.1 Taxa de juros composta 11
3.2 Valor Presente 15
3.3 Taxa de juros livre de riscos 15

4 Algumas Propriedades do Preço de Opções e o Conceito de Arbitragem **17**
4.1 Tipos de Opção 17
4.2 Fatores que afetam o preço de uma opção 22
4.3 O Conceito de Arbitragem 27
4.4 Algumas Propriedades do Preço de Opções 29
4.4.1 Limitantes superiores e inferiores para o preço das opções . 29
4.4.2 Paridade *put-call* 31
4.4.3 Opções Americanas 32
4.5 Árvore Binomial 33

5 Processo de Wiener e o Lema de Itô **39**
5.1 Processo de Markov 39
5.2 Processo Estocástico Contínuo 40
5.2.1 Processo de Wiener 41
5.2.2 Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Browniano 42
5.2.3 Processo de Itô ou Movimento Browniano Generalizado . . 44
5.2.4 Movimento Browniano Geométrico 44
5.3 Um modelo para o movimento dos preços dos ativos 45
5.4 Lema de Itô 47

6 A Equação de Black-Scholes e o Princípio da Retrodifusão **49**
6.1 A Propriedade Lognormal dos preços dos ativos 49
6.2 A Distribuição da taxa de Retorno e a volatilidade 50
6.3 A Equação de Black-Scholes 52
6.4 A Equação de Black-Scholes para opções europeias 54
6.5 O Princípio da Retrodifusão 56

7 A volatilidade **63**
7.1 Volatilidade histórica 63
7.2 Volatilidade implícita 66
7.3 A superfície de volatilidade e a Equação de Black-Scholes Generalizada 66
7.4 Resolução da Equação de Black-Scholes Generalizada 67
7.4.1 Exemplo 74
7.5 O Problema: como obter a superfície de volatilidade 78
7.5.1 Dados técnicos 80
7.5.2 Um método de resolução 81
7.5.3 Exemplo: Estimativa da Superfície de Volatilidade 82

8 Considerações finais e trabalhos futuros **99**

Referências Bibliográficas **103**

Capítulo 1

Introdução

Podemos definir derivativo como um ativo financeiro que depende (ou deriva) do valor de um outro ativo ou mercadoria que lhe sirva de referência. Em geral, é um contrato firmado entre duas partes, comprador e vendedor, no qual se definem pagamentos futuros baseados no comportamento dos preços de um ativo. Os derivativos ganharam grande importância no cenário econômico atual, ao ponto que, o conhecimento de como funcionam, como podem ser usados e como são precificados é imprescindível para uma pessoa que trabalha no mercado financeiro.

Basicamente, os derivativos são usados por investidores na tentativa de proteger seus investimentos contra oscilações bruscas de preços, neste caso dizemos que o investidor está realizando um *hedge*, ou como forma de especulação, isto é, obter ganhos altos e rápidos. Os principais mercados de derivativos são:

- Mercado a termo - aquele em que as partes assumem o compromisso de compra ou venda de um determinado ativo, a um preço pré-fixado para liquidação em um prazo determinado.

- Mercado futuro - aquele em que as partes assumem o compromisso de compra ou venda de um determinado ativo, representado por contratos padronizados para liquidação em data futura. Neste mercado, o valor dos contratos sofre ajustes diários.

- Mercado de opções - aquele em que o comprador adquire o direito de comprar ou vender um ativo base a um preço pré-fixado[(i)] em ou até uma de-

[(i)] O preço pré-fixado no contrato de opção é conhecido pelo termo em inglês *strike*. Entretanto, no decorrer do texto, sempre vamos referi-lo como preço pré-fixado.

terminada data. Em contrapartida, o vendedor, assume o dever de vender ou comprar tal ativo em negociação.

- Mercado de *swaps* - aquele em que as partes trocam um índice de rentabilidade por outro. Pode-se trocar moedas, taxa de juro ou *commodities*.

Opções é o derivativo que analisaremos e usaremos como ferramenta nesta dissertação. Mais precisamente, trataremos as opções europeias, que ainda podem ser de dois tipos: *call* ou *put*. O detentor de uma opção *call* europeia adquire o direito de comprar um ativo base por um preço pré-fixado no fim de um certo período de tempo. Analogamente, o detentor de uma opção *put* europeia adquire o direito de vender um ativo base por um preço pré-fixado no fim de um certo período de tempo.

Um importante conceito que necessitaremos ao longo do texto, é o de arbitragem. Dizemos que existe uma possibilidade de arbitragem quando é possível obter lucro sem assumir riscos. Descartaremos como hipótese qualquer possibilidade de arbitragem. Assumindo também outras hipóteses que compreendem um mercado financeiro perfeito, [5], conseguimos precificar contratos a termo e futuros e deduzir importantes relações dos preços de opções, como por exemplo, limitantes inferiores e superiores. Entretanto, para determinar o preço de uma opção, devemos assumir uma hipótese com respeito ao movimento seguido pelo preço do ativo base em questão. Suporemos que o ativo segue um Movimento Browniano Geométrico.

Assumindo estas hipóteses, Robert Merton, Myron Scholes e Fischer Black, em 1973, demonstraram uma equação, denominada Equação de Black-Scholes, que precifica uma opção. Este é o modelo mais usado no mercado para precificar uma opção. Em reconhecimento aos seus trabalhos, Merton e Scholes foram agraciados com o Prêmio Nobel de Economia em 1997, data em que Black já havia falecido.

A matemática usada para demonstrar esta equação não é trivial e nem sempre de fácil entendimento. Neste cenário, apresentamos neste trabalho um princípio que denominamos Princípio da Retrodifusão, [11], buscamos obter a Equação de Black-Scholes por meios mais simples que os usuais. Em síntese, o Princípio da Retrodifusão resulta em uma equação que é uma discretização da Equação de Black-Scholes, que nos permite uma interpretação intuitiva desta última.

A Equação de Black-Scholes é uma equação diferencial parcial que, dentre outros parâmetros, depende da volatilidade do ativo base. Aqui, basta saber que a volatilidade, em uma definição grosseira, é uma medida da incerteza de quão

o ativo estará valendo no futuro, isto é, quanto maior a volatilidade maior a incerteza. O modelo de Black-Scholes assume que a volatilidade é constante. Sob esta hipótese, a Equação de Black-Scholes para opções europeias (o que significa atribuir condições de contorno adequadas), possui solução analítica.

Entretanto, já é bem aceito que, a despeito de sua simplicidade, o modelo de Black-Scholes não é capaz de capturar fenômenos de mercado modernos. Uma extensão natural do modelo de Black-Scholes é modificar a hipótese da volatilidade ser uma constante para torná-la um processo estocástico, a saber, assumi-la como uma superfície que depende do tempo e do preço do ativo base. Neste contexto, o modelo que precifica uma opção, é a Equação de Black-Scholes Generalizada que, mesmo para opções europeias, não possui solução analítica.

O Princípio da Retrodifusão aplica-se também quando supomos a volatilidade como um superfície e motiva um método numérico para resolver Equação de Black-Scholes Generalizada quando nos é dada a superfície de volatilidade, o qual está apresentado neste trabalho.

Entretanto, o maior propósito deste trabalho é responder a seguinte questão: Como obter a superfície de volatilidade de um ativo? Naturalmente, nos basearemos em um problema inverso que utiliza conhecidas opções recentemente comercializadas no mercado. O método que propomos para conseguir uma estimativa para esta superfície recai em um problema de otimização que utiliza como ferramenta o método numérico baseado no Princípio da Retrodifusão para resolver a Equação de Black-Scholes Generalizada.

Uma boa estimativa da superfície de volatilidade de um ativo é fundamental para precificar opções relacionadas com este ativo e desenvolver estratégias de *hedge*.

Neste trabalho, no processo de estimar a superfície de volatilidade, as opções observadas são todas do tipo europeia. Em [6], encontra-se uma maneira de estimar a superfície para o caso em que as opções observadas são do tipo americanas.

Existem diversos trabalhos que procuram estimar a superfície de volatilidade de um ativo. Outras abordagens podem ser encontradas em [1, 2, 3, 10].

Este trabalho está organizado da seguinte maneira.

No Capítulo 2, fazemos uma breve exposição de alguns derivativos dando mais notoriedade às opções, as quais damos sua definição e apresentamos alguns exemplos ilustrativos. Também de forma compacta, no Capítulo 3, é apresentada a noção de taxa de juros composta e taxa de juros livre de riscos.

No Capítulo 4, é desenvolvido algumas propriedades do preço de opções e apresentado um importante conceito para o trabalho como um todo, a noção de arbitragem.

No Capítulo 5, é desenvolvido uma teoria que modela o movimento dos preços dos ativos, o Movimento Browniano Geométrico, além de expor o Lema de Itô, importante ferramenta na demonstração da Equação de Black-Scholes.

O Capítulo 6 é uma parte fundamental do trabalho. Nele é exposto a teoria de Black-Scholes e apresentado o Princípio da Retrodifusão, uma discretização da Equação de Black-Scholes.

No Capítulo 7, passamos a tratar a volatilidade como uma superfície, apresentamos uma forma de resolver a Equação de Black-Scholes Generalizada quando é dada a superfície de volatilidade e, por fim, propomos um método para estimar a superfície de volatilidade de um ativo, ilustrando com um exemplo.

Finalizando, o Capítulo 8 apresenta algumas conclusões e algumas tarefas que ainda podem ser realizadas.

Capítulo 2

O mercado de derivativos

Podemos definir derivativo como um ativo financeiro cujo valor depende de um outro ativo ou mercadoria que lhe serve de referência, como por exemplo uma ação.

Nos últimos anos o mercado de derivativos tornou-se extremamente importante no mundo das finanças. Os derivativos são negociados em uma série de mercados, como mercados de opções, a termo e futuros. Basicamente, atuam nestes mercados *hedgers* e especuladores.

A palavra *hedge* em inglês significa cerca. Na prática é um instrumento que visa reduzir o risco de uma operação financeira decorrente das oscilações de preços do mercado. Neste contexto, o *hedger* usa o derivativo para repassar o risco de uma aplicação financeira a outro agente econômico, que resolve assumi-lo com a perspectiva de ganho. Por sua vez, especuladores são aqueles que agem no mercado aproveitando as oscilações nos preços para realizar lucro, sem cometer ato ilegal.

Neste capítulo veremos com mais detalhes estes mercados.

2.1 Onde são comercializados os derivativos?

No Brasil são comercializados na BM&FBOVESPA que foi fundada em 2008, com a integração entre Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F) e a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Ela é constituída sob a forma de sociedade por ações e tem por objetivo organizar, prover o funcionamento e desenvolver mercados livres e abertos para negociação dos derivativos. Em Bolsas de Valores são comercializados contratos padronizados.

Entretanto, nem todos os derivativos são comercializados em Bolsas de Valores. Transações podem ser feitas entre duas instituições financeiras, entre uma instituição financeira e um de seus clientes ou até entre duas pessoas. A vantagem deste mercado, sem o intermédio da Bolsa de Valores, é que os termos do contrato não são especificados previamente. Por outro lado é um comércio que apresenta um risco, uma vez que uma das partes pode não honrar o compromisso firmado.

2.2 Opções

Opções são derivativos que podem ser negociandos tanto em uma Bolsa de Valores quanto em contratos particulares.

Existem dois tipo de opções, opções do tipo *call* e opções do tipo *put* ou, em inglês, *call option* e *put option*, respectivamente. As opções mais simples são as opções europeias. O detentor de uma opção *call* europeia adquire o direito de comprar um ativo base por um preço pré-fixado no fim de um certo período de tempo que chamaremos de data de maturidade da opção. Analogamente, o detentor de uma opção *put* europeia adquire o direito de vender um ativo base por um preço pré-fixado no fim de um certo período de tempo.

Outro tipo de opção é a americana. A diferença é que, enquanto o detentor de uma opção europeia só pode exercer sua opção no fim de um período de tempo, o detentor de uma opção americana pode exercê-la até o fim deste período de tempo. É importante ressaltar que o nome das opções, europeia e americana, não tem nada a ver com o local onde são comercializadas. Existem ainda as chamadas opções exóticas, como por exemplo, opções asiáticas, *look back* e de barreira. Mais detalhes sobre estas opções podem ser encontrados em [8, 13].

Opções europeias é o tipo de derivativo que estamos mais interessados e que iremos trabalhar e usar como ferramenta no decorrer do texto. Para maior entendimento, vejamos dois exemplos a seguir.

Exemplo: um produtor de queijo se comprometeu a vender para daqui 1 mês um lote de queijo a $R\$10,00$ cada peça. Os gastos para a produção de uma peça de queijo são de 5 litros de leite mais $R\$2,00$ com outras matérias primas. O litro do leite é vendido hoje, no mercado a vista, por $R\$1,00$. Portanto, hoje o custo de produção de cada peça de queijo é de $R\$7,00$, compreendendo ao produtor um lucro de $R\$3,00$ por cada peça vendida. Entretanto, recentemente um boato de febre aftosa assola a região e dizem que existe a possibilidade do litro de leite estar valendo $R\$2,00$ daqui 25 dias. Infelizmente, o produtor não pode comprar o

leite hoje para produzir o queijo a ser entregue daqui 1 mês já que o leite perderia. Não o resta outra alternativa do que comprá-lo daqui a 25 dias. Se as previsões catastróficas realmente se confirmarem e o litro de leite estiver valendo $R\$2,00$ daqui a 25 dias, o custo de produção por peça de queijo será de $R\$12,00$, gerando um prejuízo de $R\$2,00$ por peça vendida. Desta forma, o produtor se prevenindo da possível alta no preço do leite, compra uma opção *call* europeia que lhe dá o direito de comprar 1 litro de leite a $R\$1,00$ daqui a 25 dias. O vendedor da opção será, claro, um produtor de leite que não acredita na alta dos preços e sim na baixa.

Exemplo: um exportador brasileiro vendeu para daqui 3 meses uma mercadoria no valor de $US\$100$ mil. Portanto daqui 3 meses ele entregará a mercadoria e receberá o pagamento em dólares que terá que ser convertido em reais. Hoje cotação do dólar é $R\$2,00$, isto é, cada dólar vale $R\$2,00$. Neste contexto, os $US\$100$ mil do exportador seriam equivalentes a $R\$200$ mil. Entretanto o exportador acredita numa valorização da moeda nacional. Ora, se daqui 3 meses o dólar estiver cotado a $R\$1,50$, ao converter a moeda, ele teria um montante de R$150 mil, caracterizando uma perca de R$50 mil referente a mudança cambial. Então para se previnir contra essa possível valorização do real frente ao dólar, o exportador compra uma opção *put* europeia que lhe dá o direito de vender $US\$1,00$ por $R\$2,00$.

Nestes dois exemplos, tanto o produtor de queijo quanto o exportador, realizaram um *hedge* no sentido de reduzir seus riscos contra as variações no preço do leite e na cotação do dólar, respectivamente.

É importante observar que o detentor de uma opção possui apenas direitos, enquanto o vendedor possui apenas obrigações. Voltando ao primeiro exemplo, se daqui 25 dias o litro de leite estiver valendo $R\$1,50$ no mercado a vista é claro que o produtor de leite exercerá sua opção e comprará o leite por $R\$1,00$ o litro, sendo o produtor de leite obrigado a vendê-lo por este preço. Entretanto se estiver valendo $R\$0,90$, ele não exercerá sua opção de comprar por $R\$1,00$ e comprará mais barato no mercado a vista. Portanto, o detentor de uma opção não é obrigado a exercer o seu direito, apenas quando o for conveniente.

Desta forma, existe um custo para adquirir uma opção. O comprador deve pagar uma certa quantia para o vendedor. Basicamente, o ganho do vendedor da opção ocorrerá quando não for interessante para o comprador exercê-la.

Fica agora uma pergunta importante: qual é o preço justo de uma opção? É claro que se hoje é o dia em que expira a opção, isto é, se hoje estamos na data

de maturidade, o preço corrente do ativo é S_T e o preço pré-fixado é K, este valor para uma opção do tipo *call* europeia é

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$

Isto fica fácil de notar se voltarmos ao nosso exemplo, se daqui 25 dias o litro de leite estiver valendo $R\$1,50$, a opção valerá $R\$0,50$ por litro e será exercida, agora se estiver valendo $R\$0,90$, a opção não valerá nada. Mas e para os outros dias, qual é o preço justo? É esta pergunta que iremos responder no capítulo 6.

Analogamente ao caso de opções *call* europeias, o preço justo de opção do tipo *put* europeia no dia de maturidade é

$$\max\{K - S_T, 0\},$$

em que S_T é o preço corrente do ativo e K é o preço pré-fixado. Naturalmente, estas funções correspondem aos *payoffs*[(i)] dos detentores de uma opção *call* europeia e de uma opção *put* europeia, respectivamente. Veremos isto com mais detalhes no capítulo 4.

Note que existem quatro tipos de participantes no mercado de opções:

1. Compradores de opções *call*;
2. Vendedores de opções *call*;
3. Compradores de opções *put*;
4. Vendedores de opções *put*.

O funcionamento do mercado de opções deve ficar claro. Devemos entender que para um investidor vender uma opção, digamos uma *call* europeia, ele não precisa tê-la. Vender uma opção *call* europeia significa assinar um contrato de venda do ativo base com um comprador. Neste contrato estará especificado o preço pré-determinado e a data de maturidade, pelo qual o comprador pagará uma certa quantia para o vendedor. A partir deste momento, de posse deste contrato, o comprador poderá vendê-la novamente, isto é, repassar este contrato para um terceiro, caracterizando um comércio mais usual, no sentido "físico" de comprar-vender.

Ambas transações, assinar um contrato em que o vendedor se compromete a comprar um ativo sob as condições que o contrato determina ou vender uma opção no sentido de repassar um contrato que já se tinha, são equivalentes, uma vez que envolvem a mesma quantia de dinheiro.

[(i)] Entenda por *payoff* o resultado final de um contrato, o quanto ele vale em seu desfecho.

2.3 Outros tipos de derivativos

2.3.1 Contrato a termo

Um contrato a termo é um acordo para comprar ou vender um ativo por um preço fixado, para liquidação em um prazo futuro. Devemos entender por liquidar o fato do comprador pagar o montante combinado e o vendedor entregar o ativo em questão.

Assim como opções, contratos a termo podem ser negociados tanto em Bolsas de Valores ou através de uma negociação particular. No caso do contrato ser negociado na BOVESPA, por exemplo, é necessário o intermédio de uma corretora e existem garantias que o contrato será cumprido por ambas partes, como por exemplo, depósitos de uma certa quantia em dinheiro na Companhia Brasileira de Liquidação e Custódia (CBLC), que é a empresa responsável pela liquidação e controle de risco de todas as operações realizadas na BOVESPA.

Vamos ilustrar com um exemplo.

Exemplo: um importador compra a termo $US\$100$ mil para daqui 3 meses ao valor de $R\$1,70$ cada. Portanto, daqui a 3 meses, na data de liquidação, ele irá pagar $R\$170$ mil e pegar os $US\$100$ mil, independente da cotação do dólar neste dia. Se daqui 3 meses o cada dólar estiver valendo $R\$1,90$, então o contrato a termo será benéfico ao comprador num valor de $R\$20$ mil ($R\$190$ mil - $R\$170$ mil). Por outro lado, se cada dólar estiver valendo $R\$1,60$, então o contrato a termo será maléfico ao comprador num valor de $R\$10$ mil ($R\$170$ mil - $R\$160$ mil), caracterizando o ganho para o vendedor.

O contrato a termo representa um risco para ambas as partes pois o ganho de um representa, nas mesmas proporções, a perda do outro. O *payoff* de um comprador em um contrato a termo, não levando em consideração possíveis impostos incidentes, é

$$S_T - K,$$

em que K é o preço pré-fixado e S_T é o preço corrente do ativo na data de liquidação. Isto porque o comprador é obrigado a comprar por K um ativo que vale S_T. Analogamente, o *payoff* de um vendedor de um contrato a termo é

$$K - S_T.$$

É importante ressaltar que os *payoffs* podem ser tanto positivos quanto negativos caracterizando lucro ou prejuízo, respectivamente.

2.3.2 Contrato futuro

Assim como o contrato a termo, o contrato futuro é um compromisso firmado de comprar ou vender um determinado ativo em uma data futura, por um preço pré-determinado. Entretando existem diferenças cruciais.

Um contrato futuro só pode ser comercializado em uma Bolsa de Valores, no caso do Brasil na BM&F, sendo portanto um contrato padronizado. Desta forma, virtualmente, não existe risco de crédito neste mercado. São realizadas operações envolvendo lotes padronizados de *commodities* ou ativos financeiros. Além disso, o contrato pode ser negociado de forma a ter diversas taxas de entrega, ao contrário do contrato a termo, que apresenta apenas uma única data.

Outra diferença fundamental é que as diferenças de preços são ajustadas diariamente, e não apenas na data de vencimento como no contrato a termo. Desta forma, a liquidação financeira dos lucros ou prejuízos é realizada todos os dias. Isto quer dizer que se um investidor comprar um contrato futuro e o preço deste cair, ele terá que depositar uma certa quantia de forma a compensar sua perda.

A tabela a seguir apresenta as principais diferenças entre o mercado a termo e o mercado futuro.

Mercado a termo	**Mercado futuro**
Pode ser negociado mediante um contrato particular	Precisa ser negociado em uma Bolsa de Valores
Contratos não necessariamente padronizados	Contrato padronizados
Tem uma taxa de entrega definida no contrato	É negociado com diversas datas de entrega
As diferenças de preços são ajustadas na entrega	As diferenças de preços são ajustadas diariamente
Possível risco de crédito	Virtualmente não apresenta risco de crédito

Tabela 2.1: Diferenças entre o mercado a termo e o mercado futuro.

Mais detalhes a respeito dos mercados a termo e futuro podem ser encontrados em [5, 7, 8].

Capítulo 3

Taxa de juros

Basicamente, taxa de juros é o custo do dinheiro, a quantia que quem empresta cobra de quem toma emprestado. A taxa de juros, naturalmente, depende do risco do crédito. Aqui risco deve ser entendido como a chance de quem toma emprestado não horar seu compromisso, isto é, não pagar a quem emprestou o montante inicial mais a taxa de juros. Desta forma, quanto maior o risco de crédito, maior será a taxa de juros cobrada para se emprestar.

3.1 Taxa de juros composta

Suponha que tomemos $R\$100,00$ emprestados de um banco que cobra uma taxa de juros de 10% ao ano. Quanto deveremos pagar pelo empréstimo ao fim de um ano? A princípio esta pergunta parece fácil de ser respondida e logo vem $R\$110,00$ como resposta. Entretanto, a resposta não é tão imediata. Da forma como a pergunta foi formulada, não é possível respondê-la. Faltou especificar de que forma a taxa de juros é composta.

Se esta taxa de juros for composta anualmente, aí sim temos uma dívida de

$$R\$100,00 \cdot 1,1 = R\$110,00$$

ao fim de um ano. Entretanto, se a taxa de juros for composta semianualmente, ou seja, após 6 meses houver a cobrança de 5% sobre o montante de $R\$100,00$, este valor for somado ao montante principal de $R\$100,00$ para após mais 6 meses ser insidido novamente uma taxa de 5% sobre este novo valor, teremos uma dívida de

$$R\$100,00 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = R\$110,25$$

ao fim de um ano. Da mesma forma, se a taxa de juros for composta a cada 3 meses, o montante final fica

$$R\$100,00 \cdot 1,025^4 = R\$110,38$$

ao fim de um ano.

Generalizando, se tomarmos P reais emprestados por a uma taxa de juros anual de r composta n vezes por anos, ao final de um ano estaremos devendo

$$P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n.$$

Se este mesmo valor, sobre estas mesma condições for emprestado por t anos, ao final deste período a dívida será de

$$P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Suponha agora que tomemos P reais emprestados por um ano a uma taxa de juros r por ano composta continuamente. Quanto estaremos devendo ao final do ano? Antes de respondermos a pergunta, devemos esclarecer o que quer dizer uma taxa de juros ser composta continuamente. Dizemos que r é composta continuamente quando a frequência de composição n tende a infinito. Portanto, de acordo com o que foi feito até agora, sabemos que o montante devido ao final de um ano quando a taxa de juros r é composta em n intervalos de ano iguais é $P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$. Logo, quando r é composta continuamente será devido no final do ano um valor de

$$P\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \quad = \quad Pe^r.$$

Analogamente, ao final de t anos, será devido um montante de

$$Pe^{rt}.$$

Na tabela a seguir estão as frequências de composição e os respectivos valores resultantes da incidência de uma taxa de juros de 10% ao ano sobre um montante de $R\$100,00$.

Frequência de composição	Valor de $R\$100,00$ ao final de um ano
Anualmente ($m = 1$)	110,00
Semestralmente ($m = 2$)	110,25
Quadrimestralmente ($m = 3$)	110,34
Trimestralmente ($m = 4$)	110,38
Bimestralmente ($m = 6$)	110,43
Mensalmente ($m = 12$)	110,47
Semanalmente ($m = 52$)	110,51
Diariamente ($m = 365$)	110,52
Continuamente($m \to \infty$)	110,52

Tabela 3.1: Efeito da frequência de composição de uma taxa de juros de 10% ao ano sobre $R\$100,00$ pelo período de 1 ano.

Conforme pode ser visto na Tabela 3.1, os valores para a composição diária e contínua coincidem ao menos na duas primeiras casas decimais. Portanto, para propósitos práticos, podemos pensar na taxa de juros composta continuamente como a taxa de juros composta diariamente. A seguir seguem as equações que podem ser usadas para converter uma taxa de juros composta em m vezes ao ano em uma taxa de juros composta continuamente e vice versa. Sejam r_c a taxa de juros composta continuamente e r_m a taxa de juros composta em m vezes ao ano, então

$$Pe^{r_c t} = P\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mt}$$

implica que

$$r_c = m \log\left(1 + \frac{r_m}{m}\right) \tag{3.1}$$

e que

$$r_m = m\left(e^{\frac{r_c}{m}} - 1\right). \tag{3.2}$$

Exemplo: Considere uma taxa de juros de 10% composta trimestralmente. Pela equação 3.1 com $r_m = 0,1$ e $m = 4$, a correspondente taxa de juros composta continuamente é

$$4 \log\left(1 + \frac{0,1}{4}\right) = 0,09877$$

ou $9,877\%$ por ano.

Exemplo: Suponha que um investimento em um banco pague por um empréstimo um juros de 8% por ano composto continuamente e que os juros são resgatados a cada 4 meses. Portanto, pela equação 3.2, com $r_c = 0,08$ e $m = 4$, a correspondente taxa de juros composta trimestralmente é de

$$4(e^{\frac{0,08}{4}} - 1) = 0,0808$$

ou $8,08\%$ por ano. Desta forma, para cada $R\$1000,00$ investido, será resgatado $R\$20,20$ a cada 4 meses.

Como vimos até agora, uma taxa de juros r composta mais de uma vez ao ano gera um juros maior do que se r fosse composto uma única vez. O motivo é evidente, para mais de uma composição, é aplicado juros sobre juros. Assim, para um investimento de P reais, chamaremos r de taxa de juros nominal e defineremos taxa de juros efetiva, e denotaremos r_{ef}, por

$$r_{ef} = \frac{\text{total de juros ao final do ano} - P}{P}.$$

Logo, um empréstimo para um ano com taxa de juros nominal r composta trimestralmente possui uma taxa de juros efetiva de

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 - 1.$$

Portanto, a taxa de juros efetiva do primeiro exemplo é de

$$\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 - 1 = 0,1038$$

ou $10,38\%$ por ano.

Da mesma forma, um empréstimo para um ano com taxa de juros nominal r composta continuamente possui uma taxa de juros efetiva de

$$r_{ef} = e^r - 1.$$

Assim, a taxa de juros efetiva do segundo exemplo é de

$$e^{0,08} - 1 = 0,0833$$

ou $8,33\%$ por ano.

De agora em diante sempre que uma taxa de juros for mencionada, trata-se da taxa de juros nominal e não efetiva. Entretanto, isto não deve causar nenhum tipo de confusão.

3.2 Valor Presente

A noção de valor presente está intimamente ligada à taxa de juros vigente. Suponha que a taxa de juros r por período seja composta periodicamente. Considere agora um investimento que pague estes juros e um investidor, que aplicará hoje seu dinheiro. Se daqui i período de tempo, o investidor quiser resgatar P reais, quanto ele deve aplicar hoje? A resposta compreende o valor presente e é $P(1+r)^{-i}$.

Obviamente, o valor presente depende da taxa de juros aplicada. No exemplo anterior, se a taxa de juros fosse composta continuamente, o valor presente seria Pe^{-ir}.

3.3 Taxa de juros livre de riscos

A avaliação de ativos com riscos é um problema muito importante na economia. O primeiro passo para resolvê-lo é a compreensão do ativo livre de riscos, títulos de renda fixa que garantem ao seu detentor a certeza que os pagamentos prometidos serão realizados nas datas combinadas.

A taxa de juros livre de riscos é um importante fator na avaliação de derivativos, sendo portanto necessário determinar-lhe um valor. Embora a teoria não exija a especificação de qual seja o ativo livre de riscos, faremos uma breve discussão acerca deste assunto. Em [4], pode-se encontrar mais detalhes.

Primeiramente, destacamos que a literatura brasileira é um tanto omissa neste assunto e ainda não há um consenso de qual é a taxa de juros livre de riscos que deve ser adotada no Brasil. A maioria dos trabalhos adotam as taxas de curtíssimos prazos, a SELIC ou a CDI *over* que, na prática, são taxas muito próximas.

A taxa SELIC é a taxa apurada no Sistema Especial de Liquidação e Custódia (Selic). Em síntese, ela é obtida mediante o cálculo da taxa média ponderada e ajustada das operações de financiamento por um dia, lastreadas em títulos públicos na forma de operações compromissadas. Neste caso, as operações compromissadas são operações de venda de títulos com compromisso de recompra assumido pelo vendedor, assim como o compromisso de revenda assumido pelo comprador, para liquidação no dia útil seguinte. Desta forma, a taxa Selic se origina de taxas de juros efetivamente observadas no mercado. Estas taxas de juros não sofrem influência do risco do tomador de recursos financeiros, uma vez que o lastro oferecido nas operações é homogêneo.

Por sua vez, os Certificados de Depósitos Interbancários (CDIs) são títulos emitidos pelos bancos como forma de captação ou aplicação de dinheiro excedente. Como sugere o nome, estas transações apenas são realizadas entre bancos e em grande parte das vezes por apenas um dia. Na prática, um banco que estiver com dinheiro sobrando, empresta a um outro que esteja precisando. Estas operações se realizam fora do âmbito do Banco Central, e portanto, não há incidência de impostos, as transações são fechadas por meio eletrônico e registradas nos computadores das instituições envolvidas e nos terminais da Câmara de Custódia e Liquidação (CETIP). A taxa média de juros cobrada nestas transações de um dia consiste a taxa CDI *over*.

Quando for necessário um valor para a taxa livre de riscos, será estipulado um valor coerente, mas sem mencionar a sua origem.

Capítulo 4

Algumas Propriedades do Preço de Opções e o Conceito de Arbitragem

4.1 Tipos de Opção

Relembrando o primeiro capítulo, existem dois tipos de opções. Opções do tipo *call*, que dá o direito ao seu detentor de comprar um determinado ativo por um preço pré-fixado em uma certa data e opções do tipo *put* que dá o direito ao seu detentor de vender um determinado ativo por um preço pré-fixado em uma certa data. Chamaremos este determinado ativo de ativo base e de data de maturidade esta data especificada no contrato de opção.

Basicamente, um investidor compra uma opção do tipo *call* quando ele acredita que o preço do ativo base irá aumentar durante o período em que o contrato de opção estiver valendo. Em contrapartida, um investidor compra uma opção do tipo *put* quando ele acredita que o preço do ativo base irá diminuir durante o período de vigência do contrato. Evidentemente, o vendedor da opção aposta que o preço do ativo irá se comportar no sentido oposto do que comprador espera.

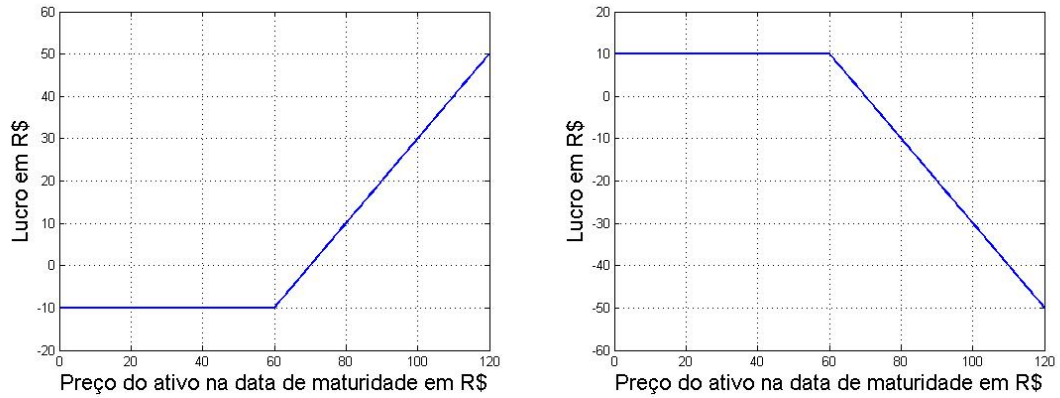
As opções, basicamente, são europeias ou americanas. Opções europeias só podem ser exercidas na data de maturidade, enquanto as americanas podem ser exercidas até a data de maturidade. Evidentemente, opções europeias são mais simples que as americanas e portanto mais fáceis de serem analizadas. Entretanto, diversas propriedades das opções americanas são deduzidas das opções europeias. Focaremos nossos esforços principalmente nas opções europeias que nos servirão

de ferramenta ao longo do texto.

Vejamos a seguir dois exemplos de opções, uma do tipo *call* e outra do tipo *put*, e quanto é o lucro dos participantes destes contratos. Nestes dois exemplos, os valores usados serão meramente ilustrativos.

Exemplo (Opção do tipo *call*): Suponha que um investidor compre uma opção *call* europeia que lhe dá o direito de comprar 1 ação da Petrobrás por $R\$60,00$ para daqui 1 mês. Suponha ainda que o preço da ação hoje é $R\$50,00$ e que ele pagou $R\$10,00$ por este direito. Se daqui um mês o preço da ação estiver valendo mais do que $R\$60,00$ ele exercerá a opção e comprará por $R\$60,00$. Por exemplo, se o valor da ação no fim do contrato for $R\$80,00$, ele comprará por $R\$60,00$ e obterá um lucro de $R\$10,00$, já descontando o valor da opção. Entretanto, se o valor da ação estiver valendo menos do que $R\$60,00$, o investidor não exercerá sua opção e perderá os $R\$10,00$ investidos para comprar a opção, caracterizando o lucro do vendedor.

É importante notar que mesmo exercendo a opção o investidor pode ter prejuízo. Suponha, por exemplo, que o preço da ação esteja valendo $R\$65,00$ daqui 1 mês. O investidor irá exercer sua opção e comprará por $R\$60,00$, obtendo $R\$5,00$ de lucro nesta transação. Entretanto, descontando os $R\$10,00$ investidos para comprar a opção, caracteriza um prejuízo de $R\$5,00$. Nas figuras a seguir, estão os gráficos que ilustram os lucros do comprador e do vendedor para este exemplo. Entenda como prejuízo quando o lucro for negativo.



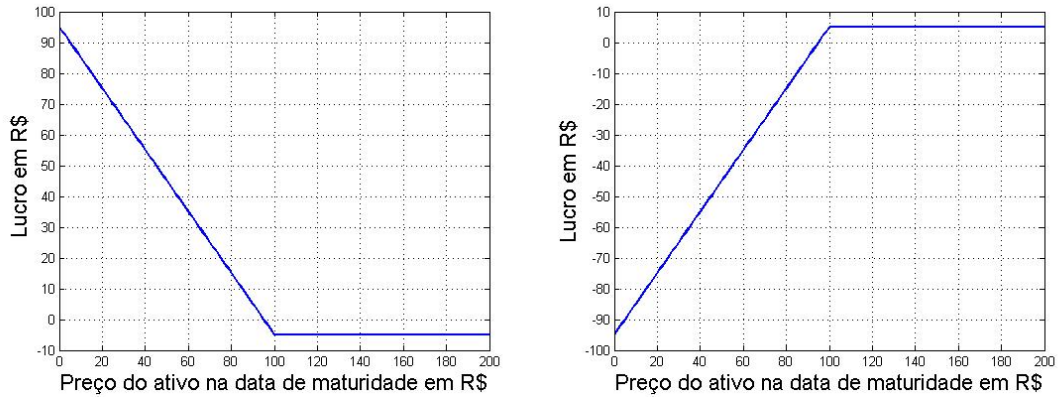
(a) (b)

Figura 4.1: (a) Lucro do comprador da opção *call*; (b) lucro do vendedor da opção *call*.

Exemplo (Opção do tipo *put*): Suponha que um investidor compre uma opção *put* europeia que lhe dá o direito de vender 1 ação da Vale por $R\$100,00$ para daqui 1 mês. Suponha ainda que o preço da ação hoje é $R\$90,00$ e que ele pagou $R\$5,00$ por este direito. Se daqui 1 mês a ação da vale estiver valendo menos que $R\$100,00$ ele irá exercer a opção, caso contrário, não. Por exemplo, se a ação estiver valendo $R\$92,00$, ele pode comprá-la por este preço no mercado a vista e exercer a opção vendendo-a por $R\$100,00$, aferindo um lucro de $R\$3,00$, já descontando o valor pago pela opção. Da mesma forma que no exemplo anterior, o detentor da opção pode exercê-la e mesmo assim ter prejuízo, por exemplo no caso em que a ação estiver valendo $R\$98,00$ daqui 1 mês.

Na introdução da seção mencionamos que o comprador de uma opção *put* acredita que o ativo irá desvalorizar. É importante notar que este "desvalorizar" é relativo, pois mesmo valorizando, o dententor pode ter lucro, como foi o caso em que a ação da Vale estivesse valendo $R\$92,00$. Deve-se entender que o comprador da *put* acredita que o ativo valerá menos na data de exercício do que o vendedor da *put*. O raciocínio é análogo quanto ao termo "valorizar" usado para a crença do comprador da *call*.

A seguir, estão os gráficos que ilustram os lucros do comprador e do vendedor da *put* para este exemplo.



(a) (b)

Figura 4.2: (a) Lucro do comprador da opção *put*; (b) lucro do vendedor da opção *put*.

Como pode-se notar nos exemplos e nas Figuras 4.1 e 4.2, o maior prejuízo que o detentor de uma opção pode ter é o preço pago pela mesma, enquanto que, ao menos teoricamente, o lucro possível é ilimitado. Consequentemente, para o vendedor, o maior lucro possível é o valor recebido pela opção enquanto que o prejuízo não possui limites.

Conforme mencionado no primeiro capítulo, existem 4 tipos de participantes no mercado de opções:

1. Compradores de opções *call*;
2. Vendedores de opções *call*;
3. Compradores de opções *put*;
4. Vendedores de opções *put*.

Podemos associá-los com o resultados finais ou *payoffs* do contrato de opção, isto é, o quanto um participante deve receber ou pagar no dia de maturidade da opção, não levando em consideração o preço da mesma.

Suponha que o preço pré-determinado na opção é K e que no dia de maturidade da opção o preço do ativo seja S_T. O *payoff* para um comprador de uma opção *call* europeia é

$$\max(S_T - K, 0),$$

já que o comprador apenas irá exercer a opção se $S_T > K$, ou seja, quando o for conveniente. Desta forma, o *payoff* para um vendedor de uma opção *call* europeia é

$$\min(K - S_T, 0) = -\max(S_T - K, 0).$$

O *payoff* para um comprador de uma opção *put* europeia é

$$\max(K - S_T, 0).$$

Assim, o *payoff* para um vendedor de uma opção *put* europeia é

$$\min(S_T - K, 0) = -\max(K - S_T, 0).$$

Os gráficos dos *payoffs* estão plotados a seguir.

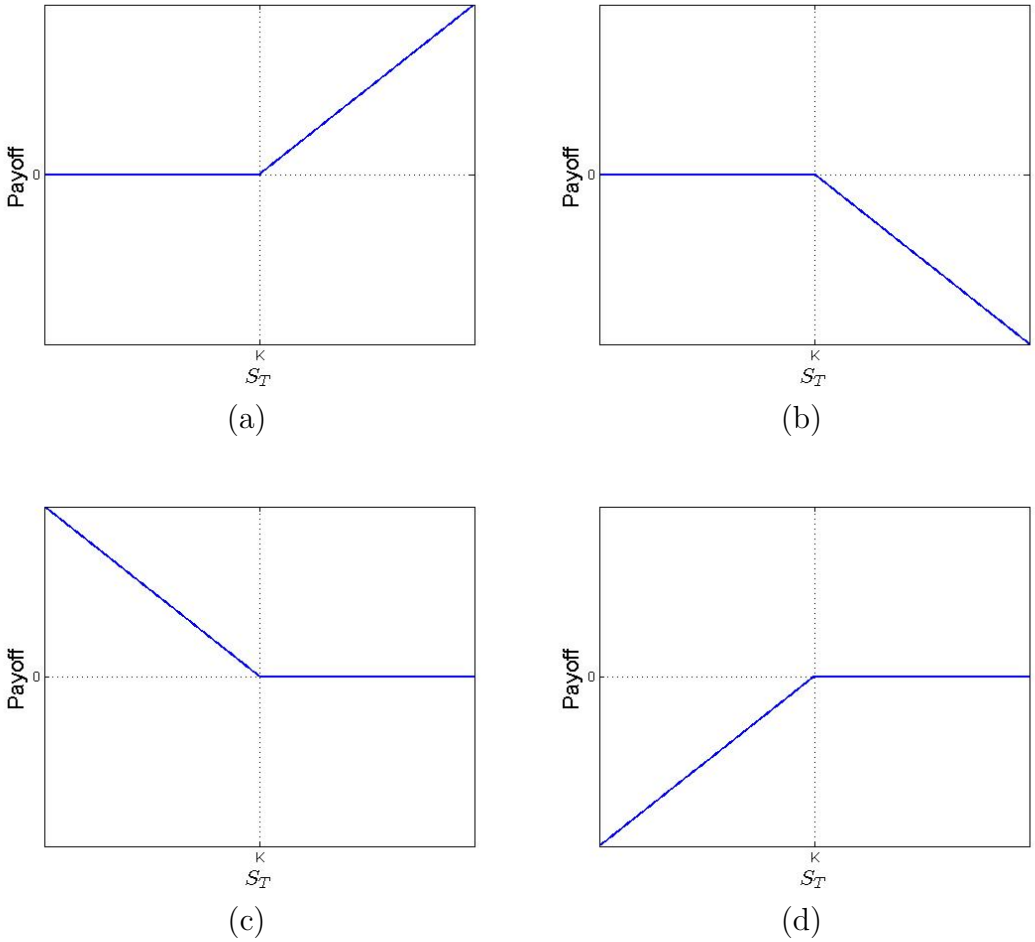


Figura 4.3: Payoffs dos partipantes do mercado de opções: (a) comprador de opção *call*; (b) vendedor de opção *call*; (c) comprador de opção *put*; (d) vendedor de opção *put*.

4.2 Fatores que afetam o preço de uma opção

Suponha que estamos interessados em precificar uma opção que foi comercializada no tempo 0 com data de maturidade para o tempo T e que hoje estamos no tempo t, $0 \leq t \leq T$. Os fatores que afetam o preço desta opção são:

- o preço corrente do ativo, S_t;

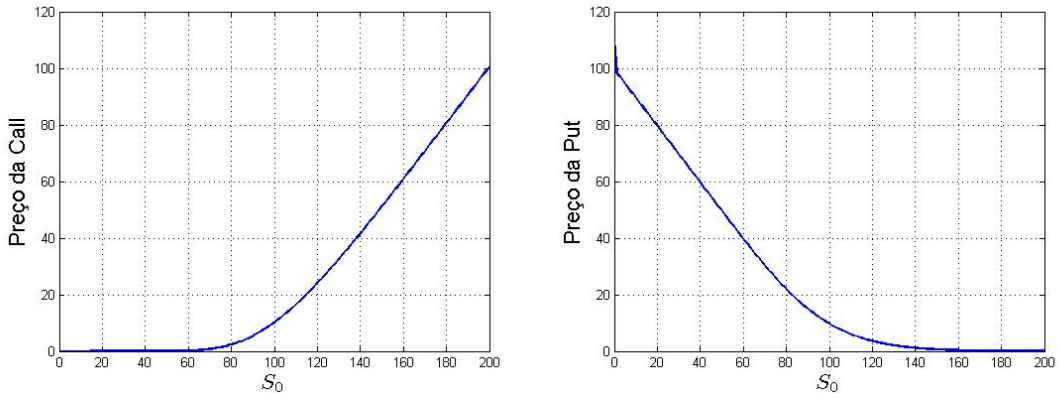
- o preço pré-determinado no contrato de opção, K;
- o tempo de maturidade, $T - t$;
- a volatilidade do preço do ativo, σ;
- a taxa de juros livre de risco, r;
- os dividendos esperados durante o período de tempo $T - t$.

Vejamos o que acontece com o preço de uma opção do tipo *call* europeia e com o preço de uma opção *put* europeia quando variamos um destes fatores e mantemos os demais fixos. Para ilustrar, vamos supor que estamos no dia 0, isto é, $t = 0$, e que os valores fixos serão $S_0 = 100$, $K = 110$, $T - t = 1$ ano e que a volatilidade e a taxa de juros são constantes e valem $\sigma = 25\%$ por ano e $r = 10\%$ por ano, respectivamente. Além disso, vamos supor que o ativo não paga dividendos. Nestas circunstâncias o preço da opção *call* é $10,1601$ e da *put* é $9,6922$. Nesta seção exporemos quanto vale a opção sem nos preocuparmos como este valor foi encontrado. A intenção aqui é apenas ver como o preço se comporta quando variamos um dos parâmetros.

- O preço corrente do ativo e o preço pré-determinado

Como vimos na seção passada, o *payoff* para o detentor de uma opção do tipo call europeia é $\max(S_T - K, 0)$, enquanto que de uma opção put europeia é $\max(K - S_T, 0)$. Portanto, quanto maior o valor de S_T, o preço do ativo na data de maturidade, mais valiosa se torna uma opção do tipo *call* e menos valiosa se torna uma opção do tipo *put*. Ora, é intuitivo pensarmos que quanto maior for S_t, mais chances existirão de ter um S_T maior. Logo, opções do tipo *call* valorizam e opções do tipo *put* desvalorizam à medida que aumentamos S_t.

É fácil ver que ocorre o contrário para o preço pré-determinado, basta vermos os *payoffs*. Quanto maior K, mais valorizada se torna a *put* e desvalorizada se torna a *call*.

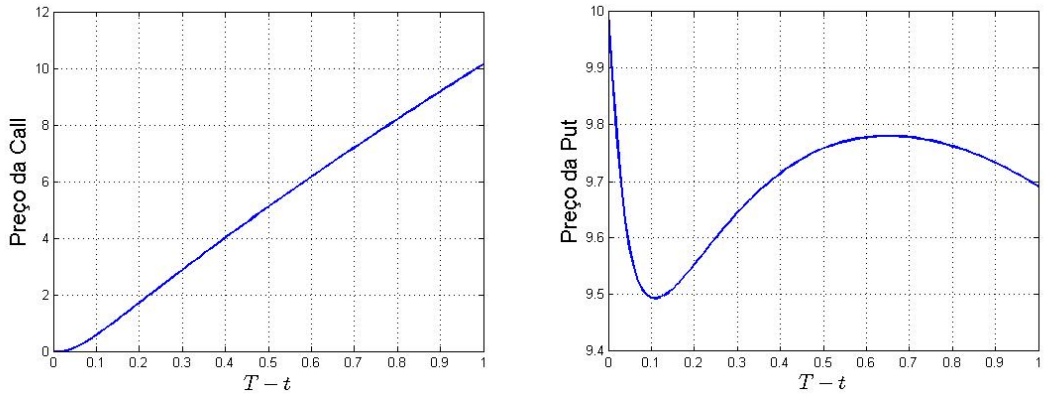


(a) (b)

Figura 4.4: (a) Valor da opção *call*; (b) valor da opção *put*; $K = 110$, $T - t = 1$, $\sigma = 25\%$, $r = 10\%$.

- O tempo tempo que falta para opção expirar

Para uma opção europeia, a variação no tempo de maturidade, ou equivalentemente na data de maturidade, não provoca uma variação lógica no preço da opção, a relação é incerta. Um contrato de opção com tempo de maturidade maior pode ser mais ou menos valioso, embora na maioria das vezes, tanto a *call* quanto a *put*, tendem a valorizar.



(a) (b)

Figura 4.5: (a)Valor da opção *call*; (b) valor da opção *put*; $S_0 = 100$, $K = 110$, $\sigma = 25\%$, $r = 10\%$.

Outro fator que pode influenciar na incerteza da relação entre a variação do tempo de maturidade e o preço da opção, é o pagamento de dividendos neste período. O pagamento de dividendos tende a diminuir o preço do ativo em datas anteriores, segundo [8]. Portanto, uma opção do tipo *call* europeia com uma data de maturidade menor, antes do pagamento de um dividendo, pode se tornar mais valiosa do que uma outra com data de maturidade maior, depois do pagamento do dividendo.

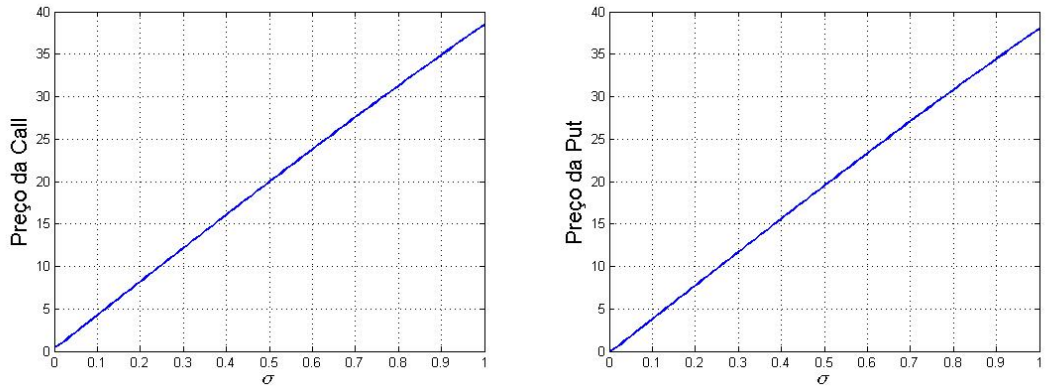
Evidentemente, para o caso de opções americanas, quando se mantêm todos os outros parâmetros fixos, tanto a opção do tipo *call* quanto a do tipo *put* tornam-se mais valiosas à medida que o tempo de maturidade aumenta. Isto decorre do fato que, sobre estas circunstâncias, o detentor da opção com maior tempo de maturidade tem as mesmas oportunidades de exercer sua opção que o detentor da opção com menor tempo de maturidade e ainda mais oportunidades que se compreendem entre a diferença de tempo das duas opções em questão.

- A volatilidade

Grosseiramente falando, a volatilidade é uma medida da incerteza do quanto o ativo valerá no futuro. Quanto maior for a volatilidade, maior esta incerteza. Portanto um ativo muito volátil pode tanto se desvalorizar quanto se valorizar muito no futuro.

Para o detentor de uma opção do tipo *call*, em que o *payoff* é $\max(S_T - K, 0)$, é vantajoso que o ativo se valorize, isto é, que o preço do ativo no dia de maturidade S_T seja o maior possível. Logo, quanto mais volátil for o ativo, maiores as chances de S_T assumir um alto valor gerando um lucro maior para o detentor da opção. Todavia, quanto mais volátil for o ativo, também são maiores as chances de S_T assumir um baixo valor. Porém, o prejuízo do detentor da opção se limita ao valor pago por ela. Portanto, quanto maior for a volatilidade, mais valorizada se torna uma opção do tipo *call*.

O raciocínio é análogo para opções do tipo *put*, e podemos concluir também que quanto maior for a volatilidade, mais valorizada se torna uma opção do tipo *put*.

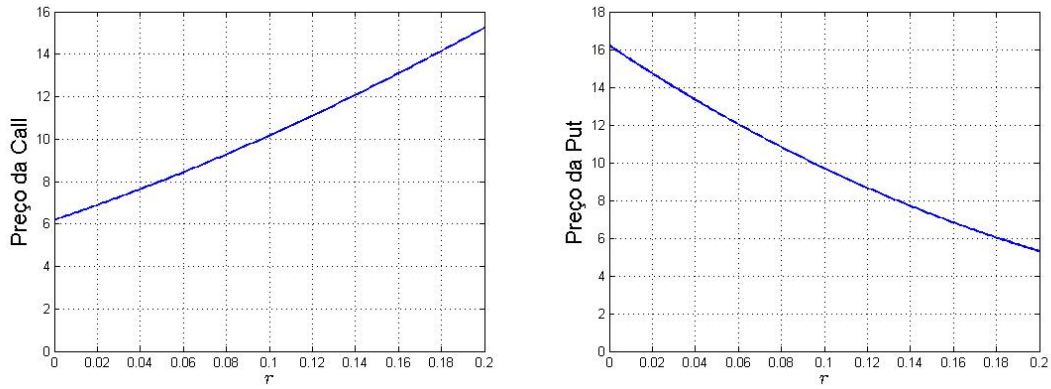


(a) (b)

Figura 4.6: (a) Valor da opção *call*; (b) valor da opção *put*; $S_0 = 100$, $K = 110$, $T - t = 1$, $r = 10\%$.

- A taxa de juros livre de riscos

Vamos variar agora a taxa de juros livre de riscos e manter os outros parâmetros constantes. Quando aumentamos a taxa de juros, espera-se que o preços dos ativos também aumentem em um determinado intervalo de tempo. Portanto, o valor do ativo no dia de maturidade S_T tende a ser maior quando está vigente uma taxa de juros alta. Isto afeta as opções de forma a valorizar a *call* e desvalorizar a *put*.



(a) (b)

Figura 4.7: (a) Valor da opção *call*; (b) valor da opção *put*; $S_0 = 100$, $K = 110$, $T - t = 1$, $\sigma = 25\%$.

- Os dividendos esperados durante a vigência do contrato de opção

O pagamento de dividendos age de forma a reduzir o preço do ativo em datas anteriores ao pagamento. Como temos visto, preços menores do ativo desvalorizam as opções do tipo *call* e valorizam as opções do tipo *put*. Na maioria das vezes, durante o desenvolvimento do texto, vamos supor por simplicidade que os ativos não pagam dividendos.

4.3 O Conceito de Arbitragem

Dizemos que existe uma possibilidade de arbitragem quando é possível obter lucro sem assumir riscos. Em um mercado financeiro ideal em que todos os participantes têm acesso às mesmas informações e que os investidores podem agir instantaneamente, não existem possibilidades de arbitragem. Na prática, espera-se que um mercado financeiro bem organizado e com considerável volume de negócios, a força de mercado, oferta e demanda, elimine as possibilidades de arbitragem.

De agora em diante, além de descartarmos qualquer possibilidade de arbitragem, assumiremos que não existem custos de transações, impostos e restrições

para venda a descoberto[(i)]. Além disso, pode-se emprestar ou tomar emprestado à taxa de juros livre de riscos, todos os ativos são perfeitamente divisíveis e que negócios são feitos continuamente.

Estas hipóteses são suficientes para determinar o valor de contratos a termos e futuros e algumas importantes relações entre os preços de opções. Entretanto, para determinar o preço de uma opção, necessitamos de um modelo matemático que descreva o movimento dos preços dos ativos. Faremos isto no capítulo 5. Neste capítulo, iremos nos ater às relações que envolvem opções que podem ser obtidas apenas com estas hipóteses. Mais detalhes com respeito a contratos a termo e futuro fogem do nosso propósito, mas podem ser encontrados em [5, 7, 8].

Um importante resultado que conseguimos com a hipótese de não arbitragem é o seguinte, [5]: se sabemos que 2 portifólios possuem o mesmo valor em um determinado tempo T, então eles também devem ter o mesmo valor para qualquer $t < T$. A demostração é trivial. Vamos denotar os dois portifólios por A e B e seus valores em t por $V_A(t)$ e $V_B(t)$, respecivamente. Sabemos que em T eles têm o mesmo valor, assim $V_A(T) = V_B(T)$. Suponha, sem perda de generalidade, que para algum $t < T$ se tenha $V_A(t) < V_B(t)$. Agora, no tempo t, basta um investidor vender a descoberto cada ativo do portifólio B, com este dinheiro comprar cada ativo do portifólio A e aplicar a diferença $\Delta(t) = V_B(t) - V_A(t) > 0$ a uma taxa fixa de r. Em t, o valor do portifólio é

$$V_A(t) - V_B(t) + \Delta(t) = 0,$$

isto é, o investidor não teve nenhum custo inicial. Agora, no tempo T, o dinheiro aplicado à taxa de juros livre de riscos r, vale $\Delta(T) = \Delta(t)e^{r(T-t)}$, e portanto o portifólio em T vale

$$V_A(T) - V_B(T) + \Delta(T) = \Delta(t)e^{r(T-t)} > 0,$$

se $\Delta(t) > 0$. Desta forma, o investidor fez um ganho sem assumir riscos, contrariando a hipótese de não arbitragem. Portanto devemos ter $\Delta(t) = 0$, ou seja, $V_A(t) = V_B(t)$.

Com demonstração semelhante, podemos concluir também que se em um determinado tempo T sabemos que um portifólio B é pelo menos tão valioso quanto

[(i)] Por venda a descoberto devemos entender quando um investidor vende um ativo que ele não possui. Quando um investidor instrui um corretor a vender a descoberto, este toma o ativo emprestado de um outro cliente e vende no mercado da forma usual. O investidor pode manter esta posição sempre que o corretor tiver o ativo para tomar emprestado. É claro que em algum estágio o investidor terá que comprar o ativo para pagar o empréstimo. Neste sentido ele lucrará se o preço do ativo cair e terá prejuízo caso o contrário.

um portifólio A, isto é, $V_B(T) \geq V_A(T)$, devemos ter que $V_B(t) \geq V_A(t)$ para qualquer $t < T$.

Usaremos estes resultados para demonstrar algumas importantes relações dos preços das opções.

4.4 Algumas Propriedades do Preço de Opções

Nesta seção assumiremos as hipóteses apresentadas na seção anterior e denotaremos por S_t o preço corrente do ativo, K o preço pré-determinado na contrato de opção, $T - t$ o tempo de maturidade, S_T o preço do ativo na data de maturidade, r a taxa de juros livre de risco composta continuamente, c o valor de uma opção do tipo *call* europeia e por p o valor de uma opção do tipo *put* europeia. Além disso, vamos supor que o ativo base não paga dividendos a não ser quando explicitado o contrário.

4.4.1 Limitantes superiores e inferiores para o preço das opções

- **Opções do tipo *call* europeia**

  Um limitante superior para o preço de uma opção call europeia é o preço corrente do ativo, portanto

  $$c \leq S_t.$$

  De fato, se tivéssemos $c > S_t$, uma arbitragem poderia ser realizada ao comprar o ativo e vender a opção. Um limitante inferior, nem tão imediato quanto o superior, é

  $$\max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0).$$

  Para demonstrarmos isto, considere os seguintes portifólios:

  - Portifólio A: uma opção *call* europeia mais uma quantia de $Ke^{-r(T-t)}$ em dinheiro;
  - Portifólio B: um ativo.

  O valor do portifólio A hoje é $c + Ke^{-r(T-t)}$ e do portifólio B é S_t. No portifólio A, o dinheiro investido à taxa de juros livre de riscos r, valerá K no tempo T. Se, em T, tivermos $S_T > K$, a opção será exercida, isto é, a quantia K será usada para comprar o ativo que vale S_T. Desta forma, o

portifólio A valerá S_T em T. Agora, se $S_T < K$ em T, a opção não será exercida e o portifólio A valerá K. Portanto, em T, o portifólio A valerá

$$\max(S_T, K).$$

O Portifólio B valerá S_T no tempo T. Logo concluímos que em T o portifólio A é pelo menos tão valioso quanto o portifólio B. Segue portanto que o portifólio A deve ser pelo menos tão valioso que o portifólio B também no dia de hoje. Daí

$$c + Ke^{-r(T-t)} \geq S_t$$

ou

$$c \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Evidentemente o valor de uma opção não assume valores negativos, uma vez que o pior resultado que possa ocorrer é não exercê-la. Assim, provamos que

$$c \geq \max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0).$$

- **Opções do tipo *put* europeia**

  Assim como no caso das opções do tipo *call*, é fácil encontrar um limitante superior para opções do tipo *put* europeia. Temos que

  $$p \leq Ke^{-r(T-t)}.$$

  De fato, se tivéssemos $p > Ke^{-r(T-t)}$, uma arbitragem poderia ser realizada vendendo uma opção e investindo o dinheiro à taxa de juros livre de riscos.

  Um limitante inferior é

  $$\max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0).$$

  A demostração é parecida com o que foi feito para opções do tipo *call*. Considere os seguintes portifólios:

  - Portifólio A: uma opção *put* europeia mais um ativo;
  - Portifólio B: uma quantia de $Ke^{-r(T-t)}$ em dinheiro.

  Hoje, os portifólios A e B valem $p + S_t$ e $Ke^{-r(T-t)}$, respectivamente. No tempo T, se $S_T < K$, o portifólo A valerá K, uma vez que a opção será

exercida, ou seja, o ativo será vendido por K. Se $S_T > K$, a opção não será exercida e o portifólio A valerá S_T. Logo, em T, o valor do portifólio A será

$$\max(S_T, K).$$

Independente do que aconteça com o valor de S_T, o porfifólio B valerá K no tempo T, considerando que o dinheiro foi aplicado à taxa de juros livre de riscos. Portanto, em T, o portifólio A é pelo menos tão valioso quanto o portifólio B, segue que isto também deve valer para hoje. Assim

$$p + S_t \geq Ke^{-r(T-t)}.$$

Como o valor de uma opção não pode ser negativo, concluímos que

$$p \geq \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0).$$

4.4.2 Paridade *put-call*

Vamos demonstrar agora uma interessante relação entre os preços de uma opção *call* europeia e de uma opção *put* europeia que possuem os mesmos tempos de maturidades $T - t$ e preços pré-determinados K.

Considere os seguintes portifólios:

- Portifólio A: uma opção *call* europeia mais uma quantia de $Ke^{-r(T-t)}$ em dinheiro;
- Portifólio B: uma opção *put* europeia mais um ativo;

Como vimos na subseção anterior, ambos portifólios possuem o mesmo valor em T, a saber $\max(S_T, K)$. Portanto, sob a hipótese de não arbitragem eles devem valer a mesma quantia hoje. Assim, deduzimos a relação conhecida como paridade *put-call*:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$

Através desta relação, dado o valor de uma opção *call* europeia determinamos facilmente o valor da opção *put* europeia com mesmo tempo de maturidade e preço pré-fixado, e vice-versa.

4.4.3 Opções Americanas

Vamos mostrar que nunca se deve exercer uma opção *call* americana antes da data de maturidade quando o ativo base não paga dividendos, veja [8, 13].

Suponha que estamos no dia 0, que o preço atual do ativo é S_0, que o preço pré-determinado no contrato de opção é K, que $S_0 > K$ e que o tempo de maturidade da opção é T. A ideia de exercer a opção apenas em T é postergar ao máximo o pagamento do preço pré-determinado K. Pagar K hoje é equivalente a pagar Ke^{rT} em T e, independente de exercer a opção hoje ou em T, o ativo valerá S_T no fim no tempo de maturidade. Este argumento mostra que nunca é ótimo exercer a opção antes da data de maturidade se o o investidor planeja permanecer com o ativo durante o tempo de vigência do contrato.

Entretanto, o investidor poderia exercer a opção hoje e vender o ativo, faturando $S_0 - K$. Este dinheiro aplicado à taxa de juros livre de riscos r valerá

$$(S_0 - K)e^{rT}$$

em T. Esta estratégia de exercer a opção hoje também não é vantajosa. O investidor poderia permanecer com a opção e vender o ativo a descoberto. Neste caso, no tempo igual a T, ele teria o montante de S_0e^{rT} em dinheiro, a opção e a dívida de um ativo. Para saldar a dívida, se $S_T > K$, ele exerceria a opção, quitaria a dívida e lhe sobraria a quantia de

$$S_0e^{rT} - K.$$

Caso $S_T < K$, a opção não valeria nada e ele teria que comprar o ativo a ser saldado no mercado. Após o pagamento da dívida, ele ainda teria a quantia de

$$S_0e^{rT} - S_T.$$

Portanto, no tempo T, o investidor terá

$$\max(S_0e^{rT} - K, S_0e^{rT} - S_T)$$

que evidentemente é maior que $(S_0 - K)e^{rT}$.

Um outro argumento que pode ser usado para mostrar que nunca é ótimo exercer uma opção *call* americana previamente quando o ativo não paga dividendos, é analisar o limitante inferior para o preço de opções *call* europeias, $c \geq S_0 - Ke^{-rT}$. Uma opção americana é pelo menos tão vantajosa quanto à

correspondente opção europeia. Portanto, se denotarmos por C o preço da opção americana, vem que $C \geq S_0 - Ke^{-rT}$ e portanto que

$$C > S_0 - K.$$

Todavia, exercer a opção hoje significa atribuir o valor $C = S_0 - K$ a ela.

Quanto a opções *put* americanas de ativos que não pagam dividendos não podemos afirmar nada, no sentido que pode ser ótimo exercê-la antes da data de maturidade.

4.5 Árvore Binomial

Um processo bastante simples para determinar o preço de uma opção consiste na construção de uma árvore binomial. Considere que queremos determinar o preço u de hoje de uma opção em que o valor atual do ativo base é S_0. Suponha ainda que o tempo de maturidade do contrato é T e que nesta data o ativo poderá assumir dois valores, ou aumentará de preço e passará a valer S_0a, em que $a > 1$, ou diminuirá de preço e passará a valer S_0d, em que $d < 1$. Suponha ainda que a opção passará a valer u_a caso o ativo aumente de preço e u_d caso diminua. Esta situação está ilustrada na figura a seguir.

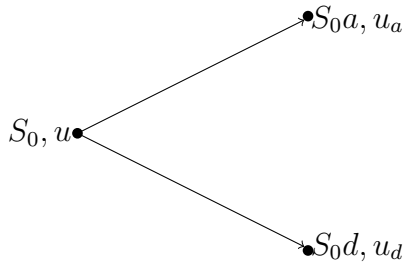


Figura 4.8: Preço do ativo e preço da opção em uma árvore binomial.

Considere agora um portifólio consistindo de Δ ativos e uma opção vendida. Hoje este portifólio vale $S_0\Delta - u$. Em T, caso o ativo passe a valer S_0a, este portifólio valerá $S_0a\Delta - u_a$ e caso passe a valer S_0d, valerá $S_0d\Delta - u_d$. A ideia é determinar a quantia Δ de ativos que devemos comprar hoje para tornarmos este portifólio livre de riscos, pois aí, sobre a hipótese de não arbitragem, seu retorno deverá ser igual ao retorno da taxa de juros livre de riscos. O portifólio torna-se livre de riscos quando ele assumir um mesmo valor em T independente

da variação do preço do ativo. Neste caso, teremos um portifólio livre de riscos quando

$$S_0 a\Delta - u_a = S_0 d\Delta - u_d.$$

E portanto quando

$$\Delta = \frac{u_a - u_d}{S_0 a - S_0 d}. \tag{4.1}$$

Logo, o portifólio consistindo de Δ ativos, Δ segundo a equação 4.1, e uma opção vendida deverá ter um retorno igual a taxa de juros livre de riscos r. Portanto, o valor presente do portifólio é

$$(S_0 a\Delta - u_a)e^{-rT}.$$

Daí

$$S_0\Delta - u = (S_0 a\Delta - u_a)e^{-rT}.$$

Isolando u,

$$u = S_0\Delta(1 - ae^{-rT}) + u_a e^{-rT}.$$

Substituindo o valor de Δ da equação 4.1 e manipulando, chegamos a

$$u = e^{-rT}[pu_a + (1-p)u_d], \tag{4.2}$$

em que

$$p = \frac{e^{rT} - d}{a - d}. \tag{4.3}$$

Exemplo: Suponha que estamos interessados em precificar uma opção *call* europeia com maturidade $T = 6$ meses e preço pré-determinado $K = R\$100,00$ de um ativo base que vale hoje $R\$100,00$. Além disso, sabemos que daqui seis meses, o ativo valerá $R\$110,00$ ou $R\$90,00$. Suponha ainda que a taxa de juros livre de riscos é $r = 10\%$ por ano. De acordo com o que fizemos, temos $a = \frac{110}{100} = 1,1$, $d = \frac{90}{100} = 0,9$, $u_a = \max(110 - 100, 0) = 10$ e $u_d = \max(90 - 100, 0) = 0$. Portanto

$$p = \frac{e^{0,1\cdot 0,5} - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,7564$$

e

$$u = e^{-0,1\cdot 0,5}[0,7564 \cdot 10 + (1 - 0,7564)\cdot 0] = 7,1951.$$

Concluímos que esta opção vale hoje aproximadamente $R\$7,20$.

Observe que a expressão na equação 4.2 que precifica a opção não envolve a probabilidade do ativo aumentar ou diminuir de preço. Isto quer dizer que se tivéssemos a informação que a probabilidade do ativo aumentar de preço é de 60% ou de 90%, não mudaria em nada o valor encontrado para o preço da opção. Isto não é nada intuitivo, pois o esperado é que se a probabilidade do ativo aumentar de preço cresce, o preço da opção do tipo *call* deveria diminuir e do tipo *put* deveria aumentar.

O motivo, segundo [8], pra isto não ocorrer, é que não estamos avaliando a opção em termos absolutos. Nós estamos calculando seu valor em termos do preço do ativo base. Desta forma, as probabilidades do preço do ativo aumentar ou diminuir já estão incorporadas no preço do ativo e portanto não devemos levá-las em conta novamente quando avaliamos a opção em termos do preço do ativo.

Entretanto, embora não tenhamos mencionado nada com respeito a probabilidade do preço do ativo aumentar ou diminuir para deduzir a equação 4.2, podemos interpretar p nesta equação como a probabilidade do preço do ativo aumentar e portanto $1-p$ como a probabilidade do ativo diminuir. Desta forma,

$$pu_a + (1-p)u_d$$

é o valor esperado do preço da opção. Com esta interpretação para p, a equação 4.2 determina que o preço da opção hoje é o valor esperado para o preço da opção em T descontado os juros referentes à taxa de juros livre de riscos.

Se considerarmos que p é a probabilidade do ativo aumentar de preço, o preço esperado do ativo em T, será

$$pS_0a + (1-p)S_0d$$

ou

$$pS_0(a-d) + S_0d.$$

Substituindo da equação 4.3 o valor de p, o valor esperado em T será

$$S_0e^{rT},$$

ou seja, o valor esperado do preço do ativo cresce segundo a taxa de juros livre de riscos. Concluímos então que considerar que o ativo aumenta de preço com probabilidade p é equivalente a assumir que o retorno do ativo é igual aos juros livre de riscos.

Isto motiva um princípio conhecido como avaliação de risco neutro, [8]. Em um mundo de risco neutro os retornos esperados de todos os ativos no futuro são iguais aos retornos dos ativos quando submetidos à taxa de juros livre de riscos. Neste mundo, os investidores não requerem compensação pelo risco assumido. Quando assumimos que o preço do ativo possui uma probabilidade p de aumentar e concluímos que o valor esperado em T para o preço do ativo é S_0e^{rT}, estamos assumindo um mundo de risco neutro.

O princípio de avaliação de risco neutro estabelece que quando precificamos opções, podemos assumir que estamos em um mundo de risco neutro. Vamos voltar ao exemplo anterior e mostrar que a avaliação por risco neutro nos leva ao mesmo resultado que avaliação usando argumentos de não arbitragem, o que foi feito anteriormente.

Vamos supor que estamos em um mundo de risco neutro. Se p é a probabilidade de ativo assumir o valor $R\$110,00$, então o valor esperado para o preço do ativo daqui 6 meses será $110p + 90(1-p)$. O princípio estabelece que este valor deve ser igual a $100e^{rT}$, com $r = 10\%$. Daí

$$110p + 90(1-p) = 100e^{rT}$$

o que implica que

$$p = \frac{100e^{rT} - 90}{20} = 0.7564.$$

Portanto, ao fim dos 6 meses, a opção tem $75,64\%$ de chance de valer $R\$10,00$ e $24,36\%$ de chance de valer 0. Desta forma, o valor esperado para o preço da opção é

$$10 \cdot 0,7564 + 0 \cdot 0,2436 = 7,564.$$

Como estamos supondo um mundo de risco neutro, para determinar o preço da opção hoje, devemos descontar os juros referentes à taxa de juros livre de riscos neste período de 6 meses. Logo, o preço da opção hoje é

$$7,564e^{-0,1 \cdot 0,5} = 7.1951,$$

resultando na mesma resposta obtida com suposição de não arbitragem.

Até agora construimos uma árvore binomial de um único passo. Uma árvore binomial de 2 passos consiste em trabalharmos com o seguinte diagrama para precificar uma opção:

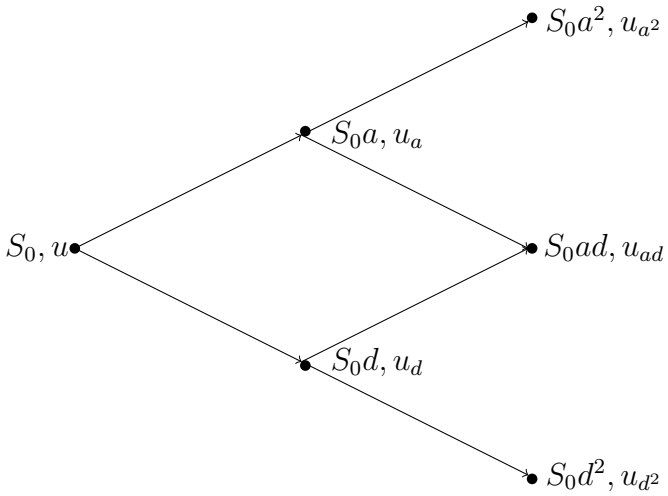


Figura 4.9: Preço do ativo e preço da opção em uma árvore binomial de 2 passos.

Neste caso, consideramos que em T o ativo poderá valer S_0a^2, S_0ad ou S_0d^2 e a opção u_{a^2}, u_{ad} ou u_{d^2}, respectivamente. Repetimos o processo visto para a árvore binomial de 1 passo para cada nó da árvore, determinando primeiro os valores de u_a e u_d e finalmente, de posse destes valores, calculamos o valor u, o preço da opção que almejávamos.

Detalhes a respeito da árvore binomial de 2 passos podem ser encontrados em [8]. É claro que trabalharmos com uma árvore binomial de um único passo ou 2 passos, resulta em uma aproximação grosseira do preço da opção. Podemos generalizar e trabalhar com uma árvore binomial de n passos, tratando cada passo separadamente, veja mais detalhes em [13].

Capítulo 5

Processo de Wiener e o Lema de Itô

Dizemos que uma variável segue um processo estocástico quando seu valor muda de uma maneira incerta ao longo do tempo. Quanto ao tempo, os processos estocásticos são classificados em discretos ou contínuos. Nos discretos, os valores das variáveis mudam apenas em certos pontos do tempo, enquanto que nos contínuos estas mudanças podem ocorrer em qualquer instante. Os processos estocásticos podem ainda ser classificados como discretos ou contínuos quanto ao estado. A explicação é análoga. Nos discretos, as variáveis podem assumir apenas alguns valores discretos, enquato que nos contínuos podem assumir qualquer valor com uma certa lógica.

Neste capítulo desenvolveremos um processo estocástico contínuo quanto ao tempo e ao estado para os preços dos ativos. É interessante notar que na prática os preços dos ativos não seguem um processo estocástico contínuo, já que o mundo funciona de uma forma discreta. Por exemplo, os preços dos ativos assumem apenas valores discretos múltiplos de centavos e só alteram seus valores apenas no período de funcionamento das Bolsas de Valores. Entretanto, o modelo contínuo quanto ao tempo e estado é um modelo útil para nossos propósitos.

A sequência teórica lógica seguida neste capítulo foi baseada em [8].

5.1 Processo de Markov

Um processo de Markov é um exemplo de processo estocástico em que apenas o valor atual da variável é relevante para predizer o fututo. O passado histórico

da variável e o processo pelo qual ela passou para assumir seu atual valor são irrelevantes.

Assumimos que os preços dos ativos seguem um processo de Markov. Logo, informações de quanto o ativo valia a um dia atrás ou a uma semana atrás, não afetam nossas previsões para o futuro, apenas o seu atual valor é relevante, consideramos que todas as informações passadas sobre o preço de um determinado ativo estão contidas no valor atual do mesmo. Como é impossível dizer ao certo o que ocorrerá no futuro, previsões devem ser expressas em termos de distribuição de probabilidade. Portanto, a distribuição de probabilidade dos preços para qualquer tempo futuro não é influenciada pelo processo pelo qual o preço do ativo passou. É importante esclarecer aqui que o passado histórico dos preços do ativos pode ser importante para determinar características deste processo estocástico, como por exemplo, uma estimação para a volatilidade. O que deve ser entendido é que o particular processo pelo qual o preço do ativo passou é irrelevante.

5.2 Processo Estocástico Contínuo

Considere uma variável que siga o processo estocástico de Markov. Suponha que seu preço atual é S e que a mudança em seu preço em 1 ano seja $\phi(0, 1)$, em que $\phi(\mu, \sigma)$ denota a distribuição de probabilidade que é normalmente distribuida com média μ e desvio padrão σ.

Uma importante propriedade da distribuição normal de probabilidade é quando somamos duas distribuições normais de probabilidades independentes, o resultado é uma distribuição normal de probabilidade em que a média é a soma das médias e a variância é a soma das variâncias. Variância é o desvio padrão ao quadrado. Sintetizando, se $\phi(\mu_1, \sigma_1)$ e $\phi(\mu_2, \sigma_2)$ são distribuições normais de probabilidade independentes, então a soma $\phi(\mu_1, \sigma_1) + \phi(\mu_2, \sigma_2)$ resultará em uma distribuição de probabilidade normal com média $\mu_1+\mu_2$ e variância $\sigma_1^2+\sigma_2^2$, logo desvio padrão $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Veja mais detalhes em [13].

Voltando ao nosso problema, temos uma variável em que a mudança dos preços em 1 ano é uma distribuição normal de probabilidade com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$. E se quisermos determinar a distribuição de probabilidade da mudança dos preços para 2 anos? Pois bem, como a variável segue um processo estocástico de Markov, as distribuições de probabilidades no primeiro e no segundo anos são independentes. Portanto, para 2 anos, teremos uma distribuição de probabilidade normal com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{2}$, isto é $\phi(0, \sqrt{2})$.

Analogamente, se quisermos determinar para um período de 6 meses e considerarmos que a variância dos primeiros 6 meses é igual a variância dos segundos 6 meses, teremos uma distribuição normal de probabilidade com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{0,5}$ ou $\phi(0, \sqrt{0,5})$.

Podemos generalizar estes resultados. A mudança de preços para o período de tempo T será $\phi(0, \sqrt{T})$, ou particularmente, para um pequeno período de tempo Δt, $\phi(0, \sqrt{\Delta t})$.

5.2.1 Processo de Wiener

O processo seguido pela variável que apresentamos na seção anterior é conhecido como processo de Wiener. É um tipo particular do processo estocástico de Markov com mudança média igual a 0 e variância igual a 1 por ano.

Vamos formalizar de maneira matemática. Dizemos que uma variável W segue um processo de Wiener se ela possui as seguintes propriedades:

Propriedade 1: A mudança ΔW em curto período de tempo Δt é

$$\Delta W = \epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{5.1}$$

em que ϵ possui uma distribuição normal de probabilidade, $\phi(0, 1)$.

Propriedade 2: Os valores de ΔW para quaisquer dois pequenos intervalos de tempo diferentes, são independentes.

Segue da Propriedade 1 que ΔW por si só possui uma distribuição normal de probabilidade com

$$\begin{gathered}\text{média} = 0,\\ \text{desvio padrão} = \sqrt{\Delta t},\\ \text{variância} = \Delta t.\end{gathered}$$

A Propriedade 2 implica que W segue um processo de Markov.

Já sabemos, portanto, a forma como a variável W muda em um pequeno intervalo de tempo, no sentido que conhecemos a distribuição de probabilidade de ΔW, para um tempo Δt. Mas e para longos intervalos de tempo, digamos T, o que podemos concluir a respeito da mudança de valor de W?

Se considerarmos $W(0)$ o valor da variável no tempo igual a 0 e $W(T)$ o valor da variável no tempo igual a T, esta mudança será $W(T) - W(0)$. Esta mudança

pode ser entendida como sendo a mudança em N intervalos de tempo Δt, em que

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Portanto,

$$W(T) - W(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{5.2}$$

em que ϵ_i, $i = 1, \ldots, N$, possuem distribuições $\phi(0, 1)$. Pela Propriedade 2, sabemos que os ϵ_i, $i = 1, \ldots, N$, são independentes. Além disso, como vimos na seção anterior, somar distribuições normais de probabilidades independentes, resulta em uma distribuição normal de probabilidade, com média e variância iguais a soma das médias e a soma das variâncias das funções de distribuição normal de probabilidade em questão, respectivamente. Portanto, segue da equação 5.2 que $W(T) - W(0)$ possui uma distribuição normal de probabilidade, com

$$\begin{gathered} \text{média} = 0, \\ \text{desvio padrão} = \sqrt{T}, \\ \text{variância} = N\Delta t = T, \end{gathered}$$

Isto concorda com o que foi feito na seção passada. Além disso, o fato do desvio padrão ser crescente em relação a T, isto é, quanto maior T maior o desvio padrão de $W(T) - W(0)$, é coerente. De fato, é o desvio padrão que mensura a incerteza de quanto será o valor da variável no tempo T e, evidentemente, quanto maior for T, maior será esta incerteza.

De agora em diante, iremos adotar a notação do cálculo infinitesimal. Portanto, $dx = adt$ será a notação utilizada para indicar que $\Delta x = a\Delta t$ quando $\Delta t \to 0$. Logo, quando mencionarmos que dW é um processo de Wiener, deve-se entender que ele tem as propriedades de ΔW no limite $\Delta t \to 0$.

5.2.2 Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Browniano

A média de mudança por unidade de tempo em um processo estocástico é conhecido como parâmetro *drift* e a variância por unidade de tempo é conhecido como parâmetro de variância. O processo de Wiener desenvolvido até agora, dW, possui parâmetro *drift* de 0 e parâmetro de variância de 1. O parâmetro *drift* valer 0, significa que o valor esperado para W em qualquer tempo futuro é

igual ao valor atual. O parâmetro de variância valer 1, significa que a variância da mudança em W é igual a T em um intervalo de tempo T. Um processo de Wiener generalizado para uma variável x pode ser definido em termos de dW com

$$dx = adt + bdW \tag{5.3}$$

em que a e b são constantes.

Vejamos o que significa esta equação. Para entendê-la, vamos considerar os dois termos do lado direito separadamente. O termo adt implica que x tem um parâmetro *drift* de a por unidade de tempo. Desconsiderando o termo bdW em 5.3, a equação fica $dx = adt$ e portanto, dividindo ambos lados por dt, $\frac{dx}{dt} = a$. Integrando com respeito ao tempo, temos

$$x = x_0 + at$$

em que x_0 é o valor da variável x no tempo 0. Portanto, em um período de tempo T, a variável x mudará um valor de aT. Vejamos agora o outro termo, bdW. O termo dW é um processo de Wiener e portanto, o responsável pela incerteza de mudança na variável x. Multiplicá-lo pela constante b consiste em ampliar ou atenuar esta incerteza.

Das equações 5.1 e 5.3, para um intervalo de tempo pequeno Δt, a mudança Δx na variável x, é

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t},$$

em que ϵ possui uma distribuição normal de probabilidade, $\phi(0, 1)$. Logo Δx tem uma distribuição normal com

$$\begin{gathered}\text{média} = a\Delta t,\\ \text{desvio padrão} = b\sqrt{\Delta t},\\ \text{variância} = b^2\Delta t.\end{gathered}$$

Analogamente ao processo de Wiener, a mudança em x para um intervalo de tempo T é normalmente distribuido com

$$\begin{gathered}\text{média} = aT,\\ \text{desvio padrão} = b\sqrt{T},\\ \text{variância} = b^2T.\end{gathered}$$

5.2.3 Processo de Itô ou Movimento Browniano Generalizado

Da seção anterior sabemos que a variável x segue um processo de Winer Generalizado se

$$dx = adt + bdW,$$

em que a e b são constantes e dW é um processo de Wiener.

Podemos permitir que os parâmetros a e b variem em função do valor da variável x e do tempo t, obtendo $a \equiv a(x,t)$ e $b \equiv b(x,t)$. Daí então definimos processo de Itô. Dizemos que uma variável x segue um proceso de Itô se

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW. \tag{5.4}$$

Permitir que os parâmetros a e b variem, significa permitir que os parâmetros *drift* e variância, também variem ao longo do tempo. Portanto, dado o valor da variável x em um determinado tempo t, $a(x,t)$ é o crescimento esperado instantâneo e $b(x,t)^2$ é a variância instantânea do processo do Itô. Para um intervalo de tempo pequeno Δt, a mudança Δx em x, é

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Está implícito nesta relação que os parâmetros *drift* e variância da variável x permanecem constantes durante o intervalo de tempo compreendido entre t e $t + \Delta t$. Mas claro, isto é apenas uma aproximação. A mudança em x em um intervalo pequeno de tempo Δt tem como uma boa aproximação uma distribuição normal com

$$\begin{gathered}\text{média} = a(x,t)\Delta t,\\ \text{desvio padrão} = b(x,t)\sqrt{\Delta t},\\ \text{variância} = b(x,t)^2\Delta t.\end{gathered}$$

Entretanto, para intervalos de tempo grandes, como é de se esperar, a distribuição torna-se não normal.

5.2.4 Movimento Browniano Geométrico

O Movimento Browniano Geométrico é um caso particular de Processo de Itô, no qual

$$a(x,t) = \mu x,$$

$$b(x,t) = \sigma x,$$

em que μ e σ são constantes. Substituindo estas funções em 5.4, resulta que

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW. \tag{5.5}$$

5.3 Um modelo para o movimento dos preços dos ativos

Considerando que a variável x não assume o valor 0, podemos dividir ambos lados da equação 5.5 por x, daí

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dW.$$

Assumimos que os preços dos ativos, que não pagam dividendos, seguem um Movimento Browniano Geométrico. Portanto, se S é o preço do ativo em um tempo t, μ é a taxa esperada de retorno e σ é a volatilidade do preço do ativo, segue que

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW.$$

Vejamos com mais detalhes o porque de assumirmos que os preços dos ativos seguem um Movimento Browniano Geométrico.

Um investidor que almeja um retorno anual de 20% para um determinado ativo quando ele estiver valendo $R\$10,00$, ele também irá esperar este mesmo retorno quando o ativo estiver valendo $R\$100,00$. O que estamos tentando dizer é que o retorno percentual esperando por um investidor independe do preço do ativo. Por isso não seria razoável assumir que o preços dos ativos seguissem um Processo de Wiener Generalizado, que possui parâmatros *drift* e variância constantes. Neste caso, estaríamos pedindo que retorno absoluto esperado por um investidor fosse independente do preço do ativo.

Neste contexto, devemos pensar que a taxa média de mudança esperada dividido pelo preço do ativo, é constante. Logo, se S é o preço do ativo no tempo t, o parâmetro *drift* deve ser μS, para algum μ constante. Isto significa que em um curto intervalo de tempo Δt, a mudança esperada em S será de $\mu S \Delta t$. O parâmetro μ é a taxa esperada de retorno e deve ser expressa em porcentagem.

Se considerarmos que a volatilidade do preço do ativo sempre é nula, teremos neste caso

$$\Delta S = \mu S \Delta t.$$

Logo, para $\Delta t \to 0$,

$$dS = \mu S dt,$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Na prática, a volatilidade não é nula. Se pensarmos no retorno percentual $\frac{\Delta S}{S}$ em um curto intervalo de tempo Δt, é razoável supormos que a variabilidade deste valor será a mesma, independente do valor S do ativo. Em outras palavras, um investidor possui a mesma incerteza quanto ao retorno percentual quando o ativo estiver valendo $R\$10,00$ ou $R\$100,00$. Isto significa que o desvio padrão da mudança de preço do ativo, para este intervalo de tempo Δt, deve ser proporcional ao preço do ativo. Portanto, o modelo fica

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t},$$

ou

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}. \tag{5.6}$$

Logo, para $\Delta t \to 0$,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \tag{5.7}$$

caracterizando o Movimento Browniano Geométrico, em que μ é a taxa de retorno esperada e σ é a volatilidade do preço do ativo.

Observe que a equação 5.6 mostra que $\frac{\Delta S}{S}$ possui distribuição normal com média $\mu \Delta t$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$, para um tempo Δt pequeno.

Para ilustrar, vejamos um exemplo de um ativo que siga o Movimento Browniano Geométrico.

Exemplo: Considere que um ativo segue o modelo 5.7, com taxa de retorno esperada de 10% por ano e volatilidade anual de 25%. Logo $\mu = 0,1$ e $\sigma = 0,25$. Neste caso, o modelo fica

$$\frac{dS}{S} = 0,1dt + 0,25dW.$$

Se S é o preço do ativo em um determinado tempo t e ΔS é a mudança no preço do ativo em $t + \Delta t$, temos

$$\frac{\Delta S}{S} = 0,1\Delta t + 0,25\epsilon\sqrt{\Delta t},$$

em que ϵ possui distribuição normal de probabilidade. Consideremos um intervalo de 2 semanas, ou aproximadamente, $0,0385$ anos e que o preço inicial do ativo seja $R\$100,00$, daí $S = 100,00$ e $\Delta t = 0,0385$. Logo

$$\Delta S = 0,385 + 4,905\epsilon,$$

mostrando que a mudança do preço, para 2 semanas, possui uma distribuição normal com média $R\$0,385$ e desvio padrão $R\$4,905$.

5.4 Lema de Itô

O Lema de Itô é uma importante ferramenta que precisaremos para determinar o preço de uma opção.

Suponha que o valor de uma variável x siga o Processo de Itô

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW, \tag{5.8}$$

em que dW é um Processo de Wiener e a e b são funções de x e de t. Dado uma função G de x e de t então

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b(x,t)\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b(x,t)dW \tag{5.9}$$

em que dW é o mesmo processo de Wiener da equação 5.8. Portanto, G também segue um Processo de Itô com parâmetro *drift*

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b(x,t)\right)$$

e parâmetro variância

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b(x,t)^2.$$

A demonstração do Lema de Itô foge do escopo deste texto. Mais detalhes podem ser encontrados em [8, 16].

Assumimos que o movimento no preço de um ativo respeita a equação

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \tag{5.10}$$

com μ e σ constantes. Portanto, pelo Lema de Itô, uma função G que dependa de S e de t, segue o processo

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dW. \tag{5.11}$$

Note que tanto S quanto G são afetados pela mesma fonte de incerteza, uma vez que o Processo de Wiener dW é o mesmo nas equações 5.10 e 5.11.

Capítulo 6

A Equação de Black-Scholes e o Princípio da Retrodifusão

6.1 A Propriedade Lognormal dos preços dos ativos

Conforme o capítulo anterior, assumimos que o preço dos ativos seguem um Movimento Browniano Geométrico

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

com μ e σ constantes. Vamos definir

$$G = \log S.$$

Assim, pelo Lema de Itô a função G segue o seguinte movimento

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dW. \tag{6.1}$$

Agora, como

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

a equação 6.1 torna-se

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW.$$

Como μ e σ são constantes, resulta que G segue um Processo de Wiener Generalizado com parâmetro *drift* $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e parâmetro de variância σ^2. Como consequência, a mudança em $\log S$ entre o tempo 0 e um tempo futuro T é normalmente distribuido com média $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{T}$, isto é

$$\log S_T - \log S_0 \approx \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \tag{6.2}$$

ou

$$\log S_T \approx \phi\left[\log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \tag{6.3}$$

em que S_T e S_0 é o preço do ativo em T e em 0, respectivamente.

A equação 6.3 mostra que $\log S_T$ é normalmente distribuido. Portanto, S_T possui uma distribuição lognormal. Isto é resultado importante e coerente, no sentido que uma distribuição lognormal assume apenas valores positivos, o que não permite atribuir valores negativos ao preço do ativo.

6.2 A Distribuição da taxa de Retorno e a volatilidade

Suponha que o preço de um determinado ativo no tempo 0 é S_0 e no tempo T é S_T. Seja x a taxa de retorno anual composta continuamente e considere que o tempo é medido em anos. Desta forma temos que

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

e portanto, isolando x,

$$x = \frac{1}{T}\log\frac{S_T}{S_0}.$$

Da equação 6.2, tempos que

$$\log\frac{S_T}{S_0} \approx \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

e portanto a variável x é tal que

$$x \approx \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right). \tag{6.4}$$

Logo a taxa de retorno anual composta continuamente possui uma distribuição normal com média $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$. Desta forma, à medida que T cresce o desvio padrão de x diminui. Para entendermos isto, considere dois casos: $T = 1$ e $T = 20$. Nós temos mais certeza da média de retorno por ano em 20 anos do que em apenas qualquer um dos anos isoladamente.

Como dizemos na seção 4.2, grosseiramente falando, a volatilidade é uma medida da incerteza do quanto o ativo valerá no futuro e portanto, quanto será o seu retorno. A equação 6.4 nos permite dar uma definição mais precisa do que é a volatilidade. Podemos defini-la como o desvio padrão dos retornos de um ativo no período de 1 ano, quando consideramos que o retorno é composto continuamente.

Para intervalos de tempo pequenos, digamos Δt a equação

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \phi\left(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

mostra que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ é aproximadamente igual ao desvio padrão da mudança percentual no preço do ativo em Δt. Para 1 dia, por exemplo, este desvio padrão é aproximadamente

$$\frac{\sigma}{\sqrt{252}},$$

se considerarmos que 1 ano possui 252 dias úteis. Se relaxarmos e supormos também que isto vale para intervalos de tempo longos T, teremos que $\sigma\sqrt{T}$ é aproximadamente o desvio padrão da mudança percentual no preço do ativo neste intervalo. Portanto, poderemos definir a volatilidade, de grosso modo, como desvio padrão da mudança percentual no preço do ativo em 1 ano. Neste sentido, o valor $\frac{\sigma}{\sqrt{252}}$ é uma aproximação para a volatilidade do ativo em 1 dia. Podemos generalizar e aceitar

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

como uma aproximação para a volatilidade do ativo no período de tempo correspondente a $\frac{1}{n}$ ano.

Embora a definição rigorosa para a volatilidade seja interpretá-la como o desvio padrão dos retornos de um ativo no período de 1 ano quando consideramos que o retorno é composto continuamente, pode ser útil relaxar e considerá-la como o desvio padrão da mudança percentual no preço do ativo em 1 ano, pela forma simplificada que podemos encontrar aproximações para a volatilidade em intervalos de tempo, como por exemplo a volatilidade diária ou semanal de um ativo.

6.3 A Equação de Black-Scholes

Assumiremos as seguintes hipóteses para deduzirmos a Equação de Black-Scholes, [8, 16]:

1. O preço do ativo segue um Movimento Browniano Geométrico com μ e σ constantes;
2. não há restrições para venda a descoberto;
3. não há custos de transações e impostos;
4. o ativo não paga dividendos;
5. não há oportunidades de arbitragem;
6. negócios são feitos continuamente;
7. os ativos são perfeitamente divisíveis, no sentido em que se pode comercializar qualquer porção de um ativo;
8. pode-se emprestar dinheiro ou tomar emprestado à taxa de juros livre de riscos constante r.

Como vimos no capítulo anterior, assumir que o preço do ativo segue um Movimento Browniano Geométrico significa que

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \tag{6.5}$$

em que, dW é um Processo de Wiener. Suponha agora que temos uma opção em que seu valor $u(S,t)$ dependa apenas do preço S do ativo e do tempo t. Neste momento não precisamos especificar se a opção é do tipo *call* ou *put*. Usando o Lema de Itô, temos que

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial S}\mu S + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) + \frac{\partial u}{\partial S}\sigma S dW, \tag{6.6}$$

em que o Processo de Wiener em 6.6 é o mesmo que o em 6.5. Considere o seguinte portifólio:

- uma opção;

- $-\Delta$ ativos.

O valor deste portifólio é

$$\Pi = u - S\Delta. \tag{6.7}$$

A mudança no valor deste portifólio no intervalo de tempo dt é

$$d\Pi = du - \Delta dS. \tag{6.8}$$

É importante ressaltar que aqui, Δ é fixo durante o intervalo de tempo dt, se não, $d\Pi$ conteria termos em $d\Delta$. Substituindo as equações 6.5 e 6.6 em 6.8, concluímos que Π segue o seguinte movimento aleatório

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial u}{\partial S} - \Delta\right) dW + \left(\frac{\partial u}{\partial S}\mu S + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - \mu S\Delta\right) dt. \tag{6.9}$$

Se escolhermos

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial S} \tag{6.10}$$

no início do intervalo de tempo dt, o termo dW da equação 6.9, responsável pelo movimento aleatório de Π, é eliminado. Desta forma, o incremento $d\Pi$ dado por

$$d\Pi = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt \tag{6.11}$$

é totalmente determinístico, concluindo que o portifólio, com esta escolha de Δ é livre de riscos. Portanto, sobre a hipótese de não arbitragem, o retorno de Π no fim do tempo dt deve ser baseado na taxa de juros livre de riscos, ou seja, $d\Pi$ deve valer $r\Pi dt$. Se $d\Pi$ for maior que este valor, uma oportunidade de arbitragem surge ao tomar Π emprestado e comprar o portifólio. Caso $d\Pi$ for menor que este valor, um ganho sem riscos pode ser obtido ao vender o portifólio a descoberto e emprestar o dinheiro à taxa de juros livre de riscos. Portanto segue que

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt. \tag{6.12}$$

Substituindo as equações 6.7 e 6.10 em 6.12, chegamos a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + rS\frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0. \tag{6.13}$$

Esta é a Equação de Black-Scholes que nos dá o preço justo de uma opção. Ela possui diversas soluções, correspondentes aos diferentes derivativos. Uma solução

particular é obtida quando a equação é resolvida com uma determinada condição de contorno, veremos isto adiante.

É importante ressaltar que o portifólio usado na dedução da equação é livre de riscos apenas no tempo infinitesimal dt. Com a mudança de S e t, o valor de $\Delta = \frac{\partial u}{\partial S}$ também se altera.

Interessantemente o retorno esperado μ não aparece na equação 6.13. Isto deve-se à uma importante propriedade da Equação de Black-Scholes, o fato de que ela não envolve nenhuma variável que é afetada pela preferência de risco do investidor. A variável μ depende da preferência de risco, uma vez que quanto maior o risco assumido por um investidor, maior será o valor de μ requerido, veja [8].

Como a Equação de Black-Scholes é independente da preferência de risco, este não pode afetar a solução. Portanto, a princípio, podemos assumir qualquer preferência ao risco. Por simplicidade, podemos assumir um mundo de risco neutro. Isto já foi comentado na seção 4.5. Naturalmente, a avaliação de risco neutro é artificial. Entretanto, a solução encontrada é válida em qualquer mundo, não apenas no mundo em que os investidores não requerem compensação pelo risco assumido.

6.4 A Equação de Black-Scholes para opções europeias

A solução da Equação de Black-Scholes depende das condições de contorno assumidas. São as condições de contorno que caracterizam o tipo de opção a ser avaliada. Opções europeias possuem condições de contorno bem conhecidas.

Vamos denotar por $c(S_t, t)$ e por $p(S_t, t)$ os preços de uma opção *call* europeia e de uma opção *put* europeia, respectivamente, com preços pré-determinados K e data de maturidade T em um tempo $t < T$, em que o preço corrente do ativo base é S_t. Vejamos as condições de contorno.

- **Opção *call* europeia**

  O preço de uma opção *call* europeia $c(S_t, t)$, satisfaz:

$$c(S_T, T) = \max(S_T - K, 0), \text{ para } 0 < S_T < \infty;$$
$$c(0, t) = 0, \text{ para } 0 \leq t \leq T;$$

$$\lim_{S_t \to \infty} c(S_t, t) - S_t = 0, \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

A primeira condição vem da definição da própria opção, isto é, em T se $S_T > K$ então a opção será exercida e valerá $S_T - K$, caso o contrário a opção não será exercida e valerá 0. A segunda e a terceira condição derivam da hipótese que o preço do ativo segue um Movimento Browniano Geométrico. Se $S_t = 0$ para algum $t < T$ então $S_T = 0$ e a opção não será exercida, obtendo a segunda condição. Agora se permitirmos que $S_t >> K$ para $t < T$, então com uma grande probabilidade temos que $S_T >> K$ e portanto que a opção será exercida e valerá $S_T - K \approx S_T$, obtendo a terceira condição.

- **Opção *put* europeia**

  O preço de uma opção *put* européa $p(S_t, t)$, satisfaz:

$$p(S_t, T) = \max(K - S_t, 0), \text{ para } 0 < S_t < \infty;$$
$$p(0, t) = K, \text{ para } 0 \leq t \leq T;$$
$$\lim_{S_t \to \infty} p(S_t, t) = 0, \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

  Os motivos são análogos aos das opções *call* europeias.

A Equação de Black-Scholes 6.13 com as condições de contorno explicitadas possuem soluções analíticas[(i)]. A solução para opções *call* europeias é

$$c(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

em que

$$d_1 = \frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$
$$d_2 = \frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

A função $N(x)$ é a função de distribuição de probabilidade de uma distribuição normal, ou seja, é a probabilidade de uma variável com distribuição normal $\phi(0, 1)$ ser menor que x.

[(i)] As soluções analíticas para opções *call* e *put* europeias estão implementadas no Matlab. A função é $[Call, Put] = blsprice(S, K, r, T, sigma)$.

A solução analítica para opções *put* europeias pode ser obtida resolvendo a equação 6.13 com as condições de contorno apropriadas ou através da paridade *put-call*, veja seção 4.4.2. A solução é

$$p(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

em que d_1, d_2 e $N(x)$ são os mesmos para a solução de opções *call* europeias. A demonstração pode ser encontrada em [5, 16].

6.5 O Princípio da Retrodifusão

O propósito é deduzir a Equação de Black-Scholes partindo de um princípio muito simples, que chamaremos de Princípio da Retrodifusão, veja [11].

Princípio da Retrodifusão: O preço de um derivativo no dia $t+1$ deve ser "na média" igual ao preço "real" no dia t.

Vejamos o que isto quer dizer. Para simplificar vamos pensar que o tempo é medido em dias. Evidentemente, no dia $t+1$ não conhecemos o preço do ativo exatamente, mas sim com uma certa probabilidade. Desta distribuição de probabilidade conhecemos uma medida de dispersão proporcional ao preço S do ativo, digamos σS[(ii)], como na seção 5.3. Dados S e $t+1$, definiremos como "preço na média" o seguinte valor

$$\frac{u(S-\sigma S, t+1) + u(S+\sigma S, t+1)}{2}.$$

A suposição implícita nesta média é que o ativo base pode tomar 2 valores em $t+1$ com igual probabilidade: $S-\sigma S$ ou $S+\sigma S$.

O Príncipio da Retrodifusão estabelece que esta média deve ser igual ao preço "real" do derivativo no dia t. A primeira vista, este valor parece ser $u(S,t)$. Entretanto, devemos corrigir os valores pela taxa de juros livre de riscos r[(iii)]. Se supormos que a taxa de juros r é composta diariamente, o preço do ativo S no dia $t+1$ equivale a $\frac{S}{1+r}$ no dia t e o valor u no dia t equivale a $(1+r)u$ no dia $t+1$. Portanto, o preço "real" no dia t é

$$(1+r)u\left(\frac{S}{1+r}, t\right).$$

(ii) Aqui estamos supondo que σ é a volatilidade diária, o que não deve causar confusão com a forma anualizada com estávamos trabalhando.

(iii) Da mesma forma que a volatilidade, aqui r é taxa de juros diária.

Agora conseguimos escrever a equação que reflete o Princípio:

$$\frac{u(S-\sigma S,t+1)+u(S+\sigma S,t+1)}{2}=(1+r)u\left(\frac{S}{1+r},t\right). \tag{6.14}$$

Vejamos como deduzir a Equação de Black-Scholes a partir da equação 6.14. A equação 6.14 está discretizada para o tempo $\Delta t = 1$ dia, vamos escrevê-la para um Δt pequeno genérico. Para isto devemos subdividir o dia em N intervalos de tempo iguais

$$\Delta t = \frac{1 \text{ dia}}{N}.$$

Desta forma, uma aproximação para a volatilidade no período de tempo Δt é $\bar{\sigma} = \sigma\sqrt{\Delta t}$ e para a taxa de juros é $\bar{r} = r\Delta t$. A equação 6.14 discretizada em Δt fica

$$\frac{u(S-\bar{\sigma}S,t+\Delta t)+u(S+\bar{\sigma}S,t+\Delta t)}{2}=(1+\bar{r})u\left(\frac{S}{1+\bar{r}},t\right).$$

Subtraindo $u(S,t+\Delta t)$ de ambos os lados desta equação e fazendo $\dfrac{1}{1+\bar{r}} \approx 1-\bar{r}$, já que $\bar{r}$ é pequeno,

$$\frac{u(S-\bar{\sigma}S,t+\Delta t)+u(S+\bar{\sigma}S,t+\Delta t)-2u(S,t+\Delta t)}{2}=$$

$$=(1+\bar{r})u(S-\bar{r}S,t)-u(S,t+\Delta t).$$

Como $\bar{\sigma}S$ e $\bar{r}S$ são pequenos, podemos aproximar

$$u(S-\bar{\sigma}S,t+\Delta t)+u(S+\bar{\sigma}S,t+\Delta t)-2u(S,t+\Delta t)\approx\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S,t+\Delta t)\bar{\sigma}^2S^2$$

e

$$u(S-\bar{r}S,t)\approx u(S,t)-\frac{\partial u}{\partial S}(S,t)\bar{r}S$$

obtendo

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S,t+\Delta t)\bar{\sigma}^2S^2=(1+\bar{r})\left[u(S,t)-\frac{\partial u}{\partial S}(S,t)\bar{r}S\right]-u(S,t+\Delta t).$$

Agora, podemos desprezar $\bar{r}^2$, já que $\bar{r}$ é pequeno, assim

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S,t+\Delta t)\bar{\sigma}^2S^2=u(S,t)-u(S,t+\Delta t)+\bar{r}u(S,t)-\frac{\partial u}{\partial S}(S,t)\bar{r}S.$$

Substituindo $\bar{\sigma}$ por $\sigma\sqrt{\Delta t}$, $\bar{r}$ por $r\Delta t$ e rearranjando,

$$u(S,t+\Delta t)-u(S,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S,t+\Delta t)\sigma^2\Delta t S^2+\frac{\partial u}{\partial S}(S,t)r\Delta t S-r\Delta t u(S,t)=0.$$

Dividindo ambos lados da igualdade por Δt

$$\frac{u(S,t+\Delta t)-u(S,t)}{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S,t+\Delta t)\sigma^2 S^2+\frac{\partial u}{\partial S}(S,t)rS-ru(S,t)=0.$$

e fazendo $\Delta t \to 0$, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S,t)\sigma^2 S^2+\frac{\partial u}{\partial S}(S,t)rS-ru(S,t)=0.$$

Esta é a Equação de Black-Scholes[iv].

Já deduzimos a Equação de Black-Scholes a partir do Princípio da Retrodifusão. Vamos agora demonstrá-lo, isto é, mostrar que a equação 6.14 é válida. Para isto vamos supor que no dia $t+1$ o ativo pode tomar 2 valores $S+\sigma S$ ou $S-\sigma S$. Além disto, vamos supor que a taxa de juros diária sem riscos r é composta diariamente, que os ativos são perfeitamente divisíveis, que o ativo base não paga dividendos e que não há possibilidades de arbitragem. A ideia da demonstração é parecida com o que foi feito na seção 4.5.

O preço do ativo no dia t é S e da opção $u(S,t)$. Por hipótese, no dia $t+1$, o ativo pode tormar 2 valores $S+\sigma S$ ou $S-\sigma S$, e o derivativo $u(S+\sigma S,t+1)$ ou $u(S-\sigma S,t+1)$, respectivamente. Esta situação está ilustrada na figura a seguir.

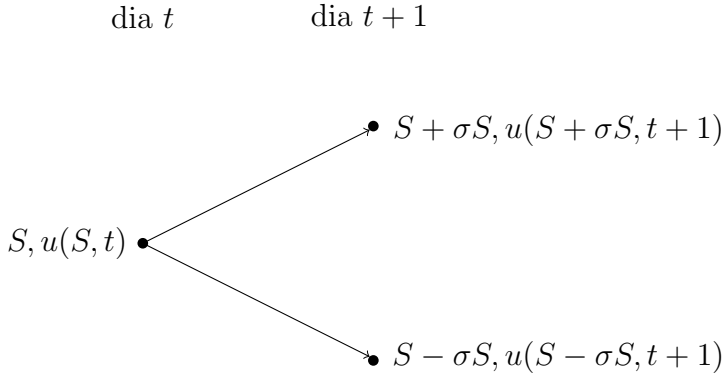


Figura 6.1: Preço do ativo base e do derivativo no dia t e no dia $t+1$.

[iv]Aqui obtemos a Equação de Black-Scholes com a volatilidade e taxa de juros diárias. Entretanto, se quisermos obtê-la com estes parâmetros anualizados, basta pensarmos que o tempo é medido em anos.

Considere um portifólio com Δ porções do ativo e um derivativo vendido. Vamos calcular o valor de Δ que faça com que o portifólio seja isento de riscos em $t+1$. Se o ativo passar a valer $S+\sigma S$, o valor do portifólio em $t+1$ será $(S+\sigma S)\Delta - u(S+\sigma S, t+1)$. Se o ativo passar a valer $S-\sigma S$, o valor do portifólio em $t+1$ será $(S-\sigma S)\Delta - u(S-\sigma S, t+1)$. O portifólio é livre de riscos se o valor de Δ for escolhido de tal forma que o valor do portifólio em $t+1$ seja o mesmo em ambas alternativas, isto é, independente do que aconteça com o preço do ativo base o portifólio valerá a mesma quantia. Portanto, devemos ter

$$(S+\sigma S)\Delta - u(S+\sigma S, t+1) = (S-\sigma S)\Delta - u(S-\sigma S, t+1)$$

ou

$$2\sigma S\Delta = u(S+\sigma S, t+1) - u(S-\sigma S, t+1)$$

e portanto

$$\Delta = \frac{u(S+\sigma S, t+1) - u(S-\sigma S, t+1)}{2\sigma S}. \tag{6.15}$$

Logo, o portifólio sem riscos é composto por:

- $\dfrac{u(S+\sigma S, t+1) - u(S-\sigma S, t+1)}{2\sigma S}$ porções do ativo,
- 1 um derivativo vendido.

Sob a hipótese de não arbitragem, o portifólio sem riscos deve render de acordo com a taxa de juros livre de riscos. Considere que estamos no dia $t+1$. Logo o valor do portifólio hoje deve ser igual ao valor real do portifólio ontem acrescido dos juros baseado na taxa de juros livre de riscos. O portifólio vale hoje

$$(S+\sigma S)\Delta - u(S+\sigma S, t+1).$$

Ontem o portifólio valia $S\Delta - u(S,t)$. A primeira vista, é natural pensarmos que seu valor real hoje será $[S\Delta - u(S,t)](1+r)$, entretanto S ontem equivale a $\frac{S}{1+r}$ hoje. Portanto, o valor real do portifólio ontem acrescido da taxa de juros é

$$\left[\frac{S}{1+r}\Delta - u\left(\frac{S}{1+r}, t\right)\right](1+r).$$

Daí

$$\left[\frac{S}{1+r}\Delta - u\left(\frac{S}{1+r}, t\right)\right](1+r) = (S+\sigma S)\Delta - u(S+\sigma S, t+1),$$

distribuindo,

$$S\Delta - u\left(\frac{S}{1+r}, t\right)(1+r) = S\Delta + \sigma S\Delta - u(S+\sigma S, t+1),$$

e rearranjando

$$(1+r)u\left(\frac{S}{1+r}, t\right) = u(S+\sigma S, t+1) - \sigma S\Delta.$$

Da equação 6.15, substituindo o valor de Δ

$$(1+r)u\left(\frac{S}{1+r}, t\right) = u(S+\sigma S, t+1) - \frac{u(S+\sigma S, t+1) - u(S-\sigma S, t+1)}{2}.$$

Logo

$$(1+r)u\left(\frac{S}{1+r}, t\right) = \frac{u(S+\sigma S, t+1) + u(S-\sigma S, t+1)}{2},$$

obtendo a equação da Retrodifusão. Esta equação pode ser usada para estabelecer o preço de um derivativo em função de t recursivamente, conhecidos os valores de $u(S,T)$ para algum T. Como vimos na seção anterior, os valores de $u(S,T)$, quando T é a data de maturidade de uma opção europeia, é uma condição de contorno e portanto conhecidos.

A possível dificuldade de entendimento que surge na demonstração da equação que reflete o Princípio da Retrodifusão é aceitar que o valor corrigido do portifólio no dia $t+1$ é $\left[\frac{S}{1+r}\Delta - u\left(\frac{S}{1+r}, t\right)\right](1+r)$ e não $[S\Delta - u(S,t)](1+r)$. Isto ocorre porque estamos supondo estarmos no dia $t+1$. Podemos também verificar a equação se supormos estarmos no dia t, como fizemos na seção 4.5. Entretanto, o processo fica um tanto quanto artificial. Vejamos.

Na seção 4.5, supomos que o preço atual do ativo base é S, que o preço do derivativo é $u \equiv u(S,t_0)$ e que no tempo T o ativo poderia valer Sa ou Sd e o derivativo respectivamente $u_a \equiv u(Sa,T)$ ou $u_d \equiv u(Sd,T)$, com $a > 1$ e $d < 1$. Com estas hipóteses mostramos que

$$u = e^{-rT}[pu_a + (1-p)u_d],$$

em que

$$p = \frac{e^{rT} - d}{a - d}.$$

Além disso, interpretamos p como sendo a probabilidade do ativo subir de preço.

Se pensarmos agora que o tempo é medido em dias e que a taxa de juros diária r é composta diariamente, de forma análoga conseguiremos demonstrar que se no dia t o ativo vale S, que o derivativo vale $u \equiv u(S,t)$ e que no dia $t + \Delta t$[v] o ativo poderá valer Sa ou Sd e o derivativo respectivamente $u_a \equiv u(Sa, t + \Delta t)$ ou $u_d \equiv u(Sd, t + \Delta t)$, com $a > 1$ e $d < 1$, teremos

$$u(S,t) = (1+r)^{-\Delta t}[pu(Sa, t + \Delta t) + (1 - p)u(Sd, t + \Delta t)],$$

em que

$$p = \frac{(1+r)^{\Delta t} - d}{a - d}.$$

Suponha agora que no dia t o ativo valha $\frac{S}{1+r}$ e que no dia $t + 1$ poderá valer $S + \sigma S$ ou $S - \sigma S$. Desta forma temos $\Delta t = 1$ dia. Neste caso teremos

$$a = (1 + \sigma)(1 + r) \quad \text{e} \quad d = (1 - \sigma)(1 + r)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
p &= \frac{(1+r) - d}{a - d}; \\
&= \frac{(1+r) - (1-\sigma)(1+r)}{(1+\sigma)(1+r) - (1-\sigma)(1+r)}; \\
&= \frac{(1+r)[1 - (1-\sigma)]}{(1+r)[(1+\sigma) - (1-\sigma)]}; \\
&= \frac{\sigma}{2\sigma}; \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Logo

$$u\left(\frac{S}{1+r}, t\right) = (1+r)^{-1}\left[\frac{1}{2}u(S + \sigma S, t + 1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)u(S - \sigma S, t + 1)\right],$$

[v] Aqui Δt é um número natural medido em dias, isto é, $\Delta t = 1, 2, 3, \cdots$ dias, e não uma porção pequena do tempo.

obtendo

$$\frac{u(S-\sigma S,t+1)+u(S+\sigma S,t+1)}{2}=(1+r)u\left(\frac{S}{1+r},t\right),$$

a equação 6.14. Observe que se interpretarmos p como a probabilidade do ativo aumentar de preço e $1-p$ como a probabilidade de diminuir de preço, concluiremos que no dia $t+1$ o ativo pode assumir os preços $S+\sigma S$ ou $S-\sigma S$ com igual probabilidade, o que é consistente com o que dizemos no início da seção.

Capítulo 7

A volatilidade

Precificar uma opção significa resolver a Equação de Black-Scholes

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S,t)\sigma^2 S^2 + \frac{\partial u}{\partial S}(S,t)rS - ru(S,t) = 0$$

com as condições de contorno adequadas. As condições de contorno para opções europeias, conforme vimos na seção 6.4, são bem conhecidas. Os fatores preço pré-determinado, tempo de maturidade, preço corrente do ativo e taxa de juros livre de riscos (se supormos constante) que afetam o preço u da opção são facilmente determinados. O fator "misterioso" é a volatilidade, σ. Neste capítulo vamos tentar encontrar um valor para a volatilidade de um ativo.

7.1 Volatilidade histórica

Um meio muito simples de estimar a volatilidade de um ativo é através de dados históricos. Para estimar a volatilidade por dados históricos, devemos observar as cotações do ativo em um determinado intervalo de tempo. Vamos denotar por

- $n+1$ o número de observações;
- S_i o preço do ativo no fim do i-ésimo intervalo de tempo, $i = 0, \ldots, n$;
- Δt o comprimento do intervalo de tempo expresso em anos.

Calculamos para $i = 1, \ldots, n$,

$$u_i = \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right).$$

Podemos interpretar cada u_i como uma observação de uma variável, digamos x. Agora, assumimos que os preços de um ativo seguem um Movimento Browniano Geométrico, isto implica que

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \approx \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

em que S_T denota o preço do ativo no tempo T e S_0 o preço do ativo no tempo 0. Desta forma, cada u_i possui distribuição normal com desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Isto implica que, aproximadamente, x também possui distribuição normal com desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$. O desvio padrão $\tilde{\sigma}$ de x pode ser calculado por

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2},$$

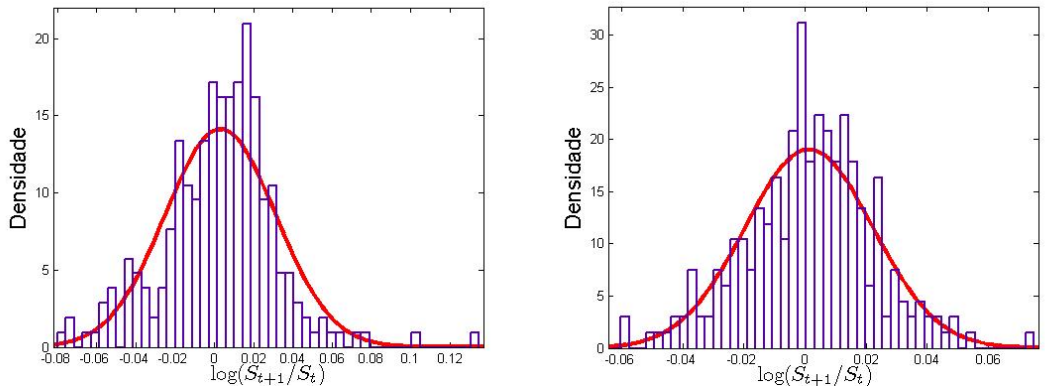
em que $\bar{u}$ é a média dos u_i, $i = 1, \ldots, n$,

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Portanto, $\tilde{\sigma}$ é uma estimativa para $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Segue que uma estimativa para a volatilidade é

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\Delta t}}.$$

Para ilustrar vamos estimar a volatilidade das ações PETR3 (PETROBRAS ON) e GGBR3 (Gerdau ON N1) através de dados históricos. Os dados correspondem às cotações diárias das ações no ano de 2007. Portanto, nestes casos temos $\Delta t = 1$ dia. Estão plotados a seguir as distribuições da variável $x = \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$, para $i = 1, \ldots, 244$, já que em 2007 tivemos 245 dias úteis, e as respectivas aproximações normais.



(a) (b)

Figura 7.1: (a) Distribuição relativa à ação da Petrobrás; (b) distribuição relativa à ação da Gerdau.

Desconsiderando os erros nos cálculos, os desvios padrões são 0.0282326 e 0.0209612 para as ações PETR3 e GGBR4, respectivamente. Como os dados coletados correspondem às cotações diárias, estes valores são uma estimativa para as volatilidades diárias destas ações. Anualizando, uma aproximação para a volatilidade é

$$0.0282326 \cdot \sqrt{243} = 0,4401 \text{ e } 0.0209612 \cdot \sqrt{243} = 0,3268,$$

isto é, aproximadamente $44,01\%$ para a ação da Petrobrás e $32,68\%$ para a ação da Gerdau.

A Figura 7.1 ilustra que a variável $x = \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$ é bem aproximada por uma distribuição normal. Isto confirma que a hipótese de que os preços dos ativos seguem um Movimento Browniano Geométrico é bastante razoável.

Apesar da simplicidade, estimar a volatilidade de um ativo através de dados históricos pode não ser muito adequado. Uma decisão delicada de se tomar é o quanto voltar no tempo para coletar os dados, ou seja, quanto deve ser o valor de n. Além disto, uma solução retroativa para a volatilidade σ nem sempre gera o preço correto de conhecidas opções comercializadas atualmente.

7.2 Volatilidade implícita

A volatilidade implicita é uma forma mais sofisticada para estimar a volatilidade do que a utilização de dados históricos. Observamos o preço de uma opção comercializada e procuramos o valor da volatilidade que faça com que o preço determinado pela Equação de Black-Scholes coincida com o preço observado[(i)]. Isto se trata de um problema inverso simples, de apenas uma dimensão.

Exemplo: Uma opção *call* europeia em que o preço pré-determinado é $R\$55,00$ e o tempo de maturidade é de 6 meses, foi comercializada por $R\$3,77$. Considere que o preço corrente do ativo é $R\$50,00$ e que a taxa de juros livre de riscos é de $r = 8\%$ anuais. Com estes dados, a única incógnita na Equação de Black-Scholes é σ, a volatilidade. Resolvendo este problema inverso, encontramos aproximadamente $\sigma = 35\%$ por ano. Podemos então usar esta estimativa da volatilidade para precificar outras opções do mesmo ativo base.

Assim como no caso da estimação usando dados históricos, existem aspectos desagradáveis na utilização da ideia da volatilidade implícita. Diferentes opções comercializadas no mercado do mesmo ativo base, geram volatilidades implícitas distintas. Daí ficamos com a difícil decisão: em um conjunto de diferentes volatilidades implícitas de um mesmo ativo qual valor deve ser escolhido? Uma escolha equivocada para o valor da volatilidade pode gerar graves problemas!

A volatilidade implícita é muito usada no mercado e existem diversos trabalhos na literatura com respeito a ela. Mais detalhes podem ser encontrados em [8].

7.3 A superfície de volatilidade e a Equação de Black-Scholes Generalizada

Uma observação pertinente agora é a seguinte: se estamos supondo que a volatilidade é constante deveríamos encontrar o mesmo valor para a volatilidade implícita para diferentes opções observadas de um mesmo ativo base. Entretanto, como exposto da seção anterior, isto não acontece na prática.

A volatiladade é uma medida de quanto um ativo pode variar de preço. Até agora supomos que a volatilidade era constante. Ora, mas pensar que a volatili-

[(i)] O cálculo da volatilidade implícita para opções do tipo *call* e *put* europeias está implementado no Matlab. A função é $\sigma = blsimpv(S, K, r, T, valor)$, em que *valor* é o preço da opção observada.

dade é um parâmetro intrínsico ao ativo não parece ser algo muito correto. Não parece ser muito realista supor que o preço de um ativo varie de uma mesma forma ao longo do tempo. Uma evidência é que em momentos de crises econômicas os preços dos ativos tendem a oscilar de formas mais bruscas do que em tempos de estabilidade. Em outras palavras, a hipótese de que a volatilidade é constante não é muito adequada.

Isto sugere que uma ideia melhor é pensarmos na volatilidade como uma função do tempo e do preço do ativo, [2]. Desta forma, de agora em diante, veremos a volatilidade como uma superfície e denotaremos $\sigma \equiv \sigma(S,t)$.

Neste contexto, um modelo mais geral para os preços dos ativos é

$$\frac{dS}{S} = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dW, \tag{7.1}$$

em que $\mu(S,t)$ e $\sigma(S,t)$ são funções continuamente diferenciáveis do preço corrente S do ativo e do tempo t. Aqui dW continua sendo um Processo de Wiener. Agora, o preço de uma opção europeia em que o preço da ativo base segue o movimento proposto por 7.1 satisfaz a Equação de Black-Scholes Generalizada, [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\sigma(S,t)^2 S^2 + \frac{\partial u}{\partial S} rS - ru = 0. \tag{7.2}$$

Ao contrário da Equação de Black-Scholes padrão 6.13, a equação 7.2 não possui solução analítica. Para resolvê-la devemos discretizá-la e para isto trabalharemos com uma malha. Entretanto, isto significa que é preciso conhecer a superfície de volatilidade $\sigma(S,t)$ em todos os pontos desta malha. O nosso problema que antes era encontrar um valor para a volatilidade como um único número, tornou-se agora um tanto mais complicado, devemos encontrar a superfície de volatilidade!

Antes de atacar este problema, vamos resolver na próxima seção o seguinte problema de importância equivalente: dada a superfície de volatilidade como resolveremos a equação 7.2?

7.4 Resolução da Equação de Black-Scholes Generalizada

Como mencionamos, para resolver a Equação de Black-Scholes Generalizada devemos discretizá-la e trabalhar com uma malha. A equação que reflete o Princípio da Retrodifusão é a discretização "correta" da Equação de Black-Scholes e portanto usaremos ela em nosso problema. Além disso devemos usar as

condições de contorno adequadas e adaptá-las à malha, vejamos como ficam as condições de contorno para uma opção *call* europeia.

Na seção 6.4 vimos que as condições de contorno para opções *call* europeias são:

$$u(S,T) = \max(S-K,0), \text{ para } 0 < S < \infty; \tag{7.3}$$

$$u(0,t) = 0, \text{ para } 0 \leq t \leq T;, \tag{7.4}$$

$$\lim_{S\to\infty} u(S,t) - S = 0, \text{ para } 0 \leq t \leq T. \tag{7.5}$$

Ao trabalharmos com a malha, discretizaremos o eixo do preço S e o eixo do tempo t. Definindo o preço máximo S_{max}, trataremos as condições 7.3 e 7.4 no domínio $[0, S_{max}] \times [0, T]$, em que o tempo 0 denota o dia de hoje e T a data de maturidade da opção. É óbvio que teremos que relaxar a condição 7.5, pois não podemos permitir que $S \to \infty$. Portanto, como em [15], as condições de contorno adapatadas à malha ficam

$$u(S,T) = \max(S-K,0), \text{ para } 0 < S < S_{max}, \tag{7.6}$$

$$u(0,t) = 0, \text{ para } 0 \leq t \leq T, \tag{7.7}$$

$$u(S_{max},t) = S_{max} - Ke^{-r(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{7.8}$$

Observe que a condição 7.8 nada mais é do que a extensão da condição 7.6 em $u(S_{max}, t)$, $0 \leq t \leq T$, quando temos $K < S_{max}$. Observe que isto é coerente com a condição 7.8, pois se pudéssemos fazer $S_{max} \to \infty$, teríamos a própria condição 7.8.

Analogamente, para opções do tipo *put* europeia, as condições de contorno adaptadas ficam

$$u(S,T) = \max\{K-S,0\}, \quad 0 < S < S_{max},$$

$$u(0,t) = K, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(S_{max},t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Visto como tratar as condições de contorno na malha, vamos ver como discretizar a Equação de Black-Scholes Generalizada usando o Princípio da Retrodifusão. Pensando na volatilidade como uma superície $\sigma(S,t)$, o Princípio da Retrodifusão fica

$$(1+r)u\left(\frac{S}{1+r},t\right) = \frac{u(S+\sigma(S,t)S,t+1) + u(S-\sigma(S,t)S,t+1)}{2}.$$

Subtraindo $u(S, t+1)$ de ambos os lados desta equação e fazendo $\frac{1}{1+r} \approx 1 - r$, já que r é pequeno,

$$\frac{u(S - \sigma(S,t)S, t+1) + u(S + \sigma(S,t)S, t+1) - 2u(S, t+1)}{2} =$$

$$= (1+r)u(S - rS, t) - u(S, t+1).$$

Como $\sigma(S,t)S$ e rS são pequenos , podemos aproximar

$$u(S-\sigma(S,t)S, t+1)+u(S+\sigma(S,t)S, t+1)-2u(S, t+1) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t+1)\sigma(S,t)^2 S^2$$

e

$$u(S - rS, t) \approx u(S,t) - \frac{\partial u}{\partial S}(S,t)rS$$

obtendo

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t+1)\sigma(S,t)^2 S^2 = (1+r)\left[u(S,t) - \frac{\partial u}{\partial S}(S,t)rS\right] - u(S, t+1).$$

Agora, podemos desprezar r^2, já que r é pequeno, assim

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t+1)\sigma(S,t)^2 S^2 = u(S,t) - u(S, t+1) + ru(S,t) - \frac{\partial u}{\partial S}(S,t)rS. \quad (7.9)$$

Para trabalharmos com a malha selecionamos um número inteiro $M > 0$ e definimos $h = \frac{S_{max}}{M}$, em que h será o tamanho de passo no eixo dos preços. O passo de tempo, conforme sugere a equação 7.9, será igual a 1, correspondente a um dia. Os pontos da malha serão (S_i, t_j)[(ii)], em que $S_i = i \cdot h$ para $i = 0, 1, \ldots, M$ e $t_j = j$ para $j = 0, 1, \ldots, T$. Usaremos o método de diferenças finitas que é obtido ao fazer as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S_i, t_j + 1) &\approx \frac{u(S_i - h, t_j + 1) - 2u(S_i, t_j + 1) + u(S_i + h, t_j + 1)}{h^2} \\ &= \frac{u(S_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(S_i, t_{j+1}) + u(S_{i+1}, t_{j+1})}{h^2} \end{aligned} \quad (7.10)$$

[(ii)] De agora em diante, a notação S_i refere-se a um ponto da malha e não ao preço do ativo no dia i. Entretanto, isto não deve causar qualquer tipo de confusão.

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial S}(S_i,t_j) &\approx \frac{u(S_i+h,t_j)-u(S_i-h,t_j)}{2h}\\ &= \frac{u(S_{i+1},t_j)-u(S_{i-1},t_j)}{2h}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

A equação diferencial 7.9 em $0 < S < S_{max}$ e $0 < t < T$, implica que nos pontos da malha (S_i, t_j) para todo $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $j = 0, 2, \ldots, T-1$, teremos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S_i,t_{j+1})\sigma(S_i,t_j)^2S_i^2 = u(S_i,t_j) - u(S_i,t_{j+1}) + ru(S_i,t_j) - \frac{\partial u}{\partial S}(S_i,t_j)rS_i.$$

Agora, substituindo as aproximações 7.10 e 7.11 nesta equação e rearranjando, resulta

$$\begin{aligned}&(1+r)u(S_i,t_j) - \frac{rS_i}{2h}\left[u(S_{i+1},t_j) - u(S_{i-1},t_j)\right] =\\ &= \left(1 - 2\frac{\sigma(S_i,t_j)^2S_i^2}{2h^2}\right)u(S_i,t_{j+1}) + \frac{\sigma(S_i,t_j)^2S_i^2}{2h^2}\left[u(S_{i-1},t_{j+1}) + u(S_{i+1},t_{j+1})\right].\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha_i = \frac{rS_i}{2h}$ e $\beta_{ij} = \frac{\sigma(S_i,t_j)^2S_i^2}{2h^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}&(1+r)u(S_i,t_j) - \alpha_i[u(S_{i+1},t_j) - u(S_{i-1},t_j)] =\\ &\qquad = (1-2\beta_{ij})u(S_i,t_{j+1}) + \beta_{ij}[u(S_{i-1},t_{j+1}) + u(S_{i+1},t_{j+1})],\end{aligned} \tag{7.12}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $j = 0, 1, \ldots, T-1$. A equação 7.12, é a discretização da Equação de Black-Scholes Generalizada! Para cada ponto da malha (S_i, t_j), a equação 7.12 envolve mais 5 pontos, conforme ilustra a Figura a seguir.

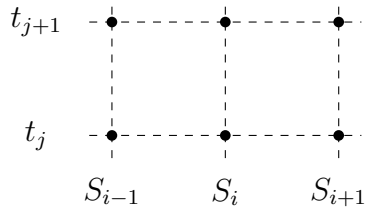


Figura 7.2: Pontos envolvidos ao aplicar a equação do Princípio da Retrodifusão no ponto (S_i, t_j).

Para ilustrar, vejamos como resolver a equação 7.12 para precificar uma opção *call* europeia, ou seja, utilizando as condições de contorno 7.6, 7.7 e 7.8.

A condição 7.6, para todo $0 < S < S_{max}$, implica que $u(S_i, t_T)$ é conhecido, para todo $i = 0, 1, \ldots, M$. Podemos usar estes valores na equação 7.12 para encontramos os valores de $u(S_i, t_{T-1})$ para todo $i = 1, 2, \ldots, M-1$. As condições 7.7 e 7.8 implicam que $u(S_0, t_{T-1}) = 0$ e $u(S_M, t_{T-1}) = S_{max} - Ke^{-r(T-t_{T-1})}$ e portanto, que podemos determinar todos os valores da forma $u(S_i, t_{T-1})$. Agora podemos aplicar novamente este procedimento para determinarmos os valores de $u(S_i, t_{T-2})$, e assim por diante, de forma retroativa, determinar todos os valores até $u(S_i, t_0)$, $i = 0, 1, \ldots, M$, ou seja, determinar o preço da opção em cada ponto da malha. O preço da opção hoje será $u(M\frac{S_{inicial}}{S_{max}}, t_0)$, em que $S_{inicial}$ é o preço do ativo base hoje. Portanto, devemos escolher S_{max} e M de forma que $M\frac{S_{inicial}}{S_{max}}$ seja um número inteiro.

Podemos então construir um programa que faz a repetição deste procedimento. A saber, para determinar o preço da opção em todos os pontos da malha, são necessárias T iterações, de acordo com $j = T - 1. \ldots, 1, 0$.

A fim de esclarecer melhor este procedimento, vamos fazer etapa por etapa uma iteração genérica $n = T - k$, em que $1 \leq n \leq T$. A Figura 7.4 a seguir representa a malha, os pontos marcados com um círculo são dados pelas condições de contorno, os marcados por um triângulo são os obtidos até a iteração n e os marcados por um quadrado são os que serão determinados na n-ésima iteração.

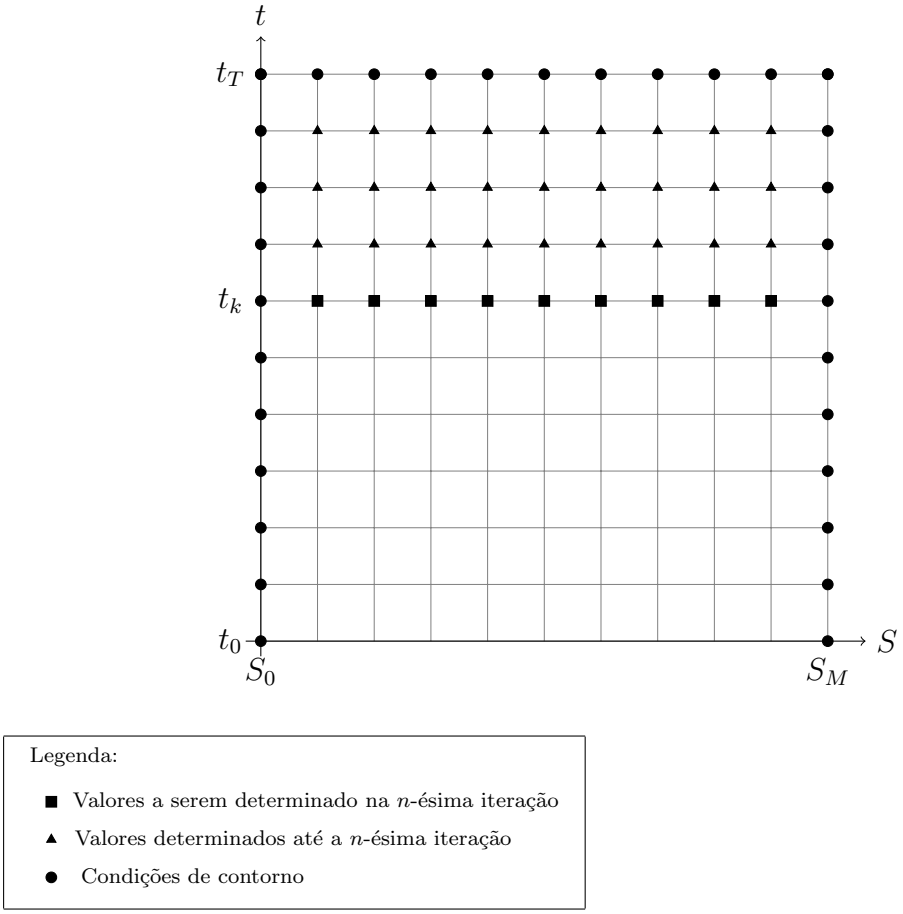


Figura 7.3: Pontos a serem determinados na n-ésima iteração

Na iteração $n = T - k$, $1 \leq n \leq T$, através da equação 7.12, determinamos os valores da opção nos pontos $u(S_i, t_k)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, M-1$.

- $i = 1$

$$(1+r)u(S_1,t_k) - \alpha_1[u(S_2,t_k) - u(S_0,t_k)] = \\ = (1-2\beta_{1k})u(S_1,t_{k+1}) + \beta_{1k}[u(S_0,t_{k+1}) + u(S_2,t_{k+1})],$$

mas $u(S_0, t_{k+1}) = u(S_0, t_k) = 0$, pela condição de contorno 7.7. Assim:

$$(1+r)u(S_1,t_k) - \alpha_1 u(S_2,t_k) = (1-2\beta_1)u(S_1,t_{k+1}) + \beta_{1k}u(S_2,t_{k+1}),$$

resultando em uma equação e duas incógnitas.

- $i = 2$

$$(1+r)u(S_2,t_k) - \alpha_2[u(S_3,t_k) - u(S_1,t_k)] = \\ = (1-2\beta_{2k})u(S_2,t_{k+1}) + \beta_{2k}[u(S_1,t_{k+1}) + u(S_3,t_{k+1})],$$

gerando mais uma equação e uma incógnita, que juntamente com a equação anterior, nos dá duas equações e três incógnitas.

$$\vdots$$

- $i = M-2$

$$(1+r)u(S_{M-2},t_k) - \alpha_{M-2}[u(S_{M-1},t_k) - u(S_{M-3},t_k)] = \\ = (1-2\beta_{M-2,k})u(S_{M-2},t_{k+1}) + \beta_{M-2,k}[u(S_{M-3},t_{k+1}) + u(S_{M-1},t_{k+1})],$$

gerando mais uma equação e uma incógnita, que juntamente com as equações anteriores, resultam e $M-2$ equações e $M-1$ incógnitas.

- $i = M-1$

$$(1+r)u(S_{M-1},t_k) - \alpha_{M-1}[u(S_M,t_k) - u(S_{M-2},t_k)] = \\ = (1-2\beta_{M-1,k})u(S_{M-1},t_{k+1}) + \beta_{M-1,k}[u(S_{M-2},t_{k+1}) + u(S_M,t_{k+1})],$$

mas $u(S_M,t_k)$ é conhecido, pela condição 7.8. Portanto:

$$(1+r)u(S_{M-1},t_k) + \alpha_{M-1}u(S_{M-2},t_k) = \\ = (1-2\beta_{M-1,k})u(S_{M-1},t_{k+1}) + \beta_{M-1,k}[u(S_{M-2},t_{k+1}) + u(S_M,t_{k+1})] + \alpha_{M-1}u(S_M,t_k),$$

gerando mais uma equação, que juntamente com as anteriores, resultam em $M-1$ equações e $M-1$ incógnitas. Agora somos capazes de resolver!

Podemos escrever as equações anteriores em uma forma matricial

$$Ax^k = B^k x^{k+1} + c^k, \tag{7.13}$$

em que

$$Ax^k = \begin{bmatrix} 1+r & -\alpha_1 & & & & & \\ \alpha_2 & 1+r & -\alpha_2 & & & & \\ & \alpha_3 & 1+r & -\alpha_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \alpha_{M-2} & 1+r & -\alpha_{M-2} \\ & & & & & \alpha_{M-1} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(S_1,t_k) \\ u(S_2,t_k) \\ u(S_3,t_k) \\ \vdots \\ u(S_{M-3},t_k) \\ u(S_{M-2},t_k) \\ u(S_{M-1},t_k) \end{bmatrix},$$

e $Bx^{k+1} + c^k =$

$$\begin{bmatrix} 1-2\beta_{1k} & \beta_{1k} & & & & & & \\ \beta_{2k} & 1-2\beta_{2k} & \beta_{2k} & & & & & \\ & \beta_{3k} & 1-2\beta_{3k} & \beta_{3k} & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \beta_{M-2,k} & 1-2\beta_{M-2,k} & \beta_{M-2,k} & \\ & & & & & \beta_{M-1,k} & 1-2\beta_{M-1,k} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} u(S_1, t_{k+1}) \\ u(S_2, t_{k+1}) \\ u(S_3, t_{k+1}) \\ \vdots \\ u(S_{M-3}, t_{k+1}) \\ u(S_{M-2}, t_{k+1}) \\ u(S_{M-1}, t_{k+1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \beta_{M-1,k}u(S_M, t_{k+1}) + \alpha_{M-1}u(S_M, t_k) \end{bmatrix}.$$

O vetor x^k contêm os valores de $u(S_i, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, M-1$, que são as incógnitas que queremos determinar na n-ésima iteração. O vetor x^{k+1} contêm os valores determinados na interação anterior, $n-1$. O vetor c^k aparece em decorrência da condição de contorno 7.8.

A forma matricial

$$Ax^k = B^k x^{k+1} + c^k,$$

indica que a cada iteração devemos resolver um sistema linear $M-1 \times M-1$ tridiagonal que computacionalmente é barato. A matriz A permanece a mesma em todas iterações, já que as variáveis α_i não dependem do tempo. Devemos atualizar a cada iteração a matriz B^k e os vetores x^k, x^{k+1} e c^k.

7.4.1 Exemplo

Nesta subseção apresentaremos um exemplo ilustrando o método desenvolvido para se resolver a Equação de Black-Scholes Generalizada. Trataremos uma opção *call* europeia e uma opção *put* europeia. Construiremos a superfície de volatilidade constante em todos os pontos da malha, pois assim a Equação de Black-Scholes Generalizada se reduz à Equação de Black-Scholes padrão que nestes

casos possuem soluções analíticas conforme a seção 6.4. Desta forma, seremos capazes de comparar as resoluções encontradas pelo método proposto e as resoluções corretas, as analíticas.

O problema será determinar os preços de opções europeias de compra e de venda de um ativo a um valor de $R\$100,00$ para daqui 90 dias úteis. Considere que o preço do ativo base hoje também seja $R\$100,00$. A taxa de juros livre de riscos será 5% e a volatilidade valerá 40% em todos os pontos da malha. No programa, o eixo do preço foi discretizado em 45 pontos, gerando um $h = 4,5455$.

A solução analítica, usando a função *blsprice* do Matlab, nos dá os valores $10,3408$ e $8,5709$ para *call* e *put*, respectivamente. O programa baseado no Princípio da Retrodifusão, nos dá os valores $10,3121$ e $8,5424$ para *call* e *put*, respectivamente. Os erros relativos são de $0,28\%$ para a opção *call* e $0,33\%$ para *put*.

Os gráficos a seguir mostram os preços da opção *versus* os possíveis preços do ativo ($0 \leq S \leq S_{max}$), para $t = 0$ dias, $t = 30$ dias, $t = 60$ dias e $t = 90$ dias a partir de hoje. As curvas contínuas são as soluções analíticas e os asteríscos os valores encontrados para os pontos da malha pelo programa baseado no Princípio da Retrodifusão. Os 4 primeiros gráficos referem-se à opção *call* europeia, enquanto os 4 últimos referem-se à opção *put* europeia.

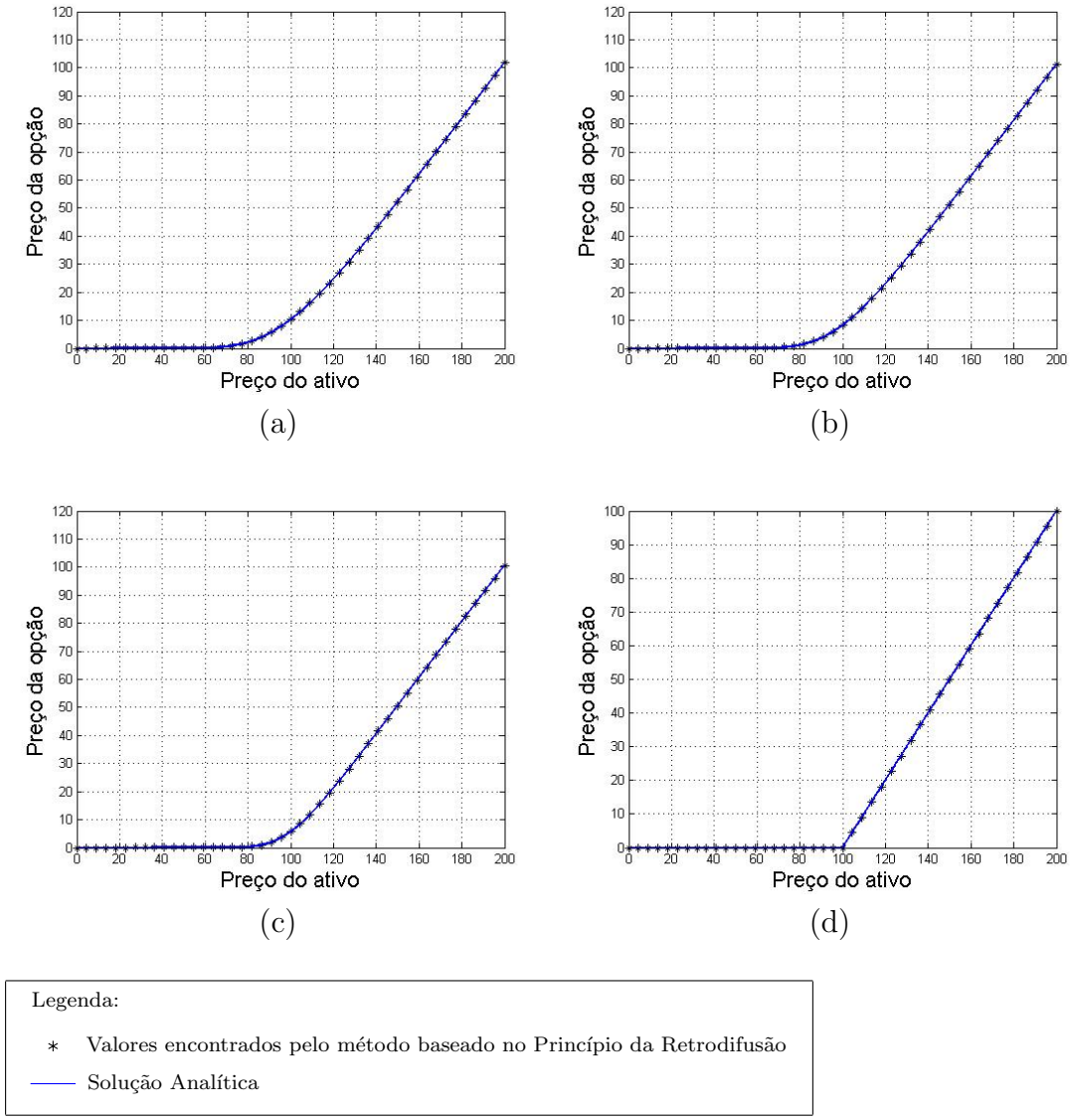


Figura 7.4: Preço da opção *call* europeia *versus* preços do ativo, para daqui (a) 0 dias; (b) 30 dias; (a) 60 dias; (a) 90 dias.

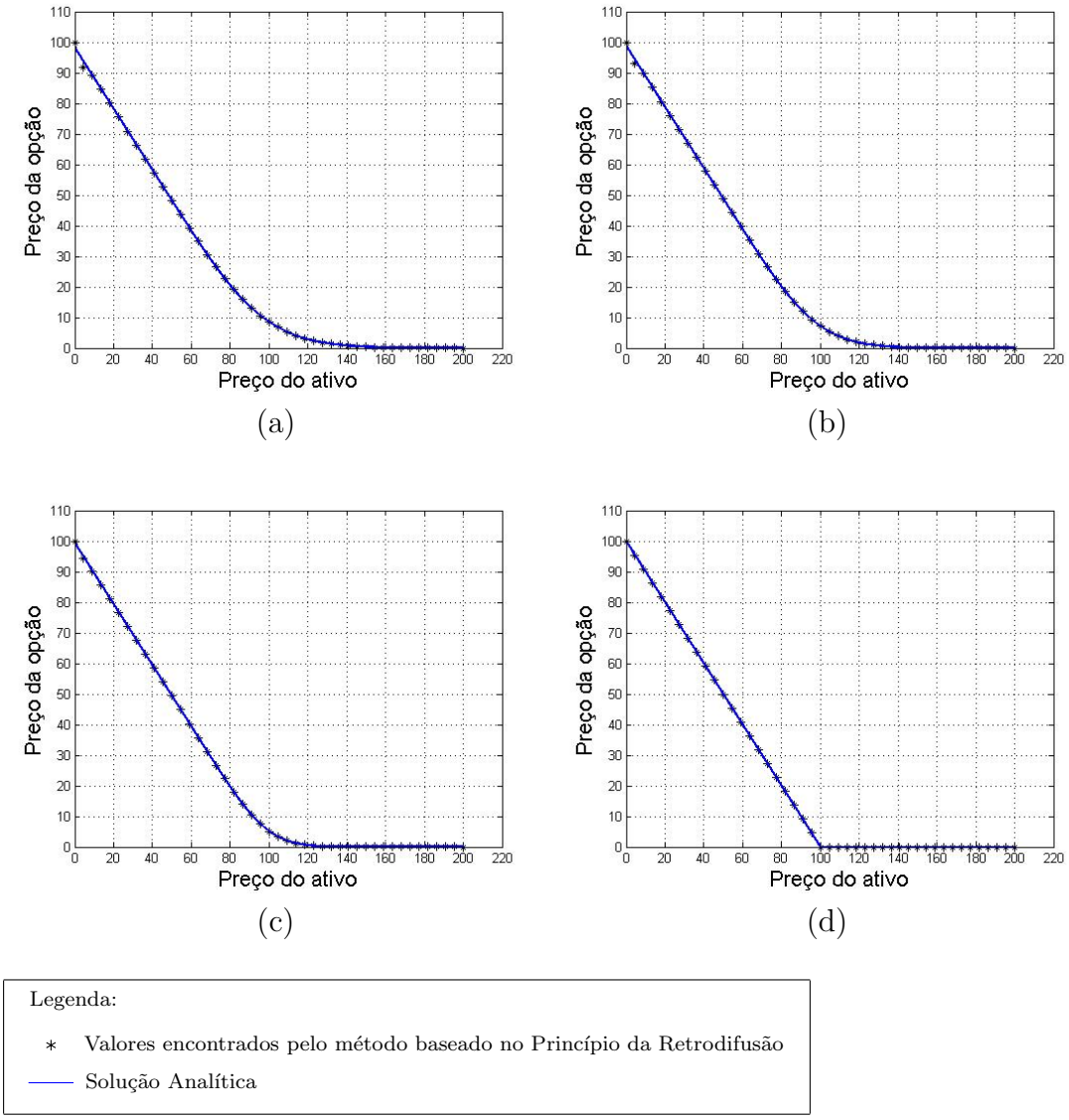


Figura 7.5: Preço da opção *put* europeia *versus* preços do ativo, para daqui (a) 0 dias; (b) 30 dias; (c) 60 dias; (d) 90 dias.

Uma observação pertinente é quanto à discretização do eixo dos tempos ser diária. Isto é importante para obtermos o preço da opção em um dia específico e não em uma fração de dia. Não apenas o preço da opção mas, como veremos

na próxima seção, o valor da volatilidade que neste caso será "medida" em dias. Isto nos permitirá falar que a volatilidade de um ativo é um determinado valor em um dia específico.

7.5 O Problema: como obter a superfície de volatilidade

Agora que já sabemos como resolver a Equação de Black-Scholes Generalizada

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\sigma(S,t)^2 S^2 + \frac{\partial u}{\partial S} rS - ru = 0$$

quando a superfície de volatilidade $\sigma(S,t)$ é conhecida em todos os pontos da malha, vamos atacar nosso principal problema: como obter a superfície de volatilidade?

Como na seção 7.2 em que tratávamos a volatilidade como um escalar, pensaremos em um problema inverso. Obervaremos p opções europeias recentemente comercializadas do ativo que queremos estimar a volatilidade, portanto conhecemos o preço de cada uma delas γ_n, o preço pré-determinado K_n e o tempo de maturidade T_n, $n = 1, \ldots, p$, isto é, $\{\gamma_n, K_n, T_n\}_{n=1}^{p}$. Além disso vamos supor que a taxa de juros livre de risco diária r é constante.

No eixo do tempo, a malha deve ser construida de forma a englobar o tempo de maturidade de todas as opções, respeitando a discretização diária. A discretização do eixo dos preços do ativo será feita como na seção anterior, selecionamos S_{max} o preço máximo do ativo que iremos admitir, um número inteiro $M > 0$ e definimos $h = \frac{S_{max}}{M}$, em que h será o tamanho de passo no eixo dos preços. Os pontos da malha serão (S_i, t_j), em que $S_i = i \cdot h$ para $i = 0, 1, \ldots, M$ e $t_j = j$ para $j = 0, 1, \ldots, \bar{T}$, em que $\bar{T} = \max_{i=1,\ldots,p} T_i$. O preço da n-ésima opção será portanto, $u_n(M\frac{S_{inicial}}{S_{max}}, t_0)$, em que $S_{inicial}$ é o preço do ativo base hoje.

As condições de contorno serão tratadas da mesma forma que na seção anterior. Desta forma, conhecemos os preços de cada uma das p opções nos pontos (S_i, T_k) com $i = 0, 1, \ldots, M$; (S_0, T_j) com $j = 0, 1, \ldots, T_n$ e (S_M, T_j) com $j = 0, 1, \ldots, T_n$, em que $n = 1, \ldots, p$.

Em cada ponto da malha, excluindo os pontos em que as condições de contorno são definidas, a volatilidade $\sigma(S_i, t_j)$, com $i = 0, \ldots, M-1$ e $j = 0, 1, \ldots, \bar{T}-1$, e os preços de cada uma das p opções observadas $u_n(S_i, t_j)$, com $i = 0, 1, \ldots, M-1$ e $j = 0, 1, \ldots, T_n - 1$, $n = 1, \ldots, p$, serão incógnitas. Neste contexto resolveremos

o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_i \sum_j (\sigma(i,j) - \tilde{\sigma})^2 \\ s.a & \text{Eq. de Black-Scholes Generalizada} \\ & \text{válida em todos os pontos da malha} \end{array} \tag{7.14}$$

em que $\tilde{\sigma}$ é uma incógnita escalar.

Vejamos o que significa a restrição "a Equação de Black-Scholes Generalizada válida em todos os pontos da malha" e o porquê desta função objetivo.

O que queremos dizer com a Equação de Black-Scholes Generalizada válida em todos os pontos da malha é exigir que, para cada uma das p opções observadas, a discretização 7.12

$$\begin{aligned} &(1+r)u_n(S_i,t_j) - \frac{rS_i}{2h}\left[u_n(S_{i+1},t_j) - u_n(S_{i-1},t_j)\right] = \\ &= \left(1 - 2\frac{\sigma(S_i,t_j)^2 S_i^2}{2h^2}\right) u_n(S_i,t_{j+1}) + \frac{\sigma(S_i,t_j)^2 S_i^2}{2h^2}\left[u_n(S_{i-1},t_{j+1}) + u_n(S_{i+1},t_{j+1})\right] \end{aligned} \tag{7.15}$$

seja obedecida para todo $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $j = 0, 1, \ldots, T_n - 1$, com $n = 1, \ldots, p$. Podemos escrever na forma matricial 7.13. Assim, para a n-ésima opção observada, devemos exigir que

$$Ax^k = B^k x^{k+1} + c^k$$

para $k = T_n - 1, \ldots, 0$.

É importante ressaltar que estas restrições serão não-lineares já que elas envolvem o quadrado de determinados pontos da superfície de volatilidade.

Além de colocarmos as equações advindas da discretização 7.15 nas restrições do problema 7.14, exigiremos que $u_n(M\frac{S_{inicial}}{S_{max}}, t_0) = \gamma_n$, para $n = 1, \ldots, p$, ou seja, que o preço de cada opção encontrada na resolução do problema 7.14 seja igual ao preço observado no mercado. Estas p restrições serão lineares.

Em princípio o que queremos é encontrar uma superfície de volatilidade que ao ser usada para determinar os preços das opções observadas pelo método proposto na seção 7.4, faça com que estes preços sejam iguais aos preços comercializados no mercado. É justamente isto que as restrições do problema 7.14 exigem e o que queremos dizer com "a Equação de Black-Scholes Generalizada válida em todos os pontos da malha". Entretanto, encarar o problema apenas como encontrar uma

superfície de volatilidade que atenda à esta exigência nos leva a um problema vastamente indeterminado, já que o número de variáveis é muito maior do que o número de observações.

A função objetivo do problema 7.14

$$\sum_i \sum_j (\sigma(i,j) - \tilde{\sigma})^2$$

é justamente uma tentativa de corrigir esta indeterminação. Ela age de forma a "amarrar" a superfície de volatilidade a uma superfície constante. Esta superfície constante é uma incógnita do problema expressa pela variável $\tilde{\sigma}$. Uma outra ideia para corrigir a indeterminação baseada em *splines* bi-cúbicos pode ser encontrada em [1, 2].

Na subseção a seguir, analisaremos o problema 7.14 quanto ao numéro de variáveis e restrições.

7.5.1 Dados técnicos

Considere o problema 7.14:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j (\sigma(i,j) - \tilde{\sigma})^2 \\ s.a \quad & \text{Eq. de Black-Scholes Generalizada} \\ & \text{válida em todos os pontos da malha.} \end{aligned}$$

Como explicado, em cada ponto da malha, excluindo os pontos em que as condições de contorno são definidas, a volatilidade $\sigma(S_i, t_j)$, com $i = 0, \ldots, M-1$ e $j = 0, 1, \ldots, \bar{T} - 1$, e os preços de cada uma das p opções observadas $u_n(S_i, t_j)$, com $i = 0, 1, \ldots, M-1$ e $j = 0, 1, \ldots, T_n - 1$, $n = 1, \ldots, p$, serão incógnitas. Além disto, devemos considerar ainda a incógnita escalar $\tilde{\sigma}$.

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\bar{T} = T_1$ e separar as variáveis em 3 grupos: variáveis do tipo volatilidade, a incógnita escalar e variáveis do tipo preço. Desta forma, o numéro de variáveis é:

- tipo volatilidade: $T_1(M-1)$;
- tipo escalar: 1;
- tipo preço: $(T_1 + T_2 + \ldots + T_p)(M-1)$;
- total: $(2T_1 + T_2 + \ldots + T_p)(M-1) + 1$.

As restrições são dadas pela equação 7.15

$$(1+r)u_n(S_i,t_j) - \frac{rS_i}{2h}\left[u_n(S_{i+1},t_j) - u_n(S_{i-1},t_j)\right] =$$
$$= \left(1 - 2\frac{\sigma(S_i,t_j)^2 S_i^2}{2h^2}\right) u_n(S_i,t_{j+1}) + \frac{\sigma(S_i,t_j)^2 S_i^2}{2h^2}\left[u_n(S_{i-1},t_{j+1}) + u_n(S_{i+1},t_{j+1})\right]$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $j = 0, 1, \ldots, T_n - 1$, com $n = 1, \ldots, p$, além das p restrições que exigem que o preço de cada opção encontrada na resolução do problema 7.14 seja igual ao preço observado no mercado. Logo, podemos dividir as restrições em 2 grupos: restrições do tipo discretização e do tipo observação que são não-lineares e lineares, respectivamente. Assim, o número de restrições é:

- tipo discretização: $(T_1 + T_2 + \ldots + T_p)(M-1)$;
- tipo observação: p;
- total: $(T_1 + T_2 + \ldots + T_p)(M-1) + p$.

7.5.2 Um método de resolução

Nesta subseção vamos propor um método para resolver o problema 7.14. Para simplificar a notação, podemos reescrever o nosso problema como

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.a & h(x) = 0 \end{array} \tag{7.16}$$

já que temos apenas restrições de igualdade. O vetor x é um vetor que contêm todas as incógnitas do problema original e $h(x)$ é tal que $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se considerarmos que temos n incógnitas e m restrições, isto é

$$n = (2T_1 + T_2 + \ldots + T_p)(M-1) + 1$$

e

$$m = (T_1 + T_2 + \ldots + T_p)(M-1) + p.$$

As condições KKT, veja [12], para o problema 7.16 são

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(x) + J_h(x)^T\lambda & = & 0 \\ h(x) & = & 0 \end{array} \right. ,$$

em que $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ e $J_h(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ denotam o gradiente da função objetivo e a matriz Jacobiana das restrições, respectivamente. O vetor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ é o vetor que contêm os multiplicadores de Lagrange associados às restrições.

Podemos então definir a função

$$F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_h(x)^T \lambda \\ h(x) \end{bmatrix}$$

e aplicar o Método de Newton para achar os zeros de $F(x, \lambda)$, veja por exemplo [14]. Neste caso, necessitamos da matriz Jacobiana de $F(x, \lambda)$ que é dada por

$$J_F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 h_i(x) & J_h(x)^T \\ J_h(x) & 0 \end{bmatrix},$$

em que $\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz Hessiana de $f(x)$ e $\nabla^2 h_i(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz Hessiana da i-ésima restrição. Observe que o bloco 0 é uma matriz $m \times m$ e que $J_F(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m \times n+m}$. Portanto a cada iteração do Método de Newton devemos resolver um sistema linear $n + m \times n + m$. É importante ressaltar que a matriz $J_h(x)$ sempre possui posto completo (posto linha) e que a matriz $J_F(x, \lambda)$ é esparsa e portanto o sistema linear a ser resolvido a cada iteração não é de grande dificuldade computacional.

Após a convergência do Método de Newton, encontraremos a solução x^* ótima que conterá a estimativa da superfície de volatilidade.

7.5.3 Exemplo: Estimativa da Superfície de Volatilidade

Nesta subseção, vamos ilustrar com um exemplo artificial os resultados obtidos por aplicar o Método de Newton nas condições KKT do problema 7.14. O que queremos dizer com exemplo artificial é supor que a superfície de volatilidade de um determinado ativo seja conhecida e que observamos p opções comercializadas que foram precificadas de acordo com esta superfície de volatilidade e então aplicamos o nosso método para estimá-la, comparando posteriormente a superfície de volatilidade verdadeira com a estimada.

Como foi explicado, trabalharemos com uma malha. Vamos supor que o preço inicial do ativo $S_{inicial}$ é 20 e que o preço máximo S_{max} que iremos admitir é 40. A discretização no eixo dos preços será feita em 27 pontos no intervalo [0 40], isto é, $S_i = ih$ para $i = 0, \cdots, 27$ com $h = \frac{40}{27}$. Suponha ainda que observamos 20

opções comercializadas em que o maior tempo de maturidade é 10 dias. Portanto, a discretização no eixo do tempo será $t_j = j$ para $j = 0, \cdots, 10$. Conhecidas as discretizações nos eixos do preços e do tempo, temos definida a malha na qual suporemos conhecer a superfície de volatilidade.

A superfície de volatilidade verdadeira será construida da seguinte maneira: ela será constante no tempo e variará com o preço corrente do ativo, portanto $\sigma(S,t) \equiv \sigma(S)$. Vamos supor que para

- $S = 0$ teremos $\sigma(0,t) = \frac{0{,}25}{\sqrt{252}}$;
- $S = 10$ teremos $\sigma(10,t) = \frac{0{,}28}{\sqrt{252}}$;
- $S = 20$ teremos $\sigma(20,t) = \frac{0{,}26}{\sqrt{252}}$;
- $S = 30$ teremos $\sigma(30,t) = \frac{0{,}30}{\sqrt{252}}$;
- $S = 40$ teremos $\sigma(40,t) = \frac{0{,}26}{\sqrt{252}}$

e que os valores intermediários de $\sigma(S,t)$ serão obtidos interpolando pela forma de Lagrange estes valores tabelados, veja [14]. Desta forma, para um t fixo, a superfície de volatilidade $\sigma(S,t)$ será um polinômio de grau ≤ 4 dado por

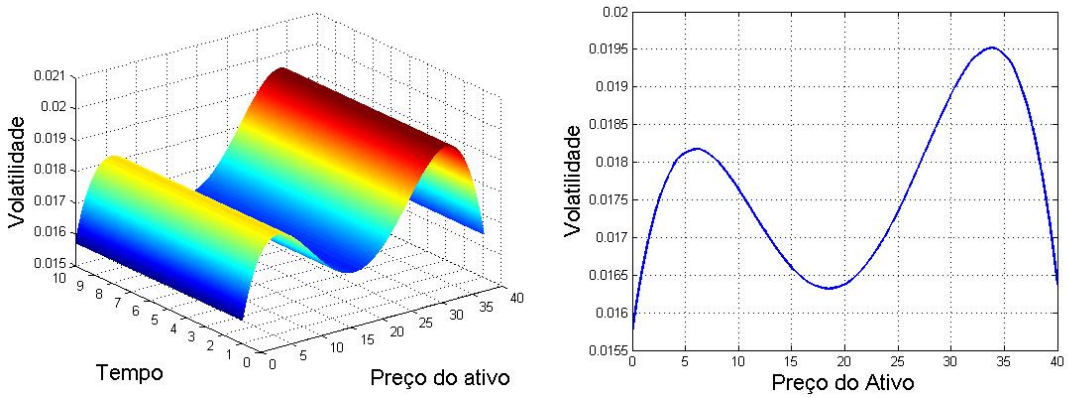
$$\sigma(S,t) = \sum_{i=0}^{4} y_i L_i(S),$$

em que

$$L_i(S) = \frac{(S-S_0)\cdots(S-S_{i-1})(S-S_{i+1})\cdots(S-S_4)}{(S_i-S_0)\cdots(S_i-S_{i-1})(S_i-S_{i+1})\cdots(S_i-S_4)}$$

com $S_0 = 0$, $S_1 = 10$, $S_2 = 20$, $S_3 = 30$, $S_4 = 40$, e $y_0 = \frac{0{,}25}{\sqrt{252}}$, $y_1 = \frac{0{,}28}{\sqrt{252}}$, $y_2 = \frac{0{,}26}{\sqrt{252}}$, $y_3 = \frac{0{,}30}{\sqrt{252}}$, $y_4 = \frac{0{,}26}{\sqrt{252}}$.

A Figura a seguir mostra a superfície de volatilidade verdadeira para toda a malha e um corte nesta superfície para um determinado $0 \leq t \leq 10$.



(a) (b)

Figura 7.6: Superfície de volatilidade verdadeira, (a) em toda a malha; (b) para um determinado $0 \leq t \leq 10$.

Vamos supor que todas as opções observadas são do tipo *call* europeia, que o ativo base não paga dividendos e que a taxa de juros diária livre de risco r é constante e vale $\frac{0{,}10}{252}$. O tempo de maturidade e o preço pré-fixado da i-ésima opção observada, $i = 1, \cdots, 20$, é $T(i)$ e $K(i)$, respectivamente, em que

$$T = [10 \;\; 10 \;\; 10 \;\; 10 \;\; 10 \;\; 9 \;\; 9 \;\; 9 \;\; 9 \;\; 9 \;\; 8 \;\; 8 \;\; 8 \;\; 8 \;\; 8 \;\; 7 \;\; 7 \;\; 7 \;\; 7 \;\; 7]$$

e

$$K = [18 \;\; 19 \;\; 20 \;\; 21 \;\; 22 \;\; 18 \;\; 19 \;\; 20 \;\; 21 \;\; 22 \;\; 18 \;\; 19 \;\; 20 \;\; 21 \;\; 22 \;\; 18 \;\; 19 \;\; 20 \;\; 21 \;\; 22].$$

O preço de cada opção γ_i é dado pelo método proposto na seção 7.4 usando a superfície de volatilidade verdadeira. Portanto, conhecemos $\{\gamma_i, K_i, T_i\}_{i=1}^{20}$.

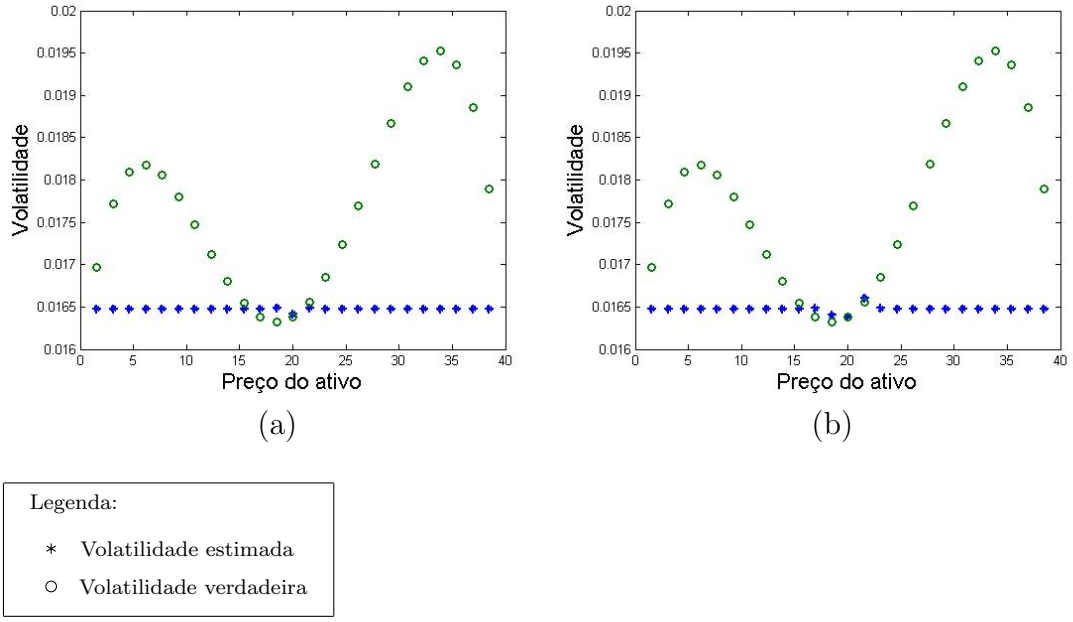
De acordo com a seção 7.5.1, teremos neste problema um total de 4501 variáveis das quais 250 são do tipo volatilidade e 4270 restrições.

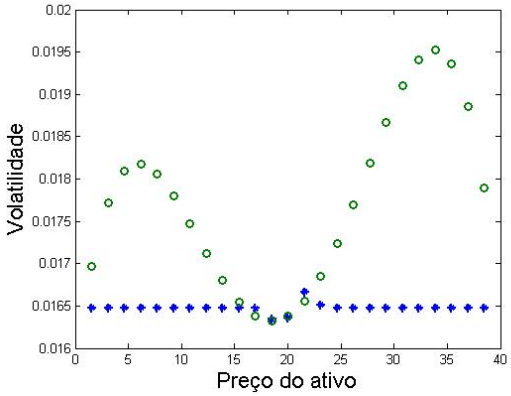
Para iniciarmos o Método de Newton necessitamos de um ponto inicial, isto é, (x_0, λ_0) em que x_0 é uma estimativa inicial para as incógnitas do problema 7.14 e λ_0 é uma estimativa inicial para os multiplicadores de Lagrange. Para as incógnitas do tipo volatilidade e para a incógnita escalar foi atribuído o valor $\frac{0{,}30}{\sqrt{252}}$ e para as incógnitas do tipo preço foram atribuídos os valores dados pelo método proposto na seção 7.4 usando uma superfície de volatilidade constante igual a $\frac{0{,}30}{\sqrt{252}}$ em todos os pontos da malha. A estimativa inicial para os multiplicadores de Lagrange foi $\lambda_0 = 0$.

Nestas circunstâncias, o Método de Newton convergiu em 5 iterações obtendo a solução ótima (x^*, λ^*), na qual $\|F(x^*, \lambda^*)\|_\infty < 10^{-14}$.

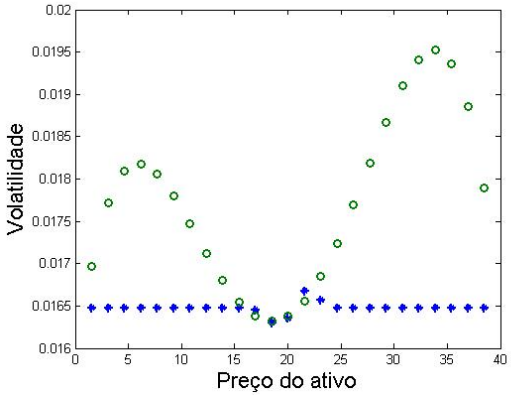
Para as variáveis correspondentes aos preços das opções, pela seção 4.4, conhecemos os limitantes inferiores e superiores para os preços de opções *call* europeias. Todavia, como a solução do problema foi encontrada através de um método numérico e portanto existem erros, estes limitantes devem ser ligeiramente relaxados. Relaxando os limitantes em 1% para menos no caso dos limitantes inferiores e para mais no caso dos limitantes superiores, todas as variáveis do tipo preço ótimas respeitaram seus limites.

Na Figura a seguir estão plotados os gráficos da estimativa da superfície de volatilidade em cada ponto da malha para cada dia em que existem incógnitas do tipo volatilidade. Neste exemplo, considerando que hoje é dia 0, obtemos uma estimativa para os dias 0 até o dia 9. Os valores marcados por um asterísco correspondem à volatilidade estimada, enquanto que os marcados por um círculo correspondem à volatilidade verdadeira.

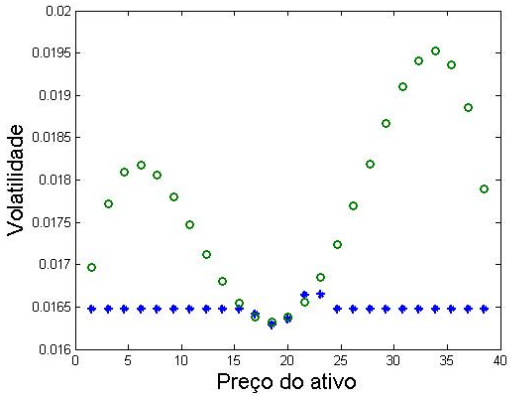




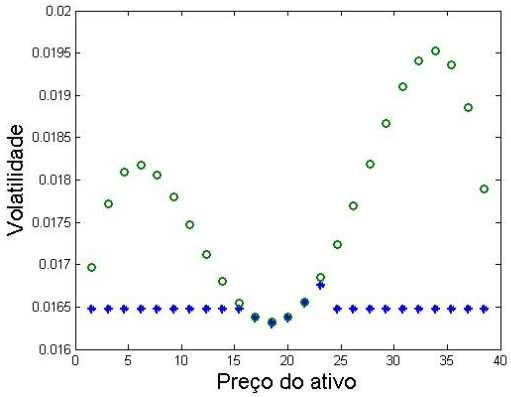
(c)



(d)



(e)



(f)

Legenda:

* Volatilidade estimada

○ Volatilidade verdadeira

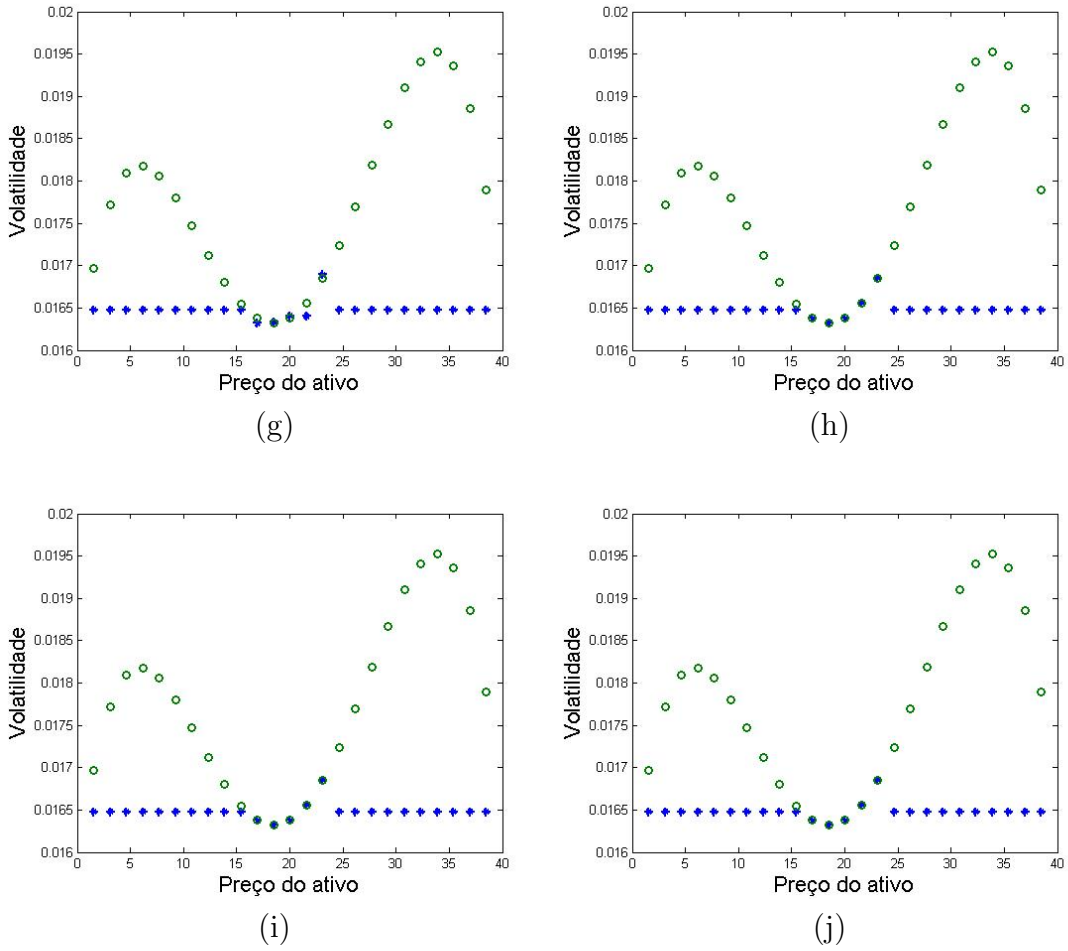
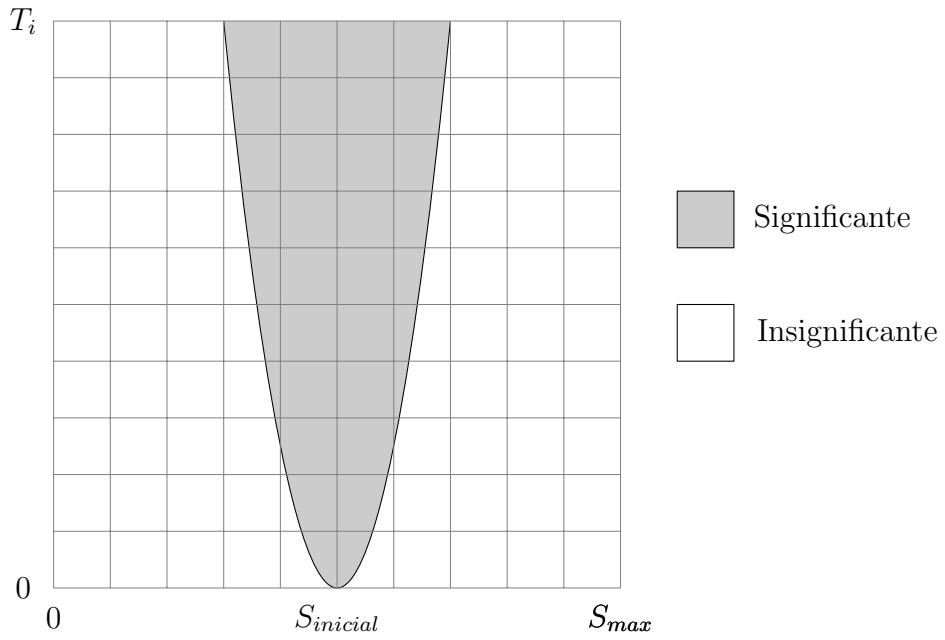


Figura 7.7: Estimativa da superfície de volatilidade em cada ponto da malha para o dia (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 4; (f) 5; (g) 6; (h) 7; (i) 8; (j) 9.

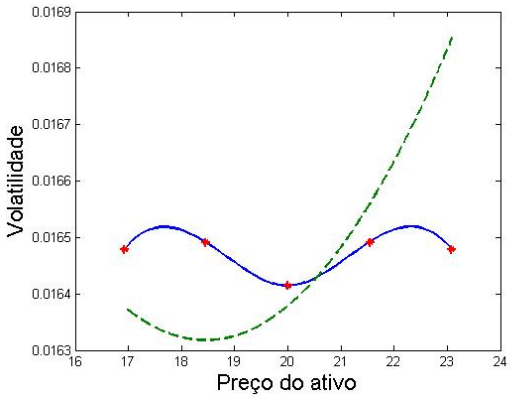
A princípio, analisando os gráficos da Figura 7.7, a estimativa obtida parece bastante imprecisa. Entretanto, como mencionado em [1], no processo de determinar o preço de uma opção, a dependência da volatilidade não é uniforme

em toda a malha. A saber, o preço de uma opção pouco depende do valor da volatilidade nos nós situados em pequenos valores do tempo e em preços do ativo longe do preço inicial. Portanto, existe uma região centrada em $S_{inicial}$ dentro da qual os valores da volatilidade são significantes para precificar opções e para desenvolver estratégias de *hedge*. Para a i-ésima opção, podemos denotar esta região por D_i, que está ilustrada na Figura a seguir.

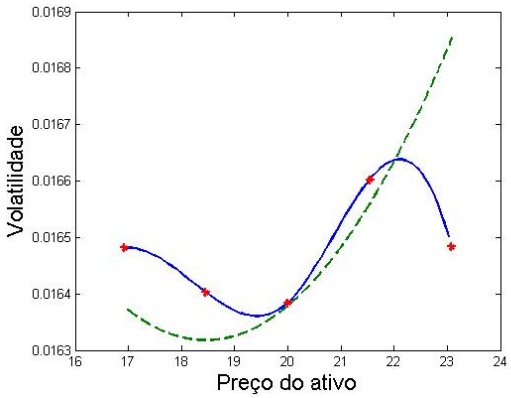


Neste contexto, o que esperamos é conseguir uma boa aproximação para a superfície de volatilidade na região $D = \cup_{i=1}^{20} D_i$.

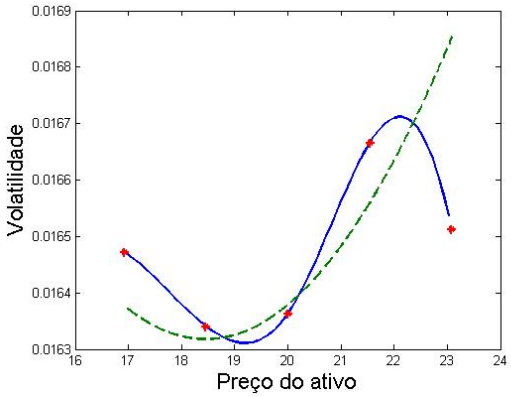
O processo pelo qual estimamos a superfície de volatilidade nos dá valores na malha e portanto discretos. A fim de conseguirmos uma função contínua com primeira e segunda derivadas também contínuas em relação ao preço S do ativo podemos interporlar estes valores por *spline* cúbico. Na Figura a seguir, estão plotados os gráficos da superfície verdadeira em tracejado e os gráficos da superfície estimada em linha contínua, que foi obtido interpolando os valores em asteríscos (pontos da malha) por um *spline* cúbico. Os domínios dos gráficos a seguir se restringem à região compreendida em $[17\ \ 23]\times[0\ \ 10]$, aproximadamente.



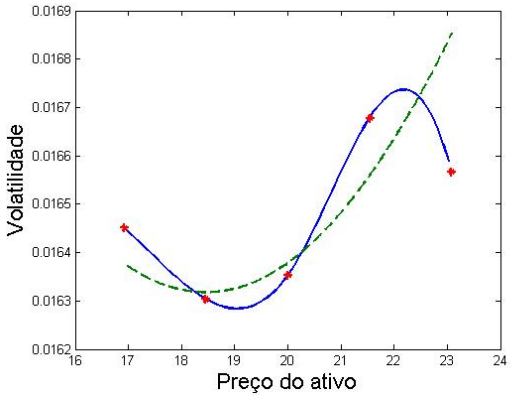
(a)



(b)



(c)

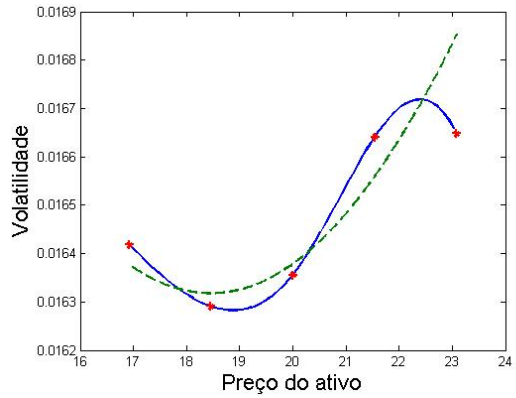


(d)

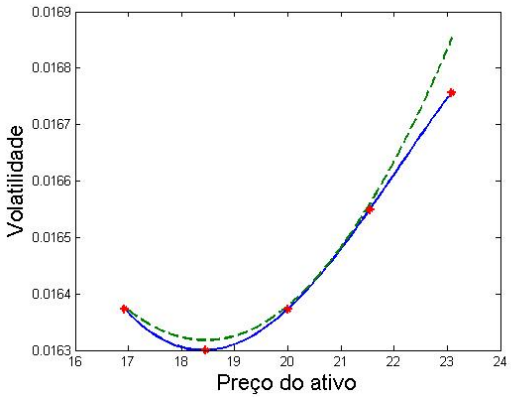
Legenda:

Volatilidade estimada

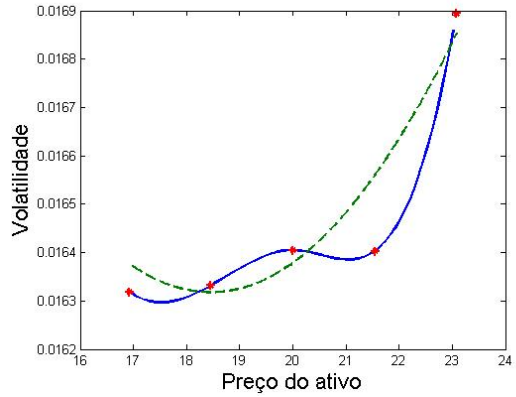
Volatilidade verdadeira



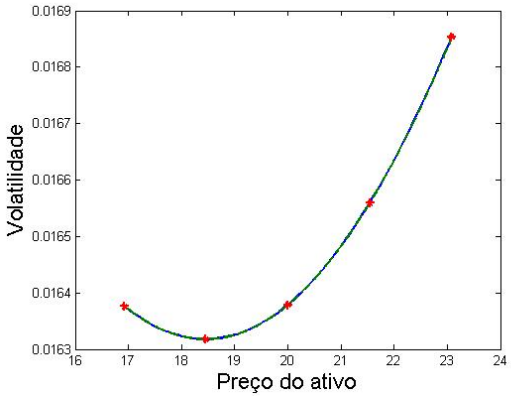
(e)



(f)



(g)



(h)

Legenda:

Volatilidade estimada

Volatilidade verdadeira

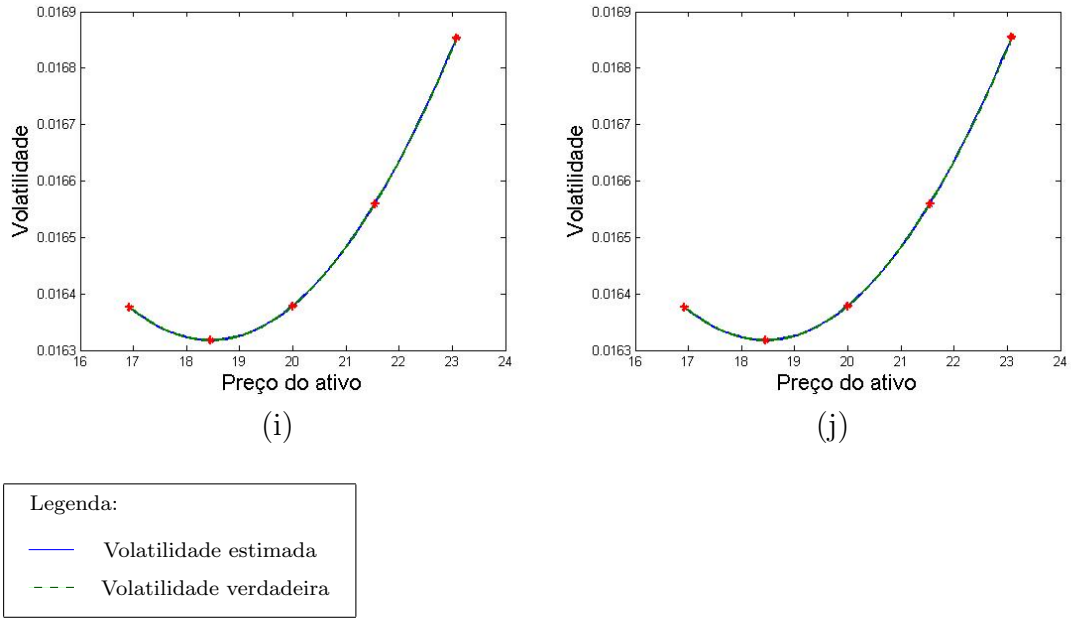
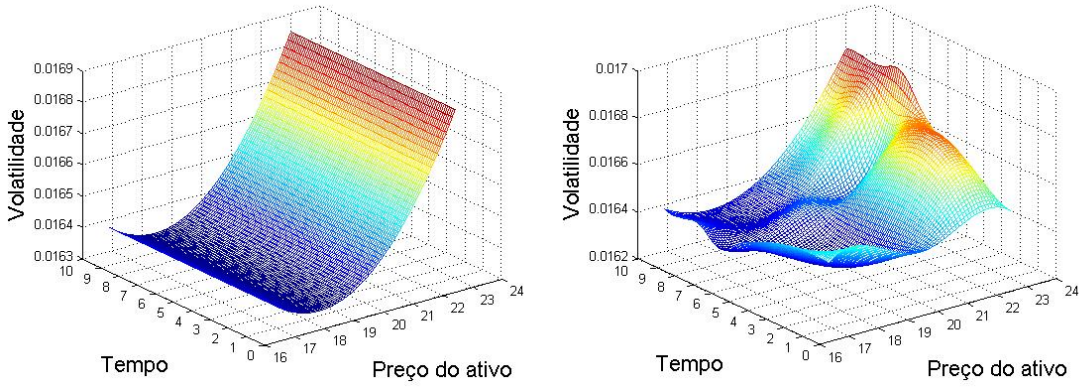


Figura 7.8: Estimativa da superfície de volatilidade no domínio [17 23] para o dia (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 4; (f) 5; (g) 6; (h) 7; (i) 8; (j) 9.

Analisando agora os gráficos da Figura 7.8, a estimativa encontrada para a superfície de volatilidade na região de interesse parece bastante razoável, ao ponto que para os dias 7, 8 e 9 a superfície estimada confunde-se com a verdadeira.

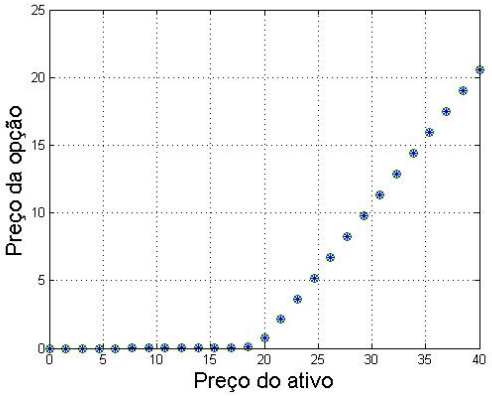
A Figura a seguir mostra a superfície de volatilidade verdadeira e a superfície de volatilidade estimada na região $[17\ \ 23] \times [0\ \ 10]$. Esta última foi obtida através da interpolação de um *spline* bi-cúbico.



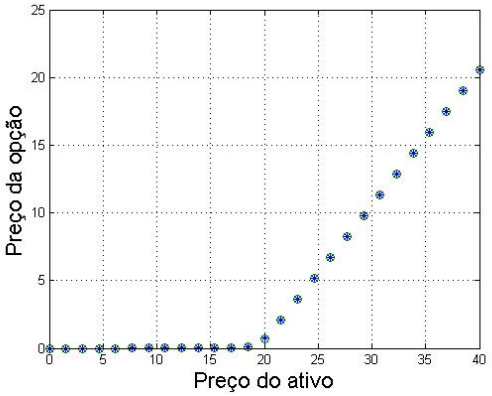
(a) (b)

Figura 7.9: A superfície de volatilidade (a) verdadeira; (b) estimada, na região $[17\ \ 23] \times [0\ \ 10]$.

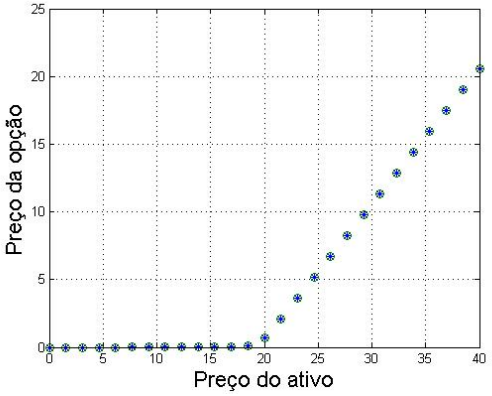
A fim de mostrar que a superfície estimada é precisa para precificar novas opções, vamos fazer a seguinte análise: considere que queremos precificar uma opção do tipo *call* do ativo base em questão com tempo de maturidade de $T = 10$ dias e preço pré-determinado de $K = 19,50$. Então determinamos para cada $0 \leq t \leq 10$ o preço da opção em função do preço do ativo através do método proposto na seção 7.4 de duas maneiras, primeiro usando a superfície de volatidade verdadeira e depois a estimada. Os resultados estão na Figura a seguir, em que os valores marcados por círculos correspondem à solução obtida usando a superfície verdadeira enquanto os marcados por asteríscos correspondem à solução obtida usando a superfície estimada.



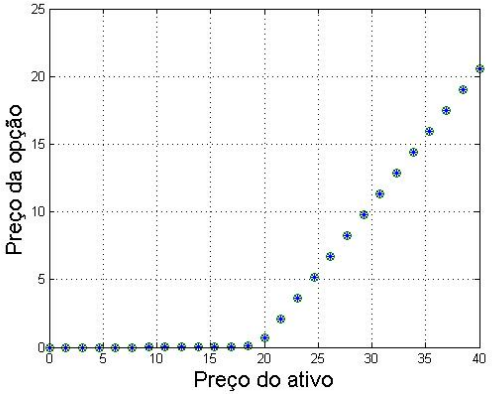
(a)



(b)



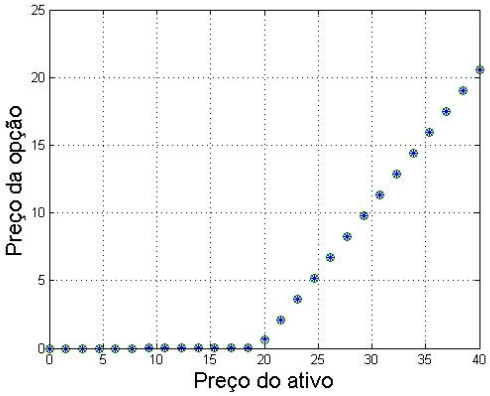
(c)



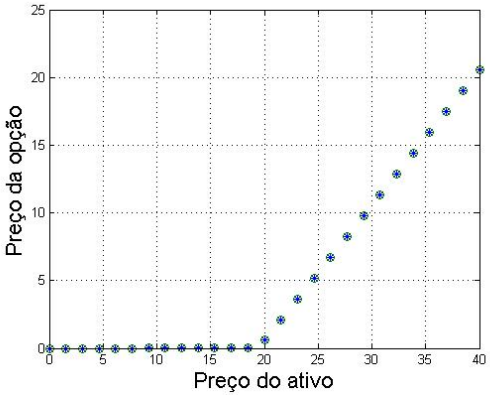
(d)

Legenda:

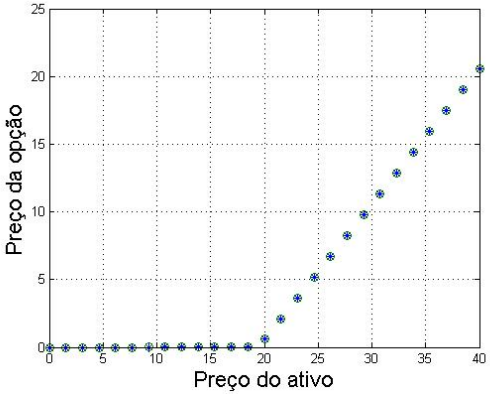
- $*$ Solução usando a superfície de volatilidade estimada
- $\circ$ Solução usando a superfície de volatilidade verdadeira



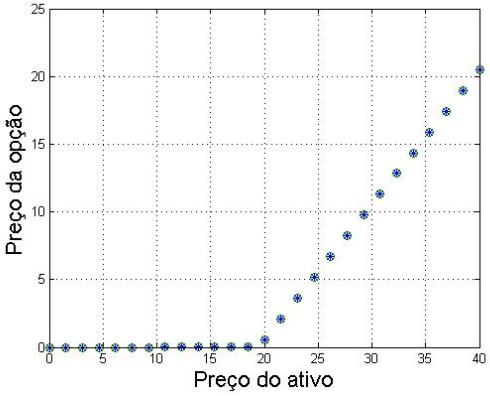
(e)



(f)



(g)

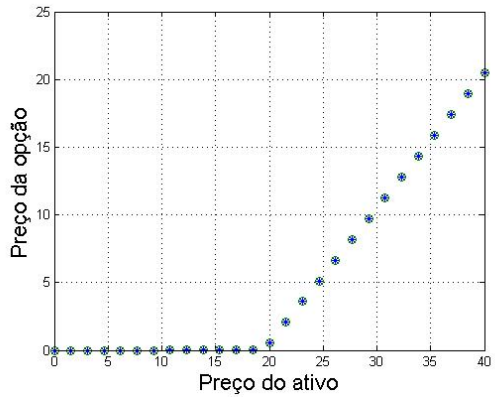


(h)

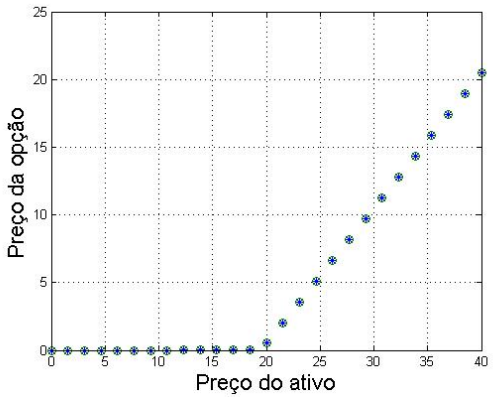
Legenda:

∗ Solução usando a superfície de volatilidade estimada

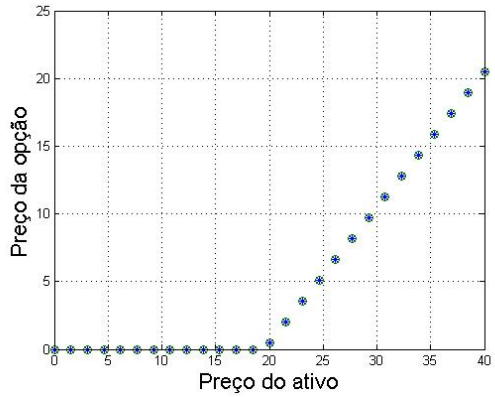
○ Solução usando a superfície de volatilidade verdadeira



(i)



(j)



(k)

Legenda:

∗ Solução usando a superfície de volatilidade estimada

○ Solução usando a superfície de volatilidade verdadeira

Figura 7.10: Preço da opção *call* europeia *versus* preços do ativo, para daqui (a) 0 dias; (b) 1 dias; (c) 2 dias; (d) 3 dias; (e) 4 dias; (f) 5 dias; (g) 6 dias; (h) 7 dias; (i) 8 dias; (j) 9 dias; (k) 10 dias.

Como pode-se notar pela Figura 7.10, os resultados obtidos ao usar a superfície

de volatilidade estimada para precificar novas opções são precisos, no sentido que são praticamente coincidentes com os valores obtidos quando se usa a superfície de volatidade verdadeira. Resultados igualmente satisfatórios são obtidos quando se deseja precificar opções do tipo *put*.

Mesmo com algumas imperfeições na estimativa, que podem ser notadas na Figura 7.9, é mais realístico e preciso utilizar esta superfície de volatilidade para desenvolver estratégias de *hedge* do que considerarmos a volatilidade como um parâmetro constante. Nesta última abordagem, a volatilidade constante que resolve o problema

$$\min_{\sigma} \quad \sum_{i=1}^{20} (\omega_i(\sigma) - \gamma(i))^2 \tag{7.17}$$

em que ω_i é o valor encontrado da i-ésima opção através do método proprosto na seção 7.4 e $\gamma(i)$ é o valor observado da i-ésima opção, é aproximadamente $\frac{0.2597}{\sqrt{252}}$[(iii)]. Isto nos fornece o seguinte gráfico para qualquer tempo t, $0 \leq t \leq \bar{T}$, para a superfície de volatilidade, em que os valores em círculos e tracejado é a superfície de volatilidade verdadeira e os valores em asteríscos e em linha contínua é a superfície de volatilidade constante:

[(iii)] Este valor foi encontrado utilizando a função *fminsearch* do Matlab com o ponto inicial $\frac{0,30}{\sqrt{252}}$. Esta função é uma implementação do método de Nelder-Mead, veja mais detalhes em [9].

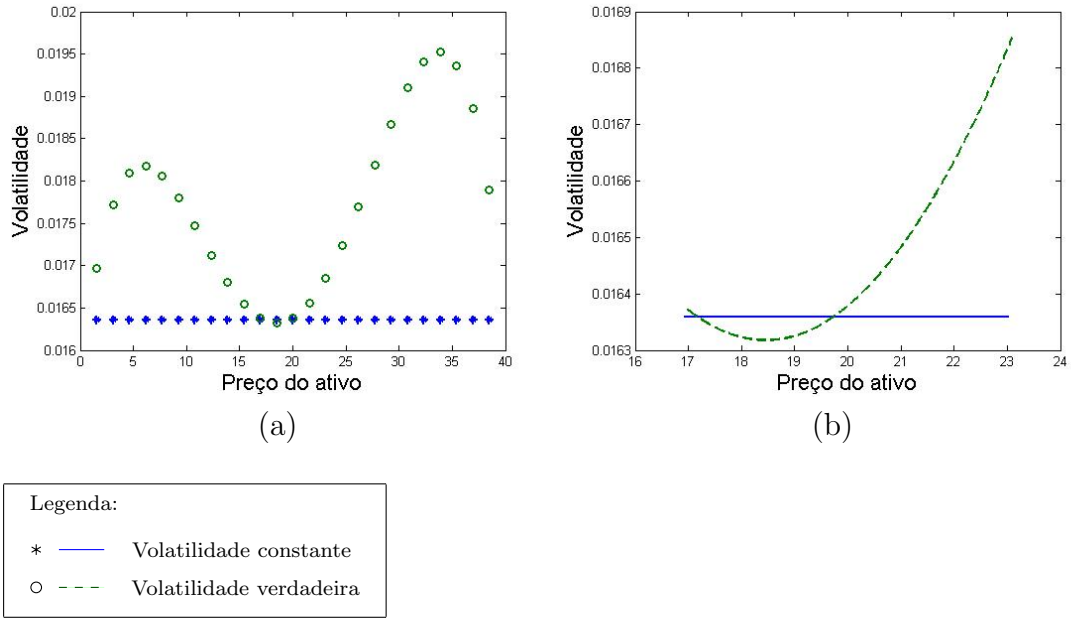


Figura 7.11: A superfície de volatilidade constante para t, $0 \leq t \leq \bar{T}$, no domínio (a) [0 40] ; (b) [17 23].

Claramente, a abordagem considerando a volatilidade constante, resulta em uma superfície de volatilidade menos precisa do que a aproximação obtida pelo método proposto.

Capítulo 8

Considerações finais e trabalhos futuros

O método baseado no Princípio da Retrodifusão, proposto na seção 7.4, para resolver a Equação de Black-Scholes Generalizada mostrou-se bastante preciso. Um exemplo ilustrando esta precisão, encontra-se na seção 7.4.1, em que precificamos uma opção europeia em que a superfície de volatilidade era constante, pois neste caso, a Equação de Black-Scholes Generalizada se reduz à Equação de Black-Scholes padrão que possui solução analítica.

Quanto ao método para estimar a superfície de volatilidade de uma ativo, apresentado na seção 7.5.2, obteve resultados localmente satisfatório. Entretanto, o método exibe uma característica não muito agradável do ponto de vista computacional. A matriz $J_F(x, \lambda)$ do sistema linear a ser resolvido a cada iteração do Método de Newton, pode ser mal-condicionada, gerando resultados imprecisos. Uma evidência disto é que no exemplo da seção 7.5.3, para alguns pontos iniciais específicos, que a princípio não é "pior" do que o utilizado para ilustrar, o Método de Newton divergiu. A dependência de um "bom" ponto inicial é algo não desejável.

O Método de Newton foi implementado dando sempre "passo 1". Talvez seja mais interessante realizar uma pequena modificação e exigir que a cada iteração o método respeite o critério de Armijo, usando para isto uma estratégia de *backtracking* para garantirmos um descenso satisfatório na norma de $F(x, \lambda)$ a cada iteração. Mais detalhes podem ser encontrados em [12]. Com esta estratégia, talvez o método torne-se mais estável e o problema comentando no parágrafo anterior seja amenizado.

Na prática, resolver o problema

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_i \sum_j (\sigma(i,j) - \tilde{\sigma})^2 \\ s.a & \text{Eq. de Black-Scholes Generalizada} \\ & \text{válida em todos os pontos da malha} \end{array}$$

significa achar a superfície de volatilidade "mais constante" que satisfaz as restrições, ou seja, que faça com que os preços das opções encontrados pelo método baseado no Princípio da Retrodifusão concorde com os preços observados. Neste sentido, os resultados obtidos no exemplo da seção 7.5.3 e ilustrados na Figura 7.7 eram esperados. Outras variantes seriam relaxar um pouco a constância da volatilidade, minimizando o desvio em relação, digamos, a linearidade, ou coisas parecidas.

A função objetivo

$$\sum_i \sum_j (\sigma(i,j) - \tilde{\sigma})^2$$

do problema de estimar a superfície de volatilidade, pode ser reescrita de forma a ficar mais elegante do ponto de vista matemático e eliminar a incógnita escalar $\tilde{\sigma}$. Para simplificar, vamos reescrevê-la como

$$f(\sigma) \equiv \sum_i^n (\sigma_i - \tilde{\sigma})^2,$$

em que n é o número de incógnitas do tipo volatilidade. O valor ótimo para $\tilde{\sigma}$ pode ser obtido derivando $f(\sigma)$ em relação a $\tilde{\sigma}$ e igualando a zero,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}(\sigma) = -2 \sum_i^n (\sigma_i - \tilde{\sigma}) = 0.$$

Portanto

$$\sum_i^n (\sigma_i - \tilde{\sigma}) = 0.$$

Agora, $\sum_i^n (\sigma_i - \tilde{\sigma}) = \sum_i^n \sigma_i - n\tilde{\sigma}$, então

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_i^n \sigma_i. \tag{8.1}$$

De fato, o valor ótimo encontrado para $\tilde{\sigma}$ no exemplo da seção 7.5.3, foi a média aritmética dos valores ótimos encontrados para as incógnitas do tipo volatilidade.

Desenvolvendo $f(\sigma)$ e usando 8.1

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \sum_i^n (\sigma_i^2 - 2\sigma_i\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2) \\ &= \sum_i^n \sigma_i^2 - 2\tilde{\sigma}\sum_i^n \sigma_i + \sum_i^n \tilde{\sigma}^2 \\ &= \sum_i^n \sigma_i^2 - 2n\tilde{\sigma}^2 + n\tilde{\sigma}^2 \\ &= \sum_i^n \sigma_i^2 - n\tilde{\sigma}^2 \\ &= \sum_i^n \sigma_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_i^n \sigma_i)^2. \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte equivalência

$$\min \sum_i^n (\sigma_i - \tilde{\sigma})^2 \equiv \min \sum_i^n \sigma_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_i^n \sigma_i)^2 \equiv \max \frac{1}{n} \frac{(\sum_i^n \sigma_i)^2}{\sum_i^n \sigma_i^2},$$

já que tanto $\sum_i^n \sigma_i^2$ quanto $\frac{1}{n}(\sum_i^n \sigma_i)^2$ são maiores que zero. Portanto, ao invés de minimizarmos $\sum_i^n (\sigma_i - \tilde{\sigma})^2$ podemos resolver o problema

$$\max \frac{1}{n} \frac{(\sum_i^n \sigma_i)^2}{\sum_i^n \sigma_i^2}. \tag{8.2}$$

A elegância de trabalhar com este problema possui uma interpretação geométrica. Temos que

$$\sum_i^n \sigma_i = \sigma^T e = \sqrt{\sum_i^n \sigma_i^2}\sqrt{\sum_i^n 1}\cos\theta,$$

em que $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ e θ é o ângulo entre os vetores σ e e. Daí

$$\cos\theta = \frac{\sum_i^n \sigma_i}{\sqrt{\sum_i^n \sigma_i^2}\sqrt{n}}$$

e portanto

$$\cos\theta^2 = \frac{1}{n}\frac{(\sum_i^n \sigma_i)^2}{\sum_i^n \sigma_i^2}$$

que é a função a ser maximizada em 8.2. Desta forma, independente das variáveis do problema, a função objetivo do problema 8.2 é adimensional e assume valores em $[0, 1]$, por se tratar do cosseno ao quadrado de um ângulo. Grosseiramente falando, esta função nos permite saber o quanto uma solução "está perto de ser constante". Afinal, ela está relacionada com o cosseno do ângulo entre o vetor de incógnitas σ e o vetor constante e, assim quanto mais próximo de 1 for o valor da função objetivo do problema 8.2, "mais constante" será o vetor solução σ associado.

Como trabalho futuro, seria iteressante analisar o impacto de estimar a superfície de volatilidade, como foi proprosto, sobre as gregas, para mais detalhes veja [8]. Aqui é suficiente falar que as gregas envolvem a sensibilidade do preço de uma opção com respeito a diferentes parâmetros. Desta forma, uma boa estimativa das gregas é fundamental para desenvolver estratégias de *hedge*.

Por fim, poderíamos investigar se, de alguma forma, é possível utilizar informações baseadas em cálculos de volatilidades implícitas no problema de obter a superfície de volatilidade, principalmente no sentido de diminuir um pouco o número de incógnitas do tipo volatilidade e de obter estimativas mais precisas.

Referências Bibliográficas

[1] T. F. Coleman, Y. Li, A. Verma; *Reconstructing the Unknown Local Volatility Function*, Journal of Computational Finance, 2,3, (1999), pp. 77-102.

[2] T. F. Coleman; *An Inverse Problem in Finance*, SIAG/OPT Views-and-News 10, 2(1999), pp. 4-8

[3] M. R. Fengler; *Arbitrage-free smoothing of the implied volatility surface*, Discussion Paper 2005-019, SFB 649, Humboldt-Universität zu Berlin.

[4] P. B. Fraletti; *Ensaios sobre taxas de juros em reais e sua aplicação na análise financeira*, Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, 2004.

[5] J. Franke, W. Härdle, C. Hafner; *Introduction to Statistics of Financial Markets*, e-book, 2005.

[6] J. Huang, J. S. Pang; *A mathematical programming with equilibrium constraints approach to the implied volatility surface of American options*, Journal of Computational Finance, 4,1, (2000), pp. 21-56.

[7] J. C. Hull; *Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções*, 4ª edição, BM&F Brasil, 2005.

[8] J. C. Hull; *Options, Futeres and Other Detivatives*, 6ª edição, Prentice Hall, 2005.

[9] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, P. E. Wright; *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*, SIAM Journal of Optimization, 9,1, (1998), pp. 112-147.

[10] M. P. Laurini; *Imposing No-Arbitrage Conditions in Implied Volatility Surfaces Using Constrained Smoothing Splines*, Sétimo Encontro Brasileiro de

Finanças, 2007, São Paulo. Anais do Sétimo Encontro Brasileiro de Finanças, 2007.

[11] J. M. Martinez; *Black-Scholes*, http://www.ime.unicamp.br/∼martinez/topicospo/blackscholes.pdf

[12] J. M. Martinez, S. A. Santos *Métodos Computacionais de Otimização*, 1ª edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[13] S. M. Ross; *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 2003.

[14] M. Ruggiero, V. L. Lopes *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*, 2ª edição, Pearson Makron Books, 1996.

[15] C. Vázquez; *An Upwind Numerical Approach for an American and European Option Pricing Model*, Applied Mathematics and Computation 97, (1998), pp.273 − 286.

[16] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne; *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, 1995.